Universidad de Costa Rica

Vicerrectoría de Docencia
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemática

Proyecto de Desarrollo Profesional Docente

Didáctica del Cálculo Diferencial e Integral

e-Book

2024

PROYECTO DE DOCENCIA

DIDÁCTICA
DEL CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

EMat Escuela de Matemática | UCR | VD Vicerrectoría de Docencia

e-Book Didáctica del Cálculo Diferencial e Integral
Editores (coordinadores del Proyecto de Docencia):
- Dr. Fabián Gutiérrez-Fallas | luisfabian.gutierrez@ucr.ac.cr
- Dr. Guillermo Ramírez-Montes | guillermo.ramirez_m@ucr.ac.cr
Departamento de Educación Matemática
Escuela de Matemática - Universidad de Costa Rica
Proyecto de Docencia - Vicerrectoría de Docencia UCR
2024

ÍNDICE GENERAL

1. INTRODUCCIÓN. 1
2. LA COMPRENSIÓN DE CONCEPTOS EN EL CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL. 3
2.1. Significados, concepciones y creencias 6
2.2. Las representaciones y su papel en la comprensión de conceptos 8
2.3. La visualización Matemática en el proceso de la comprensión de conceptos 14
2.3.1. Usos y limitaciones de la visualización 16
2.3.2. La visualización en la comprensión de los conceptos del Cálculo Diferencial e Integral. 18
2.4. Errores, Dificultades y Obstáculos 19
2.4.1. Generalidades 19
2.4.2. Errores y dificultates en el Cálculo Diferencial e Integral 20
3. INTEGRACIÓN DE LA TECNOLOGÍA EN EL CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL. 24
3.1. Generalidades. 24
3.2. La tecnología como recurso didáctico 25
3.2.1. Visualización y exploración con software matemático 25
3.2.2. Aprendizaje activo y evaluación continua 25
3.3. Resultados de la integración de la tecnología en el Cálculo 25
3.3.1. Mejora en la comprensión conceptual 25
3.3.2. Reducción en la reprobación de los cursos de Cálculo 26
3.3.3. Motivación estudiantil 26
3.4. Desafíos e implicaciones de la integración tecnológica. 26
4. RAZONAMIENTO MATEMÁTICO: SU DESARROLLO, SUS PROCESOS Y SUS IMPLICACIONES EN LA DIDÁCTICA DEL CÁLCULO 29
4.1. Conceptualización teórica del Razonamiento Matemático 29
4.1.1. Tipos de Razonamiento Matemático: Deductivo, Inductivo y Abductivo 29
4.2. Procesos de Razonamiento Matemático en el contexto de la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo 31
4.2.1. Generalización y Conjeturación 31
4.2.2. Justificación y Validación 31
4.3. Implicaciones didácticas en la enseñanza del Cálculo 32
4.3.1. Diseño de tareas para promover el Razonamiento Matemático 32

4.3.2. Acciones de la personas docente para promover el Razonamiento Matemático . 32
4.3.3. Retos y Oportunidades en el desarrollo del Razonamiento Matemático. 33
5. ENSEÑANZA EXPLORATORIA: UNA METODOLOGÍA PARA LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL. 34
5.1. Conceptualización teórica de la Enseñanza Exploratoria 34
5.2. Principios y Caracterización de la Enseñanza Exploratoria en el Cálculo. 34
5.2.1. Principios de la Enseñanza Exploratoria 34
5.2.2. Caracterización en el contexto del Cálculo 35
5.3. Principios metodológicos de una clase de Enseñanza Exploratoria 35
5.4. Los Escenarios de Aprendizaje 36
5.4.1. Principios y Elementos de los Escenarios de Aprendizaje 37
6. PROPUESTAS DIDÁCTICAS EN EL CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL . . 39
6.1. LÍMITE DE UNA FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL 40
6.1.1. Escenario de aprendizaje 40
6.1.2. Enunciado de la tarea matemática propuesta 43
6.1.3. Reflexiones profesionales de la propuesta 45
6.2. DERIVACIÓN EN UNA VARIABLE 46
6.2.1. Escenario de aprendizaje 46
6.2.2. Enunciado de la tarea matemática propuesta 48
6.2.3. Reflexiones profesionales de la propuesta 54
6.3. INTEGRACIÓN EN UNA VARIABLE 55
6.3.1. Escenario de aprendizaje 55
6.3.2. Enunciado de la tarea matemática propuesta 57
6.3.3. Reflexiones profesionales de la propuesta 64
6.4. DERIVACIÓN EN VARIAS VARIABLES 65
6.4.1. Escenario de aprendizaje 65
6.4.2. Enunciado de la tarea matemática propuesta 67
6.4.3. Reflexiones profesionales de la propuesta 71
6.5. OTRAS PROPUESTAS EN DIDÁCTICA DEL CÁLCULO EN UNA Y VARIAS VARIABLES 72
7. CONCLUSIONES 73
8. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS. 76

ÍNDICE DE FIGURAS

2.1 Teoría APOE . . . 4
2.2 Uso de representaciones Duval (2006) . . . 10

4.1 Modelo de Razonamiento Matemático . . . 32

6.1 Libro digital para la exploración de la noción de Límite . . . 44
6.2 Gráfica de funciones f y g. . . . 49
6.3 Exploración en Geogebra de la Regla de L´Hôpital . . . 49
6.4 Gráfica de función h. . . . 50
6.5 Gráfica de aceleración vrs tiempo. . . . 58
6.6 QR gráfica aceleración-tiempo . . . 59
6.7 Área bajo la curva hasta $x = 1$. . . . 59
6.8 Área bajo la curva hasta $x = 2$ . . . 60
6.9 Esbozo de gráfica de $F(x)$. . . . 60
6.10 Integral definida y aréa bajo la curva. . . . 61
6.11 Áréas bajo la curva de $f(x) = x$. . . . 62
6.12 Enunciado de la Tarea complementaria 1 . . . 72
6.13 Enunciado de la Tarea complementaria 2 . . . 72
6.14 Enunciado de la Tarea complementaria 1 . . . 72

1. INTRODUCCIÓN

El presente *e-Book* titulado ***Didáctica del Cálculo Diferencial e Integral*** surge en el marco del proyecto de docencia de la Universidad de Costa Rica, denominado *Desarrollo profesional en Didáctica del Cálculo Diferencial e Integral para personas docentes de Matemática de la UCR* (Pry01-1311-2023), coordinado por el Dr. Fabián Gutiérrez-Fallas durante el periodo 2023 y coordinado por el Dr. Guillermo Ramírez-Montes durante el periodo 2024.

Este proyecto fue concebido para promover el desarrollo de habilidades didáctico-matemáticas en docentes universitarios de la Escuela de Matemática de la UCR, con énfasis en el Cálculo Diferencial e Integral. Dada su importancia en la formación matemática avanzada, estas áreas constituyen pilares fundamentales para disciplinas como la Ingeniería, Ciencias de la Salud y Economía, donde el Cálculo se convierte en una herramienta indispensable para el análisis y resolución de problemas complejos.

En este sentido, se ha definido como objetivo principal del proyecto de docencia fortalecer las competencias de las personas docentes en el diseño y gestión de clases efectivas, así como en la creación de tareas y recursos didácticos que faciliten la enseñanza del Cálculo. La intención es mejorar la comprensión de conceptos esenciales, tales como la noción de función, continuidad, límites, derivación e integración, mediante estrategias didácticas que fomenten el desarrollo de un *Pensamiento Matemático Avanzado*. Lo anterior, considerando que el Cálculo no solo se enseña como un conjunto de técnicas, sino como una vía para que las personas estudiantes desarrollen habilidades analíticas y de razonamiento matemático.

La enseñanza del Cálculo Diferencial e Integral ha sido históricamente un reto en la educación matemática Universitaria, dada la abstracción y complejidad de los conceptos involucrados. A pesar de los avances en la Didáctica de la Matemática, los cursos de Cálculo continúan presentando altos índices de reprobación y deserción en muchas instituciones. Esto pone en evidencia la necesidad de explorar y adoptar enfoques didácticos innovadores que permitan a las personas estudiantes no solo aprender técnicas, sino también comprender las bases conceptuales que sustentan el Cálculo. Asimismo, la incorporación de la tecnología en la enseñanza de estos conceptos ha demostrado ser efectiva para facilitar la visualización y exploración de ideas complejas, permitiendo a las personas estudiantes interactuar de manera más activa con los contenidos matemáticos.

Este proyecto se llevó a cabo en un contexto de creciente demanda de apoyo didáctico para enfrentar los desafíos educativos en el Cálculo Diferencial e Integral. Los participantes inmediatos fueron personas docentes de la Escuela de Matemática de la UCR, quienes, a través de un curso de docencia y actividades formativas, profundizaron en enfoques metodológicos, didácticos y la integración de recursos como la tecnología, enfatizandose una enseñanza del Cálculo exploratoria centrada en la persona estudiante. Este contexto es particularmente relevante, pues la actualización y profesionalización de las personas docentes en metodologías activas es fundamental para lograr una enseñanza que atienda las necesidades cognitivas y afectivas de las personas estudiantes en el aprendizaje de temas complejos.

El *e-Book* está estructurado en varias secciones, cada una dedicada a temas clave en la didáctica del Cálculo Diferencial e Integral:

1. **La comprensión de conceptos en el Cálculo Diferencial e Integral**: Explora el Pensamiento Matemático Avanzado en la comprensión de conceptos como límite y continuidad, con un enfoque en representaciones y visualización, esenciales para construir una comprensión relacional.

2. **Integración de la Tecnología**: Analiza el impacto de herramientas digitales en el aprendizaje del Cálculo, como GeoGebra. Esta sección presenta beneficios, tales como la visualización y exploración de conceptos matemáticos, así como los desafíos inherentes a la implementación de estas herramientas en el aula.

3. **Razonamiento Matemático**: Aborda el desarrollo de los razonamientos deductivo, inductivo y abductivo en el Cálculo, incluyendo procesos como la generalización y la justificación, aspectos centrales para fomentar un pensamiento matemático profundo y aplicable.

4. **Enseñanza Exploratoria**: Presenta una caracterización de los principios que orientan una metodolgía denominada Enseñanza Exploratoria y su aplicabilidad en el Cálculo a través de la planificación, diseño y ejecución de escenarios de aprendizaje.

5. **Propuestas Didácticas**: Presenta escenarios de aprendizaje y tareas matemáticas en temas específicos como límites, derivación e integración, incluyendo resultados de implementación y reflexiones sobre los retos didácticos observados en su aplicación.

De esta forma, este *e-Book* pretende ser no solo un recurso académico, sino también un referente para la formación continua de docentes universitarios en el área del Cálculo Diferencial e Integral, contribuyendo a una enseñanza que promueva la comprensión profunda, la aplicabilidad y la relevancia de los conceptos matemáticos fundamentales.

2. LA COMPRENSIÓN DE CONCEPTOS EN EL CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Para Skemp (1976) existen dos formas de comprender los conceptos matemáticos: la comprensión instrumental o la comprensión relacional. El autor se refiere a *la comprensión instrumental* como aquella que prioriza la memorización de hechos, reglas y normas preestablecidas, promovida por una enseñanza cerrada que guía cada paso del individuo hasta alcanzar el resultado deseado; es decir, enfocada en el producto final del aprendizaje. Mientras que, *la comprensión relacional* consiste en construir una estructura o esquema conceptual en el que la persona estudiante pueda producir un número ilimitado de planes e ideas para fundamentar sus acciones en el proceso de aprendizaje. Esta comprensión puede estar motivada por ideas innovadoras como juegos, resolución de problemas, tareas tecnológicas, modelación matemática; de modo que promuevan estrategias dinámicas que potencialicen el desarrollo de habilidades y destrezas en los individuos y que se utilicen en diferentes contextos, ya sea en Matemática o en otras disciplinas.

Esta idea de considerar dos formas de comprensión, una más superficial o desarticulada y otra más profunda o integrada, se relaciona con la posición de Gray y Tall (1991, 1994) sobre los tipos de pensamiento que llevan a un individuo a comprender un determinado concepto matemático. Para estos autores, la representación simbólica que se le atribuye a un determinado concepto tiene dos significados; por un lado, el simbolismo lleva a pensar en un proceso (algorítmico, operacional, analítico, entre otros); y por otro, representa el objeto matemático en sí (definición).

De esta forma, estos autores definen *procepto* como "la combinación de proceso y concepto, en la que proceso y producto están representados por un mismo simbolismo. Así, el símbolo de un procepto puede evocar un proceso o un concepto" (Gray & Tall, 1991, p. 73). Por tanto, los autores afirman que los individuos más capaces; es decir, los que tienen mayor comprensión del concepto, son aquellos que interpretan la representación simbólica de manera flexible considerando su ambigüedad, pues, los individuos tienen una comprensión más completa y profunda cuando combinan el pensamiento procedimental y el pensamiento conceptual sobre el objeto matemático.

Los autores definen esta combinación como *pensamiento proceptual*: "Caracterizamos el pensamiento proceptual como la capacidad de manipular con flexibilidad el simbolismo como un proceso o como un concepto, libremente intercambiable entre diferentes simbolismos para el mismo objeto" (Gray & Tall, 1994, p.121). Agregan, además, que los resultados de su trabajo (Gray & Tall, 1994) revelan que los individuos tienen dificultades para comprender los conceptos cuando su pensamiento se limita únicamente al proceso, tratando la representación simbólica de forma desarticulada y separada del concepto referente al objeto matemático.

Veamos ahora un ejemplo, en el caso del concepto de *función real de variable real*, Sajka (2003) y Sfard (1991) consideran que el concepto de función tiene una naturaleza dual, en el sentido de que su comprensión implica reconocer la función de dos formas que constituyen una unidad coherente: (i) estructuralmente, como objeto; y (ii) operativamente, como proceso. Por ejemplo, una función es un conjunto de pares ordenados que a través de su fórmula (criterio o ley relacional) conduce a un proceso de cálculo de valores o a un procedimiento para dibujar su gráfica (Sfard, 1991).

Como se ha mencionado anteriormente, en sus inicios, la comprensión de los conceptos del Cálculo Diferencial e Integral tuvo su lugar en un período de transición entre el *Pensamiento Matemático Elemental* y el *Pensamiento Matemático Avanzado* (Fernández-Plaza et al., 2013; Jaffar & Dindyal, 2011). La teoría APOS (*Actions-Processes-Objects-Schemas*) o APOE (*Acciones-Procesos-Objetos-Esquemas*) desarrollada en el trabajo de Dubinsky (1991) y Asiala et al. (1996) en el contexto del Pensamiento Matemático Avanzado considera que:

> La comprensión de un concepto matemático comienza con la manipulación de objetos físicos o mentales previamente construidos para formar acciones, las acciones se interiorizan para formar procesos que se encapsulan para formar objetos. Los objetos se pueden desencapsular de nuevo al proceso a partir del cual se formaron. Finalmente, las acciones, procesos y objetos pueden organizarse en esquemas (Asiala et al., 1996, p. 6).

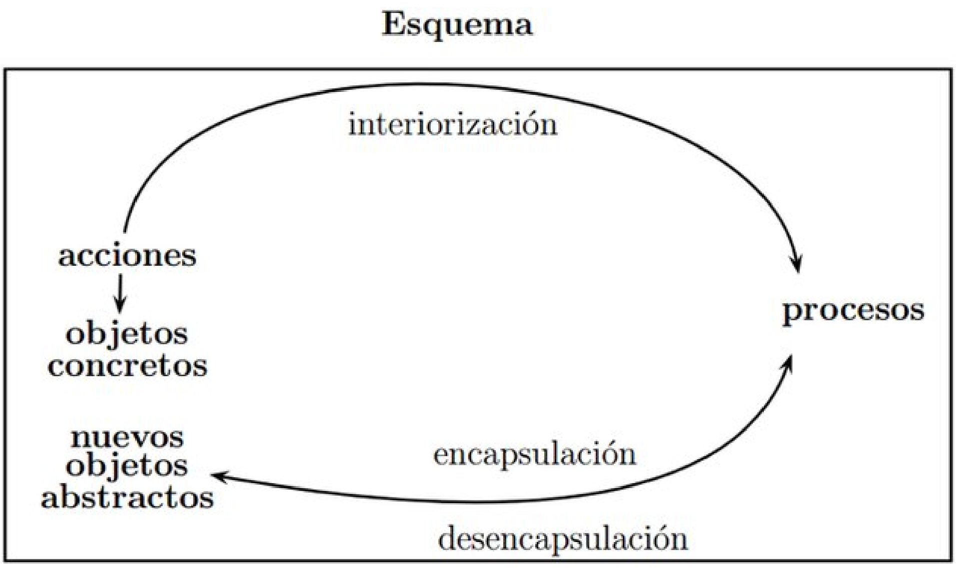


Figura 2.1: Teoría APOE

En esta teoría, una *acción* es cualquier transformación física o mental de los objetos como resultado de una respuesta a estímulos externos que el individuo percibe, como recordar un acto de memoria. Cuando se repite una acción y el individuo reflexiona sobre esa acción de tal manera que ya no necesita estímulos externos, entonces puede hacer una construcción mental llamada proceso. Un *proceso* es una transformación de un objeto que tiene la importante característica de que el individuo tiene el control de esa transformación, en el sentido de describir y reflexionar sobre todos los pasos del procedimiento sin tener que hacerlos. Un *objeto* se construye a través de la encapsulación de un proceso, lo que se logra cuando el individuo percibe la totalidad del proceso y qué transformaciones pueden operar sobre ese objeto, siendo importante que el individuo sea capaz de avanzar y retroceder entre un objeto y un proceso. Finalmente, un *esquema* para un determinado concepto matemático corresponde al conjunto de acciones, procesos y objetos vinculados por unos principios generales que existen en la mente del individuo y pueden ser aplicados en una situación problemática que involucre al concepto.

Veamos un caso en particular de acciones, procesos, objetos y esquemas. El trabajo de Cottrill, Dubinsky, Nichols, Schwingendorf y Vidakovic (1996) busca comprender el concepto de límite desde un esquema de procesos coordinados. Este esquema consiste en que el concepto de límite, desde su definición informal y dinámica, implica el cálculo de una infinidad de pasos, los cuales sólo pueden ser entendidos a través del diseño de un proceso. Así, el individuo que no va más allá de la acción de calcular un número finito de valores próximos a la respectiva abscisa tiene noción de la aproximación de una variable a una cantidad fija, pero estas acciones no se interiorizan en un proceso. Los autores señalan que esta internalización de acciones es compleja en el sentido de que la internalización no debe conducir a un solo proceso, sino a un par de procesos coordinados que conforman el esquema: un proceso que describe lo que sucede en el dominio y otro en relación a la que tiene lugar en el rango de la función. Una vez logrado esto, el individuo procede a encapsular estos procesos coordinados en un objeto, el cual le servirá para cuantificar el valor umbral y entender qué representa este valor.

Otra teoría que busca explicar cómo evoluciona la comprensión de un concepto a partir de las acciones del individuo sobre los objetos y procesos es la denominada por Tall (2004a, 2004b) como la *teoría de los tres mundos*, partiendo del hecho de que no sólo hay tres distintos tipos de conceptos matemáticos (geométricos, simbólicos y axiomáticos), sino tres tipos diferentes de desarrollo cognitivo que aluden a tres mundos matemáticos y metacognitivos diferentes. En cuanto al primer mundo, el autor explica que surge de nuestra percepción del entorno, constituido por nuestra forma de pensar sobre las cosas que percibimos, no solo en el mundo físico sino también en nuestro propio mundo mental, centrándonos en la idea de realización conceptual, que se refiere a la forma en que construimos nociones más sofisticadas a partir de experiencias sensoriales. Este mundo es llamado por el autor como *mundo personalizado/personificado*. El desarrollo cognitivo de este mundo sobre la concepción de la verdad de los objetos parte de la noción de que la verdad se establece a través de la experimentación; es decir, que si la experiencia produce el resultado esperado, entonces es verdadera.

A medida que evolucionan las acciones en este mundo, las propiedades de los símbolos y su uso adquieren mayor protagonismo, dando lugar a un nuevo mundo, denominado *mundo conceptual*. Aparece como el mundo de los símbolos que se utilizan en el cálculo infinitesimal y para la manipulación aritmética o algebraica. Este mundo se desarrolla a través de una secuencia de diferentes contextos que, en varias ocasiones, requieren reconstrucción a partir de experiencias previas. El desarrollo cognitivo de la verdad, en este caso, está ligado al cálculo numérico y la manipulación algebraica de los símbolos, siendo estos procesos los que permiten comprobar la verdad.

Finalmente, se define el *mundo formal*, el cual se basa en propiedades expresadas a través de definiciones formales que se utilizan como axiomas para especificar estructuras matemáticas, como: grupo, campo, espacio topológico, entre otras. En este mundo no se trabaja con objetos familiares resultantes de la experiencia, sino con objetos deducidos a través de pruebas formales. Consiste, por tanto, en el mundo donde se construye una teoría coherente y lógicamente deducida. De esta forma, el desarrollo cognoscitivo de la verdad se establece con pruebas formales axiomáticas. Finalmente, el autor argumenta que se evidencia en el hecho de que cada mundo crece en sofisticación y las personas estudiantes toman diferentes caminos a través de estos mundos, evidenciando su comprensión del concepto. En síntesis, es importante considerar que a lo largo de estos caminos ocurren diferentes eventos que provocan un progreso o fracaso significativo en el aprendizaje de la persona estudiante, dependiendo de su viaje de un mundo a otro.

