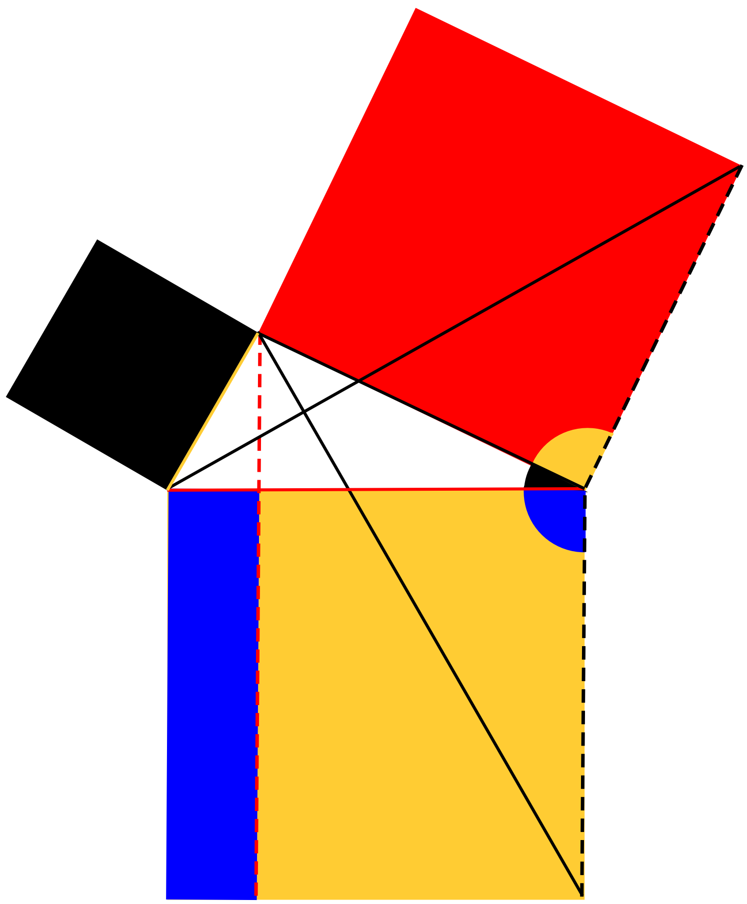
inicio

LOS PRIMEROS SEIS LIBROS DE
LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES
CON DIAGRAMAS DE COLORES Y SÍMBOLOS

LOS PRIMEROS SEIS LIBROS DE LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES
EN EL QUE LOS DIAGRAMAS Y SÍMBOLOS COLOREADOS
EN LUGAR DE LAS LETRAS PARA LA
MAYOR FACILIDAD DE APRENDIZAJE

POR OLIVER BYRNE



LONDRES
WILLIAM PICKERING
1847

INTRODUCCIÓN.

LAS artes y las ciencias se han vuelto tan extensas, que facilitar su adquisición es tan importante como extender sus límites. La ilustración, si no acorta el tiempo de estudio, al menos lo hará más agradable. Esta obra tiene un objetivo mayor que la mera ilustración; no introducimos colores con fines de entretenimiento, o para entretener *por ciertas combinaciones de color y forma*, sino para ayudar a la mente en sus búsqueda de la verdad, para aumentar las facilidades de instrucción, y difundir conocimientos permanentes. Si quisiéramos que las autoridades demostraran la importancia y utilidad de la geometría, podríamos citar a todos los filósofos desde los días de Platón. Entre los griegos, en la antigüedad, como en escuela de Pestalozzi y otros en los últimos tiempos, la geometría fue adoptada como la mejor gimnasia de la mente. En realidad, Los Elementos de Euclides se han convertido en, de común acuerdo, la base de la ciencia matemática en todo el mundo civilizado. Pero esto no parecerá extraordinario, si consideramos que esta ciencia sublime no sólo es mejor calculada que cualquier otra para suscitar el espíritu de investigación, para elevar la mente, y reforzar las facultades de razonamiento, sino que también forma la mejor introducción a la mayoría de los temas útiles e importantes vocaciones de la vida humana. Aritmética, agrimensura, medición, ingeniería, navegación, mecánica, hidrostática, neumática, óptica, astronomía física, etc. son todos dependientes de las proposiciones de la geometría.

Sin embargo, mucho depende de la primera comunicación de y cualquier ciencia para un estudiante, aunque los mejores y más sencillos métodos rara vez se adoptan. Las proposiciones se presentan ante un estudiante, que a pesar de tener una comprensión suficiente, se les dice tanto sobre ellos al entrar en el umbral mismo de la ciencia, lo que le da una posesión más desfavorable para su futuro estudio de este atractivo tema; o “las formalidades y la exageración del rigor se presentan de forma tan ostentosa, como casi para ocultar la realidad.”

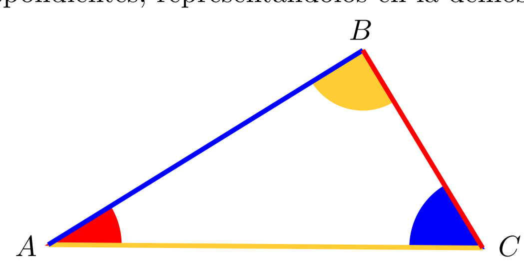
Repeticiones sin fin y desconcertantes, que no confieren mayor exactitud al razonamiento, hacen que las demostraciones enredadas y oscuras, y oculta desde el punto de vista del estudiante la consecución de evidencia. ”Así se crea una aversión en la mente del alumno, y un sujeto tan calculado para mejorar el poder de razonamiento, y darle el hábito de pensar de forma minuciosa, se degrada por un curso de instrucción seco y rígido en un ejercicio poco interesante de la memoria. Para despertar la curiosidad, y para despertar a los apáticos y los facultades latentes de las mentes más jóvenes deberían ser el objetivo de cada maestro; pero donde faltan ejemplos de excelencia, los intentos de alcanzarlo son pocos, mientras que la eminencia estimula la atención y produce imitación. El objeto: de esta Obra es introducir un método de enseñanza de la geometría, que ha sido muy aprobado por muchos científicos en este país, así como en Francia y América.

El plan aquí adoptado atrae por la fuerza a la vista, el más sensible y el más completo de nuestros órganos externos, y su preeminencia para imprimirlo en la mente está apoyada por la incontrovertible máxima expresada en las bien conocidas palabras de Horacio:—

> Segnius irritant animus demissa per aurem
> Quàm quae sunt oculis subjecta fidelibus.
>
> Es más débil lo que entra a través de la oreja,
> Que lo que es transmitido por el ojo fiel.

Todo lenguaje consiste en signos representativos, y esos signos son los mejores que cumplen sus propósitos con la mayor precisión y rapidez. Tales que para todos los propósitos comunes son los signos audibles llamados palabras, que todavía se consideran audibles, si se dirige inmediatamente al oído, o por medio de letras al ojo. Los diagramas geométricos no son signos, sino los materiales de la ciencia geométrica, el objeto de las cuales es mostrar las cantidades relativas de sus partes mediante un proceso de razonamiento llamado **Demostración**. Este razonamiento se ha llevado a cabo en general por palabras, letras, y diagramas en blanco y negro o sin color; pero como el uso de símbolos de colores, signos, y diagramas en las artes lineales y ciencias, hace que el proceso de razonamiento sea más preciso, y el logro más rápido, han sido en este caso adoptadas en consecuencia.

Tal es la conquista de esta tentadora forma de comunicar el conocimiento, que los Elementos de Euclides pueda ser accesible en menos de un tercio del tiempo usualmente empleado, y la retención por la memoria es mucho más permanente; estos hechos han sido comprobados por numerosos experimentos realizados por el inventor, y varios otros que han adoptado sus planes. Los detalles de los cuales son pocos y obvios; las letras anexas a los puntos, renglones, u otras partes de un diagrama son de hecho nombres arbitrarios, y representarlos en la demostración; en vez de estos, las partes son de diferente color, están hechos para nombrarse a sí mismos, para sus formas en los colores correspondientes, representándolos en la demostración.



Con el fin de dar una mejor idea de este sistema, y de las ventajas que se derivan de su adopción, tomemos un triángulo rectángulo, y expresamos algunas de sus propiedades tanto por colores como por el método generalmente empleado.

Algunas de las propiedades del triángulo rectángulo ABC, expresado por el método generalmente empleado.

1. El ángulo BAC, junto con los ángulos BCA y ABC son iguales a dos ángulos rectos, o el doble del ángulo ABC.

2. El ángulo CAB añadido al ángulo ACB será igual al ángulo ABC.

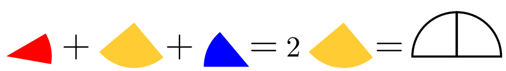
3. El ángulo ABC es mayor que cualquiera de los ángulos BAC o BCA.

4. El ángulo BCA o el ángulo CAB es menor que el ángulo ABC.

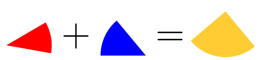
5. Si desde el ángulo ABC, se toma el ángulo BAC, el resto será igual al ángulo ACB.

6. El cuadrado de AC es igual a la suma de los cuadrados de AB y BC.

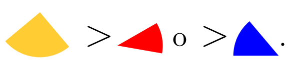
Las mismas propiedades expresadas por la coloración de las diferentes partes.

1. 

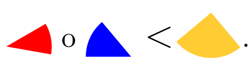
Es decir, el ángulo rojo más el ángulo amarillo más el ángulo azul, igual al doble del ángulo amarillo, igual a dos ángulos rectos.

2. 

O en palabras, el ángulo rojo más el ángulo azul, es igual al ángulo amarillo.

3. 

El ángulo amarillo es mayor que el ángulo rojo o azul.

4. 

El ángulo rojo o azul es menor que el ángulo amarillo.

5. 

En otros términos, el ángulo amarillo menos el ángulo azul es igual al ángulo rojo.

6. 

Es decir, el cuadrado de el segmento amarilla es igual a la suma de los cuadrados de los segmentos azul y roja.

En las demostraciones orales obtenemos con los colores esta importante ventaja, el ojo y el oído se pueden dirigir al mismo tiempo, así para enseñar geometría, y otras artes lineales y ciencias, en clases, el sistema es el mejor que se ha propuesto nunca, esto se desprende de los ejemplos que se acaban de citar.

De ahí que sea evidente que una referencia del texto al diagrama es más rápida y segura, al dar las formas y los colores de las partes, o nombrando las partes y sus colores, que nombrar las partes y letras en el diagrama. Además de la simplicidad superior, este sistema es igualmente conspicuo para la concentración, y excluye totalmente la práctica perjudicial, aunque prevaleciente, de permitir que el estudiante memorice la demostración; hasta la razón, y los hechos, y la prueba solo deja impresiones sobre la comprensión.

De nuevo, al dar una conferencia sobre los principios o propiedades de las figuras, si mencionamos el color de la parte o partes a las que se hace referencia, como diciendo, el ángulo rojo, el segmento azul, o líneas, etc. la parte o partes así nombradas serán vistas inmediatamente por todos en la clase en el mismo instante; no es así si buscamos el ángulo ABC, el triángulo PFQ, la figura EGK, y así sucesivamente; porque las letras deben ser trazadas una por una antes de que los estudiantes dispongan en sus mentes la magnitud particular a la que se refieren, que a menudo ocasiona confusión y error, así como la pérdida de tiempo. También si las partes que se dan como iguales, tienen los mismos colores en cualquier diagrama, la mente no se alejará del objeto que tiene ante sí; es decir, tal disposición presenta una demostración ocular de las partes que deben probarse iguales, y el alumno retiene los datos a lo largo de todo el razonamiento. Pero cualesquiera que sean las ventajas del presente plan, si no se sustituye, siempre se puede convertir en un poderoso auxiliar de los otros métodos, para el porpósito de introducción, o de una reminiscencia más rápida, o de retención más permanente por la memoria.

La experiencia de todos los que han formado sistemas para impresionar los hechos en la comprensión, concuerdan en probar que las representaciones de color, como imágenes, cortes, diagramas, etc. son más fácil de fijar en la mente que las meras frases no marcadas por alguna peculiaridad. Por curioso que parezca, los poetas parecen ser conscientes de este hecho más que los matemáticos; muchos poetas modernos aluden a este sistema visible de comunicación del conocimiento, uno de ellos se ha expresado así él mismo:

> Los sonidos que abordan el oído se pierden y mueren
> En un tercio de hora, pero estas que llaman la atención,
> Vive mucho en la mente, la lucha ferviente
> Graba el conocimiento con un haz de luz.

Esto quizás se puede considerar la única mejora que la geometría plana ha recibido desde los días de Euclides, y si hubiera algún geómetra de interés antes de ese momento, el éxito de Euclides ha eclipsado su memoria, e incluso ocasionó que se le asignaran todas las cosas buenas de ese tipo; como Esopo entre los escritores de Fábulas. También puede ser digno de mención, como los diagramas tangibles ofrecen el único medio a través del cual la geometría y otras geometrías lineales las artes y las ciencias pueden enseñarse a los ciegos, este sistema visible no está menos adaptado a las exigencias de los sordomudos.

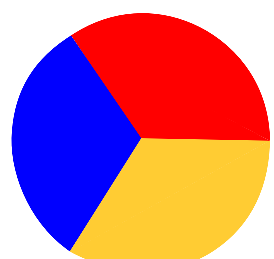
Se debe tener cuidado de que el color no tiene nada que ver con los segmentos, ángulos, o magnitudes, excepto simplemente para nombrarlos. Una línea matemática, que tiene longitud sin grosor, no puede poseer color, pero, la unión de dos colores en el mismo plano da una buena idea de lo que significa una línea matemática; recordemos que estamos hablando familiarmente, tal unión debe ser entendida y no el color, cuando nos alejamos de el segmento negra, el segmento roja o líneas, etc.

Los colores y los diagramas de colores pueden parecer al principio un método torpe para transmitir nociones adecuadas de las propiedades y partes de las figuras y magnitudes matemáticas, pero, se encontrará que ofrecen un medio más refinado y extenso que cualquiera de los que se han propuesto hasta ahora.

Aquí definiremos un punto, una línea, y una superficie, y demostramos una proposición para verificar la verdad de esta afirmación.

Un punto es el que tiene posición, pero no la magnitud; o un punto es sólo posición, abstraído de la consideración de longitud, anchura, y espesor. Tal vez la siguiente descripción sea mejor para explicar la naturaleza de un punto matemático a aquellos que no han adquirido la idea, que la definición engañosa anterior.

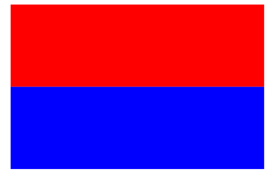
Que los tres colores se encuentren y cubran una parte del papel, donde se encuentran no es azul, ni amarillo, ni rojo, ya que no ocupa ninguna parte del plano, porque si lo hiciera, pertenecería a la parte azul, roja o amarilla; sin embargo, existe, y tiene una posición sin magnitud, de modo que con un poco de reflexión, esta unión de tres colores en un plano, da una buena idea de un punto matemático.



Una línea es longitud sin anchura. Con ayuda de los colores, casi de la misma manera que antes, una idea de una línea se puede dar así:

Tomemos dos colores que se unen y cubren una parte del papel; donde se encuentran no es rojo, ni es azul; por lo tanto la unión no ocupa parte del plano, y por lo tanto no puede tener ancho, sólo la longitud: a partir de la cual podemos hacernos una idea de lo que significa una línea matemática.

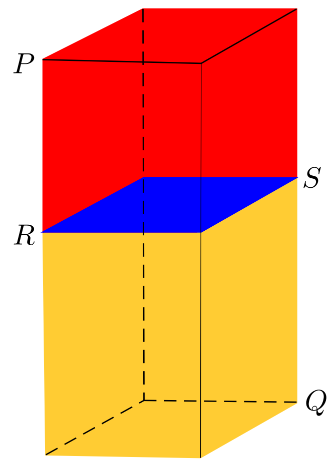
A título ilustrativo, un color diferente del color del papel o del plano en el que se dibuja, habría sido suficiente; por lo tanto, en el futuro, si decimos la línea roja, la línea o líneas azules, etc. son los cruces con el plano en el que se dibujan, que deben entenderse.



Superficie es aquella que tiene longitud y ancho sin espesor.

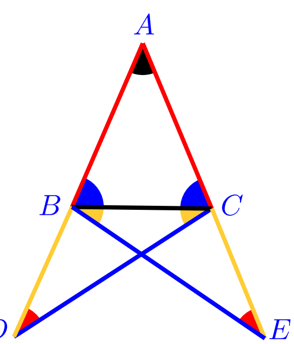
Cuando consideramos un cuerpo sólido (PQ), percibimos de inmediato que tiene tres dimensiones, a saber: – largo, ancho, y espesor.

Supongamos que una parte de este sólido (PS) sea roja, y la otra parte (QR) amarilla, y que los colores son distintos sin mezclarse, la superficie azul (RS) que separa estas partes, o lo que es lo mismo, divide al sólido sin pérdida de material, debe ser sin grosor, y sólo posee largo y ancho; esto aparece claramente en el razonamiento, similar a la que se empleó para definir, o más bien describir un punto y una línea.

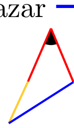
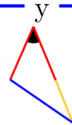


La proposición quinta del primer Libro es la que hemos seleccionado para elucidar la forma en que se aplican los principios.

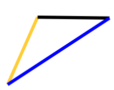
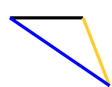
En un triángulo isósceles ABC, los ángulos internos de la base ABC, ACB son iguales, y cuando los lados AB, AC se trazan, los ángulos externos de la base BCE, CBD son también iguales.



Trazar y , hacer = .
Trazar y (L. 1, pr. 3).

En  y  tenemos = ,

común y = ∴ = , = y = (L. 1, pr. 4).

De nuevo en  y  , = , = , y

= ; ∴ = y = (L. 1, pr. 4).

Pero , $\therefore$  $=$ . Q.E.D.

Anexando las letras al Diagrama.

Si lados iguales AB y AC se trazan a través de los extremos BC, del tercer lado, y en la parte trazada BD de cualquiera de cualquiera de los dos, se toma cualquier punto D, y del otro se corta AE igual a AD (L. 1, pr. 3). En los puntos E y D, así tomados en los lados trazados, están conectados por líneas rectas DC y BE con los extremos alternos del tercer lado del triángulo.

En los triángulos DAC y EAB los lados DA y AC son respectivamente iguales a EA y AB, y el ángulo incluido A es común a ambos triángulos. Por lo tanto (L. 1, pr. 4.) el segmento DC es igual a BE, el ángulo ADC al ángulo AEB, y el ángulo ACD al ángulo ABE; si de los segmentos iguales AD y AE se toman los lados iguales AB y AC, los restantes BD y CE serán iguales. Por lo tanto, en los triángulos BDC y CEB, los lados BD y DC son respectivamente igual a CE y EB, y los ángulos D y E incluidos por esos lados son también iguales. Por lo tanto (L. 1, pr. 4.) los ángulos DBC y ECB, que son los incluidos por el tercer lado BC y los lados trazados iguales AB y AC son iguales. También los ángulos DCB y EBC son iguales si esos iguales se toman de los ángulos DCA y EBA antes de que se probara ser iguales, el resto, que son los ángulos ABC y ACB opuestos a los lados iguales, serán iguales.

Por lo tanto, en un triángulo isósceles, &c. Q. E. D.

Nuestro objetivo en este lugar es introducir el sistema en lugar de enseñar un conjunto particular de proposiciones, por lo tanto, hemos seleccionado lo anterior del curso regular. Para escuelas y otros lugares públicos de instrucción, tizas de colores responderán para describir diagramas, etc. para uso privado, los lápices de color son muy convenientes.

Nos complace descubrir que los Elementos de Matemáticas ahora forman una parte considerable de cada educación femenina encontrada, por lo tanto, llamamos la atención de aquellos interesados o comprometidos en la educación de las damas sobre este modo tan atractivo de comunicarse, y al trabajo posterior para su desarrollo futuro.

Por el momento concluiremos observando, ya que los sentidos de la vista y el oído pueden abordarse de manera tan vigorosa e instantánea al estudiante, que se podría enseñar geometría y otras ramas de las matemáticas con gran facilidad, esto promovería el propósito de la educación más de lo que se *podría* nombrar, ya que enseñaría a las personas cómo pensar y no qué pensar; es en este particular donde se origina el gran error de la educación.

LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES.

LIBRO I.
DEFINICIONES.

I.

Un *punto* es lo que no tiene partes.

II.

Un *línea* es una longitud sin ancho.

III.

Las intersecciones de las líneas son puntos. Sin embargo, un punto puede existir sin ser la intersección de líneas.

IV.

Una línea recta o recta es la que se encuentra uniformemente entre sus extremos.

Un *segmento* de línea (o más simplemente un segmento) es similar a una línea, excepto que es de longitud finita y tiene un punto en cada extremo.

Una *semirrecta* o rayo es como una línea en el sentido de que es infinita en longitud; sin embargo, tiene un punto inicial.

V.

Una superficie es lo que sólo tiene largo y ancho.

VI.

Un plano es una superficie que se extiende infinitamente y es completamente plana. Un plano es el análogo bidimensional de un punto (dimensiones cero), una línea (una dimensión) y un espacio tridimensional. Un plano está determinado por tres puntos. Para cualesquiera tres puntos que no estén en la misma recta, existe un único plano que contiene los tres puntos.

Los extremos de una superficie son líneas.

VII.

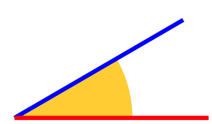
Una superficie plana es aquella que se encuentra uniformemente entre sus extremos.

VIII.

Un ángulo plano es la inclinación de dos líneas entre sí, en un plano, que se unen, pero no en la misma recta.

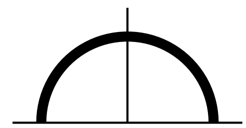
IX.

Un ángulo rectilíneo plano es la inclinación de dos rectas entre sí, que se unen, pero no están en la misma línea recta.



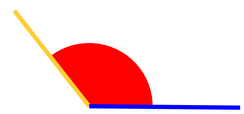
X.

Cuando una recta o segmento se coloca sobre otra línea recta haciendo que los ángulos adyacentes sean iguales, cada uno de estos ángulos se denomina ángulo *recto*, y se dice que son *perpendiculares* entre sí.



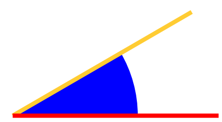
XI.

Un ángulo obtuso es un ángulo mayor que un ángulo recto.



XII.

Un ángulo agudo es un ángulo menor que un ángulo recto.



XIII.

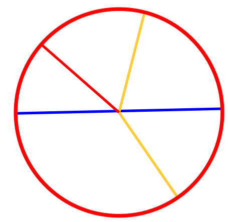
El término o frontera es el extremo de cualquier cosa.

XIV.

Una figura es una superficie limitada en todos sus lados por una o varias líneas.

XV.

Un círculo es una figura plana, limitado por una línea continua, llamado su circunferencia o periferia; y tiene un cierto punto dentro de ella, de donde todos los segmentos dibujados a su circunferencia son iguales.

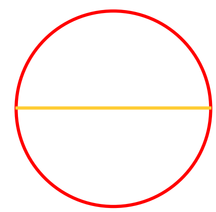


XVI.

Este punto (desde donde se trazan los segmentos iguales) es llamado el centro del círculo.

XVII.

El diámetro de un círculo es una línea recta que atraviesa el centro, terminado en ambos sentidos en la circunferencia.

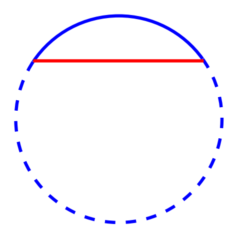


XVIII.

Un semicírculo es la figura contenida por el diámetro, y la parte del círculo cortada por el diámetro.

XIX.

Un segmento de un círculo es una figura contenida por una línea recta, y la parte de la circunferencia que corta.



XX.

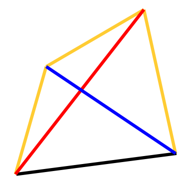
Una figura contenida sólo por líneas rectas, se llama figura rectilínea.

XXI.

Un triángulo es una figura rectilínea incluida por tres lados.

XXII.

Una figura cuadrilátera es una que está acotada por cuatro lados. Las líneas rectas y conectando los vértices de los ángulos opuestos de una figura cuadrilátera, se llaman sus diagonales.

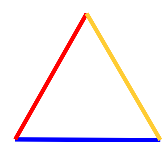


XXIII.

Un polígono es una figura rectilínea acotada por más de cuatro lados.

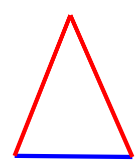
XXIV.

Un triángulo cuyos tres lados son iguales, se dice que es equilátero.



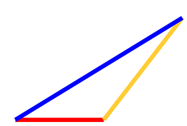
XXV.

Un triángulo que sólo tiene dos lados iguales se llama triángulo isósceles.



XXVI.

Un triángulo escaleno es uno que no tiene dos lados iguales.



XXVII.

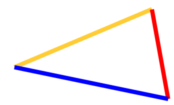
Un triángulo rectángulo es aquel que tiene un ángulo recto.

XXVIII.

Un triángulo angular obtuso es aquel que tiene un ángulo obtuso.

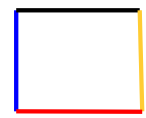
XXIX.

Un triángulo agudo es aquel que tiene tres ángulos agudos.



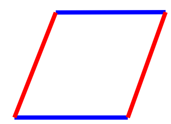
XXX.

De las figuras de cuatro lados, un cuadrado es aquel que tiene todos sus lados iguales, y todos sus ángulos rectos.



XXXI.

Un rombo es aquel que tiene todos sus lados iguales, pero sus ángulos no son rectos.

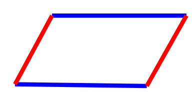


XXXII.

Un oblongo (rectángulo) es aquel que tiene todos sus ángulos rectos, pero no todos sus lados son iguales.

XXXIII.

Un romboide es aquel que tiene sus lados opuestos iguales entre sí, pero no todos sus lados son iguales, ni sus ángulos rectos.



XXXIV.

Todas las demás figuras cuadriláteras se llaman trapecios.

XXXV.

Las rectas paralelas son las que están en el mismo plano, y que se trazan continuamente en ambas direcciones y nunca se intersecan.

POSTULADOS.

I.

Es posible que se pueda trazar una línea recta o un segmento desde cualquier punto a cualquier otro punto.

II.

Se permite que un segmento se pueda trazar de cualquier longitud finita en una línea recta.

III.

Consideremos que un círculo puede construirse con cualquier centro a cualquier distancia de ese centro.

AXIOMAS.

I.

Las magnitudes que son iguales a la misma magnitud son iguales entre sí.

II.

Si se añaden iguales a iguales, las sumas serán iguales.

III.

Si se quitan iguales a iguales, los restos serán iguales.

IV.

Si se añaden iguales a desiguales, las sumas serán desiguales.

V.

Si se quitan iguales a desiguales, los restos serán desiguales.

VI.

Los dobles de la misma o iguales magnitudes son iguales.

VII.

Las mitades de la misma o iguales magnitudes son iguales.

VIII.

Las magnitudes que coinciden entre sí, o que ocupan exactamente el mismo espacio, son iguales.

IX.

El todo es más grande que cualquiera de sus partes.

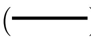
X.

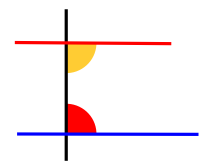
Dos líneas rectas no pueden incluir un espacio.

XI.

Todos los ángulos rectos son iguales.

XII.

Si dos líneas rectas () se encuentran con una tercera línea recta () para hacer que los dos ángulos interiores (y ) en el mismo lado sean menor que dos ángulos rectos, estas dos rectas se intersecan si se trazan en el lado en el que los ángulos son inferiores a dos ángulos rectos.



El duodécimo axioma puede expresarse de cualquiera de las siguientes maneras:

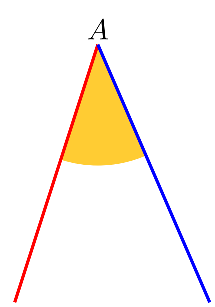
1. Dos rectas divergentes no pueden ser paralelas a la misma recta.

2. Si una línea recta interseca una de las dos líneas rectas paralelas también debe intersecar la otra.

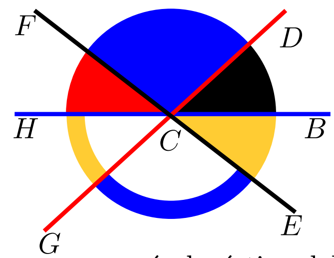
3. Sólo una línea recta se puede trazar a través de un punto dado, paralela a una línea recta dada.

La geometría tiene por objeto principal la exposición y explicación de las propiedades de *figura*, y la figura se define como la relación que subsiste entre los límites o fronteras en el espacio. El espacio o magnitud es de tres tipos, *lineal*, *superficial*, y *sólido*.

Los ángulos podrían ser considerados como una cuarta especie de magnitud. La magnitud angular consiste evidentemente en partes, y por lo tanto debe ser admitida como una especie de cantidad. El estudiante no debe suponer que la magnitud de un ángulo se ve afectada por la longitud de las líneas rectas que lo incluyen y de cuya divergencia mutua es la medida. El vértice de un ángulo es el punto donde los lados del ángulo se encuentran, como A.



Un ángulo se designa a menudo con una sola letra cuando sus lados son las únicas líneas que se unen en su vértice. Así, los segmentos rojas y azules forman el ángulo amarillo, que en otros sistemas se llamaría el ángulo A. Pero cuando más de dos líneas se encuentran en el mismo punto, era necesario por métodos anteriores, para evitar confusiones, emplear tres letras



para designar un ángulo sobre ese punto, la letra que marcó el vértice del ángulo, siempre se coloca en el medio. Así, los segmentos negros y rojos se encuentran en C, forma el ángulo azul, y se le ha denominado normalmente el ángulo FCD o DCF. Las líneas FC y CD son los lados del ángulo; el punto C es su vértice. De la misma manera, el ángulo negro se designaría como el ángulo DCB o BCD. Los ángulos rojo y azul se suman, o el ángulo HCF añadido a FCD, hacen el ángulo HCD; y así otros ángulos.

Cuando los lados de un ángulo se extienden o se prolongan más allá de su vértice, se dice que los ángulos que forman a ambos lados del vértice son verticalmente *opuestos* entre sí: Así pues, se dice que los ángulos rojo y amarillo son ángulos opuestos verticalmente.

Superposición es el proceso por el cual una magnitud puede ser concebida para ser colocada sobre otra, para exactamente cubrirlo, o para que cada parte de cada una coincida exactamente.

Se dice que un segmento se *extiende*, cuando se extiende, prolonga, o aumenta su longitud, y el incremento de longitud se llama su parte *extendida*, o su *extensión*.

La longitud total del segmento o segmentos que encierran una figura, se llama *perímetro*. Los primeros seis libros de Euclides tratan sólo de figuras planas. Una línea trazada desde el centro de un círculo hasta su circunferencia, se llama radio. Las líneas que incluyen una figura se llaman sus *lados*. El lado de un triángulo rectángulo, que es el opuesto al ángulo recto, se llama *hipotenusa*. Un *oblongo* se define en el segundo libro, y se llama *rectángulo*. Todas los segmentos y rectas que se consideran en los primeros libros de los Elementos se supone que están en el mismo plano.

Dos figuras geométricas se dice que son semejantes si tienen la misma forma sin importar el tamaño entre ellas, su posición u orientación, es decir traslación, rotación y/o reflexión. Las partes relacionadas entre las figuras semejantes se llaman homólogas o correspondientes. Una semejanza se puede expresar como una composición de rotaciones, traslaciones, reflexiones y homotecias. Por tanto la semejanza puede modificar el tamaño y la orientación de una figura pero no altera su forma.

Dos figuras geométricas se dice que son congruentes si tienen las mismas dimensiones y la misma forma sin importar su posición u orientación, es decir traslación, rotación y/o reflexión. Las partes relacionadas entre las figuras congruentes se llaman homólogas o correspondientes.

La regla y el compás son los únicos instrumentos, cuya utilización está permitida en Euclides, o la Geometría plana. Declarar esta restricción es el objeto de los postulados.

Los *Axiomas* de la geometría son ciertas proposiciones generales, cuya verdad se considera evidente e incapaz de ser establecida por una demostración.

Las *Proposiciones* son aquellos resultados que se obtienen en geometría por un proceso de razonamiento. Hay dos especies de proposiciones en geometría, *problemas* y *teoremas*.

Un *Problema* es una proposición en la que se propone hacer algo; como una línea que se traza bajo ciertas condiciones, un círculo que se construye, alguna figura a construir, etc.

La *solución* del problema consiste en demostrar cómo se puede hacer lo requerido con la ayuda de la regla o regla y compás.

La *demostración* consiste en probar que el proceso indicado en la solución realmente alcanza el fin deseado.

Un *Teorema* es una proposición en la cual se afirma la verdad de algún principio. Este principio debe deducirse de los axiomas y definiciones, u otras verdades establecidas previamente e independientemente. Probar esto es el objeto de la demostración.

Un *Problema* es análogo a un postulado.

Un *Teorema* se asemeja a un axioma.

Un *Postulado* es un problema, cuya solución se asume.

Un *Axioma* es un teorema, cuya verdad se da sin demostración.

Un *Corolario* es una inferencia deducida inmediatamente de una proposición.

Un *Escolio* es una nota u observación sobre una proposición que no contiene una inferencia de importancia suficiente para darle derecho al nombre de corolario.

Un *Lema* es una proposición meramente introducida con el propósito de establecer una proposición más importante.

SÍMBOLOS Y ABREVIATURAS.

$\therefore$ expresa la palabra por lo tanto.

$\because$ expresa la palabra porque o en consecuencia o puesto que.

$=$ expresa la palabra igual. Este signo de igualdad se puede leer *igual* a, o es igual a, o son iguales a; pero cualquier discrepancia con respecto a la introducción de los verbos auxiliares es, son, etc. no puede afectar el rigor geométrico.

$\neq$ significa lo mismo que si las palabras “*no es igual*’ fueran escritas.

$>$ significa mayor que.

$<$ significa menor que.

$\not>$ significa no mayor que.

$\not<$ significa no menor que.

$+$ se lee más, el signo de la adición; cuando se interpone entre dos o más magnitudes, significa su suma.

$-$ se lee menos (resta), significa sustracción; y cuando se sitúa entre dos cantidades, significa que la segunda debe tomarse de la primera.

$\times$ este signo expresa el producto de dos o más números cuando se colocan entre ellos en aritmética y álgebra; pero en geometría se usa generalmente para expresar un *rectángulo*, cuando se coloca entre “dos segmentos que contienen uno de sus ángulos rectos. Un “*rectángulo*” puede también representarse colocando un punto entre dos de sus lados contiguos.

: :: : expresa una analogía o proporción; por lo tanto, si A, B, C y D, representan cuatro magnitudes, y A tiene para B la misma proporción que C tiene para D, la proposición se escribe así brevemente,

$$A : B :: C : D,$$

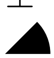
$$A : B = C : D, \text{ o } \frac{A}{B} = \frac{C}{D}.$$

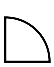
Esta igualdad o igualdad de proporción se lee,

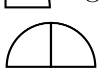
como A es a B, así es C a D; o A es a B, como C es a D.

$\parallel$ significa *paralela a.*

$\perp$ significa *perpendicular a.*

 significa *ángulo*

 significa *ángulo recto.*

 significa *dos ángulos rectos.*

o designa brevemente un *punto*. También , el punto de intersección de los segmentos y .

$>$, $=$, o $<$ significa *mayor*, *igual*, *o menor que* respectivamente.

El cuadrado construido sobre un segmento se escribe de forma concisa de la siguiente manera, ^{2}

De la misma manera, el doble del cuadrado se expresa mediante $2 \cdot {}^2$.

def. significa definición.

post. significa postulado.

ax. significa axioma.

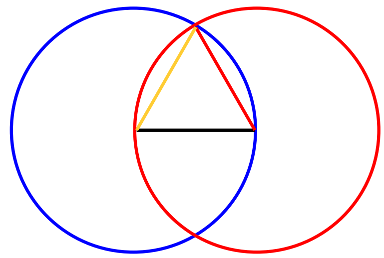
hip. significa hipótesis. Aquí puede ser necesario comentar, que la hipótesis es la condición asumida o dada por sentada. Así, la hipótesis de la proposición dada en la Introducción, es que el triángulo es isósceles, o que sus lados son iguales.

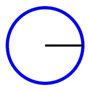
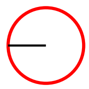
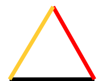
const. significa construcción. La construcción es el cambio hecho en la figura original, dibujando segmentos, líneas, haciendo ángulos, construyendo círculos, etc. para adaptarlo al argumento de la demostración o de la solución del problema. Las condiciones en las que se realizan estas modificaciones, son tan indiscutibles como las contenidas en la hipótesis. Por ejemplo, si hacemos un ángulo igual a un ángulo dado, estos dos ángulos son iguales por construcción.

Q. E. D. significa	Quod erat demonstrandum.
	Queda esto demostrado.

LIBRO I. PROPOSICIÓN I. PROBLEMA.

SOBRE un segmento dada ( ) se puede construir un triángulo equilátero.



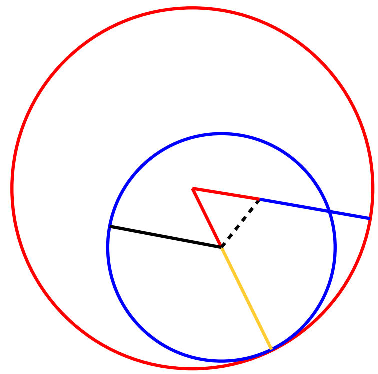
Construir  y  (post. III); trazar y (post. I), entonces  es equilátero.

En efecto, como = (def. I. 5); y = (def. I. 5), ∴ = (axioma. I.); y por lo tanto  es el triángulo equilátero requerido.

Q. E. D.

LIBRO I. PROPOSICIÓN II. PROBLEMA.

DESDE un punto dado ( ), se puede trazar un segmento igual a un segmento dado ( ).



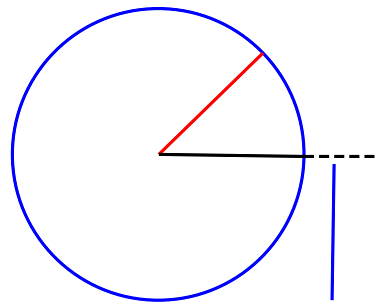
Trazar (post. I.), construir (L. I, pr. 1), trazar (post. II), construir (post. II), y (post. III); trazar (post. II), entonces es el segmento buscado.

Ya que = (def. 15.), y = (const.), ∴ = (ax. III), pero (def. 15) = = ; ∴ trazada del punto dado ( ), es igual al segmento dado . Q. E. D.

LIBRO I. PROPOSICIÓN III. PROBLEMA.

DESDE el mayor ( ) de dos segmentos dados, se puede cortar una parte igual al segmento menor ( ).

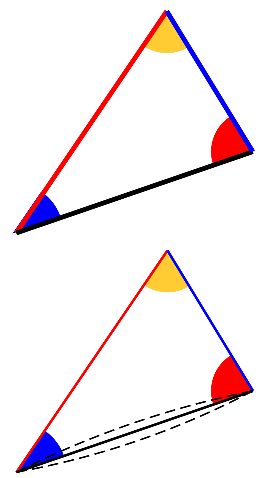
Trazar = (L. 1, pr. 2), desde el extremo de ; construir (post. 3), entonces = .
Así = (def. 15.), y = (const.); ∴ = (ax. I).

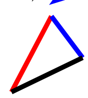
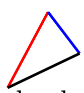


Q. E. D.

LIBRO I. PROPOSICIÓN IV. TEOREMA.

SI dos triángulos tienen dos lados respectivamente iguales, (a y a) y los ángulos (y) contenidos por estos lados iguales también son iguales; entonces sus bases o sus lados (y) son también iguales: y los ángulos restantes opuestos a los lados iguales son iguales (=) y (=) respectivamente: los triángulos son iguales en todos los aspectos y son congruentes.

