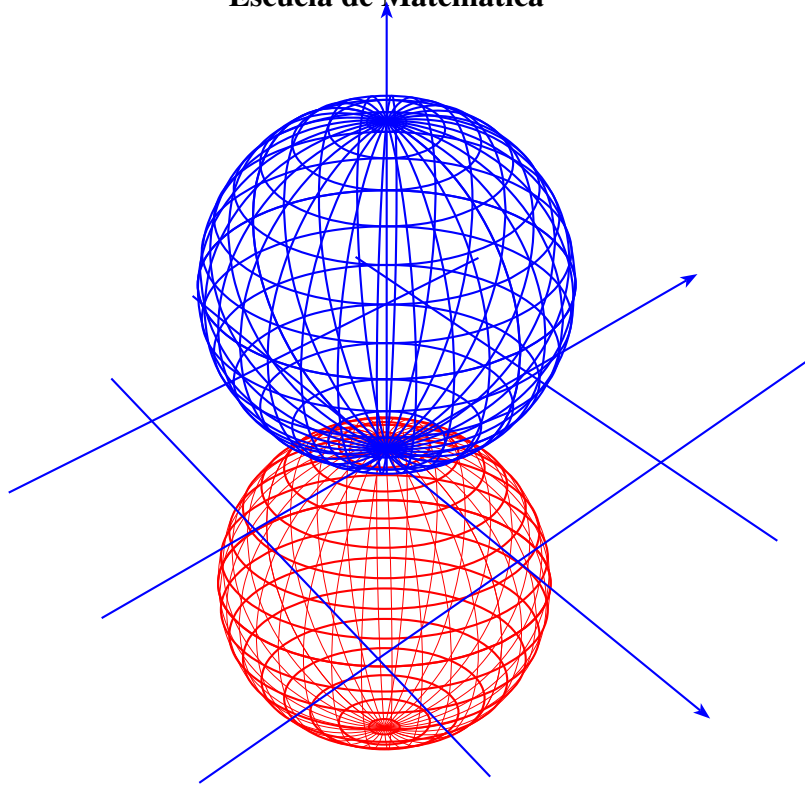


**Universidad de Costa Rica
Escuela de Matemática**



**Cálculo integral:
Integración múltiple**

Serie: Cabécar



Editorial CIMPA



Prof. Jorge Poltronieri

2006

515.430.76

P772c Poltronieri Vargas, Jorge, 1952-

Cálculo integral : Integración múltiple / Jorge

Poltronieri. – [San José, C.R.: CIMPA], 2004.

288p. : il. ; 27cm (Serie cabécar)

A la cabeza de la port: Universidad de Costa Rica,
Escuela de Matemática.

ISBN 9968-9979-6-X

1. CALCULO INTEGRAL – PROBLEMAS,
EJERCICIOS, ETC. 2. INTEGRALES – PROBLEMAS,
EJERCICIOS, ETC. I. Título.

CIP/1426

CC/SIBDI.UCR

Cálculo integral : Integración múltiple

© Jorge Poltronieri Vargas, Catedrático

Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica.

Diagramación en \LaTeX realizada por el autor

Diseño y concepto de carátula realizada por el autor

Impreso en Costa Rica

San José, 2004

Contenidos

1	Integrales múltiples	1
1.1	Particiones de rectángulos. Funciones escalonadas	5
1.1.1	Definición de la integral doble de una función definida y acotada en un rectángulo	10
1.1.2	Integral doble superior e inferior	11
1.1.3	Conjuntos de contenido nulo	15
1.2	Sumas de Riemann y la integral de Riemann	16
1.2.1	Sumas superiores y sumas inferiores	16
1.3	Integrabilidad de funciones continuas	19
1.3.1	Integrales dobles sobre regiones más generales	21
1.3.2	Aplicaciones al cálculo de áreas y volúmenes	29
1.3.3	Aplicaciones de la integral doble	33
1.3.4	Teorema de Guldin–Pappus	35
1.4	El signo del Jacobiano	36
1.5	Cambio de variable en la integral doble	39
1.5.1	Cambio de variable – Caso simple	39
1.5.2	Cambio de variable – Caso general	39
1.5.3	Otra interpretación geométrica	41
1.5.4	Caso de coordenadas polares	42
1.6	Cambios de variables especiales en integrales triples	55
1.6.1	Caso de coordenadas cilíndricas	56
1.6.2	Caso de coordenadas esféricas	57
1.6.3	Momento de inercia. Coordenadas del centro de gravedad	58
1.7	Cambio de variable en integración múltiple – Caso general	59
1.8	Consecuencias de la extensión del concepto de volumen	68

1.9	Integrales impropias dependiendo de un parámetro	69
1.10	Integrales dobles impropias	70
1.11	Ejercicios	75
1.11.1	Cálculo de integrales dobles	75
1.11.2	Colocación de límites	78
1.11.3	Inversión de límites	80
1.11.4	Cambio de variable	82
1.11.5	Cálculo de volúmenes	85
1.11.6	Masa, centro de gravedad, momentos de inercia, aplicaciones	89
1.11.7	Ejercicios especiales	92
1.11.8	Integrales triples	94
1.11.9	Cambio de variable en \mathbb{R}^3	94
1.11.10	Cálculo de volúmenes	97
1.11.11	Centro de gravedad, masa, momentos de inercia	99
1.11.12	Momento de inercia, centro de gravedad en \mathbb{R}^3	100
1.11.13	Aplicaciones a la gravedad	102
1.11.14	Ejercicios especiales	102
1.11.15	Integrales múltiples	103
1.11.16	Integrales impropias dependiendo de un parámetro	104
1.11.17	Integrales impropias	107
2	Integrales de línea	111
2.1	Curvas en \mathbb{R}^n	111
2.1.1	Interpretación geométrica de la derivada de una función vectorial	114
2.2	Curvas rectificables y longitud de arco de una curva	118
2.2.1	Caso de coordenadas polares	120
2.3	Integral de línea	122
2.3.1	Integral de línea para campos escalares	122
2.3.2	Integral de línea para campos vectoriales	124
2.3.3	Propiedades de la integral de línea	127
2.3.4	Potencial de un campo vectorial	128
2.3.5	Condición de independencia de la trayectoria	130
2.3.6	Aplicaciones a la mecánica	132

2.3.7	Principio de conservación de la energía mecánica	132
2.4	Teorema de Green	137
2.4.1	Demostración de la fórmula de cambio de variable usando el teorema de Green	142
2.4.2	Número de giros	145
2.5	Formas diferenciales	147
2.5.1	Aplicaciones a las ecuaciones diferenciales exactas de primer orden	148
2.5.2	Caso de funciones de tres variables	149
2.5.3	Forma diferencial exacta de una función de tres variables	151
2.5.4	Caso de funciones de dos variables	151
2.5.5	Análisis en los campos gradientes en \mathbb{R}^3	152
2.5.6	Caso de campos vectoriales que no son gradientes	154
2.6	Funciones holomorfas	155
2.7	Resumen	160
2.8	Ejercicios	162
2.8.1	Longitud de arco	162
2.8.2	Conjuntos convexos	163
2.8.3	Integrales de línea	163
2.8.4	Masa, centros de gravedad, momentos,...	165
2.8.5	Integrales de línea de campos vectoriales	166
2.8.6	Aplicaciones	169
2.8.7	Formas diferenciales	175
2.8.8	Fórmula de Green	178
2.8.9	Cálculo de residuos	186
3	Integrales de superficie	187
3.1	Teoría de superficies	187
3.1.1	Representación paramétrica de una superficie	187
3.1.2	Cambio de representación paramétrica de una superficie	193
3.2	Área de una superficie	194
3.3	Integral de un campo escalar sobre una superficie	202
3.3.1	Centro de gravedad, momento de inercia	204
3.4	Superficies orientables	205
3.5	Integral de un campo vectorial sobre una superficie	207

3.5.1	Observaciones sobre las integrales de superficie	208
3.5.2	Extensiones del teorema de Stokes	212
3.5.3	Teorema de la divergencia (Gauss – Ostrogradski)	216
3.5.4	Propiedades de la divergencia y el rotacional	222
3.6	Resumen	225
3.7	Ejercicios	226
3.7.1	Teoría de campos	226
3.7.2	Área de superficie	230
3.7.3	Integrales de superficie de campos escalares	233
3.7.4	Centro de gravedad, masa, momentos de inercia. Aplicaciones	235
3.7.5	Integrales de superficie de campos vectoriales	236
3.7.6	Fórmula de Stokes	239
3.7.7	Fórmula de Gauss–Ostrogradski	241
A	Formas diferenciales	247
A.1	Formas diferenciales	247
A.2	Diferencial de formas diferenciales, diferenciación exterior	249
A.3	Primitiva de una forma diferencial	250
A.4	Aplicaciones de las formas diferenciales	253
A.5	Elemento de área de una integral doble	254
A.6	Fórmula de Green	255
A.7	Integral de superficie de una forma diferencial de grado dos	255
A.8	Fórmula de Stokes	256
A.9	Fórmula Gauss–Ostrogradski	257
B	Funciones eulerianas	259
B.1	La función gama Γ	259
B.2	La función beta β	260
B.3	Fórmula de Wallis	261
	Bibliografía	263

Capítulo 1

Integrales múltiples

El problema de definir la integral en el caso de dos o más dimensiones, presenta particularidades interesantes que es necesario considerar. En el caso unidimensional, la integral de , se define de una manera relativamente simple para un intervalo cerrado $[a, b]$, pues no hay mayor dificultad en definir la longitud (medida unidimensional) de los intervalos. Pero en el caso de una integral doble (o más generalmente, de una integral n -dimensional) el dominio de integración Ω puede ser dividido en partes con límites curvilíneos, que son necesarios para definir la noción de área (resp. la medida de una parte de \mathbb{R}^n). Una dificultad similar surge cuando en el caso $n = 1$, se define la integral de Riemann para conjuntos más complejos que un intervalo cerrado.

En este sentido, es necesario definir la noción de medida de un conjunto e investigar las propiedades de la medida. Iniciaremos este capítulo con la teoría de Jordan, medida íntimamente ligada a la teoría de la integral de Riemann, lo que nos va permitir presentar la teoría de Riemann de la integral múltiple, así como la evaluación de una n -integral múltiple por medio de n -integrales iteradas con respecto a cada una de las variables.

Hankel(1882) introduce la noción de contenido de un conjunto, en un intento de medir la porción de un intervalo que ocupan las discontinuidades de una función. Cantor y Stolz (1884) extienden estas ideas a subconjuntos de \mathbb{R}^n , poniendo los cimientos de una rama de la matemática conocida como la Teoría de la Medida. La teoría desarrollada por estos matemáticos tenía ciertos defectos que aparecen cuando los conjuntos en cuestión no eran cerrados. En un esfuerzo para eliminar tales deficiencias, Peano(1887) y Jordan(1902) introducen la noción de contenido interior y contenido exterior de un conjunto. La teoría del contenido fue extendida por Borel(1898) y Lebesgue(1902) quien resuelve el problema y desarrolla lo que se llama la teoría de la medida de Lebesgue. Gracias a esta teoría se dispone de una técnica segura para operar límites bajo el signo de integral, que siempre fue fuente de problemas y demostraciones

complicadas con el método de Riemann y el método de Cauchy.

No vamos a presentar un estudio minucioso de la teoría de la medida, sino que vamos a tratar lo indispensable de la teoría del contenido y de la medida para poner de manifiesto la utilidad de estas ideas cuando se presentan en la teoría de la integración de Riemann.

En los primeros cursos de Matemática, se estudia la integral de Riemann de una función f acotada sobre un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$. En este capítulo se estudiará la integral de una función real de varias variables. Primeramente trataremos el caso de la integral de funciones dos variables o integrales dobles. La integral doble se interpreta geoméricamente como un volumen y la definiremos como el límite de sumas de Riemann¹ bi-dimensionales. En este caso el intervalo $[a, b]$ se reemplaza por un conjunto R bidimensional que llamamos región de integración. El integrando f es definido y acotado en R y la integral resultante se representa por $\iint_R f$, o bien $\iint_R f(x, y) dx dy$. Consideramos regiones rectangulares y luego se considerarán regiones más generales con bordes curvilíneos, haciendo énfasis en lo intuitivo de algunos aspectos geométricos de la integral doble y sobre todo en el método iterado del cálculo de estas integrales. Luego se considerará un análisis riguroso de la integral doble en términos de sumas de Riemann.

También se tratará la relación de la integral doble y las integrales de línea, así como aplicaciones al problema de cálculo de área, volúmenes, centro de gravedad, inercia, masa, y algunos problemas físicos que se resuelven con estos conceptos.

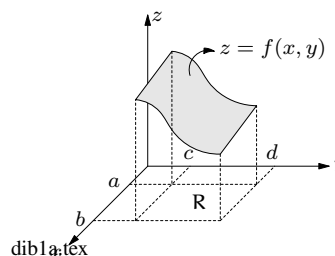
Se discute el modo de extender estos conceptos al caso n -dimensional.

Consideremos una función continua $f: R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, donde R es un rectángulo con los lados parale-

¹**Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866)** Nace el 17 de septiembre 1826 en Breselenz, Hannover, Alemania. Muere el 20 de julio 1866 en Selasca, Italia. Empezó a estudiar religión, intentando demostrar la veracidad del Génesis mediante razonamientos matemáticos. Fracaso en el intento, pero se descubrió su talento matemático y su ambición religiosa se desvió. Las ideas de Riemann concernientes a la geometría del espacio tuvo profundos efectos en el desarrollo de la teoría física moderna. En 1851 su tesis doctoral recibió la aprobación ni más ni de menos que del propio Gauss. Durante su corta vida, pues murió de tuberculosis, contribuyó a diversas ramas de las matemáticas. Su contribución más famosa fue la creación de una geometría no euclidiana, diferente a la de Lovachevski y Bolyai, que mejoró en 1854. La geometría de Riemann utiliza, en vez del axioma de Euclides sobre paralelas, el axioma de que por un punto dado no situado en una línea no se puede trazar ninguna paralela. En su geometría también se podían trazar cualquier número de líneas rectas por dos puntos, no existiendo líneas rectas de infinita longitud. Otra consecuencia importante es que en la geometría de Riemann la suma de los ángulos de un triángulo era superior a 180° . Esta geometría, que resulta cuanto menos chocante, se comprende si se considera la superficie de una esfera y restringimos nuestras figuras a esa esfera. Riemann generalizó la geometría hasta el punto que, cuando variaban las medidas en el espacio, podía transformar unas medidas en otras, según reglas fijas. Medio siglo más tarde Einstein pudo demostrar que la geometría de Riemann presentaba un idea más exacto del universo, que la de Euclides. Clarificó la noción de integral, definiendo lo que ahora llamamos Integral de Riemann. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann (conocidas un tiempo antes) y el concepto de la superficie de Riemann aparecen en su tesis doctoral.

los a los ejes coordenados x, y . El rectángulo R se puede escribir como el producto de dos intervalos cerrados $R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$.

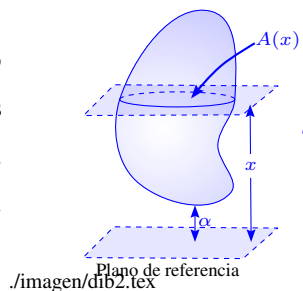
Vamos a suponer que $f(x, y) \geq 0$ sobre R , de manera que la superficie $z = f(x, y)$, el plano xy y los cuatro planos $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$, forman la frontera de una región V en el espacio.



Con el objeto de desarrollar el concepto intuitivo de sumas de Riemann, supongamos que hemos definido el volumen de una región. El volumen de la región limitada por R y superficie $z = f(x, y)$ se llama integral doble de f sobre R y la escribimos:

$$\iint_R f = \iint_R f(x, y) dx dy.$$

Hay un método para el cálculo de volúmenes conocido como Principio de Cavalieri, que establece lo siguiente: Supongamos que un cuerpo sólido tiene por área transversal $A(x)$, medida a una distancia x del plano de referencia, entonces el volumen del cuerpo está dado por $\int_{\alpha}^{\beta} A(x) dx$, donde α y β son las distancias mínima



y máxima a partir del plano de referencia². La justificación es simple, si partimos $[\alpha, \beta]$ en $\alpha =$

²**Bonaventura Francesco Cavalieri (1598-1647)** Nace en 1598 en Milán, Haboburg Empire (hoy Italia). Muere el 30 de Noviembre de 1647 en Bologna, Estado Papal (hoy Italia)

Cavalieri fue miembro de una orden religiosa Jesuita en Milán en 1615 cuando aún era muy joven. En 1616 fue transferido a un Monasterio Jesuita en Pisa. Su interés por las matemáticas fue estimulado por los trabajos de Euclides y luego de encontrar a Galileo, se consideró como un discípulo de este astrónomo. Cavalieri fue nominado para una cátedra de matemáticas en Bologna en 1619 pero no fue muy exitoso debido a que fue considerado muy joven para ese puesto que requería de antigüedad. En 1629 Cavalieri fue nombrado profesor de matemáticas en Bologna pero en ese tiempo había ya desarrollado un método de lo indivisible, lo cual llegó a ser un factor importante en el desarrollo del Cálculo Integral. La teoría de lo indivisible de Cavalieri, presentada en su "Geometría indivisibilis continuorum nova" de 1635 era un desarrollo del método exhaustivo de Arquímedes incorporado en la teoría infinitesimal y pequeñas cantidades geométricas de Kepler. En su replica Cavalieri mejoró esta publicación en su "Exercitationes geometricae sex" la cual fue la fuente principal de las matemáticas. Cavalieri fue responsable de la mayor parte de la introducción de los logaritmos como una herramienta computacional en Italia, a través de su libro "Directorium Generale Uranometricum". Las tablas de logaritmos que él publicó, incluyeron logaritmos de funciones trigonométricas para el uso de los astrónomos. Cavalieri también escribió de las secciones cónicas, trigonometría, óptica, astronomía y astrología. El desarrollo una regla general para el largo focal de los lentes y describe la reflexión del telescopio. Cavalieri mantuvo correspondencia con otros matemáticos incluyendo a Galileo, Mersenne, Renieri, Rocca, Torricelli y Viviani. Su correspondencia con Galileo incluyeron

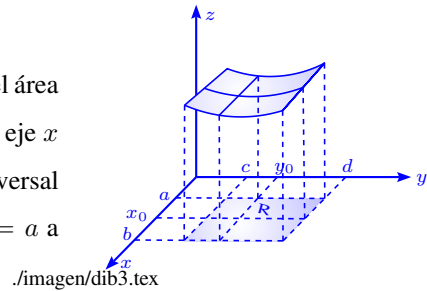
$x_0 < x_1 < \dots < x_n = \beta$, entonces la suma de Riemann que aproxima el volumen es:

$$\sum_{i=0}^{n-1} A(c_i)(x_{i+1} - x_i) \longrightarrow \int_{\alpha}^{\beta} A(x) dx, \text{ cuando } n \rightarrow \infty,$$

donde c_i es un valor entre x_i y x_{i+1} .

Consideremos ahora la región sólida bajo la gráfica $z = f(x, y)$ definida en la región $[a, b] \times [c, d]$, donde f es continua y positiva.

En el caso que nos ocupa hay dos formas naturales de determinar el área de una sección transversal: una usando planos perpendiculares al eje x y otra usando planos perpendiculares al eje y . La sección transversal al plano $y = y_0$, es la región bajo la gráfica $z = f(x, y_0)$ de $x = a$ a $x = b$.