Veamos ahora un ejemplo, en el estudio de Juter (2007), la autora entrelaza aspectos relativos al desarrollo del concepto de límite con esta teoría de los tres mundos de la Matemática. Según la autora, el concepto de límite puede manipularse inicialmente a través de un enfoque exploratorio intuitivo, con tablas de valores de una función y su gráfica (mundo personalizado), ocurriendo luego el uso de entidades expresadas simbólicamente (mundo proceptual) y por último consideramos la definición formal del concepto (mundo formal). En su trabajo empírico realizado con estudiantes de primer semestre de Matemática en la Universidad Tecnológica de Luleå, en Suecia, la autora buscó comprender "*¿Cómo se desarrollan las personas estudiantes con respecto al concepto de límites de función en el nivel universitario básico en Suecia?*" (Juter, 2006, p. 11). Como resultados de este estudio, se obtuvo que cuando las representaciones intuitivas del concepto de límite no están suficientemente desarrolladas en el mundo personalizado, provocan algunas ideas erróneas que dificultan la comprensión del concepto. Además, observó que en la mayoría de las personas estudiantes la comprensión del concepto de límite evolucionó durante el trabajo realizado en la disciplina, pero sin llegar con éxito al mundo formal; es decir, las personas estudiantes no lograron comprender la definición formal de límite.

2.1 Significados, concepciones y creencias

Tall y Vinner (1981) presentan un marco teórico para analizar el desarrollo de la comprensión de las personas estudiantes. Para ello, estos autores comienzan definiendo varios términos.

Un primer término es el *concepto-imagen*, el cual se refiere a la estructura cognitiva total que se asocia con el concepto en cuestión y que incluye las imágenes mentales, propiedades y procesos relacionados con él. Este concepto-imagen se construye a través de múltiples experiencias, cambiando según los nuevos estímulos y la madurez cognitiva del individuo.

Asociado a este término viene el *concepto-imagen evocado*, que es la parte del concepto que es activada en un momento dado por un estímulo específico. Al respecto, los autores señalan que en diferentes momentos se pueden evocar imágenes contradictorias sobre un mismo concepto.

En la teoría expuesta se utiliza también el término *concepto-definición*, que hace referencia al conjunto de palabras o símbolos que se utilizan para especificar y comunicar las ideas que rodean al concepto. Esta definición puede aprenderse de memoria o por reconstrucción personal de una definición formal, lo que puede causar que el concepto-definición sea diferente de la definición formal matemáticamente aceptada. Estos términos pueden relacionarse en un contexto de poca significación para la persona estudiante, donde la persona docente define formalmente un concepto matemático, pero las actividades de clase están orientadas principalmente a que la persona estudiante utilice un concepto-imagen que, aunque sea inadecuado, sea capaz de resolver las tareas propuestas. En este caso, el concepto-definición es una parte inactiva en la estructura cognitiva de la persona estudiante.

Dentro de estas propuestas, los autores definen *factor de conflicto potencial* como parte del concepto-imagen que entra en conflicto con otra parte de la imagen del mismo concepto o con su definición formal. También añaden que las personas estudiantes que tienen un factor de conflicto potencial en su concepto-imagen pueden desarrollar confianza en sus propias interpretaciones del concepto hasta el punto de considerar la teoría formal como inoperante en la resolución de tareas.

Estas ideas teóricas han sido la base de referencia en varias investigaciones sobre el concepto de límite y continuidad (Domingos, 2003; Juter, 2007; Nair, 2010; Prezenioslo, 2004). Por ejemplo, Prezenioslo (2004), en su estudio con estudiantes universitarios de Polonia, buscó determinar los conceptos-imagen del límite en relación con las asociaciones, concepciones e intuiciones que las personas estudiantes tienen sobre este concepto. Así, además de considerar los términos propuestos por Tall y Vinner (1981), define otros como asociación, intuiciones, eficiencia, degeneración y elemento clave. Por asociación se entiende la conexión que se hace en la mente entre diferentes ideas u objetos. Las intuiciones se refieren a las concepciones que algún individuo considera obvias sobre un determinado concepto, las cuales pueden ser incompatibles con el significado matemático aceptado. La eficiencia se relaciona con el concepto-imagen eficiente cuando la persona estudiante es capaz de utilizar su concepto-imagen con éxito en la resolución de problemas. Por otro lado, la degeneración del concepto matemático se define cuando la imagen-concepto es inadecuada y difícil de corregir durante el aprendizaje de la persona estudiante. Finalmente, el elemento clave de la imagen es el elemento más significativo que la persona estudiante utilizó para resolver tareas o resolver situaciones complejas.

También Domingos (2003), con base en los datos empíricos recogidos en su estudio desarrollado con estudiantes universitarios de Portugal, caracterizó tres niveles de complejidades sobre el concepto-imagen de las nociones iniciales del Cálculo Infinitesimal (límites, derivadas, integrales), que son: concepto-imagen incipiente, concepto -imagen instrumental y concepto-imagen relacional. El *concepto-imagen incipiente* es el nivel en el que se agrupan imágenes muy incompletas, refiriéndose a objetos elementales que por sí solos no traducen el concepto pretendido. La mayoría de las veces, se refieren solo a algunas de las características más notorias del objeto matemático. Mientras que en el nivel *concepto-imagen instrumental* incluye el uso de algunos objetos matemáticos que están en la base del concepto en estudio. Hay algunos objetos más complejos que están en la base de los conceptos abordados, siendo posible establecer procesos que pueden conducir a la construcción de nuevos conceptos. Es posible identificar algunos procesos realizados sobre estos objetos, pero existe una falta de coordinación entre ellos para que puedan ser encapsulados en nuevos objetos. En el último nivel, *concepto-imagen relacional*, se refiere a imágenes que se abordan estructuralmente; es decir, como objetos matemáticos con existencia propia más allá de los procesos que estaban en su origen, pudiendo las personas estudiantes recurrir a estos procesos cuando sea necesario. En este nivel, es posible ver los conceptos como objetos matemáticos y como procesos.

Por otro lado, para Jaffar y Dindyal (2011), la comprensión de los conceptos consiste en la interpretación de sus significados, por lo que cada individuo tiene su propia interpretación que implica la traducción de significados para sí mismo, siendo un hecho relativo e indeterminado. Esta interpretación consiste en identificar los aspectos esenciales o características de interés y concebirlos como un todo para que estén disponibles como una entidad para pensar (Gray & Tall, 2007). Según Mata-Pereira y Ponte (2012) estos procesos de significación son los que permiten establecer las conexiones necesarias para formular, contrastar y justificar conjeturas y, al mismo tiempo, percibir cómo el concepto se relaciona con otros conceptos y su aplicación en diferentes contextos, considerando que "comprender los modos de interpretación y razonamiento de las personas estudiantes sólo es posible observando sus representaciones" (p. 85).

2.2 Las representaciones y su papel en la comprensión de conceptos

Los *Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares* (NTCM, 2007) establecen que las personas estudiantes deben ser capaces de usar el lenguaje y los símbolos matemáticos correcta y apropiadamente para comunicar sus ideas, tanto por escrito como oralmente. Estos estándares enfatizan que a medida que aumentan los conocimientos matemáticos de las personas estudiantes y su capacidad para usar una amplia gama de representaciones matemáticas, tendrán un mayor poder matemático que les ayudará a establecer conexiones con otras áreas de la ciencia.

> A medida que las personas estudiantes se vuelven más competentes matemáticamente, desarrollan un repertorio cada vez mayor de representaciones matemáticas, aprendiendo cómo usarlas productivamente. Este conocimiento incluye la selección de representaciones específicas, con el propósito de extraer información específica o lograr ciertos fines (NTCM, 2007, p. 422).

Hay varios autores que definen *representación matemática*. Para Goldin (1998) una representación es cualquier configuración o relación de caracteres, imágenes u objetos concretos que representan algo. Castro y Castro (1997) afirman que "las representaciones son las notaciones simbólicas o gráficas, propias de cada noción, a través de las cuales se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos, así como sus características y propiedades más relevantes" (p. 96). Para Mata-Pereira y Ponte (2012) una representación se define como una configuración que puede utilizarse para reemplazar, sugerir o simbolizar un objeto. Mientras, Henriques y Ponte (2014) posicionan las representaciones matemáticas como recursos que permiten comprender los procesos de razonamiento de las personas estudiantes y como herramientas que aumentan su capacidad de pensar; enfatizando además su relevancia en la comunicación de ideas matemáticas.

Gómez (2007) considera un sistema de representación como un registro de reglas que permiten identificar o crear signos para operar con ellos y concluir las relaciones que se pueden determinar con ellos, clasificándolos en: simbólico, algebraico, verbal y gráfico. En este contexto, Goldin (1998) indica que estos sistemas de representación están constituidos por dos estructuras: *una estructura intrínseca*, donde las reglas operan dentro del propio sistema, y *una estructura extrínseca*, en la que se establecen relaciones con otros sistemas de representación. En este sentido, el autor destaca la importancia de que el individuo reconozca y haga uso de la estructura extrínseca para profundizar en la comprensión del objeto representado, lo que también defiende Tripathi (2008) al afirmar que "diferentes representaciones matemáticas de un concepto resaltan diferentes aspectos de su estructura, que se complementan en el sentido de entender ese mismo concepto" (p. 438).

Respecto al uso de las representaciones, la NTCM (2007) recomienda que las personas estudiantes "elaboren y utilicen representaciones para organizar, registrar y comunicar ideas matemáticas; seleccionar, aplicar y traducir representaciones matemáticas para resolver problemas; usar representaciones para modelar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos" (p. 160). A lo que Stylianou (2011) asigna a las representaciones las funciones de comprender, registrar, explorar, verificar y evaluar. Argumentando que las personas estudiantes deben familiarizarse con una variedad de representaciones para que puedan usarse con flexibilidad, desarrollando la capacidad de traducir dentro y entre diferentes representaciones, seleccionando las representaciones apropiadas para situaciones específicas y como un medio para facilitar su comprensión matemática. Esta experiencia que viven las personas estudiantes en el aula de

Matemática, a través de la manipulación y el uso flexible de representaciones, trasciende la tarea de aprendizaje que están resolviendo, desarrollando habilidades que alcanzan el futuro cotidiano, familiar y académico del individuo.

Desde el punto de vista de Duval (2006), las representaciones juegan un papel importante en la comprensión de los conceptos matemáticos, pero generalmente se interpretan como productos, externos y alejados de la comprensión del conocimiento matemático. En su trabajo, el autor menciona que existen dos tipos de transformaciones para las representaciones semióticas: las conversiones y los tratamientos, que corresponden a los procesos cognitivos fundamentales del pensamiento matemático durante la resolución de una tarea. Los *tratamientos* consisten en transformaciones dentro de un mismo sistema de representación, como la resolución de una ecuación (tratamiento dentro del sistema simbólico-algebraico), mientras que las *conversiones* (explícitas o implícitas) son transformaciones entre sistemas de representación, transformando la representación de un objeto, situación o información dada en un sistema dado en otra representación dentro de otro sistema de representación. Un ejemplo de conversiones es el paso de una descripción o una relación en lenguaje natural (sistema de representación verbal) a notación algebraica (sistema simbólico-algebraico).

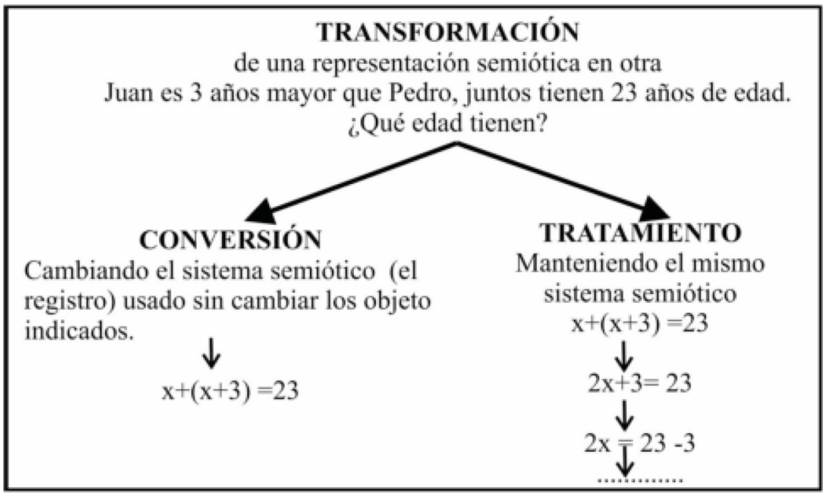


Figura 2.2: Uso de representaciones Duval (2006)

En la conversión, el proceso de asociar un enunciado a una representación visual puede jugar dos roles: como recurso para tener en cuenta todos los elementos que se relacionan o como heurística para encontrar el fundamento teórico que sustente la resolución de la tarea. Sin embargo, la conversión no debe reducirse a codificar la información. Duval considera que la resolución de una tarea y las actividades matemáticas realizadas por la persona estudiante se caracterizan por tener; por un lado, el contenido matemático conceptual no semiótico y; por otro lado, las representaciones semióticas que se pueden elegir según necesidad, comunicación o tramitación. Considerando el contenido matemático como un objeto mental y las representaciones como externas al objeto matemático, la conversión sería resultado de la comprensión conceptual y cualquier dificultad en este proceso de transformación sería producto de concepciones erróneas; pues “el problema que la mayoría de las personas estudiantes encuentran es tan profundo que la conversión puede ser considerada como la puerta de la comprensión” (Duval, 2006, p. 149).

La enseñanza y el aprendizaje de conceptos en Cálculo Diferencial e Integral se caracterizan por el uso de varios tipos de representaciones. Tall (1992) afirma que, en esta área de la Matemática, se suele seguir un enfoque mediante tres representaciones -gráfica, numérica y simbólica- y, siempre que sea posible, se deben enseñar los conceptos utilizando todas ellas y su articulación. En esta posición, el autor considera que “los matemáticos se centran selectivamente en la representación más útil, pero el movimiento versátil entre representaciones es más importante y cognitivamente más ventajoso que centrarse en tres representaciones a la vez” (Tall, 1992, p. 21).

Esta posición que promueve que la enseñanza del Cálculo Diferencial e Integral debe contemplar las diferentes representaciones de los objetos matemáticos también es defendida por otros autores. Por ejemplo, Karatas et al. (2011) señalan que el docente no debe limitarse al uso de representaciones algebraicas, sino también incluir y tener en cuenta las representaciones geométricas de estos objetos y las representaciones intuitivas que las personas estudiantes tienen sobre los conceptos en cuestión. En concreto, en lo que respecta al concepto de límite de una función, Pons et al. (2011) indican que este concepto se ha desarrollado a partir de ideas intuitivas, expresadas verbalmente (Fernández-Plaza et al., 2013; Jaffar & Dindyal, 2001), seguido de aproximaciones numéricas, para luego utilizar estrategias algebraicas y finalmente ejemplificar a través de representaciones gráficas.

De acuerdo con esto y con las investigaciones empíricas consultadas, existen tres tipos de representaciones involucradas en la comprensión de los conceptos del Cálculo Diferencial e Integral: (i) *representaciones verbales*, utilizadas para expresar ideas, generalmente en discusiones colectivas dentro del aula o mediante el uso del lenguaje natural en justificaciones escritas durante la resolución de tareas; (ii) *representaciones simbólicas*, que incluyen el uso de expresiones numéricas o algebraicas; y (iii) *representaciones geométricas*, como gráficos de funciones.

Representación Verbal. Los estudios que han considerado esta representación (por ejemplo, Fernández-Plaza et al., 2013; Jaffar & Dindyal, 2001) intentan describir cómo las personas estudiantes expresan verbalmente sus concepciones intuitivas, a partir de términos que forman parte de su vida cotidiana antes de ser presentados a conceptos formales en la disciplina de las matemáticas.

En la representación verbal de estos conceptos se utilizan términos para definir, describir un proceso o comunicar una respuesta, todo ello expresado oralmente. En este sentido, términos como función, límite, punto, aproximación, imagen, continuidad, continuo, alcance, lateral, vecindad, derivación, integral, entre otros.

Así, Fernández-Plaza et al. (2013) consideran diferentes connotaciones de la palabra *término* en el contexto de las representaciones verbales, así como lo que se entiende por uso y significado de un término. Los autores definen término como una palabra que tiene un significado válido en la disciplina o en el contexto particular; *término específico*, utilizado dentro de una sola disciplina o área de conocimiento; *término común*, usado en varias disciplinas pero con diferente significado; *término importado*, palabra adoptada del vocabulario general o coloquial; y *término efectivo*, que se refiere a las palabras utilizadas por las personas estudiantes que coinciden con un término específico en la disciplina. Agregan que el uso de un término significa el *sentido* en que se usa el término dentro de un contexto dado, ya sea matemático o cotidiano; y el *significado* del término consiste en la interpretación del término a través de un sistema de representación y los fenómenos asociados a él.

Representación Simbólica. En el trabajo de Pons et al. (2011) los resultados obtenidos revelan que la representación numérica determina el inicio del desarrollo del proceso de coordinación entre el dominio y codominio de una función durante la aproximación de valores a un punto fijo del dominio. Se concluye que la representación numérica juega un papel importante en la coordinación de estos procesos de aproximación, además de ser un paso previo a la manipulación de la representación algebraica, permitiendo a la persona estudiante tomar conciencia de la existencia o no del límite.

En este sentido, los números se utilizan como símbolos que permiten descubrir el comportamiento de las imágenes a partir de las aproximaciones que se realizan en la vecindad del valor fijo de la abscisa donde se quiere calcular el límite de la función. En este tratamiento numérico de una función, la aproximación se considera como un proceso acotado y finito (Moru, 2009).

Otra representación simbólica que se utiliza comúnmente en la enseñanza y aprendizaje de conceptos del Cálculo Diferencial e Integral es la representación algebraica, que incluye la expresión algebraica que modela la función y el desarrollo algebraico para simplificar expresiones y resolver ecuaciones, involucrando diferentes tipos de expresiones como polinomios, racionales, exponenciales, logarítmica y trigonométrica. Se utiliza, por ejemplo, en tareas que requieren realizar cálculos algebraicos, donde se ha evidenciado que la manipulación de expresiones algebraicas es el modo de operación preferido por las personas estudiantes (Tall, 1992), dado que los libros de texto de Cálculo Diferencial e Integral suelen presentar una gran cantidad de ejercicios que fomentan el uso de representaciones algebraicas para su solución.

Por otra parte, además de la simbología utilizada en las representaciones algebraicas, los nuevos conceptos del Cálculo Diferencial e Integral (límites, derivadas e integrales) tienen su propia simbología, lo que implica que la persona estudiante deba ser capaz de identificar estas nuevas representaciones para utilizarlas en conjunto con otras, de una manera forma flexible, convirtiéndolas y realizando los tratamientos necesarios, de manera que se pueda comprender el concepto matemático a partir de la combinación de estas representaciones simbólicas.

> Al estudiar contenido nuevo, las personas estudiantes se encontrarán con representaciones nuevas de conceptos matemáticos. Deberían poder convertir y cambiar de forma flexible entre estas representaciones. Gran parte del poder de la matemática proviene de la capacidad de observar y operar con objetos desde diferentes perspectivas (NTCM, 2007, p. 423).

En este sentido del uso de los símbolos, Bezuidenhout (2001) señala que la enseñanza debe, a través de tareas, promover en las personas estudiantes el conocimiento del significado de los símbolos, pudiendo no solo usarlos, sino también interpretarlos dentro del contexto:

> Los enfoques de enseñanza y las tareas matemáticas deben ser de tal naturaleza que lleven a las personas estudiantes a experimentar y considerar que los símbolos matemáticos tienen significado, que es importante poder interpretar símbolos y usarlos para representar conceptos, y que la destreza en el cálculo de límites, derivadas e integrales a través de la manipulación de expresiones algebraicas (aunque muy importante) no implican una comprensión de los significados de los símbolos involucrados. (Bezuidenhout, 2001, p. 498).

Representación Geométrica. Los orígenes del Cálculo Diferencial e Integral, incluso antes de que se definieran formalmente sus conceptos y otras construcciones teóricas, se remontan a la exploración de problemas geométricos y físicos (Natsheh & Karsenty, 2014; Cornu, 1991; Santos, 2010).

Las representaciones geométricas de los griegos, por ejemplo, aplicadas en el problema de calcular el área del círculo, fue una oportunidad para desarrollar las concepciones iniciales del concepto de límite. Hipócrates de Quíos (430 a. C.) abordó este problema teniendo en cuenta que se trataba de una figura que podía inscribirse y circunscribirse en un polígono regular, de modo que al aumentar el número de lados del polígono, se comprendía el área de la circunferencia (limitada) entre las áreas de los polígonos inscritos y circunscritos que se obtuvieron sucesivamente (Cornu, 1991).

Años más tarde, en problemas como estos, los matemáticos griegos, en particular Arquímedes, recurrieron al Método de Agotamiento, atribuido a Eudoxo de Cnido (408-355 a. C.). Este método, que se enuncia en la primera proposición del Libro *X* de los Elementos de Euclides y que hoy se conoce como doble reducción al absurdo, permitía probar los resultados meramente dentro del contexto geométrico. De esta forma, se puede decir que los griegos fueron los primeros en trabajar con el concepto matemático de límite, atribuyéndole una fuerte identidad geométrica, y que recién sería definido dos mil años después (Santos, 2010). Esta influencia de usar representaciones geométricas se mantuvo en la primera fase del Cálculo de la era moderna, siglo $XVII$, caracterizado por un fuerte componente visual en su desarrollo debido a la interacción con la geometría, la física y la astronomía (Natsheh & Karsenty, 2014).

Por otro lado, en investigaciones realizadas en Didáctica del Cálculo Diferencial e Integral utilizan las representaciones geométricas que se adoptan de la Geometría Analítica, como es el caso de la gráfica de una función u otras curvas como rectas que comúnmente se utiliza en este contexto para modelar asíntotas y otras representaciones gráficas realizadas en un sistema de coordenadas cartesianas (Bezuidenhout, 2001; Karatas et al. 2011; Moru, 2009; Prezenioslo, 2004; Tall, 1992).