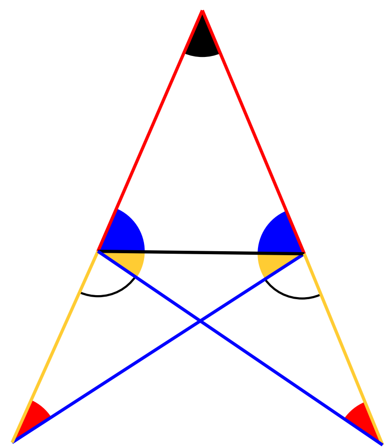


Sean los dos triángulos concebidos, para ser colocados, de modo que el vértice de uno de los ángulos iguales, o ; caiga sobre el otro, y para que coincida con , entonces coincide con si se aplica: por consiguiente coincidirá con , o dos segmentos encierran un espacio, lo que es imposible (ax. 10), por lo tanto = , = y = , y como los triángulos  y  coinciden, cuando se aplica, son iguales en todos los aspectos y son congruentes.

Q. E. D.

LIBRO I. PROPOSICIÓN V. TEOREMA.

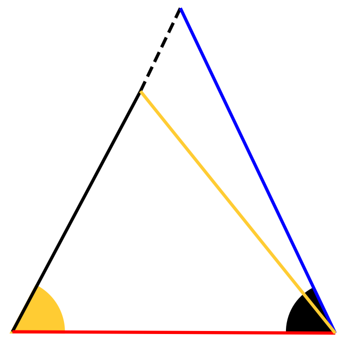
EN cualquier triángulo isósceles si se extienden los lados iguales, los ángulos externos de la base son iguales, y los ángulos internos en la base también son iguales.



Extender , y , (post. 2.), tomar la extensión = , (pr. 3); trazar y . Entonces en y tenemos, = (const.), común, y = (hip.) ∴ = , = y = (pr. 4.). De nuevo en y tenemos, = , = y = , ∴ = , y = (pr. 4), pero , ∴ = (ax. 3). Q. E. D.

LIBRO I. PROPOSICIÓN VI. TEOREMA.

EN cualquier triángulo ( ) si dos ángulos (y) son iguales, los lados y) opuestos a ellos son también iguales.



En efecto, si los lados no son iguales, sea uno de ellos mayor que el otro , y de este se corta = (pr. 3.), y trazamos .

Entonces en y , = , (const.) = (hip.) y común, ∴ los triángulos son congruentes (pr. 4.) y una parte es igual a la totalidad, lo cual es absurdo; ∴ ninguno de los lados o es mayor que el otro, ∴ por lo tanto son iguales. Q. E. D.

LIBRO I. PROPOSICIÓN VII. TEOREMA.

SOBRE la misma base (), y sobre el mismo lado de este no se pueden tener dos triángulos con su lados contiguos (y , y) en ambos extremos de la base, iguales entre sí.

Cuando dos triángulos están en la misma base, y sobre el mismo lado de esta, el vértice de uno debe caer fuera del otro triángulo o dentro de él; o, por último, en uno de sus lados.

Si podemos construir los dos triángulos de manera que:

$$\left\{ \equiv \right\},$$

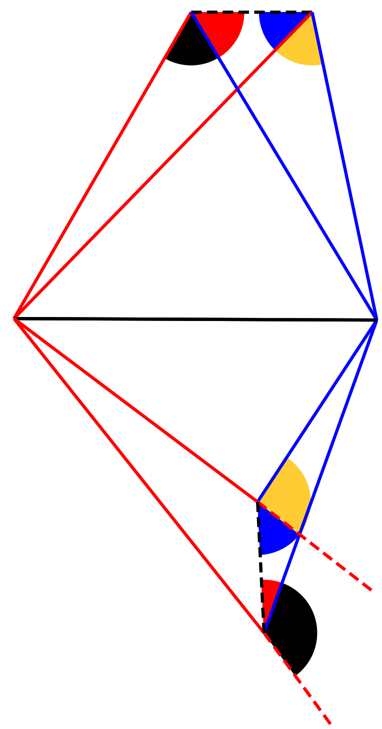
entonces trazamos y,

$=$ (pr. 5)

$\therefore$ $<$ y $\therefore$ $<$,

pero (pr. 5) $=$,

lo cual es absurdo, por lo tanto, los dos triángulos no pueden tener sus lados contiguos iguales en ambos extremos de la base.

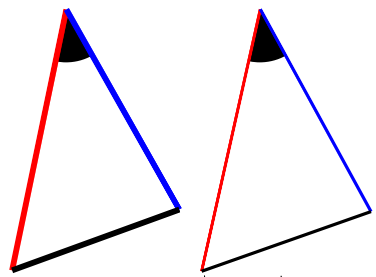


Q. E. D.

LIBRO I. PROPOSICIÓN VIII. TEOREMA.

SI los tres pares de lados de dos triángulos son iguales en longitud, (= y =), y sus bases (=), entonces los ángulos (y) contenidos por sus lados iguales son también de igual medida, o sea los triángulos son congruentes.

Si las bases y se conciben para ser colocadas uno sobre la otro, de modo que los triángulos están del mismo lado de ellos, y que los lados y , y son contiguos, el vértice de uno debe caer sobre el vértice del otro; pues suponer que no son coincidentes contradice la última proposición.

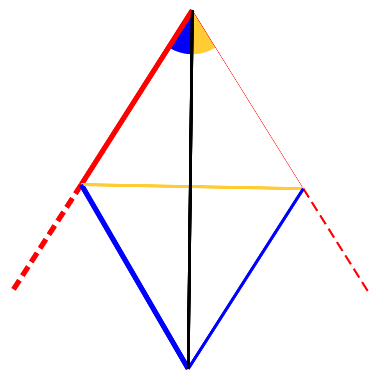


Así, los lados y , coinciden con y , ∴ = .

Q. E. D.

LIBRO I. PROPOSICIÓN IX. PROBLEMA.

ES posible bisecar un ángulo rectilíneo dado ( ).



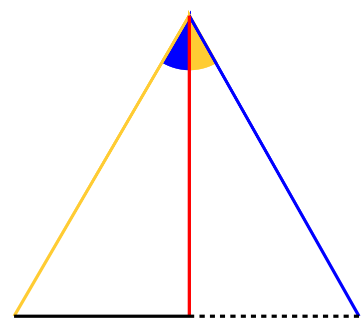
Tomar = (pr. 3), trazar ,
construir (pr. 1), trazar .
Porque = (const.), el lado es común a los dos triangles y = (const.), ∴ = (pr. 8.).

Q. E. D.

LIBRO I. PROPOSICIÓN X. PROBLEMA.

SE puede bisecar un segmento dado ( ).

Construir el triángulo equilátero (pr. 1), con ( ) como base, trazar el segmento , haciendo = (pr. 9).
Entonces = por (pr. 4.), ya que = (const.), = y es común a los dos triángulos. Por lo tanto, el segmento dado es bisecado.

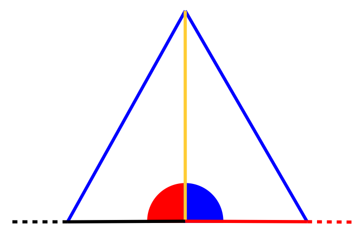


Q. E. D.

LIBRO I. PROPOSICIÓN XI. PROBLEMA.

D*ESDE un punto dado ( ), en un segmento dado ( ), se puede trazar una perpendicular.*

Tomar cualquier punto ( ) en el segmento dado, cortar $=$ (pr. 3), construir un triángulo equilátero (pr. 1.), trazar y afirmamos que es perpendicular al segmento dado.

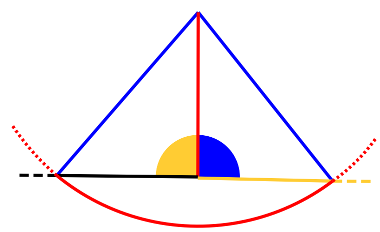


En efecto, $=$ (const.) $=$ (const.) y es común a los dos triángulos.

Por lo tanto $=$ (pr. 8) $\therefore$ $\perp$ (def. 10). Q. E. D.

LIBRO I. PROPOSICIÓN XII. PROBLEMA.

SE puede trazar un segmento perpendicular ( ) a una recta cualquiera dada ( ) desde un punto determinado) fuera de la recta.



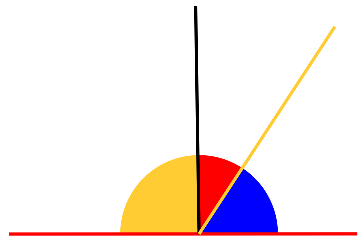
Con el punto dado como centro, a un lado de la línea, y cualquier distancia capaz de extenderse al otro lado, construir un círculo .

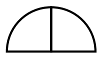
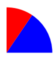
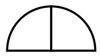
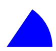
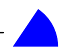
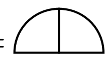
Hacer = (pr. 10), trazar , y entonces ⊥ .

Por (pr. 8) puesto que = (const.), común a ambos, y = (def. 15), ∴ = , y ∴ ⊥ (def. 10). Q. E. D.

LIBRO I. PROPOSICIÓN XIII. TEOREMA.

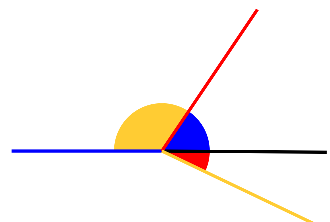
CUANDO una línea recta ( ) se interseca con otra línea recta ( ), los ángulos formados son ya sea dos ángulos rectos o juntos suman dos ángulos rectos.



Si es $\perp$ a entonces, =  y
 +  =  (def. 10).
Si no es $\perp$ a , trazar $\perp$
(pr. 11), +  =  (const.)
 =  =  + 
$\therefore$ +  = +  +  (ax. 2) =  +  = . Q. E. D.

LIBRO I. PROPOSICIÓN XIV. TEOREMA.

SI dos rectas (y), intersecan una tercera recta ( ), en el mismo punto, y en lados opuestos de ella, de modo que la suma de los ángulos adyacentes (y) es igual a dos ángulos rectos; entonces estas dos líneas rectas son una misma recta continua.



Supongamos que , y no , es la continuación de , entonces:

$+$ $=$, pero por hipótesis

$+$ $=$ $\therefore$ $=$, (ax. 3.);

lo cual es absurdo (ax. 9).

$\therefore$, no es la continuación de , y así hemos demostrado que sólo puede ser la continuación de , formado parte de una línea recta.

Q. E. D.

LIBRO I. PROPOSICIÓN XV. TEOREMA.

S*I dos líneas rectas (y) se intersecan en un punto, los ángulos verticales y , y son iguales.*

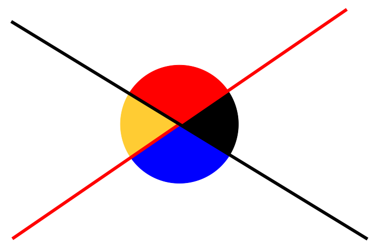
$+$ $=$ (pr. 13),

$+$ $=$ (pr. 13),

$\therefore$ $=$.

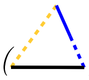
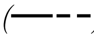
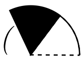
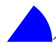
De la misma manera, se puede demostrar que

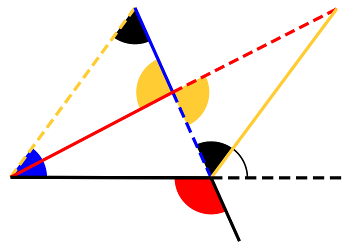
$=$.



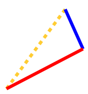
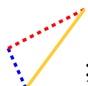
Q. E. D.

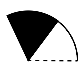
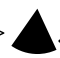
LIBRO I. PROPOSICIÓN XVI. TEOREMA.

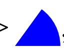
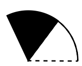
SI un lado de un triángulo () se extiende (), el ángulo externo () es mayor que cualquiera de los ángulos internos no adyacentes ( o ).



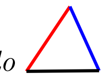
Hacer = (pr. 10). Trazar y extenderlo hasta que  = ; trazar .

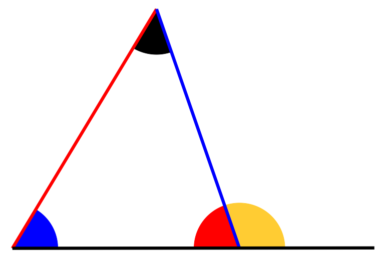
En  y ; = , = y  =  (const. pr. 15),

∴  =  (pr. 4), ∴  > .

De igual manera se puede probar que si se extiende,  > , y por lo tanto  el cual es =  es > . Q. E. D.

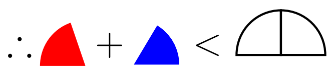
LIBRO I. PROPOSICIÓN XVII. TEOREMA.

CUALESQUIERA dos ángulos de un triángulo  *sumados en menor que dos ángulos rectos.*



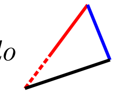
Extender , entonces tenemos:

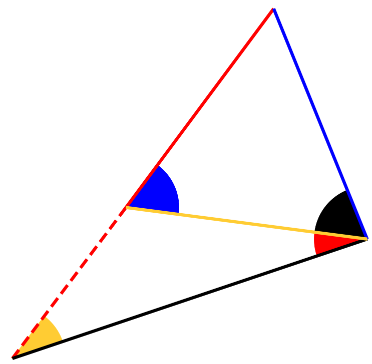
Pero  (pr. 16.)

,

y de la misma manera se puede demostrar que los otros dos ángulos del triángulo tomados juntos es menor de dos ángulos rectos. Q. E. D.

LIBRO I. PROPOSICIÓN XVIII. TEOREMA.

EN cualquier triángulo  *si un lado* *es mayor que otro* *, el ángulo opuesto al lado mayor* *, es mayor que el ángulo opuesto al menor* *.*



Hacer = (pr. 3), trazar . Entonces se tiene  =  (pr. 5); pero  > (pr. 16) ∴  > y con mucha más razón  > .

Q. E. D.

LIBRO I. PROPOSICIÓN XIX. TEOREMA.

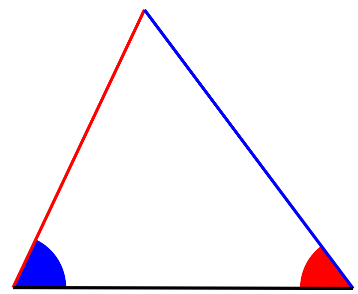
EN cualquier triángulo si un ángulo es mayor que otro ángulo, el lado que es opuesto al ángulo mayor, es mayor que el lado opuesto al ángulo menor.

Si no es mayor que , entonces debemos tener = o < .

Si = entonces: = (pr. 5.); que es contrario a la hipótesis.

Tenemos que no es inferior a ; porque si lo fuera, < (pr. 18), lo que es contrario a la hipótesis:

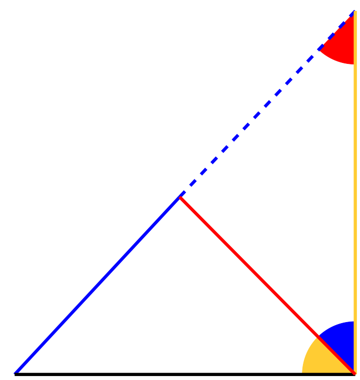
∴ > .



Q. E. D.

LIBRO I. PROPOSICIÓN XX. TEOREMA.

C*UALQUIERA de dos lados y de un triángulo sumados es mayor que el tercero lado ( ).*



Extender y hacer = (pr. 3);
trazar .

Entonces como = (const.),

= (pr. 5) ∴ > (ax. 9)

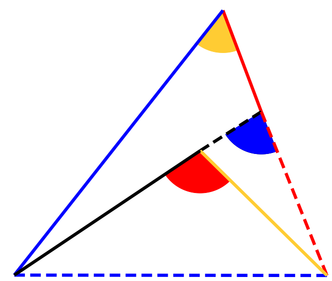
∴ + > (pr. 19) y

∴ + > .

Q.E.D.

LIBRO I. PROPOSICIÓN XXI TEOREMA.

S*I desde cualquier punto ( ) dentro de un triángulo , dos segmentos son trazados a los extremos de un lado ( ), la suma de estos segmentos es menor que la suma de los otros dos lados, pero forman un ángulo mayor ( ) que el que forman los lados considerados ( ).*



Extender , $+$ $>$ (pr. 20), sumemos a cada uno:

$+$ $>$ $+$ (ax. 4).

De la misma manera, se puede demostrar que

$+$ $>$ $+$,

$\therefore$ $+$ $>$ $+$,

que debía probarse. Además $>$ (pr. 16), y también $>$ (pr. 16), $\therefore$ $>$. Q.E.D.

LIBRO I. PROPOSICIÓN XXII. TEOREMA.

DADOS tres segmentos de modo que la suma de dos cualesquiera es mayor que el tercero, se puede construir un triángulo cuyos lados serán respectivamente iguales a los segmentos dados.

Tomemos = (pr. 3).

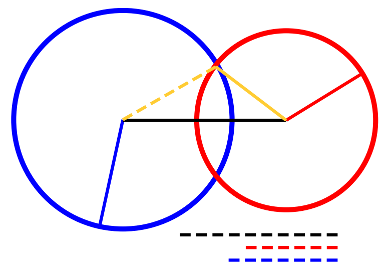
Trazar = y = (pr. 2) de los extremos de .

Con y como radios construir y (post. 3); trazar y , entonces es el triángulo requerido.

Así = ,

= =

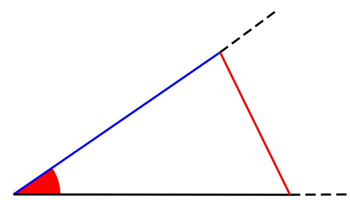
y = = . (const.)



Q.E.D.

LIBRO I. PROPOSICIÓN XXIII. PROBLEMA.

EN un punto dado ( ) de una línea recta dada ( ), se puede construir un ángulo ( ) igual a un ángulo rectilíneo dado ( ).

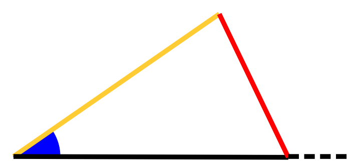


Trazar entre dos puntos cualesquiera de los lados del ángulo dado.

Construir (pr. 22), de modo que:

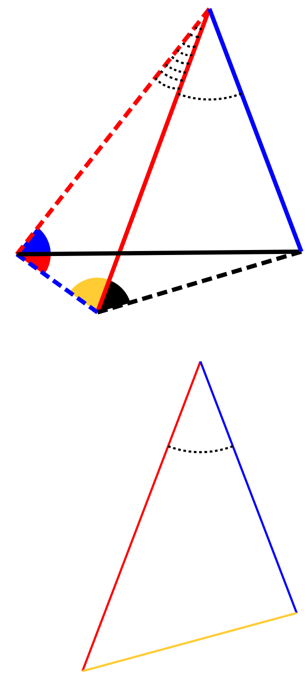
= , = y = ,

entonces = (pr. 8).



Q. E. D.

LIBRO I. PROPOSICIÓN XXIV. TEOREMA.



SI dos triángulos tienen dos lados respectivamente iguales (a y a), y si en uno el ángulo ( ) contenido por los lados iguales es mayor que el otro ( ), el lado ( ) opuesto al ángulo mayor es mayor que el lado ( ) opuesto al ángulo menor.

En el triángulo con el ángulo mayor construir

$=$ (pr. 23), $=$ (pr. 3)

y trazar y .

Dado que $=$ (ax. 1, hip., const.)

$\therefore$ $=$ (pr. 5), pero $<$, y

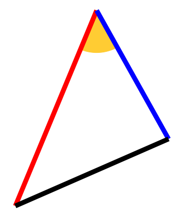
$\therefore$ $<$, $\therefore$ $>$ (pr. 19), además

$=$ (pr. 4) $\therefore$ $>$.

Q. E. D.

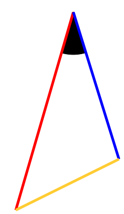
LIBRO I. PROPOSICIÓN XXV. TEOREMA.

S*I dos triángulos tienen dos lados (y) de uno respectivamente igual a dos lados (y) del otro, pero sus bases son desiguales, el ángulo subtendido por la base mayor ( ), debe ser mayor que el ángulo subtendido por la base menor ( ).*



Tenemos que $=$, $>$ o $<$; pero:

– no es igual a porque si $=$, entonces $=$ (pr. 4) lo que contradice la hipótesis;



– no es inferior a porque si $<$, entonces $<$ (pr. 24), lo que también es contrario a la hipótesis:

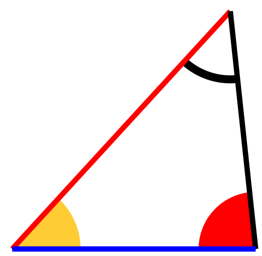
$\therefore$ $>$.

Q. E. D.

LIBRO I. PROPOSICIÓN XXVI. TEOREMA.

SI dos triángulos tienen dos pares de ángulos iguales (= y =), y un par de lados iguales, colocados de manera similar con respecto a los ángulos iguales, los lados y ángulos restantes son respectivamente iguales entre sí, es decir los triángulos son congruentes.

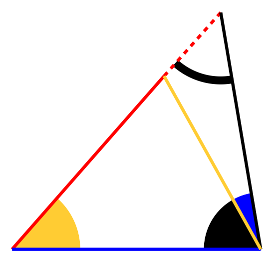
CASO I.



Si y se encuentran entre los dos ángulos iguales y son iguales, entonces = .

Si no es el caso, supongamos que sea mayor que el otro; hagamos = , y tracemos .

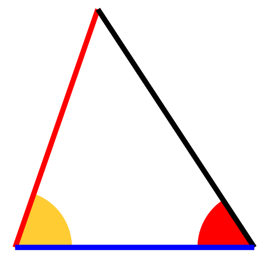
En y tenemos = , = , = ; ∴ = (pr. 4), pero = (hip.) y por lo tanto = , lo cual es absurdo.



Por lo tanto ninguno de los lados y es mayor que el otro; y son iguales.

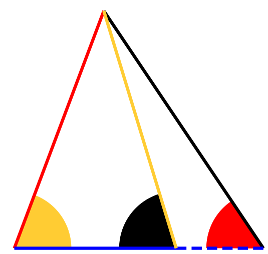
Similarmente se verifica que = , y = (pr. 4).

Caso II.



Consideremos el caso = , que se encuentran opuestos a los ángulos iguales y , entonces = .
Si no es el caso, supongamos que > , y tomemos = y tracemos .

Entonces en y tenemos = , = y = , ∴ = (pr. 4), pero = (hip.) ∴ = lo cual es absurdo (pr. 16).

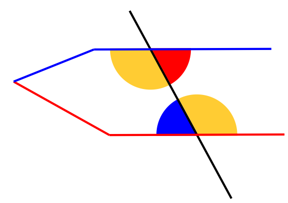


Consecuentemente, ninguno de los lados o es mayor que el otro, por lo tanto deben ser iguales. Se concluye (por pr. 4) que los triángulos son congruentes.

Q. E. D.

LIBRO I. PROPOSICIÓN XXVII. TEOREMA.

SI una línea recta ( ) interseca otras dos líneas rectas, (y) haciendo que los ángulos alternos (y ; y) sean iguales, entonces estas dos líneas rectas son paralelas.

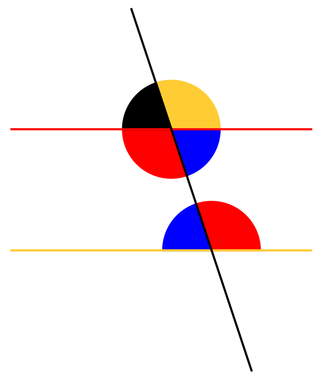


Si no es paralela a , se intersecan cuando se trazan, entonces el ángulo externo es mayor que (pr. 16), pero por hipótesis son iguales, lo cual es absurdo, ∴ son paralelas.

Q. E. D.

LIBRO I. PROPOSICIÓN XXVIII. TEOREMA.

SI una línea recta ( ) corta otras dos líneas rectas (y), haciendo iguales los ángulos interior y opuesto, del mismo lado del segmento de corte (a saber, = o =), o si hace que los dos ángulos internos del mismo lado (y , o y) sumen dos ángulos rectos, estas dos líneas rectas son paralelas.



Primero, si = , entonces = (pr. 15),

$\therefore$ = $\therefore$ $\parallel$ (pr. 27).

En segundo lugar, si + = ,

entonces + = (pr. 13),

$\therefore$ + = + (ax. 3),

$\therefore$ = $\therefore$ $\parallel$ (pr. 27).

Q. E. D.

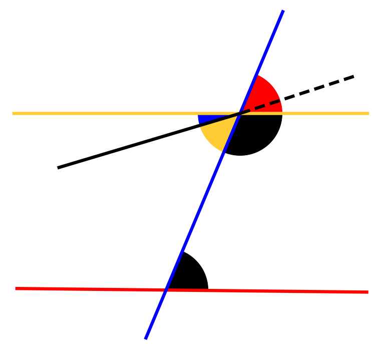
LIBRO I. PROPOSICIÓN XXIX. TEOREMA.

UNA línea recta ( ) intersecando dos rectas paralelas (y), hace que:

(1) *los ángulos alternos sean iguales;*

(2) *el ángulo externo sea igual al ángulo interno y opuesto del mismo lado;*

(3) *los dos ángulos internos sumados del mismo lado equivalen a dos ángulos rectos.*



(1) Si los ángulos alternos y no son iguales, trazar , haciendo $=$ (pr. 23).

Así $\|$ (pr. 27) y por lo tanto dos rectas que se cruzan son paralelas a una misma recta, lo que es imposible (ax. 12).

De ahí que los ángulos alternos y deben ser iguales.

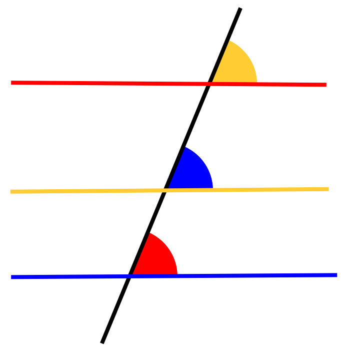
(2) Ahora $=$ (pr. 15); $\therefore$ $=$, el ángulo externo igual al interno y opuesto en el mismo lado.

(3) Como $=$, entonces $+$ $=$ $=$ (pr. 13), es decir, los dos ángulos internos del mismo lado del segmento de corte son iguales a dos ángulos rectos.

Q. E. D.

LIBRO I. PROPOSICIÓN XXX. TEOREMA.

L*ÍNEAS rectas* { } *que son paralelas a una misma recta* ( ), *son paralelas entre sí.*



Sea intersecando: { }

entonces, = = (pr. 29),

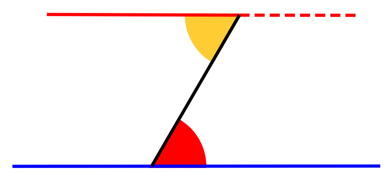
$\therefore$ = , $\therefore$ $\parallel$ (pr. 27).

Q. E. D.

LIBRO I. PROPOSICIÓN XXXI. PROBLEMA.

DESDE un punto dado se puede trazar una línea recta paralela a una determinada línea recta ().

Trazar del punto a cualquier punto en , hacer = (pr. 23.), entonces ∥ (pr. 27).



Q. E. D.

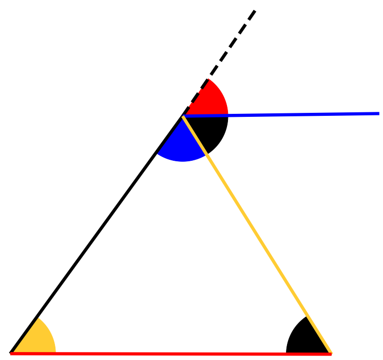
LIBRO I. PROPOSICIÓN XXXII. TEOREMA.

SI algún lado ( ) de un triángulo se extiende, el ángulo externo ( ) es igual a la suma de los dos ángulos internos y opuestos (y), y la suma de los tres ángulos internos de cada triángulo es igual a dos ángulos rectos.

A través del punto trazar $\parallel$ (pr. 31), entonces $\left\{ = \atop = \right\}$ (pr. 29),

$\therefore$ $+$ $=$ (ax. 2), y por lo tanto

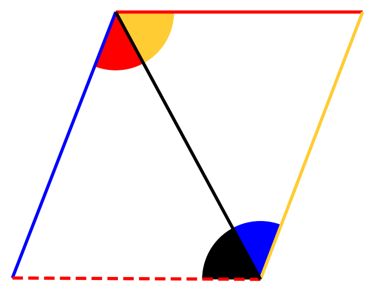
$+$ $+$ $=$ $=$ (pr. 13).



Q. E. D.

LIBRO I. PROPOSICIÓN XXXIII. TEOREMA.

LOS segmentos (y) que unen los extremos adyacentes de dos segmentos iguales y paralelos (y), son ellos mismos iguales y paralelos.



Trazar la diagonal , = (pr. 29), = (hip.), y común a los dos triángulos, son congruentes:

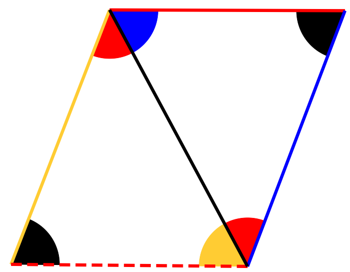
$\therefore$ = , = (pr. 4); y

$\therefore$ $\parallel$ (pr. 27).

Q. E. D.

LIBRO I. PROPOSICIÓN XXXIV. TEOREMA.

LOS lados y ángulos opuestos de cualquier paralelogramo son iguales, y la diagonal ( ) lo biseca (divide en dos partes iguales).

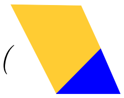
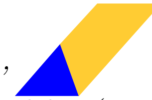


Puesto que { = ; = } (pr. 29) y es común a los triángulos y , por lo que son congruentes:

∴ { = ; = ; = } (pr. 26) y = (ax. 2):

Así, los lados y ángulos opuestos del paralelogramo son iguales, y como los triángulos y son congruentes (pr. 4), la diagonal biseca al paralelogramo. Q. E. D.

LIBRO I. PROPOSICIÓN XXXV. TEOREMA.

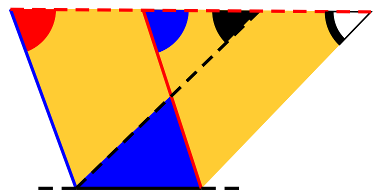
LOS paralelogramos ( *,*  *) sobre la misma base (——) y entre las mismas paralelas (- - - - - - , - - —— - -), son de áreas iguales.*

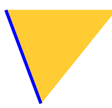
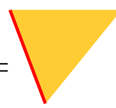
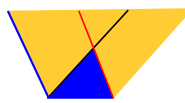
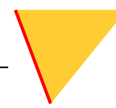
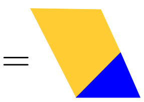
Debido a las paralelas,

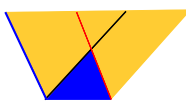
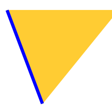
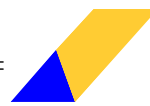
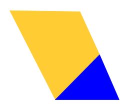
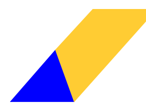
 = ; (pr. 29)

 = ; (pr. 29)

y —— = —— (pr. 34)

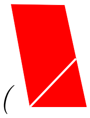


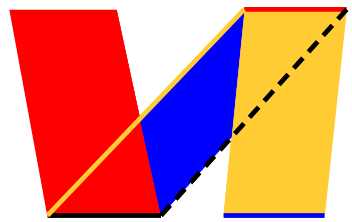
Pero,  =  (pr. 8) ∴  −  = ,

y  −  =  , ∴  = .

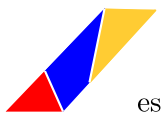
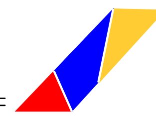
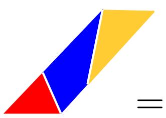
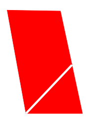
Q. E. D.

LIBRO I. PROPOSICIÓN XXXVI. TEOREMA.

PARALELOGRAMOS ( y) sobre bases de igual magnitud, y entre las mismas paralelas, son iguales en área.

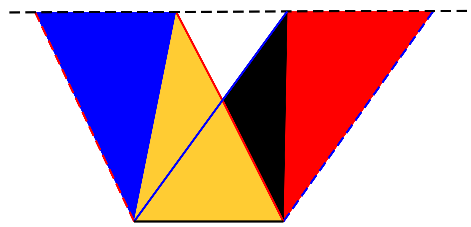


Trazar y , entonces = = , por (pr. 34, e hip.);
∴ = y son $\parallel$;
∴ = y son $\parallel$ (pr. 33).

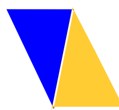
Y por lo tanto  es un paralelogramo, pero  =  y  = (pr. 35) ∴  = (ax. 1). Q. E. D.

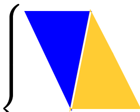
LIBRO I. PROPOSICIÓN XXXVII. TEOREMA.

TRIÁNGULOS ( *y*  *) sobre la misma base ( ) y entre las mismas paralelas (,) tienen la misma área.*

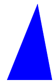


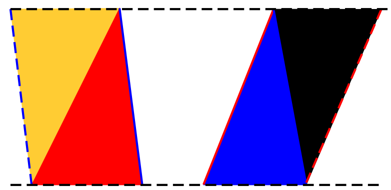
Trazar } (pr. 31).

Extender , para obtener los paralelogramos  y  sobre la misma base y entre las mismas paralelas; por lo tanto tienen áreas iguales (pr. 35):

∴ {  = dos veces ;  = dos veces  } (pr. 34). ∴ = . Q. E. D.

LIBRO I. PROPOSICIÓN XXXVIII. TEOREMA.

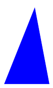
TRIÁNGULOS ( y ) sobre bases de igual magnitud y entre las mismas paralelas tienen sus áreas iguales.



Trazar ∥
y ∥ } (pr. 31),

 =  (pr. 36); pero

 = dos veces  (pr. 34), y también  = dos veces  (pr. 34),

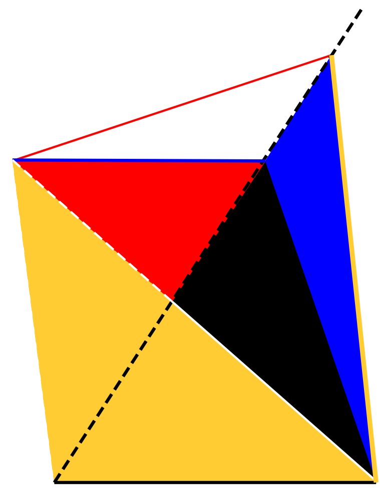
∴  =  (ax. 7). Q. E. D.

LIBRO I. PROPOSICIÓN XXXIX. TEOREMA.

TRIÁNGULOS de áreas iguales y sobre la misma base () y sobre el mismo lado de ésta, están entre las mismas paralelas.

Si el segmento que une los vértices de los triángulos, no es $\|$, entonces trazar $\|$ (pr. 31), tocando .

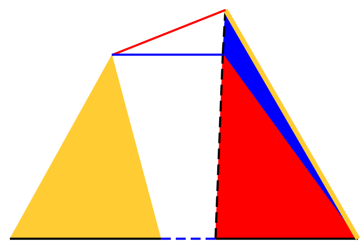
Trazar , como $\|$ (const.), $=$ (pr. 37), pero $=$ (hip.); $\therefore$ $=$, una parte es igual al total, lo cual es absurdo, $\therefore$ lo que se supusimos es falso y $\|$.



Q. E. D.

LIBRO I. PROPOSICIÓN XL. TEOREMA.

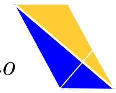
TRIÁNGULOS con áreas iguales (y), del mismo lado del segmento () que contiene sus bases de igual longitud, están entre las mismas paralelas.

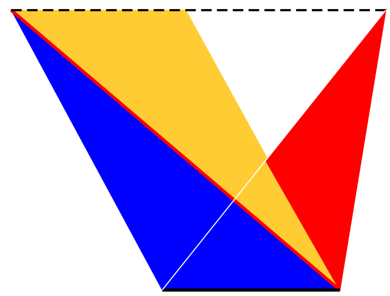


Supongamos que une los vértices de los triángulos no es $\parallel$ a , trazar $\parallel$ (pr. 31), intersecando . Trazar . Porque $\parallel$ (const.) $=$, pero $=$, por lo que una parte igual es igual a la totalidad, lo cual es absurdo.

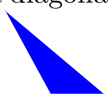
$\therefore$ lo que se supusimos es falso y $\parallel$. Q. E. D.

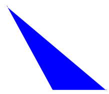
LIBRO I. PROPOSICIÓN XLI. TEOREMA.

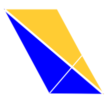
SI un paralelogramo  *y un triángulo*  *están en la misma base y entre las mismas paralelas y , el área del paralelogramo es el doble del área del triángulo.*



Trazar la diagonal del paralelogramo;

entonces  =  (pr. 37),

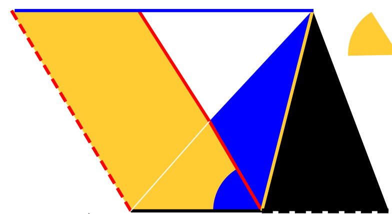
 = dos veces  (pr. 34),

$\therefore$  = dos veces  .

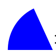
Q. E. D.

LIBRO I. PROPOSICIÓN XLII TEOREMA.

SE puede construir un paralelogramo igual en área a un triángulo dado  *y que tengan un ángulo igual a un ángulo rectilíneo dado* .

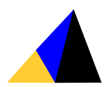


Hacer = (pr. 10).

Trazar . Hacer  = (pr. 23).

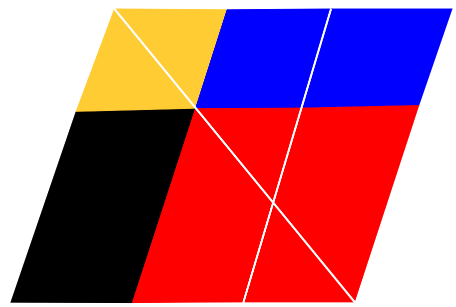
Trazar $\left\{ \begin{array}{c} \parallel \\ \parallel \end{array} \right\}$ (pr. 31).

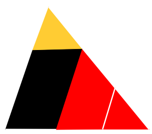
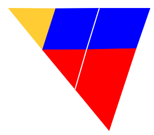
 = dos veces  (pr. 41), pero  =  (pr. 38),

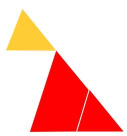
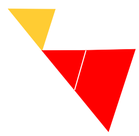
$\therefore$ =  . Q. E. D.

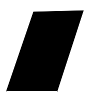
LIBRO I. PROPOSICIÓN XLIII. TEOREMA.

LOS complementos  *y*  *de los paralelogramos que están alrededor de la diagonal de un paralelogramo son iguales.*



 =  (pr. 34),

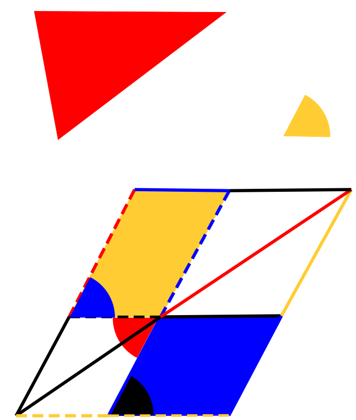
y  =  (pr. 34),

$\therefore$  =  (ax. 3).

Q. E. D.

LIBRO I. PROPOSICIÓN XLIV. PROBLEMA.

DADOS un segmento ( ), un ángulo rectilíneo ( ) y un triángulo ( ) arbitrarios, se puede construir un paralelogramo ( ) de igual área que el triángulo, que contiene el ángulo dado y tiene un lado de longitud igual al segmento dado.



Hacer = con = (pr. 42), y que tiene uno de sus lados contiguos con y en continuación de .

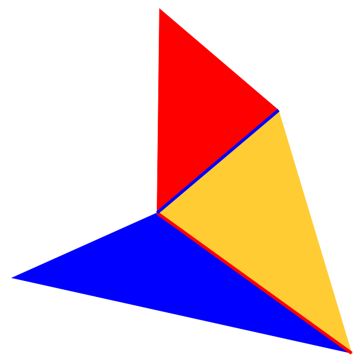
Extender hasta que encuentre ‖ , trazar y extenderla hasta que encuentre extendida; trazar ‖ tocando extendida, y extender .