Cuando se fija y_0 , la función $x \mapsto f(x, y_0)$ es continua en $[a, b]$, el área transversal $A(y_0) = \int_a^b f(x, y_0) dx$, lo que define la aplicación $A: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $y \mapsto \int_a^b f(x, y) dx$. De esta manera el principio de Cavalieri nos indica que el volumen de la región bajo la superficie $z = f(x, y)$ es:

$$V = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy,$$

donde la integral precedente se denomina integral iterada, pues se obtiene integrando primero con respecto a x y luego integrando con respecto a y . Así se tiene que:

$$V = \iint_{\mathbb{R}} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy.$$

Cambiando los papeles fijados por x y y en el estudio se tiene:

$$V = \iint_{\mathbb{R}} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx.$$

En conclusión, si la noción intuitiva que tenemos del volumen es correcta, las fórmulas anteriores son válidas. Este resultado, que demostraremos más adelante, se conoce por teorema de Fubini y nos da una forma clara de calcular la integral doble de una función de dos variables.

a lo menos 112 cartas. Galileo tuvo un buen concepto de Cavalieri al mantener correspondencia. Tal vez para Cavalieri su más famoso estudiante fue Stefano Degli Angeli. Él estudió con Cavalieri en Bologna en el tiempo cuando ya estaba viejo y sufriendo de artritis. Angeli escribió muchas cartas a Cavalieri las cuales envió a algunos matemáticos durante su tiempo de estudios.

Finalmente es importante observar que podemos eliminar los paréntesis cuadrados en las integrales iteradas, como en las ecuaciones anteriores y escribir:

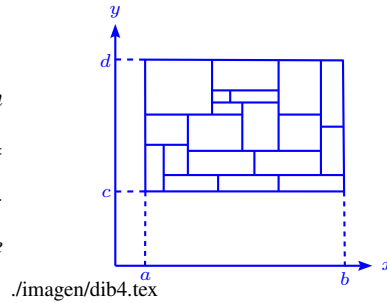
$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy.$$

1.1 Particiones de rectángulos. Funciones escalonadas

Consideremos el rectángulo $R \subset \mathbb{R}^2$, producto cartesiano de dos intervalos cerrados $[a, b] \times [c, d]$ i.e. $R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$.

Definición 1.1.1 Sea $P \subset \mathcal{P}(R)$, P es una partición de un rectángulo R , si P es una familia de sub-rectángulos R_k , $k = 1, \dots, m$, de interior no vacío tales que $R = \bigcup_{k=1}^m R_k$ y la intersección entre dos de ellos es vacía o se intersecan únicamente en la frontera.



Cada $R_k \in P$, es de la forma $R_k = [a_k, b_k] \times [c_k, d_k]$.

Definición 1.1.2 Se dice que dos partes A y $B \subset \mathbb{R}^2$ no se cruzan o no se traslapan, si su intersección es vacía o se intersecan únicamente en la frontera.

Definición 1.1.3 Una partición P' de R se dice más fina que la partición P , si todo sub-rectángulo de P' está contenido en un sub-rectángulo de P y se escribe $P \leq P'$.

Consideremos dos particiones P_1 y P_2 de $[a, b]$ y $[c, d]$ respectivamente:

$$P_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}, \quad P_2 = \{y_0, y_1, \dots, y_{m-1}, y_m\},$$

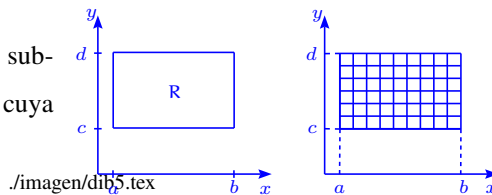
donde $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d$, entonces el producto cartesiano:

$$P = P_1 \times P_2 = \{R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] / i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m\}$$

es una partición de R .

En efecto, la partición P descompone a R en $n \cdot m$ sub-rectángulos de interior no vacío que no se cruzan, cuya

unión es R i.e. $R = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m R_{ij}$.

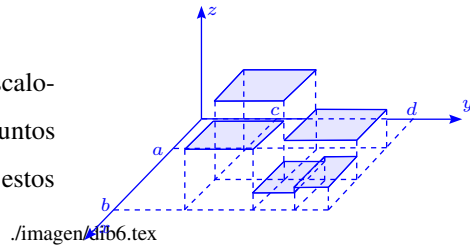


Definición 1.1.4 Sea P una partición de R i.e. $R = \bigcup_{k=1}^m R_k$, se denomina norma de una partición de P al valor $\max\{d(R_k)/k = 1, \dots, m\}$, donde $d(R_k) = \sup_{\substack{(x,y) \in R_k \\ (x',y') \in R_k}} \|(x,y) - (x',y')\|$ y se denota $\|P\|$.

Definición 1.1.5 Dado el sub-rectángulo $R_k = [a_k, b_k] \times [c_k, d_k] \in P$, llamamos sub-rectángulo abierto de P o de R , a $\overset{\circ}{R}_k =]a_k, b_k[\times]c_k, d_k[$ [producto cartesiano de los intervalos abiertos, o sea es un sub-rectángulo sin los lados.

Definición 1.1.6 Definición de función escalonada Una función f definida en un rectángulo R se dice escalonada, si existe una partición P de R tal que f es constante en cada uno de los sub-rectángulos abiertos de la partición P y escribimos $f \in \mathbf{E}(R)$.

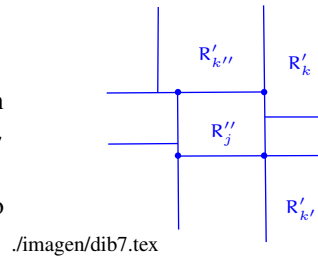
En la figura adjunta se muestra un ejemplo de función escalonada. La función tiene valores dados en cada uno de los puntos de los bordes de los sub-rectángulos, pero los valores en estos bordes no tienen influencia en el cálculo de la integral.



Cuando consideramos dos particiones P' y P'' de R , en general la unión $P' \cup P''$ no es una partición de R . Sin embargo, a partir de ellas se puede inducir una partición P más fina que las particiones P' y P'' , que denominamos partición inducida por la superposición de P' y P'' .

En efecto, si P' y P'' son particiones de R , entonces $R = \bigcup_{k=1}^n R'_k = \bigcup_{j=1}^m R''_j$, $R'_k \in P'$, $R''_j \in P''$. Sea $I = \{(k,j) / \overset{\circ}{R}'_k \cap \overset{\circ}{R}''_j \neq \emptyset, k = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m\}$, entonces $R = \bigcup_{(k,j) \in I} \overset{\circ}{R}'_k \cap \overset{\circ}{R}''_j$, donde se han quitado los elementos que en la intersección nos da puntos o segmentos de recta (lados o pedazos de lados de los subrectángulos), ya que estos puntos o segmentos de recta siempre van a pertenecer o están incluidos en otra intersección con interior no vacío.

En la figura adjunta, el conjunto $\overset{\circ}{R}''_j$ siempre va a intersectarse con un conjunto $\overset{\circ}{R}'_{k'}$ tal que para cada elemento de la frontera de $\overset{\circ}{R}''_j$ está en $\overset{\circ}{R}'_{k'} \cap \overset{\circ}{R}''_{j'}$, donde $\overset{\circ}{R}'_{k'} \cap \overset{\circ}{R}''_{j'} \neq \emptyset$, pues en caso contrario $\overset{\circ}{R}''_j \not\subset \bigcup_{k=1}^n \overset{\circ}{R}'_k = R$.



Observemos que cada elemento de $\overset{\circ}{R}'_k \cap \overset{\circ}{R}''_j$, con $(k,j) \in I$, tiene la propiedad de estar incluido en $\overset{\circ}{R}'_k$ y en cada $\overset{\circ}{R}''_j$, por lo que la partición inducida por las particiones P' y P'' es más fina que las particiones originales P' y P'' .

Definición 1.1.7 La nueva partición P inducida por las particiones P' y P'' la llamamos *superposición de las particiones P' y P''* .

Esta partición es más fina que las particiones P' y P'' .

Proposición 1.1.1 Sean f, g funciones escalonadas definidas sobre el rectángulo R , la combinación lineal $\alpha f + \beta g$ también es escalonada sobre R , o sea $\mathbf{E}(R)$ es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} .

Demostración Sean P' y P'' particiones de R tales que f es constante en los sub-rectángulos de P' y g es constante en los sub-rectángulos de P'' . Claramente f es constante en los rectángulos de la partición inducida por la superposición P' y P'' , lo mismo que g , por lo que $\alpha f + \beta g$ es constante sobre los sub-rectángulos abiertos de la partición inducida por P' y P'' . Así pues, el conjunto $\mathbf{E}(R)$ de funciones escalonadas sobre R es un espacio vectorial.

Sea P una partición de R , sea f una función escalonada sobre R , sea R_k el rectángulo determinado por $[x'_k, x_k] \times [y'_k, y_k]$ y sea α_k el valor que toma f en el interior de R_k . Si f es positiva, el volumen de cada caja rectangular con base R_k y altura α_k es el producto $\alpha_k(x_k - x'_k)(y_k - y'_k) = \alpha_k \Delta x_k \Delta y_k$ y la suma de todas estas cantidades se define como la integral doble de f sobre R . Se dará la siguiente definición.

Definición 1.1.8 Definición de la integral doble de una función $f \in \mathbf{E}(R)$

Sea f una función escalonada sobre R que toma el valor α_k sobre el sub-rectángulo abierto $\overset{\circ}{R}_k =]x'_k, x_k[\times]y'_k, y_k[$ de R , la integral doble de f sobre R se define por:

$$\iint_R f = \sum_{k=1}^m \alpha_k (x_k - x'_k)(y_k - y'_k) = \sum_{k=1}^m \alpha_k \Delta x_k \Delta y_k = \iint_R f(x, y) dx dy.$$

Observemos que la integral doble de f sobre R no varía, si se toma una partición P' más fina que la partición de P inducida por la función escalonada de f .

Resaltamos el hecho que $\iint_R \alpha f = \alpha \iint_R f, \forall f \in \mathbf{E}(R), \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Si f es constante en el intervalo de R se tiene que $\iint_R f = \alpha(b-a)(d-c)$, donde $f(x, y) = \alpha$,

$\forall (x, y) \in \overset{\circ}{R} =]a, b[\times]c, d[$, por lo que:

$$\iint_R f = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx. \quad (1)$$

De manera general, si f es una función escalonada sobre el rectángulo R , entonces para cada sub-rectángulo R_k de R se tiene:

$$\iint_{R_k} f = \int_{y'_k}^{y_k} \left(\int_{x'_k}^{x_k} f(x, y) dx \right) dy = \int_{x'_k}^{x_k} \left(\int_{y'_k}^{y_k} f(x, y) dy \right) dx,$$

por lo que sumando sobre k obtenemos:

$$\iint_R f = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx,$$

es decir que la fórmula (1) también es válida para funciones escalonadas.

Sin embargo ésta última conclusión no es tan clara, pues estamos sumando sobre el índice $k = 1, \dots, m$ y no es evidente la igualdad de las integrales. Para solventar este problema recordemos que la integral doble no varía si se usan particiones más finas que la partición original dada para la función f .

Definición 1.1.9 Sea P' una partición de modo que $R_k = [a_k, b_k] \times [c_k, d_k] \in P'$, $k = 1, \dots, m'$ y consideremos:

$$P_1 : \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\} = \{a_k, b_k / k = 1, \dots, m'\},$$

$$P_2 : \{c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d\} = \{c_k, d_k / k = 1, \dots, m'\},$$

entonces $P = P_1 \times P_2$ es una partición llamada *partición cartesiana inducida por P'* y es más fina que P' .

Sea P' la partición dada por f y sea P la partición cartesiana inducida por P' , entonces:

$$\begin{aligned} \iint_R f &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \iint_{R_{ij}} f = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \iint_{R_{ij}} f \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \int_{y_{j-1}}^{y_j} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, y) dx \right) dy = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x, y) dy \right) dx \\ &= \sum_{i=1}^n \int_c^d \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, y) dx \right) dy = \sum_{j=1}^m \int_a^b \left(\int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx. \end{aligned}$$

Observación Es importante ver que la partición cartesiana P que se generó, nos ayudó a ver claramente el porqué se puede intercambiar el orden de integración iterado.

Destaquemos el hecho que al usar en la integral $(x_k - x'_k)(y_k - y'_k)$, en realidad estamos midiendo el área del rectángulo R_k y podemos escribir:

$$\iint_R f = \sum_{k=1}^m \alpha_k (x_k - x'_k)(y_k - y'_k) = \sum_{k=1}^m \alpha_k \Delta x_k \Delta y_k = \sum_{k=1}^m \alpha_k A(R_k).$$

donde $A(R_k)$ designa el área del rectángulo R_k .

Teorema 1.1.1 Sean $f, g \in \mathbf{E}(\mathbb{R})$, con $R = [a, b] \times [c, d]$ y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces:

i)
$$\iint_R (\alpha f + \beta g) = \alpha \iint_R f + \beta \iint_R g.$$

ii) Si R está dividido en dos rectángulos R_1 y R_2 ,
$$\iint_R f = \iint_{R_1} f + \iint_{R_2} f.$$

iii) Si $f(x, y) \leq g(x, y)$, $\forall (x, y) \in R$,
$$\iint_R f \leq \iint_R g.$$

En particular si $g(x, y) \geq 0$, $\forall (x, y) \in R$,
$$\iint_R g \geq 0.$$

Demostración

i) Sean P_f y P_g las particiones dadas por las funciones escalonadas f y g respectivamente, la partición P inducida por la superposición de P_f y P_g , es una partición en la cual las funciones f y g i.e. $\alpha f + \beta g$, son constantes sobre cada uno de los sub-rectángulos abiertos de la partición $P = \{R_k/k = 1, \dots, m\}$.

De esta forma tenemos:

$$\begin{aligned} \iint_R (\alpha f + \beta g) &= \sum_{k=1}^m \iint_{R_k} (\alpha f + \beta g) = \sum_{k=1}^m \left(\alpha \iint_{R_k} f + \beta \iint_{R_k} g \right) \\ &= \alpha \sum_{k=1}^m \iint_{R_k} f + \beta \sum_{k=1}^m \iint_{R_k} g = \alpha \iint_R f + \beta \iint_R g. \end{aligned}$$

ii) Si R está dividido en dos rectángulos, entonces $R = R_1 \cup R_2$. Hay varias maneras de escribir este rectángulo. Supongamos por ejemplo que:

$$R = [a, b] \times [c, d] = [a, a'] \times [c, d] \cup [a', b] \times [c, d].$$

Sea P'_f la partición dada por la función escalonada f y sea P'_f la partición cartesiana inducida por P'_f i.e. $P'_f = P_1 \times P_2$.

Si la partición P'_f es tal que $a' \in P_1$, se toma $P_f = P'_f$.

Si $a' \notin P_1$ se considera la partición más fina $P_f = P_1 \cup \{a'\} \times P_2$, la función f sigue siendo escalonada

en P_f y de igual integral que en P'_f y en P''_f . Así tenemos que $P_f = P_f^a \cup P_f^{a'}$, donde $P_f^a: a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n'} = a'$, $P_f^{a'}: a' = x_{n'} < x_{n'+1} < \dots < x_n = b$, $P_f^a = P_1^a \times P_2$ y $P_f^{a'} = P_1^{a'} \times P_2$, por lo que:

$$\iint_{\mathbf{R}} f = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \iint_{\mathbf{R}_{ij}} f = \sum_{i=1}^{n'} \sum_{j=1}^m \iint_{\mathbf{R}_{ij}} f + \sum_{i=n'+1}^n \sum_{j=1}^m \iint_{\mathbf{R}_{ij}} f = \iint_{\mathbf{R}_1} f + \iint_{\mathbf{R}_2} f.$$

Observemos que $P_1^a \times P_2$ es una partición de $[a, a'] \times [c, d]$ y $P_1^{a'} \times P_2$ es una partición de $[a', b] \times [c, d]$.

De manera análoga se puede proceder si el rectángulo \mathbf{R} se parte en el eje y . Esto evidencia la manera de proceder si se tiene una división de \mathbf{R} en más de dos rectángulos.

iii) Si $f(x, y) \leq g(x, y)$, $\forall (x, y) \in \mathbf{R}$, se tiene que $f(x, y) \leq g(x, y)$, $\forall (x, y) \in \mathbf{R}_k$, $k = 1, \dots, m$, donde \mathbf{R}_k es un sub-rectángulo de la partición inducida por P_f y P_g . Sobre cada uno de estos sub-rectángulos f y g son constantes i.e. $f = \alpha_k \leq g = \beta_k$, entonces:

$$\iint_{\mathbf{R}_k} f = \alpha_k A(\mathbf{R}_k) \leq \beta_k A(\mathbf{R}_k) = \iint_{\mathbf{R}_k} g \implies \iint_{\mathbf{R}} f = \sum_{k=1}^m \iint_{\mathbf{R}_k} f \leq \sum_{k=1}^m \iint_{\mathbf{R}_k} g = \iint_{\mathbf{R}} g.$$

Si $f = 0$, entonces $\iint_{\mathbf{R}} f = 0$ y se tiene el resultado para el caso en que $g(x, y) \geq 0$, es decir $\iint_{\mathbf{R}} g \geq \iint_{\mathbf{R}} f = 0$.

1.1.1 Definición de la integral doble de una función definida y acotada en un rectángulo

Sea f una función definida y acotada en un rectángulo \mathbf{R} , de modo que $|f(x, y)| \leq M$, $\forall (x, y) \in \mathbf{R}$, i.e. f está acotada en \mathbf{R} y sean s y t dos funciones escalonadas sobre \mathbf{R} tales que $s(x, y) \leq f(x, y) \leq t(x, y)$, $\forall (x, y) \in \mathbf{R}$, entonces si existe un número real I único tal que:

$$\iint_{\mathbf{R}} s \leq I \leq \iint_{\mathbf{R}} t, \quad (2)$$

$\forall s, t$ funciones escalonadas sobre \mathbf{R} que satisfacen $s \leq f \leq t$, $\forall (x, y) \in \mathbf{R}$, se denomina a I como la integral doble de f sobre \mathbf{R} y se denota con el símbolo:

$$I = \iint_{\mathbf{R}} f = \iint_{\mathbf{R}} f(x, y) dx dy.$$

Cuando I existe, se dice también que la función f es integrable sobre \mathbf{R} .

1.1.2 Integral doble superior e inferior

Sea f una función acotada sobre el rectángulo R y sean s, t dos funciones escalonadas tales que $s \leq f \leq t$ en R . Sean

$$G = \left\{ \iint_R s/s \text{ es escalonada en } R, s \leq f \text{ en } R \right\} \text{ y}$$

$$H = \left\{ \iint_R t/t \text{ es escalonada en } R, f \leq t \text{ en } R \right\},$$

entonces G y H son conjuntos no vacíos ya que f es acotada i.e. $|f| \leq M \implies -M \in G$ y $M \in H$. Además, $\iint_R s \leq \iint_R t$, si $s \leq f \leq t$, por lo que $\forall a \in G, \forall b \in H$, se tiene $a \leq b$. Por consiguiente, G es acotada superiormente y H es acotada inferiormente y tenemos:

$$\iint_R s \leq \sup G \leq \inf H \leq \iint_R t, \quad \forall s, \forall t \text{ escalonadas tales que } s \leq f \leq t \text{ en } R.$$

Así hemos probado que los números $\sup G$ e $\inf H$ satisfacen la ecuación (2) y se concluye que f es integrable o Riemann integrable $\iff \sup G = \inf H$.