Moru (2009) concluye que las personas estudiantes necesitan (y requieren) que la gráfica de la función vaya acompañada de la respectiva expresión algebraica cuando se solicita hacer cálculos analíticos sobre la función. Además, de que existen concepciones muy intuituivas sobre determinados conceptos, como en el caso de la continuidad de una función, que se promueve el hecho de determinar si una función es continua si se puede dibujar toda su gráfica sin tener que desconectar el lápiz de la hoja; es decir, cuando la gráfica de la función es de una sola pieza (Karatas et al., 2011).

Finalmente, los estudios sobre el uso de representaciones visuales en este contexto revelan que este uso proporciona conocimiento relevante para el aprendizaje de conceptos (Tall, 1992). Este aspecto se ha beneficiado de los avances tecnológicos y, en particular, del software de geometría dinámica, utilizado tanto por la persona docente en momentos de instrucción para facilitar la presentación de representaciones geométricas; como también por las personas estudiantes en su aprendizaje para profundizar y desarrollar sus habilidades visuales (Natsheh & Karsenty, 2014; Tall, 1992).

2.3 La visualización Matemática en el proceso de la comprensión de conceptos

En las últimas décadas, la visualización ha sido reconocida como un área importante de investigación en Educación Matemática (Natsheh Karsenty, 2014; Rivera, 2011). Presmeg (2006) afirma que fue en la conferencia del grupo internacional de Psicología de la Educación Matemática en 1991 (PME-15) en Asís, Italia, que la visualización se convirtió formalmente en un campo de investigación, presentándose como un tema independiente que agrupaba a esa vez diez informes de investigación sobre esta temática.

La visualización es fundamental para los seres biológicos y socioculturales que se desarrollan en una sociedad que tiene un gran potencial para la cultura visual, lo que se refleja en las aulas y, particularmente, en las clases de Matemática. La propia naturaleza de la Matemática motiva a que la visualización aparezca de forma natural en los procesos de enseñanza y aprendizaje, por lo que es común que la persona docente en el aula utilice imágenes, diagramas o esquemas visuales para guiar el aprendizaje, al mismo tiempo que la persona estudiante crea imágenes mentales que les lleva a utilizar representaciones visuales para comunicar su razonamiento o resolver una tarea matemática (Arcavi, 2003).

La creciente atención que ha recibido la visualización en las investigaciones en Educación Matemática ha llevado a que el término sea hoy polisémico, dependiendo del contexto y fundamento teórico que adopten quienes lo definen. Por ejemplo, para Arcavi (2003) la visualización se concibe desde tres dimensiones: capacidad, proceso o producto.

> La visualización es la capacidad, proceso y producto de crear, interpretar, utilizar y reflexionar sobre imágenes, ya sea en nuestra mente, en una hoja de papel o con herramientas tecnológicas, con el fin de representar, comunicar, razonar y desarrollar ideas y nuevos conocimientos (Arcavi , 2003, p.217).

Como capacidad, la visualización está vinculada a la capacidad de abstracción matemática (Gray & Tall, 2007); como proceso, Presmeg (2006) afirma que la visualización incluye el proceso de construir y transformar imágenes mentales y representaciones de carácter espacial que intervienen en la práctica de Matemáticas; y como producto, es decir, como creación o uso de imágenes o representaciones visuales. Gómez-Chacón (2014) distingue dos funciones de estas imágenes: una función heurística, en la que la representación/imagen se utiliza para razonar, generar nuevas ideas , inventar o crear y una función ilustrativa, donde la representación visual sólo tiene un papel explicativo subordinado al discurso formal.

Por otro lado, para Zazkis, Dubinsky y Dautermann (1996), la visualización es un conjunto de acciones del individuo que lo llevan a establecer fuertes conexiones entre sus construcciones o imágenes mentales y experiencias externas:

> La visualización es un acto en el que un individuo establece una fuerte conexión entre una construcción interna y algo a lo que se accede a través de los sentidos. Una conexión de este tipo se puede realizar en cualquier dirección. Un acto de visualización puede consistir en cualquier construcción mental de objetos o procesos que un individuo asocia con objetos o eventos que percibe como externos. Alternativamente, un acto de visualización puede consistir en construir en algún medio externo, como papel, tablero o pantalla de computadora, objetos o eventos que el individuo identifica con los objetos o procesos en su mente (Zazkis, Dubinsky & Dautermann, 1996, p.441).

Al igual que Zazkis et al. (1996), Rivera (2011) considera que las acciones internas del individuo están influenciadas por factores externos, en el sentido de que considera que el pensamiento visual se basa en inferencias que pueden ser elaboradas personalmente a través de imágenes subjetivas del individuo, o mediadas por la exterior a través de las experiencias del individuo en contexto, como la interacción con otros individuos o el uso de instrumentos manipulativos como calculadoras gráficas. En términos generales, "el pensamiento visual en matemáticas abarca el uso de todo tipo de símbolos a partir de imágenes y signos construidos personalmente, expresiones alfanuméricas y diagramas, que transmiten significados y se utilizan para razonar" (Rivera, 2011, p. 54). Así, para Rivera (2011) la visualización es una herramienta cognitiva que permite al individuo explorar, construir, establecer relaciones conceptuales, demostrar y justificar.

Dentro del marco teórico de este autor se establecen tres principios fundamentales de la visualización: el *principio de adquisición*, que se refiere al acto del individuo de abducir los significados de las representaciones visuales de los objetos mediante estrategias como la manipulación de representaciones icónicas, la asociación de experiencias o la establecimiento de similitudes y patrones. El *principio de razonamiento*, que se refiere a la situación del individuo a la hora de resolver problemas, utilizando el razonamiento imaginativo en la organización de sus pensamientos y como alternativa a las formas de razonamiento simbólico y lingüístico; entendiendo el razonamiento imaginativo como el uso de estrategias visuales para comunicar, descubrir, resolver problemas o interpretar un hecho. Y tercero, el *principio de individuación*, que se refiere al hecho de que la capacidad de un individuo para representar visualmente está influenciada principalmente por su propio sistema visual, pero también por prácticas socialmente construidas. Así, las imágenes visuales construidas por el individuo tienen orígenes fisiológicos, sociales y culturales.

Para Rivera (2011) existen tres niveles de visualización dentro de la actividad matemática. El *nivel imaginativo*, que surge de las experiencias personales y de la percepción sensorial de forma subjetiva e intuitiva. El *nivel formativo*, que es cuando los objetos, conceptos o procesos se establecen previamente a partir de imágenes estructuradas por la comunidad matemática. Y el *nivel transformacional*, que puede incluir el nivel imaginativo o formativo, pero que se caracteriza porque el individuo da significado a la actividad visual. Para el autor, esta transformación de lo visual para la obtención de significados ocurre en lo que él llama el *escenario de visualización*. Estos escenarios de visualización son una forma de procesamiento visual cognitivo en el que el individuo selecciona conscientemente información visual relevante para transformarla, darle significado e incluso realizar proyecciones visuales futuras.

2.3.1 Usos y limitaciones de la visualización

En las principales áreas o temas curriculares de la Matemática, como Aritmética, Álgebra, Geometría, Trigonometría, Análisis Infinitesimal, entre otras, existen investigaciones que han considerado la visualización matemática como su objeto de estudio. Por ejemplo, en Gómez-Chacón (2014) se presentan varias líneas de estudio de la visualización en Educación Matemática: en el desarrollo curricular; en la búsqueda de prácticas docentes que promuevan (o inhiban) la visualización matemática efectiva; en el uso de la tecnología dinámica y su influencia en la orientación de la visualización en las clases de matemáticas; en la categorización y sistematización de las representaciones visuales; y también estudios sobre la motivación o rechazo al uso de la visualización en Matemática.

En uno de estos estudios, Arcavi (2003) resume los siguientes usos de la visualización en diferentes contextos del aprendizaje de la matemática:

1. *Acompaña el desarrollo simbólico*. Esto se refiere a que una imagen puede ser un factor esencial para crear la sensación de evidencia de alguna propiedad algebraico-simbólica.

2. *Establece conexiones entre conceptos y significados*. En un contexto simbólico, la solución visual en una tarea permite relacionar conceptos y significados que quedarían fuera de una solución meramente simbólica.

3. *Le permite aclarar la estrategia para resolver una tarea*. La visualización puede funcionar como una herramienta de apoyo a la persona estudiante cuando no está segura de cómo proceder.

Sin embargo, a pesar de que en las últimas décadas las investigaciones han demostrado la evidente importancia del papel de la visualización en la Educación Matemática, la representación visual sigue siendo, según Arcavi (2003), un ciudadano de segunda categoría en la teoría y la práctica de la Matemática. Esto implica que las diferentes formas en que la visualización puede intervenir en la comprensión de conceptos se considera de poca importancia.

Respecto a los factores que limitan el desarrollo de la visualización en el aprendizaje de las personas estudiantes, Arcavi (2003) destaca dos:

1. El conocimiento previo que tienen las personas estudiantes al mirar una representación visual puede apoyar o interferir en el establecimiento de conexiones con conceptos subyacentes al objeto representado.

2. El contexto en el que se realiza la observación puede generar diferentes significados de los mismos objetos que son representados por un recurso visual. Ya sea el contexto emocional, el estado de ánimo de la persona estudiante, el contexto cognitivo, el nivel de comprensión de las representaciones visuales o el contexto matemático. Por ejemplo, una línea recta no tiene el mismo significado en la aritmética, la geometría o el estudio de funciones.

En cuanto a las dificultades que enfrentan tanto estudiantes como profesores al utilizar la visualización, Arcavi (2003) las clasifica en tres categorías: culturales, cognitivas y sociológicas.

1. *Dificultad cultural*. Se refiere a las creencias y valores que se tienen sobre lo que es la matemática y la concepción de lo que significa hacer matemática, pues de esto depende el valor atribuido a la visualización como parte integral del proceso de aprendizaje.

2. *Dificultad cognitiva*. En relación a que razonar con representaciones visuales, como diagramas, dibujos o gráficos, al momento de resolver tareas, implica que los procedimientos no siempre son rutinarios y seguros para que la persona estudiante confíe, contrario a los procedimientos simplemente simbólicos. Además, la demanda cognitiva aumenta cuando se lleva a la persona estudiante a convertir representaciones visuales en analíticas, dentro de una misma situación, por lo que el autor afirma que aprender a ser competente en la manipulación de numerosas representaciones puede ser un proceso difícil para las personas estudiantes.

3. *Dificultad sociológica*. Existen dificultades en la visualización cuando las personas estudiantes de diferentes orígenes culturales interactúan en un aula, ya que el entorno de desarrollo de una persona estudiante fuera de la escuela puede influir en su forma de visualizar y hacerla diferente a la de su colega.

Ante estas dificultades, Gómez-Chacón (2014) afirma que el uso limitado del registro visual por parte de las personas estudiantes y la dificultad cognitiva inherente a este registro visual son posibles causas para que las personas estudiantes, e incluso el profesor, rechacen el uso de la visualización en la enseñanza de la Matemática y procesos de aprendizaje. Asimismo, para Natsheh y Karsenty (2014), las personas docentes no son conscientes de la variada utilidad del razonamiento visual en la Educación Matemática y muchas veces prejuzgan a sus estudiantes como incapaces de resolver tareas visuales a un alto nivel, por lo que los autores concluyen que las personas docentes no están capacitadas para utilizar este tipo de tareas en sus clases.

2.3.2 La visualización en la comprensión de los conceptos del Cálculo Diferencial e Integral

En lo que respecta al Cálculo, se puede decir que es un área de la Matemática en la que la visualización y el razonamiento visual subyacente juegan un papel importante, debido a sus orígenes en la exploración de problemas geométricos y físicos. Aunque con el paso del tiempo y la formalización rigurosa y teórica de este área, se ha producido una deslegitimación del pensamiento visual como argumento válido para las justificaciones y el aprendizaje de conceptos que surgen de manera intuitiva (Natsheh & Karsenty, 2014).

Un estudio centrado en el Cálculo Diferencial e Integral es el trabajo de Natsheh y Karsenty (2014), realizado con estudiantes y profesores de Palestina que no tenían experiencia en la resolución de tareas que involucraran razonamiento visual. El estudio pretendió documentar y analizar los enfoques y reacciones de los sujetos al resolver una tarea sobre la derivada de una función, con el objetivo de obtener alguna información sobre la visualización en los procesos de razonamiento en la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo en el contexto palestino. Dentro de su marco teórico, estos autores coinciden con la definición de visualización de Arcavi (2003), destacando el papel del razonamiento visual y el pensamiento visual que desarrollan las personas estudiantes al resolver tareas.

Así, estos autores definen el *razonamiento visual* como “el uso de dibujos, imágenes o diagramas de manera eficiente para resolver tareas de pensamiento de orden superior” (Natsheh & Karsenty, 2014, p. 110). Agregando que este tipo de razonamiento es producto de un proceso interno considerado como pensamiento visual, el cual tiene un importante valor cognitivo en las acciones de los individuos relacionadas con el descubrimiento de nuevos conocimientos, la comprensión de conceptos y la demostración de evidencia formal, destacando que la visualización permite una comprensión global de un concepto u objeto matemático determinado. Sin embargo, advierten que “el pensamiento visual es un proceso intelectual que requiere preparación, tiempo y esfuerzo intencional” (Natsheh & Karsenty, 2014, p. 112), por lo que aconsejan incorporar en las clases de Cálculo tareas que requieran que la persona estudiante utilice y dé significado a las imágenes para justificar y producir la solución a la tarea.

El proceso de análisis de datos en este estudio llevó a los autores a identificar un tipo específico de razonamiento visual, al que denominaron *razonamiento visual inferencial conceptual*, considerado como “la capacidad de utilizar consideraciones o valoraciones visuales con el fin de obtener inferencias que mejoren la conceptualización” (Natsheh & Karsenty, 2014, p.114). Es decir, inferir información a partir de un marco visual como una imagen, diagrama, gráfico o dibujo, que contribuye a la comprensión de un concepto determinado. En el centro de esta propuesta teórica se encuentran tres componentes que interactúan durante la resolución de tareas: objetos visuales, acciones visuales y efectos visuales.

Los *objetos visuales* son imágenes, dibujos, diagramas, gráficos o cualquier otro objeto sobre el cual se esté realizando una visualización, incluida una expresión algebraica que pueda considerarse un objeto visual. Las *acciones visuales* se refieren a los procesos y actividades que los individuos pueden realizar sobre un objeto o conjunto de objetos visuales, como realizar mediciones, comparaciones, leer información, así como descomponer el objeto visual en partes o construir un nuevo objeto visual. Y los *efectos visuales* aluden a los objetivos o propósitos que llevaron al individuo a realizar acciones visuales, por ejemplo la reformulación de información, la justificación de ideas y la descripción, explicación o demostración de hechos. De esta manera, “cuando el propósito de la acción visual es generar inferencias a partir del objeto visual, de modo que se manifieste la comprensión de conceptos fundamentales, percibimos que se está llevando a cabo un razonamiento visual inferencial conceptual” (Natsheh & Karsenty, 2014, p. 115).

2.4 Errores, Dificultades y Obstáculos

2.4.1 Generalidades

A lo largo del proceso de enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos, se involucran obstáculos, dificultades y errores que influyen en la comprensión de las personas estudiantes sobre estos conceptos en estudio. Para Cornu (1991) es posible distinguir entre diferentes tipos de obstáculos a la comprensión: obstáculos genéticos y psicológicos, obstáculos didácticos y obstáculos epistemológicos. El autor destaca que los obstáculos epistemológicos se caracterizan por ser componentes indispensables y esenciales del conocimiento a adquirir y, en cierta medida, se encuentran en el desarrollo histórico del concepto.

Para Socas (1997) "las dificultades en el aprendizaje de la Matemática son el resultado de múltiples situaciones que se relacionan entre sí y que van desde una mala planificación curricular hasta la propia naturaleza de la Matemática" (p. 35). En este sentido, para el autor las dificultades de aprendizaje resultan de la combinación de elementos internos del conocimiento matemático, como objetos, procesos y representaciones de conceptos; y elementos ajenos a la matemática, como los procesos cognitivos y las actitudes de las personas estudiantes. En su obra, el autor clasifica las dificultades según la naturaleza de su origen en cinco grandes clases: (i) dificultades asociadas a la complejidad de los objetos; (ii) dificultades asociadas con los procesos de pensamiento matemático; (iii) dificultades asociadas a los procesos de enseñanza; (iv) dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de las personas estudiantes; y (v) dificultades asociadas con actitudes afectivas y emocionales hacia la Matemática.

En Rico (1995), los errores son considerados la manifestación de concepciones erróneas de conceptos, que generalmente se presentan a través de la aplicación incorrecta de un procedimiento o algoritmo, pero que para la personas estudiante resulta creíble en el sentido de que muchas veces crea sus propios métodos en la resolución de tareas. Para el autor, los errores surgen de forma espontánea, son persistentes y propios de cada individuo, debido a que la persona estudiante inicialmente no es consciente de su error. Rico (1995) destaca también que el estudio y análisis de los errores cometidos por las personas estudiantes ha surgido recientemente en las diferentes áreas de investigación en Educación Matemática. Por ejemplo, en el trabajo de Seah (2005) sobre el análisis de los errores cometidos por estudiantes de secundaria en Singapur, al resolver tareas que involucran el concepto de integral de una función, el autor clasifica los errores en tres categorías: (i) error conceptual, que se refiere al error que expresa falta de comprensión del concepto y sus características o propiedades; (ii) error de procedimiento, que ocurre durante la aplicación de algoritmos o procedimientos a pesar de comprender ya el concepto; y (iii) error técnico, que consiste en la manifestación errónea causada por la falta de conocimiento necesario para resolver la tarea.

2.4.2 Errores y dificultates en el Cálculo Diferencial e Integral

En lo que respecta a los conceptos de límite y continuidad de una función, a lo largo de los años varias investigaciones han identificado obstáculos, dificultades y errores que enfrentan las personas estudiantes para comprender estos conceptos (Cornu, 1991; Domingos, 2003; Juter, 2007; Tall, 1992).

Los conceptos de límite y continuidad surgen, de alguna manera, en las experiencias de los individuos antes de ser definidos formalmente, por lo que existe una estructura cognitiva compleja en la mente de cada sujeto que produce concepciones diferentes cuando el concepto es evocado en alguna situación de aprendizaje (Bezuidenhout, 2001; Tall & Vinner, 1981). Esto crea una falsa sensación de control a la hora de resolver tareas cuando la persona estudiante conoce y utiliza la noción de límite (o continuidad) de forma intuitiva, incluso cuando la tarea requiere una concepción matemática más formal (Cornu, 1991).

Cornu (1991) describe estas ideas, intuiciones, imágenes o conocimientos que provienen de la experiencia cotidiana del individuo y que se producen antes del aprendizaje formal como concepciones espontáneas, indicando que estas concepciones espontáneas no desaparecen sino que se integran con nuevos conocimientos, modificándolos y adaptándolos para formar concepciones personales de los conceptos. Sin embargo, durante este proceso, las concepciones espontáneas e intuitivas pueden bloquear o entrar en conflicto con los nuevos conocimientos y la teoría formal de los conceptos (Moru, 2009; Tall, 1992).

Otros resultados revelan que las ideas intuitivas que pueden generar dificultades a la hora de resolver tareas se originan a partir de experiencias con otros conceptos matemáticos. Por ejemplo, Jaffar y Dindyal (2011) indican que, en algunos casos, se encuentran expresiones como $\frac{a}{0}$ =indefinido; o $\frac{a}{0} = \infty$, que las personas estudiantes importan del estudio de los números reales al estudio del límite, concibiendo que lo infinito y lo indefinido son la misma cosa. De manera similar, asocian que si un límite tiene valor cero entonces no existe. Además, al trabajar con expresiones indeterminadas como $\frac{0}{0}$, las personas estudiantes pueden concluir que la respuesta es 1, justificando que cualquier número al dividirse por sí mismo da como resultado 1.

Uno de los errores más frecuentes en el aprendizaje de estos conceptos es producto de una de las concepciones intuitivas relacionadas con sus experiencias previas en el estudio de funciones, en el caso del límite el error consiste en que la persona estudiante siempre asigna el valor del límite de una función en un punto el valor respectivo de la imagen de la función en ese punto; y en el caso de la continuidad, el error se hace manifiesto cuando la persona estudiante afirma que una función es continua si a una imagen le corresponden todos los objetos; O dicho de otro modo, el error consiste en considerar que la existencia del límite o de la continuidad depende de si la función está definida o no en el punto en cuestión (Juter, 2007; Moru, 2009; Prezenioslo, 2004; Tall, 1992; Tall y Vinner, 1981).

Lo anterior se manifiesta en muchos momentos durante la resolución de tareas, cuando las personas estudiantes justifican que el valor límite no es alcanzable por la función en el punto indicado o si es alcanzable tendría que ser igual al valor de la imagen en ese punto (Juter, 2007; Moru, 2009), llegando inclusive a provocar frustración en las personas estudiantes ante ejemplos de límites alcanzables por la función y de no poder crear una imagen coherente de la situación (Juter, 2007). Cornu (1991) indica que este tema está en debate, no sólo a nivel de aula sino también por parte de las personas investigadoras, destacando que la pregunta: *¿Se alcanza el límite o no?*, corresponde a un obstáculo epistemológico.

Estos errores ponen de relieve la dificultad para comprender la definición de los conceptos de límite y continuidad; incluso si pueden tener una imagen mental fuerte del concepto, su definición del concepto es, en general, débil (Tall & Vinner, 1981). Cualquiera que sea el enfoque que se adopte para definir estos conceptos, ya sea informal o formal, surgirán dificultades para las personas estudiantes (Tall, 1992). En el enfoque informal pueden aparecer factores que pueden entrar en conflicto con cualquier teoría formal; mientras que el enfoque formal puede ser demasiado difícil como punto de partida, lo que significa que es posible que las personas estudiantes no puedan entender la definición formal (Juter 2007).