Así = (pr. 43), pero = (const.) ∴ = y = = = (pr. 29 y const.)

Q. E. D.

LIBRO I. PROPOSICIÓN XLV. PROBLEMA.

SE puede construir un paralelogramo igual en área a una figura rectilínea dada ( ) y que tengan un ángulo igual a un ángulo rectilíneo dado ( ).



Trazar y dividir la figura rectilínea en triángulos.

Construir = con = (pr. 42).

Sea ( ) un lado de fijo.

Con se construye = con = (pr. 44).

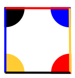
También con se construye = con = (pr. 44),

∴ = y es un paralelogramo, (prs. 29, 14, 30) teniendo = . Q. E. D.

LIBRO I. PROPOSICIÓN XLVI. PROBLEMA.

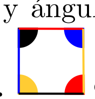
SOBRE un segmento arbitrario dado ( ), se puede construir un cuadrado.

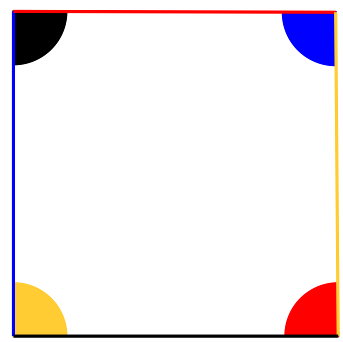
Trazar $\perp$ e $=$ (pr. 11 y pr. 3).
Trazar $\|$ e $=$,
trazar $\|$ e $=$.

En  tenemos $=$ (const.),

 $=$ un ángulo recto (const.)

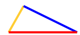
$\therefore$  $=$ $=$ un ángulo recto (pr. 29), y los lados y ángulos restantes son iguales,

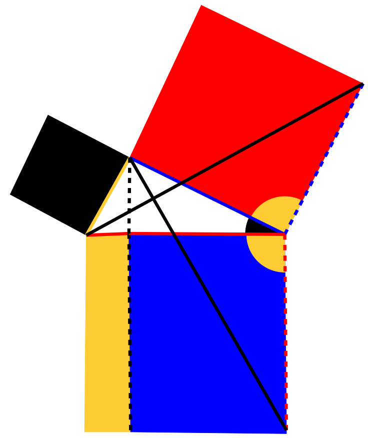
(pr. 34) y $\therefore$  es un cuadrado. (def. 27).



Q. E. D.

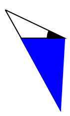
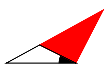
LIBRO I. PROPOSICIÓN XLVII TEOREMA.

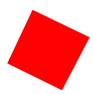
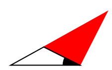
EN un triángulo rectángulo  *el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los lados (y).*

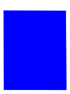
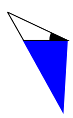
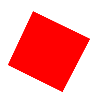


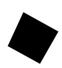
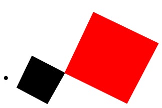
En , y trazar cuadrados, (pr. 46). Trazar || (pr. 31), también trazar y ,
 = .

A cada ángulo sumar  ∴  = ,
= y = ;

∴  =  .

De nuevo, porque || ,  = dos veces  , y

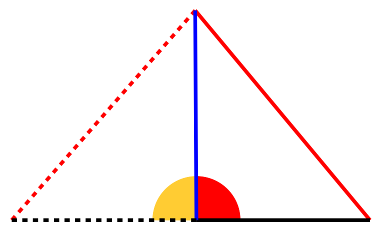
 = dos veces  ; ∴  =  .

Igualmente, se puede demostrar que  = , ∴  =  .

Q. E. D.

LIBRO I. PROPOSICIÓN XLVIII. TEOREMA.

SI el cuadrado de un lado () de un triángulo es igual a los cuadrados de los otros dos lados ( y), el ángulo () subtendido por ese lado es un ángulo recto.



Trazar $\perp$, $=$ (prs. 11, 3)
y trazar además .
Como $=$ (const.), ^{2} $=$ ^{2};
$\therefore$ ^{2} $+$ ^{2} $=$ ^{2} $+$ ^{2}, pero
^{2} $+$ ^{2} $=$ ^{2} (pr. 47), y
^{2} $+$ ^{2} $=$ ^{2} (hip.)

$\therefore$ ^{2} $=$ ^{2} $\therefore$ $=$; y $\therefore$ $=$  (pr. 8), por consiguiente  es un ángulo recto.

Q. E. D.

LIBRO II.
DEFINICIÓN I.

UN rectángulo o un paralelogramo en ángulo recto se dice que está contenido por cualesquiera de dos lados adjuntos o contiguos.

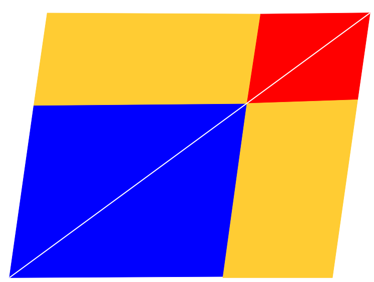
Así: el paralelogramo en ángulo recto  se dice que está contenida por los lados y ; o puede ser designado brevemente por .

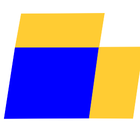
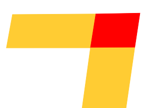
Si los lados adyacentes son iguales; i.e. $=$, entonces que es la expresión para el rectángulo bajo y es un cuadrado, y es igual a

$\left\{\begin{array}{l} \cdot \text{ o } {}^2 \\ \cdot \text{ o } {}^2. \end{array}\right.$

LIBRO II. DEFINICIONES.
DEFINICIÓN II.

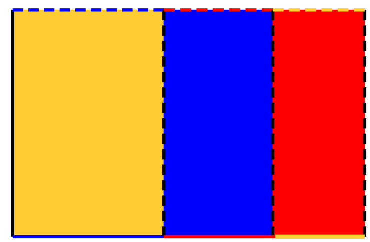
EN un paralelogramo la figura compuesta por uno de los paralelogramos sobre la diagonal, junto con los dos complementos, se llama gnomón.



Así  y  son gnomones.

LIBRO II. PROPOSICIÓN I. PROBLEMA.

EL rectángulo contenido por dos segmentos (,), uno de *los cuales se divide en un número arbitrario de partes, es igual a la suma de los rectángulos contenidos por el segmento continuo, y las partes varias del segmento dividido:* $\cdot = \begin{cases} \cdot \\ + \cdot \\ + \cdot . \end{cases}$



Trazar $\perp$ (L. 1, pr. 2, 3); completar los paralelogramos, es decir trazar $\left\{ \begin{array}{c} \parallel \\ \parallel \end{array} \right\}$ (L. 1, pr. 31),

$= + +$, $= \cdot$,

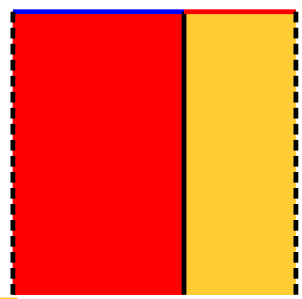
$= \cdot$, $= \cdot$, $= \cdot$,

$\therefore \cdot = \cdot + \cdot + \cdot$. Q. E. D.

LIBRO II. PROPOSICIÓN II. TEOREMA.

SI un segmento se divide en dos partes, el cuadrado de la longitud del segmento es igual a la suma de los rectángulos contenidos por todo el segmento y cada una de sus partes:

$$^2 = \left\{ \begin{array}{l} \cdot \\ + \cdot . \end{array} \right.$$



Construir (L. 1, pr. 46).

Trazar $\perp$ e $=$, y $\parallel$.

$= {}^2$,

$= \cdot = \cdot$,

$= \cdot = \cdot$, $= +$

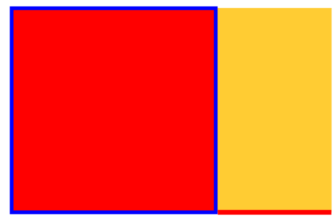
$\therefore {}^2 = \cdot + \cdot$. Q. E. D.

LIBRO II. PROPOSICIÓN III. TEOREMA.

SI un segmento se divide en dos partes, el rectángulo contenido por todo el segmento y cualquiera de sus partes, es igual al cuadrado de esa parte, junto con el rectángulo de las partes:

$\cdot = {}^2 + \cdot$, *o*

$\cdot = {}^2 + \cdot$.



Construir (pr. 46, L. 1).

Completar (pr. 31, L. 1).

Entonces $=$ $+$, pero

$= \cdot$ y $= {}^2$, $= \cdot$,

$\therefore \cdot = {}^2 + \cdot$.

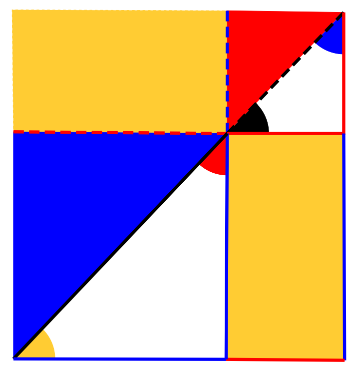
De manera similar, se puede demostrar fácilmente que

$$\cdot = {}^2 + \cdot .$$

Q. E. D.

LIBRO II. PROPOSICIÓN IV. TEOREMA.

SI un segmento se divide en dos partes, el cuadrado de todo el segmento es igual a suma de los cuadrados de las partes, más el doble del rectángulo que contiene las partes.
$^{2} = {}^{2} + {}^{2} +$ *dos veces* .

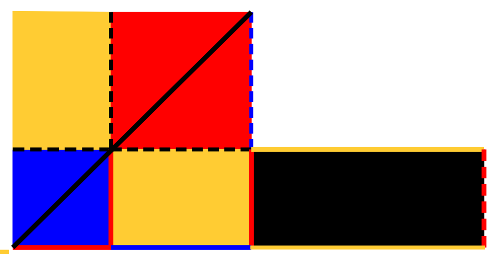


Construir (L. 1, pr. 46),
trazar una diagonal (post. I.)
y hacer $\left\{ \begin{array}{c} \parallel \\ \parallel \end{array} \right\}$ (pr. 31, L. 1),
= (pr. 5, L. 1,), = (pr. 29, L. 1),
∴ = ∴ por (prs. 6, 29, 34, L. 1),
es un cuadrado $= {}^{2}$.
Por las mismas razones es un cuadrado $= {}^{2}$, = =
(pr. 43, L. 1), pero = + + + ,
∴ $^{2} = {}^{2} + {}^{2} + 2$. Q. E. D.

LIBRO II. PROPOSICIÓN V. PROBLEMA.

SI un segmento se divide en dos partes iguales (,) y también en dos partes desiguales (,), el área del rectángulo contenido por las partes desiguales, más el cuadrado del segmento entre los cortes, es igual en área al cuadrado de la mitad del segmento:

$$\cdot + {}^2 = {}^2 = {}^2.$$



Construir (pr. 46, L. 1), trazar la diagonal y trazar:

$$\left\{ \begin{array}{c} \| \\ \| \\ \| \end{array} \right\}$$

(pr. 31, L. 1), por lo que:

$=$ (pr. 36, L. 1), $=$ (pr. 43, L. 1)

$\therefore$ (ax. 2) $=$ $=$ $\cdot$

pero $= {}^2$ (cor. pr. 4. L. 2) y $= {}^2$ (const.)

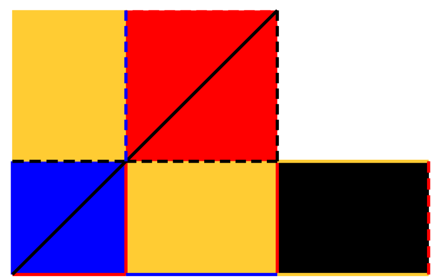
$\therefore$ (ax. 2) $=$

$\therefore \cdot + {}^2 = {}^2 = {}^2.$ Q. E. D.

LIBRO II. PROPOSICIÓN VI. TEOREMA.

SI un segmento es bisecado y extendido a cualquier punto , el rectángulo contenido por todo el segmento aumentado, y la parte extendida ( ), junto con el cuadrado de la mitad del segmento ( ), es igual al cuadrado del segmento formado por la mitad y la parte extendida ( ).

$$\cdot \ + \ {}^2 = {}^2.$$



Construir (pr. 46, L. 1), trazar la diagonal y también (pr. 31, L. 1),

entonces = = (prs. 36, 43, L. 1),

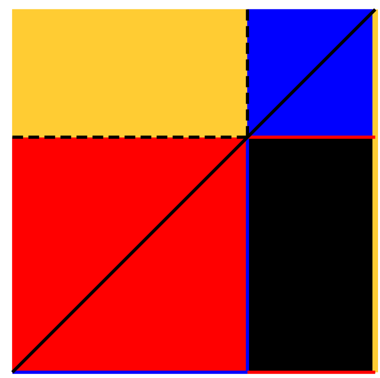
∴ = = ; pero = ² (pr. 4, L. 2), ∴ = ² = (const. ax. 2).

∴ · + ² = ². Q. E. D.

LIBRO II. PROPOSICIÓN VII. TEOREMA.

SI un segmento se divide en dos partes , la suma de los cuadrados de todo el segmento y una de las partes es igual al doble del rectángulo contenido por todo el segmento y esta parte, junto con el cuadrado de la parte restante.

$$ {}^2 + {}^2 = 2 \cdot + {}^2. $$



Construir , (pr. 46, L. 1).

Trazar (post. I), y también

(pr. 31, L. 1),

= (pr. 43, L. 1),

sumar $= {}^2$ a ambos, (pr. 4, L. 2)

$= = \cdot$, $= {}^2$ (pr. 4, L. 2)

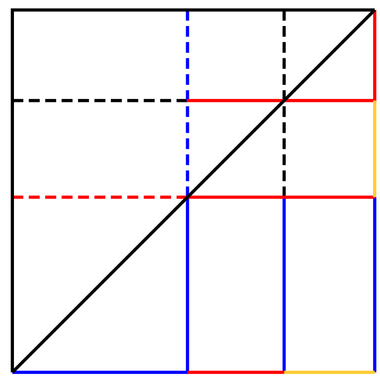
$\therefore + + = 2 \cdot + {}^2 = + ;$

$\therefore {}^2 + {}^2 = 2 \cdot + {}^2.$ Q. E. D.

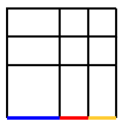
LIBRO II. PROPOSICIÓN VIII. TEOREMA.

SI un segmento se divide en dos partes cualesquiera, el cuadrado de la suma del segmento entero y cualquiera de sus partes, es igual a cuatro veces el rectángulo contenido por todo el segmento, y esta parte, más el cuadrado de la otra parte.

$$^2 = 4\cdot \;\cdot\; + \;^2.$$



Trazar y hacer $=$.

Construir  (pr. 46, L. 1);

trazar la diagonal y

$\|$ $\|$ (pr. 31, L. 1),

$^2 = \;^2 + \;^2 + 2\cdot\;\cdot$

(pr. 4, L. 2), pero

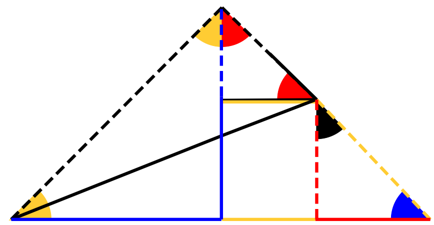
$^2 + \;^2 = 2\cdot\;\cdot\; + \;^2$ (pr. 7, L. 2),

$\therefore\; ^2 = 4\cdot\;\cdot\; + \;^2.$ Q. E. D.

LIBRO II. PROPOSICIÓN IX. TEOREMA.

SI un segmento se divide en dos partes iguales (,), y también en dos partes desiguales (,), los cuadrados de las partes desiguales son el doble de los cuadrados de la mitad del segmento, y de la parte comprendida entre los puntos de cortes del segmento.

$$^2 + {}^2 = 2\cdot{}^2 + 2\cdot{}^2.$$



Hacer $\perp$ e = o .

Trazar y , $\parallel$,

$\parallel$, y trazar .

= (pr. 5, L. 1) = medio ángulo recto, (cor. pr. 32, L. 1),

= (pr. 5, L. 1) = medio ángulo recto, (cor. pr. 32, L. 1),

$\therefore$ = , = = = (prs. 5, 29, L. 1),

por lo tanto = , = = (prs. 6, 34, L. 1),

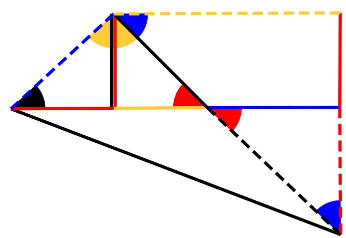
$${}^2 = \left\{ \begin{array}{l} {}^2 + {}^2 = \\ {}^2 + {}^2 = \end{array} \right. \boxed{\begin{array}{l} {}^2 + {}^2 = \\ 2\,{}^2 + 2\,{}^2 \end{array}} \quad \text{(pr. 47, L. 1)},$$

$\therefore$ $^2 + {}^2 = 2\,{}^2 + 2\,{}^2$. Q. E. D.

LIBRO II. PROPOSICIÓN X. TEOREMA.

SI un segmento se biseca y se extiende hasta punto arbitrario , los cuadrados de todo el segmento extendido y de la parte extendida, es igual al doble de los cuadrados de la mitad del segmento y del segmento desde la mitad hasta la parte extendida:

$$^2 + {}^2 = 2\,{}^2 + 2\,{}^2.$$



Hacer $\perp$ e $=$ a o , trazar ,

, $\left\{ \begin{array}{c} \parallel \\ \parallel \end{array} \right\}$ (pr. 31, L. 1);

también trazar .

$=$ (pr. 5, L. 1) $=$ mitad de un ángulo recto (cor. pr. 32, L. 1),

$=$ (pr. 5, L. 1) $=$ mitad de un ángulo recto (cor. pr. 32, L. 1),

$\therefore$ $=$ un ángulo recto.

$=$ $=$ $=$ $=$ (prs. 5, 32, 29, 34, L. 1), y

$=$, $=$ $=$, (prs. 6, 34, L. 1).

Por lo tanto, por (L. 1, pr. 47):

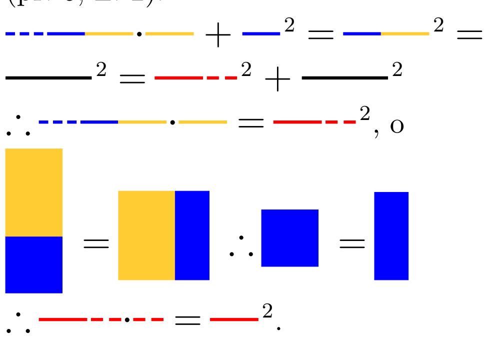
$${}^2 = \begin{cases} {}^2 + {}^2 = \\ {}^2 + {}^2 = \end{cases} \boxed{\begin{array}{l} {}^2 + {}^2 = \\ 2\,{}^2 + 2\,{}^2 \end{array}}$$

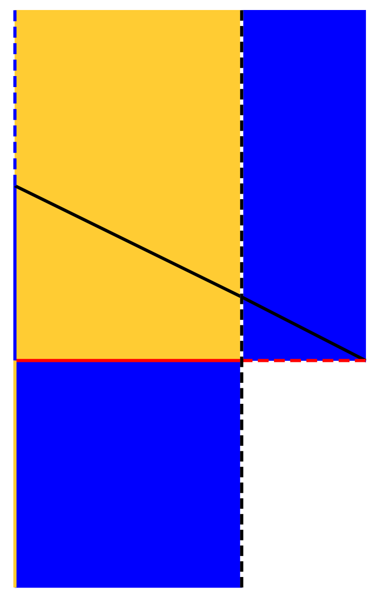
$\therefore$ $^2 + {}^2 = 2\,{}^2 + 2\,{}^2$. Q. E. D.

LIBRO II. PROPOSICIÓN XI. PROBLEMA.

SE puede dividir un segmento de este modo, que el rectángulo contenido por toda el segmento y una de sus partes sea igual al cuadrado de la otra parte.

Construir (pr. 46, L. 1),
hacer = (pr. 10, L. 1),
trazar ,
tomar = (pr. 3, L. 1),
sobre construir (pr. 46, L. 1).
Trazar (post. 2), entonces por (pr. 6, L. 2):





Q. E. D.

LIBRO II. PROPOSICIÓN XII. TEOREMA.

EN cualquier triángulo obtuso, el cuadrado del lado opuesto al ángulo obtuso excede la suma de los cuadrados de los lados que contienen el ángulo obtuso, en el doble del área del rectángulo contenido por cualquiera de estos dos lados y la parte extendida desde el ángulo obtuso hasta la perpendicular que cae sobre él, desde el ángulo agudo opuesto:

$$^2 > {}^2 + {}^2 \text{ \emph{en la cantidad} } 2\cdot .$$

Por L. 2, pr. 4,

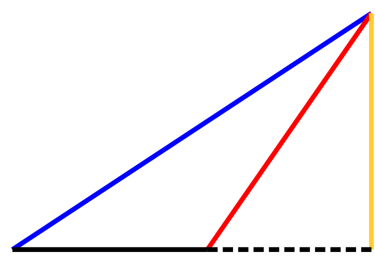
$^2 = {}^2 + {}^2 + 2$:

añadir ^{2} a ambos lados:

$^2 + {}^2 = {}^2$ (pr. 47, L. 1)

$= 2\cdot + {}^2 + {}^2 + {}^2$

$= 2\cdot + {}^2 + {}^2$ (pr. 47, L. 1).



Por lo tanto:

$^2 = 2\cdot + {}^2 + {}^2$:

es decir: $^2 > {}^2 + {}^2$ por $2\cdot$.

Q. E. D.

LIBRO II. PROPOSICIÓN XIII. TEOREMA.

EN cualquier triángulo, el cuadrado del lado opuesto a un ángulo agudo, es inferior a la suma de los cuadrados de los lados que contienen este ángulo, por el doble del rectángulo contenido por los segmentos del corte de cualquiera de los estos lados sobre el que cae la perpendicular desde su ángulo opuesto.

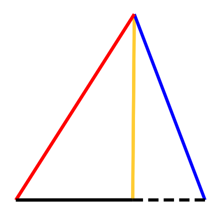
Primero.

$$\textcolor{blue}{\rule[0.5ex]{2em}{1pt}}^2 < \rule[0.5ex]{1.5em}{1pt}\text{- -}^2 + \textcolor{red}{\rule[0.5ex]{2em}{1pt}}^2 \text{ por } 2\, \rule[0.5ex]{1.5em}{1pt}\text{- -} \cdot \rule[0.5ex]{1.5em}{1pt}.$$

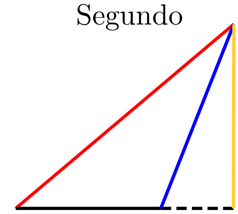
Segundo.

$$\textcolor{blue}{\rule[0.5ex]{2em}{1pt}}^2 < \textcolor{red}{\rule[0.5ex]{3em}{1pt}}^2 + \rule[0.5ex]{1.5em}{1pt}^2 \text{ por } 2\, \rule[0.5ex]{1.5em}{1pt} \cdot \rule[0.5ex]{1.5em}{1pt}\text{- -}.$$

Primero



Segundo



Primero, supongamos que la perpendicular cae dentro del triángulo, entonces (pr. 7, L. 2):

$$\rule[0.5ex]{1.5em}{1pt}\text{- -}^2 + \rule[0.5ex]{1.5em}{1pt}^2 = 2\, \rule[0.5ex]{1.5em}{1pt}\text{- -} + \text{- -}^2,$$

añadir a cada uno $\textcolor{orange}{\rule[0.5ex]{2em}{1pt}}^2$ entonces,

$$\rule[0.5ex]{1.5em}{1pt}\text{- -}^2 + \rule[0.5ex]{1.5em}{1pt}^2 + \textcolor{orange}{\rule[0.5ex]{2em}{1pt}}^2 = 2\, \rule[0.5ex]{1.5em}{1pt}\text{- -} \cdot \rule[0.5ex]{1.5em}{1pt} + \text{- -}^2 + \textcolor{orange}{\rule[0.5ex]{2em}{1pt}}^2$$

(pr. 47, L. 1)

$$\rule[0.5ex]{1.5em}{1pt}\text{- -}^2 + \textcolor{red}{\rule[0.5ex]{2em}{1pt}}^2 = 2\, \rule[0.5ex]{1.5em}{1pt}\text{- -} \cdot \rule[0.5ex]{1.5em}{1pt} + \textcolor{blue}{\rule[0.5ex]{2em}{1pt}}^2, \text{ y}$$

$$\therefore \textcolor{blue}{\rule[0.5ex]{2em}{1pt}}^2 < \rule[0.5ex]{1.5em}{1pt}\text{- -}^2 + \textcolor{red}{\rule[0.5ex]{2em}{1pt}}^2 \text{ por } 2\, \rule[0.5ex]{1.5em}{1pt}\text{- -} \cdot \rule[0.5ex]{1.5em}{1pt}.$$

Ahora supongamos que la perpendicular cae fuera del triángulo, entonces (pr. 7, L. 2):

$$\rule[0.5ex]{1.5em}{1pt}\text{- -}^2 + \rule[0.5ex]{1.5em}{1pt}^2 = 2\, \rule[0.5ex]{1.5em}{1pt}\text{- -} \cdot \rule[0.5ex]{1.5em}{1pt} + \text{- -}^2,$$

añadir a cada lado $\textcolor{orange}{\rule[0.5ex]{2em}{1pt}}^2$ entonces:

$$\rule[0.5ex]{1.5em}{1pt}\text{- -}^2 + \textcolor{orange}{\rule[0.5ex]{2em}{1pt}}^2 + \rule[0.5ex]{1.5em}{1pt}^2 = 2\, \rule[0.5ex]{1.5em}{1pt}\text{- -} \cdot \rule[0.5ex]{1.5em}{1pt} + \text{- -}^2 + \textcolor{orange}{\rule[0.5ex]{2em}{1pt}}^2$$

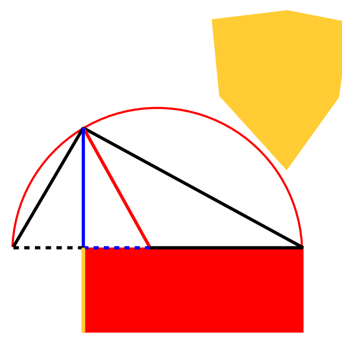
$$\textcolor{red}{\rule[0.5ex]{3em}{1pt}}^2 + \rule[0.5ex]{1.5em}{1pt}^2 = 2\, \rule[0.5ex]{1.5em}{1pt}\text{- -} \cdot \rule[0.5ex]{1.5em}{1pt} + \textcolor{blue}{\rule[0.5ex]{2em}{1pt}}^2, \text{ (pr. 47, L. 1)},$$

$$\therefore \textcolor{blue}{\rule[0.5ex]{2em}{1pt}}^2 < \textcolor{red}{\rule[0.5ex]{3em}{1pt}}^2 + \rule[0.5ex]{1.5em}{1pt}^2 \text{ por } 2\, \rule[0.5ex]{1.5em}{1pt}\text{- -} \cdot \rule[0.5ex]{1.5em}{1pt}.$$

Q. E. D.

LIBRO II. PROPOSICIÓN XIV. PROBLEMA.

SE puede trazar un segmento cuyo cuadrado sea igual al área de una figura rectilínea determinada, es decir se puede trazar de modo que, $^2 =$.



Hacer $=$ (pr. 45, L. 1),

extender hasta $=$; tomar $=$ (pr. 10, L. 1).

Construir (post. 3), trazar hasta encontrarlo, trazar :

^{2} o $^2 = \cdot + ^2$, (pr. 5, L. 2), pero $^2 = ^2 + ^2$, (pr. 47. L. 1);

$\therefore ^2 + ^2 = \cdot + ^2$

$\therefore ^2 = \cdot$, y $\therefore ^2 = =$.

Q. E. D.

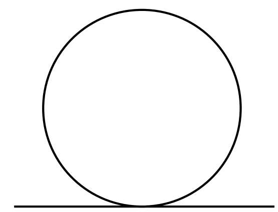
LIBRO III.
DEFINICIONES.

I.

CÍRCULOS iguales son aquellos cuyos diámetros son iguales.

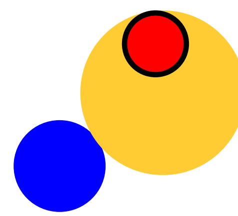
II.

Se dice que una línea recta toca un círculo cuando toca el círculo, y siendo trazado no lo corta.



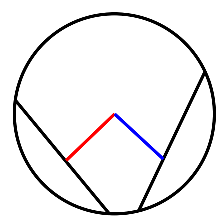
III.

Se dice que los círculos se tocan entre sí, si se intersecan pero no se cortan.



IV.

Se dice que los segmentos están igualmente distantes del centro de un círculo cuando las perpendiculares que se dibujan desde el centro son iguales.

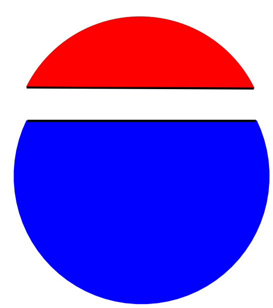


V.

Y se dice que el segmento sobre el que cae la mayor perpendicular está más lejos del centro.

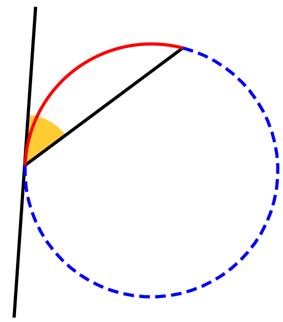
VI.

Un segmento de un círculo es la figura contenida por una línea recta y la parte de la circunferencia que corta.



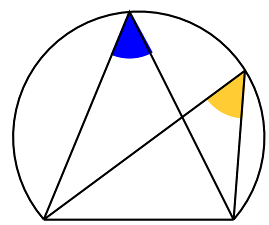
VII.

Un ángulo de un segmento es el contenido por una línea recta y la circunferencia de un círculo, es decir es el ángulo cuyo vértice es un punto de la circunferencia, siendo un lado una tangente y el otro lado una secante de la misma.



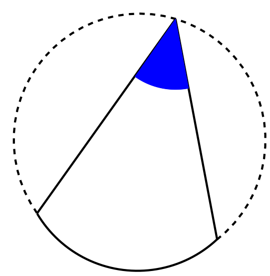
VIII.

Un ángulo en un segmento es el ángulo contenido por dos líneas rectas trazadas desde cualquier punto en la circunferencia del segmento a los extremos del segmento que es la base del segmento.



IX.

Se dice que un ángulo se encuentra en la parte de la circunferencia, o el arco, interceptada entre los segmentos que contienen el ángulo.

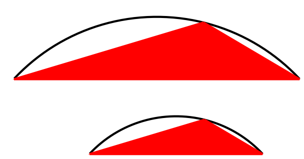


X.

Un sector de un círculo es la figura contenida por dos radios y el arco entre ellos.

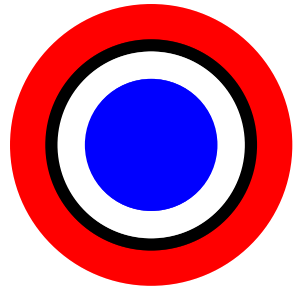
XI.

Segmentos similares de círculos son aquellos que contienen ángulos de igual medida.

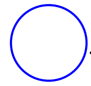


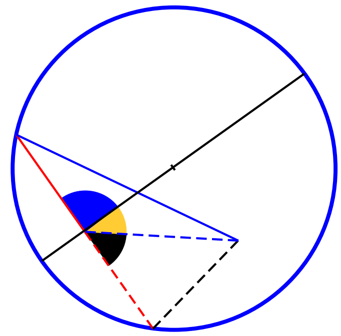
XII.

Los círculos que tienen el mismo centro se llaman círculos concéntricos.



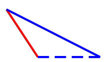
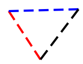
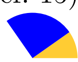
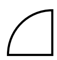
LIBRO III. PROPOSICIÓN I. PROBLEMA.

ES posible encontrar el centro de un círculo dado .



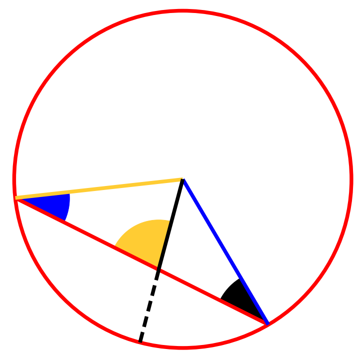
Trazar dentro del círculo un segmento que une los puntos de la circunferencia, hacer = , trazar ⊥ ; bisecar y el punto de bisección es el centro.

Supongamos, que cualquier otro punto de confluencia de , y sea el centro.

Porque en  y  = (hip. y L. 1, def. 15), = (const.) y común,  =  (L. 1, pr. 8), y por lo tanto son ángulos rectos; pero  =  (const.),  =  (ax. 11), lo cual es absurdo; por lo tanto, el punto asumido no es el centro del círculo; y de la misma manera se puede probar que ningún otro punto que no sea del segmento es el centro, por lo tanto el centro está en , el punto en el que es bisecado es el centro. Q. E. D.

LIBRO III. PROPOSICIÓN II. TEOREMA.

UN segmento ( ) uniendo dos puntos en la circunferencia de un círculo , se encuentra totalmente dentro del círculo.



Determinar el centro de (L. 3, pr. I); desde el centro trazar a cualquier punto en , encontrando la circunferencia desde el centro; trazar y .

Entonces $=$ (L. 1, pr. 5.), pero

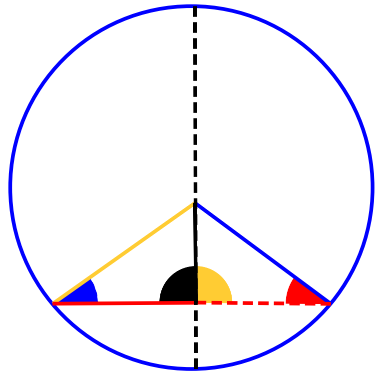
$>$ o $>$ (L. 1, pr. 16)

$\therefore$ $>$ (L. 1, pr. 19) y como

$=$, $\therefore$ $>$;

$\therefore$ cada punto en se encuentra dentro del círculo. Q. E. D.

LIBRO III. PROPOSICIÓN III. TEOREMA.



SI un segmento ( ) trazado a través del centro de un círculo biseca una cuerda ( ) que no pasa por el centro, es perpendicular a él; o, si es perpendicular a él, lo biseca.

Trazar y al centro del círculo.

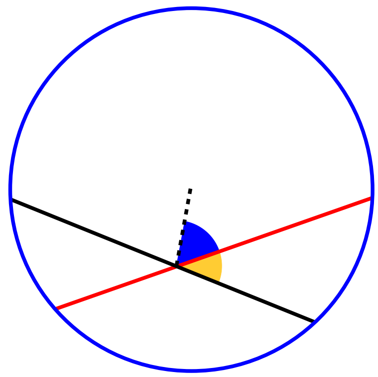
En y tenemos que:
= , común y =

∴ = (L. 1, pr.8) y ∴ ⊥ (L. 1, def. 10).

Consideremos ahora que ⊥ . Entonces en y ,
= (L. 1, pr. 5), = (hip.) y =
∴ = (L. 1, pr. 26) y ∴ bisects . Q. E. D.

LIBRO III. PROPOSICIÓN IV. TEOREMA.

SI en un círculo dos segmentos se cortan, de los cuales ninguno pasa por el centro, no se bisecan entre sí.



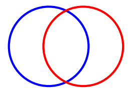
Si uno de los segmentos pasa por el centro, es evidente que no puede ser bisecado por el otro, que no pasa por el centro.

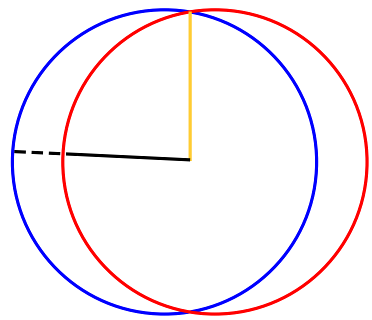
Pero si ninguno de los segmentos o pasa por el centro, trazar desde el centro hasta su intersección.

Si sea bisecado, $\perp$ a este (L. 3, pr. 3) $\therefore$ = y si sea bisecado, $\perp$ (L. 3, pr. 3), $\therefore$ = y $\therefore$ = ; una parte es igual a la totalidad, lo cual es absurdo:

$\therefore$ y no se bisecan entre sí. Q. E. D.

LIBRO III. PROPOSICIÓN V. TEOREMA.

SI dos círculos  *se intersecan en dos puntos, no son concéntricos.*



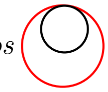
Supongamos que los dos círculos que se intersecan en dos puntos, tienen un centro en común. Trazar al punto de intersección, y tocando las circunferencias de los círculos.

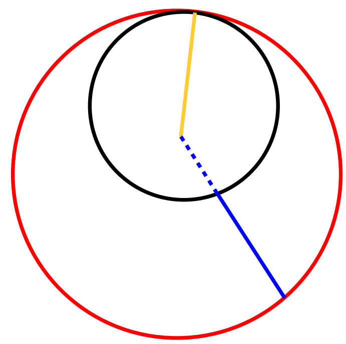
Entonces = (L. 1, def. 15),

y = (L. 1, def. 15),

∴ = ; una parte igual a la totalidad, lo cual es absurdo ∴ los círculos que se cruzan en dos puntos, no pueden tener el mismo centro. Q. E. D.

LIBRO III. PROPOSICIÓN VI. TEOREMA.

S*I dos círculos*  *se intersecan internamente, no tienen el mismo centro.*



Supongamos que ambos círculos tienen el mismo centro y se intersecan internamente.

Trazar desde el supuesto centro que corta ambos círculos, y al punto de contacto. Entonces = (L. 1, def. 15) y = (L. 1, def. 15) ∴ = ; una parte igual a la totalidad, lo cual es absurdo; por lo tanto el punto asumido no es el centro de ambos círculos.

Similarmente se puede demostrar que ningún otro punto lo es. Q. E. D.

LIBRO III. PROPOSICIÓN VII. TEOREMA.

Figura I.

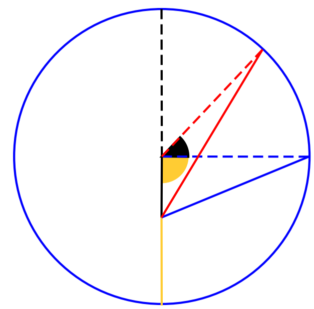
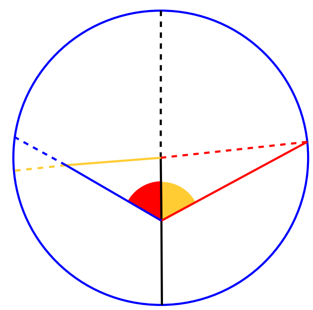


Figura II.



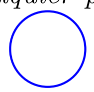
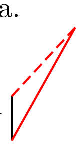
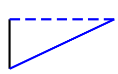
SI desde cualquier punto dentro de un círculo  *que no es el centro, los segmentos son trazados a la circunferencia; el mayor de estos segmentos ( ) pasa por el centro, y el menor es la parte restante ( ) del diámetro.*
De los otros, ( ) que está más cerca del segmento pasando por el centro, es mayor que el que ( ) que es más alejado.

Figura II. Los segmentos (y) que hacen ángulos iguales con los que pasan por el centro, en lados opuestos de este, son iguales entre sí; y no se puede trazar un tercer segmento igual a estos, desde el mismo punto hasta la circunferencia.

Figura I.

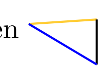
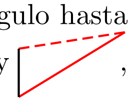
Del centro del círculo trazar y ; entonces = (L. 1, def. 15), = + > (L. 1, pr. 20), de igual manera se puede probar que es mayor que ; o cualquier otra línea trazada desde el mismo punto hasta la circunferencia. De nuevo, por (L. 1, pr. 20), + > = + , tomar de ambos;

∴ > (ax. III), y de la misma manera se puede probar que es menor que cualquier otro segmento trazado desde el mismo punto hasta la circunferencia.