El número $\sup G$ se llama integral inferior de f y se denota por $\underline{I}(f)$. El número $\inf H$ se llama integral superior de f y se denota $\bar{I}(f)$. De esta forma hemos probado el siguiente teorema.

Teorema 1.1.2 *Sea f una función acotada en un rectángulo R de modo que:*

$$\iint_R s \leq \underline{I}(f) \leq \bar{I}(f) \leq \iint_R t, \quad \forall s, \forall t, \text{ escalonadas tales que } s \leq f \leq t,$$

entonces la función f es integrable en R si y sólo si la integral superior y la integral inferior de f son iguales y tenemos:

$$\iint_R f = \underline{I}(f) = \bar{I}(f).$$

Corolario 1.1.1 *Sea f una función acotada en un rectángulo R , entonces la función f es integrable en R si y sólo si $\forall \epsilon > 0$, existen funciones escalonadas s y t tales que $s \leq f \leq t$ sobre R y $\iint_R (t - s) < \epsilon$.*

En particular si f es integrable, $-f$ también es integrable pues $-t \leq -f \leq -s$ sobre R y $\iint_R (-s - (-t)) < \epsilon$.

Teorema 1.1.3 *Sean f y g dos funciones acotadas e integrables sobre el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$ y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces:*

$$i) \iint_{\mathbb{R}} (\alpha f + \beta g) = \alpha \iint_{\mathbb{R}} f + \beta \iint_{\mathbb{R}} g.$$

$$ii) \text{ Si } \mathbb{R} \text{ se subdivide en dos rectángulos } \mathbb{R}_1 \text{ y } \mathbb{R}_2, \iint_{\mathbb{R}} f = \iint_{\mathbb{R}_1} f + \iint_{\mathbb{R}_2} f.$$

$$iii) \text{ Si } f(x, y) \leq g(x, y) \text{ en } \mathbb{R}, \iint_{\mathbb{R}} f \leq \iint_{\mathbb{R}} g.$$

$$\text{En particular si } g(x, y) \geq 0 \text{ en } \mathbb{R}, \iint_{\mathbb{R}} g \geq 0.$$

Demostración Sin pérdida de generalidad asumimos que $\alpha > 0$ y $\beta > 0$, ya que si $\beta < 0$, $-\beta > 0$ y tomamos la función escalonada $-g$ de modo que $(-\beta)(-g) = \beta g$.

i) Si f y g son integrables tenemos que $\underline{I}(f) = \bar{I}(f)$ y $\underline{I}(g) = \bar{I}(g)$. Por otro lado, sean s, s', t, t' funciones escalonadas en \mathbb{R} tales que $s \leq f \leq t, s' \leq g \leq t'$, entonces $\alpha s + \beta s' \leq \alpha f + \beta g \leq \alpha t + \beta t'$, donde $\alpha s + \beta s'$ y $\alpha t + \beta t'$ son escalonadas sobre \mathbb{R} .

Debemos probar que $\alpha f + \beta g$ es integrable i.e. $\sup_{s \leq \alpha f + \beta g} \iint_{\mathbb{R}} s = \inf_{\alpha f + \beta g \leq t} \iint_{\mathbb{R}} t$.

En efecto, la función escalonada $\alpha s + \beta s'$, con s, s' escalonadas, $s \leq f, s' \leq g$ y la función escalonada $\alpha t + \beta t'$, con t, t' escalonadas, $f \leq t, g \leq t'$ satisfacen:

$$\alpha s + \beta s' \leq \alpha f + \beta g \leq \alpha t + \beta t' \implies$$

$$\sup_{\substack{s \leq f \\ s' \leq g}} \iint_{\mathbb{R}} \alpha s + \beta s' \leq \sup_{s \leq \alpha f + \beta g} \iint_{\mathbb{R}} s = \underline{I}(\alpha f + \beta g) \leq \bar{I}(\alpha f + \beta g) = \inf_{\alpha f + \beta g \leq t} \iint_{\mathbb{R}} t \leq \inf_{\substack{f \leq t \\ g \leq t'}} \iint_{\mathbb{R}} \alpha t + \beta t',$$

$$\text{pero } \sup_{\substack{s \leq f \\ s' \leq g}} \iint_{\mathbb{R}} \alpha s + \beta s' = \sup_{\substack{s \leq f \\ s' \leq g}} \left(\alpha \iint_{\mathbb{R}} s + \beta \iint_{\mathbb{R}} s' \right) = \alpha \underline{I}(f) + \beta \underline{I}(g) \text{ y}$$

$$\inf_{\substack{f \leq t \\ g \leq t'}} \iint_{\mathbb{R}} \alpha t + \beta t' = \inf_{\substack{f \leq t \\ g \leq t'}} \left(\alpha \iint_{\mathbb{R}} t + \beta \iint_{\mathbb{R}} t' \right) = \alpha \bar{I}(f) + \beta \bar{I}(g) \text{ son iguales, por lo que se tiene que}$$

$\underline{I}(\alpha f + \beta g) = \bar{I}(\alpha f + \beta g)$, o sea $\alpha f + \beta g$ es integrable y

$$\iint_{\mathbb{R}} \alpha f + \beta g = \alpha \iint_{\mathbb{R}} f + \beta \iint_{\mathbb{R}} g.$$

ii) Sea f una función acotada e integrable en \mathbb{R} i.e. $\underline{I}(f) = \bar{I}(f)$ y sean s y t funciones escalonadas en \mathbb{R} tales que $s \leq f \leq t$. Como el resultado es válido para funciones escalonadas y como $s \leq f \leq t$ en \mathbb{R}_1 y \mathbb{R}_2 tenemos:

$$\iint_{\mathbb{R}} s = \iint_{\mathbb{R}_1} s + \iint_{\mathbb{R}_2} s \leq \iint_{\mathbb{R}_1} f + \iint_{\mathbb{R}_2} f \leq \iint_{\mathbb{R}_1} t + \iint_{\mathbb{R}_2} t = \iint_{\mathbb{R}} t,$$

o bien

$$\iint_{\mathbb{R}} s \leq \iint_{\mathbb{R}_1} f + \iint_{\mathbb{R}_2} f \leq \iint_{\mathbb{R}} t \implies \sup_{s \leq f} \iint_{\mathbb{R}} s = I(f) \leq \iint_{\mathbb{R}_1} f + \iint_{\mathbb{R}_2} f \leq I(f) = \inf_{f \leq t} \iint_{\mathbb{R}} t,$$

es decir

$$\iint_{\mathbb{R}} f = \iint_{\mathbb{R}_1} f + \iint_{\mathbb{R}_2} f.$$

iii) Probemos que si $f \geq 0$ en \mathbb{R} , entonces $\iint_{\mathbb{R}} f \geq 0$.

En efecto, f es integrable por lo que si t es escalonada tal que $t \geq f \geq 0$, entonces $\iint_{\mathbb{R}} t \geq 0, \forall t$

escalonada, $t \geq f \implies \inf_{t \geq f} \iint_{\mathbb{R}} t = \iint_{\mathbb{R}} f \geq 0$.

Aplicando el resultado anterior a $g - f \geq 0 \implies \iint_{\mathbb{R}} (g - f) = \iint_{\mathbb{R}} g - \iint_{\mathbb{R}} f \geq 0$, o sea si $g \geq f$ en \mathbb{R} ,

$$\iint_{\mathbb{R}} g \geq \iint_{\mathbb{R}} f.$$

El teorema de Fubini permite establecer una manera de calcular integrales dobles por medio de integrales iteradas, sin importar el orden de esta integración. Este resultado ya se había probado para el caso de funciones escalonadas.

Teorema 1.1.4 Teorema de Fubini³

Sea f una función definida acotada e integrable en un rectángulo $\mathbb{R} = [a, b] \times [c, d]$.

Si para cada y fija, $y \in [c, d]$, la integral $\int_a^b f(x, y) dx$ existe, (valor que denotamos $\alpha(y)$) y si la

³**Guido Fubini (1879-1943)** Nace el 19 de enero 1879 en Venecia, Italia. Muere el 6 de junio de 1943 en New York, U.S.A. En 1896 Fubini entró a la Escuela Normal Superior de Pisa. Fue influido por Dini y Bianchi a estudiar geometría. Presentó su tesis doctoral en paralelismo en espacios elípticos de Clifford, en 1900.

Enseñó en la Universidad de Catania, Sicilia, en el Politécnico y en la Universidad de Turín. Por diferencias con el gobierno de Mussolini, Fubini fue forzado a jubilarse de su puesto en Turín. Recibió una invitación del Instituto de Estudios Avanzados en Princeton en 1939 y emigra a los Estados Unidos. Por sus problemas de la salud, muere cinco años después del corazón. Los intereses de Fubini en matemáticas eran muy diversos. Además del área del análisis, trabajó en el cálculo de variaciones donde él estudió la integral de Weierstrass reduciéndola a la integral de Lebesgue y expresa la integral de superficie en términos de dos integraciones simples. Otro tema de análisis que estudió fue las ecuaciones integrales no lineales. Fubini trabajó también en la teoría de grupos, en grupos lineales y grupos de funciones de automorfismos. Sus intereses incluyeron los grupos continuos donde trató el problema de proveer de una métrica al grupo. En espacios no euclidianos, extendió resultados de Appell y Mittag-Leffler. Sus trabajos más importantes fueron en geometría diferencial proyectiva, donde usó el cálculo diferencial. El teorema de la igualdad de las integrales iteradas lleva el nombre de Fubini, quien lo probó con gran generalidad en 1907, aunque Cauchy y sus contemporáneos ya sabían que se cumplía la igualdad para funciones continuas.

integral $\int_c^d \alpha(y) dy$ existe, entonces es igual a la integral doble $\iint_{\mathbf{R}} f$.

Además si para cada $x \in [a, b]$ fijo, la integral $\int_c^d f(x, y) dy$ existe (valor que denotaremos $\beta(x)$) y si $\int_a^b \beta(x) dx$ existe, entonces es igual a la integral doble $\iint_{\mathbf{R}} f$.

Finalmente escribimos:

$$\iint_{\mathbf{R}} f = \iint_{\mathbf{R}} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Demostración Demostremos la primera parte del teorema. Sean s y t funciones escalonadas en \mathbf{R} tales que $s \leq f \leq t$, entonces integrando con respecto a x se tiene:

$$\int_a^b s(x, y) dx \leq \int_a^b f(x, y) dx = \alpha(y) \leq \int_a^b t(x, y) dx$$

Como por hipótesis $\alpha(y)$ es integrable en $[c, d]$:

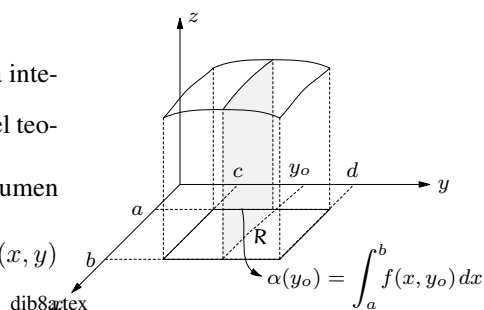
$$\int_c^d \int_a^b s(x, y) dx dy = \iint_{\mathbf{R}} s \leq \int_c^d \alpha(y) dy \leq \int_c^d \int_a^b t(x, y) dx dy = \iint_{\mathbf{R}} t,$$

entonces $\sup_{s \leq f} \iint_{\mathbf{R}} s = \iint_{\mathbf{R}} f \leq \int_c^d \alpha(y) dy \leq \inf_{f \leq t} \iint_{\mathbf{R}} t = \iint_{\mathbf{R}} f$, lo que verifica la primera parte del resultado. Un razonamiento similar prueba la segunda parte del teorema.

El teorema de Fubini nos permite obtener una interpretación geométrica. Si f es no negativa, el conjunto $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq z \leq f(x, y), (x, y) \in \mathbf{R}\}$ es una región del espacio que se representa en la gráfica adjunta, cuyo volumen es la integral doble de f sobre \mathbf{R} .

Para cada y_0 en el intervalo $[c, d]$, la integral $\alpha(y_0) = \int_a^b f(x, y_0) dx$ es el área de la sección producida por el corte del plano $y = y_0$ con la región S .

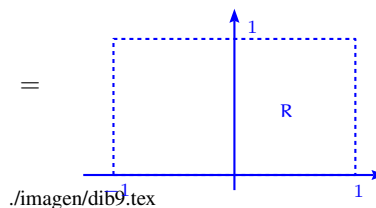
Como el área de la sección $\alpha(y)$ es integrable en $[c, d]$, la integral $\int_c^d \alpha(y) dy$ es igual al volumen de S . De esta forma, el teorema asegura que para funciones no negativas $\iint_{\mathbf{R}} f$ el volumen de S , o sea el volumen de la región bajo la superficie $z = f(x, y)$ en \mathbf{R} .



Ejemplo 1.1.1 Sea $f(x, y) = x^2 + y^2$ y sea $\mathbf{R} = [-1, 1] \times [0, 1]$, calcular $\iint_{\mathbf{R}} f$, si f es integrable.

Si la integral existe debemos tener que la integral doble $\iint_{\mathbb{R}} f =$

$$\int_0^1 \left(\int_{-1}^1 (x^2 + y^2) dx \right) dy.$$



Denotando $\alpha(y) = \int_{-1}^1 (x^2 + y^2) dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + y^2x \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{3} + 2y^2$ e integrando $\alpha(y)$ tenemos

$$\int_0^1 \left(\frac{2}{3} + 2y^2 \right) dy = \left(\frac{2}{3}y + \frac{2}{3}y^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{4}{3}.$$

Invirtiendo el orden de integración, $\iint_{\mathbb{R}} f = \int_{-1}^1 \left(\int_0^1 (x^2 + y^2) dy \right) dx.$

Considerando a x como constante, $\int_0^1 (x^2 + y^2) dy = \left(x^2y + \frac{1}{3}y^3 \right) \Big|_0^1 = x^2 + \frac{1}{3}$ e integrando el resultado

con respecto a x , $\int_{-1}^1 \left(x^2 + \frac{1}{3} \right) dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{4}{3}.$

1.1.3 Conjuntos de contenido nulo

Definición 1.1.10 Un conjunto $S \subset \mathbb{R}^2$ se dice de contenido nulo, si $\forall \epsilon > 0, \exists \mathbb{R}_1, \dots, \mathbb{R}_m$ rectángulos tales que $S \subset \bigcup_{k=1}^m \mathbb{R}_k$ y $\sum_{k=1}^m A(\mathbb{R}_k) \leq \epsilon.$

La definición nos ilustra la forma en que un conjunto tiene contenido nulo, pues debe cubrirse por una familia de rectángulos cuya área total sea todo lo pequeño que deseamos.

Propiedades

- a) Todo conjunto finito de puntos tiene contenido nulo.
- b) La unión de un número finito de conjuntos acotados de contenido nulo es de contenido nulo.
- c) Todo subconjunto de un conjunto de contenido nulo es de contenido nulo.
- d) Todo segmento de recta tiene contenido nulo.

Demostración

a) Sea $A = \{(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)\} \subset \mathbb{R}^2$ y sea $\epsilon > 0$, entonces:

$$(x_i, y_i) \in \left[x_i - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon}{2m}}, x_i + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon}{2m}} \right] \times \left[y_i - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon}{2m}}, y_i + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon}{2m}} \right] = \mathbb{R}_i,$$

o sea $A \subset \bigcup_{i=1}^m \mathbb{R}_i$ y $\sum_{i=1}^m A(\mathbb{R}_i) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} \frac{\epsilon}{m} = \frac{1}{2}\epsilon < \epsilon.$

b) Sea $(A_i)_{i=1, \dots, n}$ una familia de conjuntos de contenido nulo y sea $\epsilon > 0$, entonces para cada $i = 1, \dots, n$, se tiene que existen $(\mathbb{R}_j^i)_{j=1, \dots, m_i}$ tales que $A_i \subset \bigcup_{j=1}^{m_i} \mathbb{R}_j^i$, con $\sum_{j=1}^{m_i} A(\mathbb{R}_j^i) < \frac{\epsilon}{n}.$

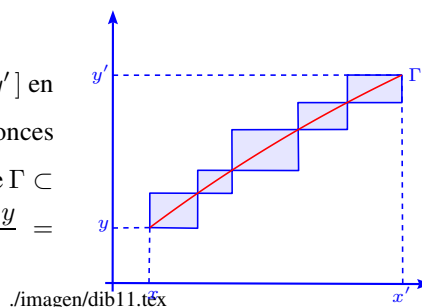
Así se tiene que $\bigcup_{i=1}^n A_i \subset \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^{m_i} R_j^i$ y $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} A(R_j^i) < \sum_{i=1}^n \frac{\epsilon}{n} = \epsilon$.

c) Sea $B \subset A$, con A de contenido nulo, $B \subset A \subset \bigcup_{i=1}^m R_i$, $\sum_{i=1}^m A(R_i) < \epsilon$, B es de contenido nulo.

d) Sea $\epsilon > 0$ y sea Γ un segmento de recta que inicia en (x, y) y termina en (x', y') .

Supongamos que $x < x'$, $y < y'$, se parte el intervalo $[x, x']$ y $[y, y']$ en n -intervalos iguales, donde n es tal que $\frac{(x' - x)(y' - y)}{n} < \epsilon$, entonces

$x = x_0 < x_1 < \dots < x_n = x'$, $y = y_0 < y_1 < \dots < y_n = y'$, por lo que $\Gamma \subset \bigcup_{i=1}^n [x_{i-1}, x_i] \times [y_{i-1}, y_i]$, donde $\sum_{i=1}^n A(R_i) = \sum_{i=1}^n \frac{x' - x}{n} \frac{y' - y}{n} = \frac{x' - x}{n} (y' - y) < \epsilon$.



1.2 Sumas de Riemann y la integral de Riemann

Definición 1.2.1 Sea f una función acotada en un rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$ y sea P una partición de R , la suma $S_P(f) = S(P, f) = \sum_{k=1}^m f(\zeta_k) A(R_k)$, con $\zeta_k \in R_k$, se llama suma de Riemann de la función f asociada a la partición P .

Es claro que la suma S_P depende de la función f y de la escogencia de $\zeta_k \in R_k$.

En lo que sigue se demostrará la equivalencia de estas dos nociones para definir la integral: funciones escalonadas y sumas de Riemann.

1.2.1 Sumas superiores y sumas inferiores

Sea f una función acotada en un rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$ y sea P una partición arbitraria de R . Consideremos $M_k = \sup_{(x,y) \in R_k} f(x, y)$ y $m_k = \inf_{(x,y) \in R_k} f(x, y)$, $(x, y) \in R_k$ y las sumas $\underline{S}_P = \sum_P m_k A(R_k)$ y $\bar{S}_P = \sum_P M_k A(R_k)$.

Las sumas \underline{S}_P y \bar{S}_P se llaman sumas de Riemann inferiores y sumas de Riemann superiores de la función f (correspondientes a la partición P) respectivamente. Para $\zeta_k \in R_k$ se tiene $m_k \leq f(\zeta_k) \leq M_k$, por lo que $\sum_P m_k A(R_k) \leq \sum_P f(\zeta_k) A(R_k) \leq \sum_P M_k A(R_k)$, es decir que $\underline{S}_P \leq S_P \leq \bar{S}_P$. Además si $P \leq P'$, entonces $\underline{S}_P \leq \underline{S}_{P'} \leq \bar{S}_{P'} \leq \bar{S}_P$.