Uno de los obstáculos epistemológicos encontrados en Cornu (1991) es el aspecto metafísico de la noción de límite, indicando que "la noción de límite es difícil de introducir en la Matemática, ya que parece tener más que ver con la metafísica o la filosofía" (Cornu, 1991, p. 161). Es un hecho que "el concepto de límite proporciona una base matemática para desarrollar el Cálculo y el Análisis Matemático, pero por su aspecto formal se ha vuelto difícil de entender para las personas estudiantes de secundaria y universitarios" (Natsheh & Karsenty, 2014, pp. 111- 112). Este carácter formal de la naturaleza misma del concepto de límite trasciende incluso el concepto de continuidad o derivada, en la medida en que la concepción formal de límite está involucrada en la concepción formal de estas otras nociones.

Además, para comprender estos conceptos, es muy importante que la persona estudiante comprenda la noción de infinito que, al ser un concepto abstracto, es necesario que las personas estudiantes desarrollen un proceso de abstracción adecuado para darle significado dentro del contexto del Cálculo Diferencial e Integral. Sin embargo, las investigaciones revelan que las personas estudiantes tienen concepciones muy limitadas sobre el concepto de infinito (Cornu, 1991; Moru, 2009). Por tanto, Cornu (1991) considera que la noción de infinitamente grande e infinitamente pequeño es un obstáculo epistemológico que dificulta la comprensión de estos conceptos.

A la hora de resolver tareas, también es frecuente encontrar dificultades para seleccionar y utilizar representaciones adecuadas que permitan afrontar una situación concreta (Tall, 1992). Por ejemplo, las personas estudiantes suelen hacer un uso coloquial y menos riguroso de los términos específicos implicados en la comprensión de los conceptos de límite y continuidad, dando lugar a dificultades asociadas a la comprensión del lenguaje utilizado por la persona docente y a la comunicación de sus ideas intuitivas y definiciones formales (Cornu, 1991; Jaffar & Dindyal, 2011; Moru, 2009; Tall, 1992). Términos como: límite, continuo, existe, se acerca, alcanza; y frases como: tiende a, tan pequeño como quieras, para todos, tienen un fuerte significado en el contexto cotidiano de la persona estudiante. Así, en Moru (2009) el lenguaje coloquial o natural es considerado como un obstáculo epistemológico a estos conceptos. De hecho, las personas estudiantes mantienen confianza en estos significados cotidianos de los términos, a pesar de que se les ha dado su definición formal, y los significados atribuidos a los términos varían de una persona estudiante a otra (Cornu, 1991).

Prezenioslo (2004) concluye, basándose en los resultados de su estudio, que un elemento clave en la resolución de tareas consiste en el uso de diferentes procedimientos algebraicos para el cálculo de límites y, por tanto, las acciones de la mayoría de las personas estudiantes están fuertemente ligadas a los procesos establecidos mediante procesos repetitivos, esto es, práctica algebraica (Natsheh & Karsenty, 2014), llevándoles a priorizar el uso de estrategias pragmáticas sobre el uso de la teoría o a no establecer conexiones con ella (Juter, 2007). Es natural, por tanto, identificar dificultades asociadas al desempeño de las personas estudiantes en el uso de procedimientos algebraicos, ya sea para calcular límites, derivadas o integrales (Domingos, 2003; Juter, 2007; Tall, 1992).

Uno de los obstáculos epistemológicos propuestos por Cornu (1991) para comprender el concepto de límite es el hecho de que vincula la geometría con los números, indicando que el concepto unificador de límite implica un traslado de figuras geométricas, representadas en el sistema de coordenadas cartesiano, a figuras numéricas de interpretación. Es decir, la persona estudiante debe ser capaz de interpretar numéricamente una representación geométrica, aunque esto no significa traducir la representación gráfica de una función a su expresión algebraica, ya que esto no es posible en todos los casos; se vuelve necesario entonces interpretar la representación gráfica aunque no sea posible su expresión algebraica, lo que significa que muchas veces la persona estudiante no puede determinar el límite sin tener una expresión algebraica de la función representada en la gráfica (Moru, 2009).

Algunos errores que surgen al interpretar la gráfica de una función son, por ejemplo, negar la existencia del límite en puntos donde la función no está definida, determinar la continuidad de una función en un punto observando si la función está o no definida en ese punto, uso incorrecto de calculadoras gráficas y dificultades asociadas con la conexión entre límites y el comportamiento asintótico de funciones.

3. INTEGRACIÓN DE LA TECNOLOGÍA EN EL CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

3.1 Generalidades

En las últimas décadas, el campo de la Educación Matemática ha sido testigo de transformaciones profundas impulsadas por el avance de las tecnologías digitales. Estas tecnologías han revolucionado la manera en que se enseñan y aprenden conceptos abstractos, especialmente en áreas complejas como el Cálculo Diferencial e Integral. Sin embargo, a pesar del entusiasmo por estas innovaciones, el éxito de la integración tecnológica no es automático y presenta retos significativos.

La problemática central reside en la brecha entre la disponibilidad de recursos tecnológicos y su implementación efectiva en las aulas. Estudios recientes sugieren que, aunque las personas estudiantes valoran y prefieren formatos digitales como videos y simuladores, la efectividad de estos recursos depende de su diseño pedagógico y del acompañamiento docente. Además, las tasas de reprobación en asignaturas como el cálculo siguen siendo elevadas, lo que cuestiona si la tecnología por sí sola puede transformar el aprendizaje o si debe ser complementada con estrategias didácticas más robustas.

La integración de tecnologías digitales en la enseñanza del Cálculo Diferencial e Integral responde a las demandas de innovación y mejora continua en la Educación Matemática. Según Barradas-Arenas (2021), la evolución rápida de las tecnologías en el ámbito educativo ha impulsado el diseño de nuevas metodologías para generar aprendizajes significativos y reducir las tasas de reprobación. La integración de herramientas digitales como videos, simuladores y plataformas de aprendizaje permite que las personas estudiantes accedan a contenidos de manera flexible y refuercen su comprensión de conceptos complejos(Barradas-Arenas, 2021).

Por otra parte, el uso de software matemático dinámico, como GeoGebra, facilita la visualización de conceptos abstractos y promueve la exploración y experimentación. Según Fonseca y Henriques (2019), herramientas como GeoGebra ofrecen una forma interactiva de abordar el *Teorema del Valor Intermedio* (TVI) y la continuidad de funciones, aspectos clave en la enseñanza del cálculo.

Esta sección explora cómo las herramientas tecnológicas han sido utilizadas en diferentes contextos educativos para mejorar la comprensión del Cálculo. También se analizan los beneficios, limitaciones y desafíos que enfrentan las personas docentes y estudiantes al integrar la tecnología en el aula, con el fin de abrir un diálogo sobre las mejores prácticas y las áreas de mejora necesarias para lograr un impacto duradero en el aprendizaje del Cálculo.

3.2 La tecnología como recurso didáctico

3.2.1 Visualización y exploración con software matemático

El uso de software especializado en la enseñanza del Cálculo Diferencial e Integral ha sido clave para mejorar la comprensión de las personas estudiantes. *GeoGebra*, por ejemplo, ha demostrado ser una herramienta eficaz para que las personas estudiantes manipulen funciones de manera dinámica, lo que facilita la comprensión de teoremas como el TVI. Fonseca y Henriques (2019) señalan que las personas estudiantes que utilizaron GeoGebra lograron consolidar su comprensión de la continuidad y deducir de manera autónoma los fundamentos del TVI.

Además, Barradas-Arenas (2021) destaca el impacto positivo del uso de videos y recursos digitales transmisivos en el aprendizaje del Cálculo, indicando que estos formatos son preferidos por las personas estudiantes y generan una mayor identificación con los contenidos, lo que promueve un aprendizaje más significativo.

3.2.2 Aprendizaje activo y evaluación continua

La implementación de herramientas tecnológicas también ha permitido la creación de *entornos de aprendizaje activo*, donde las personas estudiantes pueden interactuar de manera constante con los contenidos. En la Universidad de Central Florida, Vajravelu y Muhs (2016) observaron que el uso de plataformas como MyLabsPlus, junto con sesiones interactivas y evaluación continua, mejoró significativamente la retención de conocimientos y el rendimiento académico en los cursos de Cálculo.

En una experiencia en la Universidad de Costa Rica, Molina-Mora (2016) aplicó una estrategia de integración de TIC en Cálculo II, utilizando laboratorios y actividades colaborativas, lo que permitió motivar a las personas estudiantes y ofrecerles un papel más dinámico en su propio proceso de aprendizaje.

3.3 Resultados de la integración de la tecnología en el Cálculo

3.3.1 Mejora en la comprensión conceptual

La introducción de herramientas tecnológicas ha mejorado significativamente la comprensión de los conceptos fundamentales del Cálculo. Barradas-Arenas (2021) reporta que las personas estudiantes que utilizaron recursos digitales transmisivos, como videos y simuladores, demostraron una mayor comprensión de los temas de Cálculo, lo que se reflejó en su capacidad para resolver problemas complejos.

Por su parte, Fonseca y Henriques (2019) destacan que el uso de GeoGebra permitió a las personas estudiantes identificar la continuidad de funciones y resolver problemas asociados a TVI, haciendo uso de distintas representaciones algebraicas y gráficas. Los resultados muestran que las personas estudiantes se beneficiaron del trabajo en torno a la tarea con el uso de GeoGebra, evidenciando aprendizajes significativos en lo que concierne al entendimiento del teorema. Además, la exploración con GeoGebra favoreció su concepción de continuidad de una función y la deducción de la continuidad de la función como criterio necesario para la aplicación del TVI

> Los resultados sugieren que la exploración de tareas con el uso integrado de GeoGebra puede ser utilizada en la enseñanza de conceptos matemáticos en la educación superior, como el de continuidad de funciones, para incentivar el descubrimiento, la experimentación y la visualización, y conducir a aprendizajes efectivos de sus numerosos teoremas (Fonseca & Henriques, 2019, p. 142).

3.3.2 Reducción en la reprobación de los cursos de Cálculo

La integración de recursos digitales ha mostrado resultados mixtos en cuanto a la reducción de la reprobación. Si bien Barradas-Arenas (2021) señala que solo el 26 % de las personas estudiantes aprobó el curso de cálculo, los contenidos digitales fueron bien recibidos, lo que indica la necesidad de un análisis más profundo de las necesidades pedagógicas antes de implementar herramientas tecnológicas. Esto refleja que la tecnología, aunque valiosa, no es una solución automática y debe ser acompañada de un diseño pedagógico sólido.

3.3.3 Motivación estudiantil

El uso de herramientas como *GeoGebra* y *Wolfram Mathematica* no solo mejora la comprensión conceptual de los conocimientos matemáticos, sino que también incrementa la motivación de las personas estudiantes. Los recursos audiovisuales, como los videos y tutoriales, son especialmente efectivos para captar el interés de las personas estudiantes, como lo señala Barradas-Arenas (2021), quien reporta que más del 50 % de las personas estudiantes prefirieron este formato.

3.4 Desafíos e implicaciones de la integración tecnológica

Si bien la tecnología ofrece herramientas poderosas para mejorar la enseñanza del Cálculo, su implementación efectiva requiere una cuidadosa planificación pedagógica. La experiencia de Barradas Arenas (2021) subraya que, aunque las personas estudiantes valoran los recursos digitales, solo una parte de ellas logra aprovechar plenamente estas herramientas, lo que indica que es crucial adaptar las estrategias a las necesidades específicas de cada grupo.

De igual manera, Fonseca y Henriques (2019) enfatizan la importancia del acompañamiento docente en el uso de herramientas como GeoGebra para guiar a las personas estudiantes hacia aprendizajes significativos. Por lo tanto, el éxito de la integración tecnológica en la enseñanza del cálculo no depende únicamente de la disponibilidad de recursos, sino también de la capacidad de las personas docentes para adaptarse y guiar a las personas estudiantes en su uso efectivo.

El debate sobre la efectividad de la tecnología en la enseñanza del cálculo nos lleva a considerar varios factores críticos que pueden determinar su éxito o fracaso. Primero, es importante reconocer que la mera inclusión de herramientas tecnológicas no garantiza un aprendizaje significativo. Como señalan Barradas-Arenas (2021) y Fonseca y Henriques (2019), el uso de recursos como GeoGebra y videos interactivos ha mostrado ser valioso para mejorar la comprensión conceptual, pero debe estar acompañado por una planificación pedagógica que considere las necesidades específicas de las personas estudiantes y las características del contenido.

Un punto clave es el papel de la persona docente en la integración tecnológica. Las herramientas digitales, aunque poderosas, requieren de un facilitador que guíe a las personas estudiantes en su uso efectivo. Vajravelu y Muhs (2016) enfatizan que el éxito de la tecnología depende en gran medida de la capacidad del profesor para utilizarla de manera estratégica, diseñando actividades que promuevan el aprendizaje activo y proporcionando retroalimentación continua. La persona docente no solo debe dominar las herramientas tecnológicas, sino también ser capaz de adaptarlas a las dinámicas de la clase, lo que representa un desafío formativo y metodológico.

Además, es necesario reconocer que no todas las personas estudiantes responden de manera igual a las innovaciones tecnológicas. Como se observa en el estudio de Barradas-Arenas (2021), aunque los recursos audiovisuales son preferidos por la mayoría, una proporción significativa de estudiantes aún encuentra dificultades para lograr aprendizajes significativos con estos medios. Esto resalta la importancia de diseñar entornos de aprendizaje que consideren la diversidad de estilos y ritmos de aprendizaje, integrando estrategias didácticas que combinen lo mejor de las tecnologías digitales con enfoques más tradicionales.

Finalmente, la discusión sobre la integración tecnológica en la enseñanza del cálculo no puede obviar el contexto socioeconómico en el que se implementa. La disponibilidad de recursos tecnológicos es desigual en muchas regiones, lo que limita el acceso a estas herramientas y perpetúa las brechas educativas existentes. Las iniciativas para reducir la reprobación mediante la tecnología deben considerar estrategias de inclusión que garanticen que todas las personas estudiantes puedan beneficiarse de estos avances, independientemente de sus circunstancias económicas.

En conclusión, la integración de la tecnología en la enseñanza del cálculo ofrece enormes oportunidades, pero también plantea retos que no pueden ser ignorados. El éxito de estas herramientas dependerá de una planificación pedagógica cuidadosa, un acompañamiento docente adecuado y una atención constante a las necesidades de las personas estudiantes. Solo a través de un enfoque integral que combine tecnología, pedagogía y equidad podremos aprovechar todo el potencial de estas herramientas para transformar la educación matemática universitaria en el siglo XXI.

4. RAZONAMIENTO MATEMÁTICO: SU DESARROLLO, SUS PROCESOS Y SUS IMPLICACIONES EN LA DIDÁCTICA DEL CÁLCULO

4.1 Conceptualización teórica del Razonamiento Matemático

El razonamiento matemático es una habilidad fundamental en la enseñanza de la matemática, que permite a las personas estudiantes ir más allá de la mera aplicación de procedimientos rutinarios para entender los conceptos subyacentes y las relaciones entre ellos. Según Mata-Pereira y Ponte (2017), el razonamiento matemático implica procesos complejos que conducen a la formulación de nuevas conclusiones a partir de proposiciones ya conocidas. Este proceso incluye la generación de conjeturas, la generalización de resultados y la justificación de estos, lo que proporciona elementos relevantes a considerar en la enseñanza del cálculo.

Uno de los enfoques clave para promover el razonamiento matemático en el aula es la introducción de tareas exploratorias, que desafían a las personas estudiantes a reflexionar sobre los conceptos, formular hipótesis y justificarlas a través del análisis matemático (Trevisan & Araman, 2021). Además, como señalan diversos autores, el razonamiento matemático no es un proceso monolítico; involucra tanto inferencias deductivas como inductivas y abdutivas, lo que permite a las personas estudiantes desarrollar una comprensión profunda y flexible de la matemática (Lannin, Ellis & Elliot, 2011; Mata-Pereira & Ponte, 2017; Trevisan et. al, 2023).

4.1.1 Tipos de Razonamiento Matemático: Deductivo, Inductivo y Abductivo

El razonamiento matemático puede desglosarse en tres tipos principales: deductivo, inductivo y abductivo. Cada uno de estos tipos juega un papel clave en la forma en que las personas estudiantes construyen conocimientos, justifican resultados y elaboran conjeturas en el ámbito de la Matemática, especialmente en temas complejos como el cálculo.

Razonamiento Deductivo. El razonamiento deductivo es el proceso mediante el cual se derivan conclusiones a partir de premisas que son aceptadas como verdaderas, aplicando reglas lógicas y estableciendo una relación necesaria entre las premisas y la conclusión. Este tipo de razonamiento es central en la matemática formal, ya que permite a las personas estudiantes partir de axiomas, definiciones o teoremas para llegar a conclusiones lógicas y universales.

En la enseñanza del Cálculo, el razonamiento deductivo se utiliza frecuentemente para demostrar teoremas y propiedades de funciones, derivadas o integrales. Según Mata-Pereira y Ponte (2012), el razonamiento deductivo implica una inferencia lógica en la que las conclusiones son irrefutables si las premisas son verdaderas, por ejemplo, a partir de la definición formal de la derivada como el límite de un cociente de diferencias, las personas estudiantes pueden deducir las reglas de derivación.

Razonamiento Inductivo. El razonamiento inductivo, a diferencia del deductivo, parte de la observación de casos particulares o patrones específicos para llegar a una generalización que puede no estar garantizada en todos los casos, pero que parece válida a partir de la evidencia acumulada. En otras palabras, es un proceso en el cual las personas estudiantes observan ejemplos específicos y luego formulan una conjetura general. Este tipo de razonamiento es común en el aprendizaje del cálculo, cuando las personas estudiantes identifican regularidades en el comportamiento de las funciones o las series a través de varios ejemplos.

En este sentido, el razonamiento inductivo es crucial en la formulación de conjeturas antes de proceder con la justificación y demostración formal. Según Lannin, Ellis y Elliot (2011), el razonamiento inductivo ayuda a las personas estudiantes a construir generalizaciones que, aunque empíricas en un principio, pueden luego ser validadas a través de métodos deductivos.

Razonamiento Abductivo. El razonamiento abductivo es quizás el tipo de razonamiento menos conocido en la enseñanza matemática, pero juega un papel importante en el descubrimiento y la formulación inicial de hipótesis. A diferencia del razonamiento deductivo, que parte de reglas conocidas, o del inductivo, que generaliza a partir de observaciones, el razonamiento abductivo consiste en formular la mejor explicación posible para un conjunto de datos o fenómenos observados. Este tipo de razonamiento suele usarse en situaciones donde no hay una solución clara, y las personas estudiantes deben proponer una hipótesis que explique el comportamiento de una función o un fenómeno matemático.

Rivera y Becker (2009) señalan que el razonamiento abductivo es esencial en las primeras etapas de la investigación matemática, cuando las personas estudiantes intentan establecer relaciones entre conceptos que aún no han sido probados formalmente. En el contexto del cálculo, este tipo de razonamiento puede surgir cuando las personas estudiantes exploran el comportamiento asintótico de funciones o hacen suposiciones sobre la convergencia de series sin tener una prueba inmediata disponible.

Cada uno de estos tipos de razonamiento – deductivo, inductivo y abductivo – desempeña un rol único y complementario en el desarrollo del razonamiento matemático de las personas estudiantes. Mientras que el razonamiento deductivo proporciona certeza y rigor a las conclusiones matemáticas, el inductivo fomenta la exploración y la generalización a partir de patrones observados, y el abductivo abre las puertas a la formulación de hipótesis que luego pueden ser validadas. En la enseñanza del Cálculo Diferencial e Integral, es importante que las personas docentes reconozcan y fomenten estos distintos tipos de razonamiento para que las personas estudiantes no solo apliquen reglas y procedimientos, sino que también desarrollen un pensamiento matemático profundo y creativo.

4.2 Procesos de Razonamiento Matemático en el contexto de la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo

4.2.1 Generalización y Conjeturación

La generalización es uno de los procesos clave en el razonamiento matemático. Según Trevisan y Araman (2021), la generalización permite a las personas estudiantes identificar patrones y formular reglas a partir de casos específicos, lo que es especialmente relevante en el Cálculo, donde las personas estudiantes trabajan con funciones y sus propiedades. En el contexto del Cálculo Diferencial e Integral, la generalización puede surgir al analizar el comportamiento de las funciones y sus derivadas, permitiendo a las personas estudiantes extender sus conclusiones a clases más amplias de funciones.

En su estudio, Mata-Pereira y Ponte (2017) destacan que las personas estudiantes desarrollan generalizaciones cuando participan en discusiones colectivas desencadenadas por tareas exploratorias. Estas discusiones proporcionan un espacio para que las personas estudiantes comparen sus soluciones, identifiquen regularidades y propongan conjeturas sobre el comportamiento de las funciones.

4.2.2 Justificación y Validación

La justificación es el proceso por el cual las personas estudiantes presentan razones convincentes para validar o refutar una conjetura. Este proceso es esencial en la enseñanza del Cálculo, ya que permite a las personas estudiantes comprender por qué ciertas propiedades matemáticas son verdaderas y cómo se aplican en diferentes contextos. Según Trevisan et al. (2023), la justificación es una habilidad que debe ser promovida por la persona docente a través de acciones específicas, como el desafío y el apoyo guiado, que impulsan a las personas estudiantes a explorar y justificar sus soluciones.