De nuevo, en  y , común,  > , y =

∴ > (L. 1, pr. 24) y de la misma manera puede ser mayor que cualquier otra línea trazada desde el mismo punto hasta la circunferencia más alejado de .

Figura II.

Si  = entonces = , sino trazar el lado del ángulo hasta la circunferencia = , trazar , entonces en  y , común, = y =

$\therefore$ = (L. 1, pr. 4), $\therefore$ = = una parte igual a la totalidad, lo cual es absurdo: $\therefore$ = ; y ningún otro segmento es de igual longitud al trazado desde el mismo punto hasta la circunferencia; porque si estuviera más cerca uno que pasa por el centro sería mayor, y si estuviera más alejado sería menor.

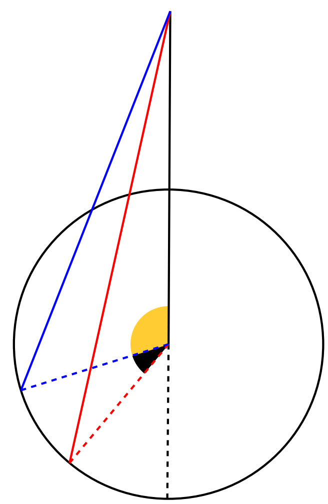
Q. E. D.

LIBRO III. PROPOSICIÓN VIII. TEOREMA.

El texto original de esta proposición se divide en tres partes.

I

SI desde un punto fuera de un círculo, segmentos { etc. } son trazados a la circunferencia; de los que caen sobre la circunferencia cóncava, el mayor es ( ) que pasa por el centro, y el segmento ( ) que está más cerca del más grande es mayor que ( ) que el más alejado.

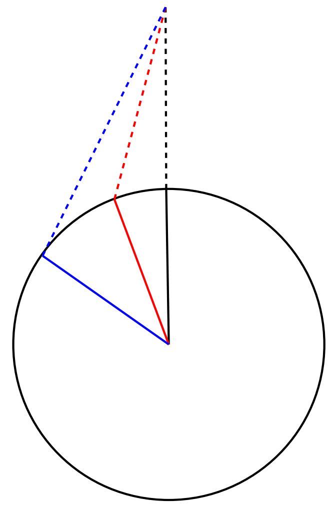


Trazar y al centro, entonces, que pasa por el centro, es el más grande; ya que $=$, si se adiciona a ambos, $=$ $+$; pero es $>$ (L. 1, pr. 20), $\therefore$ es mayor que cualquier otra línea trazada desde el mismo punto hasta la circunferencia cóncava.

De nuevo en y , $=$, y común, pero $>$,

$\therefore$ $>$ (L. 1, pr. 24); y de la misma manera se puede probar que es $>$ que cualquier otro segmento más alejado de .

II.



De los segmentos que caen en la circunferencia convexa, el menor es ( ) el que pasa por el centro, y el segmento que está más cerca del menor es menor que el que está más alejado.

Puesto que:

$+$ $>$ (L. 1, pr. 20) y

$=$, $\therefore$ $>$ (ax. V.)

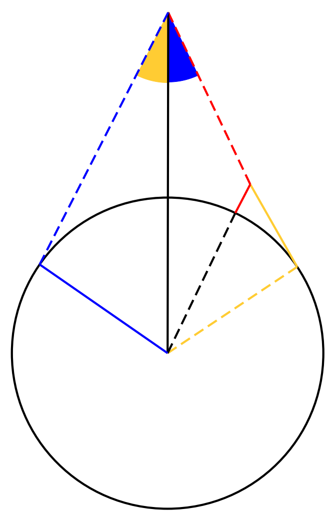
Y otra vez, puesto que:

$+$ $>$ $+$ (L. 1, pr. 21),

y $=$, $\therefore$ $<$.

E igualmente los demás.

III.



Además los segmentos que hacen ángulos iguales con los que pasan por el centro son iguales, ya sea que caiga en la circunferencia cóncava o convexa; y un tercer segmento de igual longitud no puede ser trazado, desde el mismo punto hasta la circunferencia.

Si se tiene que $>$, dado que $=$; hacer $=$ y trazar .

En y tenemos $=$, el segmento común, y también $=$,

$\therefore$ $=$ (L. 1, pr. 4); pero $=$; $\therefore$ $=$, lo cual es absurdo.

$\therefore$ no es $=$, ni a ninguna parte de ,

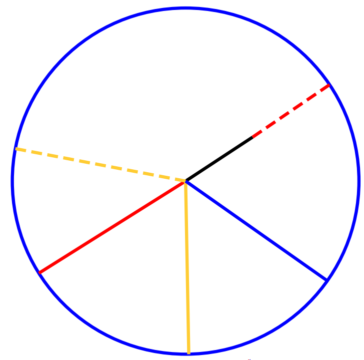
$\therefore$ no es $>$.

Por un argumento simétrico, tampoco $>$, son lo tanto son iguales entre sí.

Y cualquier otro segmento trazado desde el mismo punto a la circunferencia, debe estar en el mismo lado con uno de estos segmento, y debe estar más o menos alejado que aquel segmento que se conecta a través del centro, y, por lo tanto, no puede ser igual a él. Q. E. D.

LIBRO III. PROPOSICIÓN IX. TEOREMA.

SI un punto se toma dentro de un círculo , del cual más de dos segmentos de igual longitud (, ,) pueden ser trazados a la circunferencia, ese punto es el centro del círculo.



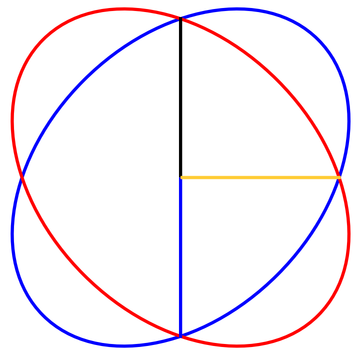
Si se supone que el punto en el que más de dos segmentos iguales se encuentran no es el centro, algún otro punto debe serlo; unir estos dos puntos mediante , y trazar de ambos sentidos a la circunferencia.

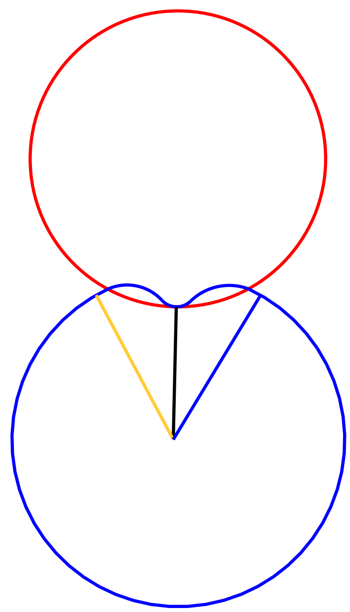
Supongamos que más de dos segmentos de igual longitud se pueden trazan desde un punto que no es el centro, a la circunferencia, como mínimo, dos deben estar situados al al mismo lado del diámetro ; y como desde un punto , que no es el centro, se trazan segmentos hacia la circunferencia; el más grande es , que pasa por el centro: y que está más cerca de $>$ que es más alejado (B. 3, pr. 8); pero $=$ (hip.) lo cual es absurdo.

Lo mismo se puede demostrar de cualquier otro punto, diferente de que debe ser el centro del círculo. Q. E. D.

LIBRO III. PROPOSICIÓN X. TEOREMA.

UN círculo no puede intersecar a otro en más de dos puntos.





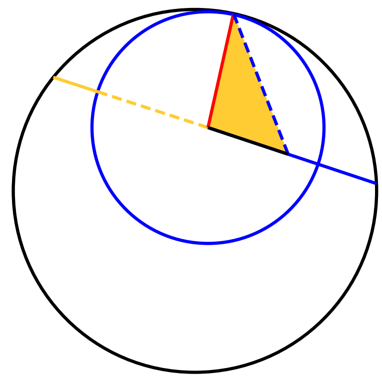
Si es posible, que se intersequen en tres puntos; desde el centro de trazar , y a los puntos de intersección; ∴ = = (L. 1, def. 15.), pero como los círculos se cruzan, no tienen el mismo centro (B. 3, pr. 5):

∴ el punto asumido no es el centro de , y como , y se trazan a partir de un punto que no es el centro, no son iguales (B. 3, prs. 7, 8); pero se demostró antes que eran iguales, lo cual es absurdo; por lo tanto, los círculos no se pueden cruzan en tres puntos.

Q. E. D.

LIBRO III. PROPOSICIÓN XI. TEOREMA.

SI dos círculos y se tocan internamente, el segmento trazado que une sus centros, pasa por un punto de contacto.



Supongamos que el segmento no pasa por un punto de contacto; sea el segmento que une sus centros, y trazar este en ambos sentidos; desde un punto de contacto trazar al centro de , y trazar al centro de .

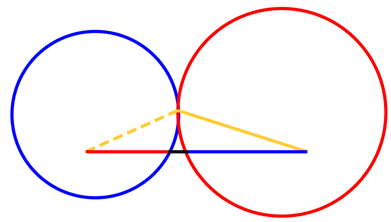
Porque en ; = > (L. 1, pr. 20), y = ya que son radios de , pero + > ; quitando que es común, > ; sin embargo = , porque son radios de , y ∴ > una parte mayor que el todo, lo cual es absurdo.

Por lo tanto, los centros no están colocados de manera, que una línea que los une puede pasar por cualquier punto que no sea un punto de contacto.

Q. E. D.

LIBRO III. PROPOSICIÓN XII. TEOREMA.

SI dos círculos y se tocan externamente, el segmento uniendo a sus centros, pasa a través del punto de contacto.



Supongamos que no, sea el segmento que une los centros, y no pasa a través de un punto de contacto; entonces desde un punto de contacto trazar y a los centros.

Porque $+$ $>$ (L. 1, pr. 20), $=$ (L. 1, def. 15.), y $=$ (L. 1, def.15.), $\therefore$ $+$ $>$, una parte mayor que el todo, lo cual es absurdo.

Por lo tanto, los centros no están ubicados de manera, que el segmento que los une pueda pasar por cualquier punto menos el punto de contacto.

Q. E. D.

LIBRO III. PROPOSICIÓN XIII. TEOREMA.

UN círculo no puede tocar a otro, ya sea externa o internamente, en más de un punto.

Figura 1.

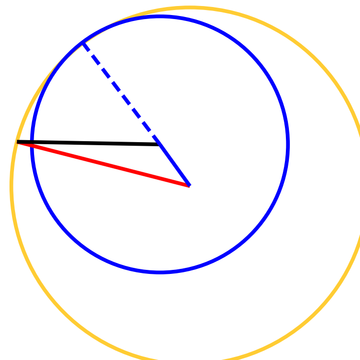


Figura 1.

Si fuera posible, sean y tocándose internamente en dos puntos; trazar uniendo a sus centros, y extenderlo hasta que pase a través de uno de los puntos de contacto (L. 3, pr. 11); trazar y .

Pero = (L. 1, def. 15),

∴ si se adiciona a ambos:
= + ; pero = (L. 1, def. 15.), y
∴ + = ; pero + > (L. 1, pr. 20.), lo cual es absurdo.

Figura 2.

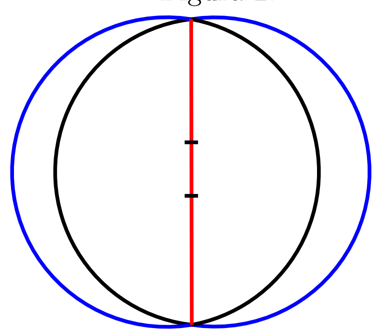


Figura 2.

Si los puntos de contacto son los extremos del segmento que une los centros, esta recta debe dividirse en dos puntos diferentes para los dos centros; porque es el diámetro de ambos círculos, lo cual es absurdo.

Figura 3.

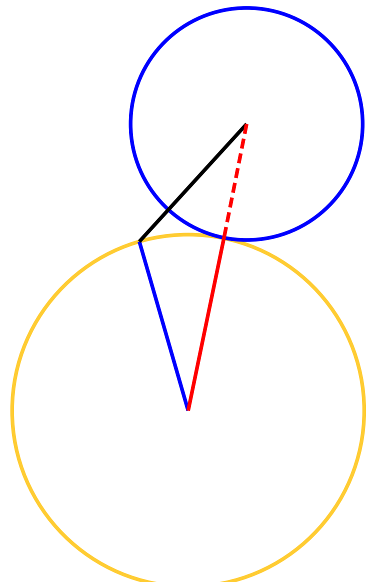
Si fuera posible, sean y tocándose externamente en dos puntos; trazar uniendo los centros de los círculos, y pasando por uno de los puntos de contacto, y trazar y .

= (L. 1, def. 15); y

= (L. 1, def. 15):

$\therefore$ + = ; pero + $>$ (L. 1, pr. 20), lo cual es absurdo. Por lo tanto, no hay ningún caso en el que dos círculos puedan tocarse en dos puntos externa o internamente.

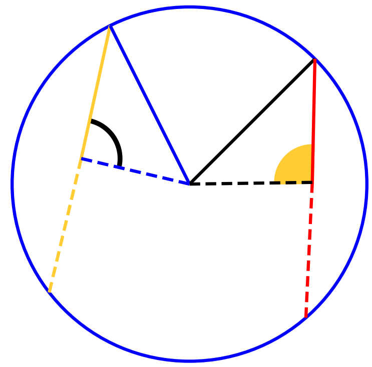
Figura 3.



Q. E. D.

LIBRO III. PROPOSICIÓN XIV. TEOREMA.

SEGMENTOS iguales ( ) inscritos en un círculo están igualmente distantes del centro; y también, los segmentos igualmente distantes del centro son iguales.



Del centro de trazar $\perp$ a y $\perp$, unir y .

Entonces: $= \frac{1}{2}$ (L. 3, pr. 3) y $= \frac{1}{2}$ (L. 3, pr. 3), puesto que: $=$ (hip.) $\therefore$ $=$, y $=$ (L. 1, def. 15) $\therefore$ $^2 = {}^2$;

pero como es un ángulo recto: $^2 = {}^2 + {}^2$ (L. 1, pr. 47) y $^2 = {}^2 + {}^2$ por la misma razón, $\therefore$ $^2 + {}^2 = {}^2 + {}^2$ $\therefore$ $^2 = {}^2$, $\therefore$ $=$.

Además, si los segmentos y están igualmente distantes del centro; es decir si las perpendiculares y son dadas iguales, entonces $=$.

Como en el caso anterior, $^2 + {}^2 = {}^2 + {}^2$; pero $^2 = {}^2$: $\therefore$ $^2 = {}^2$, y los dobles de estos y son también iguales.

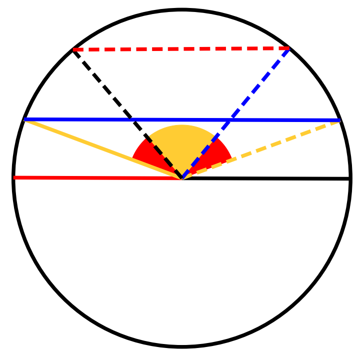
Q. E. D.

LIBRO III. PROPOSICIÓN XV. TEOREMA.

EL diámetro es el segmento más grande en un círculo: y, de todos los demás, el que está más cerca del centro es mayor que el que está más lejos.

Figura 1.

Figura 1.



El diámetro es mayor que cualquier segmento . Trazar y , entonces = y = , ∴ + = , pero

+ > (L. 1, pr. 20)

∴ > .

De nuevo, el segmento que está más cerca del centro es mayor que uno más alejada.

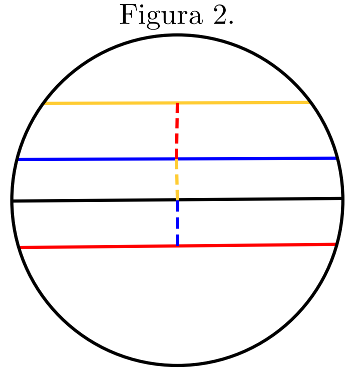
Primero, sean los segmentos dados y , que están en el mismo lado del centro y no se intersecan; trazar .

En y , = y = ; pero > ,

∴ > (L. 1, pr. 24).

Figura 2.

Figura 2.



Sean los segmentos dados y que se encuentran a diferentes lados del centro, o se cruzan; desde el centro trazar y ⊥ y , hacer = , y trazar ⊥ .

Como y están a igual distantcia del centro = (L. 3, pr. 14); pero

> (Pt. 1, L. 3, pr. 15),

∴ > .

Q. E. D.

LIBRO III. PROPOSICIÓN XVI. TEOREMA.

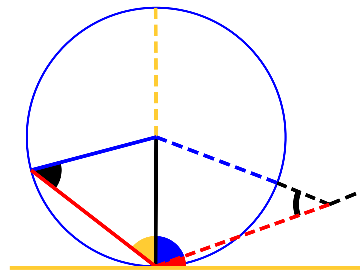
EL segmento trazado del extremo del diámetro de un círculo perpendicular a él está fuera del círculo.

Y si cualquier otra recta pasa por el punto de contacto, corta el círculo en otro punto.

Parte 1.

Si no es el caso, sea , que toca el círculo otra vez, y es $\perp$, y trazar .

Entonces, porque = = (L. 1, pr. 5), y $\therefore$ cada uno de estos ángulos es agudo, (L. 1, pr. 17), pero = (hip.), lo cual es absurdo, por lo tanto trazado $\perp$ no toca de nuevo al círculo.



Parte 2.

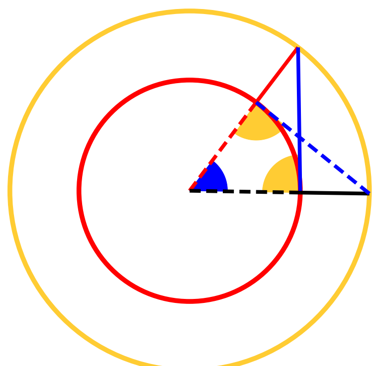
Sea $\perp$ y se traza desde un punto entre y el círculo, el cual suponemos, no corta el círculo.

Porque = , $\therefore$ es un ángulo agudo; supongamos $\perp$, trazado desde el centro del círculo, debe caer en el lado del ángulo agudo $\therefore$ que se supone es un ángulo recto, es > , $\therefore$ > ; pero = , y $\therefore$ > , una parte mayor que el todo, lo cual es absurdo. Por lo tanto, el punto no cae fuera del círculo, y por lo tanto el segmento corta el círculo.

Q.E.D.

LIBRO III. PROPOSICIÓN XVII. TEOREMA.

S*E puede trazar una tangente a un círculo dado desde un punto determinado, ya sea fuera del círculo o en la circunferencia.*



Si el punto dado está en la circunferencia, como en , está claro que el segmento $\perp$ al radio, será la tangente requerida (L. 3, pr. 16).

Pero si el punto dado está fuera del círculo, trazar del punto al centro, cortando ; y trazar $\perp$, trazar concéntrico con , de radio igual a , entonces será la tangente requerida.

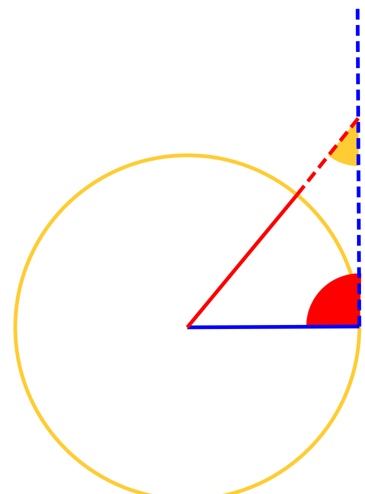
Pero en y , $=$, común, y $=$, $\therefore$ (L. 1, pr. 4) $=$ $=$, $\therefore$ es una tangente a .

Q. E. D.

LIBRO III. PROPOSICIÓN XVIII. TEOREMA.

S*I una línea recta es tangente a un círculo, el segmento trazado desde el centro hasta el punto de contacto, es perpendicular a la recta.*

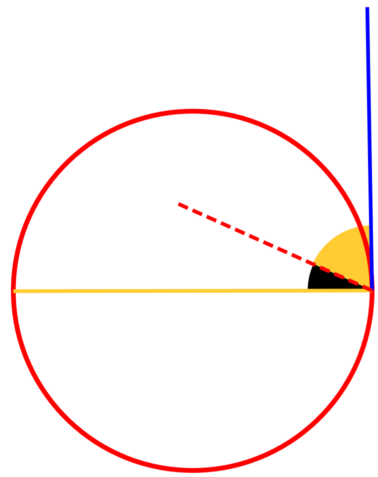
Supongamos que no, y sea $\perp$, entonces porque $=$, es agudo (L. 1, pr. 17), $\therefore$ $>$ (L. 1, pr. 19); pero $=$, y $\therefore$ $>$, una parte es mayor que el todo, lo cual es absurdo. $\therefore$ no es $\perp$; y de la misma manera se puede probar, que ninguna otro segmento excepto es perpendicular a .



Q. E. D.

LIBRO III PROPOSICIÓN XIX. TEOREMA.

SI una línea recta es tangente a un círculo, la línea recta trazada perpendicularmente a la recta desde el punto de contacto, pasa por el centro del círculo.



Si la línea recta trazada no pasa por el centro, el centro no está en ; trazar desde el supuesto centro hasta el punto de contacto.

Como $\perp$ (L. 3, pr. 18)

$\therefore$ $=$, un ángulo recto; pero

$=$ (hip.), y $\therefore$ $=$,

una parte igual a la totalidad, lo cual es absurdo.

Por lo tanto, el punto asumido no es el centro; y de la misma manera se puede demostrar, que no hay otro punto fuera de que sea el centro.

Q. E. D.

LIBRO III. PROPOSICIÓN XX. TEOREMA.

El ángulo en el centro de un círculo, es el doble del ángulo en la circunferencia, cuando tienen la misma parte de la circunferencia de su base.

Figura 1.

Si el centro del círculo está en , un lado del ángulo .

Porque = , = (L. 1, pr. 5), pero = + = 2 (L. 1, pr. 32).

Figura 1.

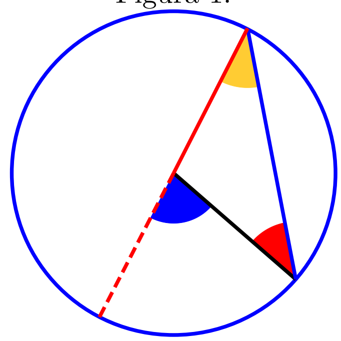


Figura 2.

Si el centro está dentro de (el ángulo en la circunferencia); trazar desde el vértice del ángulo a través del centro del círculo y los radios a los lados del ángulo , ; entonces = y = , por la igualdad de las partes (L. 1, pr. 5).

Por lo tanto:

+ + + = 2 .

Pero = + , y = + , ∴ = 2 .

Figura 2.

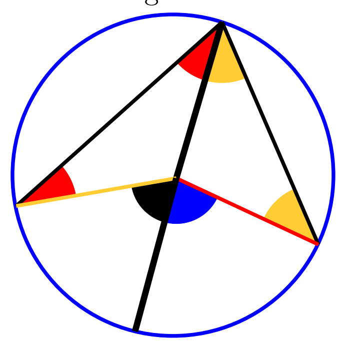


Figura 3.

Si el centro está fuera de , trazar el diámetro, los segmentos del ángulo  a la circunferencia y los radios a estos lados , .

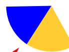
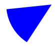
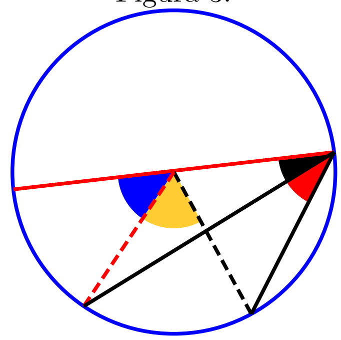
Por el caso 1,  $= 2$ , y  $= 2$ , $\therefore$  $= 2$ .

Figura 3.



Q. E. D.

LIBRO III. PROPOSICIÓN XXI. TEOREMA.

LOS ángulos (,) sobre el mismo segmento de un círculo son iguales.

Figura 1.
Si el segmento es mayor que un semicírculo, trazar y al centro.

$= 2$ $= 2$ (L. 3, pr. 20);

$\therefore$ $=$.

Figura 1.

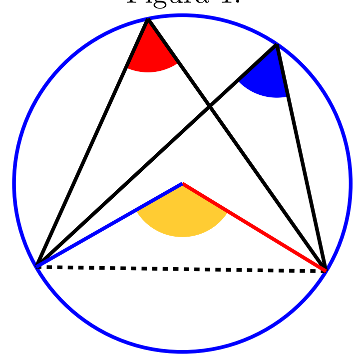


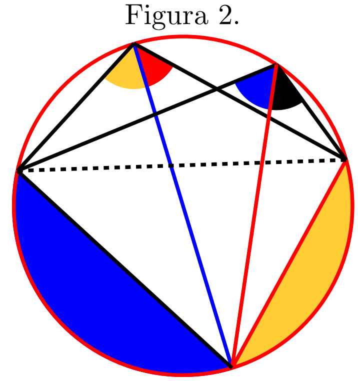
Figura 2.
Sea el segmento un semicírculo, o menor que un semicírculo, que determina los ángulos , .

Trazar el diámetro y .

$=$ y $=$ (caso 1.)

$\therefore$ $=$.

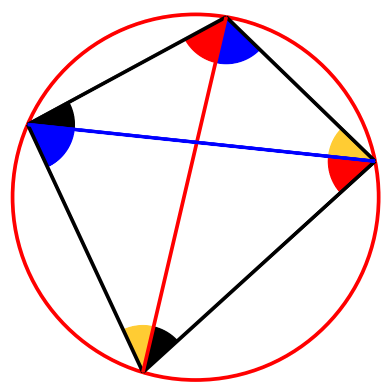
Figura 2.



Q. E. D.

LIBRO III. PROPOSICIÓN XXII. TEOREMA.

LOS ángulos opuestos y , y de cualquier figura cuadrilátera inscrita en un círculo, son iguales a dos ángulos rectos.



Trazar y las diagonales; y porque los ángulos en el mismo segmento son iguales = , y = ; añadir a ambos:

∴ + = + + = dos ángulos rectos (L. 1, pr. 32).

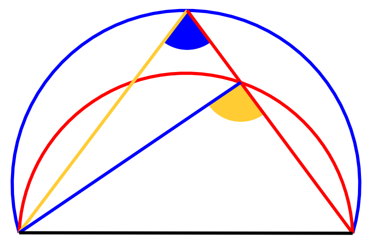
De igual manera se puede demostrar que,

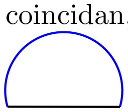
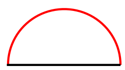
+ = .

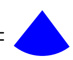
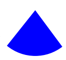
Q. E. D.

LIBRO III. PROPOSICIÓN XXIII. TEOREMA.

SOBRE la misma línea recta, y sobre el mismo lado de este, no puede construir dos segmentos similares de círculos que no coincidan.



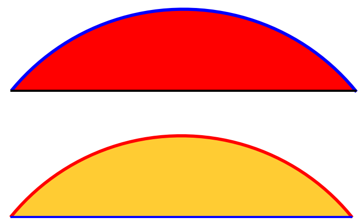
Supongamos que se pueden construir dos segmentos similares de círculos que no coincidan, sean dos segmentos similares  y ; trazar un segmento cortando los dos segmentos, trazar y .

Porque los segmentos son similares, =  (L. 3, def. 10), pero el ángulo >  (L. 1, pr. 16), lo cual es absurdo: por lo tanto, ningún punto en ninguno de los dos segmentos cae fuera del otro, y por lo tanto los segmentos coinciden.

Q. E. D.

LIBRO III PROPOSICIÓN XXIV. TEOREMA.

SEGMENTOS similares y de círculos sobre rectas iguales (y) son de igual longitud.

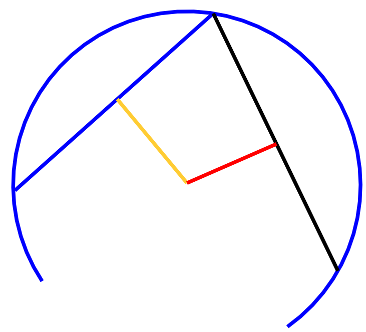


Si se coloca sobre , coincide sobre , los extremos de están en los extremos y al mismo lado que ; porque = , debe coincidir totalmente con y los segmentos similares que se encuentran entonces en la misma línea recta y en el mismo lado de la misma, también deben coinciden (L. 3, pr. 23), y son por lo tanto de igual longitud.

Q. E. D.

LIBRO III. PROPOSICIÓN XXV. PROBLEMA.

DADO un segmento de un círculo, se puede construir el círculo al que pertenece.



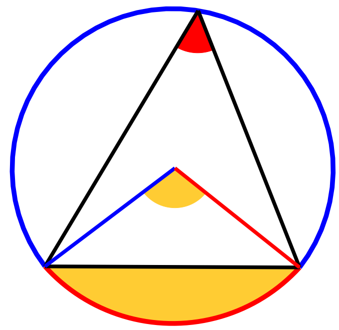
Desde cualquier punto del segmento trazar y con extremos en el segmento, bisecarlos, y desde los puntos de bisección trazar $\perp$ y $\perp$, donde se encuentran debe ser el centro del círculo.

En efecto, como terminada en el círculo es bisecada perpendicularmente por , pasa por el centro (L. 3, pr. 1), igualmente pasa por el centro, por lo tanto el centro está en la intersección de estas perpendiculares.

Q. E. D.

LIBRO III. PROPOSICIÓN XXVI. TEOREMA.

EN círculos iguales y los arcos , en el cual el soporte tiene ángulos iguales, ya sea en el centro o en la circunferencia, son iguales.



Primero, sea = en el centro, trazar y . Entonces, ya que:

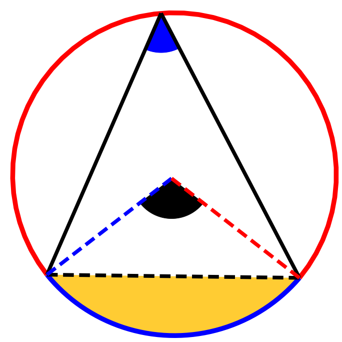
= , y

tienen = = = , y

= ∴ = (L. 1, pr. 4).

Pero = (L. 3, pr. 20);

∴ y son similares (L. 3, def. 10); también son iguales (L. 3, pr. 24).



Por lo tanto, si los segmentos iguales se toman de círculos iguales, los segmentos restantes serán iguales; o sea = (ax. 3); y ∴ = .

Pero si los ángulos iguales dados están en la circunferencia, es evidente que los ángulos en el centro, que son el doble de los de la circunferencia, también son iguales y, por lo tanto, los arcos en los que se encuentran son iguales.

Q. E. D.

LIBRO III. PROPOSICIÓN XXVII. TEOREMA.

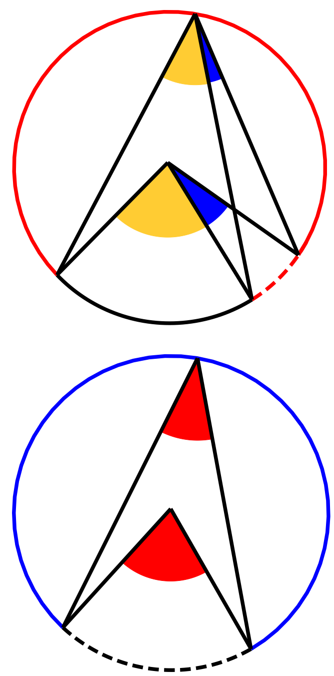
EN círculos iguales, y los ángulos y que se encuentran sobre arcos iguales son iguales, ya sea en los centros o en las circunferencias.

Si no fuera el caso, tomar uno mayor que el otro y hacer = :

∴ = (L. 3, pr 26), pero

= (hip.) ∴ =

una parte es igual al todo, lo cual es absurdo; ∴ ninguno de los dos ángulos es mayor que el otro, y ∴ son iguales.



Q. E. D.

LIBRO III. PROPOSICIÓN XXVIII. TEOREMA.

EN círculos iguales y , cuerdas iguales , cortan arcos iguales.

Desde los centros de los círculos iguales, trazar , y , ;

y porque = ,

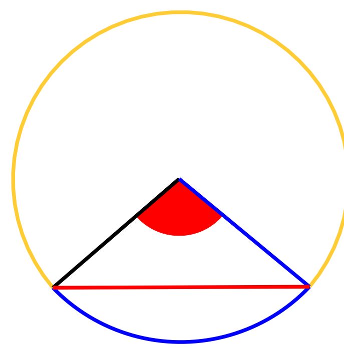
, = , ;

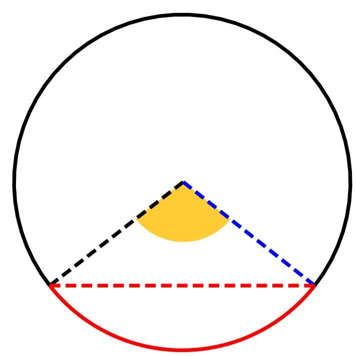
además = (hip.)

∴ =

∴ = (L. 3, pr. 26) y

= (ax. 3).





Q. E. D.

LIBRO III. PROPOSICIÓN XXIX. TEOREMA.

EN círculos iguales y las cuerdas y que subtienden arcos iguales son iguales.

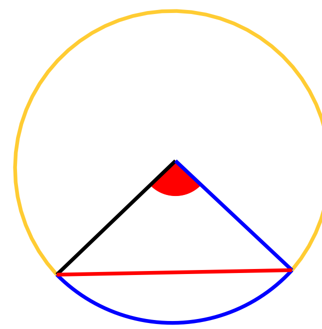
Si los arcos iguales son semicírculos la proposición es evidente. Pero si no, sean , y , trazados a los centros; porque: = (hip.) y

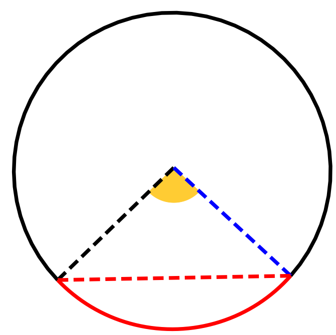
= (L. 3, pr. 27); pero

y = y

∴ = (L. 1, pr. 4);

pero estas son las cuerdas que subtienden los arcos iguales.

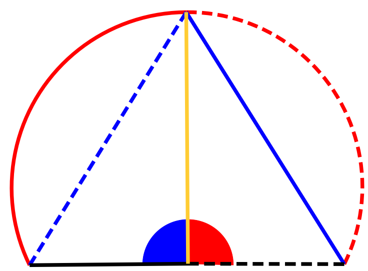




Q. E. D.

LIBRO III. PROPOSICIÓN XXX. PROBLEMA.

S*E puede bisecar un arco* .



Trazar hacer $=$, trazar $\perp$, biseca el arco.

En efecto, trazar y , entonces:

$=$ (const.), es común, y

$=$ (const.)

$\therefore$ $=$ (L. 1, pr. 4) $=$, (L. 3, pr. 28), y por lo tanto el arco dado es bisecado.

Q. E. D.

LIBRO III. PROPOSICIÓN XXXI. TEOREMA.

EN un círculo el ángulo en un semicírculo es un ángulo recto, el ángulo en un segmento mayor que un semicírculo es agudo, y el ángulo en un segmento inferior a un semicírculo es obtuso.

Figura 1.

El ángulo en un semicírculo, es un ángulo recto.

Trazar y , = y = (L. 1, pr. 5), entonces:

+ = = la mitad de dos ángulos rectos = un ángulo recto. (L. 1, pr. 32).

Figura 1.

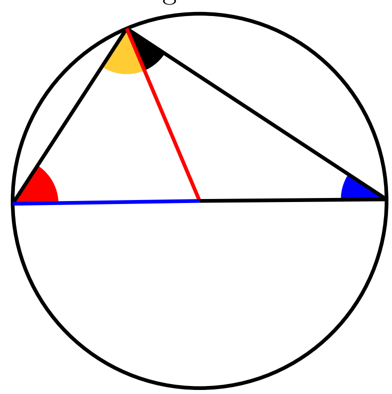


Figura 2.

El ángulo en un segmento mayor que un semicírculo es agudo.

Trazar el diámetro, y

∴ es un ángulo recto ∴ es agudo.

Figura 2.

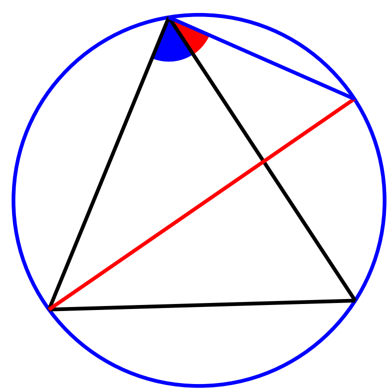
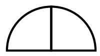


Figura 3.

El ángulo  en un segmento inferior al semicírculo es obtuso.

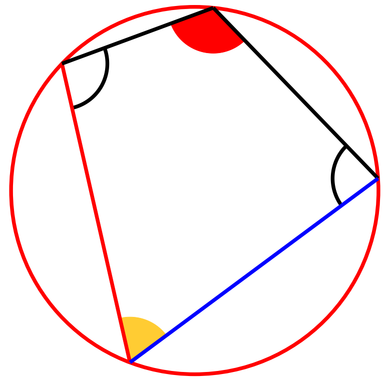
Tomar en el segmento opuesto cualquier punto, trazar y :

 +  =  (L. 3, pr. 22.)

pero $<$  (parte 2.),

$\therefore$  es obtuso.

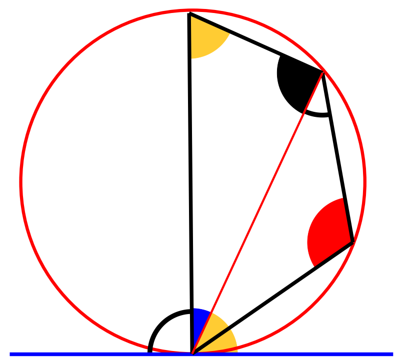
Figura 3.



Q. E. D.

LIBRO III. PROPOSICIÓN XXXII. TEOREMA.

SI una línea recta es tangente a un círculo, y desde el punto de contacto un segmento se traza cortando el círculo, los ángulos (,) formados por este segmento con la tangente, son respectivamente iguales a los ángulos en los segmentos alternos (,) del círculo.



Si la cuerda pasa por el centro, es evidente que los ángulos son iguales, ya que cada uno es un ángulo recto (L. 3, prs. 16, 31).

Pero si no, trazar $\perp$ desde el punto de contacto, debe pasar por el centro del círculo, (L. 3, pr. 19):

$\therefore$ $=$ (L. 1, pr. 32)

$\therefore$ $+$ $=$ $=$ (L. 1, pr. 32)

$\therefore$ $=$ (ax. 3).

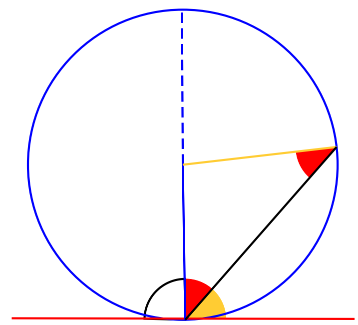
De nuevo $=$ $=$ $+$ (L. 3, pr. 22)

$\therefore$ $=$, (ax. 3), que es el ángulo en el segmento alterno.

Q. E. D.

LIBRO III. PROPOSICIÓN XXXIII. PROBLEMA.

EN un segmento dado se puede construir un segmento de un círculo que contiene un ángulo igual a un ángulo dado , , .



Si el ángulo dado es un ángulo recto, bisecar el segmento dado, y construir un semicírculo en él, éste evidentemente contendrá un ángulo recto (L. 3, pr. 31).

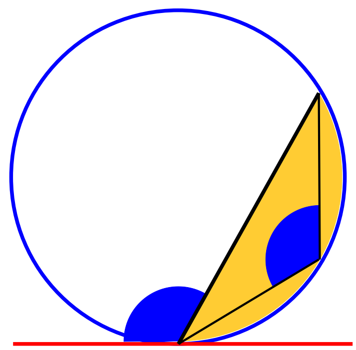
Si el ángulo dado es agudo u obtuso, trazar con el segmento dado, en su extremo, = , trazar ⊥ y hacer = , trazar con o como radio, porque son iguales.

es una tangente a (L. 3, pr. 16) ∴ divide el círculo en dos segmentos capaces de contener ángulos iguales a y que se hicieron respectivamente iguales a y (L. 3, pr. 32). Q. E. D.