Consideremos P' y P'' dos particiones y sea P la superposición de P' y P'' , entonces P es más fina que P' y P'' por lo que se tiene:

$$\underline{S}_{P'} \leq \underline{S}_P \leq \bar{S}_P \leq \bar{S}_{P''} \implies \underline{S}_{P'} \leq \bar{S}_{P''}.$$

Si fijamos P'' y consideramos P' variable, definimos la integral inferior de Riemann de f sobre \mathbb{R} , por la cantidad $\underline{I}(f) = \sup_P \underline{S}_P$ y la integral superior de Riemann de f sobre \mathbb{R} , por la cantidad $\bar{I}(f) = \inf_P \bar{S}_P$. Se ve claramente que $\underline{I}(f) \leq \bar{I}(f)$.

De acuerdo a nuestras consideraciones, la integral inferior y superior de Riemann sobre \mathbb{R} existen, si f es acotada en \mathbb{R} . Así podemos establecer el siguiente resultado.

Teorema 1.2.1 Sea $\mathbb{R} = [a, b] \times [c, d]$ y sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada en \mathbb{R} , las siguientes propiedades son equivalentes:

i) f es Riemann integrable.

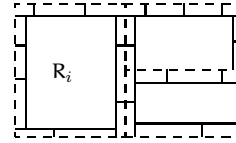
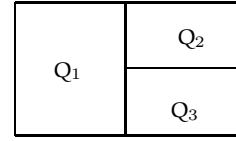
ii) $\underline{I} = \bar{I}$.

iii) $\forall \epsilon > 0$, existe una partición P de \mathbb{R} tal que $\bar{S}_P - \underline{S}_P < \epsilon$.

iv) $\forall \epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\forall P$ partición con $\|P\| < \delta$, se tiene $\bar{S}_P - \underline{S}_P < \epsilon$.

Demostración Estableceremos la relación iii) \implies iv), que es la parte más complicada de la prueba. Las otras direcciones se dejan de ejercicio.

Sabemos que existe $M > 0$, tal que $|f(x)| \leq M, \forall x \in \mathbb{R}$. Sea $\epsilon > 0$ y sea $P^* = \{Q_1, \dots, Q_s\}$ la partición de \mathbb{R} tal que $\bar{S}_{P^*} - \underline{S}_{P^*} < \frac{\epsilon}{2}$. Sea $\Gamma^* = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{j=1}^s \overset{\circ}{Q}_j$, la unión de las fronteras de los Q_j , es de medida cero, i.e. $A(\Gamma^*) = 0$, por lo que existe $\delta > 0$ tal que si $P = \{R_1, \dots, R_k, \dots, R_l\}$ la partición de \mathbb{R} de modo que $\|P\| < \delta$, la suma de las áreas de los $R_i, i = 1, \dots, k$, que intersecan Γ^* , es menor que $\frac{\epsilon}{4M}$ y los restantes rectángulos están contenidos en los Q_j .



frontera.tex

Sea $m_i = \inf_{x \in R_i} f(x), M_i = \sup_{x \in R_i} f(x)$, entonces:

$$\bar{S}_P - \underline{S}_P = \sum_{i=1}^k (M_i - m_i)A(R_i) + \sum_{i=k+1}^l (M_i - m_i)A(R_i),$$

pero $\sum_{i=1}^k (M_i - m_i)A(R_i) \leq 2M \sum_{i=1}^k A(R_i) \leq 2M \frac{\epsilon}{4M} = \frac{\epsilon}{2}$.

Para cada $i = k + 1, \dots, l, R_i \subset Q_j$, para algún $j = 1, \dots, s$, por lo que podemos escribir:

$$\begin{aligned} \sum_{i=k+1}^l (M_i - m_i)A(R_i) &= \sum_{j=1}^s \sum_{i: R_i \subset Q_j} (M_i - m_i)A(R_i) \leq \sum_{j=1}^s (M_j^* - m_j^*) \sum_{i: R_i \subset Q_j} A(R_i) \\ &\leq \sum_{j=1}^s (M_j^* - m_j^*)A(Q_j) = \bar{S}_{P^*} - \underline{S}_{P^*} < \frac{\epsilon}{2}, \end{aligned}$$

donde $m_j^* = \inf_{x \in Q_j} f(x)$, $M_j^* = \sup_{x \in Q_j} f(x)$. Así obtenemos para toda partición P , con $\|P\| < \delta$, se tiene que $\bar{S}_P - \underline{S}_P < \epsilon$.

Corolario 1.2.1 Sea $R \subset \mathbb{R}^2$ un rectángulo, sea $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada y sea $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$, una sucesión de particiones de un conjunto de \mathbb{R} , tal que $\|P_k\| \rightarrow 0$, cuando $k \rightarrow \infty$, y si alguna de las siguientes condiciones se verifica:

- i) $\lim_{k \rightarrow \infty} [\bar{S}_{P_k}(f) - \underline{S}_{P_k}(f)] = 0$
- ii) $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_j f(\xi_j^k) A(R_j^k) = I$ ($\xi_j^k \in R_j^k$)
- iii) $\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{S}_{P_k}(f) = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{S}_{P_k}(f) = I$,

entonces la integral de f sobre R existe y es igual a I .

Inversamente, la existencia de la integral implica el cumplimiento de las condiciones i), ii) y iii). La existencia de sólo uno de los límites de iii) no implica la existencia de la integral sobre R .

Corolario 1.2.2 Sea $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de particiones del rectángulo $R \subset \mathbb{R}^2$, de modo que $\|P_k\| \rightarrow 0$, cuando $k \rightarrow \infty$, entonces la suma de las áreas de los rectángulos R_j^k que tienen intersección no vacía con la frontera de R , tiende a cero, cuando $k \rightarrow \infty$.

Corolario 1.2.3 La integral de una función f acotada sobre un rectángulo $R \subset \mathbb{R}^2$, se puede definir como el límite $\lim_{\|P_k\| \rightarrow 0} \sum_j^* f(\xi_j^k) A(R_j^k) = \iint_R f$, para una sucesión particular de particiones $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de R , de modo que $\|P_k\| \rightarrow 0$, cuando $k \rightarrow \infty$, donde la suma \sum^* sólo se extiende sobre los R_j^k de P_k que están contenidos en $\overset{\circ}{R}$ i.e. no intersecan la frontera de R .

Sea $\delta = \|P\|$ la norma de la partición P , la integral de Riemann de f sobre R se define como $\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_k f(\zeta_k) A(R_k) = I$, si el límite existe. Así la integral de Riemann de f sobre R es el límite al cual tiende la suma de Riemann $S(P, f)$, correspondiendo a una partición P de R , cuando la norma de la partición tiende a 0, si el límite existe. Esto significa que el límite no depende de la escogencia de $\zeta_k \in R_k$ ni de la partición P . Esta propiedad se puede expresar de dos maneras equivalentes.

- La integral de Riemann de la función f definida y acotada sobre R , es el número I que satisface: $\forall \epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ que depende de ϵ tal que, $\forall P$ partición de R , con $\|P\| < \delta$ y $\forall \zeta_k \in R_k$ se tiene $|I - S(P, f)| < \epsilon$.
- La integral de Riemann de la función f definida y acotada sobre R , es el límite al cual tiende la sucesión de sumas $S(P_k, f)$ de la función f , correspondientes a la sucesión de particiones $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de R , de modo que $\|P_k\| \rightarrow 0$, cuando $k \rightarrow \infty$. De esta manera escribimos:

$$I = \iint_{\mathbb{R}} f = \iint_{\mathbb{R}} f(x, y) dx dy = \lim_{\|P_k\| \rightarrow 0} S(P_k, f),$$

y diremos que f es Riemann integrable o simplemente que f es integrable.

1.3 Integrabilidad de funciones continuas

Teorema 1.3.1 Sea f una función continua en un rectángulo $\mathbb{R} = [a, b] \times [c, d]$, entonces f es integrable y el valor de la integral se puede calcular de manera iterada así:

$$\iint_{\mathbb{R}} f = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy.$$

Demostración Sabemos que una función continua sobre un conjunto \mathbb{R} es acotada en \mathbb{R} . Vamos a probar que f es integrable i.e. $\underline{I}(f) = \bar{I}(f)$.

Sea $\epsilon > 0$, como f es continua es uniformemente continua, es decir $\exists \delta > 0$ tal que si $\|(x, y) - (x', y')\| < \delta$, $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R} \implies |f(x', y') - f(x, y)| < \frac{\epsilon}{A(\mathbb{R})}$, donde $A(\mathbb{R})$ es el área de \mathbb{R} .

Sea $P = \{R_1, \dots, R_n\}$ una partición de modo que $\|P\| < \delta$ y sea $m_i(f)$ y $M_i(f)$ los valores mínimo y máximo de f en R_i respectivamente, para $i = 1, \dots, n$, entonces $M_i(f) - m_i(f) \leq \frac{\epsilon}{A(\mathbb{R})}$.

Sean s y t las funciones escalonadas definidas en el interior de cada R_{ij} por:

$$s(x, y) = m_i(f), \quad t(x, y) = M_i(f), \quad (x, y) \in \overset{\circ}{R}_i$$

y en los puntos de la frontera de cada R_i definimos $s(x, y) = m$ y $t(x, y) = M$, siendo m y M los valores mínimo absoluto y máximo absoluto de f en \mathbb{R} , entonces $s \leq f \leq t$ en \mathbb{R} , por lo que tenemos:

$$\iint_{\mathbb{R}} s = \sum_{i=1}^n m_i(f) A(R_i) \quad \text{y} \quad \iint_{\mathbb{R}} t = \sum_{i=1}^n M_i(f) A(R_i),$$

donde $A(R_i)$ es el área del rectángulo R_i . Así la diferencia es:

$$0 \leq \iint_{\mathbb{R}} t - \iint_{\mathbb{R}} s = \sum_{i=1}^n (M_i(f) - m_i(f)) A(R_i) \leq \frac{\epsilon}{A(\mathbb{R})} \sum_{i=1}^n A(R_i) = \epsilon,$$

y como $\iint_{\mathbb{R}} s \leq \underline{I}(f) \leq \bar{I}(f) \leq \iint_{\mathbb{R}} t$, se obtiene que $0 \leq \bar{I}(f) - \underline{I}(f) \leq \epsilon, \forall \epsilon > 0$, o sea $\underline{I}(f) = \bar{I}(f)$ y f es integrable.

Probemos ahora que la integral doble $\iint_{\mathbb{R}} f$ se puede expresar como una integral iterada.

Para $y \in [c, d]$ fija, la integral $\int_a^b f(x, y) dx$ existe, ya que la función $x \mapsto f(x, y)$ es continua en $[a, b]$, para cada $y \in [c, d]$. Designemos por $\alpha(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ y probemos que α es continua en $[c, d]$.

En efecto, sean y y y' dos puntos en $[c, d]$, entonces $|\alpha(y) - \alpha(y')| = \left| \int_a^b (f(x, y) - f(x, y')) dx \right| \leq (b-a) \sup_{a \leq x \leq b} |f(x, y) - f(x, y')| = (b-a)|f(x', y) - f(x', y')|$, donde $x' \in [a, b]$ es el punto donde $|f(x, y) - f(x, y')|$ alcanza el extremo superior en $[a, b]$. Como f es uniformemente continua, dado $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que si $\|(x, y) - (x_1, y_1)\| \leq \delta$, $(x, y), (x_1, y_1) \in \mathbb{R} \implies |f(x, y) - f(x_1, y_1)| < \frac{\epsilon}{(b-a)}$.

De esta manera tenemos que dado $\epsilon > 0$ y tomando δ dado anteriormente, de modo que si $|y - y'| < \delta \implies \|(x', y) - (x', y')\| < \delta \implies |\alpha(y) - \alpha(y')| \leq (b-a)|f(x', y) - f(x', y')| < \epsilon$. Dado que $\alpha(y)$ es continua en $[c, d]$, la integral $\int_c^d \alpha(y) dy$ existe y por el teorema de Fubini:

$$\iint_{\mathbb{R}} f = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy.$$

Un razonamiento similar prueba que se puede cambiar el orden de integración, es decir:

$$\iint_{\mathbb{R}} f = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx.$$

Teorema 1.3.2 Una función f definida y acotada en $\mathbb{R} = [a, b] \times [c, d]$, si el conjunto de discontinuidades de f en \mathbb{R} tiene contenido nulo, entonces f es integrable sobre \mathbb{R} .

Demostración Sea $M > 0$ tal que $|f| \leq M$ en \mathbb{R} y sea D el conjunto de discontinuidades de f en \mathbb{R} . Sea $\epsilon > 0$, entonces existe una partición P' de \mathbb{R} tal que la suma de las áreas de los sub-rectángulos de P' , cuyo interior contiene puntos de D , sea menor que $\frac{\epsilon}{4M}$.

Denotando $\mathcal{S} \subset P'$ este conjunto tenemos, $D \subset \bigcup_{\mathbb{R}'_{k'} \in \mathcal{S}} \overset{\circ}{\mathbb{R}'_{k'}}$, $\sum_{\mathbb{R}'_{k'} \in \mathcal{S}} A(\mathbb{R}'_{k'}) < \frac{\epsilon}{4M}$. Sobre el interior de estos sub-rectángulos se definen las funciones escalonadas s y t , de modo que $s(x, y) = -M$, $t(x, y) = M$, $(x, y) \in \bigcup_{\mathbb{R}'_{k'} \in \mathcal{S}} \overset{\circ}{\mathbb{R}'_{k'}}$.

Sobre los restantes rectángulos que forman $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{\mathbb{R}'_{k'} \in \mathcal{S}} \overset{\circ}{\mathbb{R}'_{k'}}$, la función f es uniformemente continua pues

el conjunto $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{\mathbb{R}'_{k'} \in \mathcal{S}} \overset{\circ}{\mathbb{R}'_{k'}}$ es un compacto i.e. dado $\epsilon > 0$, existe una partición P de \mathbb{R} más fina que P' tal que $\mathbb{R} = \bigcup_{k=1}^m \mathbb{R}_k$, donde cada $\mathbb{R}_k \subset \mathbb{R}'_{k'}$, para algún $\mathbb{R}'_{k'} \in P'$, de modo que $M_k(f)$ y $m_k(f)$ que son el máximo y el mínimo absolutos de f en \mathbb{R}_k , satisfacen $M_k(f) - m_k(f) < \frac{\epsilon}{2A(\mathbb{R})}$, donde k se considera

si $R_k \not\subset R'_{k'} \in \mathcal{S}$. Se define $s(x, y) = m_k(f)$ y $t(x, y) = M_k(f)$, si $(x, y) \in R_k \not\subset R'_{k'} \in \mathcal{S}$.

Finalmente tenemos que $s \leq f \leq t$ en R , de modo que:

$$\begin{aligned} 0 \leq \iint_R f - \iint_R s &= \sum_{k: R_k \not\subset R'_{k'} \in \mathcal{S}} (M_k(f) - m_k(f))A(R_k) + \sum_{k: R_k \subset R'_{k'} \in \mathcal{S}} (2M)A(R_k) \\ &< \frac{\epsilon}{2A(R)} \sum_{k: R_k \not\subset R'_{k'} \in \mathcal{S}} A(R_k) + 2M \sum_{R'_{k'} \in \mathcal{S}} A(R'_{k'}) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \end{aligned}$$

es decir $0 \leq \bar{I}(f) - \underline{I}(f) \leq \epsilon$, por lo que f es integrable en R .

1.3.1 Integrales dobles sobre regiones más generales

Hasta el momento la integral doble se ha tratado sobre regiones de integración rectangulares. No hemos indicado que esto lleva implícito el hecho que, estamos midiendo el área de rectángulo por el producto de las longitudes de sus lados. Sin embargo, en general no es tan sencillo medir áreas para regiones más generales. Se hace necesario ampliar el concepto de *medibilidad de áreas* de conjuntos en \mathbb{R}^2 en el sentido de Jordan.⁴

Definición 1.3.1 *Se dice que un conjunto $S \subset \mathbb{R}^2$ es Jordan medible o simplemente medible⁵, si es acotado y su frontera (que denotamos ∂S) es de contenido nulo.*

Propiedades

⁴**Marie Ennemond Camille Jordan (1838-1922)** Nace el 5 de enero de 1838 en La Croix-Rousse, Lyon, Francia. Muere el 22 de enero de 1922 en Paris, Francia. Estudiante de la promoción de 1855 de L'Ecole Polytechnique, entra como Bertrand, en el Cuerpo de Minas. El nuevo académico había debutado con una Tesis sobre las Sustituciones. En 1865 y 1866, presentó trabajos llenos de consideraciones delicadas y profundas de los Poliedros, donde la noción de simetría y de clase se analizan con una longitud especial. Un año después, siguiendo el mismo orden de ideas, pero pasando de la Geometría a la Geometría cinemática, publicó un trabajo sobre los Grupos de movimientos. Se había propuesto determinar las diversas maneras en que un sistema de moléculas puede superponerse a sí misma y determinar así todas las combinaciones admisibles agrupadas alrededor de 174 tipos, los cuales hacen naturalmente parte del sistemas definido por Bravais en sus estudios cristalográficos. La obra principal de Jordan es su *Traité des substitutions*, lleno de resultados nuevos y donde continúa el camino abierto por Galois y Abel, los principios fundamentales de la Teoría de ecuaciones algebraicas resolubles por radicales, con aplicaciones de la Teoría de integración de las ecuaciones diferenciales lineales. Jordan ayudó a sentar las bases de la teoría de una clase interesante de ecuaciones que aparecen a propósito de la división de los argumentos en las funciones abelianas. Es conveniente agregar los trabajos sobre la *Teoría de formas*, considerado desde el doble punto de vista del Álgebra y la Aritmética y finalmente la publicación del Cours d'Analyse, que el autor enseña desde 1876 en L'Ecole Polytechnique; trabajo capital a nivel de los descubrimientos más elevados y más recientes de la ciencia. Jordan definió el carácter general de sus trabajo, diciendo que se había propuesto constantemente profundizar sobre la *Teoría del orden*, así como en el dominio de la Geometría pura y en el Análisis. Relaciona así, por su tendencia, sus estudios en la simetría en los poliedros, los sistemas de líneas y el ensamblaje de moléculas, a sus investigaciones en la Teoría de sustituciones, que el prevé de alguna manera como la teoría analítica del orden.

⁵Es importante destacar que los métodos más importantes para extender de una manera general la integral de Riemann son el de Daniel y el de Lebesgue. Sin embargo para mantenerse en el enfoque de la integral de Riemann, extendemos el concepto de integral sobre conjuntos más generales, para lo que necesitamos el concepto de contenido de Jordan y el de volumen para estos conjuntos.

a) $\partial(S \cup S') \subset \partial S \cup \partial S'$, $\partial(S \cap S') \subset \partial S \cup \partial S'$, $\partial(S \setminus S') \subset \partial S \cup \partial S'$.

b) La unión finita de conjuntos medibles es medible.

c) Si S y S' son medibles, $S \setminus S'$ es medible.

d) El rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$ es medible.

e) S es medible si y sólo si $\iint_R I_S = \text{Área}(S)$ existe, $\forall R$ rectángulo tal que $S \subset R$.⁶

Proposición 1.3.1 *Un conjunto $S \subset \mathbb{R}^2$ es medible con área $A(S)$, si y sólo si $\forall \epsilon > 0$, existe una familia de rectángulos $T = \{R_1, \dots, R_p\}$ que no se cruzan, con $R_i \cap \bar{S} \neq \emptyset$, $i = 1, \dots, p$, tales que $S \subset \bigcup_{i=1}^p R_i$, $A(S) - \epsilon \leq \sum_{i: R_i \subset S^\circ} A(R_i)$ y $\sum_{i=1}^p A(R_i) \leq A(S) + \epsilon$.*

Prueba Basta tomar una partición de un rectángulo que contiene a S y eliminar los rectángulos que tengan intersección vacía con \bar{S} .