En el contexto de las tareas de Cálculo, las justificaciones suelen centrarse en la interpretación de gráficos, derivadas y límites, lo que permite a las personas estudiantes validar sus hipótesis sobre el comportamiento de las funciones en diferentes intervalos. Los estudios de Trevisan y Araman (2021) evidencian que las personas estudiantes utilizan tanto su conocimiento previo como nuevas ideas construidas durante la resolución de tareas para justificar sus resultados.

Los autores Mata-Pereira y Ponte (2012) presentan un modelo emergente sobre el desarrollo del Razonamiento Matemático desde sus procesos, en donde destacan que relacionar el razonamiento matemático con las representaciones y la significación es esencial para la comprensión de la Matemática. En la figura siguiente se observa este modelo didáctico:

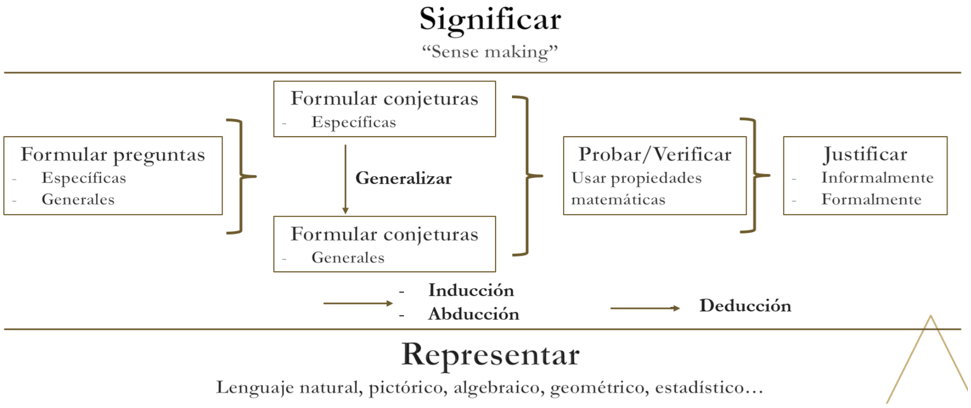


Figura 4.1: Modelo de Razonamiento Matemático

4.3 Implicaciones didácticas en la enseñanza del Cálculo

4.3.1 Diseño de tareas para promover el Razonamiento Matemático

Las tareas que fomentan el razonamiento matemático son fundamentales para el desarrollo de habilidades en Cálculo. Entre estas tareas se encuentran las tareas exploratorias. Según Ponte (2005), las tareas exploratorias ofrecen un contexto rico para que las personas estudiantes movilicen procesos de razonamiento como la conjeturación y la justificación. Estas tareas no solo desafían a las personas estudiantes a resolver problemas, sino que también les brindan la oportunidad de reflexionar sobre las relaciones entre las variables y los conceptos matemáticos implicados (Mata-Pereira & Ponte, 2012).

Los estudios de Trevisan et al. (2023) en el contexto del Cálculo Diferencial e Integral destacan que las tareas que involucran gráficos y la coordinación de variables interdependientes son especialmente efectivas para promover el razonamiento covariacional, un aspecto central en la comprensión de las derivadas y las integrales. Además, el uso de tareas con múltiples representaciones, como gráficas y tablas, facilita la comprensión profunda de los conceptos y su justificación.

4.3.2 Acciones de la personas docente para promover el Razonamiento Matemático

El papel de la persona docente es crucial en el desarrollo del razonamiento matemático de las personas estudiantes. Según Mata-Pereira (2018), las acciones de la persona docente que facilitan la generalización y la justificación incluyen invitar a las personas estudiantes a participar en discusiones, guiar el proceso de reflexión, informar sobre conceptos clave y desafiar sus ideas iniciales. Estas acciones no solo permiten que las personas estudiantes formulen conjeturas, sino que también promueven una validación rigurosa de sus respuestas.

En el ámbito del cálculo, Trevisan et al. (2023) identifican que el uso de preguntas desafiantes y el apoyo guiado durante la resolución de tareas exploratorias ayuda a las personas estudiantes a desarrollar un razonamiento más profundo sobre los conceptos matemáticos. Por ejemplo, la discusión sobre el comportamiento de una función racional a largo plazo permitió que las personas estudiantes formularan y justificaran conjeturas sobre los límites y el comportamiento asintótico de las funciones.

4.3.3 Retos y Oportunidades en el desarrollo del Razonamiento Matemático

El desarrollo del razonamiento matemático en el aula de Cálculo plantea tanto desafíos como oportunidades. Por un lado, la enseñanza tradicional del Cálculo a menudo se centra en la memorización de procedimientos, lo que limita la capacidad de las personas estudiantes para desarrollar un pensamiento matemático profundo (Trevisan & Araman, 2021). Sin embargo, la incorporación de tareas ricas y discusiones guiadas puede transformar el enfoque de la enseñanza del cálculo, permitiendo a las personas estudiantes involucrarse en procesos de razonamiento más complejos, como la formulación y justificación de conjeturas.

El reto principal para las personces docentes es diseñar y gestionar un entorno de aprendizaje que fomente el razonamiento sin abrumar a sus estudiantes. Como señala Brodie (2010), un exceso de tareas desafiantes puede desmotivar a algunas personas estudiantes, lo que sugiere la necesidad de equilibrar el nivel de desafío en las tareas propuestas (Mata-Pereira & Ponte, 2017). Al mismo tiempo, es fundamental que las personas docentes reciban una formación adecuada para manejar las discusiones matemáticas y fomentar la reflexión crítica entre los estudiantes.

En conclusión, el desarrollo del razonamiento matemático en el Cálculo no solo es posible, sino necesario para una comprensión profunda de los conceptos matemáticos. A través de tareas bien diseñadas y un enfoque pedagógico basado en la exploración y la discusión, las personas estudiantes pueden desarrollar habilidades de razonamiento que les permitan enfrentar problemas complejos de manera creativa y lógica.

5. ENSEÑANZA EXPLORATORIA: UNA METODOLOGÍA PARA LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

5.1 Conceptualización teórica de la Enseñanza Exploratoria

La Enseñanza Exploratoria en Matemática se enmarca dentro de una metodología activa, donde las personas estudiantes construyen conocimiento a partir de tareas significativas que desafían su comprensión y les permiten descubrir principios matemáticos de manera inductiva y deductiva. En lugar de centrarse en la transmisión directa de conocimientos, esta metodología promueve un entorno en el cual las personas estudiantes se enfrentan a problemas complejos que requieren exploración, reflexión y discusión. Este enfoque está orientado al desarrollo del pensamiento crítico, la autonomía en el aprendizaje y la capacidad de justificación y argumentación matemática.

Según Canavarro (2011), la Enseñanza Exploratoria permite a las personas estudiantes experimentar el surgimiento de conocimientos y procedimientos matemáticos de manera significativa, lo cual se logra mediante la resolución de problemas, la comunicación matemática y el razonamiento deductivo e inductivo.

Por su parte, Oliveira et al. (2013) sostienen que, para que esta metodología sea efectiva, es fundamental que la persona docente actúe como mediadora, organizadora y facilitadora de las interacciones en el aula. Asumiendo un rol dinámico al orientar la clase hacia el objetivo de aprendizaje, a la vez que permite que las personas estudiantes exploren y lleguen a conclusiones propias a partir de sus procesos individuales y grupales.

5.2 Principios y Caracterización de la Enseñanza Exploratoria en el Cálculo

5.2.1 Principios de la Enseñanza Exploratoria

Para Canavarro (2011) los principios que fundamentan la Enseñanza Exploratoria buscan crear un ambiente de aprendizaje donde las personas estudiantes puedan:

Explorar y experimentar: Las tareas son diseñadas para promover que las personas estudiantes investiguen de forma activa los conceptos y principios matemáticos, conectando la teoría con la práctica mediante la manipulación y el análisis crítico de funciones, derivadas e integrales. Esta exploración genera en las personas estudiantes una disposición para abordar problemas con una mentalidad abierta y crítica.

Comunicar y justificar: Uno de los objetivos fundamentales es que las personas estudiantes aprendan a expresar sus ideas de forma coherente y a justificar sus soluciones, fomentando así la argumentación matemática. La comunicación es vista como un componente esencial para construir y solidificar el aprendizaje, permitiendo a las personas estudiantes compartir y contrastar sus hallazgos y estrategias con otras.

Reflexionar y construir conocimiento: La reflexión es otro pilar de este enfoque. Después de completar las tareas, las personas estudiantes analizan sus resultados y procesos, consolidando su comprensión y estableciendo conexiones entre los distintos conceptos. La reflexión les permite a las personas estudiantes transformar sus experiencias y aprendizajes en conocimiento estructurado y aplicable.

5.2.2 Caracterización en el contexto del Cálculo

En el ámbito del Cálculo Diferencial e Integral, la Enseñanza Exploratoria implica el uso de tareas que posibiliten la investigación de propiedades de funciones, el análisis de la continuidad, y el estudio de derivadas e integrales. A través de actividades como la manipulación de gráficos y el análisis algebraico de funciones, las personas estudiantes exploran y descubren patrones, propiedades y teoremas matemáticos. Este tipo de aprendizaje se ve fortalecido mediante el uso de herramientas tecnológicas, como GeoGebra, que permiten visualizar conceptos abstractos y apoyan a las personas estudiantes en la formulación de conjeturas y en la deducción de propiedades matemáticas complejas.

5.3 Principios metodológicos de una clase de Enseñanza Exploratoria

La Enseñanza Exploratoria se estructura en tres fases clave: *presentación de la tarea*, *trabajo autónomo* y *discusión colectiva*, cada una con un propósito y dinámica específica que contribuyen al desarrollo del aprendizaje.

Presentación de la Tarea. En la fase de presentación, la persona docente introduce una tarea diseñada cuidadosamente para desafiar la comprensión de la persona estudiante y fomentar su exploración. Según Canavarro (2011), esta tarea no debe ser ni demasiado simple ni excesivamente difícil, sino que debe estar en la "zona de desarrollo próximo"de las personas estudiantes, de modo que se encuentren motivados y preparados para abordarla con los conocimientos previos que poseen. La tarea debe incentivar el interés y generar una pregunta o problema significativo, que impulse a las personas estudiantes a querer resolverlo y a explorar las distintas vías posibles.

Durante esta fase, la persona docente también se asegura de clarificar cualquier aspecto técnico o logístico de la tarea, estableciendo las expectativas de trabajo y promoviendo la autonomía en la búsqueda de soluciones. Es importante que la tarea esté formulada de tal manera que las personas estudiantes perciban la relevancia del problema y vean una oportunidad para aplicar y extender su conocimiento en Cálculo.

Trabajo Autónomo. En el trabajo autónomo, las personas estudiantes exploran y experimentan con la tarea de manera individual o en pequeños grupos, desarrollando hipótesis y estrategias para resolver el problema. Esta fase es fundamental para que las personas estudiantes ejerciten su pensamiento crítico y su capacidad para investigar de manera independiente. Oliveira et al. (2013) destacan que esta etapa permite a las personas estudiantes asumir un rol activo en su aprendizaje, desarrollando estrategias propias y cuestionando sus propias ideas a través de la experimentación y la observación de los resultados.

Es en esta etapa donde el papel de la persona docente se convierte en el de un facilitador, brindando apoyo sin intervenir directamente en el proceso de descubrimiento de sus estudiantes. La persona docente observa y monitorea el progreso de sus estudiantes, realizando intervenciones puntuales que promuevan la reflexión y orienten el aprendizaje sin resolverles el problema. Según los estudios, esta interacción medida contribuye a que las personas estudiantes internalicen los conceptos de Cálculo al enfrentarse a la tarea desde diferentes ángulos.

Discusión Colectiva. La discusión colectiva es el momento en el que las personas estudiantes, guiados por su docente, comparten sus hallazgos, comparan estrategias y reflexionan sobre sus resultados. Esta fase es crucial en la Enseñanza Exploratoria, ya que permite consolidar los aprendizajes individuales a través del intercambio de ideas y la construcción colectiva del conocimiento. Durante la discusión, las personas estudiantes presentan y justifican sus soluciones, y la persona docente orienta la conversación para abordar conceptos clave y rectificar posibles errores de interpretación o razonamiento.

Esta fase no solo facilita la corrección de errores, sino que también permite a las personas estudiantes entender los principios matemáticos subyacentes en la tarea, integrando los diferentes enfoques y conclusiones en un aprendizaje estructurado. Como afirma Canavarro (2011), esta fase de síntesis es fundamental para que las personas estudiantes comprendan el propósito de la tarea y los conceptos teóricos de Cálculo explorados durante la actividad.

5.4 Los Escenarios de Aprendizaje

Los escenarios de aprendizaje son representaciones detalladas de situaciones educativas que permiten a las personas docentes planificar y estructurar sus clases en función de objetivos específicos. Carroll (2000) define los escenarios como “historias sobre personas y sus actividades”, lo que facilita anticipar interacciones y desafíos en el proceso de aprendizaje. En el contexto del Cálculo, un escenario de aprendizaje permite crear una secuencia de tareas donde las personas estudiantes exploran y comprenden de manera progresiva los conceptos matemáticos.

5.4.1 Principios y Elementos de los Escenarios de Aprendizaje

Según Piedade et. al (2018) los escenarios de aprendizaje se construyen en base a varios principios y elementos que contribuyen a crear un entorno de enseñanza eficaz:

Contextualización y relevancia: Las tareas deben estar contextualizadas en problemas significativos para las personas estudiantes, facilitando la conexión entre los conceptos matemáticos y situaciones aplicables en el mundo real.

Flexibilidad y adaptabilidad: Un escenario debe ser flexible, permitiendo que la persona docente ajuste la tarea según las necesidades y ritmo de sus estudiantes, favoreciendo un aprendizaje diferenciado.

Interacción y colaboración: Los escenarios promueven la comunicación y el trabajo en equipo, lo cual es esencial en la Enseñanza Exploratoria para que las personas estudiantes desarrollen habilidades de argumentación y justificación.

La Enseñanza Exploratoria y los escenarios de aprendizaje transforman profundamente el papel de la persona docente y el enfoque tradicional de la educación en Cálculo. Este enfoque requiere que la persona docente actúe como facilitadora de un aprendizaje activo, donde las personas estudiantes construyen y reconstruyen su conocimiento a partir de experiencias concretas y colaborativas. Como enfatiza Oliveira et al. (2013), el éxito de la Enseñanza Exploratoria depende de la capacidad de la persona docente para diseñar tareas desafiantes y para fomentar un ambiente de aprendizaje en el cual sus estudiantes se sientan motivados a explorar y descubrir.

Además, los escenarios de aprendizaje permiten a la persona docente estructurar la enseñanza de manera que se aborden múltiples perspectivas y se promueva un aprendizaje integral. Carroll (2000) resalta que los escenarios facilitan una comunicación orientada al trabajo y permiten gestionar la complejidad de las interacciones en el aula, promoviendo un aprendizaje más inclusivo y adaptativo.

En conclusión, la metodología de la Enseñanza Exploratoria y su planificación desde los escenarios de aprendizaje en el Cálculo Diferencial e Integral no solo enriquece la comprensión de las personas estudiantes, sino que también crea un entorno que promueve habilidades críticas como la colaboración, el pensamiento lógico y la capacidad de justificar matemáticamente. Este enfoque representa una pedagogía que va más allá de la transmisión de conocimientos, enfocándose en el desarrollo integral de las personas estudiantes y en la construcción de un pensamiento matemático profundo y adaptable.

Al cultivar la curiosidad, el razonamiento y la capacidad de argumentación, la Enseñanza Exploratoria contribuye a formar individuos capaces de enfrentar problemas complejos, analizar situaciones y tomar decisiones fundamentadas, habilidades esenciales no solo en el ámbito académico, sino en su vida profesional y cotidiana.

6. PROPUESTAS DIDÁCTICAS EN EL CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

En el presente capítulo se presenta un conjunto de propuestas didácticas trabajadas en el proyecto docencia durante I ciclo 2023, II ciclo 2023 y I ciclo 2024. Algunas de estas propuestas fueron implementadas dos veces en grupos de cálculo diferentes, y en ciclos consecutivos, con el objetivo de que después de la primera implementación se hiciera una mejora de la propuesta para su reimplementación.

Las propuestas didácticas incluidas en este capítulo corresponden a las propuestas finales; es decir, al último diseño e implementación de la propuesta creada por personas docentes de la UCR participantes en el proyecto docencia durante uno o más de los tres ciclos regulares referidos. No así, a modo de que la persona lectora pueda comparar cambios hechos entre una versión de diseño y otra, la tarea presentada en la sección 6.4 muestra el enunciado de la tarea matemática que se implemento en un ciclo (primera versión) y el enunciado mejorado de la misma tarea que se implementó en el siguiete ciclo (segunda versión).

Las propuestas didácticas han sido implementadas en la Sede Rodrigo Facio, algunas con grupos de estudiantes de cursos de servicio que ofrece la Escuela de Matemática, y una propuesta en particular con un grupo de estudiante que cursa la carrera de Educación Matemática. En ambos casos, las personas docentes implementadoras fueron las personas docentes participantes del proyecto docencia que participaron en el diseño de la propuesta. En total, se diseñaron e implementaron cuatro propuestas, referentes a las áreas temáticas de límites en una variable, derivación en una variable, integración en una variable, y derivación en varias variables.

Además, se coloca al final del capítulo, mediante una lista de hipervínculos, una sección de otras propuestas de diseño en didáctica del Cálculo, para otras temáticas de Cálculo en una y varias variables. Dichas propuestas fueron comentadas desde la teoría y la práctica durante las sesiones del I ciclo 2024, siendo adaptadas de propuestas que se pueden encontrar en estudios empíricos encontrados en la literatura en didáctica del Cálculo.

A continuación, se presentan las propuestas didácticas diseñadas e implementadas durante los ciclos lectivos referidos, presentando para ello el escenario de aprendizaje diseñado, el enunciado de la tarea matemática implementada y las principales reflexiones profesionales por parte de las personas implementadoras en relación a dicho diseño.

6.1 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL

6.1.1 Escenario de aprendizaje

Autores de la propuesta de diseño: Jose David Vargas Gamboa, Fabián Gutiérrez Fallas, Evelyn Morales.

1. Tema

Propuesta didáctica para iniciar el estudio del concepto de límite.

2. Principios de diseño

P1. Utilizar representaciones gráficas, geométricas y simbólicas (algebraica y numérica) para acercar a la persona estudiante a interiorizar el concepto de límite.

P2. Propiciar el uso de la tecnología para visualizar de manera dinámica la noción de límite.

P3. Plantear preguntas abiertas y exploratorias que incentiven la experimentación y reflexión de las personas estudiantes en el contexto de límites.

P4. Orientar a las personas estudiantes a plantear conjeturas acerca del concepto de límite.

P5. Propiciar en el estudiantado la validación de sus respuestas a partir del intercambio de ideas.

3. Conjetura de formación-aprendizaje

La comprensión del concepto de límite se puede evidenciar a partir de las transformaciones de las diferentes representaciones que realiza la persona estudiante.

4. Objetivo de aprendizaje general

Explorar la concepción dinámica de límite a partir de representaciones gráficas, geométricas y simbólicas.

5. Objetivos de aprendizaje específicos

- Identificar el límite de una sucesión o una función particular, dada su representación gráfica.
- Conjeturar la relación que existe entre el área de un polígono regular inscrito en un círculo (conforme se va aumentando el número de lados), con el área de dicho círculo, en términos de un límite.
- Explorar el concepto de límite desde la perspectiva de la física, la biología, la química y la economía.
- Describir el comportamiento que tienen las imágenes de una función, alrededor de un valor determinado.

6. Estructura conceptual-procedimental

- Conceptos: fenómenos donde está presente el límite de una función, convergencia de una sucesión, imágenes, preimágenes, dominio, ámbito. Específicamente:

a) Operaciones numéricas para ver el comportamiento de las aproximaciones.

b) Conceptos básicos de áreas de figuras geométricas simples, para identificar la relación entre áreas.

c) Gráfica de una función.

d) Extraer información a partir de la gráfica de una función.

e) Graficar una función para que cumpla con una condición dada (la definición de límite).

f) Definición formal de límite de una sucesión o una función.

- Procedimientos: área de polígonos y de círculos, estimaciones y aproximaciones numéricas, cálculo de imágenes de funciones, análisis del comportamiento de las imágenes de una función.
- Resultado: visualización de la noción dinámica de límite de una función.

7. Nivel escolar

Nivel universitario para estudiantes que no han estudiado conceptos de cálculo diferencial e integral. Precálculo o Cálculo I (al inicio del curso), así como cursos iniciales de Enseñanza de la Matemática, Educación Matemática o Matemática.

8. Tiempo

3 horas.

9. Descripción de la tarea matemática

Las tareas por realizar buscan que el estudiantado comprenda el concepto de límite. Están orientadas a generar una participación por parte del estudiantado de forma que interactúe con las demás personas estudiantes y con la persona docente para orientarse en la búsqueda de las soluciones a las preguntas planteadas. La guía de trabajo entregada tiene la finalidad de conducir a la persona estudiante a un avance progresivo y de dificultad creciente en el desarrollo del concepto.

10. Rol del docente

- Proporcionar aplicaciones interactivas a las personas estudiantes.
- Preparar y proporcionar uno o más cuestionarios que involucren el uso de las aplicaciones para la parte visual y también preguntas de carácter numérico y algebraico.
- La persona docente estará a cargo de resolver dudas, sin embargo, la idea no es dar la respuesta correcta inmediatamente, sino incentivar la generación de escenarios que promuevan el aprendizaje y pensamiento abstracto.

11. Rol del estudiante

- Uso de las aplicaciones interactivas para explorar diversas situaciones con funciones y sucesiones específicas.
- Responder preguntas dadas por la persona docente en un cuestionario.
- Plantear soluciones a las situaciones propuestas por la persona docente.