LIBRO III. PROPOSICIÓN XXXIV. PROBLEMA.

D*E un círculo dado se puede cortar un segmento que contendrá un ángulo igual a un ángulo dado .*

Trazar (L. 3, pr. 17), una tangente al círculo en cualquier punto; en este punto hacer = el ángulo dado; y contiene un ángulo igual al ángulo dado.



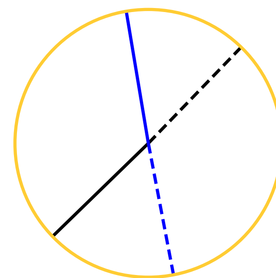
Porque es una tangente, y lo corta, el ángulo en es igual a (L. 3, pr. 32), pero = (const.)

Q. E. D.

LIBRO III. PROPOSICIÓN XXXV. TEOREMA.

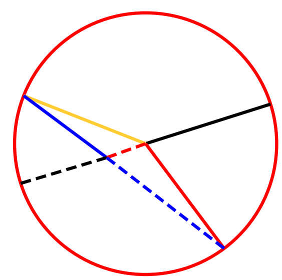
SI dos cuerdas en un círculo se intersecan entre sí, el rectángulo contenido por los segmentos de uno es igual al rectángulo contenido por los segmentos del otro.

Figura 1.



Si los segmentos dadas pasan a través del centro, se bisecan en el punto de intersección, por lo tanto los rectángulos bajo sus segmentos son los cuadrados de sus mitades, y por lo tanto son iguales.

Figura 2.



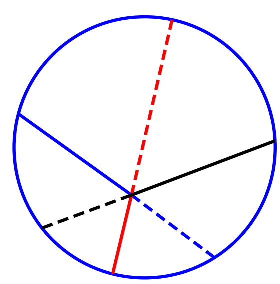
Sea pasando por el centro, y no; trazar y . Entonces:

$\times = {}^2 - {}^2$ (L. 2, pr. 6), o

$\times = {}^2 - {}^2$,

$\therefore \times = \times$ (L. 2, pr. 5).

Figura 3.



Si ninguna de los segmentos pasa por el centro, trazar a través de su intersección un diámetro , y $\times = \times$ (Parte. 2.),

además $\times = \times$ (Parte. 2.),

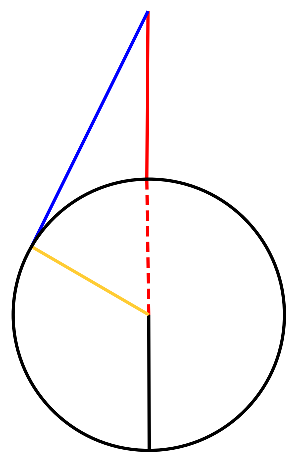
$\therefore \times = \times$.

Q. E. D.

LIBRO III. PROPOSICIÓN XXXVI. TEOREMA.

SI desde un punto fuera de un círculo se trazan dos líneas rectas hacia él, uno de las cuales es una tangente al círculo, y la otra lo corta; el rectángulo sobre todo el segmento de corte y el segmento externo es igual al cuadrado del segmento tangente .

Figure 1.



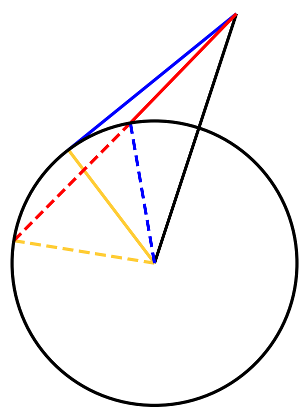
Si pasa por el centro; trazar del centro al punto de contacto;

$^2 = {}^2 - {}^2$ (L. 1, pr. 47), o

$^2 = {}^2 - {}^2$,

$\therefore {}^2 = \times$ (L. 2, pr. 6).

Figure 2.



Si no pasa por el centro, trazar y . Entonces:

$\times = {}^2 - {}^2$

(L. 2, pr. 6), es decir,

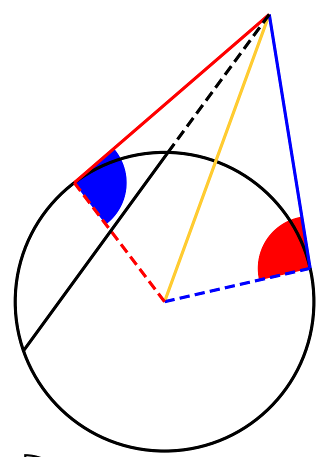
$\times = {}^2 - {}^2$,

$\therefore \times = {}^2$ (L. 3, pr. 18).

Q. E. D.

LIBRO III. PROPOSICIÓN XXXVII. TEOREMA.

SI de un punto fuera de un círculo se trazan dos líneas rectas, una cortando el círculo, la otra tocándolo, y si el rectángulo que contiene todo el segmento de corte y su segmento externo es igual al cuadrado de el segmento que confluye con el círculo, este último es una tangente al círculo.

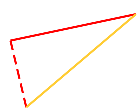
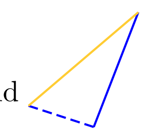


Trazar desde el punto dado, una tangente al círculo, y trazar desde el centro , , y :

$^2 = \times$ (L. 3, pr.36), pero

$^2 = \times$ (hip.),

$\therefore$ $^2 =$ ^{2}, y $\therefore$ $=$.

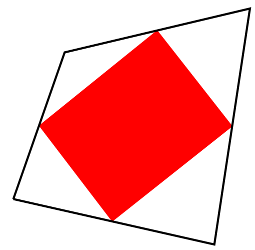
Entonces en  and  ,

y $=$ y , y es común, $\therefore$ $=$ (L. 1, pr. 8); pero $=$ un ángulo recto (L. 3, pr. 18), $\therefore$ $=$ un ángulo recto, y $\therefore$ es una tangente al círculo (L. 3, pr. 16).

Q. E. D.

LIBRO IV.

DEFINICIONES.

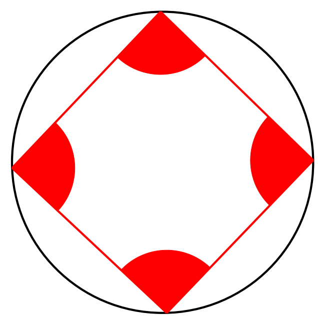


I.

Una figura rectilínea se dice que está inscrita en otra, cuando todos los vértices de la figura inscrita se encuentran en los lados de la figura en la que se dice que está inscrita.

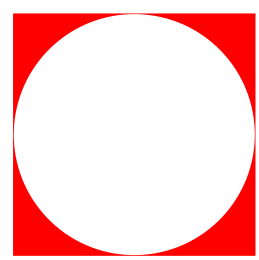
II.

Se dice que una figura está circunscrita en torno a otra figura, cuando todos los lados de la figura circunscrita pasan por los vértices de la otra figura.



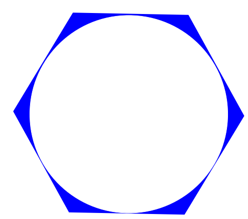
III.

Se dice que una figura rectilínea está inscrita en un círculo, cuando el vértice de cada ángulo de la figura está en la circunferencia del círculo.



IV.

Se dice que una figura rectilínea está circunscrita alrededor de un círculo, cuando cada uno de sus lados es una tangente al círculo.

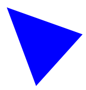


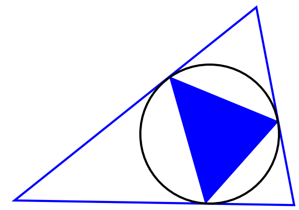
V.

Se dice que un círculo está inscrito en una figura rectilínea, cuando cada lado de la figura es una tangente al círculo.

VI.

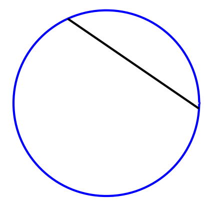
Se dice que un círculo está circunscrito alrededor de una figura rectilínea, cuando la circunferencia toca el vértice de cada ángulo de la figura.

 está circunscrito.



VII.

Se dice que una línea recta está inscrita en un círculo, cuando sus extremos están en la circunferencia.

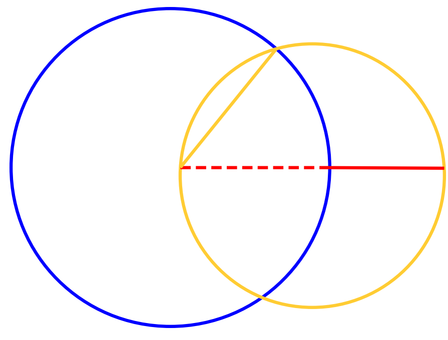


El Cuarto Libro de los Elementos está dedicado a la solución de problemas, principalmente en relación con la inscripción y circunscripción de polígonos y círculos regulares.

Un polígono regular es un polígono cuyos ángulos y lados son iguales.

LIBRO IF. PROPOSICIÓN I. PROBLEMA.

En un círculo dado se puede construir una cuerda igual a un segmento dado (), no mayor que el diámetro del círculo.



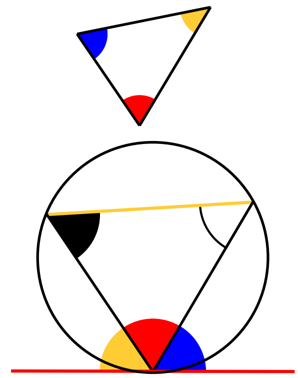
Trazar el diámetro de ; y si = , entonces el problema está resuelto.

Pero si no es igual a , > (hip.); hacer = (L. 1, pr. 3.), con como radio, construir cortando , y trazar , que es el segmento requerido.

En efecto, = = (L. 1, def. 15, const.) Q. E. D.

LIBRO IV. PROPOSICIÓN II. PROBLEMA.

En un círculo dado se puede inscribir un triángulo con ángulos iguales (equiangular) a un triángulo dado.

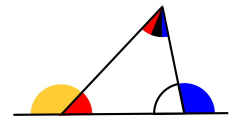


En cualquier punto del círculo dado, trazar una tangente , (L. 3, pr. 17); y en el punto de contacto hacer = (L. 1, pr. 23), igualmente = , y trazar .

Porque = (const.) y = (L. 3, pr. 32.) ∴ = ; además: = por la misma razón. ∴ = (L. 1, pr. 32.), y por lo tanto el triángulo inscrito en el círculo es equiangular al dado. Q. E. D.

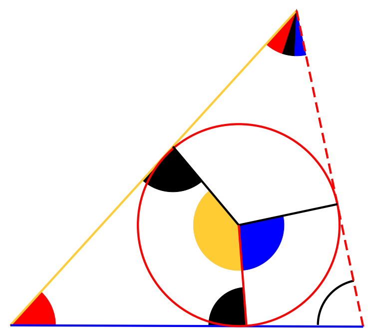
LIBRO IV. PROPOSICIÓN III. PROBLEMA.

Sobre un círculo cualquiera se puede circunscribir un triángulo equiangular a un triángulo dado.

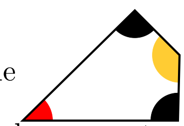


Extender cualquier lado del triángulo dado en ambos sentidos; desde el centro del círculo dado trazar cualquier radio.

Hacer = (L. 1, pr. 23) y =.



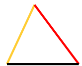
En los extremos de los tres radios, trazar , y , tangentes al círculo dado (L. 3, pr. 17).

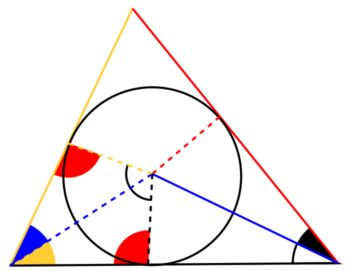
Los cuatro ángulos de , tomados en conjunto, son iguales a cuatro ángulos rectos (L. 1, pr. 32), pero y son ángulos rectos (const.)

∴ + = , pero = (L. 1, pr 13) y = (const.) y ∴ = .

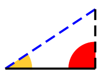
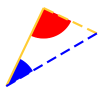
De la misma manera se puede demostrar que =; ∴ = (L. 1, pr. 32) y por lo tanto el triángulo circunscrito alrededor del círculo dado es equiangular al triángulo dado. Q. E. D.

LIBRO IV. PROPOSICIÓN IV. PROBLEMA.

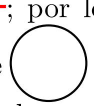
En un triángulo dado  *se puede inscribir un círculo.*



Bisecar los ángulos de la base y (L. 1, pr. 9) por y ; desde el punto donde estos segmentos se cruzan, trazar , y respectivamente perpendiculares a , y .

En  y  : = , = y común, ∴ = (L. 1, pr. 4 y 26).

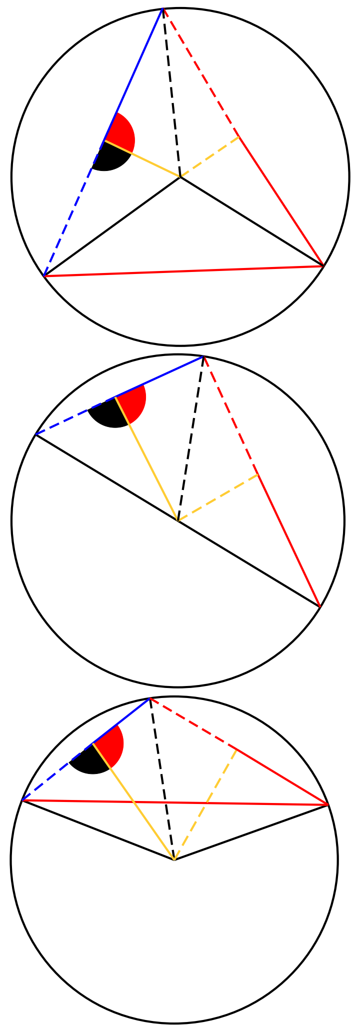
De igual manera, puede demostrarse también que = ;

∴ = = ; por lo tanto, con cualquiera de estos segmentos como radio, se construye  y pasará por los extremos de los otros dos; y los lados del triángulo dado, perpendicular a los tres radios de sus extremos, toca el círculo (L. 3, pr. 16), que por lo tanto se inscribe en el triángulo dado.

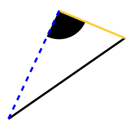
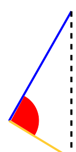
Q. E. D.

LIBRO IV. PROPOSICIÓN V. PROBLEMA.

Es posible circunscribir un círculo alrededor de un triángulo dado.



Bisecar y (L. 1, pr. 10). Desde los puntos de bisección trazar y $\perp$ y respectivamente (L. 1, pr. 11), y desde su punto de confluencia trazar , y y construir un círculo con cualquiera de ellos, y será el círculo requerido.

En  y , $=$ (const.), común,  $=$  (const.),

$\therefore$ $=$ (L. 1, pr. 4)

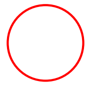
De igual manera se puede probar que:

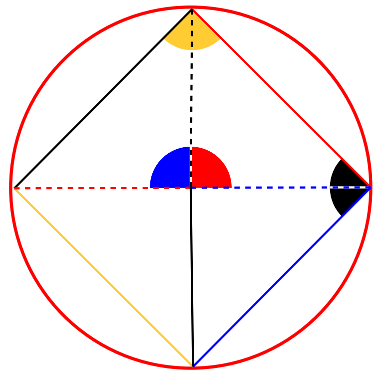
$=$, $\therefore$ $=$ $=$;

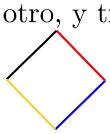
y por lo tanto un círculo construido a partir de la intersección de estos tres segmentos, con cualquiera de ellos como un radio, circunscribe el triángulo dado.

Q. E. D.

LIBRO IV. PROPOSICIÓN VI. PROBLEMA.

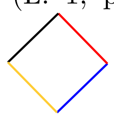
En un círculo dado  *se puede inscribir un cuadrado.*

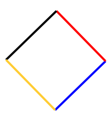


Trazar los dos diámetros del círculo perpendiculares uno a otro, y trazar , , y ,  es un cuadrado.

En efecto, puesto que y  están, cada uno de ellos, en un semicírculo, son ángulos rectos (L. 3, pr. 31), (L. 1, pr. 28): y de la misma manera $\parallel$.

Y porque  =  (const.), y = = (L. 1, def. 15);

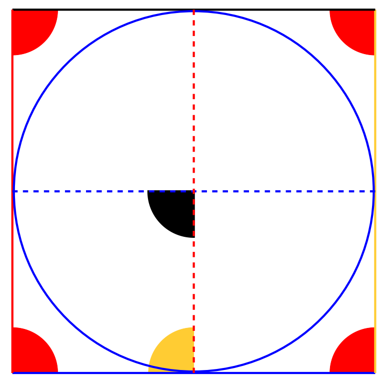
∴ = (L. 1, pr. 4); y como los lados y ángulos adyacentes del paralelogramo  son iguales, todos son iguales (L. 1, pr. 34);

y ∴  inscrito en el círculo dado, es un cuadrado.

Q. E. D.

LIBRO IV. PROPOSICIÓN VII. PROBLEMA.

En un círculo dado se puede circunscribir un cuadrado.



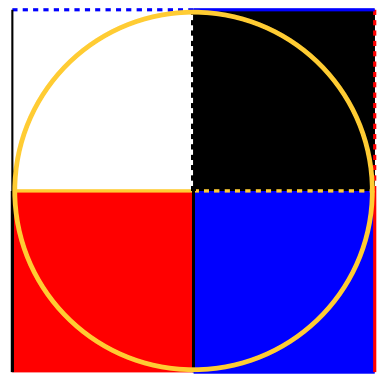
Trazar dos diámetros del círculo dado, perpendiculares entre sí, y a través de sus extremos trazar , , y tangentes al círculo; y es un cuadrado.

En efecto, $=$ un ángulo recto, (L. 3, pr. 18), además $=$ (const.), $\therefore$ $\parallel$; de la misma manera se puede demostrar que $\parallel$, y también que y $\parallel$; $\therefore$ es un paralelogramo, y porque $=$ $=$ $=$ $=$ que son todos los ángulos rectos (L. 1, pr. 34): también es evidente que , , y son iguales. $\therefore$ es un cuadrado.

Q. E. D.

LIBRO IV. PROPOSICIÓN VIII. PROBLEMA.

Se puede inscribir un círculo en un cuadrado dado.



Hacer = , y = , trazar ‖ , y ‖ , (L. 1, pr. 31) ∴  es un paralelogramo; y como = (hip.)

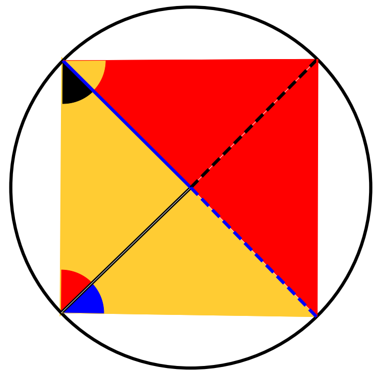
= ∴  es equilátero (L. 1, pr. 34).

Igualmente, se puede demostrar que  =  son paralelogramos equiláteros; ∴ = = = , y por lo tanto si se construye un círculo desde la concurrencia estos segmentos con cualquiera de ellos como radio, se inscribe en el cuadrado correspondiente (L. 3, pr. 16).

Q. E. D.

LIBRO IF. PROPOSICIÓN IX. PROBLEMA.

Se puede circunscribir un círculo alrededor de un cuadrado dado .



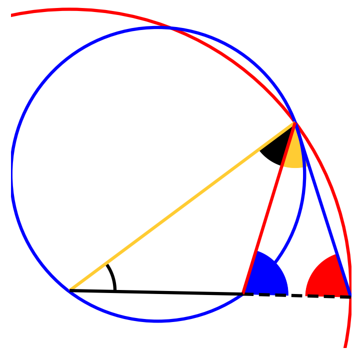
Trazar las diagonales y se intersecan entre sí; entonces porque y tienen sus lados iguales, y la base común a ambos, = (L. 1, pr. 8), o sea es bisecado. De la misma manera se puede demostrar que es bisecado; pero = , por lo tanto = sus mitades:

∴ = ; (L. 1, pr. 6.) y de igual manera se puede probar que = = = .

Si de la confluencia de estos segmentos con cualquiera de ellos como radio, se construye un círculo, éste circunscribe el cuadrado dado. Q. E. D.

LIBRO IV. PROPOSICIÓN X. PROBLEMA.

Se puede construir un triángulo isósceles, en la que cada uno de los ángulos de la base sea el doble del ángulo vertical.



Tomar cualquier segmento y dividirlo para que $\times$ $=$ ^{2} (L. 2, pr. 11).

Con como radio, construir y poner en el extremo del radio, $=$, (L. 4, pr. 1); trazar .

Entonces es el triángulo requerido.

En efecto, trazar y construir alrededor de (L. 4, pr. 5).

Puesto que $\times$ $=$ ^{2} $=$ ^{2}, $\therefore$ es una tangente a (L. 3, pr. 37), $\therefore$ $=$ (L. 3, pr. 32), añadir a cada lado,

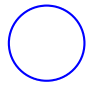
$\therefore$ $+$ $=$ $+$; pero $+$ $=$ $=$ (L. 1, pr. 5); puesto que $=$ (L. 1, pr. 5), por consiguiente:

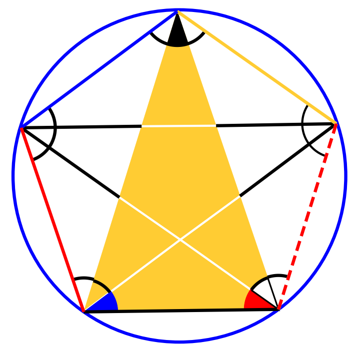
$=$ $+$ $=$ (L. 1, pr. 32),

$\therefore$ $=$ (L. 1, pr. 6) $\therefore$ $=$ $=$ (const.)

$\therefore$ $=$ (L. 1, pr. 5) $\therefore$ $=$ $=$ $=$ $+$ $=$ dos veces ;
y consecuentemente cada ángulo en la base es el doble del ángulo vertical.
Q. E. D.

LIBRO IV. PROPOSICIÓN XI. PROBLEMA.

En un círculo dado  *se puede inscribir un pentágono regular.*



Construir un triángulo isósceles, en el que cada uno de los ángulos de la base sea el doble del ángulo del vértice, e inscribir en el círculo un triángulo  equiangular a él; (L. 4, pr. 2).

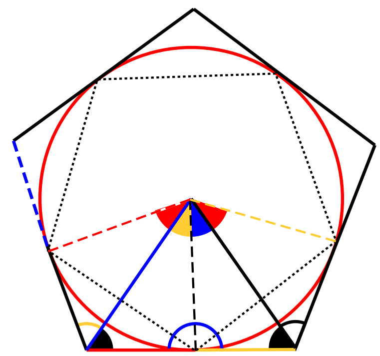
Bisecar  y  (L. 1, pr. 9),
trazar , , y .

Porque cada de los ángulos , , ,  y  son iguales, los arcos sobre los que se apoyan son iguales, (L. 3, pr. 26) y ∴ , , , y que subtienden estos arcos son iguales (L. 3, pr. 29) y ∴ el pentágono es equilátero, también es equiangular, ya que cada uno de sus ángulos está sobre arcos iguales. (L. 3, pr. 27).

Q. E. D.

LIBRO IV. PROPOSICIÓN XII. PROBLEMA.

Se puede construir un pentágono regular alrededor de un círculo dado .



Trazar cinco tangentes a través de los vértices de los ángulos de cualquier pentágono regular inscrito en el círculo dado (L. 3, pr. 17).

Estas cinco tangentes formarán el pentágono requerido.

En efecto, trazar .

En y = (L. 1, pr. 47),

= , y común; ∴ = y = (L. 1, pr. 8)

∴ = dos veces , y = dos veces .

De la misma manera se puede demostrar que:

= dos veces , y = dos veces ;

pero = (L. 3, pr. 27), ∴ sus mitades = ,

además = y común; ∴ = y = ,

∴ = dos veces .

De la misma manera se puede demostrar que = dos veces ,

pero = ∴ = .

De la misma manera se puede demostrar que los otros lados son iguales, y por lo tanto el pentágono es equilátero, también es equiangular, puesto que:

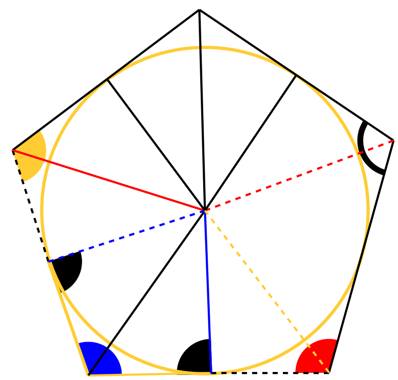
= dos veces y = dos veces , y por lo tanto = ,

∴ = ; de la misma manera se puede demostrar que los otros ángulos del pentágono descrito son iguales.

Q. E. D

LIBRO IV. PROPOSICIÓN XIII. PROBLEMA.

Se puede inscribir un círculo en un pentágono regular.



Sea el pentágono regular dado; necesitamos inscribirle un círculo. Hacer = , = (L. 1, pr. 9).
Trazar , , , , etc.
Porque = , = ,
y común a los dos triángulos y ; ∴ = y
= (L. 1, pr. 4).

Y porque = dos veces ∴ = dos veces , por lo tanto es bisecado por .

De igual manera se puede demostrar que es bisecado por , y que el ángulo restante del polígono se divida de manera similar.
Trazar , etc. perpendicular a los lados del pentágono.

Entonces en los dos triángulos y tenemos = ,

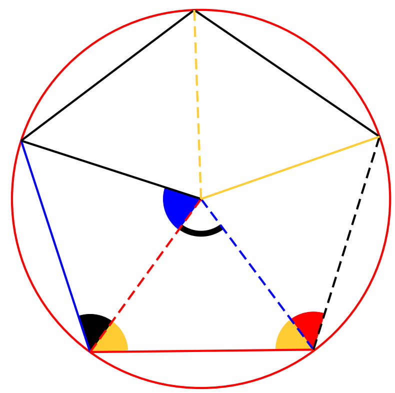
(const.), común, y = = un ángulo recto; ∴ =
(L. 1, pr. 26).
De la misma manera, se puede demostrar que las cinco perpendiculares de los lados del pentágono son iguales entre sí.

Construir con cualquiera de las perpendiculares como radio, y será el círculo inscrito requerido. Porque si no toca los lados del pentágono, sino que los corta, entonces una línea trazada desde el extremo del diámetro de un círculo en ángulo recto, caerá dentro del círculo, lo que se ha demostrado ser absurdo. (L. 3, pr. 16).

Q. E. D.

LIBRO IV. PROPOSICIÓN XIV. PROBLEMA.

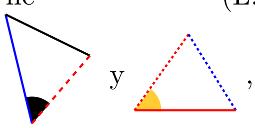
Es posible circunscribir un círculo alrededor de un pentágono regular dado.



Bisecar y por y , y el punto de intersección es el centro del círculo buscado.

Trazar , , y .

El pentágono es regular, = , como son bisecados = , se tiene = (L. 1, pr. 6); y como en



y , = , y

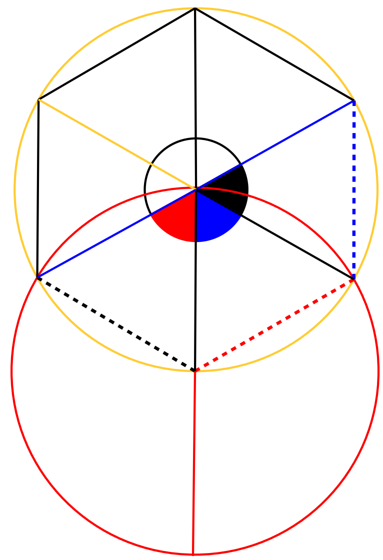
común, además = ; ∴ = (L. 1, pr. 4).

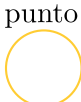
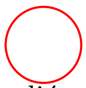
De igual manera se puede probar que = = , y por lo tanto = = = = .

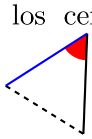
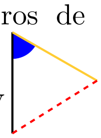
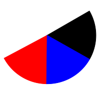
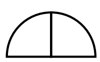
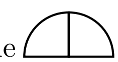
Por lo tanto, si se construye un círculo desde el punto donde se encuentran estos cinco segmentos, con cualquiera de ellos como radio, circunscribe el pentágono dado. Q. E. D.

LIBRO IV PROPOSICIÓN XV. PROBLEMA

Es posible inscribir un hexágono regular (equilátero y equiangular) en un círculo dado .

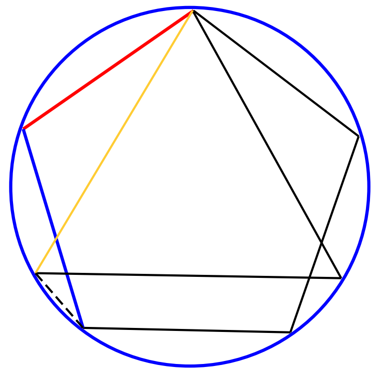


Desde cualquier punto de la circunferencia del círculo dado , construir un círculo  pasando por su centro, y trazar los diámetros , y ; trazar , , , etc. y el hexágono requerido se inscribe en el círculo dado.

En efecto, puesto que pasa a través de los centros de los círculos, los triángulos  y  son equiláteros, por lo tanto  =  un tercio de dos ángulos rectos; (L. 1, pr. 32), pero  =  (L. 1, pr. 13); ∴  =  =  = un tercio de  (L. 1, pr. 32), y los ángulos verticalmente opuestos a estos son todos iguales entre sí (L. 1, pr. 15), y se sitúan sobre arcos iguales (L. 3, pr. 26), que están subtendidos por cuerdas iguales (L. 3, pr. 29); y como cada uno de los ángulos del hexágono es el doble del ángulo de un triángulo equilátero, también es equiangular. Q. E. D.

LIBRO IV PROPOSICIÓN XVI. PROBLEMA

Se puede inscribir un quindecágono regular (equilátero y equiangular) en un círculo dado.



Sean y los lados de un pentágono equilátero inscrito en el círculo dado, y el lado de un triángulo equilátero inscrito.

El arco subtendido por y $= \frac{2}{5} = \frac{6}{15}$ de toda la circunferencia.

El arco subtendido por $= \frac{1}{3} = \frac{5}{15}$ de toda la circunferencia.

Su diferencia es $\frac{1}{15}$, $\therefore$ el arco subtendido por $= \frac{1}{15}$ diferencia de toda la circunferencia.

Por lo tanto, si los segmentos son iguales a se coloca en el círculo (L. 4, pr. 1), un quindecágono equilátero y equiangular será así inscrito en el círculo. Q. E. D.

LIBRO V.

DEFINICIONES.

I.

Se dice que una magnitud menor es una parte alícuota o un submúltiple de una magnitud mayor, cuando el menor mide al mayor; es decir, cuando el menor está contenido un cierto número de veces exactamente en el mayor.

II.

Se dice que una magnitud mayor es un múltiplo de una magnitud menor, cuando el mayor se mide por el menor; es decir, cuando el mayor contiene el menor un cierto número de veces exactamente.

III.

El cociente es la relación que existe entre una cantidad y otra del mismo tipo, con respecta a la magnitud.

IV.

Se dice que las magnitudes tienen una relación entre sí, cuando son del mismo tipo; y la que es menor se puede multiplicar para exceder la mayor.

Las otras definiciones se darán a lo largo del libro, cuando se requiera su auxilio.

AXIOMAS.

I.

Equimúltiplos o equisubmúltiplos de las mismas magnitudes, o de magnitudes iguales, son iguales entre sí.

$$
\begin{gathered}
\text{Si A} = \text{B, then} \\
\text{dos veces A} = \text{dos veces B, es decir,} \\
2\text{A} = 2\text{B}; \\
3\text{A} = 3\text{B}; \\
4\text{A} = 4\text{B}; \\
\&\text{c. \&c.} \\
\text{y } \tfrac{1}{2} \text{ de A} = \tfrac{1}{2} \text{ de B}; \\
\tfrac{1}{3} \text{ de A} = \tfrac{1}{3} \text{ de B}; \\
\&\text{c. \&c.}
\end{gathered}
$$

II.

Un múltiplo de mayor magnitud es mayor que el mismo múltiplo de una magnitud menor.

$$
\begin{gathered}
\text{Sea A} > \text{B, then} \\
2\text{A} > 2\text{B}; \\
3\text{A} > 3\text{B}; \\
4\text{A} > 4\text{B}; \\
\&\text{c. \&c.}
\end{gathered}
$$

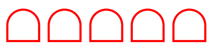
III.

Una magnitud, de la cual un múltiplo es mayor que el mismo múltiplo de otra, es mayor que la otra.

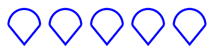
$$
\begin{gathered}
\text{Si } 2\text{A} > 2\text{B, entonces} \\
\text{A} > \text{B}; \\
\text{o, si } 3\text{A} > 3\text{B, then} \\
\text{A} > \text{B}; \\
\text{o, si } m \text{ A} > m \text{ B, then} \\
\text{A} > \text{B}.
\end{gathered}
$$

LIBRO V. PROPOSICIÓN I. TEOREMA.

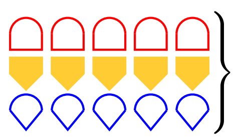
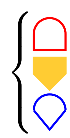
SI un número cualquiera de magnitudes respectivamente equimúltiplos de cualesquiera otras magnitudes iguales en número, cuantas veces una sea múltiplo de otra, tantas veces lo serán todas las magnitudes consideradas conjuntamente de uno múltiplo de todas las magnitudes consideradas conjuntamente del otro.

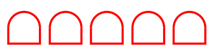
Si  el mismo múltiplo de ,

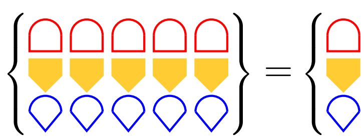
que es de .

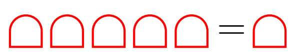
que  es de .

Entonces es evidente que

 es el mismo múltiplo de 

lo cual  es de ; porque hay tantas magnitudes

en 

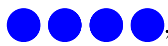
como hay en .

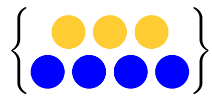
La misma demostración tiene lugar con cualquier número de magnitudes, que aquí se ha aplicado a tres.

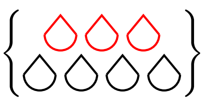
∴ SI un número cualquiera de magnitudes respectivamente etc.

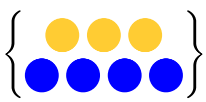
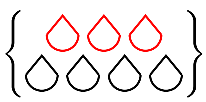
LIBRO V. PROPOSICIÓN II. TEOREMA.

SI una primera magnitud es el mismo múltiplo de una segunda que una tercera es de una cuarta, y la quinta es el mismo múltiplo de la segunda que una sexta es de la cuarta, entonces la primera junto con la quinta, es el mismo múltiplo de la segunda que la tercera junto con la sexta, es de la cuarta.

Sea la primero , el mismo múltiplo de la segunda ,
sea la tercera , el mismo múltiplo de la cuarta ;
y sea la quinta , el mismo múltiplo de la segunda ,
como la sexta , el mismo múltiplo de la cuarta .

Entonces es evidente que la primera y la quinta juntas , es el mismo múltiplo de la segunda ,

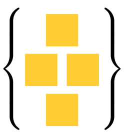
como la tercera y la quinta juntas , es el mismo múltiplo de la cuarta ,

porque hay tantas magnitudes en  iguales a  como hay en  iguales a .

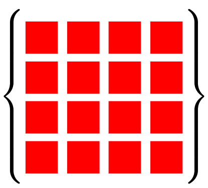
∴ Si una primera magnitud, etc.

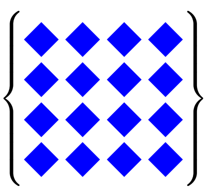
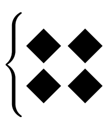
LIBRO V. PROPOSICIÓN III. TEOREMA.

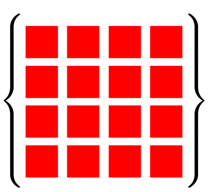
SI la primera de cuatro magnitudes es el mismo múltiplo de la segunda, como la tercera es de la cuarta, y si cualquier equimúltiplo de la primera y la tercera se toma, estos serán equimúltiplos; uno de la segunda, y el otro de la cuarta.

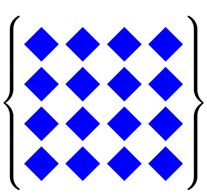
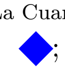
Sea La Primera  el mismo múltiplo de La Segunda 

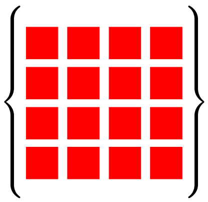
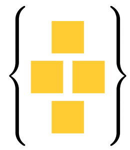
y sea La Tercera  el mismo múltiplo de La Cuarta ;

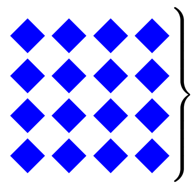
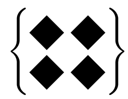
tomar  el mismo múltiplo de ,

y tomar  el mismo múltiplo de .

Entonces es evidente, que  es el mismo múltiplo de La Segunda 

como  es el mismo múltiplo de La Cuarta ;

porque  contiene a  contiene a 

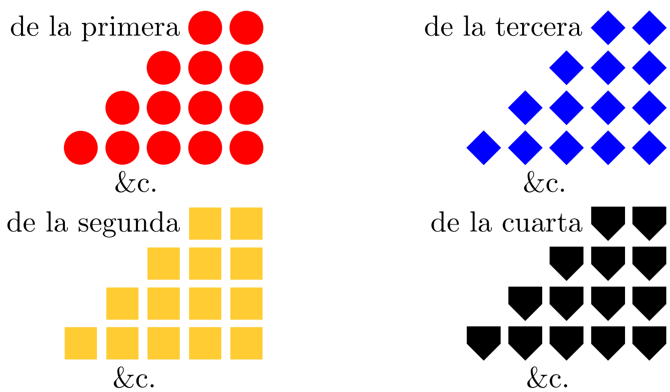
tantas veces como  contiene a  contiene a  .

El mismo razonamiento es aplicable en todos los casos de equimúltiplos.

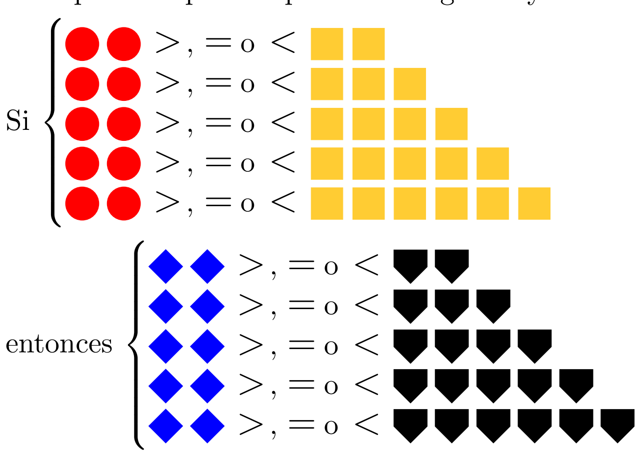
$\therefore$ Si la primera de cuatro etc.

DEFINICIÓN V.

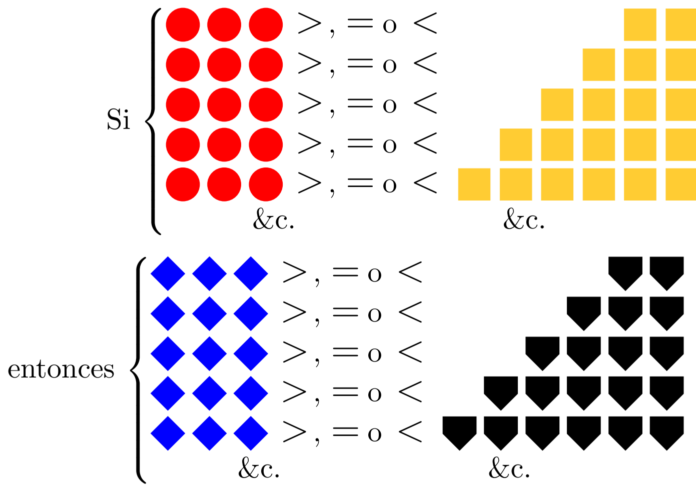
Cuatro magnitudes, , , , , se dice que son proporcionales cuando se toman todos los equimúltiplos de la primera y la tercera, y cada equimúltiplo de la segunda y cuarta, como,



Entonces tomando cada par de equimúltiplos de la primera y la tercera, y cada par de equimúltiplos de la segunda y cuarta:



Es decir, si el doble de la primera es mayor, igual, o menor que el doble de la segunda, el doble de la tercera será mayor, igual, o menor que el doble del cuarto; o, si el doble de la primera es mayor, igual, o menor que tres veces la segunda, dos veces la tercera será mayor, igual, o menor que tres veces la cuarta, y así sucesivamente, tal como se ha expresado anteriormente.