Corolario 1.3.1 *La intersección, unión o diferencia de conjuntos medibles es medible.*

Prueba Si S y S' son conjuntos medibles, las fronteras $\partial(S \cup S')$, $\partial(S \cap S')$, $\partial(S \setminus S')$ son subconjuntos de $\partial S \cup \partial S'$ y como este conjunto es de contenido nulo, se sigue que $S \cup S'$, $S \cap S'$, $S \setminus S'$ son conjuntos medibles.

Queda por verificar que $\partial S \cup \partial S'$ es de contenido nulo. En efecto, como ∂S es de contenido nulo, existen una familia de rectángulos $T = \{R_i / i = 1, \dots, n\}$ tal que $\partial S \subset \bigcup_{i=1}^n R_i$ y una familia de rectángulos $T = \{R_i / i = n+1, \dots, n+m\}$ tal que $\partial S' \subset \bigcup_{i=n+1}^{n+m} R_i$, con $\sum_{i=1}^n A(R_i) < \frac{\epsilon}{2}$, $\sum_{i=n+1}^{n+m} A(R_i) < \frac{\epsilon}{2}$, por lo que $\partial S \cup \partial S' \subset \bigcup_{i=1}^{n+m} R_i$ y $\sum_{i=1}^{n+m} A(R_i) < \epsilon$.

Proposición 1.3.2 *Sean S y S' dos conjuntos medibles de \mathbb{R}^2 , entonces:*

a) $A(S) \geq 0$, $A(S') \geq 0$

b) Si S y S' no se cruzan i.e. $\overline{S \cap S'} = \emptyset$, entonces $A(S \cup S') = A(S) + A(S')$

c) Si S y S' son conjuntos congruentes i.e. se puede pasar de S a S' por un movimiento rígido (que es una traslación y una rotación), entonces $A(S) = A(S')$.

d) En general $A(S \cup S') \leq A(S) + A(S')$, $A(S \setminus S') = A(S) - A(S \cap S')$.

Es claro que si $S \subset \mathbb{R}^2$ es acotado, existe un rectángulo $R \supset S$ tal que para toda partición P de R , definimos $J^-(S, P)$ como la suma de las medidas de los rectángulos de P que contienen sólo puntos

⁶ I_S es la función característica de S , que vale 1 sobre S y 0 en el complemento.

interiores de S y $J^+(S, P)$ como la suma de las medidas de los rectángulos de P que contienen puntos de S o de su frontera ∂S . Los números

$$\underline{A}(S) = \sup\{J^-(S, P) / P \text{ es una partición de } R\},$$

$$\bar{A}(S) = \inf\{J^+(S, P) / P \text{ es una partición de } R\},$$

se llaman respectivamente el contenido interior y exterior de S .

En general se tiene que $\underline{A}(\partial S) = 0$, $\underline{A}(S) \leq \bar{A}(S)$ y S es medible si y sólo si $\underline{A}(S) = \bar{A}(S)$.

Observemos que $\bar{A}(\partial S) = \bar{A}(S) - \underline{A}(S)$ y que S es medible $\iff \bar{A}(\partial S) = 0$.

Proposición 1.3.3 *Sea $S \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto acotado, para que S sea medible es necesario y suficiente que $\forall \epsilon > 0$, existan dos conjuntos medibles S' y S'' tales que $S' \subset S \subset S''$ y $A(S'') - A(S') < \epsilon$ y S es medible.*

Prueba

(\implies) Como S un conjunto medible, entonces dado $\epsilon > 0$ existen una familia de rectángulos $T = \{R_1, \dots, R_p\}$ que no se cruzan, con $R_i \cap \bar{S} \neq \emptyset$, $i = 1, \dots, p$, tales que $S \subset \bigcup_{i=1}^p R_i$, $A(S) - \epsilon \leq$

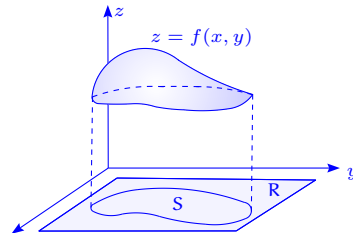
$$\sum_{i: R_i \subset \overset{\circ}{S}} A(R_i) \text{ y } \sum_{i=1}^p A(R_i) \leq A(S) + \epsilon.$$

Sea $S' = \bigcup_{i: R_i \subset \overset{\circ}{S}} R_i$, $S'' = \bigcup_{i=1}^p R_i$, entonces $A(S) + \epsilon \geq \sum_{i=1}^p A(R_i) = A(S'') \geq A(S) \geq A(S') =$

$$\sum_{i: R_i \subset \overset{\circ}{S}} A(R_i) \geq A(S) - \epsilon, \text{ es decir } A(S'') - A(S') \leq \epsilon.$$

(\impliedby) Como existen S' y S'' conjuntos medibles tales que $S' \subset S \subset S''$ y $A(S') \leq \underline{A}(S) \leq \bar{A}(S) \leq \bar{A}(S'')$, o sea $\bar{A}(S) - \underline{A}(S) \leq A(S'') - A(S') < \epsilon$.

Con base en lo anterior, el concepto de integral doble se puede extender sin dificultad a regiones más generales. Consideremos una región S medible, de modo que S que esté contenida en un rectángulo R y sea f una función definida y acotada sobre S .



Definimos una nueva función \tilde{f} sobre R , de la siguiente manera:

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } (x, y) \in S \\ 0 & \text{si } (x, y) \in R \setminus S. \end{cases} \tag{3}$$

Es válido preguntarse si la función \tilde{f} es integrable en R . Si \tilde{f} es integrable en R , decimos que f es integrable en S y que $\iint_S f = \iint_R \tilde{f}$.

Observemos que integrar sobre S una función f es equivalente a integrar $f I_S$ sobre un rectángulo R que contiene a S .

Ejemplo 1.3.1 Ejemplo de un conjunto no medible i.e. sin área

Sea $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x, y \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}\}$, entonces $\underline{A}(S) = 0$, pero $\overline{A}(S) = 1$, por lo que S no es medible. β Integración sobre conjuntos medibles Sea $S \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto medible (i.e. acotado), entonces f es integrable si y sólo si $\forall R$ rectángulo tal que $S \subset R$, $\iint_S f = \iint_R \tilde{f}$.

Proposición 1.3.4 Sea $S \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto medible, $f, g: S \rightarrow \mathbb{R}$ funciones integrables sobre S tales que $f \leq g$, sobre S , entonces se tiene que $\iint_S f \leq \iint_S g$.

Prueba Sea $R \subset \mathbb{R}^2$ un rectángulo tal que $S \subset R$, entonces $(\tilde{g} - \tilde{f}) \geq 0, \forall (x, y) \in R$, por lo que:

$$0 \leq \iint_S (g - f) = \iint_R (\tilde{g} - \tilde{f}) = \iint_R \tilde{g} - \iint_R \tilde{f} = \iint_S g - \iint_S f,$$

es decir $\iint_S g \geq \iint_S f$.

Proposición 1.3.5 Sea $S \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto medible y sea $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ integrable sobre S , i.e. $|f(x, y)| \leq M, \forall (x, y) \in S$, entonces $\left| \iint_S f(x, y) dx dy \right| \leq MA(S)$.

En particular, si S es de contenido nulo, $\iint_S f = 0$.

Prueba Se tiene que $\forall R$ rectángulo de \mathbb{R}^2 tal que $S \subset R$, $-MI_S \leq \tilde{f} \leq MI_S, \forall (x, y) \in R$, entonces $-MA(S) \leq \iint_R \tilde{f} = \iint_S f \leq MA(S)$.

Proposición 1.3.6 Si S y S' son conjuntos medibles de \mathbb{R}^2 de modo que $S \cap S'$ es de contenido nulo y si f es integrable sobre $S \cup S'$, entonces:

$$\iint_{S \cup S'} f = \iint_S f + \iint_{S'} f.$$

Prueba Si $S \cap S' = \emptyset$, $I_{S \cup S'} = I_S + I_{S'}$, por lo que si R es un rectángulo de \mathbb{R}^2 tal que $S \cup S' \subset R$ se tiene:

$$\iint_{S \cup S'} f = \iint_R I_{S \cup S'} \tilde{f} = \iint_R (I_S + I_{S'}) \tilde{f} = \iint_S f + \iint_{S'} f.$$

Si $S \cap S' \neq \emptyset$ de contenido nulo, $I_{S \cup S'} = I_S + I_{S'} - I_{S \cap S'}$, i.e.:

$$\iint_{S \cup S'} f = \iint_S f + \iint_{S'} f - \iint_{S \cap S'} f = \iint_S f + \iint_{S'} f,$$

ya que $S \cap S'$ es de contenido nulo y $\iint_{S \cap S'} f = 0$, si f es integrable.

Proposición 1.3.7 Sea $S \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto medible, $f, g: S \rightarrow \mathbb{R}$ funciones que son iguales salvo en un conjunto $D \subset S$ de contenido nulo, entonces $\iint_S f = \iint_S g$.

Prueba Sea $h = f - g$, entonces $h = 0$ salvo sobre $D \subset S$, de contenido nulo, entonces:

$$\iint_S h = \iint_S h \cdot I_D = \iint_{D \cap S} h = \iint_D h = 0,$$

ya que D es de contenido nulo.

Proposición 1.3.8 Sea $S \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto medible, $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada, entonces f es integrable sobre S si y sólo si $\forall \epsilon > 0$ existen funciones s y t escalonadas sobre S tales que $s \leq f \leq t$ y $\iint_S (t - s) < \epsilon$.

Prueba La verificación sale del teorema ??, página ??, ya que si h es escalonada, hI_S también.

Integración de funciones sobre conjuntos medibles

En el desarrollo de la teoría cuando tratamos un conjunto medible⁷ $S \subset \mathbb{R}^2$ y una función f integrable sobre S , consideramos un rectángulo $R \supset S$ y una partición P de R tal que $\bar{S}_P - \underline{S}_P < \epsilon$, donde la suma de las áreas de los rectángulos que intersecan ∂S sea menor que $\frac{\epsilon}{2M}$.

Sea R_1, \dots, R_p , los rectángulos de P que no intersecan \bar{S} , R_{p+1}, \dots, R_{p+q} , los rectángulos de P que intersecan ∂S y los restantes rectángulos $R_{p+q+1}, \dots, R_{p+q+l} \subset \overset{\circ}{S}$.

Sea $m_i = \inf_{(x,y) \in R_i} \tilde{f}(x,y)$, $M_i = \sup_{(x,y) \in R_i} \tilde{f}(x,y)$, entonces $M_i = m_i = 0$, si $i = 1, \dots, p$ y tenemos que:

$$\bar{S}_P - \underline{S}_P = \sum_{i=1}^p (M_i - m_i)A(R_i) + \sum_{i=p+1}^{p+q} (M_i - m_i)A(R_i) + \sum_{i=p+q+1}^{p+q+l} (M_i - m_i)A(R_i) < \epsilon.$$

Notemos que para el cálculo de la integral de \tilde{f} sobre R , es necesario utilizar sólo rectángulos de tengan intersección no vacía con \bar{S} . De este modo podemos establecer la definición de una función integrable sobre un conjunto medible S , equivalente a la definición de una función \tilde{f} integrable sobre cualquier rectángulo $R \supset S$.

⁷Jordan medible

Definición 1.3.2 Se dice que una función acotada f sobre el conjunto medible $S \subset \mathbb{R}^2$ es integrable si y sólo si $\forall \epsilon > 0$, existe una partición T de S (i.e. una familia de rectángulos $T = \{R_1, \dots, R_n\}$ de interior no vacío, que intersequen \bar{S} , que no se crucen y que recubren \bar{S}) tal que $\bar{S}_T - \underline{S}_T < \epsilon$, donde $\bar{S}_T = \sum_{i=1}^n M_i A(R_i)$, $\underline{S}_T = \sum_{i=1}^n m_i A(R_i)$, $M_i = \sup_{(x,y) \in R_i \cap S} f(x,y)$, $m_i = \inf_{(x,y) \in R_i \cap S} f(x,y)$.

La integral de f sobre S se denota $\iint_S f$.

Notemos que $m_i = \inf_{(x,y) \in R_i \cap S} f(x,y) = \inf_{(x,y) \in R_i} \tilde{f}(x,y)$, $M_i = \sup_{(x,y) \in R_i \cap S} f(x,y) = \sup_{(x,y) \in R_i} \tilde{f}(x,y)$.

Se pueden definir las sumas de Riemann de f para la partición T de S , por $S_T(f) = S(T, f) = \sum_{i=1}^n f(\zeta_i) A(R_i)$, donde $\zeta_i \in R_i \cap S$ y la llamamos suma de Riemann de la función f asociada a T .

De manera totalmente análoga definimos $\bar{I}(f) = \inf_T \bar{S}_T$ la integral superior de f sobre S y $\underline{I}(f) = \sup_T \underline{S}_T$ la integral inferior de f sobre S i.e. $\underline{I}(f) \leq \bar{I}(f)$.

También se puede definir la norma de la partición T por $\|T\| = \max_{1 \leq i \leq n} d(R_i)$ y podemos establecer de manera natural los siguientes resultados.

Teorema 1.3.3 Sea $S \subset \mathbb{R}^2$ medible y $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada sobre S , las siguientes propiedades son equivalentes:

i) f es Riemann integrable sobre S

ii) $\underline{I}(f) = \bar{I}(f)$

iii) $\forall \epsilon > 0$, existe una partición T de S tal que $\bar{S}_T - \underline{S}_T < \epsilon$

iv) $\forall \epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\forall T$ partición con $\|T\| < \delta$, se tiene $\bar{S}_T - \underline{S}_T < \epsilon$.

Corolario 1.3.2 Sea $S \subset \mathbb{R}^2$ medible, sea $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada y sea $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$, una sucesión de particiones de un conjunto de S , tal que $\|T_k\| \rightarrow 0$, cuando $k \rightarrow \infty$, y si alguna de las siguientes condiciones se verifica:

i) $\lim_{k \rightarrow \infty} [\bar{S}_{T_k}(f) - \underline{S}_{T_k}(f)] = 0$

ii) $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_j f(\xi_j^k) A(R_j^k) = I$ ($\xi_j^k \in R_j^k \cap S$)

iii) $\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{S}_{T_k}(f) = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{S}_{T_k}(f) = I$,

entonces la integral de f sobre S existe y es igual a I .

Inversamente, la existencia de la integral implica el cumplimiento de las condiciones i), ii) y iii). La existencia de sólo uno de los límites de iii) no implica la existencia de la integral sobre S .

Corolario 1.3.3 Sea $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de particiones del conjunto medible $S \subset \mathbb{R}^2$, de modo que $\|T_k\| \rightarrow 0$, cuando $k \rightarrow \infty$, entonces la suma de las áreas de los rectángulos R_j^k que tienen intersección no vacía con la frontera de S , tiende a cero, cuando $k \rightarrow \infty$.

Corolario 1.3.4 La integral de una función f acotada sobre un conjunto medible $S \subset \mathbb{R}^2$, se puede definir como el límite $\lim_{\|T_k\| \rightarrow 0} \sum_j^* f(\xi_j^k) A(R_j^k) = \iint_S f$, para una sucesión particular de particiones $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de S , de modo que $\|T_k\| \rightarrow 0$, cuando $k \rightarrow \infty$, donde la suma \sum^* sólo se extiende sobre los R_j^k de T_k que están contenidos en $\overset{\circ}{S}$ i.e. no intersecan la frontera de S .

Integración sobre regiones especiales Consideremos primeramente conjuntos S de \mathbb{R}^2 tales que:

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\},$$

donde φ_1 y φ_2 son funciones continuas en el intervalo $[a, b]$ que satisfacen $\varphi_1 \leq \varphi_2$.

Este tipo de regiones las llamaremos regiones de tipo I.

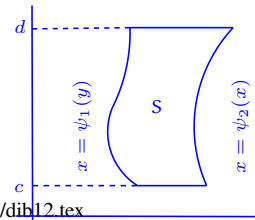
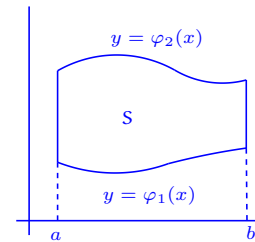
Otro tipo de regiones S (tipo II) se definirá así:

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\},$$

donde ψ_1 y ψ_2 son funciones continuas en $[c, d]$ de modo que $\psi_1 \leq \psi_2$.

En general, las regiones que consideramos, serán del tipo I o del tipo II o regiones que podrán particionarse en un número finito de sub-regiones, cada una de las cuales será del tipo I o del tipo II.

Sea f una función definida y acotada en una región S del tipo I, incluyamos S en un rectángulo R y definamos \tilde{f} como anteriormente. Las discontinuidades de \tilde{f} en R son las discontinuidades de f en S y aquellos puntos de la frontera en que f es distinta de cero. La frontera de f está constituida por los gráficos de φ_1 y φ_2 y por los segmentos de recta verticales que unen los extremos de los gráficos. Cada uno de estos segmentos tiene contenido nulo, así como las gráficas.

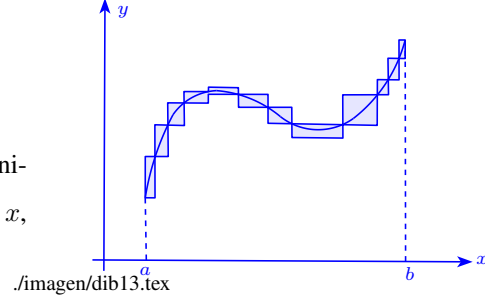


Teorema 1.3.4 Sea φ una función real continua en un intervalo $[a, b]$, entonces el gráfico de φ tiene contenido nulo.

Demostración Sea G_φ el gráfico de φ i.e.

$$G_\varphi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = \varphi(x), a \leq x \leq b\}.$$

Sea $\epsilon > 0$, como φ es continua en un compacto $[a, b]$, es uniformemente continua y $\exists \delta > 0$ tal que si $|x - x'| < \delta$, $x, x' \in [a, b] \implies |f(x) - f(x')| < \frac{\epsilon}{(b-a)}$.



Sea P una partición de $[a, b]$ tal que $\|P\| < \delta$, entonces para cada intervalo $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ el rectángulo $R_k = I_k \times [m_k, M_k]$, donde $m_k = \inf_{x \in I_k} \varphi(x)$, $M_k = \sup_{x \in I_k} \varphi(x)$, contiene el gráfico de φ en I_k , por lo que:

$$G_\varphi \subset \bigcup_k R_k, \quad \sum_k A(R_k) = \sum_k (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) < \frac{\epsilon}{b-a} \sum_k (x_k - x_{k-1}) = \epsilon.$$

Corolario 1.3.5 Las regiones que pueden particionarse en un número finito de sub-regiones, cada una de las cuales es del tipo I o del tipo II son medibles.

Prueba Es claro que las regiones del tipo I o tipo II son acotadas con frontera de contenido nulo.