12. Interacciones

- Docente-estudiante: Se llevan a cabo por medio de preguntas generadoras, de parte de la persona docente, que busquen desarrollar inquietudes y orientar el razonamiento. También, se espera desarrollar un ambiente de sana curiosidad académica, de forma que el estudiantado se sienta libre de aportar y preguntar lo que considere necesario.
- Estudiante-estudiante: Se pretende que haya momentos de interacción entre estudiantes, de forma que los diálogos logren encaminar el aprendizaje del concepto por parte de los involucrados.

13. Resumen de la narrativa del escenario de aprendizaje

- Primera parte- exploración de la fenomenología en el cálculo de límites- en pequeños grupos de trabajo las personas estudiantes leen y estudian el material suministrado para que luego, en una plenaria, expongan acerca de lo aprendido con ese fenómeno dado.
- Segunda parte- interacción con el programa de GeoGebra con la parte de polígonos y círculos- A partir de la secuencia dada, el estudiantado discutirá y brindará sus puntos de vista con respecto a lo indicado, que está relacionado con la convergencia de sucesiones. Esto tiene conexión con una forma de observar el comportamiento del límite de funciones.
- Tercera parte- estudio del comportamiento de las imágenes de una función alrededor de un punto que no necesariamente pertenece al dominio de una función- En esta parte se tendrán algunos momentos de trabajo independiente y otros donde la persona docente puede presentar otras situaciones, esto con el fin de consolidar ese previo importante hacia un curso de Cálculo I.

6.1.2 Enunciado de la tarea matemática propuesta

La tarea matemática propuesta se ha diseñado en Geogebra online, como un libro digital dividido en 5 capítulos. Cada capítulo cuenta con un encabezado de indicaciones, seguido de videos, teoría o archivos online manipulables que invitan a la persona estudiante a explorar conceptos matemáticos para ir construyendo la noción de límite. En este sentido, los capítulos son dependientes, pues el éxito en el aprendizaje esperado al trabajar un capítulo requiere que la persona estudiante haya explorado los capítulos previos.

El capítulo 1 invita a la persona estudiante a repasar el concepto de función, incluyendo los conceptos asociados de preimagen e imagen. En el capítulo 2 se invita a la persona estudiante a explorar la idea intuitiva de límite mediante aproximaciones geométricas realizadas a una figura geométrica inicial, para posteriormente realizar aproximaciones pero con la gráfica de una función. En el capítulo 3 se retoma la aproximación con funciones, pero ahora con funciones contextualizadas en diferentes campos de la vida cotidiana, buscando dar sentido al objeto matemático de función. En el capítulo 4 se le presenta a la persona estudiante una gráfica de una función pero en un contexto matemático, buscando que esta obtenga conjeturas. Finalmente, en el capítulo 5 se realiza institucionaliza el concepto de límite.

El acceso a la tarea matemática propuesta como libro digital de Geogebra se puede acceder a partir del siguiente enlace:

https://www.geogebra.org/m/rxemdqk4

Figura 6.1: Libro digital para la exploración de la noción de Límite

El acceso al escenario de aprendizaje (editable) se puede acceder a partir del siguiente enlace:
https://docs.google.com/document/d/1e7rHF_MuyfwryjYms_xJyOqnQKSOMpGW/edit?usp=sharing&ouid=110416181461970057753&rtpof=true&sd=true

El acceso a la guía de la tarea matemática (editable) se puede acceder a partir del siguiente enlace:
https://docs.google.com/document/d/1g5pdFwpevkiDPmFl5j2zhR95Ye1WhopM/edit?usp=sharing&ouid=110416181461970057753&rtpof=true&sd=true

6.1.3 Reflexiones profesionales de la propuesta

- *Aspectos de la propuesta que contribuyen al mejoramiento del aprendizaje del contenido matemático explorado.*
  La propuesta contribuye al uso de distintas representaciones para el aprendizaje de la matemática de manera dinámica, esto a partir del uso de la herramienta de libro de GeoGebra, la cual permite la visualización dinámica del concepto. El dinamismo de un libro permite no solo acceder a las vistas que posee la aplicación de descarga de Geogebra, sino que también permite introducir texto y archivos media que permiten la construcción del conocimiento dinámico de forma independiente.

- *Dificultades/limitaciones asociadas a la implementación de la propuesta.*
  La principal limitación es el tiempo. Al considerarse que el libro de Geogebra es un recurso de autoaprendizaje, no se puede dejar de lado el monitoreo por parte de la persona docente, pues siempre surgen dudas en relación a las indicaciones a seguir en cada parte del libro.
  Las personas estudiantes pueden presentar dificultades también con la misma manipulación de libro si no están acostumbradas a trabajar con recursos online que requieren de manipulación de objetos, como es el caso de un libro de Geogebra.

- *Cambios que se le podrían realizar a la propuesta para futuras implementaciones.*
  La propuesta debe mejorarse en las indicaciones para estudiantes y docentes. Además, quedó pendiente la elaboración de algunas secciones que complementan las existentes, así como otro Libro de GeoGebra para la definición formal de límite.

6.2 DERIVACIÓN EN UNA VARIABLE

6.2.1 Escenario de aprendizaje

Autores de la propuesta de diseño: Luis Diego Céspedes Serrano, Guillermo Ramírez Montes.

1. Tema

Deducción del caso $\frac{0}{0}$ de la Regla de L´Hôpital

2. Principios de diseño

P1. Seguir una metodología de clase basada en la Enseñanza Exploratoria.

P2. Utilizar un contexto matemático basado en el uso de la representación numérica y gráfica como elementos para promover la inferencia informal de teoremas matemáticos.

P3. Promover la interpretación de resultados matemáticos numéricos y la conexión entre los mismos.

P4. Orientar la actividad matemática de la persona estudiante para el desarrollo de su pensamiento matemático avanzado desde la reflexión, deducción y comunicación matemática.

P5. Promover procesos de razonamiento matemático: formulación y validación de conjeturas, justificación.

P6. Promover el trabajo en grupo como elemento para fomentar la reflexión de ideas matemáticas.

3. Conjetura de formación-aprendizaje

Utilizar representaciones numéricas y gráficas con apoyo de recurso digital para deducir informalmente el teorema de la Regla de LHôpital ofrece al estudiantado un referente más significativo del porqué ocurre las cosas, en vez de darle directamente el teorema y forzarle a creer.

4. Objetivo de aprendizaje general

Inferir la regla de L´Hôpital para el caso $\frac{0}{0}$, a partir del uso de representaciones numéricas y gráficas de imágenes de funciones y sus correspondientes derivadas, y apoyado en el uso de Geogebra como apoyo tecnológico.

5. Objetivos de aprendizaje específicos

- Retomar el concepto de imagen de una función y de imagen de la función derivada a partir del criterio de la función o de su representación gráfica.
- Identificar el tipo de representación que prevalece en el estudiantado al realizar cálculos de imágenes de funciones.
- Relacionar cálculos numéricos asociados a límites de funciones, para casos donde existe indeterminación y no existe indeterminación en un punto.
- Deducir proposiciones matemáticas a partir de las relaciones establecidas.
- Aplicar la regla de L´Hôpital en la resolución de una tarea matemática.

6. Estructura conceptual-procedimental

- Conceptos: función, imagen de una función, límite de una función, pendiente de la recta tangente, derivada.
- Procedimientos: cálculos algebraicos y numéricos, formulación y verificación de conjeturas.
- Resultados: la regla de L´Hôpital para un caso particular.

7. Nivel escolar

Universitario: Curso de Cálculo I.

8. Tiempo

2 horas.

9. Descripción de la tarea matemática

La actividad está formada por 2 partes. En la primera parte el estudiantado trabaja la tarea matemática, la cual consta de tres secciones, con la intención de deducir la regla de L´Hôpital al final. En la segunda parte se realiza la discusión colectiva, con la intención de escuchar deducciones a las que llegaron, dificultades de la tarea y fortalezas de la tarea en relación a la enseñanza del teorema mediante métodos tradicionales. Se concluye la actividad con la escritura formal del teorema en la pizarra.

10. Rol del docente

Monitoreo constante durante el trabajo de la persona estudiante y mediador de discusión colectiva.

11. Rol del estudiante

Resolver la tarea matemática, razonando sobre la misma y usando herramientas vistas durante el curso, además de opinar sobre su trabajo realizado en grupo.

12. Interacciones

La interacción de la persona docente con las personas estudiantes es mediada por el discurso oral; la formulación de preguntas para guiar al estudiantado cuando ocurran estancamientos; la formulación de preguntas para profundizar sobre cálculos realizados en el papel, pero no justificados; y la mediación de la discusión colectiva. La persona estudiante formulará preguntas al investigador, quien no dará respuestas concretas sobre cómo resolver determinada situación matemática. Entre las personas estudiantes la interacción es de diálogo reflexivo para trabajar la tarea matemática.

13. Resumen de la narrativa del escenario de aprendizaje

En los primeros 5 min de la clase se establecen los objetivos de la actividad y se forman los grupos de trabajo. Estos grupos se forman de tal manera que tengan 3 o 4 integrantes, de manera que en cada grupo haya solo estudiantes repitentes o estudiantes que llevan el curso por primera vez. En la siguiente hora el estudiantado trabaja la tarea en sus grupos de trabajo. Posteriormente se dedican 15 min de discusión colectiva. Finalmente, se finaliza formalizando el teorema en la pizarra, aludiendo a que el teorema se aplica también para otros casos de formas indeterminadas.

6.2.2 Enunciado de la tarea matemática propuesta

I Parte: Calentamiento

Considere las siguientes funciones:

$$f : IR \to IR, f(x) = \frac{8}{35}x^2 + \frac{6}{35}x - \frac{18}{7}$$

$$g : IR \to IR, g(x) = \frac{113}{1050}x^3 - \frac{173}{175}x^2 + \frac{667}{1050}x + \frac{143}{35}$$

A continuación, se presenta la gráfica de las funciones anteriores en un mismo plano cartesiano.

Determine,

a) Cada uno de los valores solicitados, sin uso de calculadora.

- El valor numérico de $f(5)$.
- El valor numérico de $g(8)$.
- Un valor numérico aproximado para $f(4)$. Brinde su aproximación con 1 decimal.

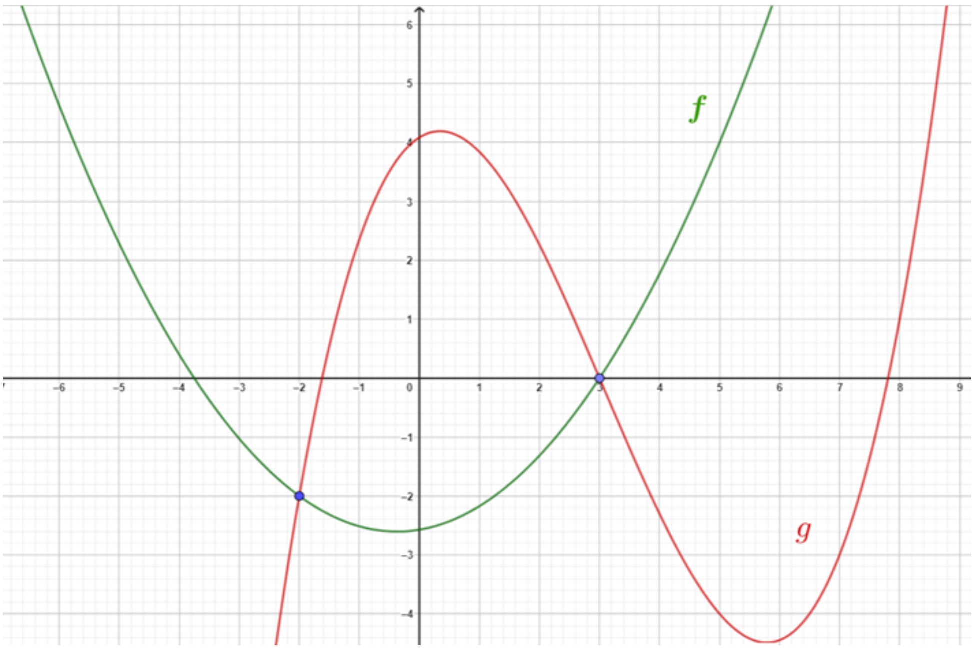


Figura 6.2: Gráfica de funciones f y g.

b) Cada uno de los valores solicitados, apoyándose para tal efecto con su teléfono celular o laptop para manipular el archivo de GeoGebra disponible en el siguiente enlace:
`https://www.geogebra.org/m/pnsxpkb5`.

Figura 6.3: Exploración en Geogebra de la Regla de L´Hôpital

Puede asignarle valor al parámetro a introduciendo un valor en la "caja de valor" o moviendo el "deslizador".

- La pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 5$.
- El valor numérico de $g'(8)$.
- El valor de $\frac{df(x)}{dx}$ en $x = 4$.

Nota: recuerde que la derivada de una función se puede denotar de diferentes formas y tener diferentes interpretaciones conceptuales.

c) Las expresiones matemáticas solicitadas a continuación:

- Un punto de intersección entre las gráficas de las funciones f y g, tales que $\frac{f(x)}{g(x)}$ no exista.
- Un punto de intersección entre las gráficas de las funciones f y g, tales que $\frac{f(x)}{g(x)}$ exista.

Nota: recuerde que, una manera de que una expresión no exista, es cuando se presenta una forma indeterminada.

II Parte: Contraste

A partir de las funciones f y g definidas en la tarea 1, definamos la función

$$h : IR - \{\frac{699 - \sqrt{1134961}}{226}, 3, \frac{699 + \sqrt{1134961}}{226}\} \to IR,$$

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{8}{35}x^2 + \frac{6}{35}x - \frac{18}{7}}{\frac{113}{1050}x^3 - \frac{173}{175}x^2 + \frac{667}{1050}x + \frac{143}{35}}$$

A continuación se aprecia las gráficas de las tres funciones en un mismo plano cartesiano.

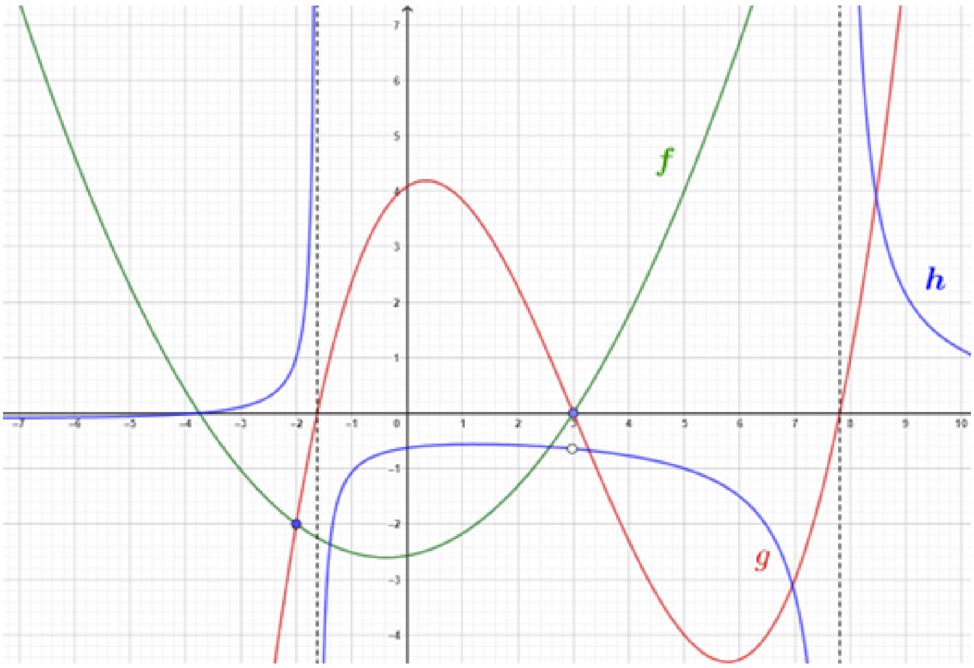


Figura 6.4: Gráfica de función h.

a) Determine:
   Para f y g

   - $f(3)$.
   - $g(3)$.
   - ¿$\frac{f(3)}{g(3)}$ existe?
   - ¿cuál es el valor de $lim_{x\to 3}\frac{f(3)}{g(3)}$?

   Para f' y g'

   - $f'(3)$.
   - $g'(3)$.
   - ¿$\frac{f'(3)}{g'(3)}$ existe?
   - ¿cuál es el valor de $lim_{x\to 3}\frac{f'(3)}{g'(3)}$?

b) Determine:
   Para f y g

   - $f(-2)$.
   - $g(-2)$.
   - ¿$\frac{f(-2)}{g(-2)}$ existe?
   - ¿cuál es el valor de $lim_{x\to 3}\frac{f(-2)}{g(-2)}$?

   Para f' y g'

   - $f'(-2)$.
   - $g'(-2)$.
   - ¿$\frac{f'(-2)}{g'(-2)}$ existe?
   - ¿cuál es el valor de $lim_{x\to 3}\frac{f'(-2)}{g'(-2)}$?

c) Determine:
   Para f y g

   - $f(0)$.
   - $g(0)$.
   - ¿$\frac{f(0)}{g(0)}$ existe?
   - ¿cuál es el valor de $lim_{x\to 3}\frac{f(0)}{g(0)}$?

Para f' y g'

- $f'(0)$.
- $g'(0)$.
- ¿$\frac{f'(0)}{g'(0)}$ existe?
- ¿cuál es el valor de $lim_{x \to 3} \frac{f'(0)}{g'(0)}$?

d) ¿Qué impresiones tiene al comparar el límite del cociente de las funciones (lado izquierdo) con el límite del cociente de las derivadas de esas mismas funciones (lado derecho), para los valores respectivos a los que tiende la x en cada inciso (incisos a, b, c)?

III Parte: Deducción

a) Reescriba $\frac{f'(a)}{g'(a)}$ en términos de $f(x)$ y $g(x)$.

$$lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} =$$

Nota: Recuerde que, si p es una función, $p'(a) = lim_{x \to a} \frac{p(x)-p(a)}{x-a}$

b) Exprese lo encontrado anteriormente en un solo límite y simplificado al máximo.

c) Si suponemos que $f(a) = 0$ y $g(a) = 0$ y $lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, entonces, a partir del inciso 3b), podemos concluir que

$$lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} =$$

d) ¿Su impresión destacada en el inciso 2(d) se ha reforzado a partir de la relación anterior?, explique.

e) ¿La relación encontrada en el inciso 3c) se puede usar para calcular $lim_{x \to 3} \frac{f(x)}{g(x)}$?¿Cómo escribiría el $lim_{x \to 3} \frac{f(x)}{g(x)}$ a partir de su respuesta anterior?

f) ¿La relación encontrada en el inciso 3c) se puede usar para calcular $lim_{x \to -2} \frac{f(x)}{g(x)}$?¿Por qué?

IV Parte: Consolidación

Utilice la relación encontrada para calcular:

- $lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x^4}$
- $lim_{x \to 0} \frac{1 - cos(x)}{x^2}$

El acceso al escenario de aprendizaje (editable) se puede acceder a partir del siguiente enlace:
https://docs.google.com/document/d/1Z8UAzjiDvVnSX-H8ln8IDd5YLbGL8zoC/edit?usp=sharing&ouid=110416181461970057753&rtpof=true&sd=true

El acceso a la guía de la tarea matemática (editable) se puede acceder a partir del siguiente enlace:
https://docs.google.com/document/d/1ER1HiOWMRV_z6hOfkFq_gdIByrcgrSVA/edit?usp=sharing&ouid=110416181461970057753&rtpof=true&sd=true

6.2.3 Reflexiones profesionales de la propuesta

- *Aspectos de la propuesta que contribuyen al mejoramiento del aprendizaje del contenido matemático explorado.*

  La tarea permite que la persona estudiante inicialmente retome solo conocimientos previos de precálculo necesarios para abordar la tarea, esto a partir de la primera parte; además permite que la persona estudiante haga conexiones entre la representación geométrica, numérica y algebraica asociada a una función para llegar a darle sentido a la Regla de L'Hôpital.

  Por otra parte, en cuanto a la gestión de clase, se valora mucho el hecho del trabajo en equipo divido por estudiantes repitentes y no repitentes. Esta parte de la gestión mide avances en la resolución de la tarea según el tipo de conocimiento que tiene la persona estudiante, y al mismo tiempo ayuda a la persona docente a plantear preguntas guía más específicas según el equipo de trabajo.

  No se puede dejar de lado el componente tecnológico que ofrece el trabajar con Geogebra, el cual ayuda a que la persona estudiante no se centre en los cálculos si no en los resultados numéricos y su conexión con la vista gráfica a medida que manipula cálculos numéricos.

- *Dificultades/limitaciones asociadas a la implementación de la propuesta.*

  La principal limitación es el tiempo, pues aunque se planifica la propuesta con tiempos definidos para cada parte que la conforma, cada grupo avanza a diferentes ritmos, dificultando cumplir con los tiempos establecidos.

- *Cambios que se le podrían realizar a la propuesta para futuras implementaciones.*

  Ahora bien, en cuanto a la gestión, se recomienda que en lugar de hacer un largo trabajo en equipos de trabajo y al final una plenaria, podría ser más útil hacer plenarias al acabar cada parte de la tarea. Esto implicaría dedicar más tiempo a la implementación, pero ayudaría a que el ritmo de avance de los equipos de trabajo sea más uniforme.

  Por otra parte, se recomienda dar a las personas estudiantes las definiciones de conocimientos previos en cada apartado, donde se les pide algún cálculo o deducción, pues algunas personas estudiantes no recuerdan las definiciones.

6.3 INTEGRACIÓN EN UNA VARIABLE

6.3.1 Escenario de aprendizaje

Autores de la propuesta de diseño: Rebeca Ventura Saravia, Helen Alfaro Víquez, Rodolfo Fallas Soto, Guillermo Ramírez Montes, Fabián Gutiérrez Fallas.