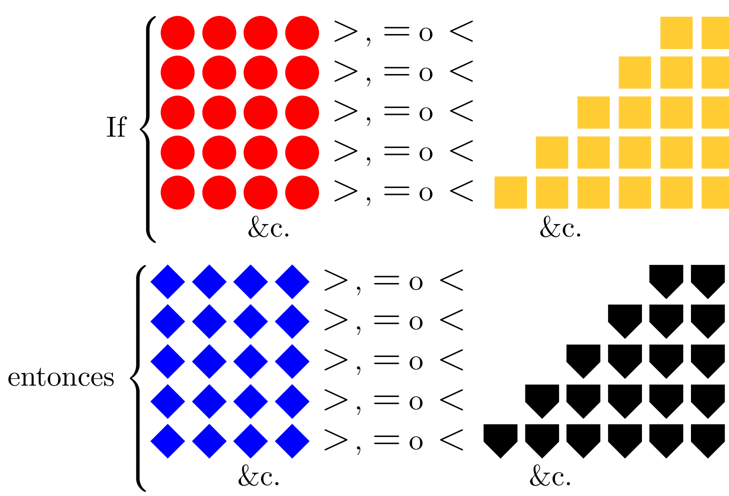
En otros términos:

si tres veces la primero es mayor, igual, o menor que el doble de la segundo, tres veces la tercera será mayor, igual, o menor que el doble de la cuarta;

o, si tres veces la primera es mayor, igual, o menor que tres veces la segunda, entonces la tercera será tres veces mayor, igual, o menor que tres veces la cuarta;

o si tres veces la primera es mayor, igual, o menor que cuatro veces la segunda, entonces la tercera será tres veces mayor, igual, o menor que cuatro veces la cuarta, y así sucesivamente.

De nuevo,



Y así sucesivamente, con cualquier otro equimúltiplo de las cuatro magnitudes, tomada de la misma manera.

Euclides expresa esta definición de la siguiente manera:—

Se dice que la primera de cuatro magnitudes tiene la misma relación con la segunda, que la tercera tiene con la cuarta, cuando un equimúltiplo cualesquiera de las primeras y terceras se toma, y cualquier equimúltiplo que sea de la segunda y la cuarta; si el múltiplo de la primera es menor que el de la segunda, el múltiplo de la tercera es también menor que el de la cuarta; o, que el múltiplo de la primera es igual al de la segunda, el múltiplo de la tercera es también igual al de la cuarta;

o, es el múltiplo de la primero es mayor que el de la segunda, el múltiplo de la tercera es también mayor que el de la cuarta.

En lo sucesivo expresaremos esta definición de manera general así:

$$\text{Si M} ● >, = \text{o} < m\, ■, \text{ cuando M} ◆ >, = \text{o} < m\, ▼,$$

entonces deducimos que la primera ●, tiene la misma relación con la segunda ■, como la tercera ◆, tiene con la cuarta ▼: expresadas en las siguientes demostraciones así:

$$● : ■ :: ◆ : ▼;$$
$$\text{o así, } ● : ■ = ◆ : ▼;$$
$$\text{o así, } \frac{●}{■} = \frac{◆}{▼};$$

y se lee,

"como ● es a ■, ◆ es a ▼."

Y si ● : ■ :: ◆ : ▼; podemos inferir si

$$\text{M} ● >, = \text{o} < m\, ■,$$
$$\text{entonces M} ◆ >, = \text{o} < m\, ▼.$$

Es decir, si el primero es para el segundo, como el tercero es para el cuarto; entonces si M veces el primero es mayor que, igual a, o menor que m veces el segundo, entonces M veces el tercero es mayor que, igual a, o menor que m veces el cuarto, en el cual M y m no deben considerarse múltiplos particulares, sino un par de múltiplos que se consideran como tales; ni tampoco marcas como ●, ▼, ■, &c. serán consideradas más como representantes de magnitudes geométricas.

El estudiante debe entender completamente esta definición antes de seguir adelante.

LIBRO V. PROPOSICIÓN IV. TEOREMA.

SI la primera de cuatro magnitudes tiene la misma relación con la segunda, que la tercera tiene con la cuarta, entonces cualquier equimúltiplo de la primera y tercera tendrá el mismo cociente (razón) con cualquier equimúltiplo de la segunda y cuarta; a saber, el equimúltiplo de la primera tendrá la misma relación con la de la segunda, como el equimúltiplo de la tercera tiene con el de la cuarta.

Sea 🟡 : ⬛ :: ♦ : ⬟, entonces 3 🟡 : 2 ⬛ :: 3 ♦ : 2 ⬟,

cada equimúltiplo de 3 🟡 y 3 ♦ es equimúltiplo de 🟡 y ♦,

y cada equimúltiplo de 2 ⬛ y 2 ⬟, es equimúltiplo de ⬛ y ⬟ (L. 5, pr. 3).

Es decir, M veces 3 🟡 y M veces 3 ♦ es equimúltiplo de 🟡 y ♦,

y m veces 2 ⬛ y m veces 2 ⬟ es equimúltiplo de 2 ⬛ y 2 ⬟;

pero 🟡 : ⬛ :: ♦ : ⬟ (hyp); $\therefore$ si M 3 🟡 $>$, $=$, o $<$ m 2 ⬛,

entonces M 3 ♦ $>$ $=$, o $<$ m 2 ⬟ (def. 5).

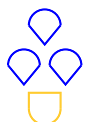
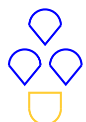
y por lo tanto 3 🟡 : 2 ⬛ :: 3 ♦ : 2 🔷 (def. 5).

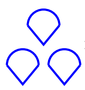
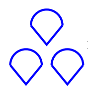
El mismo razonamiento es válido si se toma cualquier otro equimúltiplo del primero y el tercero, con cualquier otro equimúltiplo del segundo y el cuarto.

$\therefore$ Si la primera de cuatro magnitudes, etc.

LIBRO V. PROPOSICIÓN V. TEOREMA.

S*I una magnitud es el mismo múltiplo de otra magnitud, como una magnitud quitada de la primera lo es de una magnitud quitada de la segunda, el resto de la primera es también el mismo múltiplo del resto de la segunda, como el todo de la primera es al todo de la segunda.*

Sea  $=$ M′ y $=$ M′, $\therefore$  menos  $=$ M′ menos M′,

$\therefore$  $=$ M′( menos ), y $\therefore$  $=$ M′.

Si una magnitud, etc.

LIBRO V. PROPOSICIÓN VI. TEOREMA.

Si dos magnitudes son equimúltiplos de otras dos, y si equimúltiplos de éstas se quitan de las dos primeras, los restos son iguales a estos otros, o equimúltiplos de ellos.

Sea $=$ M$'$ ■; y  $=$ M$'$ ▲;

entonces menos m'■ $=$ M$'$■ menos m'■ $=$ (M$'$ menos m')■,

y  menos m'▲ $=$ M$'$ ▲ menos m$'$▲ $=$ (M$'$ menos m')▲.
Por lo tanto, (M$'$ menos m')■ y (M$'$ menos m') ▲ son equimúltiplos de ■ y ▲, e igual a ■ y ▲, cuando M$'$ menos $m' = 1$.

∴ Si dos magnitudes son equimúltiplos, etc.

LIBRO V. PROPOSICIÓN A. TEOREMA.

SI la primera de cuatro magnitudes tiene la misma relación con la segunda que la tercera con la cuarta, entonces si el primero es mayor que el segundo, el tercero es también mayor que el cuarto; y si es igual, igual; si es menor, menor.

Sea : :: : ; por lo tanto, por la quinta definición,
si $>$, entonces $>$;
pero si $>$, entonces $>$ y $>$, $\therefore$ $>$.
Similarmente, si $=$, o $<$, entonces $=$, o $<$.

$\therefore$ Si la primera de cuatro, etc.

DEFINICIÓN VI.

Los geómetras utilizan el término técnico "'Invertendo", por inversión, cuando hay cuatro proporciones, y se infiere que, que el segundo es para el primero, como el cuarto a al tercero.

Sea A : B :: C : D , entonces, por "invertendo" se infiere B : A :: D : C.

LIBRO V. PROPOSICIÓN B. TEOREMA.

Si cuatro magnitudes son proporcionales, son proporcionales también cuando se toman de forma inversa.

Sea : :: : , entonces inversamente, : :: : .

Si M $<m$, entonces M $<m$ por la quinta definición.

Sea M $<m$, es decir, m $>$ M , $\therefore$ M $<m$, o, m $>$ M ;

$\therefore$ si m $>$ M , entonces m $>$ M .

De la misma manera se puede demostrar, que si m $=$ o $<$ M , entonces m $=$, o $<$ M ; y por lo tanto, por la quinta definición, inferimos que:

: : : .

$\therefore$ Si cuatro magnitudes, etc.

LIBRO V. PROPOSICIÓN C. TEOREMA.

SI el primero es el mismo múltiplo del segundo, o la misma parte de él, que el tercero es del cuarto; el primero es al segundo, como el tercero es al cuarto.

Sea el primero, el mismo múltiplo de , el segundo, como el tercero, es a , el cuarto.

Entonces : :: : , tomar M , m , M , m ;

porque es el mismo múltiplo de como es de (según la hipótesis); y si M se toma el mismo múltiplo de como M es de , ∴ (según la tercera proposición):

M es el mismo múltiplo de como M es de .

Por lo tanto, si M es de un múltiplo mayor que m , entonces M es un mayor múltiplo de que m ; es decir:

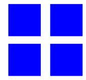
si M es mayor que m , entonces M será mayor que m ;
de la misma manera puede ser probado:

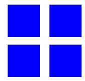
si M es igual a m , entonces M es igual a m .

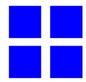
Y de manera general:

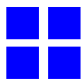
si M $>, =$ o $< m$, entonces M es $>, =$ o $< m$;

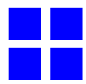
∴ por la quinta definición, : :: : .

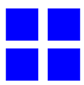
Ahora, sea  la misma parte de  que  es de .

En este caso también  :  ::  : .

Supongamos que  es la misma parte de  como  es de ,

por lo tanto  es el mismo múltiplo de  que es de .

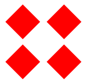
Por lo tanto, por el caso anterior,  :  :: : ;

y $\therefore$  :  ::  : , por proporción B.

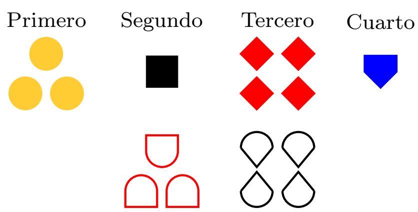
$\therefore$ Si el primero es el mismo múltiplo, etc.

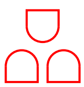
LIBRO V. PROPOSICIÓN D. TEOREMA.

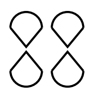
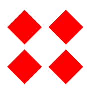
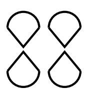
SI el primero es al segundo como el tercero es al cuarto, y si el primero es un múltiple, o una parte del segundo; el tercero es el mismo múltiplo, o la misma parte del cuarto.

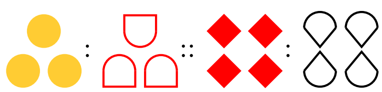
Sea :  ::  : ; y primero, sea un múltiplo .

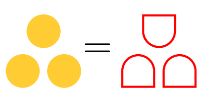
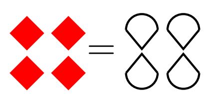
 será el mismo múltiplo de .

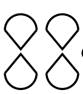


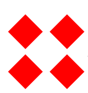
Tomar  = .

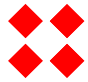
Sea cual sea el múltiplo de  tomar  el mismo múltiplo de , entonces porque :  ::  :  y del segundo y cuarto tomamos equimúltiplos, y , por lo tanto (L. 5, pr. 4):

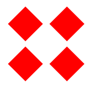
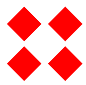
, pero (const.),

 ∴ (B. 5, pr. A), 

y  es el mismo múltiplo de  que es de .

Ahora, sea  : ::  : , y también  una parte de ; entonces  será la misma parte de .

Inversamente (L. 5), :  ::  : , pero  es una parte ; es decir, es un múltiplo de ;

∴ por el caso anterior,  es el mismo múltiplo de , es decir  es la misma parte de , que  es de .

∴ Si el primero es al segundo, etc.

LIBRO V. PROPOSICIÓN VII. TEOREMA

MAGNITUDES iguales tienen la misma razón a la misma magnitud, y la misma magnitud tiene la misma razón con magnitudes iguales.

Sea ● $=$ ◆ y ■ cualquier otra magnitud; entonces ● : ■ $=$ ◆ : ■ y ■ : ● $=$ ■ : ◆.

Porque ● $=$ ◆, $\therefore$ M ● $=$ M ◆; $\therefore$ si M ● $>, =$ o $< m$ ■, entonces M ◆ $>, =$ o $< m$ ■, y $\therefore$ ● : ■ $=$ ◆ : ■ (L. 5, def. 5).

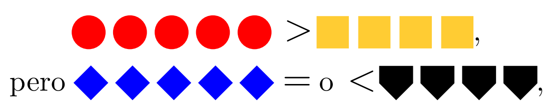
Del razonamiento anterior se desprende que, si m ■ $> =$ o $<$ M ●, entonces m ■ $>, =$ o $<$ M ◆ $\therefore$ ■ : ● $=$ ■ : ◆ (L. 5, def. 5).

$\therefore$ Iguales magnitudes, etc.

DEFINICIÓN VII.

Cuando de los equimúltiplos de cuatro magnitudes (tomadas como en la quinta definición), el múltiplo de la primera es mayor que la segunda, pero el múltiplo de la tercera no es mayor que el múltiplo de la cuarta; entonces se dice que la primera tiene para la segunda una proporción mayor que la tercera magnitud tiene para la cuarta: y, por el contrario, se dice que la tercera tiene para la cuarta una proporción menor que la primera tiene con respecto a la segunda.

Si, entre los equimúltiplos de cuatro magnitudes, en comparación con la quinta definición, deberíamos encontrar



o si debemos encontrar algún múltiplo particular M' de la primera y tercera, y un múltiplo particular m' de la segunda y cuarta, tal que M' veces la primera es $> m'$ veces la segunda, pero M' veces la tercera no es $> m'$ veces la cuarta, i.e. $=$ o $< m'$ veces la cuarta; entonces se dice que la primera tiene para la segunda una proporción mayor que la tercera es la cuarta; o la tercera tiene a la cuarta, en tales circunstancias, una proporción menor que la que la primera tiene con respecto a la segunda: aunque varios otros equimúltiplos pueden tender a mostrar que las cuatro magnitudes son proporcionales.

Esta definición se expresará en el futuro de la siguiente manera:—

En la expresión general anterior, M' y m' deben considerarse múltiplos particulares, no como los múltiplos M y m introducido en la quinta definición, que están en ese definición considerada como cada par de múltiplos que se pueden tomar. Debemos también observar que , , , y los símbolos similares deben ser considerados meramente los representantes de magnitudes geométricas.

De forma de aritmética parcial, esto se puede establecer de la siguiente manera:

Tomemos los cuatro números, 8:, 7, 10;, y 9.

Primera 8	Segunda 7	Tercera 10	Cuarta 9
16	14	20	18
24	21	30	27
32	28	40	36
40	35	50	45
48	42	60	54
56	49	70	63
64	56	80	72
72	63	90	81
80	70	100	90
88	77	110	99
96	84	120	108
104	91	130	117
112	98	140	126
&c.	&c.	&c.	&c.

Entre los múltiplos anteriores se encuentran 16 $>$14 y 20 $>$18, es decir, dos veces el primero es mayor que dos veces el segundo, y dos veces el tercero es mayor que dos veces el cuarto; y 16 $<$21 y 20 $<$27; es decir, dos veces el primero es menor que tres veces el segundo, y dos veces el tercero es menor que tres veces el cuarto; y entre los mismos múltiplos podemos encontrar 72 $>$56 y 90 $>$72 es decir, 9 veces el primero es mayor que 8 veces el segundo, y 9 veces el tercero es mayor que 8 veces el cuarto. Se pueden seleccionar muchos otros equimúltiplos, lo que tendería a mostrar que los números 8, 7, 10, 9, son proporcionales, pero no lo son, porque podemos encontrar un múltiplo de los primeros $>$que un múltiplo del segundo, pero el mismo múltiplo del tercero que se ha tomado del primero no es $>$el mismo múltiplo del cuarto que se ha tomado del segundo; por ejemplo, 9 veces el primero es $>$10 veces el segundo, pero 9 veces el tercero no es $>$que 10 veces el cuarto, es decir 72 $>$70, pero 90 no es $>$90, u 8 veces el primero que encontramos $>$9 veces la segunda, pero 8 veces la tercera no es mayor que 9 veces la cuarta, es decir, 64 $>$63, pero 80 no es $>$81. Cuando se pueden encontrar múltiplos como estos, el primero (8) se dice que tiene al segunda (7) en una proporción mayor que el tercero (10) tiene al cuarto (9), y por el contrario, el tercero (10) se dice que tiene al cuarto (9) una proporción menor que el primero (8) tiene al segundo (7).

LIBRO V. PROPOSICIÓN VIII. TEOREMA.

Si las magnitudes son desiguales, la mayor tiene una razón mayor con la misma magnitud que la menor: y la misma magnitud tiene una razón mayor con la menor que con la mayor.

Sean $\overset{\blacktriangle}{\blacksquare}$ y $\square$ dos magnitudes desiguales, y $\bullet$ cualquiera otra.

Primero probaremos que $\overset{\blacktriangle}{\blacksquare}$ la cual es la mayor de las dos magnitudes desiguales, tiene una razón mayor de $\bullet$ que $\square$ (la menor) tiene de $\bullet$; es decir:

$$\overset{\blacktriangle}{\blacksquare} : \bullet > \square : \bullet.$$

Para probar esto, tomar M′ $\overset{\blacktriangle}{\blacksquare}$, m' $\bullet$ y M′ $\square$ tales que:

1) M′$\blacktriangle$ y M′ $\blacksquare$ son cada uno de ellos $> \bullet$;

2) m' $\bullet$ el menor múltiplo de $\bullet$, tal que m' $\bullet$ $>$ M′ $\square$ $=$ M′ $\blacksquare$;

$$\therefore \text{M}' \square \not> m' \bullet, \text{ pero M}' \overset{\blacktriangle}{\blacksquare} > m' \bullet.$$

En efecto, como m' es el primer múltiplo tal que m' $\bullet$ $>$ M′ $\blacksquare$, se tiene que (m' menos 1) $\bullet$ $= m'$ $\bullet$ menos $\bullet$ $\not>$ M′ $\blacksquare$, y $\bullet$ $\not>$ M′ $\blacktriangle$,

$\therefore m'$ $\bullet$ menos $\bullet + \bullet <$ M′ $\blacksquare$ $+$ M′$\blacktriangle$; es decir, m' $\bullet$ $<$ M′ $\overset{\blacktriangle}{\blacksquare}$;

pero se ha demostrado antes que M′ $\square$ $\not> m'$ $\bullet$, y por la séptima definición:

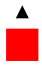
$\overset{\blacktriangle}{\blacksquare}$ está en $\bullet$ en una razón mayor que $\square$ está en $\bullet$.

Ahora probaremos que $\bullet$ tiene una razón mayor con $\square$ (la menor) que la que tiene con $\overset{\blacktriangle}{\blacksquare}$ (la mayor); o sea

$$\bullet : \square > \bullet : \overset{\blacktriangle}{\blacksquare}.$$

Tomar m' $\bullet$, M′ $\square$ y M′ $\overset{\blacktriangle}{\blacksquare}$, los mismos que anteriormente en 1) y 2) se concluyó que:

$$m' \bullet \text{ es M}' \overset{\blacktriangle}{\blacksquare},$$

y por la séptima definición,  tiene a en una proporción mayor que  tiene a .

∴ Si magnitudes desiguales, etc.

La invención empleada en esta proposición para encontrar entre los múltiplos tomados, como en la quinta definición, un múltiplo del primero mayor que el múltiplo del segundo, pero el mismo múltiplo del tercero que se ha tomado del primero, no mayor que el mismo múltiplo del cuarto que se ha tomado de la segunda, puede ilustrarse numéricamente de la siguiente manera:—-

El número 9 tiene un mayor cociente de 7 que 8 tiene que 7: es decir, $9 : 7 > 8 : 7$; o, $8 + 1 : 7 > 8 : 7$.

El múltiplo de 1, que primero se convierte en mayor que 7, es 8, por lo tanto podemos multiplicar el primero y el tercero por 8, 9, 10, o cualquier otro número mayor; en este caso, sea la multiplicación del primero y el tercero por 8, y tenemos $64 + 8$ y 64: de nuevo, el primer múltiplo de 7 que se hace mayor que 64 es 10 veces; entonces, multiplicando el segundo y el cuarto por 10, tendremos 70 y 70; entonces, arreglando estos múltiplos, tenemos—

8 veces el primero	10 veces el segundo	8 veces el tercero	10 veces el cuarto
64+8	70	64	70

Consecuentemente, $64 + 8$, o 72, es mayor que 70, pero 64 no es mayor que 70, ∴ por la séptima definición, 9 tiene un mayor cociente con 7 que 8 tiene con 7.

Lo anterior es meramente ilustrativo de la demostración anterior, para esta propiedad se pueden mostrar estos u otros números muy fácilmente de la siguiente manera; porque, si un antecedente contiene su consecuente un mayor número de veces que otro antecedente contiene su consecuente, o cuando se forma una fracción de un antecedente para el numerador, y su consecuente para que el denominador sea mayor que otra fracción que se forma de otro antecedente para el numerador y su consecuente para el denominador, el cociente entre el primer antecedente y su consecuente es mayor que el cociente entre el último antecedente y su consecuente.

Así, el número 9 tiene un mayor cociente a 7, que 8 tiene a 7, por tanto $\frac{9}{7}$ es mayor que $\frac{8}{7}$.

De nuevo, $17 : 19$ es un cociente mayor que $13 : 15$, porque $\frac{17}{19} = \frac{17\times 15}{19\times 15} = \frac{255}{285}$ y $\frac{13}{15} = \frac{13\times 19}{15\times 19} = \frac{247}{285}$, por lo tanto es evidente que $\frac{255}{285}$ es mayor que $\frac{247}{285}$ ∴ $\frac{17}{19}$ es mayor que $\frac{13}{15}$, y, de acuerdo con lo que se ha mostrado anteriormente, 17 tiene que 19 en una proporción mayor que 13 tiene que 15.

De modo que los términos generales sobre los cuales existe una relación mayor, igual o menor son los siguientes:—

Si $\frac{A}{B}$ es mayor que $\frac{C}{D}$, A se dice que tiene a B en una proporción mayor que C tiene a D; si $\frac{A}{B}$ es igual a $\frac{C}{D}$, entonces A tiene a B en la misma proporción que C tiene a D; y si $\frac{A}{B}$ es menor que $\frac{C}{D}$, A se dice que tiene a B una proporción menor que C tiene a D.

El estudiante debe entender perfectamente esta proposición antes de seguir adelante, para comprender plenamente las siguientes proposiciones de este libro. Por lo tanto, recomendamos encarecidamente al alumno que comience de nuevo, y lea esto con humildad, y razonar cuidadosamente en cada paso, a medida que avanza, especialmente para evitar el sistema perjudicial de depender totalmente de la memoria.

Siguiendo estas instrucciones, encontrará que las partes que generalmente presentan dificultades considerables no presentarán dificultades en el procesamiento del estudio de este importante libro.

LIBRO V. PROPOSICIÓN IX. TEOREMA.

Las magnitudes que tienen la misma razón con la misma magnitud son iguales entre sí; y aquellos para los que la misma magnitud tiene la misma razón son iguales entre sí.

Sea ◆ : ■ :: ● : ■, entonces ◆ = ●.

En caso contrario, supongamos que ◆ > ●, entonces ◆ : ■ > ● : ■ (L. 5, pr. 8), lo que es absurdo pues contradice la hipótesis.

∴ ◆ $\not>$ ●.

De la misma manera se puede mostrar, que ● $\not>$ ◆, ∴ ◆ = ●.

De nuevo, sea ■ : ◆ :: ■ : ●, entonces ◆ = ●.

En el caso (invert.) ◆ : ■ :: ● : ■, por el primer caso, ◆ = ●.

∴ Las magnitudes que tienen la misma relación, etc.

Esto puede mostrarse de otra manera, como sigue:—

Sea $A : B = A : C$, entonces $B = C$, porque como la razón $\frac{A}{B}$ = la razón $\frac{A}{C}$, y el numerador de uno es igual al numerador del otro, por lo tanto los denominadores de estas fracciones son iguales, es decir $B = C$.

De nuevo, si $B : A = B = C$, como $\frac{B}{A} = \frac{C}{A}$, se debe tener $B = C$.

LIBRO V. PROPOSICIÓN X. TEOREMA.

De las magnitudes que guardan razón con una misma magnitud, la que guarda una razón mayor, es mayor. Y aquella con la que la misma magnitud guarda una razón mayor, es menor.

Sea ⬟ : ■ > ● : ■, entonces ⬟ > ●.

Porque si no, se tiene que:

⬟ = o < ●; entonces, ⬟ : ■ = ● : ■ (L. 5, pr. 7) o
⬟ : ■ < ● : ■ (L. 5, pr. 8) e (invert.),

lo que es absurdo según la hipótesis, ∴ ⬟ no es = o < ●, y ∴ ⬟ > ●.

De nuevo, sea ■ : ● > ■ : ⬟, entonces, ● < ⬟.
Porque si no, ● debe ser > o = ⬟, entonces

■ : ● < ■ : ⬟ (L. 5, pr. 8) e (invert.);
o ■ : ● = ■ : ⬟ (L. 5, pr. 7);

lo cual es absurdo (hip.) ∴ ● no es > o = ⬟, y ∴ ● < ⬟.

∴ De las magnitudes que etc.

LIBRO V. PROPOSICIÓN XI. TEOREMA.

RAZONES que son iguales a la misma razón, son iguales entre sí.

Sea ◆ : ■ = ● : ⬟ y ● : ⬟ = ▲ : •, entonces ◆ : ■ = ▲ : •.

Porque si M ◆ $>, =,$ o $< m$ ■, entonces M ● $>, =,$ o $< m$ ⬟, por lo que M ▲ $>, =,$ o $< m$ • $\therefore$ (L. 5, def. 5) ◆ : ■ = ▲ : •.

$\therefore$ *Razones que son iguales a* etc.

LIBRO V. PROPOSICIÓN XII. TEOREMA.

SI un número cualquiera de magnitudes son proporcionales, como uno de los antecedentes es a uno de los consecuentes, así todos los antecedentes tomados en conjunto es a todos los consecuentes.

Sea ■ : ● = ⊔ : ○ = ◆ : ⬟ = • : ▾ = ▴ : ▬; entonces:

■ : ● = ■ + ⊔ + ◆ + • + ▴ : ● + ○ + ⬟ + ▾ + ▬.

En efecto, porque si M ■ > *m* ●, entonces M ⊔ > *m* ○, M ◆ > *m* ⬟ M • > *m* ▾, y además M ▴ > *m* ▬ (L. 5, def. 5).

Por lo tanto, si M ■ > *m* ●, entonces:

M ■ + M ⊔ + M ◆ + M • + M ▴ + M ▬, o
M (■ + ⊔ + ◆ + • + ▴ + ▬) es mayor que
m ● + *m* ○ + *m* ⬟ + *m* ▾ + *m* ▬, o
m (● + ○ + ⬟ + ▾ + ▬).

De la misma manera se puede demostrar, si M veces uno de los antecedents es igual o menor que *m* veces uno de los consecuentes, M veces todos los antecedentes juntos, será igual o menor que *m* veces todas los consecuentes tomadas en conjunto. Por lo tanto, por la quinta definición, uno de los antecedents es a su consecuente, como todos los antecedentes tomados juntos es a todos los consecuentes tomados juntos.

∴ *Si cualquier número de magnitudes,* etc.

LIBRO V. PROPOSICIÓN XIII. TEOREMA.

S*I la primera tiene con la segunda la misma razón que la tercera tiene con la cuarta, pero la tercera a la cuarta una razón mayor que la quinta a la quinta; la primera a la segunda tendrá también una razón mayor que la quinta a la sexta.*

Si $:$ $=$ $:$, pero $:$ $>$ $:$, entonces $:$ $>$ $:$.

En efecto, como $:$ $>$ $:$ existen múltiplos (M$'$ y m) de y , y de y , tales que M$'$ $> m'$, pero M$'$ $\ngtr$ m' , por la séptima definición.

Consideremos estos mismos múltiplos en y $\therefore$ (L. 5, def. 5):

si M$'$ $>$, $=$, o $< m'$; entonces M$'$ $>$, $=$, o $< m'$,
pero M$'$ $> m'$ (construcción); $\therefore$ M $> m'$,
pero M$'$ $\ngtr$ m' (construcción); y por lo tanto por la séptima definición:

$$: \; > \; : .$$

$\therefore$ *Si la primera tiene con la segunda,* etc.

LIBRO V. PROPOSICIÓN XIV. TEOREMA.

S*I el primero tiene la misma relación con el segundo que el tercero tiene con el cuarto; entonces, si el primero es mayor que el tercero, el segundo será mayor que el cuarto; (y si ... es igual, ... igual; y si ... es menor, ... menor).*

Sea : :: : , y supongamos primero > , entonces > .

Dado que : > : (B.5. pr. 8), e hipótesis : = : ;

$\therefore$: > : (L. 5, pr. 13),
$\therefore$ < (L. 5, pr. 10.), o sea > .

En segundo lugar, supongamos que = , entonces = .
Como : = : (L. 5, pr. 7), y : = : (hip.);
$\therefore$: = : (L. 5, pr. 11), y $\therefore$ = (L. 5, pr. 9).

En tercer lugar, si < , entonces < .
En efecto, porque > y : = : ; $\therefore$ > por el primer caso, o sea < .

$\therefore$ *Si el primero tiene la misma proporción,* etc.

LIBRO V. PROPOSICIÓN XV. TEOREMA.

L*AS magnitudes tienen la misma razón entre sí que sus equimúltiplos.*

Sean ● y ■ dos magnitudes; entonces, ● : ■ :: M′ ● : M′ ■.

Tenemos que ● : ■ = ● : ■
= ● : ■
= ● : ■

∴ ● : ■ :: 4 ● : 4 ■. (L. 5, pr. 12).

Y como el mismo razonamiento es generalmente aplicable, tenemos

● : ■ :: M′ ● : M′ ■.

∴ *Las magnitudes tienen la misma relación,* etc.

DEFINICIÓN XIII.

El término técnico permutando, o alternando, por permutación o alternativamente, se utiliza cuando hay cuatro proporciones, y se infiere que el primero tiene la misma relación con el tercero que el segundo con el cuarto; o que la primera es a la tercera como la segunda es a la cuarta; como se muestra en la siguiente proposición:—

Sea :  ::  : , “permutando” o “alternando” las magnitudes se infiere que :  ::  : .

Puede ser necesario señalar aquí que las magnitudes , , , , debe ser homogénea, es decir, de la misma naturaleza o tipo de similitud; por lo tanto, debemos, en tales casos, comparar líneas con líneas, superficies con superficies, sólidos con sólidos, &c. Por lo tanto, el estudiante percibirá fácilmente que una línea y una superficie, una superficie y un sólido, u otras magnitudes heterogéneas, nunca puede estar en la relación de antecedente y consecuente.

LIBRO V. PROPOSICIÓN XVI. TEOREMA.

S*I cuatro magnitudes del mismo tipo son proporcionales, también son proporcionales cuando se toman alternativamente.*

Sea : :: : , entonces : :: : .

Dado que M : M :: : (L. 5, pr. 15), y M : M :: : (hip.) y (L. 5, pr. 11); además *m* : *m* :: : (L. 5, pr. 15);

$\therefore$ M : M :: *m* : *m* (L. 5, pr. 14), y

$\therefore$ si M $>$, $=$, o $<$ *m* , entonces

M $>$, $=$ o $<$ *m* (L. 5, pr. 14);

por lo tanto, por la quinta definición,

: :: : .

$\therefore$ *Si cuatro magnitudes del mismo tipo,* etc.

DEFINICIÓN XVI.

Dividendo, por división, cuando hay cuatro proporciones, y se infiere que, el exceso del primero sobre el segundo es para el segundo, como el exceso del tercero sobre el cuarto, es al cuarto.

Sea A : B :: C : D;

por "dividendo" se infiere

A menos B : B :: C menos D : D.

De acuerdo con lo anterior, A se supone que es mayor que B, y C mayor que D; de no ser así, pero para tener B mayor que A, y D mayor que C, B y D se puede hacer que se mantengan como antecedentes, y A y C como consecuencia, por "invertion"

B: A :: D: C;

entonces, por "dividendo," inferimos

B menos A: A :: D menos C : C.

LIBRO V. PROPOSICIÓN XVII. TEOREMA.

SI magnitudes tomadas conjuntamente son proporcionales, son también proporcionales cuando se tomen por separado: es decir, si dos magnitudes juntas tienen a una de ellas la misma proporción que otras dos tienen para una de estas, el restante de los primeros tiene al otro la misma proporción que el restante de los dos últimos tiene al otro de estos.

Sea ${\color{red}\blacktriangledown} + \cup : \cup :: {\color{orange}\blacksquare} + {\color{blue}\blacklozenge} : {\color{blue}\blacklozenge}$, entonces ${\color{red}\blacktriangledown} : \cup :: {\color{orange}\blacksquare} : {\color{blue}\blacklozenge}$.

Tomar $\mathrm{M}\,{\color{red}\blacktriangledown} > m\,\cup$, a cada uno de ellos adicionar $\mathrm{M}\,\cup$, entonces tenemos:

$$\mathrm{M}\,{\color{red}\blacktriangledown} + \mathrm{M}\,\cup > m\,\cup + \mathrm{M}\,\cup,$$
$$\text{o } \mathrm{M}({\color{red}\blacktriangledown} + \cup) > (m + \mathrm{M})\,\cup:$$

pero porque: ${\color{red}\blacktriangledown} + \cup : \cup :: {\color{orange}\blacksquare} + {\color{blue}\blacklozenge} : {\color{blue}\blacklozenge}$ (hip.),

y $\mathrm{M}({\color{red}\blacktriangledown} + \cup) > (m + \mathrm{M})\,\cup$;

$\therefore \mathrm{M}\,({\color{orange}\blacksquare} + {\color{blue}\blacklozenge}) > (m + \mathrm{M})\,{\color{blue}\blacklozenge}$ (L. 5, def. 5);

$\therefore \mathrm{M}\,{\color{orange}\blacksquare} + \mathrm{M}\,{\color{blue}\blacklozenge} > m\,{\color{blue}\blacklozenge} + \mathrm{M}\,{\color{blue}\blacklozenge}$;

$\therefore \mathrm{M}\,{\color{orange}\blacksquare} > m\,{\color{blue}\blacklozenge}$,

tomando de $\mathrm{M}\,{\color{blue}\blacklozenge}$ a ambos lados, es decir cuando $\mathrm{M}\,{\color{red}\blacktriangledown} > m\,\cup$, entonces $\mathrm{M}\,{\color{orange}\blacksquare} > m\,{\color{blue}\blacklozenge}$.

De la misma manera, se puede probar que, si $\mathrm{M}\,{\color{red}\blacktriangledown} =$ o $< m\,\cup$, entonces $\mathrm{M}\,{\color{orange}\blacksquare} =$ o $< m\,{\color{blue}\blacklozenge}$; y $\therefore {\color{red}\blacktriangledown} : \cup :: {\color{orange}\blacksquare} : {\color{blue}\blacklozenge}$ (L. 5, def. 5).

$\therefore$ *Si magnitudes tomadas conjuntamente,* etc.

DEFINICIÓN XV.

El término "componendo" por composición, se utiliza cuando hay cuatro proporciones; y se infiere que el primero junto con el segundo es el segundo como el tercero junto con el cuarto es el cuarto.

Sea $$A : B :: C : D;$$
entonces, por el término "componendo" se infiere que:

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} : \mathrm{B} :: \mathrm{C} + \mathrm{D} : \mathrm{D}.$$

Por "inversión" B y D puede convertirse en la primera y tercera, A y C el segundo y el cuarto, como

$$B : A :: D : C,$$

entonces, por "componendo" inferimos que:

$$\mathrm{B} + \mathrm{A} : \mathrm{A} :: \mathrm{D} + \mathrm{C} : \mathrm{C}.$$

LIBRO V. PROPOSICIÓN XVIII. TEOREMA.

SI magnitudes, tomados por separado, son proporcionales, también son proporcionales cuando se tomen conjuntamente: es decir, si el primero es al segundo como el tercero es al cuarto, el primero y el segundo juntos serán al segundo como el tercero y el cuarto juntos son al cuarto.

Sea ⬟ : ⬠ :: ■ : ◆, entonces ⬟ + ⬠ : ⬠ :: ■ + ◆ : ◆;

si no, sea ⬟ + ⬠ : ⬠ :: ■ + ● : ●, suponiendo ● no = ◆;

∴ ⬟ : ⬠ :: ■ : ● (L. 5, pr. 17);

pero ⬟ : ⬠ :: : ◆ (hip.); ∴ ■ : ● :: ■ : ◆ (L. 5, pr. 11);

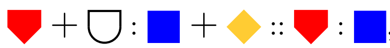
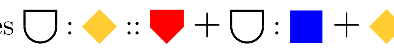
∴ ● = ◆ (L. 5, pr. 9). lo que es contrario a la suposición;

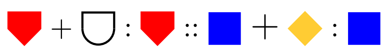
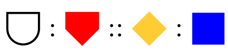
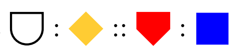
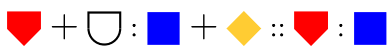
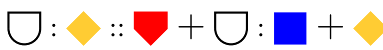
∴ ● no es unequal a ◆; es decir ● = ◆; ∴ ⬟ + ⬠ : ⬠ :: ■ + ◆ : ◆.

∴ *Si las magnitudes, tomados por separado,* etc.

LIBRO V. PROPOSICIÓN XIX. TEOREMA.

SI una magnitud entera es a un todo, como una magnitud quitada de la primera, es a una magnitud quitada de la otra; el resto será es al resto, como el todo es al todo.

Sea , entonces .

En efecto,  (alter),
$\therefore$  (dividendo), además  (alter.),
pero  (hip.);
por lo tanto  (L. 5, pr. 11).

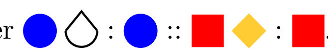
$\therefore$. *Si una magnitud entera es a un todo*, etc.

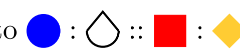
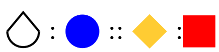
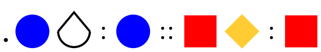
DEFINICIÓN XVII.

El término "convertendo," por conversión, es utilizado por geómetras, cuando hay cuatro proporciones, y se infiere que, el primero es a su exceso sobre el segundo como el tercero es a su exceso sobre el cuarto. Ver la siguiente proposición:—

LIBRO V. PROPOSICIÓN E. TEOREMA.

SI cuatro magnitudes son proporcionales, también son proporcionales por conversión: es decir, la primera es a su exceso sobre la segunda, como la tercera a su exceso sobre la cuarta.

Si , debemos tener .

En efecto, ; por lo tanto  (divid.), ∴  (inverso.), ∴  (compon.).