Teorema 1.3.5 Sea S una región de tipo I, comprendida entre las gráficas φ_1 y φ_2 . Sea f una función definida y acotada sobre S y continua en el interior de S , entonces f es integrable en S y la integral doble de f sobre S es tal que:

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

Demostración Sea $R = [a, b] \times [c, d]$ un rectángulo que contiene a S y sea \tilde{f} la función definida en (3). Los puntos donde pueden haber discontinuidades para \tilde{f} , son los puntos de la frontera de S , pero la frontera de S tiene contenido nulo, \tilde{f} es integrable en R . Además para cada $x \in]a, b[$ arbitrario pero fijo, la integral $\int_c^d \tilde{f}(x, y) dy$ existe, ya que $\tilde{f}(x, y)$ tiene a lo sumo dos discontinuidades en $[c, d]$. Aplicando el teorema de Fubini tenemos:

$$\iint_R \tilde{f} = \int_a^b \left[\int_c^d \tilde{f}(x, y) dy \right] dx.$$

Si $\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$, $\tilde{f}(x, y) = f(x, y)$ y para los demás valores de y en $[c, d]$, $\tilde{f}(x, y) = 0$, entonces:

$$\int_c^d \tilde{f}(x, y) dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy,$$

y concluimos:

$$\iint_{\mathbb{R}} \tilde{f} = \iint_S f = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

Claramente existe un teorema análogo para regiones del tipo II.

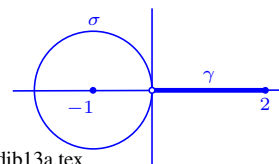
Corolario 1.3.6 Si f está definida y acotada en S región del tipo II y es continua en el interior de S , entonces f es integrable en S y se tiene:

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right] dy.$$

Algunas regiones son a la vez del tipo I y del tipo II, como las regiones limitadas por circunferencias y elipses. En estos casos podemos escribir:

$$\int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right] dy.$$

Ejemplo 1.3.2 Pareciera natural que si una región S medible, se descompone como la unión de dos sub-regiones S_1 y S_2 medibles, de modo que f es integrable en S_1 y en S_2 , la integral de f sobre S es la suma de las integrales de f , sobre S_1 y sobre S_2 .



./imagen/dib13a.tex

Sin embargo, esto no es cierto. Consideremos f una función definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) \in \sigma \text{ círculo de centro } (-1, 0) \text{ y radio } 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } (x, y) \in]0, 2[\times \{0\} = \gamma, \end{cases}$$

entonces $\iint_{\sigma} f = \iint_{\gamma} f = 0$, pero $\iint_{\sigma \cup \gamma} f$ no existe, pues al tomar una partición P de modo que $(0, 0)$ esté en el interior de un sub-rectángulo $\omega = [\alpha, \delta] \times [c, d]$, $c < 0$, $d > 0$, $\alpha < 0$, $\delta > 0$,

$$\iint_{\omega} f = \lim_{\rho > 0^+} \int_c^d \left[\int_{\rho}^{\delta} \frac{1}{x} dx \right] dy = +\infty.$$

Esto sucede pues la función no es acotada en $\sigma \cup \gamma$.

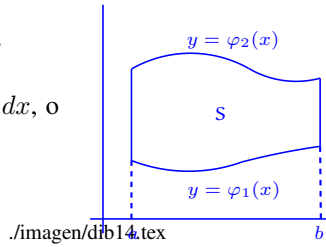
1.3.2 Aplicaciones al cálculo de áreas y volúmenes

Sea S una región del tipo I, dada por:

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}.$$

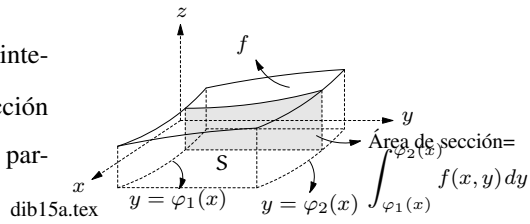
Si $f(x, y) = 1$ en S , $\iint_S 1 \, dx \, dy = \int_a^b [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)] \, dx$, o

sea $\iint_S dx \, dy$ es el área de la región S .



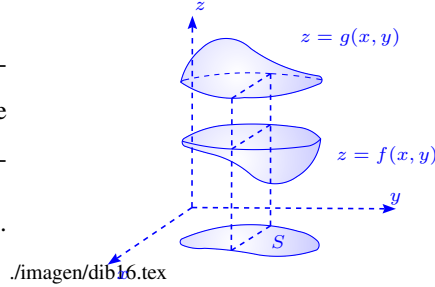
Si f no es negativa, el conjunto $U = \{(x, y, z) / (x, y) \in S, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$ es la región del espacio contenida por la superficie $z = f(x, y)$, el cilindro generado por S con directriz el eje z y el plano xy .

Si f es no negativa y continua en S región acotada, la integral $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) \, dy$ representa el área de una sección del conjunto U , producida al cortarlo con un plano paralelo al plano yz .



El teorema ?? demuestra que la integral doble de f en S , es igual a la integral del área de secciones y la integral doble $\iint_S f$ es el volumen de la región U .

De manera general, si f y g son funciones continuas en S , con $f \leq g$ en S , la integral doble $\iint_S (g - f)$ es igual al volumen del sólido comprendido entre las gráficas de las funciones f y g .

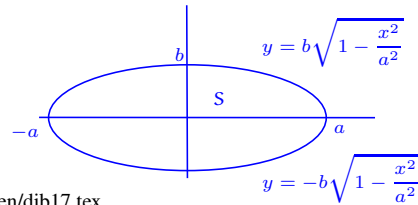


Ejemplo 1.3.3 Calcular el área de la elipse dada por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$, con $a > 0, b > 0$.

Se tiene que el área de S es $A(S) = \iint_S dx \, dy =$

$$\int_{-a}^a \left(\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dy \right) dx = \int_{-a}^a 2b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} dx =$$

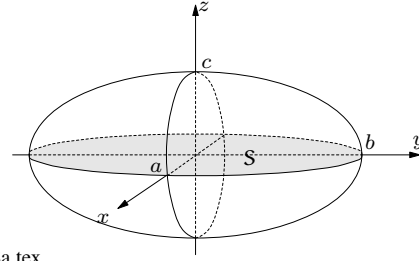
$$a \cdot b \left(\arcsen \frac{x}{a} + \frac{x}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \right) \Big|_{x=-a}^{x=a} = \pi ab.$$



Es claro que la elipse S es medible, pues es una región del tipo I y del tipo II.

Ejemplo 1.3.4 Calcular el volumen del sólido limitado por el elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $a > 0, b > 0, c > 0$.

El sólido considerado está comprendido entre las gráficas de las funciones $g(x, y) = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ y $f(x, y) = -c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$, sobre la región S dada por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$, que es medible. Usando el teorema ?? tenemos que:



$$V = \iint_S (g - f) = 2c \iint_S \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy = 2c \int_{-a}^a \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dy dx =$$

$$bc \int_{-a}^a \left[\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \arcsen \frac{y}{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} + \frac{y}{b\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \right] \Big|_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dx =$$

$$bc \int_{-a}^a \pi \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Observemos que si $a = b = c$, $V = \frac{4}{3}\pi a^3$ que es el volumen de una esfera de radio a .

Ejemplo 1.3.5 Calcular $\iint_S (x^3 y + \cos x) dx dy$, donde $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq x\}$.

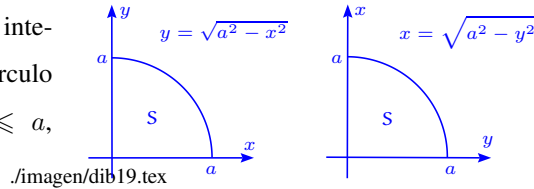
S es medible pues es del tipo I y del tipo II. Por el teorema ?? tenemos que:

$$\iint_S (x^3 y + \cos x) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^x (x^3 y + \cos x) dy \right] dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2} x^3 y^2 + y \cos x \right] \Big|_{y=0}^{y=x} dx =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} x^5 + x \cos x \right) dx = \frac{x^6}{12} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (x \sen x + \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^6}{768} + \frac{\pi}{2} - 1.$$

Ejemplo 1.3.6 Evaluar $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-y^2} dy dx$, cambiando el orden de integración.

Lo primero que observamos es que la región de integración S es medible, pues es la parte de un círculo de radio a en el primer cuadrante i.e. $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}$.



Así la integral iterada equivale a $\iint_S \sqrt{a^2 - y^2} dx dy$. Dada la simetría de la región S, se puede describir también por $0 \leq y \leq a$, $0 \leq x \leq \sqrt{a^2 - y^2}$ y la integral es:

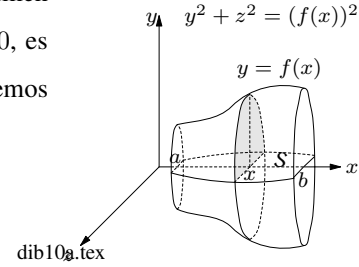
$$\iint_S \sqrt{a^2 - y^2} dx dy = \int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} \sqrt{a^2 - y^2} dx \right) dy = \int_0^a (a^2 - y^2) dy = \left(a^2 y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^a = \frac{2}{3} a^3.$$

Ejemplo 1.3.7 Verificar que el volumen del sólido de revolución mostrado en la figura adjunta es

$$\pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Por razones de simetría el volumen de revolución es dos veces el volumen para $y \geq 0$. Para x fijo, el área transversal de la región para $y \geq 0$, es $\frac{1}{2}\pi(f(x))^2$, por ser la mitad de un círculo de radio $f(x)$. Así tenemos que el volumen buscado es:

$$V = 2 \int_a^b \frac{1}{2}\pi(f(x))^2 dx = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx,$$



esto usando un argumento geométrico de la interpretación del teorema y suponiendo que f es integrable.

Una solución directa es posible: la función que tomamos es $y = g(z, x) = \sqrt{f(x)^2 - z^2}$, con $-f(x) \leq z \leq f(x)$:

$$\begin{aligned} V &= 2 \iint_S g dz dx = 2 \int_a^b \int_{-f(x)}^{f(x)} \sqrt{f(x)^2 - z^2} dz dx \\ &= 2 \int_a^b \left(\int_{-1}^1 \sqrt{1 - u^2} du \right) (f(x))^2 dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx, \end{aligned}$$

ya que $\int_{-1}^1 \sqrt{1 - u^2} du = \left(\frac{1}{2}u\sqrt{1 - u^2} + \frac{1}{2} \arcsen u \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2}$.

Teorema 1.3.6 Teorema del valor medio para integrales dobles

Sea f una función real continua, definida sobre S una región del tipo I o II, entonces existe $(x_o, y_o) \in S$ tal que:

$$\iint_S f = f(x_o, y_o)A(S),$$

donde $A(S)$ denota el área de S .

Demostración Como f es continua sobre S región del tipo I o II i.e. S es compacto, entonces $m =$

$$\inf_{(x,y) \in S} f(x, y) = f(x_1, y_1) \leq f(x, y) \leq \sup_{(x,y) \in S} f(x, y) = f(x_2, y_2) = M, \text{ con } (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in S.$$

Así se tiene, $mA(S) \leq \iint_S f \leq MA(S) \implies m \leq \frac{1}{A(S)} \iint_S f \leq M$. Como f es continua en S , f toma

todos los valores entre m y M , $\exists (x_o, y_o) \in S$ tal que:

$$f(x_o, y_o) = \frac{1}{A(S)} \iint_S f.$$

1.3.3 Aplicaciones de la integral doble

En esta sección estudiaremos aplicaciones de las integrales dobles a conceptos como masa, momentos estáticos, centro de gravedad y momentos de inercia.

Recordemos que si x_1, \dots, x_n son n números, el promedio se define por $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$.

Este concepto nos lleva a definir el valor promedio de una función f en el intervalo $[a, b]$ por $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

Si tenemos n masas m_1, \dots, m_n localizadas en los puntos $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ del plano \mathbb{R}^2 , el centro de gravedad del sistema se define como el punto (\bar{x}, \bar{y}) :

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\sum_{k=1}^n m_k(x_k, y_k)}{\sum_{k=1}^n m_k} = \left(\frac{\sum_{k=1}^n m_k x_k}{\sum_{k=1}^n m_k}, \frac{\sum_{k=1}^n m_k y_k}{\sum_{k=1}^n m_k} \right).$$

De manera similar, si f es una función de dos variables sobre S , el valor promedio de una función de f sobre S será:

$$\bar{f} = \frac{\iint_S f(x, y) dx dy}{\iint_S dx dy}.$$

Si la región S medible es una lámina y la función f es la masa por unidad de área en el punto (x, y) , la masa total es $m(S) = \iint_S f(x, y) dx dy$ y \bar{f} es la densidad media de la lámina.

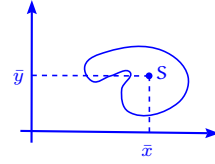
Definimos los momentos estáticos m_x y m_y respecto a los ejes x y y por:

$$m_x = \iint_S y f(x, y) dx dy, \quad m_y = \iint_S x f(x, y) dx dy,$$

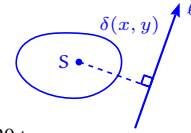
Por analogía con el caso finito, definimos el centro de gravedad por (\bar{x}, \bar{y}) , donde:

$$\bar{x} = \frac{1}{m(S)} \iint_S x f(x, y) dx dy, \quad \bar{y} = \frac{1}{m(S)} \iint_S y f(x, y) dx dy.$$

Si la densidad $f(x, y) = c$ en S , el punto (\bar{x}, \bar{y}) se llama centroide de la región S y tenemos $\bar{x} = \frac{1}{A(S)} \iint_S x \, dx \, dy$, $\bar{y} = \frac{1}{A(S)} \iint_S y \, dx \, dy$.



Si ℓ es una recta en el plano de la región S y designamos $\delta(x, y)$ la distancia desde $(x, y) \in S$ a la recta ℓ , el valor I_ℓ definido por $I_\ell = \iint_S \delta^2(x, y) f(x, y) \, dx \, dy$, se llama momento de inercia de la región S respecto a la recta ℓ .



./imagen/dib20.tex

Si $f(x, y) = 1$, I_ℓ se llama segundo momento de la región S respecto a ℓ . Los momentos de inercia de la región S respecto a los ejes x, y , se designan I_x, I_y respectivamente y están dados por:

$$I_x = \iint_S y^2 f(x, y) \, dx \, dy, \quad I_y = \iint_S x^2 f(x, y) \, dx \, dy.$$

La suma de estas dos expresiones se llama momento polar de inercia I_o , respecto al origen:

$$I_o = I_x + I_y = \iint_S (x^2 + y^2) f(x, y) \, dx \, dy.$$

Ejemplo 1.3.8 Determinar el valor promedio de $f(x, y) = x \operatorname{sen}^2(xy)$ en $R = [0, \pi] \times [0, \pi]$.

El valor promedio es:

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \frac{1}{\pi^2} \iint_R f(x, y) \, dx \, dy = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi x \operatorname{sen}^2(xy) \, dy \, dx \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi \left[\int_0^\pi \frac{1 - \cos(2xy)}{2} x \, dy \right] dx = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi \left[\frac{y}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2xy)}{4x} \right] x \Big|_{y=0}^{y=\pi} dx \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi \left[\frac{\pi}{2} x - \frac{\operatorname{sen} 2\pi x}{4} \right] dx = \frac{1}{\pi^2} \left[\frac{\pi}{4} x^2 + \frac{\cos(2\pi x)}{8\pi} \right]_0^\pi = \frac{\pi}{4} + \frac{\cos 2\pi^2 - 1}{8\pi^3}. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.3.9 Hallar el centro de gravedad del rectángulo $[0, 1] \times [0, 1]$, si la densidad $f(x, y) = e^{x+y}$.

Calculemos primero $\iint_S e^{x+y} \, dx \, dy = \int_0^1 e^x \, dx \int_0^1 e^y \, dy = (e - 1)^2$.

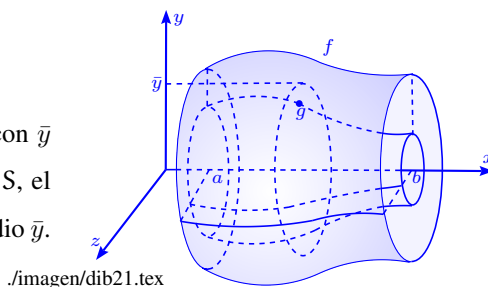
Además $\iint_S x e^{x+y} \, dx \, dy = \int_0^1 x e^x \, dx \int_0^1 e^y \, dy = (x e^x - e^x) \Big|_0^1 (e - 1) = e - 1 \implies \bar{x} = \frac{1}{e - 1}$.

También, $\bar{y} = \frac{1}{e - 1}$ por razones de simetría.

1.3.4 Teorema de Guldin–Pappus

Consideremos una región R situada entre los gráficos de las funciones f y g , definidas en el intervalo $[a, b]$, siendo $0 \leq g \leq f$. Sea S el sólido de revolución generado al hacer girar la región R alrededor del eje x .

Designemos $A(R)$ el área de R , $V(S)$ el volumen de S y con \bar{y} la coordenada del centroide de R . Al girar R para generar S , el centroide se desplace a lo largo de una circunferencia de radio \bar{y} .



El teorema de Guldin⁸–Pappus⁹ establece que el volumen de S , es igual al producto de la longitud de la circunferencia de radio \bar{y} por el área de R :

$$V(S) = 2\pi\bar{y}A(R).$$

Para verificar la fórmula observemos que el volumen viene dado por:

$$V(S) = \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] dx$$

y que \bar{y} está dada por:

$$\bar{y} = \frac{1}{A(R)} \iint_R y dy dx = \frac{1}{A(R)} \int_a^b \left[\int_{g(x)}^{f(x)} y dy \right] dx = \frac{1}{2A(R)} \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] dx.$$

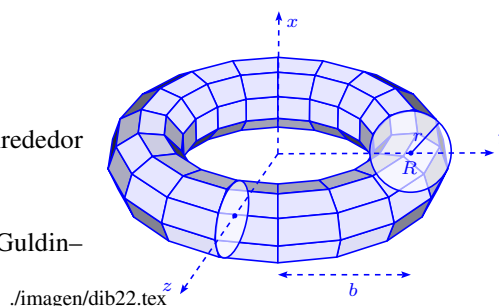
⁸**Paul Guldin (1577-1643)** Nace el 12 de junio de 1577 en Saint Gall (hoy Saint Gallen), Suiza. Muere el 3 de noviembre de 1643 en Graz, Austria. Paul Guldin se llamaba Habakkuk Guldin. El llegó a ser un orfebre y trabajó en este oficio en su juventud. De origen judío, sus padres eran protestantes, pero Guldin se convirtió al catolicismo a la edad de 20 y se une a los jesuitas. En este momento cambia su nombre a Paul. En 1609 fue mandado al Colegio Jesuita en Roma, donde estudió bajo la dirección de Clavius. Enseñó en el Colegio Jesuita en Roma y cuando volvió a Graz, fue profesor de matemáticas en Viena de 1623 hasta 1637. Guldin mantuvo correspondencia con Kepler, pero en temas religiosos, no matemática ni astronomía. Los trabajos más importantes de Guldin están en 4 volúmenes. En el Volumen I se consideran los centros de la gravedad y en particular discute el centro de la gravedad de la Tierra. El volumen II tiene los teoremas de Guldin.