1. Tema

Deducción del Teorema Fundamental del Cálculo

2. Principios de diseño

P1. Seguir una metodología de clase basada en la Enseñanza Exploratoria.

P2. Utilizar un contexto fenomenológico para la formulación de una situación que involucra un problema asociado con el cambio de la velocidad de una partícula.

P3. Promover la interpretación y uso de distintas representaciones durante la actividad matemática de la tarea.

P4. Orientar la actividad matemática de la persona estudiante para el desarrollo de su pensamiento matemático avanzado desde la reflexión, deducción y comunicación matemática.

P5. Promover procesos de razonamiento matemático: formulación y validación de conjeturas, justificación

3. Conjetura de formación-aprendizaje

Utilizar representaciones y concepciones geométricas, para ejemplificar los teoremas fundamentales del cálculo, ofrece a la persona estudiante un referente más significativo que solamente el trabajo algebraico.

4. Objetivo de aprendizaje general

Comprender el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) a partir de su deducción mediante el uso de una tarea exploratoria.

5. Objetivos de aprendizaje específicos

- Identificar que la derivada de la función que representa el área bajo la curva es la función de la curva.
- Reconocer la relación entre el área bajo la curva, la antiderivada de una función y la integral definida de una función.
- Deducir una expresión matemática para el TFC.
- Aplicar el TFC en la resolución de problemas.

6. Estructura conceptual-procedimental

- Procedimientos: cálculos algebraicos, representaciones geométricas, formulación y verificación de conjeturas
- Resultados: el TFC, la regla de Barrow.

7. Nivel escolar

Universitario: Curso de Cálculo I o similares cursos de Cálculo en una variable.

8. Tiempo

2 horas.

9. Descripción de la tarea matemática

La tarea está conformada por 4 partes. La primera parte busca problematizar una situación desde un contexto de Física relacionado con el movimiento de una partícula. En la segunda parte, se hace uso de una exploración tecnológica que modela la situación presentada. La tercera parte, consiste en una secuencia de momentos que tienen la intencionalidad de guiar a la persona estudiante en su actividad matemática: haciendo cálculos, representaciones, respondiendo preguntas, entre otros. Finalmente, la cuarta parte tiene el propósito de que la persona estudiante aplique los resultados matemáticos obtenidos para resolver la problemática planteada en la primera parte.

10. Rol del docente

Guía, orienta y dirige los tiempos para cada parte de la tarea. Mantiene el interés y motivación por resolver la tarea.

11. Rol del estudiante

Activo, autónomo, formula conjeturas, traza la ruta de solución. Verifica sus resultados.

12. Interacciones

La interacción de la persona docente hacia las personas estudiantes será mediada por el discurso oral, la formulación de preguntas y la retroalimentación constante de los resultados que van obteniendo. La persona estudiante formulará sus consultas a la persona docente. Entre las personas estudiantes, la interacción será a través de un diálogo constructivo para resolver la tarea.

13. Resumen de la narrativa del escenario de aprendizaje

Según la metodología de Enseñanza Exploratoria, en la primera fase – presentación de una tarea matemática – la persona docente guiará la lectura del contexto, verificando que todos estén comprendiendo la situación, la problemática planteada y motivando el interés por acercarse a la solución del problema desde y a través de la matemática. Durante la fase dos – trabajo autónomo de las personas estudiantes – se formarán equipos de 2 o 3 estudiantes, donde la persona docente asumirá el rol de orientador y guía, acercándose a las mesas de trabajo, escuchando a las personas estudiantes, tomando nota de sus aportes y resultados, con el propósito de ir detectando dificultades que deban ser atendidas para la solución efectiva de la tarea. Durante este momento, se espera que las personas estudiantes mantengan un diálogo constructivo y evidencien elementos de su actividad matemática movilizando sus conocimientos previos, haciendo conexiones y justificando matemáticamente sus resultados, con el propósito de obtener conclusiones que se acerquen al propósito de deducir el resultado del Teorema Fundamental del Cálculo. Finalmente, en la fase tres – discusión colectiva y sistematización de resultados – nuevamente la persona docente toma la batuta para dirigir la discusión, haciendo énfasis en aquellos resultados que promuevan los resultados esperados. Se concluye con la formalización, dando el enunciado del TFC.

6.3.2 Enunciado de la tarea matemática propuesta

I Parte: Exploración del contexto

En física, la rapidez se define como la magnitud del vector velocidad y la aceleración como la magnitud del vector aceleración. En términos generales, la velocidad viene a medir la variación de la posición (de una partícula u objeto) en un instante de tiempo específico; mientras que la aceleración mide la variación de la velocidad en un instante de tiempo específico. En este sentido, se tiene que la velocidad es la tasa de cambio de la posición respecto del tiempo; mientras que la aceleración es la tasa de cambio de la velocidad respecto del tiempo. En el caso en que la dirección de una partícula sea a lo largo de una recta (Movimiento Rectilíneo), el estudio de la velocidad y la aceleración de dicha partícula se simplifica a estudiar las magnitudes $v(t)$ y $a(t)$, respectivamente, donde t representa el instante de tiempo específico en que se quieren medir dichas magnitudes.

Además, si $a(t)$ es constante en el intervalo $[t_1, t_2]$, se satisface la siguiente igualdad:

$$\Delta v = a(t) \cdot \Delta t$$

Con $\Delta v = v(t_2) - v(t_2)$ y $\Delta t = t_2 - t_1$; $t_1 < t_2$

Pero, **¿qué sucede si la aceleración es variable?**

Suponga un contexto en el cual la aceleración $a(t)$ es variable en el tiempo. Además, suponga que el movimiento es a lo largo del eje x, de $t = a$ hasta $t = b$, conforme a la gráfica proporcionada, donde se modela el valor de la aceleración de una partícula en movimiento durante un período de 5 segundos.

$$a(t) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 \leq t < 3 \\ \\ t - 2 & si \quad 3 \leq t \leq 5 \end{cases}$$

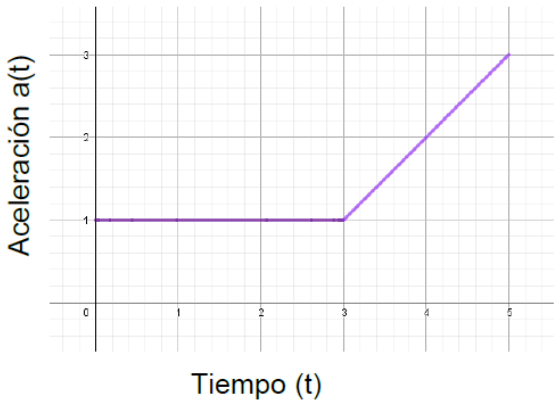


Figura 6.5: Gráfica de aceleración vrs tiempo.

¿Cuánto es Δv...

a) de $t = 0$ hasta $t = 3$?

b) de $t = 3$ hasta $t = 5$?

II Parte: Exploración tecnológica de la situación

Ingrese al siguiente enlace (o escanee el código QR) y explore la aplicación tecnológica que se presenta.

https://www.geogebra.org/m/fytp9zz2

Figura 6.6: QR gráfica aceleración-tiempo

Conjeture sobre posibles valores de Δv cuando la partícula se mueve de $t = 3$ hasta $t = 4$ y de $t = 4$ hasta $t = 5$.

III Parte: Deducción del TFC

3.1. Considere la función $f : [0, +\infty[\to IR$, $f(x) = x$, representada en la imagen abajo. Se requiere calcular varias áreas bajo la curva de f desde $x = 0$ hasta $x = 43$, **haciendo uso de áreas de triángulos**.

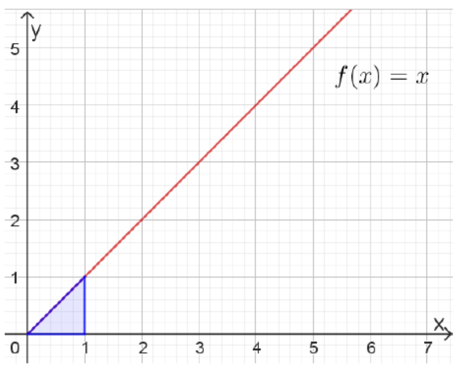


Figura 6.7: Área bajo la curva hasta $x = 1$.

Complete la siguiente tabla con la información solicitada, correspondiente al cálculo de las áreas de los triángulos hasta $x = a$.

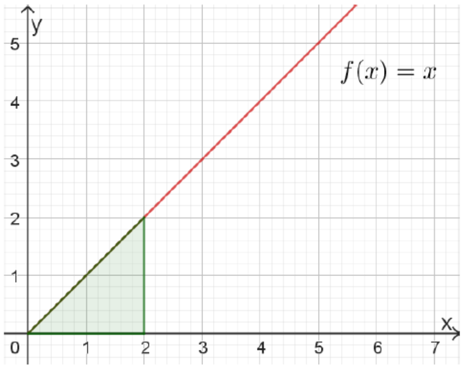


Figura 6.8: Área bajo la curva hasta $x = 2$

Preimagen x	Imagen $f(x)$	Área $F(x)$ del triángulo
1		
2		
3		
4		
5		
7		
11		
43		
a		

3.2. Utilizando la información de la tabla anterior, realice un esbozo de la gráfica de la función área $F(x)$. ¿Es $F(x)$ una función conocida?

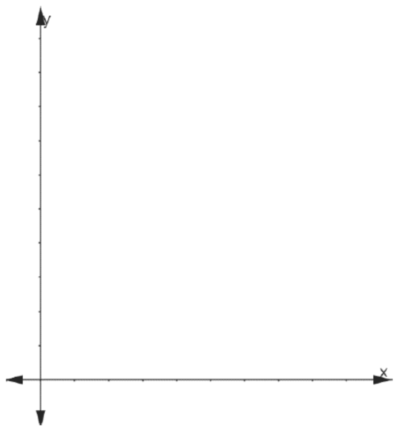


Figura 6.9: Esbozo de gráfica de $F(x)$.

3.3 Utilizando la representación gráfica y algebraica de la función $F(x) = \frac{x^2}{2}$:

a) Determine las pendientes de la recta tangente en los valores de x que se le indica. Escriba el resultado en la tabla.

Preimagen x	pendiente de la recta tangente
1	
2	
3	
4	
5	

b) ¿Cuál es la relación entre $f(x)$ y $F(x)$?, describalo con sus propias palabras.

c) ¿Qué nombre le propone asignarle a $F(x)$?

3.4. Utilizando la notación de integral definida, que permite escribir el área bajo la curva, escriba las áreas encontradas en la sección 3.1 usando tal notación. Para tal efecto, complete los cuadros proporcionados a continuación:

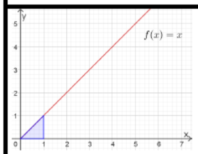
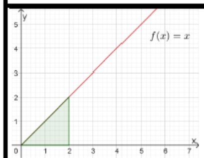
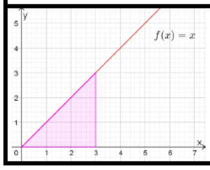
	Función área como integral **definida**
 Figura 1. Cuando $x = 1$	$F(1) = \int_0^1 f(t)dt$
 Figura 2. Cuando $x = 2$	$F(2) =$
 Figura 3. Cuando $x = 3$	$F(3) =$

Figura 6.10: Integral definida y aréa bajo la curva.

3.5. Considere la siguiente gráfica de $f : IR \to IR, f(x) = x$, en la cual se representan dos áreas bajo la curva asociada a dicha función.

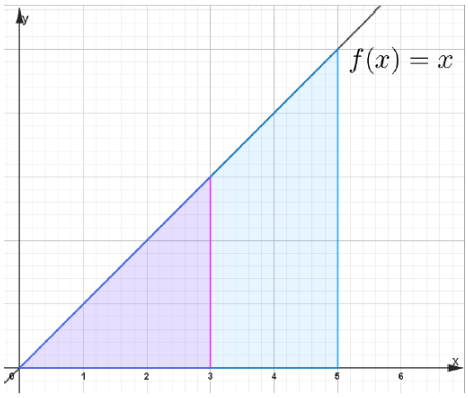


Figura 6.11: Áréas bajo la curva de $f(x) = x$.

a) Indique en la representación gráfica el área que representa la integral:

$$I = \int_3^5 f(x)dx$$

b) Haciendo uso de los cálculos realizados en la actividad 3.1, calcule I.

3.6. Calcule las siguientes integrales usando antiderivadas conocidas.

a) $I = \int_2^3 e^x dx$

b) $I = \int_9^2 5\frac{1}{2\sqrt{y}}dy$

c) $I = \int_0^2 x^3 dx$

IV parte: Aplicación matemática y resolución del problema

4.1 ¿Cuál es la velocidad de la partícula de $t = 3$ hasta $t = 5$?

4.2. Formule un modelo que permita calcular la velocidad $v(t)$, de un objeto en cualquier instante de tiempo t, sujeta a una aceleración $a(t)$ cuando el objeto se mueve de $t = a$ hasta $t = b$.

El acceso al escenario de aprendizaje (editable) se puede acceder a partir del siguiente enlace: https://docs.google.com/document/d/1qKwvOe6fPCMkL74C3HkrYFFvW4B_quc8/edit?usp=sharing&ouid=110416181461970057753&rtpof=true&sd=true

El acceso a la guía de la tarea matemática (editable) se puede acceder a partir del siguiente enlace:
https://docs.google.com/document/d/1E8OqUAl8m5VSoXAJQV0_sblXr07D4NZn/edit?usp=sharing&ouid=110416181461970057753&rtpof=true&sd=true

6.3.3 Reflexiones profesionales de la propuesta

- *Aspectos de la propuesta que contribuyen al mejoramiento del aprendizaje del contenido matemático explorado.*
  En términos generales, la propuesta promueve el trabajo colaborativo y la argumentación en la clase de Matemática. Este segundo aspecto de vital importancia para promover el razonamiento matemático. Estos dos aspectos son promovidos desde la estructura de la tarea y la misma gestión de la clase. En cuanto al contenido matemático propiamente hablando, la propuesta permitió explorar geométricamente las relaciones existentes entre la derivada y la integral como objetos de cambio a partir de las conexiones que podía establecer la persona estudiantes entre diferentes representaciones, principalmente la geométricamente y la numérica o tabular.

- *Dificultades/limitaciones asociadas a la implementación de la propuesta.*
  Una limitación del diseño es que la conexión que se realiza entre los objetos matemáticos para introducir el TFC es geométrica y con razones de cambio; lo cual requiere que la persona estudiante pueda estar transitando constantemente entre una y otra representación, habilidades que no acostumbra trabajar en una clase tradicional de Cálculo.
  En cuanto a la gestión de clase, se debió otorgar tiempo al estudiandado para trabajar por si mismos, lo cual requiere un monitoreo constante de la persona docente para atender dudas, o inclusive reorientar con preguntas guía si se evidencia que el objetivo no se está cumpliendo. Se puede volver dificil monitorear a todo el grupo y darle acompañamiento. Además, algunas personas estudiantes no tenían consolidados conocimientos de precálculo que eran necesarios para trabajar algunas partes de la tarea matemática.

- *Cambios que se le podrían realizar a la propuesta para futuras implementaciones.*
  Por un lado, se podría modificar la gestión metodológica según la población con la que se trabaja, incluyendo el tiempo, invirtiendo más tiempo para el trabajo guiado- independiente.
  Por otro lado, se debe considerar que hay estudiantes que ya conocen la temática y saben hacia a donde se dirigue los resultados de las actividades, o al menos lo espera, por lo que se debe pensar en dividir la población en repitentes y no repitentes del curso. Además, la propuesta se puede mejorar para que se puedan establecer más conexiones con la derivada como razón de cambio y la integral a partir del cálculo de áreas.

6.4 DERIVACIÓN EN VARIAS VARIABLES

6.4.1 Escenario de aprendizaje

Autores de la propuesta de diseño: Carlos Robles Padilla, Priscilla Angulo Chaves, Eduardo Muñoz Ortiz, Axcel Picado Piedra.

1. Tema

Introducción a la regla de la cadena en varias variables.

2. Principios de diseño

P1. Seguir una metodología de clase basada en la Enseñanza Exploratoria.
P2. Utilizar un contexto fenomenológico para la problematización del cálculo de utilidades de una empresa.
P3. Promover el desarrollo del pensamiento proceptual, abordando los conceptos matemáticos involucrados desde su definición dinámica: concepto y procedimiento, en particular, conceptos como: variables dependientes e independientes, función, derivada.
P4. Orientar la actividad matemática de la persona estudiante para el desarrollo de su pensamiento matemático avanzado desde la reflexión, deducción, justificación y comunicación matemática.
P5. Plantear preguntas que promuevan la apropiación de significado del contexto y el desarrollo del razonamiento matemático desde la formulación de conjeturas.

3. Conjetura de formación-aprendizaje

La problematización de un fenómeno modelado por una función en varias variables y su exploración matemática contribuyen a dar significado y deducir la estrategia del diagrama del árbol para aplicar la regla de la cadena en la derivación de funciones en varias variables.

4. Objetivo de aprendizaje general

Comprender la estrategia de la regla de la cadena para derivar funciones en varias variables.

5. Objetivos de aprendizaje específicos

- Reconocer la composición de funciones en varias variables y su relación con la regla de la cadena en el cálculo de derivadas parciales.
- Identificar la necesidad del diagrama del árbol como estrategia para aplicar la regla de la cadena en funciones en varias variables.
- Aplicar la regla de la cadena en el cálculo de derivadas parciales en funciones en varias variables.

6. Estructura conceptual-procedimental

Conceptos: función, composición de funciones, derivada, tasa de cambio.
Procedimientos: cálculos algebraicos, estrategias de derivación, regla de la cadena, derivación parcial.
Resultados: algoritmo del diagrama del árbol para la derivación por regla de la cadena en funciones de varias variables.

7. Nivel escolar

Universitario. Curso: MA1022 Cálculo para Ciencias Económicas II.

8. Tiempo

2 horas.

9. Descripción de la tarea matemática

La tarea se desarrolla alrededor de un fenómeno modelado por una función en varias variables, con el propósito de establecer cercanía entre las personas estudiantes y los conceptos involucrados, incentivando la motivación y participación del estudiantado. Adicionalmente, con la resolución del problema se pretende alcanzar una mejor comprensión de las relaciones y jerarquía entre las variables involucradas, conduciendo a la necesidad de definir una estrategia que permita derivar una función en varias variables para resolver la situación planteada.

10. Rol del docente

Guía y orienta la exploración de las personas estudiantes. Dirige la institucionalización del resultado. Mantiene el interés por resolver la tarea.

11. Rol del estudiante

Activo, autónomo, formula conjeturas, aplica los conocimientos previos en la concepción de la derivada como tasa de cambio.

12. Interacciones

La interacción de la persona docente hacia las personas estudiantes será mediada por el discurso oral, la formulación de preguntas y la retroalimentación constante de los resultados que van obteniendo. La persona estudiante formulará sus consultas a la persona docente. Entre las personas estudiantes, la interacción será a través de un diálogo constructivo para resolver la tarea.

13. Resumen de la narrativa del escenario de aprendizaje

Primera parte – presentación de una tarea matemática – en pequeños grupos de trabajo, las personas estudiantes leen la tarea y exploran el contexto, la persona docente verifica que todos estén comprendiendo la situación y la problemática planteada. Segunda parte – la persona docente motiva el interés por acercarse a la solución del problema desde y a través de la Matemática donde asumirá el rol de orientador y guía, acercándose a las mesas de trabajo, escuchando a las personas estudiantes, tomando nota de sus aportes y resultados, con el propósito de ir detectando dificultades que deban ser atendidas para la solución efectiva de la tarea. Al final de esta parte, las personas estudiantes socializan sus resultados y la persona docente proyecta una representación tabular y gráfica que modela la relación entre las variables. Tercera parte – durante este momento, se espera que las personas estudiantes mantengan un diálogo constructivo y evidencien elementos de su actividad matemática movilizando sus conocimientos previos, haciendo conexiones y justificando matemáticamente sus resultados. Esta parte concluye con una discusión colectiva donde la persona docente institucionaliza la estrategia para aplicar la regla de la cadena en la derivación de una función en varias variables. Cuarta parte – se presenta un ejercicio en el cual las personas estudiantes apliquen el resultado obtenido durante la exploración y calculen la derivada de una función en varias variables, utilizando el diagrama de árbol como parte de su estrategia.

6.4.2 Enunciado de la tarea matemática propuesta

Esta tarea tuvo lugar en dos momentos diferentes, correspondiente a ciclos lectivos distintos. Por tanto, se presentan dos enunciados, el primero corresponde a la versión de la tarea diseñada e implementada en el I ciclo lectivo 2023. Tomando como referencia esta primera implementación, se hacen ajustes y algunas modificaciones, en el que se diseña y se implementa una segunda versión de la tarea.

PRIMERA VERSIÓN

En un reciente estudio, el dueño de "Soda La Favorita" logró identificar que un alto porcentaje de sus utilidades mensuales están directamente relacionadas con la producción y venta de dos de sus productos estrella: cada combo de pollo frito, cuya variable es x, y cada combo de pizza, cuya variable es y, los cuales se venden en combos tanto de manera independiente como combinados, según el gusto de cada cliente.

De este modo, la utilidad total de "Soda La Favorita" en términos de estos productos se establece como:

$$U(x, y) = -\frac{x^3}{25000} - 0{,}03y^2 + 496xy + 450x + 508y - 3455000$$

Si de manera complementaria, dicho estudio revela que la ecuación de demanda del pollo frito está determinada por $x(s, t) = 95 - 0{,}185s + 0{,}12t$, y la ecuación de demanda de la pizza corresponde a $y(s, t) = 105 + 0{,}15s - 0{,}075t$, donde s es el precio de venta de un combo de pollo frito y t corresponde al precio de venta de un combo de pizza.