∴ *Si cuatro magnitudes,* etc.

DEFINICIÓN XVIII.

"Ex æquali" (fc. distantiâ), o ex æquo, igualdad a distancia: cuando hay cualquier cantidad de magnitudes más de dos magnitudes, en dos grupos de rangos, de manera que sean proporcionales cuando se toman dos y dos de cada grupo, y se infiere que el primero es al último del primer grupo de magnitudes, como el primero es al último del segundo grupo: "tenemos los siguientes casos, que surgen del orden diferente en el que se toman las magnitudes, dos y dos."

DEFINICIÓN XIX.

"Ex æquali," de igualdad. Este término se utiliza ampliamente por sí solo, cuando la primera magnitud es la segunda del primer grupo, como la primero es la segunda del segundo grupo; y como la segunda es la tercera del primer grupo, así es la segunda a la tercera del segundo grupo; y así sucesivamente en orden: y la inferencia es la mencionada en la definición anterior; por lo que esto se llama proporción ordenada. Se demuestra en el libro 5, pr. 22.

Así, si hay dos grupos de magnitudes,

$$\begin{gathered}\text{A, B, C, D, E, F, el primer grupo,}\\ \text{y L, M, N, O, P, Q, el segundo grupo,}\end{gathered}$$

de tal forma que

$$\begin{gathered}\mathrm{A} : \mathrm{B} :: \mathrm{L} : \mathrm{M}, \quad \mathrm{B} : \mathrm{C} :: \mathrm{M}: \mathrm{N}, \quad \mathrm{C} : \mathrm{D} :: \mathrm{N} : \mathrm{O},\\ \mathrm{D} : \mathrm{E} :: \mathrm{O} : \mathrm{P}, \quad \mathrm{E} : \mathrm{F} :: \mathrm{P} : \mathrm{Q};\end{gathered}$$

inferimos por el término "ex æquali" que

$$\mathrm{A} : \mathrm{F} :: \mathrm{L} : \mathrm{Q}.$$

DEFINICIÓN XX.

"Ex æquali en proportione perturbatâ feu inordinatâ," igualdad en una proporción perturbada o desordenada. Este término se usa cuando la primera magnitud es a la segunda del primer grupo como la penúltima es a la última del segundo grupo; y como la segunda es la tercera del primer grupo, así es la antepenúltima a la penúltima del segundo grupo; y como la tercera es a la cuarta del primer grupo, así es la tercera antes de la última a la antepenúltima del segundo grupo; y así sucesivamente en un orden cruzado; y la inferencia está en la definición XVII. Se demuestra en L. 5, pr. 23.

Así, si hay dos grupos de magnitudes,

A, B, C, D, E, F, el primer grupo,
y L, M, N, O, P, Q, el segundo grupo tal que:

$$A : B :: P : Q, \quad B : C :: O : P, \quad C : D :: N : O,$$
$$D : E :: M : N, \quad E :: F :: L, M;$$

el término “ex æquali en proportione perturbatâ feu inordinatâ” infiere que

$$A : F :: L : Q.$$

LIBRO V. PROPOSICIÓN XX. TEOREMA.

SI hay tres magnitudes, y otras tres, las cuales tomadas de dos en dos, tienen la misma razón; entonces, si la primera es mayor que la tercera, la cuarta será mayor que la quinto; y si es igual, igual; y si menor, menor.

Sea , , , las tres primeras magnitudes, y , , , las otras tres, tales que : :: : , y : :: : , entonces:

si $>$, $=$, o $<$, entonces $>$, $=$, o $<$.

En efecto, a partir de la hipótesis, por alternando, tenemos:

: :: : , y : :: : ;

$\therefore$: :: : (L. 5, pr. 11);

$\therefore$ si $>$, $=$, o $<$, entonces:

$>$, $=$, o $<$ (L. 5, pr. 14).

$\therefore$ *Si hay tres magnitudes,* etc.

LIBRO V. PROPOSICIÓN XXI. TEOREMA.

SI hay tres magnitudes, y otras tres que tienen la misma proporción, tomadas de dos en dos, pero en un orden cruzado; entonces si la primera magnitud es mayor que la tercera, la cuarta será mayor que la quinta; y si es igual, igual; y si menos, menor.

Sean , , las tres primeras magnitudes y , , las otras tres, tales que:

: :: : , y : :: : ,

si > , = , o < , entonces > , = , < .

Primeramente sea > : entonces, como es de cualquier magnitud:

: > : (L. 5, pr. 8); pero : :: : (hip.);

∴ : > : (L. 5, pr. 13); y como : :: : (hip.);

∴ : :: : (inv.), y se demostró que : > : ,

∴ : > : (L. 5, pr. 13); ∴ < , es decir > .

En segundo lugar, sea = ; entonces debemos tener = .

Ciertamente:

= , : = : (L. 5, pr. 7);

pero : = : (hip.), y : = : (hip. e inv.),

∴ : = : (L. 5, pr. 11), ∴ = (L. 5, pr. 9).

Ahora, sea < entonces se tiene < ; desde que > , y se ha demostrado que : = : , y : = : ;

∴ por el primer caso > , es decir, < .

∴ *Si hay tres,* etc.

LIBRO V. PROPOSICIÓN XXII. TEOREMA.

SI tenemos dos grupos de magnitudes, que tomadas dos y dos en orden, tienen la misma razón; la primera tiene a la última del primer grupo la misma razón que la primera tiene a la última del segundo grupo.

N.B.— Esto es usualmente citado por las palabras "ex æquali," o "ex æquo."

Primeramente, sea el primer grupo de magnitudes , , , y el segundo , , , tales que : :: : , y : :: : ; entonces debemos tener : :: : .

Efectivamente, estas magnitudes así como cualquier equimúltiplo de los antecedentes y consecuentes de los cocientes, deben ser los siguientes:—

, , , , , ,   y

M , m , N , M , m , N ,

porque : :: : ;

$\therefore$ M : m :: M : m (L. 5, pr. 4).

Por la misma razón m : N :: m : N ; y porque hay tres magnitudes, M , m , N ; y otras tres, M , m , N , las cuales tomados de dos en dos, tienen la misma razón:

$\therefore$ si M $>$, $=$, o $<$ N ,

entonces M $>$, $=$; o $<$ N , por (L. 5, pr. 20); y

$\therefore$: :: : (def. 5).

Ahora, sean cuatro magnitudes, , , , , y otras cuatro, , , , , las cuales tomados de dos en dos, tienen la misma proporción, es decir:

: :: : ,

: :: : ,

y : :: : ,

entonces : :: : ;

porque , , , son tres magnitudes, y , , , otras tres, las cuales tomados de dos en dos, tienen la misma razón; por lo tanto, por el caso anterior,  : ::  : , pero :  :: : ; por lo tanto, de nuevo, por el primer caso,  :  ::  : ; y así sucesivamente, cualquiera que sea el número de magnitudes.

∴ *Si hay algún número,* etc.

LIBRO V. PROPOSICIÓN XXIII. TEOREMA.

SI tenemos dos grupos de magnitudes, que tomadas dos y dos en orden cruzado, tienen la misma razón; la primera tiene a la última del primer grupo la misma razón que la primera tiene a la última del segundo grupo.

N.B.— Esto es usualmente citado por las palabras "ex æquali en proportione perturbatâ;" or "ex æquo perturbato."

Primeramente, sean tres magnitudes, ⛊, ⊔, ■, y otras tres, ◆; △, ●, las cuales, tomados de dos en dos en un orden cruzado, tienen la misma proporción; es decir, ⛊ : ⊔ :: △ : ●, y ⊔ : ■ :: ◆ : △, entonces deberá ⛊ : ■ :: ◆ : ●.

Sean estas magnitudes y sus respectivos equimúltiplos ordenados de la siguiente manera:—

⛊, ⊔, ■, ◆, △, ●,

M ⛊, M ⊔, m ■, M ◆, m △, m ●, entonces

⛊ : ⊔ :: M ⛊ : M ⊔ (L. 5, pr. 15); y por la misma razón

△ : ● :: m △ : m ●;

pero ⛊ : ⊔ :: △ : ● (hip.), ∴ M ⛊ : M ⊔ :: △ : ● (L. 5, pr. 11); y porque ⊔ : ■ :: ◆ : △ (hip.):

∴ M ⊔ : m ■ :: M ◆ : m △ (L. 5, pr. 4);

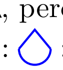
entonces, las tres magnitudes, M ⛊, M ⊔, m ■, y las otras tres magnitudes, M ◆, m △, m ●, las cuales tomados de dos en dos en un orden cruzado, tienen la misma proporción; por lo tanto, si M ⛊ $>$, $=$, o $<$ m ■, entonces

M ◆ $>=$, o $<$ m ● (L. 5, pr. 21), y

∴ ⛊ : ■ :: ◆ : ● (L. 5, def. 5).

Ahora, sean cuatro magnitudes, ⛊, ⊔, ■, ◆, y otras cuatro magnitudes, △, ●, ▬, ▲, las cuales cuando se toman dos y dos en un orden cruzado, tienen la misma proporción; a saber:

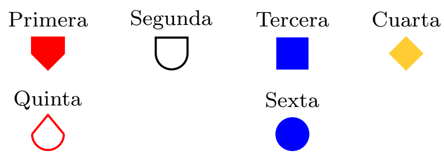
⛊ : ⊔ :: ▬ : ▲, ⊔ : ■ :: ● : ▬, y ■ : ◆ :: △ : ●, entonces tenemos : ::  : .

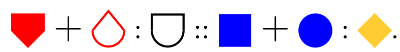
Claramente porque , ,  son tres magnitudes, y , ,  otras tres, las cuales tomadas de dos en dos en un orden cruzado, tienen la misma proporción, por lo tanto, por el primer caso, :  ::  : , pero  : ::  : , por lo tanto, de nuevo, por el primer caso, : ::  : ; y así sucesivamente, cualquiera que sea el número de tales magnitudes.

∴ *Si hay algún número,* etc.

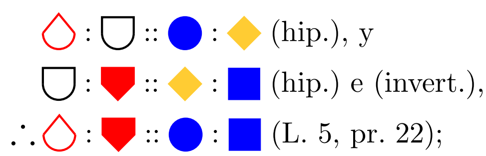
LIBRO V. PROPOSICIÓN XXIV. TEOREMA.

SI la primera tiene con la segunda la misma relación que la tercera tiene con la cuarta, y la quinta a la segunda lo mismo que la sexta tiene con la cuarta, la primera y la quinta juntas tienen la misma relación que la tercera y la sexta juntas con la cuarta.

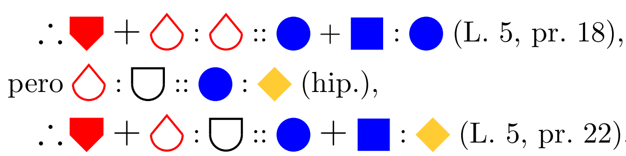




En efecto,



y, porque estas magnitudes son proporcionales, ellas son proporcionales cuando se toman conjuntamente:



∴ *Si el primero,* etc.

LIBRO V. PROPOSICIÓN XXV. TEOREMA.

SI cuatro magnitudes del mismo tipo son proporcionales, la mayor y la menor de ellas juntas son mayores que las otras dos juntas.

Sean cuatro magnitudes proporcionales ⬟ + ⬠, ■ + ◆, ⬠, y ◆, del mismo tipo, es decir:

$$⬟ + ⬠ : ■ + ◆ :: ⬠ : ◆,$$

y sea ⬟ + ⬠ la mayor de las cuatro, y en consecuencia por pr. A y 14 del Libro V, ◆ es la menor; entonces ⬟ + ⬠ + ◆ > ■ + ◆ + ⬠; porque ⬟ + ⬠ : ■ + ◆ :: ⬠ : ◆,

∴ ⬟ : ■ :: ⬟ + ⬠ : ■ + ◆ (L. 5, pr. 19),
pero ⬟ + ⬠ > ■ + ◆ (hip.),
∴ ⬟ > ■ (L. 5, pr. A);

a cada uno de estos se agrega ⬠ + ◆,

$$∴ ⬟ + ⬠ + ◆ > ■ + ⬠ + ◆.$$

∴ *Si cuatro magnitudes,* etc.

DEFINICIÓN X.

Cuando tres magnitudes son proporcionales, se dice que la primera tiene para la tercera la relación duplicada de lo que tiene con la segunda.

Si A, B, C, son proporciones continuas, es decir, $A : B :: B : C, A$ se dice que tiene para C la proporción $A : B$ duplicada, o sea:

$$\frac{A}{C} = \text{el cuadrado de } \frac{A}{B}.$$

Esta propiedad se verá más fácilmente de las cantidades ar^2, ar, a, pues

$ar^2 : ar :: ar : a$; y $\dfrac{ar^2}{a} = r^2 =$ el cuadrado de $\dfrac{ar^2}{ar} = r$, o de
a, ar, ar^2; ya que $\dfrac{a}{ar^2} = \dfrac{1}{r^2} =$ el cuadrado de $\dfrac{a}{ar} = \dfrac{1}{r}$.

DEFINICIÓN XI.

Cuando cuatro magnitudes son proporciones continuas, se dice que la primera tiene con la cuarta la relación triplicada de lo que tiene con la segunda; y así sucesivamente, cuadruplicada, etc. aumentando la denominación una unidad, en cualquier número de proporciones.

Por ejemplo, sea A, B, C, D, son cuatro proporciones continuas, es decir, $A : B :: B : C :: C : D$; A se dice que tiene para D, la relación triplicada de A a B; o bien $\dfrac{A}{D} =$ al cubo de $\dfrac{A}{B}$.

Esta definición se entenderá mejor, y aplicado a un mayor número de magnitudes que cuatro que son proporciones continuas, como sigue:—

Sean ar^3, ar^2, ar^2, ar, ar, a cuatro magnitudes en proporción continua, es decir,

$$ar^3, ar^2 :: ar^2 : ar :: ar : a,$$

entonces $\dfrac{ar^3}{a} = r^3 =$ al cubo de $\dfrac{ar^3}{ar^2} = r$.

O, sea ar^5, ar^4, ar^3, ar^2, ar, a, magnitudes fijas en proporción continua, es decir:

$$ar^5 : ar^4 :: ar^4{\cdot}ar^3 :: ar^3 : ar^2 :: ar^2 : ar :: ar : a,$$

entonces la proporción $\dfrac{ar^5}{a} = r^5 =$ la quinta potencia de $\dfrac{ar^5}{a} = r$.

O, sean a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, cinco magnitudes en proporción continua; entonces $\dfrac{a}{ar^4} = \dfrac{1}{r^4} =$ a la cuarta potencia de $\dfrac{a}{ar} = \dfrac{1}{r}$.

DEFINICIÓN A.

Conociendo una relación compuesta:—

Cuando hay un número de magnitudes del mismo tipo, se dice que la primera tiene con la última la relación compuesta de la relación que la primera tiene con la segundo, y de la relación entre la segunda y la tercera, y de la relación que la tercera tiene con la cuarta; y así sucesivamente, hasta la última magnitud.

	A	B	C	D	
E	F	G	H	K	L
		M	N		

Por ejemplo, si A, B, C, D, son cuatro magnitudes del mismo tipo, la primera A se dice que tiene con la última D el cociente compuesto de la proporción de A a B, y de la proporción de B a C, y de la proporción de C a D; o el cociente de A a D se dice que está compuesto de las proporciones de A a B, B a C, y C a D.

Y si la razón de A a B es la misma que de E a F, y que de B a C es la misma razón de G a H, y que de C a D es la misma de K a L ; entonces por esta definición, A se dice que tiene con D el cociente compuesto de las proporciones que son las mismas que las proporciones de E a F, G a H, y K a L. Y lo mismo se entiende cuando se expresa más brevemente diciendo, A tiene con D el cociente compuesto de las proporciones de E a F, G a H, y K a L.

De igual manera, suponiendo los mismo; si M tiene con N la misma proporción que A a D, entonces por brevedad, M se dice que tiene con N el cociente compuesto de las proporciones de E a F, G a H, y K a L.

Esta definición puede entenderse mejor a partir de una ilustración aritmética o algebraica; pues en realidad, un cociente compuesto de varios otros cocientes, no es más que una razón que tiene como antecedente el producto continuado de todos los antecedentes de las razones compuestas, y por su consecuente el producto continuado de todos los cocientes consecuentes compuestos.

Así, el cociente compuesto de las proporciones de

$$2 : 3, \ 4 : 7, \ 6 : 11, \ 2 : 5,$$

es el cociente de

$$2 \times 4 \times 6 \times 2 : 3 \times 7 \times 11 \times 5,$$

o el cociente de 96 : 1155, o 32 : 385.

Y de las magnitudes A, B, C, D, E, F, de la misma clase, $A : F$ es el cociente compuesto de los cocientes de

$A : B$, $B : C$, $C : D$, $D : E$, $E : F$;

o bien $A \times B \times C \times D \times E : B \times C \times D \times E \times F$,

o $\dfrac{A \times B \times C \times D \times E}{B \times C \times D \times E \times F} = \dfrac{A}{F}$,

o el cociente de $A : F$.

LIBRO V. PROPOSICIÓN F. TEOREMA.

COCIENTES que se componen de las mismas proporciones son iguales entre sí.

$$\begin{aligned} \text{Sea } A : B &:: F : G, \\ B : C &:: G : H, \\ C : D &:: H : K, \\ \text{y } D : E &:: K : L. \end{aligned}$$

A	B	C	D	E
F	G	H	K	L

Entonces el cociente que se compone de las proporciones

$$A : B, B : C, C : D, D : E,$$

o el cociente de $A : E$,

es el mismo que el cociente compuesto de los cocientes de

$$F : G, G : H, H : K, K : L,$$

o el cociente de $F : L$.

Como

$$\frac{A}{B} = \frac{F}{G}, \ \frac{B}{C} = \frac{G}{H}, \ \frac{C}{D} = \frac{H}{K}, \text{ y } \frac{D}{E} = \frac{K}{L};$$
$$\therefore \frac{A \times B \times C \times D}{B \times C \times D \times E} = \frac{F \times G \times H \times K}{G \times H \times K \times L}, \text{ y}$$
$$\therefore \frac{A}{E} = \frac{F}{L},$$

o el cociente de $A : E$ es el mismo que el cociente de $F : L$.

Lo mismo puede demostrarse con cualquier número de relaciones que se dan en estas circunstancias.
Ahora, sea:

$$\begin{aligned} A : B &:: K : L, \\ B : C &:: H : K, \\ C : C &:: G : H, \\ D : E &:: F : G, \end{aligned}$$

entonces el cociente que se compone de las proporciones $A : B, B : C, C : D, D : E$, o el cociente de $A : E$, es el mismo que el cociente compuesto de los cocientes de $K : L, H; K, G : H, F : G$, o el cociente de $F : L$.

Dado que:

$$\frac{A}{B} = \frac{K}{L},\ \frac{B}{C} = \frac{H}{K},\ \frac{C}{D} = \frac{G}{H},\ \text{y}\ \frac{D}{E} = \frac{F}{G};$$

$$\therefore\ \frac{A \times B \times C \times D}{B \times C \times D \times E} = \frac{K \times H \times G \times F}{L \times K \times H \times G},\ \text{y}$$

$$\therefore\ \frac{A}{E} = \frac{F}{L},$$

o el cociente de $A : E$ es el mismo que el cociente de $F : L$.

$\therefore$ *Cocientes que se componen,* etc.

LIBRO V. PROPOSICIÓN G. TEOREMA.

SI varios cocientes son iguales a varios cocientes, cada uno a cada uno, el cociente que está compuesto de cocientes iguales a los primeros cocientes, cada uno a cada uno, es igual al cociente compuesto de cocientes iguales los cuales son iguales a los otros cocientes, cada uno a cada uno.

Si

$$\boxed{\begin{array}{cccccccccccccc} A & B & C & D & E & F & G & H & & P & Q & R & S & T \\ a & b & c & d & e & f & g & h & & V & W & X & Y & Z \end{array}}$$

$$\begin{array}{r|r|r} A : B :: a : b & \text{y } A : B :: P : Q & \text{y } a : b :: V : W \\ C : D :: c : d & C : D :: Q : R & c : d :: W : X \\ E : F :: e : f & E : F :: R : S & e : f :: X : Y \\ G : H :: g : h & G : H :: S : T & g : h :: Y : Z \end{array}$$

entonces $P : T = V : Z$.

En efecto:

$$\frac{P}{Q} = \frac{A}{B} = \frac{a}{b} = \frac{Y}{W}, \quad \frac{Q}{R} = \frac{C}{D} = \frac{c}{d} = \frac{W}{X},$$

$$\frac{R}{S} = \frac{E}{F} = \frac{e}{f} = \frac{X}{Y}, \quad \frac{S}{T} = \frac{G}{H} = \frac{g}{h} = \frac{Y}{Z},$$

$$\therefore \frac{P \times Q \times R \times S}{Q \times R \times S \times T} = \frac{V \times W \times X \times Y}{W \times X \times Y \times Z},$$

$$\therefore \frac{P}{T} = \frac{V}{Z}, \text{ o } P : T = V : Z.$$

$\therefore$ *Si varios cocientes*, etc.

LIBRO V. PROPOSICIÓN H. TEOREMA.

SI una relación que se compone de varias proporciones son iguales a una proporción que se compone de otras varias proporciones; y si una de las primeras relaciones, o la relación que se compone de varias de ellas, es igual a una de las últimas relaciones, o a la relación compuesta de varias de ellas; entonces la relación restante de la primera, o si hay más de una, la relación compuesta de las relaciones restantes, será la misma que las relaciones restantes, será la misma que la relación restante de la última, o, si existe ser más de una, a la relación compuesta de estas relaciones restantes.

$$\boxed{\begin{array}{c} A\quad B\quad C\quad D\quad E\quad F\quad G\quad H \\[1em] P\quad Q\quad R\quad S\quad T\quad X \end{array}}$$

Sean $A:B$, $B:C$, $C:D$, $D:E$, $E:F$, $F:G$, $G:H$, los primeros cocientes, y $P:Q$, $Q:R$, $R:S$, $S:T$, $T:X$, los otros cocientes;

además, sea $A:H$, que se compone de los primeros cocientes, igual al cociente de $P:X$, que es el cociente compuesto de los otros cocientes;

y, sea el cociente de $A:E$, que se compone de los cocientes de $A:B$, $B:C$, $C:D$, $D:E$, igual al cociente de $P:R$, se compone de los cocientes $P:Q$, $Q:R$,

entonces el cociente que se compone de los primeros cocientes restantes, es decir, el cociente compuesto de las proporciones $E:F$, $F:G$, $G:H$, o sea el cociente de $E:H$, es igual a la relación de $R:X$, que se compone de los cocientes de $R:X$, $S:T$, $T:X$, los cocientes restantes.

Dado que: $$\frac{A\times B\times C\times D\times E\times F\times G}{B\times C\times D\times E\times F\times G\times H}=\frac{P\times Q\times R\times S\times T}{Q\times R\times S\times T\times X},$$

o $$\frac{A\times B\times C\times D}{B\times C\times D\times E}\times\frac{E\times F\times G}{F\times G\times H}=\frac{P\times Q}{Q\times R}\times\frac{R\times S\times T}{S\times T\times X},$$

y $$\frac{A\times B\times C\times D}{B\times C\times D\times E}\times\frac{P\times Q}{Q\times R},\quad\therefore\quad\frac{E\times F\times G}{F\times G\times H}=\frac{R\times S\times T}{S\times T\times X},$$

$$\therefore\quad\frac{E}{H}=\frac{R}{X},\quad\therefore\quad E:H=R:X.$$

$\therefore$ *Si una relación que,* etc.

LIBRO V. PROPOSICIÓN K. TEOREMA.

SI hay un número de razones, y otro número de cocientes, de tal manera que el cociente que se compone de cocientes, que son iguales a las primeras proporciones, cada uno a cada uno, es igual a la proporción compuesta de las proporciones, que son los mismos, cada uno a cada uno, a los últimos cocientes —y si uno de los primeros cocientes, o el cociente compuesto de proporciones, que son iguales a varias de las primeras proporciones, cada uno a cada uno, igual a una de los últimos cocientes, o al cociente que se compone de cocientes, que son los mismos, cada uno a cada uno, a varios de los últimos cocientes, entonces el cociente restante de los primeros; o, si hay más de uno, el cociente compuesto de las proporciones, que son las mismas, cada una a cada una, a los cocientes restantes de los primeros, es igual a la relación restante del último; o, si hay más de uno, a la proporción compuesta de las proporciones, que son los mismos, cada uno a cada uno, a estos cocientes restantes.

$$\boxed{\begin{array}{c}
\qquad\qquad h \quad k \quad m \quad n \quad s \\
A\ B,\ C\ D,\ E\ F,\ G\ H,\ K\ L,\ M\ N, \quad a\ b\ c\ d\ e\ f\ g \\
O\ P,\ Q\ R,\ S\ T,\ V\ W,\ X\ Y, \quad h\ k\ l\ m\ n\ p \\
\mathrm{a\ b\quad c\ d\qquad e\qquad f\ g}
\end{array}}$$

Sean:

$A : B$, $C : D$, $E : F$, $G : H$, $K : L$, $M : N$ los primeros cocientes, y

$O : P$, $Q : R$, $S : T$, $V : W$, $X : Y$ los otros cocientes;

y sea

$$A : B = a : b, \quad C : D = b : c, \quad E : F = c : d,$$

$$G : H = d : e, \quad K : L = e : r, \quad M : N = f : g,$$

entonces, por la definición de una relación compuesta, el cociente de $a : g$ se compone de los cocientes de $a : b$, $b : c$, $c : d$, $d : e$, $e : f$, $f : g$, que son los mismos que la relación de $A : B$, $C : D$, $E : F$, $G : H$, $K : L$, $M : N$, cada uno a cada uno.

Además: $$O : P = h : k, \ \ Q : R = k : l, \ S : T = l : m,$$
$$V : W = m : n, X : Y = n : p,$$

entonces la proporción de $h : p$ es el cociente compuesto de los coeficientes de $h : k$, $k : l$, $l : m$, $m : n$, $n : p$, los cuales son los mismos que los cocientes de $O : P$, $Q : R$, $S : T$, $V : W$, $X : Y$, cada uno a cada uno:

$\therefore$ por la hipótesis $a : g = h : p$.

Además, el cociente compuesto de los cocientes de $A : B$, $C : D$, los primeros cocientes (o los cocientes de $a : c$, para $A : B = a : b$ y $C : D = b : c$), es el mismo que el cociente de a : d, que se compone de los cocientes de a : b, b : c, c : d, que son los mismos que los cocientes de $O : P$, $Q : R$, $S : T$, tres de los otros cocientes.

Y sea la proporción de h : s, que se compone de los cocientes de h : k, k : m, m : n, n : s, que son los mismos que los primeros cocientes restantes, a saber, $E : F$, $G : H$, $K : L$, $M : N$; además, el cociente de e : g, que se compone de los cocientes e : f , f : g, que son los mismos, cada uno a cada uno, a los otros cocientes restantes, a saber, $V : W$, $X : Y$. Así, la proporción de h : s es la misma que la relación de e : g; o bien h : s = e : g.

Puesto que: $$\frac{A \times C \times E \times G \times K \times M}{B \times D \times F \times H \times L \times N} = \frac{a \times b \times c \times d \times e \times f}{b \times c \times d \times e \times f \times g},$$

y $$\frac{O \times Q \times S \times V \times X}{P \times R \times T \times W \times Y} = \frac{h \times k \times l \times m \times n}{k \times l \times m \times n \times p},$$

por la composición de las relaciones;

$$\therefore \frac{a \times b \times c \times d \times e \times f}{b \times c \times d \times e \times f \times g} = \frac{h \times k \times l \times m \times n}{k \times l \times m \times n \times p} \text{ (hip.)},$$

o $$\frac{a \times b}{b \times c} \times \frac{c \times d \times e \times f}{d \times e \times f \times g} = \frac{h \times k \times l}{k \times l \times m} \times \frac{m \times n}{n \times p},$$

pero $$\frac{a \times b}{b \times c} = \frac{A \times C}{B \times D} = \frac{O \times Q \times S}{P \times R \times T} = \frac{\mathrm{a \times b \times c}}{\mathrm{b \times c \times d}} = \frac{h \times k \times l}{k \times l \times m};$$

$$\therefore \frac{c \times d \times e \times f}{d \times e \times f \times g} = \frac{m \times n}{n \times p}$$

Y $$\frac{c \times d \times e \times f}{d \times e \times f \times g} = \frac{\mathrm{h \times k \times m \times n}}{\mathrm{k \times m \times n \times s}}, \text{ (hip.)}$$

y $$\frac{m \times n}{n \times p} = \frac{\mathrm{e \times f}}{\mathrm{f \times g}} \text{ (hip.)}$$

$$\therefore \frac{\mathrm{h \times k \times m \times n}}{\mathrm{k \times m \times n \times s}} = \frac{\mathrm{e\,f}}{\mathrm{f\,g}}, \quad \therefore \frac{\mathrm{h}}{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{g}}, \quad \therefore \mathrm{h : s = e : g}.$$

$\therefore$ *Si hay un número,* etc.

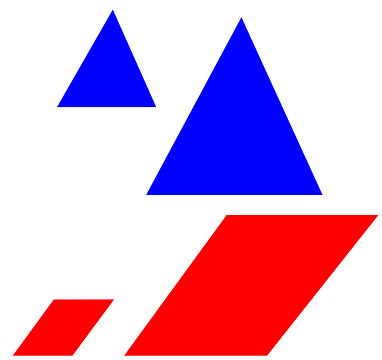
Las exposiciones algebraicas y aritméticas del Quinto Libro de Euclides se dan en *Doctrine of Proportion* de Byrne; publicado por Williams and Co. Londres. 1841.

LIBRO VI.

DEFINICIONES.

I.

SE dice que figuras rectilíneas son similares, cuando tienen sus varios ángulos iguales entre sí, y los lados sobre los ángulos iguales proporcionales.



II.

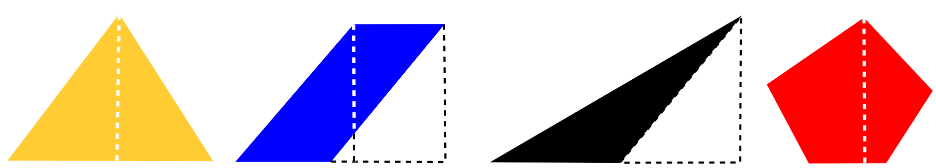
Se dice que dos lados de una figura son recíprocamente proporcionales a dos lados de otra figura cuando uno de los lados de la primera es a la segunda, como el lado restante de la la segunda es para el lado restante de la primera.

III.

Se dice que una línea recta se corta en relación extrema y media, cuando el todo es al segmento mayor, como que el segmento mayor es al menor.

IV.

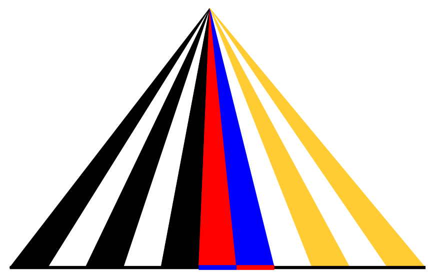
La altura de cualquier figura es el segmento trazada desde su vértice perpendicular a su base, o la base extendida.



LIBRO VI. PROPOSICIÓN I. TEOREMA.

TRIÁNGULOS y paralelogramos que tienen la misma altura, son entre sí como sus bases, es decir sus áreas son proporcionales a sus bases.

Sean los triángulos y que tienen un vértice común, y sus bases y en la misma línea recta.
Trazar en ambos sentidos, tomar sucesivamente sobre , segmentos iguales a él; y sobre producir segmentos sucesivamente iguales a él; y trazar líneas desde el vértice común a sus extremos.



Los triángulos así formados son todos en área iguales entre sí, ya que sus bases son iguales (L. 1, pr. 38): ∴ y su base son respectivamente equimúltiplos de y de la base .

De igual manera y su base son respectivamente equimúltiplos de y la base .

∴ si m o 6 veces $>=$ o $<n$ o 5 veces entonces m o veces $>=$ o $<n$ o 5 veces , m y n representan cada múltiplo tomado como en la quinta definición del Libro V. Aunque sólo hemos demostrado que esta propiedad existe cuando $m = 6$, y $n = 5$, es evidente que la propiedad es válida para cada valor múltiple que se le puede dar a m, y a n.

∴ : :: : (L. 5, def. 5).

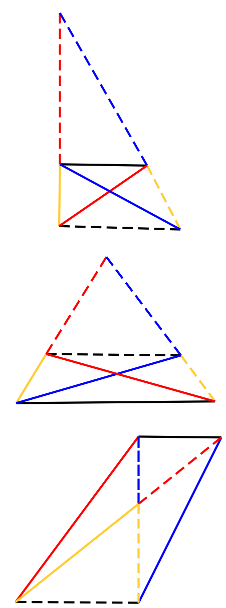
Los paralelogramos que tienen la misma altitud son el doble de los triángulos, en sus bases, y son proporcionales a ellos (Parte 1), y por lo tanto sus dobles, los paralelogramos, son como sus bases. (L. 5, pr. 15). Q. E. D.

LIBRO VI PROPOSICIÓN II. TEOREMA.

Si una línea recta es trazada paralelamente a un lado de un triángulo, corta los otros lados, o estos lados extendidos, en segmentos proporcionales.

Y si alguna línea recta divide los lados de un triángulo, o estos lados extendidos, en segmentos proporcionales, es paralela al lado restante .

PARTE I.



Sea ‖ , entonces hay que probar:

: :: : .

Trazar y , por lo tanto:

área = área (L. 1, pr. 37);

∴ : :: : (L. 5, pr. 7);

pero : :: : (L. 6, pr. 1),

∴ : :: : . (L. 5, pr. 11).

PARTE II.

Sea : :: : , se debe probar que ‖ .

Hagamos la misma construcción:

porque : :: :

y : :: : } (L. 6, pr. 1);

pero : :: : (hip.),

∴ : :: : (L. 5, pr. 11.)

∴ área = área (L. 5, pr. 9);

pero están en la misma base y al mismo lado de este:

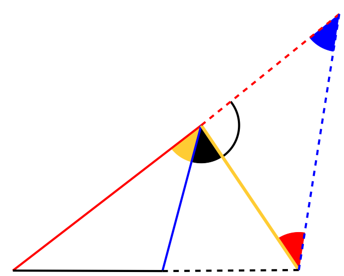
$\therefore$ $\parallel$ (L. 1, pr. 39). Q. E. D.

LIBRO VI PROPOSICIÓN III. TEOREMA.

UNA línea recta ( ) que biseca el ángulo de un triángulo, divide al lado opuesto en segmentos (,) proporcionales a los lados del ángulo bisecado (,).

Y si una línea recta ( ) trazada desde cualquier ángulo de un triángulo divide al lado opuesto ( ) en segmentos (,) proporcionales a los lados del ángulo dividido (,), biseca al ángulo.

PARTE I.



Trazar $\parallel$, hasta encontrar ; entonces, $=$ (L. 1, pr. 29),

$\therefore$ $=$, pero $=$,

$\therefore$ $=$, $\therefore$ $=$ (L. 1, pr. 6);

y como por construcción $\parallel$,

: :: : (L. 6, pr. 2);

pero como $=$, se tiene finalmente:

: :: : (L. 5, pr. 7).

PARTE II.

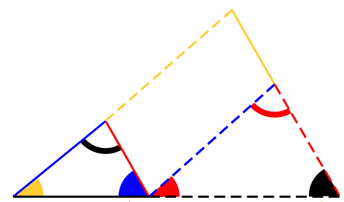
Si se mantiene la misma construcción, y : :: : (L. 6, pr. 2); pero : :: : (hip.) $\therefore$: :: : (L. 5, pr. 11).

y $\therefore$ $=$ (L. 5, pr. 9), y $\therefore$ $=$ (L. 1, pr. 5); pero desde que $\parallel$; $=$, y $=$ (L. 1, pr. 29);

$\therefore$ $=$, y $=$, y $\therefore$ biseca . Q. E. D.

LIBRO VI. PROPOSICIÓN IV. TEOREMA.

EN triángulos equiangulares (y) los lados adyacentes de los ángulos iguales son proporcionales, y los lados opuestos a los ángulos iguales son homólogos.



Si los triángulos equiangulares están colocados de tal manera que dos lados , opuestos a ángulos iguales y sean adyacentes, y en la misma línea recta; y que los triángulos que se encuentran del mismo lado de esa recta, tengan ángulos iguales no adyacentes, i. e. opuesto a , y a .

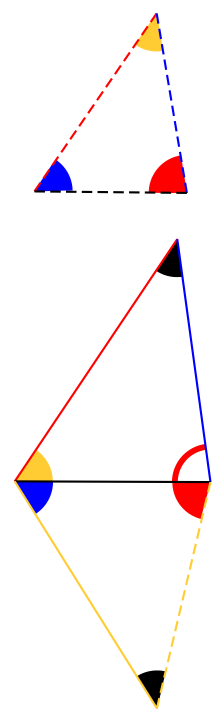
Trazar y , como = , || (L. 1, pr. 28); y por una razón similar, || , ∴ es un paralelogramo.
Pero : :: : (L. 6, pr. 2);
y puesto que = (L. 1, pr. 34), : :: : ;
y por alternancia, : :: : (L. 5, pr. 16).
De igual manera se prueba que : :: : ;
y por alternancia, que : :: : ; pero ya se ha demostrado que : :: : ; y por lo tanto, ex aequali,

: :: : ; (L. 5, pr. 22),

por lo tanto los lados sobre los ángulos iguales son proporcionales, y los que son opuestos a los ángulos iguales son homólogos. Q. E. D.

LIBRO VI. PROPOSICIÓN V. TEOREMA.

SI dos triángulos tienen sus lados proporcionales (: :: :) y (: :: :) son equiangulares, y los ángulos iguales son subtendidos por los lados homólogos.



Desde los extremos de , trazar y ,
haciendo = , = (L. 1, pr. 23); y en consecuencia = (L. 1, pr. 32), y como los triángulos son equiangulares:
: :: : (L. 6, pr. 4);
pero : :: : (hip.);
∴ : :: : y en consecuencia = (L. 5, pr. 9).

Se demuestra que = de la misma manera. Por lo tanto, los dos triángulos que tienen una base común , y sus lados son iguales, tienen también ángulos iguales opuestos a lados iguales:

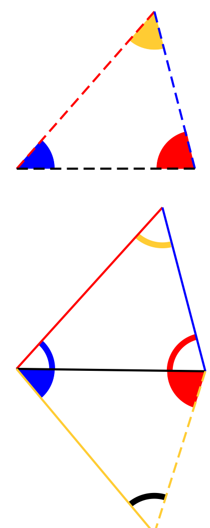
i. e. = y = (L. 1, pr. 8).

Pero = (const.), = ; e igualmente = , y por consiguiente = (L. 1, 32); y por lo tanto los triángulos son equiangulares, y es evidente que los lados homólogos subtienden los ángulos iguales.

Q. E. D.

LIBRO VI. PROPOSICIÓN VI. TEOREMA.

SI dos triángulos (y) tiene un ángulo ( ) de uno, igual a un ángulo ( ) del otro, y los lados sobre los ángulos iguales, proporcionales, los triángulos serán equiangulares, y tienen los ángulos iguales que los lados homólogos subtienden.



Desde el extremo de , un lado de y bajo el ángulo , trazar y hacer = , y = ; entonces = (L. 1, pr. 32), y dos triángulos equiangulares:

: :: : (L. 6, pr. 4);

pero : :: : (hip.);

∴ : :: : (L. 5, pr. 11), y en consecuencia = (L. 5, pr. 9);

∴ = en todos los sentidos (L. 1, pr. 4).

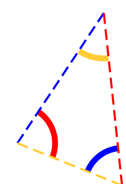
Pero = (const.), y ∴ = : y ya que también = , = (L. 1, pr. 32);

y ∴ y son equiangulares, con sus ángulos iguales opuestos a los lados homólogos.

Q. E. D.

LIBRO VI. PROPOSICIÓN VII. TEOREMA.

SI dos triángulos (y) tienen un ángulo en cada uno igual (igual a), los lados contiguos de los otros dos ángulos proporcionales (: :: :) y cada uno de los ángulos restantes (y) ya sea menor o no menor un ángulo recto, los triángulos son equiangulares, y los ángulos son iguales en los lados proporcionales.