⁹**Pappus de Alejandría (260-)** Matemático griego que nace y muere en Alejandría, desconociéndose la fecha de su muerte. Junto a Zósimo y Diofanto, formó la retaguardia de la matemática griega. Fue ante todo un recopilador, que resumió toda la matemática griega en ocho libros. Personalmente no añadió nada original, pero su valía radica en que sus libros contienen casi todo lo que hoy sabemos de la matemática griega. Además comentó detalladamente el sistema astronómico.

Ejemplo 1.3.10 Calcular el volumen de un toro

Sea S el toro generado al girar un círculo R de radio r , alrededor de un eje a una distancia $b > r$ del centro de R .

En este caso $\bar{y} = b$, $A(R) = \pi r^2$ y por el teorema de Guldin–Pappus, el volumen de S es:



$$V(S) = 2\pi\bar{y}A(R) = 2\pi^2r^2b.$$

1.4 El signo del Jacobiano

Ejemplo 1.4.1 Consideremos la transformación lineal $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, entonces el Jacobiano¹⁰ $\det J = ab - cd$.

Si $\det J \neq 0$, sabemos que se puede despejar (x, y) en función de (u, v) i.e. existe una biyección entre toda parte $S \subseteq \mathbb{R}^2$ y una parte $S' \subseteq \mathbb{R}^2$.

Si S está en el interior de un círculo de centro $(0, 0)$ y radio R , S' está en el interior de la elipse $(du - bv)^2 + (cu - av)^2 = \det J^2 R^2$. Si se recorre el borde del círculo, el recorrido de la elipse va en el mismo sentido si $\det J > 0$ y en sentido inverso si $\det J < 0$.

Ejemplo 1.4.2 Consideremos la transformación $u = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $v = \frac{y}{x^2 + y^2}$, entonces tenemos $\det J = -\frac{1}{(x^2 + y^2)^2} = -(u^2 + v^2)^2$, ya que $u^2 + v^2 = \frac{1}{x^2 + y^2}$. El signo del Jacobiano es negativo en todo el plano de u, v , salvo en el origen, donde $\det J = 0$. Es claro que salvo en el origen las ecuaciones se pueden resolver de modo que:

$$x = \frac{u}{u^2 + v^2}, \quad y = \frac{v}{u^2 + v^2}.$$

¹⁰**Karl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851)** Nace el 10 de diciembre de 1804 en Potsdam, Prusia (hoy Alemania). Muere el 18 de febrero 1851 en Berlín, Alemania. Jacobi estableció con Abel la Teoría de las funciones elípticas. Demostró la solución de integrales elípticas mediante la aplicación de las funciones, series exponenciales introducidas por él mismo. Desarrolló los determinantes funcionales, llamados después jacobianos y las ecuaciones diferenciales.

El padre de Jacobi era banquero y su familia era muy próspera, fue así como él recibió una buena educación en la Universidad de Berlín. Obtuvo su Doctorado en 1825 y enseñó matemáticas en Königsberg desde 1826 hasta su muerte. Fue nominado para una cátedra en 1832. En 1834 probó que si una función uni-valuada de una variable es doblemente periódica, entonces la razón de los periodos es imaginaria. Este resultado impulsó enormemente el trabajo en esta área, en particular a Liouville y Cauchy.

Jacobi tenía la reputación de ser un excelente maestro, atraía a muchos estudiantes. Introdujo un método de seminario para enseñar a los estudiantes los últimos avances matemáticos.

Se observa que si tomamos el círculo Γ con centro en el origen, la transformación le hace corresponder el exterior del círculo imagen Γ' , esto porque u, v no son continuas en $(0, 0)$ y porque $\det J$ se anula en un punto interior de Γ .

En efecto, observemos que si tomamos el borde de un círculo de radio r , i.e. $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, entonces $u = \frac{\cos \theta}{r}, v = \frac{\sin \theta}{r}$.

Si Γ es un círculo que no contiene el origen, la imagen del interior de Γ es el interior del círculo imagen Γ' .

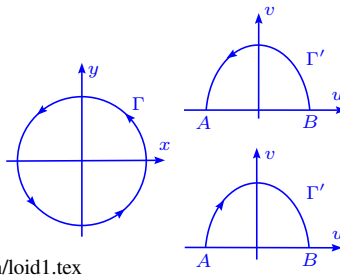
Ejemplo 1.4.3 Sea $u = x, v = y^2$, entonces se tiene que si $v > 0$, hay dos soluciones $x = u, y = \sqrt{v}$ y $x = u, y = -\sqrt{v}$.

Si $v < 0$, no hay solución en \mathbb{R} .

Las fórmulas $u = x, v = y^2$ definen una correspondencia biunívoca en toda parte del plano xy , (cuando $y > 0$ o $y < 0$) con una parte del plano u, v (siendo $v > 0$).

El Jacobiano $\det J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2y \end{vmatrix} = 2y$. La región considerada no debe tener puntos en el eje x .

Supongamos que en el plano xy , se describe la curva Γ , ($x^2 + y^2 = 1$) en el sentido positivo, que corta el eje x y estudiaremos la curva cerrada Γ' (imagen de Γ) que tiene por ecuación $u^2 + v = 1$, es decir el arco de la parábola $v = 1 - u^2, v > 0$.



Si $y > 0$, Γ' se describe en el sentido positivo de B a A .

Si $y < 0$, Γ' se describe en el sentido negativo de A a B .

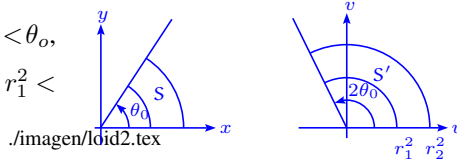
Se podría decir que el plano uv está en cierto modo desplegado alrededor de la línea $\det J = 0$, para contar dos veces de un lado y ser excluido del otro.

Ejemplo 1.4.4 Consideremos la transformación $u = x^2 - y^2, v = 2xy$, es claro que (x, y) y $(-x, -y)$ tienen la misma imagen, por lo que para tener una transformación biyectiva es necesario que la región considerada no tenga puntos simétricos con relación al origen. El Jacobiano es $\det J = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix} = 4(x^2 + y^2)$ es positivo en todo punto salvo en el origen.

La transformación $u + iv = (x + iy)^2$ describe la relación original, por lo que si utilizamos coordenadas polares en los dos planos (x, y) , (u, v) , r, θ y r', θ' tenemos que:

$$r' = r^2, \quad \theta' = 2\theta, \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

Consideremos la región S dada por $r_1 < r < r_2$, $0 < \theta < \theta_o$, entonces la región correspondiente S' está dada por $r_1^2 < r' < r_2^2$, $0 < \theta' < 2\theta_o$.



Si $\theta_o < \pi$, para cada punto de S , el simétrico con respecto al origen no está en S y la correspondencia es biunívoca entre S y S' .

Si $\theta_o > \pi$, la porción $2\pi < \theta' < 2\theta_o$ recubre la porción $0 < \theta' < 2\theta_o - 2\pi$ y existen puntos de S' que son la imagen de dos puntos distintos de S , que son simétricos respecto al origen. La correspondencia no es biyectiva.

Análisis cuando $\det J = 0$

Supongamos que $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$ de modo que $\det J = 0$, pero al menos una de las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$ no sean nulas. Supongamos que $\frac{\partial f}{\partial x} \neq 0$, entonces por el teorema de la función implícita aplicada a $H(u, x, y) = u - f(x, y)$, $\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x} \neq 0$, entonces $x = h(y, u)$, por lo tanto $v = g(h(y, u), y) = G(y, u)$ satisface $\frac{\partial G}{\partial y} \neq 0$, ya que $\frac{\partial v}{\partial y} = 1 = \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$.

De este modo $v - G(y, u) = 0$, con $\frac{\partial G}{\partial y} \neq 0$ implica que y es función de (u, v) i.e. $y = G_1(u, v)$, por lo que $v = g(x, y) = g(h(y, u), y) = g(h(G_1(u, v)), u, G_1(u, v)) = G_2(u, v)$.

De esta manera tenemos que existe una relación entre u y v independientemente de x, y , es decir existe una relación $v = G_3(u)$.

Si las cuatro derivadas parciales son nulas, las funciones f, g son constantes, por lo que $u = \text{cte}$, $v = \text{cte}$ y existe una relación constante entre u y v .

Teorema 1.4.1 Sean f, g funciones parcialmente derivables y continuas en una región $S \subset \mathbb{R}^2$, donde el Jacobiano de la transformación $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$ se anula, entonces existe una relación funcional entre u y v e inversamente.

1.5 Cambio de variable en la integral doble

1.5.1 Cambio de variable – Caso simple

Sean R y R' dos regiones del plano \mathbb{R}^2 acotadas, limitadas por las curvas Γ y Γ' respectivamente. Vamos a estudiar como cambia la integral $\iint_{R'} f(u, v) du dv$ a $\iint_R F(x, y) dx dy$ con la transformación

$$u = ax + by, v = cx + dy, \text{ si } D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

Supongamos que R' tiene curva frontera Γ' regular a trozos. La transformación inversa especifica una transformación de R' a R en el plano xy , con curva frontera Γ regular a trozos y determina la función $F(x, y) = f(ax + by, cx + dy)$, $(x, y) \in R$. Se construye una red rectangular en el plano xy , con cuadrados Δ , de modo que $\max |\Delta| = h$. La transformación de esta red en el plano uv , es una red que es en general oblicua y particiona en el plano uv la imagen de Δ en paralelogramos con área $|\Delta'| = |D||\Delta|$.

Así obtenemos particiones P y P' de R y R' respectivamente y se tiene:

$$S_{P'}(f) = \sum f(u, v) |\Delta'| = \sum F(x, y) |D| |\Delta| = S_P(|D|F), \quad (x, y) \in \Delta.$$

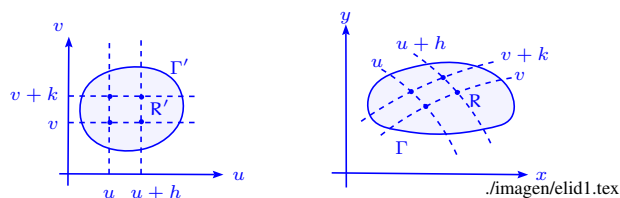
Pasando al límite cuando $h \rightarrow 0$, tenemos la fórmula:

$$\iint_{R'} f(u, v) du dv = |D| \iint_R F(x, y) dx dy.$$

En este razonamiento se puede considerar que f es continua sobre \bar{R}' , entonces la función F es continua en \bar{R} y ambas integrales existen. También se puede suponer que f es integrable por lo que automáticamente implica la integrabilidad de F .

1.5.2 Cambio de variable – Caso general

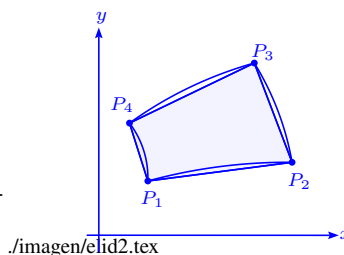
Sean R y R' dos regiones del plano \mathbb{R}^2 acotadas limitadas por las curvas Γ y Γ' respectivamente y sea $r: R' \rightarrow R$ una aplicación biyectiva de clase C^1 en R' , tal que $r(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$. Así a cada punto $(x, y) \in R$ le corresponde un punto $(u, v) \in R'$ tal que $r(u, v) = (x, y)$. Si los puntos (x, y) describen la curva Γ , los correspondientes puntos (u, v) describen la curva Γ' .



Consideremos en R' la recta $u = c$, en general le corresponde una curva en el plano xy . Similarmente a la recta $v = c'$, le corresponde en general una curva en el plano xy .

Usando las rectas $u = c$, $v = c'$, dividamos el dominio R' en sub-rectángulos, donde no consideramos los sub-rectángulos que contienen elementos de la frontera Γ' . Las curvas correspondientes dividen la región R en cuadriláteros curvilíneos.

Consideremos en la región R' , el área $\Delta S'$ del sub-rectángulo limitado por las curvas $u = \text{constante}$, $v = \text{constante}$, $u + \Delta u = \text{constante}$, $v + \Delta v = \text{constante}$ y el cuadrilátero curvilíneo correspondiente en R de área ΔS .



En nuestro caso $\Delta S' = \Delta u \Delta v$, pero no sabemos el valor de ΔS . Consideremos los vértices del cuadrilátero curvilíneo $P_1 P_2 P_3 P_4$.

$$\begin{aligned} P_1(x_1, y_1) : \quad & x_1 = x(u, v) & y_1 = y(u, v) \\ P_2(x_2, y_2) : \quad & x_2 = x(u + \Delta u, v) & y_2 = y(u + \Delta u, v) \\ P_3(x_3, y_3) : \quad & x_3 = x(u + \Delta u, v + \Delta v) & y_3 = y(u + \Delta u, v + \Delta v) \\ P_4(x_4, y_4) : \quad & x_4 = x(u, v + \Delta v) & y_4 = y(u, v + \Delta v), \end{aligned}$$

o bien usando aproximaciones de orden 1:

$$\begin{aligned} x_1 &\approx x(u, v) & y_1 &\approx y(u, v) \\ x_2 &\approx x(u, v) + \frac{\partial x}{\partial u}(u, v)\Delta u & y_2 &\approx y(u, v) + \frac{\partial y}{\partial u}(u, v)\Delta u \\ x_3 &\approx x(u, v) + \frac{\partial x}{\partial u}(u, v)\Delta u + \frac{\partial x}{\partial v}(u, v)\Delta v & y_3 &\approx y(u, v) + \frac{\partial y}{\partial u}(u, v)\Delta u + \frac{\partial y}{\partial v}(u, v)\Delta v \\ x_4 &\approx x(u, v) + \frac{\partial x}{\partial v}(u, v)\Delta v & y_4 &\approx y(u, v) + \frac{\partial y}{\partial v}(u, v)\Delta v. \end{aligned}$$

El área ΔS es aproximadamente igual al doble del área del triángulo $P_1 P_2 P_3$ y se calcula usando la fórmula de geometría analítica (despreciando los términos de orden dos¹¹):

¹¹Recordemos que si un triángulo en el plano tiene vértices (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) el área está dada por:

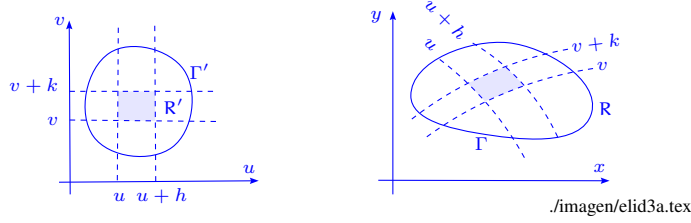
$$\begin{aligned} \text{Área} &= \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \pm \frac{1}{2} (x_1 y_2 + y_1 x_3 + y_3 x_2 - y_2 x_3 - y_1 x_2 - x_1 y_3) = \\ &= \pm \frac{1}{2} |(x_3 - x_1)(y_3 - y_2) - (x_3 - x_2)(y_3 - y_1)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta S &\approx |(x_3 - x_1)(y_3 - y_2) - (x_3 - x_2)(y_3 - y_1)| = \\ &\left| \left(\frac{\partial x}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v \right) \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v - \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v \left(\frac{\partial y}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v \right) \right| = \\ &\left| \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \Delta u \Delta v - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u \Delta v \right| = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \right| \Delta u \Delta v, \end{aligned}$$

por lo que $\lim_{\Delta S' \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta S'} = |\det J_r|$ valor absoluto del Jacobiano de la aplicación $r(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$.

1.5.3 Otra interpretación geométrica

Sea $v_1 = \frac{\partial r}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u} \right)$, $v_2 = \frac{\partial r}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v} \right)$ vectores tangentes a las curvas $r(u, v_0)$ y $r(u_0, v)$ respectivamente.



Si Δu es un incremento en u , el desplazamiento es aproximadamente $\|v_1\| \Delta u$ y de manera similar, si Δv es un incremento en v , el desplazamiento es aproximadamente $\|v_2\| \Delta v$. Así la región rectangular de dimensiones Δu y Δv en el plano uv , se transforma en el cuadrilátero curvilíneo cuyos lados son aproximadamente los vectores $v_1 \Delta u$ y $v_2 \Delta v$. El área de este cuadrilátero es aproximadamente $\|v_1 \Delta u \times v_2 \Delta v\| = \|v_1 \times v_2\| \Delta u \Delta v$, donde:

$$v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, \det J_r),$$

es decir el área es aproximadamente $|\det J_r| \Delta u \Delta v$.

Este resultado que se ha obtenido no es una demostración rigurosa y los detalles son complicados de justificar y se hará en el caso general de n dimensiones.

Si $\det J_r = 0$ es un punto (u, v) los dos vectores v_1 y v_2 son paralelos y el cuadrilátero se degenera. Puntos de este tipo se denominan puntos singulares. La fórmula sigue siendo válida si existe un número finito de puntos singulares que formen un conjunto de contenido nulo.

Sea $f(x, y)$ una función acotada sobre R y sea la función $F(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ sobre R' , por lo

que sobre los sub-rectángulos de R' satisfacen:

$$\sum \sum f(x, y) \Delta S \approx \sum \sum F(u, v) \Delta S',$$

es decir:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_{R'} F(u, v) |\det J_r| du dv.$$

Teorema 1.5.1 Sea f una función acotada sobre R y sea $r: R' \rightarrow R$ una aplicación biyectiva de clase

C^1 , tal que $r(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$, con Jacobiano $\det J_r(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$, entonces:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_{R'} f(x(u, v), y(u, v)) |\det J_r(u, v)| du dv.$$

1.5.4 Caso de coordenadas polares

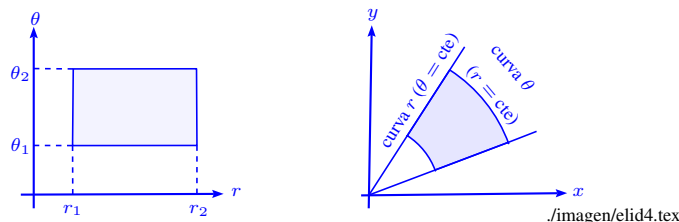
En este caso escribimos r y θ en vez de u y v y definimos la aplicación $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Para obtener una aplicación biyectiva supongamos que $r > 0$ y que $\theta \in [\theta_o, \theta_o + 2\pi[$. Así, la aplicación es biyectiva en $]0, +\infty[\times]\theta_o, \theta_o + 2\pi[$ del plano $r\theta$ y el conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. El Jacobiano es:

$$\det J(r, \theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = r$$

y la transformación de la integral sería:

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \iint_{S'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

Las curvas r son rectas que pasan por el origen y las curvas θ son círculos concéntricos en el origen. La imagen del rectángulo $[r_1, r_2] \times [\theta_1, \theta_2]$ es un cuadrilátero curvilíneo en el plano xy limitado por las curvas $r = r_1$, $r = r_2$ y las rectas $\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_2$.



El Jacobiano se anula cuando $r = 0$, pero esto no afecta la validez de la fórmula de transformación, ya que el conjunto de puntos con $r = 0$, es de contenido nulo.

Observación Uno de los propósitos del teorema de cambio de variable es proporcionar un método mediante el cual se pueden simplificar algunas integrales dobles. Es posible tener una integral $\iint_S f dx dy$, en la cual la función f o la región S es complicada y de difícil evaluación. Así, se escoge R' de modo que la integral sea de fácil cálculo con la nueva función $f(x(u, v), y(u, v))$ en R' . Sin embargo, el problema se puede complicar si no se escoge R' apropiadamente.