Preguntas

(a) Determine la utilidad que obtiene Soda La Favorita si vende cada combo de pollo frito a ¢2800 y cada combo de pizza a ¢4000.

(b) Determine la utilidad que obtiene Soda La Favorita si vende cada combo de pollo frito a ¢3000 y cada combo de pizza a ¢4500.

(c) Determine la tasa de cambio o velocidad a la que varían las utilidades en relación con el precio de cada combo de pollo frito.

(d) Determine la tasa de cambio o velocidad a la que varían las utilidades en relación con el precio de cada combo de pizza.

SEGUNDA VERSIÓN

I PARTE. Exploración del contexto

En un reciente estudio, el dueño de "Soda La Favorita" logró identificar que un alto porcentaje de sus utilidades mensuales están directamente relacionadas con la producción y venta de dos de sus productos estrella: el combo de pollo frito, cuya cantidad se representa con la variable x, y el combo de pizza, cuya cantidad se representa con la variable y, los cuales se venden tanto de manera independiente como combinados, según el gusto de cada cliente.

De este modo, la utilidad total de "Soda La Favorita" en términos de estos productos se establece como:

$$U(x, y) = -\frac{x^3}{25000} - 0{,}03y^2 + 496xy + 450x + 508y - 3455000$$

Adicionalmente, dicho estudio establece una relación entre el precio de venta de cada producto y la cantidad respectiva, donde s corresponde al precio de venta de un combo de pollo frito y t corresponde al precio de venta de un combo de pizza. La ecuación de demanda asociada al combo de pollo frito está determinada por $x(s,t) = 95 - 0{,}185s + 0{,}12t$, y la ecuación de demanda ligada al combo de pizza corresponde a $y(s,t) = 105 + 0{,}15s - 0{,}075t$.

Preguntas

(a) Discuta el contexto del enunciado y explique de qué se trata.

(b) Si usted fuera la persona encargada de administrar dicha soda, ¿cuáles decisiones tomaría respecto a los productos y sus precios a fin de incrementar las utilidades? Justifique su respuesta.

II Parte. Exploración matemática del contexto

A continuación, se presentan dos solicitudes a través de las cuáles se busca explorar matemáticamente la situación planteada. Lea ambas cuestiones y elija el orden con la que desea comenzar.

(a) ¿Cuál es la utilidad que obtiene "Soda La Favorita" si vende cada combo de pollo frito a ¢2800 y cada combo de pizza a ¢4000?

(b) Proponga una representación que modele la relación de dependencia entre todas las variables involucradas.

III Parte. Actividad Matemática

¿Cuál es la tasa de cambio a la que varían las utilidades en relación con el precio de cada combo de pollo frito?

IV Parte. Aplicación Matemática

La demanda de una empresa está dada por la función definida por el siguiente criterio:

$$D(p_1, p_2) = \frac{50}{p_1 \cdot p_2}$$

donde p_1 y p_2 son los precios a los que vende sus dos artículos. La empresa fija p_1 y p_2 en función de los precios q_1 y q_2 de las materias primas que emplea en su fabricación según las relaciones definidas por:

$$p_1 = 3q_1 + q_2$$

$$p_2 = q_1 + 2q_2$$

Calcule $\frac{\partial D}{\partial q_2}$ e interprete el resultado.

El acceso al escenario de aprendizaje (editable) se puede acceder a partir del siguiente enlace:
https://docs.google.com/document/d/1NQviv2AKG0sqhusjexTMeCmuipum0qtD/edit?usp=sharing&ouid=110416181461970057753&rtpof=true&sd=true

El acceso a la guía de la tarea matemática (editable) se puede acceder a partir del siguiente enlace:
https://docs.google.com/document/d/103R7868vTHgPf2d9Riua8_Qc9BRD95RB/edit?usp=sharing&ouid=110416181461970057753&rtpof=true&sd=true

6.4.3 Reflexiones profesionales de la propuesta

- *Aspectos de la propuesta que contribuyen al mejoramiento del aprendizaje del contenido matemático explorado.*

  La propuesta aporta al aprendizaje de la Regla de la Cadena en varias variables a partir del diseño de una tarea fenomenológica fundamentada en un contexto extra-matenático de interés para el estudiantado. Además, el aprendizaje exploratorio promueve que las personas estudiantes aprendan por cuenta propia realizando conexiones entre la matemática que saben y el contexto extra-matemático de la tarea para llegar a la deducción de la regla de la cadena.

  La exploración numérica que permite la tarea a partir de la exploración de imágenes y operaciones artitméticas permite al estudiantado tener certeza del porqué la representación del diagrama de árbol que se usa para calcular la derivada de una función multivariable por medio de la regla de la cadena.

- *Dificultades/limitaciones asociadas a la implementación de la propuesta.*

  Se evidencia deficiencias en conocimientos previos que debería poseer el estudiantado. Así mismo, el tiempo se vuelve un aspecto a considerar adaptar, pues el estudiantado no está acostumbrado a trabajar tareas de esta naturaleza exploratoria; y además se debe avanzar con un programa cargado de contenidos en lo que respecta a la parte de cálculo.

  Otras limitaciones tiene que ver con el uso incorrecto de la calculadora por parte de las personas estudiantes y la mala interpreación que hacen algunas personas de la lectura del contexto extra-matemático.

- *Cambios que se le podrían realizar a la propuesta para futuras implementaciones.*

  Se pueden elaborar preguntas más generadoras, que garanticen la comprensión de lo que demanda la tarea. Además, pensar en mejorar la gestión del tiempo en el tiempo destinado al trabajo autónomo.

6.5 OTRAS PROPUESTAS EN DIDÁCTICA DEL CÁLCULO EN UNA Y VARIAS VARIABLES

- Tarea complementaria 1
  Área temática: cálculo en una variable.
  Objetivo: comprender el concepto de optimización en una variable.
  Hipervínculo del enunciado de la tarea:
  Dar click aquí para ver el enunciado de la tarea complementaria 1

Figura 6.12: Enunciado de la Tarea complementaria 1

- Tarea complementaria 2
  Área temática: cálculo en varias variables.
  Objetivo: comprender el concepto de integral triple.
  Hipervínculo del enunciado de la tarea:
  Dar click aquí para ver el enunciado de la tarea complementaria 2

Figura 6.13: Enunciado de la Tarea complementaria 2

- Tarea complementaria 3
  Área temática: cálculo en varias variables.
  Objetivo: comprender del concepto de ecuación diferencial y del conjunto solución.
  Hipervínculo del enunciado de la tarea:
  Dar click aquí para ver el enunciado de la tarea complementaria 3

Figura 6.14: Enunciado de la Tarea complementaria 1

7. CONCLUSIONES

La elaboración de este *e-Book*, *Didáctica del Cálculo Diferencial e Integral*, ha permitido abordar de manera integral las necesidades y desafíos presentes en la enseñanza de estas áreas fundamentales de la Matemática. A través del proyecto de docencia ***Desarrollo profesional en Didáctica del Cálculo Diferencial e Integral para personas docentes de Matemática de la UCR***, se ha evidenciado la importancia de fortalecer las competencias docentes en metodologías activas, como la enseñanza exploratoria basada en el diseño de escenarios de aprendizaje que promueven una comprensión profunda y significativa de los conceptos matemáticos.

Los diversos capítulos de este *e-Book* han explorado aspectos cruciales en la Didáctica del Cálculo, enfatizando la relevancia de las representaciones múltiples —simbólicas, gráficas, numéricas y verbales— en la construcción del conocimiento matemático. Se ha destacado que la capacidad de las personas estudiantes para alternar entre diferentes representaciones facilita su comprensión y les permite abordar problemas desde distintas perspectivas, enriqueciendo su aprendizaje y desarrollando habilidades esenciales para su formación académica y profesional.

La Enseñanza Exploratoria se ha presentado como una metodología efectiva para la enseñanza del Cálculo Diferencial e Integral. Al centrar el aprendizaje en la exploración, el razonamiento y la construcción colectiva del conocimiento, esta metodología fomenta en las personas estudiantes habilidades críticas como el pensamiento lógico, la argumentación matemática y la capacidad de resolver problemas complejos. Por su parte, la implementación de escenarios de aprendizaje ha demostrado ser una herramienta valiosa para las personas docentes, permitiéndoles planificar y estructurar sus clases de manera que se promueva la interacción, la reflexión y la contextualización de los conceptos matemáticos. Asimismo, la integración de tecnologías digitales, como herramientas de visualización y cálculo matemático, han mostrado beneficios significativos en la enseñanza del Cálculo. Estas tecnologías facilitan la exploración y comprensión de conceptos abstractos, ofreciendo a las personas estudiantes medios interactivos para experimentar y visualizar problemas matemáticos. Esto no solo enriquece el proceso de aprendizaje, sino que también prepara a las personas estudiantes para enfrentar los desafíos de un mundo cada vez más digitalizado.

La experiencia recopilada en este *e-Book* refleja la necesidad de una transformación en las prácticas docentes tradicionales. La adopción de metodologías como la Enseñanza Exploratoria requiere un cambio en el rol de la persona docente, pasando de ser un transmisor de conocimientos a un facilitador del aprendizaje. Este cambio implica desafíos, como la necesidad de formación continua y la adaptación a nuevas estrategias didácticas, pero los beneficios para el aprendizaje de las personas estudiantes son significativos.

Es esencial reconocer que la comprensión profunda de conceptos como límites, derivadas e integrales es fundamental no solo para el éxito académico en cursos de Matemática, sino también para el desarrollo de competencias que son transferibles a otras áreas del conocimiento y de la vida profesional. Al promover un aprendizaje activo y centrado en la persona estudiante, se contribuye a formar individuos capaces de pensar críticamente, resolver problemas y adaptarse a situaciones nuevas y complejas.

Además, el uso de escenarios de aprendizaje ha demostrado ser una estrategia efectiva para contextualizar el aprendizaje y hacerlo más relevante para las personas estudiantes. Al situar las tareas en contextos significativos, las personas estudiantes pueden establecer conexiones entre los conceptos matemáticos y su aplicación en el mundo real, lo que aumenta su motivación y compromiso con el aprendizaje.

La colaboración y el intercambio de ideas entre docentes también han emergido como elementos clave en el desarrollo profesional y en la mejora de las prácticas de enseñanza. La participación en proyectos como el descrito en este *e-Book* ofrece oportunidades para que las personas docentes compartan experiencias, reflexionen sobre sus prácticas y construyan colectivamente estrategias para abordar los desafíos en la enseñanza del Cálculo.

Al articular los diversos elementos presentados en este *e-Book*, se evidencia una convergencia hacia la necesidad de enfoques pedagógicos que promuevan la comprensión profunda y el pensamiento crítico en Matemática. La Enseñanza Exploratoria y los escenarios de aprendizaje se presentan como herramientas esenciales en este proceso, permitiendo a las personas docentes crear entornos de aprendizaje dinámicos y centrados en la persona estudiante.

La incorporación de múltiples representaciones en la enseñanza del Cálculo facilita la comprensión de conceptos complejos al permitir que las personas estudiantes aborden problemas desde diferentes perspectivas. Esto, combinado con el uso de tecnologías digitales, enriquece el aprendizaje y prepara a las personas estudiantes para enfrentar los retos de un entorno académico y profesional en constante evolución.

La experiencia descrita en este *e-Book* también resalta la importancia de la formación y el desarrollo profesional continuo de las personas docentes. La capacidad para diseñar tareas desafiantes, gestionar discusiones colectivas y facilitar el aprendizaje activo requiere de competencias que deben ser desarrolladas y fortalecidas a lo largo de la carrera docente.

Este *e-Book* representa un esfuerzo significativo para mejorar la enseñanza del Cálculo Diferencial e Integral, áreas fundamentales en la formación matemática de muchas personas estudiantes que cursan cursos universitarios de Cálculo. A través de la exploración de metodologías innovadoras y la reflexión sobre las prácticas docentes, se ha contribuido al desarrollo de estrategias que promueven un aprendizaje más profundo y significativo.

Es nuestro deseo que las ideas y experiencias compartidas en este recurso sirvan como inspiración y guía para docentes que buscan enriquecer sus prácticas y contribuir al desarrollo integral de sus estudiantes. La enseñanza del Cálculo no es solo una transmisión de conocimientos técnicos, sino una oportunidad para desarrollar en las personas estudiantes habilidades y competencias que serán esenciales en su vida académica y profesional.

El camino hacia una enseñanza más efectiva y significativa es un proceso continuo de aprendizaje y adaptación. Invitamos a las personas docentes a continuar explorando, innovando y colaborando en la construcción de prácticas educativas que respondan a las necesidades y desafíos de nuestras personas estudiantes y de la sociedad en general.

Mirando hacia el futuro, es fundamental continuar investigando y desarrollando metodologías que integren la tecnología y las nuevas tendencias educativas en la enseñanza del Cálculo. La educación matemática universitaria debe evolucionar para responder a los cambios sociales y tecnológicos, preparando a las personas estudiantes (futuras personas profesionales en diversos campos) para un mundo en constante transformación.

Asimismo, se hace necesario fomentar espacios de colaboración y formación entre docentes, instituciones educativas y organizaciones dedicadas a la Educación Matemática. Solo a través del trabajo conjunto y el intercambio de conocimientos podremos seguir avanzando en la mejora de la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo Diferencial e Integral.

En última instancia, nuestro compromiso es con la formación de estudiantes que no solo comprendan los conceptos matemáticos, sino que también sean capaces de aplicarlos creativamente, resolver problemas y contribuir positivamente a la sociedad. En palabras de una de las personas docentes participantes del curso de docencia .es vital que, para que una persona estudiante aprenda a tocar el violín (la matemática), toque el violín, y no que aprenda a tocar el violín solo escuchando al docente tocar el violín". Este *e-Book* es un paso en esa dirección, y esperamos que sus aportes continúen inspirando mejoras en la Didáctica del Cálculo y en la Educación Matemática en general.

8. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 215–241.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. In *Research in Collegiate mathematics education II. CBMS issues in mathematics education* (Vol. 6, pp. 1–32). Providence, RI: American Mathematical Society.

Barradas-Arenas, U. D. (2021). Recursos digitales como apoyo en la enseñanza del cálculo. *Revista Iberoamericana de Educación en Tecnología y Tecnología en Educación*, 12(23). https://doi.org/10.23913/ride.v12i23.1040.

Bezuidenhout, J. (2001). Limits and continuity: some conceptions of first-year students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 32(4), 487-500.

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, 115, 11-17.

Carroll, J. M. (2000). Five reasons for scenario-based design. *Interacting with Computers*, 13(1), 43-60. https://doi.org/10.1016/S0953-5438(00)00023-0.

Castro, E., & Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. In L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona: Horsori.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *Journal of Mathematical Behaviour*, 15, 167-192.

Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 153-166). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Domingos, A. (2003). Compreensão de conceitos matemáticos avançados: A matemática no início do superior (Tesis de doctorado, Universidade Nova de Lisboa, Portugal).

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95-123). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española (RSME)*, 9(1), 143-168.

Fernández-Plaza, J., Ruiz-Hidalgo, J., & Rico, L. (2013). Análisis conceptual de términos específicos: Concepto de límite finito de una función en un punto. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española (RSME)*, 16(1), 131-146.

Fonseca, V. G. da, & Henriques, A. C. C. B. (2019). Aprendizagem do teorema do valor intermediário numa abordagem exploratória com o GeoGebra. *Revista Intersaberes*, 14(31), 129-144. https://doi.org/10.22169/ri.v14i31.1511.

Goldin, G. A. (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 137-165.

Gómez, P. (2007). Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. (Tesis doctoral, Universidad de Granada, Granada).

Gómez-Chacón, I. (2014). Visualización y razonamiento: Creando imágenes para comprender las matemáticas. In *Atas do XXV Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 5-28). Braga, Portugal: APM.

Gray, E., & Tall, D. (1991). Duality, ambiguity and flexibility in successful mathematical thinking. In *Proceedings of the 15th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 72-79). Assis, Italia: PME.

Gray, E., & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(2), 115-141.

Gray, E., & Tall, D. (2007). Abstraction as a natural process of mental compression. *Mathematics Education Research Journal*, 19(2), 23–40.

Gutiérrez-Fallas, L. F. (2016). A compreensão dos conceitos de limite e continuidade de uma função: um estudo com alunos do 12.º ano. (Tesis de Maestría, Universidade de Lisboa, Portugal).

Gutiérrez-Fallas, L. F., & Henriques, A. (2017). A compreensão de alunos de 12.º ano dos conceitos de limite e continuidade de uma função. *Quadrante*, 26(1), 25-49.

Henriques, A., & Ponte, J. (2014). As representações como suporte do raciocínio matemático dos alunos quando exploram atividades de investigação. *Bolema*, 28(48), 276-298.

Jaffar, S. M., & Dindyal, J. (2011). Language-related misconceptions in the study of limits. In J. Clark, B. Kissane, J. Mousley, T. Spencer, & S. Thornton (Eds.), *Proceedings of the AAMT-MERGA Conference* (pp. 390-397). Adelaide, Australia: Australian Association of Mathematics Teachers.

Juter, K. (2007). Students' concept development of limits. In *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME5)* (pp. 2320-2329). Larnaca, Cyprus.

Karatas, I., Guven, B., & Cekmez, E. (2011). A cross-age study of students' understanding of limit and continuity concept. *Bolema*, 24(38), 245-264.

Lannin, J., Ellis, A. B., & Elliot, R. (2011). Developing essential understanding of mathematical reasoning: Pre-K-Grade 8. Reston, VA: NCTM.

Mata-Pereira, J. (2018). As ações do professor para promover o raciocínio matemático na sala de aula (Tesis de doctorado, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa).

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2012). Raciocínio matemático em conjuntos numéricos: Uma investigação no 3.º ciclo. *Quadrante*, 21(2), 81-110.

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2017). Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: Teacher actions facilitating generalization and justification. *Educational Studies in Mathematics*, 96(2), 169-186. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9773-4.

Molina Mora, J. A. (2016). Experiencia de la integración de las TICs para la enseñanza y aprendizaje del Cálculo II. *Revista Iberoamericana de Educación en Tecnología y Tecnología en Educación*, 18, 85-100.

Moru, E. K. (2009). Epistemological obstacles in coming to understand the limit of a function at undergraduate level: A case from the National University of Lesotho. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 7, 431-454.

Nair, G. (2010). College students' concept images of asymptotes, limits, and continuity of rational functions (Tesis de doctorado, Universidade de Ohio, Estados Unidos).

Natsheh, I., & Karsenty, R. (2014). Exploring the potential role of visual reasoning tasks among inexperienced solvers. *ZDM Mathematics Education*, 46(1), 109-122.

NCTM. (2007). Princípios e normas para a Matemática escolar. Lisboa: APM.

Oliveira, H., Menezes, L., & Canavarro, A. P. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da matemática: Contributos da prática de uma professora para a elaboração de um quadro de referência. *Quadrante*, 22(2), 5-25.

Piedade, J., Pedro, A., & Matos, J. F. (2018). Cenários de aprendizagem como estratégia de planificação de aulas na formação inicial de professores: O exemplo da área de informática. *Revista Lusófona de Educação*, 45, 223-238. https://doi.org/10.24140/issn.1645-7250.rle45.15.

Pons, J., Valls, J., & Llinares, S. (2012). La comprensión de la aproximación a un número en el acceso al significado de límite de una función en un punto. In A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García, & L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 435-445). Jaén, España: SEIEM.

Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching Mathematics: Emergence from psychology. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of Mathematics: Past, present and future* (pp. 205-236). Rotterdam, The Netherlands: Sense.

Rico, L. (1995). Errores en el aprendizaje de la Matemática. In J. Kilpatrick, P. Gómez, & L. Rico (Eds.), *Educación Matemática* (pp. 69-108). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Rivera, F. D. (2011). Toward a visually-oriented school mathematics curriculum. New York, NY: Springer.

Riviera, F., & Becker, J. (2009). Algebraic reasoning through patterns. *Mathematics Teacher in the Middle School*, 15(4), 213–221.

Sajka, M. (2003). A secondary school student understands of the concept of function – a case study. *Educational Studies in Mathematics*, 53, 229-254.

Santos, H. (2010). Limite: um estudo sobre manuais escolares e exames, em Portugal (Tesis de maestría, Universidade do Minho, Portugal).

Seah, E. K. (2005). Analysis of Students' Difficulties in Solving Integration Problems. *The Mathematics Educator*, 9(1), 39-59.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20-26.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. In L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 124-154). Barcelona: ICE/Horsori.

Stylianou, D. A. (2011). An examination of middle school students' representation practices in mathematical problem solving through the lens of expert work: Towards an organizing scheme. *Educational Studies in Mathematics*, 76, 265-280.

Tall, D. (1992). Students' Difficulties in Calculus. In *Proceedings of ICME* (Vol. 7, pp. 13-28).

Tall, D. (2004a). Introducing three worlds of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 23(3), 29–33.

Tall, D. (2004b). Thinking through three worlds of mathematics. In *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 281–288). Bergen, Norway.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.

Trevisan, A. L., & Araman, E. M. O. (2021). Processos de raciocínio matemático mobilizados por estudantes de cálculo em tarefas envolvendo representações gráficas. *Bolema*, 35(69), 158-178. https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a08.

Trevisan, A. L., Negrini, M. V., Falchi, B., & Araman, E. M. O. (2023). Ações do professor para a promoção do raciocínio matemático em aulas de cálculo diferencial e integral. *Educação e Pesquisa*, 49, e251659. https://doi.org/10.1590/S1678-4634202349251659.

Tripathi, P. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 13, 438-445.

Zazkis, R., Dubinsky, E., & Dautermann, J. (1996). Coordinating visual and analytic strategies: a study of students' understanding of the group D4. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 435-457.