En primer lugar, supongamos que los ángulos y son cada uno menor que un ángulo recto, se supone que y contenidos por los lados proporcionales, no son iguales.

Sea el mayor, y hacer = .

Porque = (hip.), y = (const.)

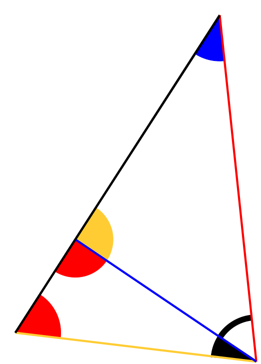
∴ = (L. 1, pr. 32);

∴ : :: : (L. 6, pr. 4),

pero : :: : (hip.)

∴ : (L. 5, pr. 9), y

∴ = (L. 1, pr. 5).



Pero es menor que un ángulo recto (hip.) ∴ es menor que un ángulo recto; y ∴ debe ser mayor que un ángulo recto (L. 1, pr. 13), pero se ha demostrado que = y por lo tanto menor que un ángulo recto, lo cual es absurdo. ∴ y no pueden ser diferentes;

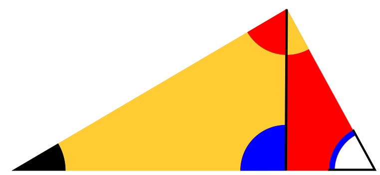
∴ son iguales, y puesto que = (hip.) ∴ = (L. 1, pr. 32), y por lo tanto los triángulos son equiangulares.

Ahora, si se supone que  y  no son inferiores a un ángulo recto, se puede probar como antes, que los triángulos son equiangulares, y tienen contiguo a los ángulos iguales los lados proporcionales. (L. 6, pr. 4).

Q. E. D.

LIBRO VI. PROPOSICIÓN VIII. TEOREMA.

EN un triángulo rectángulo ( ), si una perpendicular ( ) se traza del ángulo recto al lado opuesto, los triángulos (,) en cada uno de sus lados son similares a todo el triángulo y entre sí.



Porque = (L. 1, ax. 11),

es común a , y a ;

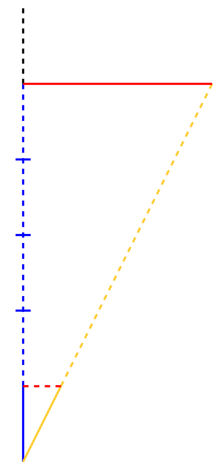
= (L. 1, pr. 32);

∴ y son equiangulares; y consecuentemente tienen sus lados contiguos a los ángulos iguales proporcionales (L. 6, pr. 4), y por lo tanto son similares (L. 6, def. 1).

De igual manera se puede probar que es similar a ; pero se ha probado que es similar a ; ∴ y son similares al conjunto y entre sí. Q. E. D.

LIBRO VI. PROPOSICIÓN IX. PROBLEMA

DE un segmento dado () podemos cortar cualquier submúltiplo requerido ().



De cualquiera de los dos extremos del segmento dado () trazar haciendo cualquier ángulo con ; y extender hasta toda el segmento contiene tantas veces como contiene la parte requerida.

Trazar y trazar ∥ , es la parte que buscamos de .

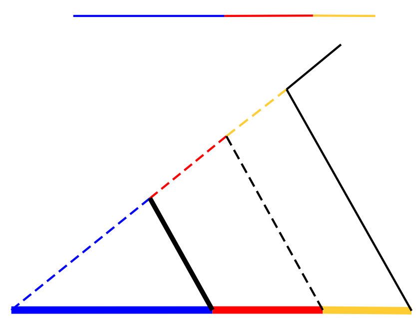
En efecto, desde que ∥ , : :: : (L. 6, pr. 2), y por la composición (L. 5, pr. 18);

: :: : ; pero contiene tantas veces como contiene la parte requerida (const.); ∴ es la parte requerida.

Q. E. D.

LIBRO VI. PROPOSICIÓN X. PROBLEMA

PODEMOS dividir un segmento ( ) de manera similar a un segmento dividido dado ( ).



Desde cualquier extremo del segmento trazar haciendo cualquier ángulo; tomar , y igual a , y respectivamente (L. 1, pr. 2); trazar , y trazar y $\parallel$ a este.

Puesto que $\left\{ \right\}$ son $\parallel$,

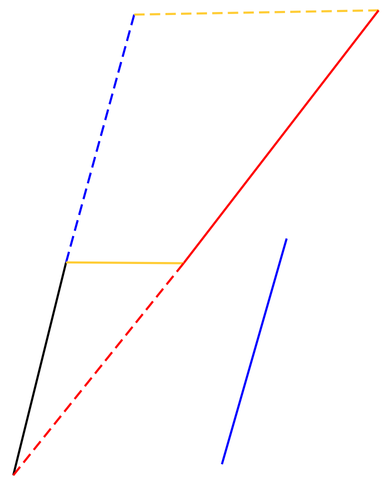
: :: : (L. 6, pr. 2),

o : :: : (const.), y : :: : (L. 6, pr. 2),

: :: : (const.), y ∴ el segmento dada se divide similarmente a . Q. E. D.

LIBRO VI. PROPOSICIÓN XI. PROBLEMA.

SE puede encontrar un tercer segmento proporcional a dos segmentos dados (y).



En cualquier extremo de uno de los segmentos dados trazar haciendo un ángulo; tomar = , y trazar ; hacer = , y trazar $\|$; (L. 1, pr. 31); es la tercer segmento proporcional a y .

Desde que $\|$, tenemos

$\therefore$: :: : (L. 6, pr. 2);

pero = = (const.);

$\therefore$: :: : (L. 5, pr. 7).

Q. E. D.

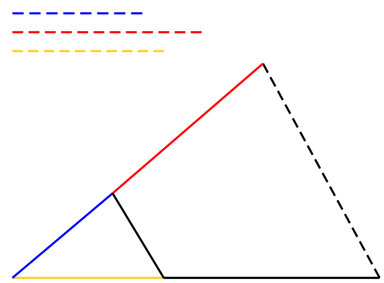
LIBRO VI. PROPOSICIÓN XII. PROBLEMA

SE puede encontrar un cuarto segmento proporcional a tres segmentos dados $\{\ \}$.

Trazar y con cualquier ángulo; tomar $=$, $=$, $=$, trazar , y $\parallel$; (L. 1, pr. 31); es el cuarto segmento proporcional. Debido a las paralelas,

: :: : (L. 6, pr. 2); pero $\{\ \} = \{\ \}$ (const.);

$\therefore$: :: : . (L. 5, pr. 7).

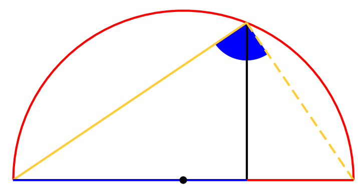


Q. E. D.

LIBRO VI. PROPOSICIÓN XIII. PROBLEMA.

SE puede encontrar una media proporcional ( ) entre dos segmentos dados { }, o sea : :: : .

Trazar cualquier segmento , hacer = , y = ; bisecar y desde el punto de bisección como centro, y la mitad del segmento como un radio, trazar un semicírculo ,



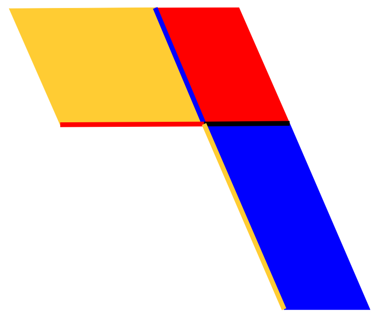
trazar ⊥ , el segmento es la media proporcional requerida.

Trazar y . Puesto que es un ángulo recto (L. 3, pr. 31), y es ⊥ sobre el lado opuesto a éste, ∴ es una media proporcional entre y (L. 6, pr. 8), y ∴ entre y (const.). Q. E. D.

LIBRO VI. PROPOSICIÓN XIV. TEOREMA.

LOS aralelogramos y con áreas iguales donde cada uno tiene un ángulo igual, tienen los lados contiguos a los ángulos iguales recíprocamente proporcionales:
(: :: :).

Inversamente, paralelogramos donde cada uno tiene un ángulo de igual medida, y los lados contiguos recíprocamente proporcionales, son de áreas iguales.



Sean y ; y y , tales que y están en líneas rectas continuas con y . Es evidente que pueden asumir esta posición. (L. 1, prs. 13, 14, 15). Completar .

Las áreas $=$ $\therefore$: :: : (L. 5, pr. 7),

: :: : (L. 6, pr. 1).

Inversamente, la misma construcción nos permite escribir:

: :: : (L. 6, pr. 1.)
: (hip.)
: (L. 6, pr. 1),

$\therefore$: :: : (L. 5, pr. 11),

y $\therefore =$ $=$ (L. 5, pr. 9). Q. E. D.

LIBRO VI. PROPOSICIÓN XV. TEOREMA.

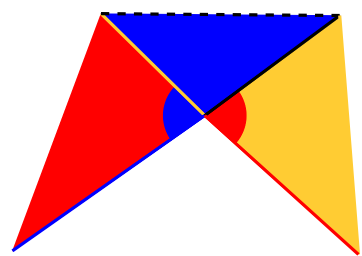
I.

TRIÁNGULOS de áreas iguales, donde cada uno tiene un ángulo igual (=), tienen los lados contiguos a los ángulos iguales recíprocamente proporcionales (: :: :).

II.

Dos triángulos que tienen cada uno un ángulo de igual medida, y los lados contiguos a los ángulos iguales recíprocamente proporcionales, son de áreas iguales.

I.



Sean los triángulos colocados de tal manera que ángulos iguales y sean verticalmente opuestos, es decir para que y estén en la misma línea recta y también y estén en la misma línea recta. (L. 1, pr. 14).

Trazar , entonces:

: :: : (L. 6, pr. 1),

:: : (L. 5, pr. 7),

:: : (L. 6, pr. 1),

∴ : :: : (L. 5, pr. 11).

II.

La misma construcción nos da : :: : (L. 6, pr. 1) y

: :: : (L. 6, pr. 1).

Pero : :: : , (hip.) ∴ : :: :

(L. 5, pr. 11), ∴ = (L. 5, pr. 9) Q. E. D.

LIBRO VI. PROPOSICIÓN XVI. TEOREMA.

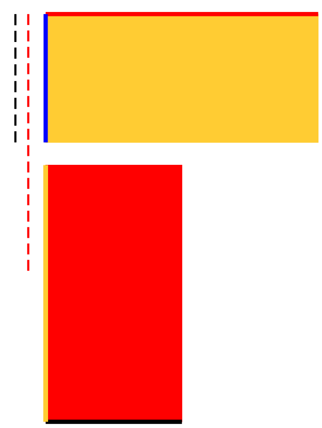
PARTE I.

SI cuatro segmentos son proporcionales (: :: :), el área del rectángulo (×) contenida por los extremos, es igual al área del rectángulo (×) contenida por los medios.

PARTE II.

Y si el área del rectángulo contenido por los extremos es igual al área del rectángulo contenido por los medios, los cuatro segmentos son proporcionales.

PARTE I.



De los extremos de y trazar y $\perp$ a ellos e $=$ y respectivamente.

Completar los paralelogramos y .

Como : :: : (hip.)

$\therefore$: :: : (const.)

$\therefore$ $=$ (L. 6, pr. 14), es decir el rectángulo contenido por los extremos, igual al rectángulo contenido por los medios.

PARTE II.

Si se hace la misma construcción; porque $=$, $=$,

$\therefore$: :: : (L. 6, pr. 14).

Pero $=$, y $=$ (const.)

$\therefore$: :: : (L. 5, pr. 7). Q. E. D.

LIBRO VI. PROPOSICIÓN XVII. TEOREMA.

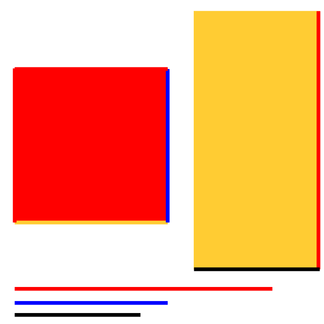
PARTE I.

SI tres segmentos son proporcionales (: :: :) el rectángulo bajo los extremos es igual al cuadrado del medio.

PARTE II.

Si el rectángulo debajo de los extremos es igual al cuadrado del medio, los tres segmentos son proporcionales.

PARTE I.



Supongamos que $=$, y desde que : :: : , entonces

: :: : ,

$\therefore$ $\times$ $=$ $\times$ (L. 6, pr. 16).

Pero $=$, $\therefore$ $\times$ $=$

$\times$ $=$ ^{2}; por lo tanto, si las tres rectas son proporcionales, el rectángulo contenido por los extremos es igual al cuadrado del medio.

PARTE II.

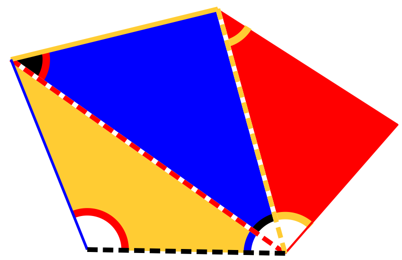
Supongamos que $=$, entonces $\times$ $=$ $\times$,

$\therefore$: :: : (L. 6, pr. 16), y

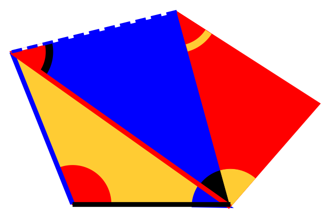
$\therefore$: :: : . Q. E. D.

LIBRO VI. PROPOSICIÓN XVIII. TEOREMA.

SOBRE una recta dada ( ) se puede construir una figura rectilínea similar a una dada ( ) y colocada de forma similar.



Dividir la figura dada en triángulos trazando los segmentos y .
En los extremos de hacer = y = . Trazar y , y de los extremos de hacer = y = ; e igualmente, hacer = y = , formado , y .

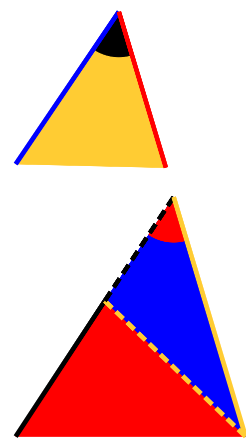


Entonces es similar a .
Es evidente a partir de la construcción y (L. 1, pr. 32) que las figuras son equiangulares; y como los triángulos y son equiangulares, por (L. 6, pr.4), : :: : y : :: : .

Como y son equiangulares, : :: : ;
∴ ex aequali, : :: : (L. 6, pr. 22.)
De la misma manera, puede demostrarse que los lados restantes de las dos figuras son proporcionales, ∴ por (L. 6, def. 1) es similar a , colocada de forma similar y sobre el segmento dado . Q. E. D.

LIBRO VI. PROPOSICIÓN XIX. TEOREMA.

TRIÁNGULOS similares (y) están uno a otro en la proporción de duplicada de sus lados homólogos.



Sean y ángulos iguales, , lados homólogos de y y sobre el mayor de estos segmentos tomar el tercer segmento proporcional, de modo que:

: :: : ; trazar .

: :: : ; (L. 6, pr. 4);

∴ : :: : ;

(L. 5, pr. 16, alt.), pero

: :: : (const.),

∴ : :: : por tanto las áreas = porque tienen los lados contiguos de los ángulos iguales y recíprocamente proporcionales (L. 6, pr. 15);

∴ : :: : (L. 5, pr. 7);

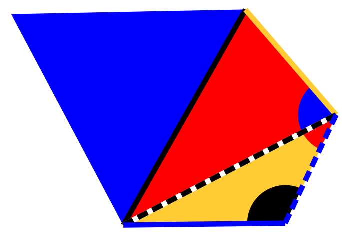
pero : :: : (L. 6, pr. 1),

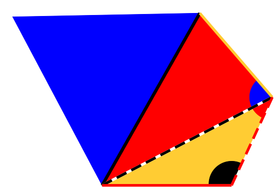
∴ : :: : ,

es decir los triángulos están entre sí en proporción duplicada de sus lados homólogos y (L. 5, def. 11). Q. E. D.

LIBRO VI. PROPOSICIÓN XX. TEOREMA.

POLÍGONOS similares pueden dividirse en el mismo número de triángulos similares, cada uno de los cuales es proporcional a los polígonos; y los polígonos están entre sí en la proporción duplicada de sus lados homólogos.





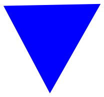
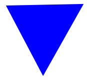
Trazar y , y dividiendo los polígonos en triángulos. Los polígonos son similares, = , y : :: : ∴ y son similares, y = (L. 6, pr. 6); pero = porque son ángulos de polígonos similares; por lo tanto, los restos y son iguales; por lo tanto : :: : , a causa de los triángulos similares, y : :: : por la presencia de polígonos similares, : :: : , ex aequali (L. 5, pr. 22), y los lados proporcionales contienen ángulos iguales, los triángulos y son similares (L. 6, pr. 6).

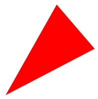
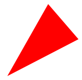
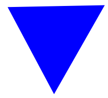
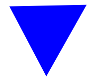
De igual manera se puede demostrar que los triángulos y son similares.

Pero es a en la proporción duplicada de a (L. 6, pr. 19), y es a de igual manera, en la proporción duplicada de a :

∴ : :: : , (L. 5, pr. 11).

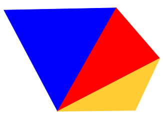
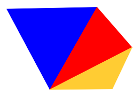
De nuevo es a en la proporción duplicada de a , y

 es a  en la proporción duplicada de —— a ——,

∴ : ::  :  ::  :  ;

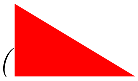
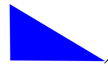
y como uno de los antecedentes es a uno de los consecuentes, así es la suma de todos los antecedentes a la suma de todos los consecuentes; es decir los triángulos similares tienen entre sí la misma proporción que los polígonos (L. 5, pr. 12).

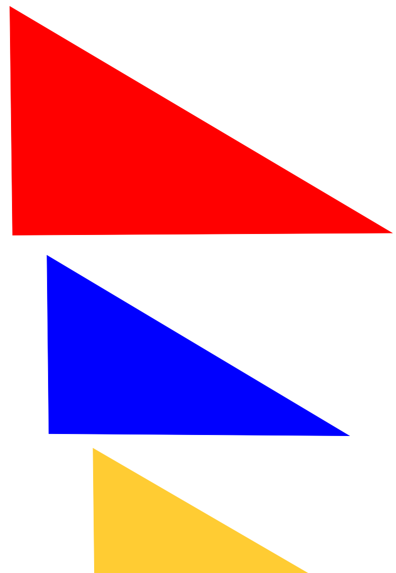
Pero es a en la proporción duplicada de —— a ——:

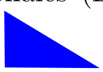
∴  es a  en la proporción duplicada de —— a ——.

Q. E. D

LIBRO VI. PROPOSICIÓN XXI. TEOREMA.

F*IGURAS rectilíneas (* *y* *) que son similares a la misma figura (**) son similares también entre sí.*



Puesto que  y son similares, son equiangulares, y tienen contiguo a los ángulos iguales los lados proporcionales (L. 6, def. 1); y como las figuras  y también son similares, son equiangulares, y tienen contiguo a los ángulos iguales los lados proporcionales; por lo tanto  y son también equiangulares, y tienen contiguo a los ángulos iguales los lados proporcionales (L. 5, pr. 11), y por lo tanto son similares.

Q. E. D.

LIBRO VI. PROPOSICIÓN XXII. TEOREMA.

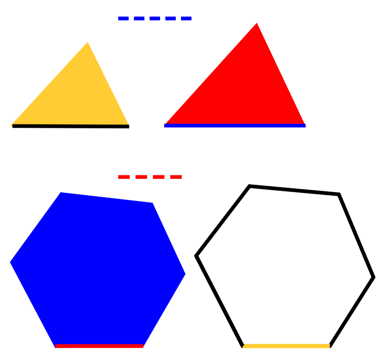
PARTE I.

SI cuatro segmentos proporcionales (: :: :) se dan, las figuras rectilíneas similares descritas de manera similar en ellas son también proporcionales.

PARTE II.

Si cuatro figuras rectilíneas similares, descritas de forma similar sobre cuatro segmentos, son proporcionales, los segmentos también son proporcionales.

PARTE I.



Tomar un tercer segmento proporcional a y , y un tercero proporcional a y (L. 6, pr. 11); puesto que : :: : (hip.),

: :: : (const.)

∴ ex aequali, : :: :

pero : :: : (L. 6, pr. 20),

y : :: : :

∴ : :: : (L. 5, pr. 11).

PARTE II.

Si se hace la misma construcción : :: : (hip.).

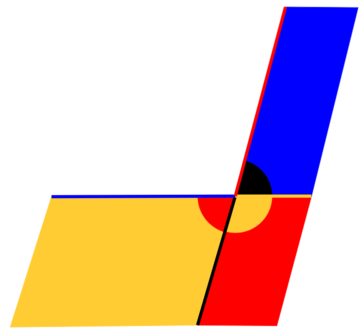
∴ : :: : (const.)

y ∴ : :: : . (L. 5, pr. 11).

Q. E. D.

LIBRO VI PROPOSICIÓN XXIII. TEOREMA.

PARALELOGRAMOS equiangulares (y) están entre sí en una proporción compuesta de las proporciones de sus lados.



Sean dos de los lados y sobre los ángulos iguales se colocarán de manera que puedan formar una línea recta.

Puesto que $+$ $=$, y

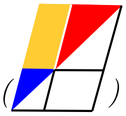
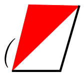
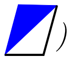
$=$ (hip.), $+$ $=$,

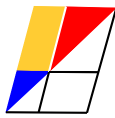
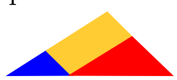
y $\therefore$ y forman una línea recta (L. 1, pr.14); completar .

Puesto que : :: : (L. 6, pr. 1), y

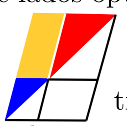
: :: : (L. 6, pr. 1), tiene con una relación compuesta de los cocientes de a , y de a . Q. E. D.

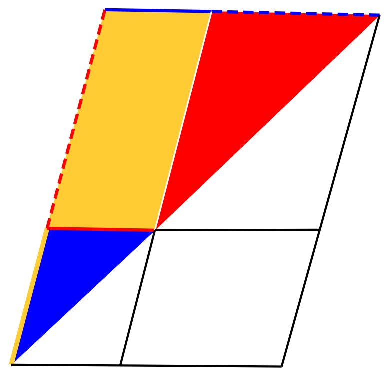
LIBRO VI. PROPOSICIÓN XXIV. TEOREMA.

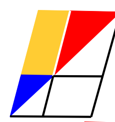
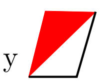
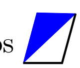
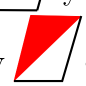
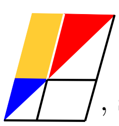
EN cualquier paralelogramo () los paralelogramos ( y ) que están sobre la diagonal son similares a todo el conjunto y entre sí.

Dado que  y  tienen un ángulo común son equiangulares; pero debido a que ‖ ,  y  son similares (L. 6, pr. 4),

∴ : :: : ; y el resto de lados opuestos son iguales a estos,

∴  y  tienen los lados contiguos de los ángulos iguales proporcionales, y por lo tanto son similares.

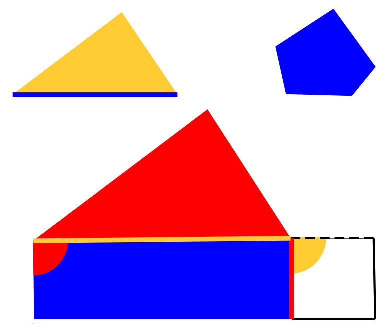


Igualmente se puede demostrar que los paralelogramos  y  son similares. Puesto que, cada uno de los paralelogramos  y  es similar a , son similares entre sí.

Q. E. D.

LIBRO VI. PROPOSICIÓN XXV. PROBLEMA.

SE puede construir una figura rectilínea, que será similar a una figura rectilínea determinada ( ), e igual en área a otra ( ).



Sobre construir = en área, y sobre construir = en área y teniendo = (L. 1, pr. 45), entonces y están sobre la misma línea recta (L. 1, prs. 29, 14).

Entre y encontrar una media proporcional (L. 6, pr. 13), y sobre construir , similar a , y similarmente situado.

Entonces = . Porque desde que y son similares, y : :: : (const.),

: :: : (L. 6, pr. 20); pero

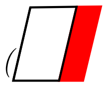
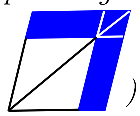
: :: : (L. 6, pr. 1);

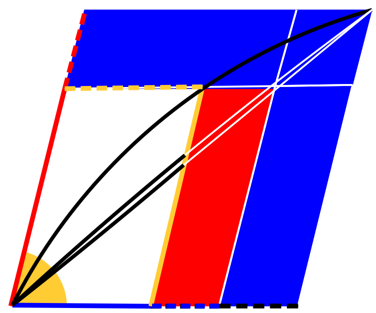
∴ : :: : (L. 5, pr. 11); pero

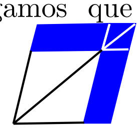
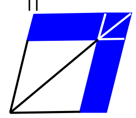
= (const.), y ∴ = en área (L. 5, pr. 14); y

= en área (const.); por consiguiente, que es similar a es además = en área. Q. E. D.

LIBRO VI. PROPOSICIÓN XXVI. TEOREMA.

SI paralelogramos similares y posicionados de manera similar ( *y*  *) tienen un ángulo común, están sobre la misma diagonal.*



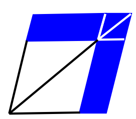
Supongamos que es la diagonal de  y trazar ‖ (L. 1, pr. 31). Puesto que  y  están sobre la misma diagonal , y tiene común, son similares (L. 6, pr. 24);

∴ : :: : ;

pero : :: : (hip.),

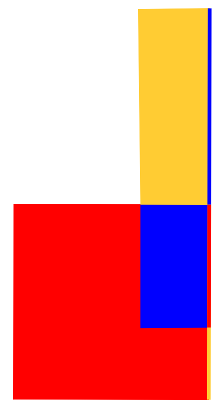
∴ : :: : ;

y ∴ = (L. 5, pr. 9.), lo cual es absurdo.

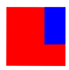
∴ no es la diagonal de  de la misma manera se puede demostrar que ninguna otra línea es excepto . Q. E. D.

LIBRO VI. PROPOSICIÓN XXVII. TEOREMA.

DE todos los rectángulos contenidos por segmentos en una determinada recta, el mayor es el cuadrado que se construye en la mitad del segmento.



Sea el segmento dado, y segmentos desiguales, y y segmentos iguales;

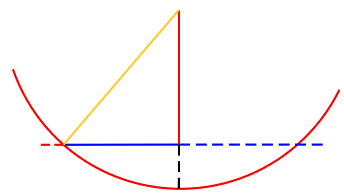
entonces  > .

Ya se ha demostrado (L. 2, pr. 5), que el cuadrado de la mitad del segmento es igual al rectángulo contenido por cualquier segmento desigual junto con el cuadrado de la parte intermedia entre el punto medio y el punto de sección desigual. El cuadrado descrito en la mitad de la línea excede, por lo tanto, el rectángulo contenido por cualquier segmento desigual de la línea.

Q. E. D.

LIBRO VI. PROPOSICIÓN XXVIII. PROBLEMA.

SE puede dividir un segmento dado ( ) de modo que el rectángulo contenido por sus segmentos sea igual a una área determinada (^{2}), que no exceda el cuadrado de la mitad del segmento.



Sea el área dada $=$ ^{2}. Bisecar , o hacer $=$; y si $^2 =$ ^{2}, el problema está resuelto.

Pero si $^2 \neq$ ^{2}, entonces debemos tener $>$ (hip.).

Trazar $\perp$, con $=$; hacer $=$ o , con como radio construir un círculo que corta el segmento dado; trazar . Entonces $\times$ $+$ $^2 =$ ^{2} (L. 2, pr. 5.) $=$ ^{2}.

Pero $^2 =$ $^2 +$ ^{2} (L. 1, pr. 47);

$\therefore$ $\times$ $+$ $^2 =$ $^2 +$ ^{2}, de ambos tomar ^{2} y se tiene $\times$ $=$ ^{2}.

Pero $=$ (const.), y $\therefore$ es así dividido como $\times$ $=$ ^{2}.

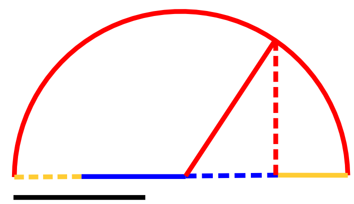
Q. E. D.

LIBRO VI. PROPOSICIÓN XXIX. PROBLEMA.

SE puede extender un segmento determinado ( ), de modo que el rectángulo contenido por los segmentos situados entre los extremos del segmento dado y el punto hasta el que se extiende, sea igual a una determinada área, i. e. igual al cuadrado de .

Hacer $=$, y trazar $\perp$, $=$; trazar ; y con el radio , construir un círculo en el centro de extendido. Entonces:

$\times$ $+$ ^{2} $=$ ^{2} (L. 2, pr. 6) $=$ ^{2}.



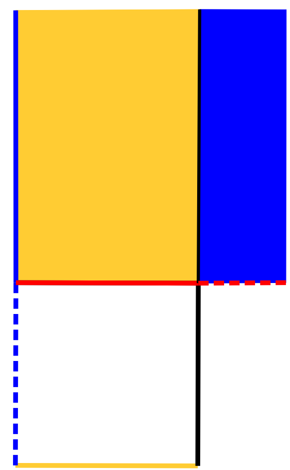
Pero ^{2} $=$ ^{2} $+$ ^{2} (L. 1, pr. 47.)

$\therefore$ $\times$ $+$ ^{2} $=$ ^{2} $+$ ^{2}, de ambas tomar ^{2} y $\times$ $=$ ^{2}; pero $=$,

$\therefore$ ^{2} $=$ al área dada. Q. E. D.

LIBRO VI. PROPOSICIÓN XXX. PROBLEMA.

SE puede cortar un determinado segmento ( ) en proporción extrema y media.



Sobre construir el cuadrado (L. 1, pr. 46); y extender , para que $\times$ $=$ ^{2} (L. 6, pr. 29).

Tomar $=$, y trazar $\parallel$, unir $\parallel$ (L. 1, pr. 31).

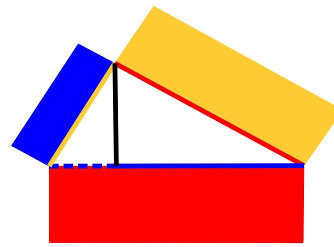
Entonces $=$ $\times$ $=$ y

si de ambos lados se toma la parte común ,

, que es el cuadrado de , será $=$, la cual es $=$ $\times$; es decir ^{2} $=$ $\times$; $\therefore$: :: : , y se divide en proporción extrema y media. (L. 6, def. 3). Q. E. D.

LIBRO VI. PROPOSICIÓN XXXI. TEOREMA.

SI se construyen figuras rectilíneas similares en los lados de un triángulo rectángulo ( ), la figura construida sobre el lado ( ) que subtiende el ángulo recto es igual a la suma de las figuras de los otros lados.



A partir del ángulo recto, trazar perpendicular a ; entonces:

: :: : (L. 6, pr. 8),

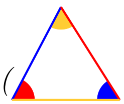
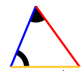
∴ : :: : (L. 6, pr. 20),

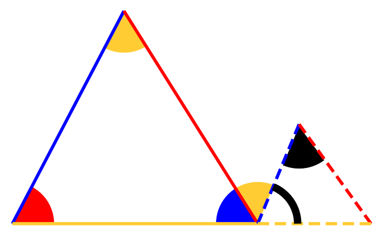
pero : :: : (L. 6, pr. 20).

Por lo tanto + : :: + : ;

pero + = ; y ∴ + : . Q. E. D.

LIBRO VI. PROPOSICIÓN XXXII. TEOREMA.

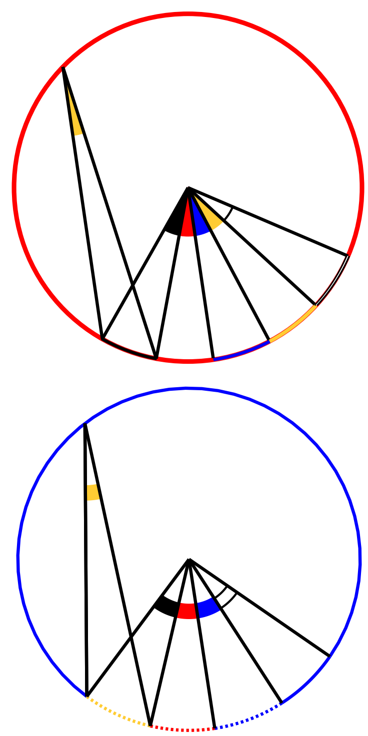
SI dos triángulos ( y ), tienen dos lados proporcionales (: :: :), y se colocan (juntos o no) en un ángulo que permita que los lados homólogos sean paralelos, los lados restantes (y) están en una línea recta.



Ya que $\|$, $=$ (L. 1, pr. 29); y como $\|$, $=$ (L. 1, pr. 29); $\therefore$ $=$; y : :: : (hip.), los triángulos son equiangulares (L. 6, pr. 6); $\therefore$ $=$: pero $=$;
$\therefore$ $+$ $+$ $=$ $+$ $+$ $=$ (L. 1, pr. 32), y
$\therefore$ y están en la misma línea recta (L. 1, pr. 14). Q. E. D.

LIBRO VI. PROPOSICIÓN XXXIII. TEOREMA.

EN círculos iguales (,), ángulos, ya sea en el centro o en la circunferencia, están en la misma proporción entre sí que los arcos sobre en los que se encuentran (: :: :); también lo son los sectores.



Tomar en la circunferencia de cualquier número de arcos , , etc. cada $=$, y también en la circunferencia de tomar cualquier número de arcos , , etc. cada uno $=$, trazar los radios a los extremos de los arcos iguales.

Entonces como los arcos , , , &c son todos iguales, los ángulos , , , etc. son también iguales (L. 3, pr. 27);

$\therefore$ es el mismo múltiplo de del que el arco es de ; y de la misma manera es el mismo múltiplo de , del que el arco es de .

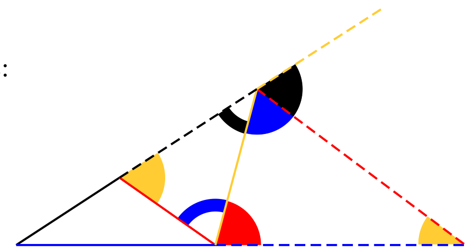
Entonces es evidente (L. 3, pr. 27), si (o si m veces) $>, =, <$ (o n veces), entonces (o m veces) $>, =, <$ (o n veces); $\therefore$: :: : , (L. 5, def. 5), o los ángulos en el centro son como los arcos sobre los que se apoyan; pero los ángulos en la circunferencia son la mitad de los ángulos en el centro (L. 3, pr. 20) están en la misma proporción (L. 5, pr. 15), y por lo tanto son como los arcos sobre los que se apoyan.

Es evidente, que sectores en círculos iguales, y sobre arcos iguales son iguales (L. 1, pr. 4; L. 3, prs. 24, 27, y def. 9). Por lo tanto, si los sectores se sustituyen por los ángulos en la demostración anterior, se establecerá la segunda parte de la proposición, es decir, en círculos iguales, los sectores tienen la misma relación entre sí que los arcos en los que se encuentran.

Q. E. D.

LIBRO VI. PROPOSICIÓN A. TEOREMA.

SI el segmento ( ), bisecando un ángulo externo del triángulo toca el lado opuesto ( ) extendido, el lado extendido ( ), y su segmento externo ( ) será proporcional a los lados (y), que contienen el ángulo adyacente al ángulo exterior bisecado.



Porque si se traza $\parallel$, entonces:

$=$, (L. 1, pr. 29);

$=$, (hip.),

$=$, (L. 1, pr. 29);

y $\therefore$ $=$, (L. 1, pr. 6),

y : :: : , (L. 5, pr. 7).

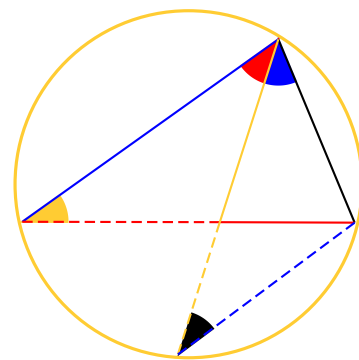
Pero también, : :: : , (L. 6, pr. 2);

y por lo tanto : :: : , (L. 5, pr. 11).

Q. E. D.

LIBRO VI. PROPOSICIÓN B. TEOREMA.

SI un ángulo de un triángulo se biseca por un segmento, que también corta la base; el rectángulo contenido por los lados del triángulo es igual al rectángulo contenido por los segmentos de la base, junto con el cuadrado del segmento que biseca el ángulo.



Se traza , con = ; entonces
× = × + ².

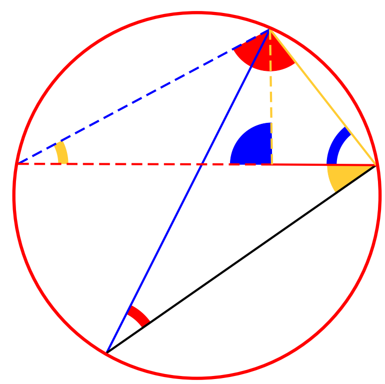
Alrededor de se construye (L. 4, pr. 5), extender hasta encontrar el círculo, y trazar .

Puesto que = (hip.), y = (L. 3, pr. 21), ∴ y son equiangulares (L. 1, pr. 32); ∴ : :: : (L. 6, pr. 4);
∴ × = × (L. 6, pr. 16);
= × + ² (L. 2, pr. 3); pero
× = × (L. 3, pr. 35); ∴ × = × + ².

Q. E. D.

LIBRO VI. PROPOSICIÓN C. TEOREMA.

SI desde cualquier ángulo de un triángulo, se traza un segmento perpendicular a la base; el rectángulo contenido por los lados del triángulo es igual al rectángulo contenido por la perpendicular y al diámetro del círculo construido alrededor del triángulo.



Desde de trazar el segmento $\perp$; entonces se tiene $\times$ $=$ $\times$ el diámetro del círculo construido.

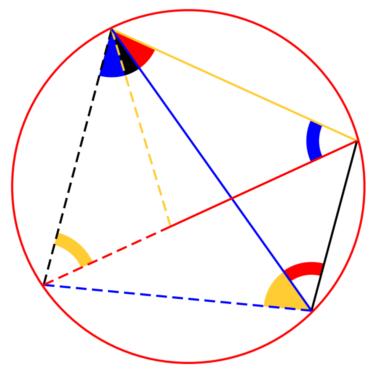
Construir (L. 4, pr. 5), trazar su diámetro , y trazar ; entonces porque $=$ (const. y L. 3, pr. 31); y $=$ (L. 3, pr. 21);

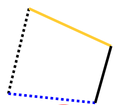
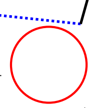
$\therefore$ es equiangular a (L. 6, pr. 4); y finalmente tenemos que $\therefore$: :: : ; y $\times$ $=$ $\times$ (L. 6, pr. 16).

Q. E. D.

LIBRO VI. PROPOSICIÓN D. TEOREMA.

EL área del rectángulo contenido por las diagonales de una figura cuadrilátera inscrita en un círculo, es igual al área de los dos rectángulos contenidos por sus lados opuestos.



Sea  una figura cuadrilátera inscrita en ; trazar las diagonales y ; entonces debemos probar que:

$$\times = \times + \times .$$

Hacer = (L. 1, pr. 23),

∴ = ; y = (L. 3, pr. 21);

∴ : :: : (L. 6, pr. 4); y

∴ × = × (L. 6, pr. 16); de nuevo porque

= (const.), y = (L. 3, pr. 21);

∴ : :: : (L. 6, pr. 4); y

∴ × = × (L. 6, pr. 16); además, por (L. 6, pr. 4), obtenemos × = × ;

∴ × = × + × (L. 2, pr. 1).

Q. E. D.

EL FIN.