Definición 1.5.1 Un conjunto acotado $S \subset \mathbb{R}^n$ se dice de contenido o medida nula si $\forall \epsilon > 0$, $\exists R_1, \dots, R_m$ n -intervalos tales que $S \subset \bigcup_{k=1}^m R_k$ y $\sum_{k=1}^m V(R_k) < \epsilon$.

Definición 1.5.2 Un conjunto acotado $S \subset \mathbb{R}^n$ se dice medible¹², si su frontera ∂S es de contenido nulo.

Propiedades

a) $\partial(S \cup S') \subset \partial S \cup \partial S'$, $\partial(S \cap S') \subset \partial S \cup \partial S'$, $\partial(S \setminus S') \subset \partial S \cup \partial S'$.

b) La unión finita de conjuntos medibles es medible.

c) Si S y S' son medibles, $S \setminus S'$ es medible.

d) El rectángulo $R = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ es medible.

e) S es medible si y sólo si $\int \dots \int_R I_S = V(S)$ existe, $\forall R$ n -intervalo tal que $S \subset R$.

Proposición 1.5.1 Un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ es medible con volumen $V(S)$, si y sólo si $\forall \epsilon > 0$, existe una familia de n -intervalos $T = \{R_1, \dots, R_p\}$ que no se cruzan, con $R_i \cap \bar{S} \neq \emptyset$, $i = 1, \dots, p$, tales que $S \subset \bigcup_{i=1}^p R_i$, $V(S) - \epsilon \leq \sum_{i: R_i \subset S^\circ} V(R_i)$ y $\sum_{i=1}^p V(R_i) \leq V(S) + \epsilon$.

Corolario 1.5.1 La intersección, unión o diferencia de conjuntos medibles en \mathbb{R}^n es medible.

Proposición 1.5.2 Sean S y S' dos conjuntos medibles de \mathbb{R}^n , entonces:

a) $V(S) \geq 0$, $V(S') \geq 0$

b) Si S y S' no se cruzan i.e. $\overline{S \cap S'} = \emptyset$, entonces $V(S \cup S') = V(S) + V(S')$

c) Si S y S' son conjuntos congruentes i.e. se puede pasar de S a S' por un movimiento rígido (que es una traslación y una rotación), entonces $V(S) = V(S')$.

d) En general $V(S \cup S') \leq V(S) + V(S')$, $V(S \setminus S') = V(S) - V(S \cap S')$.

¹²Jordan medible

Como en el caso $n = 2$, si $S \subset \mathbb{R}^n$ es acotado, existe un n -intervalo $R \supset S$ tal que para toda partición P de R , definimos $J^-(S, P)$ como la suma de las medidas de los n -intervalos de P que contienen sólo puntos interiores de S y $J^+(S, P)$ como la suma de las medidas de los rectángulos de P que contienen puntos de S o de su frontera ∂S . Los números

$$\underline{V}(S) = \sup\{J^-(S, P)/P \text{ es una partición de } R\},$$

$$\overline{V}(S) = \inf\{J^+(S, P)/P \text{ es una partición de } R\},$$

se llaman respectivamente el contenido interior y exterior de S .

En general se tiene que $\underline{V}(\partial S) = 0$, $\underline{V}(S) \leq \overline{V}(S)$ y S es medible si y sólo si $\underline{V}(S) = \overline{V}(S)$.

Observemos que $\overline{V}(\partial S) = \overline{V}(S) - \underline{V}(S)$ y que S es medible $\iff \overline{V}(\partial S) = 0$.

Proposición 1.5.3 *Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto acotado, para que S sea medible es necesario y suficiente que $\forall \epsilon > 0$, existan dos conjuntos medibles S' y S'' tales que $S' \subset S \subset S''$ y $V(S'') - V(S') < \epsilon$.*

Definición 1.5.3 *Sea S un subconjunto de \mathbb{R}^n medible tal que $S \subset R$ n -intervalo y sea $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada sobre S , extendemos la función f sobre R por:*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in S \\ 0 & \text{si } x \in R \setminus S. \end{cases}$$

Así tenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}} \cdots \int \tilde{f} = \int_S \cdots \int f.$$

Integración sobre conjuntos medibles

Proposición 1.5.4 *Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible¹³, $f, g: S \rightarrow \mathbb{R}$ funciones integrables sobre S tales que $f \leq g$, sobre S , entonces se tiene que $\int_S \cdots \int f \leq \int_S \cdots \int g$.*

Proposición 1.5.5 *Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible y sea $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ integrable sobre S , i.e. $|f(x)| \leq M$, $\forall x \in S$, entonces $\left| \int_S \cdots \int f(x) dx \right| \leq MV(S)$.*

En particular, si S es de contenido nulo, $\int_S \cdots \int f = 0$.

¹³Jordan medible

Proposición 1.5.6 Si S y S' son conjuntos medibles de \mathbb{R}^n de modo que $S \cap S'$ es de contenido nulo y si f es integrable sobre $S \cup S'$, entonces:

$$\int_{S \cup S'} \cdots \int f = \int_S \cdots \int f + \int_{S'} \cdots \int f.$$

Proposición 1.5.7 Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible, $f, g: S \rightarrow \mathbb{R}$ funciones que son iguales salvo en un conjunto $D \subset S$ de contenido nulo, entonces $\int_S \cdots \int f = \int_S \cdots \int g$.

Proposición 1.5.8 Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible, $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada, entonces f es integrable sobre S si y sólo si $\forall \epsilon > 0$ existen funciones s y t escalonadas sobre S tales que $s \leq f \leq t$ y $\int_S \cdots \int (t - s) < \epsilon$.

Es posible establecer una definición funciones acotadas sobre conjuntos medibles, equivalente a la dada anteriormente, de la siguiente manera.

Definición 1.5.4 Se dice que una función acotada f sobre el conjunto medible $S \subset \mathbb{R}^n$ es integrable si y sólo si $\forall \epsilon > 0$, existe una partición T de S (i.e. una familia de n -intervalos $T = \{R_1, \dots, R_n\}$ de interior no vacío, que intersecan \bar{S} , que no se crucen y que recubren \bar{S}) tal que $\bar{S}_T - \underline{S}_T < \epsilon$, donde $\bar{S}_T = \sum_{i=1}^n M_i V(R_i)$, $\underline{S}_T = \sum_{i=1}^n m_i V(R_i)$, $M_i = \sup_{(x,y) \in R_i \cap S} f(x,y)$, $m_i = \inf_{(x,y) \in R_i \cap S} f(x,y)$.

La integral de f sobre S se denota $\int_S \cdots \int f$.

Notemos que $m_i = \inf_{(x,y) \in R_i \cap S} f(x,y) = \inf_{(x,y) \in R_i} \tilde{f}(x,y)$, $M_i = \sup_{(x,y) \in R_i \cap S} f(x,y) = \sup_{(x,y) \in R_i} \tilde{f}(x,y)$.

Al igual que el caso $n = 2$, se pueden definir las sumas de Riemann de f para la partición T de S , por $S_T(f) = S(T, f) = \sum_{i=1}^n f(\zeta_i) V(R_i)$, donde $\zeta_i \in R_i \cap S$ y la llamamos suma de Riemann de la función f asociada a T .

De manera totalmente análoga definimos $\bar{I}(f) = \inf_T \bar{S}_T$ la integral superior de f sobre S y $\underline{I}(f) = \sup_T \underline{S}_T$ la integral inferior de f sobre S i.e. $\underline{I}(f) \leq \bar{I}(f)$.

También se puede definir la norma de la partición T por $\|T\| = \max_{1 \leq i \leq n} d(R_i)$ y podemos establecer de manera natural los siguientes resultados.

Teorema 1.5.2 Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ medible y $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada sobre S , las siguientes propiedades son equivalentes:

i) f es Riemann integrable sobre S

$$ii) \underline{I}(f) = \bar{I}(f).$$

iii) $\forall \epsilon > 0$, existe una partición T de S tal que $\bar{S}_T - \underline{S}_T < \epsilon$.

iv) $\forall \epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\forall T$ partición con $\|T\| < \delta$, se tiene $\bar{S}_T - \underline{S}_T < \epsilon$.

Corolario 1.5.2 Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ medible, sea $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada y sea $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$, una sucesión de particiones de un conjunto de S , tal que $\|T_k\| \rightarrow 0$, cuando $k \rightarrow \infty$, y si alguna de las siguientes condiciones se verifica:

- i) $\lim_{k \rightarrow \infty} [\bar{S}_{T_k}(f) - \underline{S}_{T_k}(f)] = 0$
- ii) $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_j f(\xi_j^k) V(\mathbb{R}_j^k) = I$ ($\xi_j^k \in \mathbb{R}_j^k \cap S$)
- iii) $\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{S}_{T_k}(f) = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{S}_{T_k}(f) = I$,

entonces la integral de f sobre S existe y es igual a I .

Inversamente, la existencia de la integral implica el cumplimiento de las condiciones i), ii) y iii). La existencia de sólo uno de los límites de iii) no implica la existencia de la integral sobre S .

Corolario 1.5.3 Sea $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de particiones del conjunto medible $S \subset \mathbb{R}^n$, de modo que $\|T_k\| \rightarrow 0$, cuando $k \rightarrow \infty$, entonces la suma de los volúmenes de los n -intervalos \mathbb{R}_j^k que tienen intersección no vacía con la frontera de S , tiende a cero, cuando $k \rightarrow \infty$.

Corolario 1.5.4 La integral de una función f acotada sobre un conjunto medible $S \subset \mathbb{R}^n$, se puede definir como el límite $\lim_{\|T_k\| \rightarrow 0} \sum_j^* f(\xi_j^k) V(\mathbb{R}_j^k) = \int_S \dots \int f$, para una sucesión particular de particiones $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de S , de modo que $\|T_k\| \rightarrow 0$, cuando $k \rightarrow \infty$, donde la suma \sum^* sólo se extiende sobre los \mathbb{R}_j^k de T_k que están contenidos en $\overset{\circ}{S}$ i.e. no intersecan la frontera de S .

Teorema 1.5.3 Si f es una función real y continua sobre $S \subset \mathbb{R}^n$ cerrado y medible, entonces f es integrable sobre S .

Teorema 1.5.4 Si f es una función real acotada sobre $S \subset \mathbb{R}^n$ cerrado y medible, tal que f es continua salvo en un conjunto $\Gamma \subset S$ de contenido nulo, entonces f es integrable sobre S .

Proposición 1.5.9 Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible y sea $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, entonces el gráfico G_f de f es de contenido nulo en \mathbb{R}^{n+1} .

Prueba Sea $G_f = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} / x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)\} \subset \mathbb{R} \times [-M, M]$ acotado, donde R es un n -intervalo tal que $S \subset R$ y M es tal que $|f(x)| \leq M, \forall x \in S$. Se extiende f a \tilde{f} sobre R y los

puntos de discontinuidad de \tilde{f} están contenidos en ∂S que es de contenido nulo.

Sea $\epsilon > 0$ y sea Q_1, \dots, Q_k una familia de n -intervalos de \mathbb{R}^n tales que $\partial S \subset \bigcup_{i=1}^k \overset{\circ}{Q}_i$ y $\sum_{i=1}^k V(Q_i) < \frac{\epsilon}{4M}$.

Así f es continua sobre $Q = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{i=1}^k \overset{\circ}{Q}_i$ que es un compacto, f es uniformemente continua sobre Q i.e. $\exists \delta > 0$ tal que si $\|x - y\| < \delta, x, y \in Q \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{4V(\mathbb{R})}$.

Sea P una partición de \mathbb{R} tal que cada Q_i es la unión de n -intervalos de P con $\|P\| < \delta$.

Sean R_1, \dots, R_q los n -intervalos de P tales que $R_i \subset Q$ y sea $m_i = \inf_{x \in R_i} f(x)$, $M_i = \sup_{x \in R_i} f(x)$, entonces $M_i - m_i < \frac{\epsilon}{2V(\mathbb{R})}$, $i = 1, \dots, q$.

Sea $I_i = R_i \times [m_i, M_i]$, $i = 1, \dots, q$, $J_j = Q_j \times [-M, M]$, $j = 1, \dots, k$, entonces el gráfico de f , $G_f \subset \bigcup_{i=1}^q I_i \cup \bigcup_{j=1}^k J_j$, por lo que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^q V(I_i) + \sum_{j=1}^k V(J_j) &= \sum_{i=1}^q (M_i - m_i)V(R_i) + \sum_{j=1}^k 2MV(Q_j) \\ &< \frac{\epsilon}{2V(\mathbb{R})} \sum_{i=1}^q V(R_i) + 2M \frac{\epsilon}{2V(\mathbb{R})} \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Observación Si se define $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| \leq 1\}$ como la bola unitaria de \mathbb{R}^n , su frontera $\partial B_n = S_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| = 1\}$ es la superficie de la esfera, la cual puede verse como la unión de los gráficos de las funciones $f(x_1, \dots, x_{n-1}) = \pm \sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2}$ i.e. ∂B_n es de contenido nulo.

El teorema se puede escribir de otra manera: Sea $f: S \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ continua sobre S medible, entonces la superficie dada por $f(S)$ es de contenido nulo en \mathbb{R}^{n+1} .

Ejemplo 1.5.1 Si se considera R un n -intervalo de \mathbb{R}^n y S una de sus caras, es proyectable uno a uno sobre un subespacio $(n-1)$ -dimensional, digamos representado por $x_n = \sum_{j=1}^{n-1} d_j x_j$ definida sobre un conjunto cerrado y acotado, entonces $V(S) = 0$. Además, dado que el n -intervalo tiene un número finito de caras, se concluye que la superficie de R es de contenido nulo.

Teorema 1.5.5 Sea $f = (f_1, \dots, f_n): S \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 sobre S medible y convexo en \mathbb{R}^p , $1 \leq p \leq n-1$, entonces la superficie $f(S)$ es de contenido nulo en \mathbb{R}^n .

Prueba Sea $\epsilon > 0$ y sea $K > 0$ tal que $\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right| < K, \forall x \in S, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, p$. Para cada par de puntos $x', x'' \in S$ se tiene:

$$\|f(x') - f(x'')\|^2 = \sum_{i=1}^n |f_i(x') - f_i(x'')|^2 = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^p \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x' + \theta x'')(x'_i - x''_i) \right]^2 \leq C^2 K^2 \|x' - x''\|^2,$$

donde $0 < \theta < 1$ y C sólo depende de n .

Como S es acotado, $S \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^p$, p -intervalo, tomemos una partición P de \mathbb{R} uniforme de modo que $S \subset \bigcup_{k=1}^q \mathbb{R}_k = \mathbb{R}$, \mathbb{R}_k son cubos p -dimensionales con volumen $V(\mathbb{R}_k) = h^p$, $0 < h < 1$, i.e. $\sup_{x', x'' \in \mathbb{R}_k} \|x' - x''\| = \sqrt{p}h$. Observemos que $\sum_{k=1}^q V(\mathbb{R}_k) = M = V(\mathbb{R})$, entonces $\sum_{k=1}^q 1 = Mh^{-p}$, es decir que el número de cubos p -dimensionales es del orden de h^{-p} .

Sea W_k un rectángulo n -dimensional tal que $\{y \in \mathbb{R}^n / y = f(x), x \in \mathbb{R}_k \cap S\} \subset W_k$, de modo que $d(W_k) = \sup_{y, y'' \in W_k} \|y' - y''\| \leq CK\sqrt{p}h$, entonces $f(S) \subset \bigcup_{k=1}^q W_k$ y por lo tanto:

$$\begin{aligned} \bar{V}(f(S)) &\leq \sum_{k=1}^q V(W_k) \leq \sum_{k=1}^q \left(\sup_{y, y'' \in W_k} \|y' - y''\| \right)^n \leq \sum_{k=1}^q C^n K^n (\sqrt{p})^n h^n \\ &\leq C^n K^n (\sqrt{p})^n M h^{n-p} = B h^{n-p} \leq B h, \end{aligned}$$

y si se escoge la partición P de modo que $\|P\| < \frac{\epsilon}{B}$, entonces $\bar{V}(f(S)) \leq B h < \epsilon$.

Corolario 1.5.5 Sea $f = (f_1, \dots, f_n): S \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 sobre S acotado y convexo en \mathbb{R}^p , entonces existe $c > 0$ tal que $\|f(x') - f(x'')\| < c\|x' - x''\|$, $\forall x', x'' \in S$.

Definición 1.5.5 Sea $f: S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función, definimos de la parte positiva de f y la denotamos $f^+ = \max\{f, 0\}$.

De manera similar se define la parte negativa de f y la denotamos $f^- = \max\{-f, 0\}$.

Observemos que $f = f^+ - f^-$ y que cuando f es integrable sobre un conjunto S medible, f^+ y f^- son integrables sobre S y se tiene:

$$\int_S f = \int_S f^+ - \int_S f^-.$$

En efecto, el resultado es cierto si $f \in \mathbf{E}$, pues si $f = \sum_i \alpha_i I_{B_i}$, $B' = \bigcup_{i: \alpha_i \leq 0} B_i$, $B'' = \bigcup_{i: \alpha_i \geq 0} B_i$, $\{B_i / i \in I\}$ es una partición de S :

$$f^+ = \sum_{i: \alpha_i > 0} \alpha_i I_{B_i} + 0 I_{B'}, \quad f^- = - \sum_{i: \alpha_i < 0} \alpha_i I_{B_i} + 0 I_{B''},$$

i.e. $f^+, f^- \in \mathbf{E}$ y $\int_S f = \int_S f^+ - \int_S f^-$.

Si f es integrable, para todo $\epsilon > 0$, existen funciones s y t escalonadas sobre S , tales que $s \leq f \leq t$ y $\int_S (t - s) < \epsilon$, con $s = \sum_{i \in I} \alpha_i I_{B_i}$, $t = \sum_{i \in I} \beta_i I_{B_i}$, $\{B_i / i \in I\}$ es una partición de S . Pero $0 \leq s^+ \leq f^+ \leq t^+$, $\int_S (t^+ - s^+) = \sum_{i \in I'} (\beta_i - \alpha_i) V(B_i) \leq \sum_{i \in I'} (\beta_i - \alpha_i) V(B_i) = \int_S (t - s) < \epsilon$, donde $I' = \{i \in I / \alpha_i \geq 0\} \subset I$ y porque $\beta_i - \alpha_i \geq 0$, para todo $i \in I$, lo que indica que f^+ es integrable.

De igual manera se verifica que f^- es integrable.

Así tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.5.6 Sea $f: S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función, donde S es medible, entonces f es integrable si y sólo si f^+ y f^- es integrable y se tiene:

$$\int_S f = \int_S f^+ - \int_S f^-.$$

Teorema 1.5.7 Si f es una función real acotada e integrable sobre un conjunto $S = S' \cup S'' \subset \mathbb{R}^n$, donde S' y S'' son medibles, los cuales no se cruzan, entonces f es integrable sobre cada uno de los conjuntos S' y S'' y se tiene:

$$\int_S \cdots \int f = \int_{S'} \cdots \int f + \int_{S''} \cdots \int f.$$

Teorema 1.5.8 Sean f y g funciones reales acotadas e integrables sobre $S \subset \mathbb{R}^n$ medible, $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\begin{array}{lll} \text{i) } f(x) \pm g(x) & \text{ii) } \alpha f(x) & \text{iii) } |f(x)| \\ \text{iv) } f(x)g(x) & \text{v) } \frac{1}{f(x)}, \text{ con } |f(x)| > \delta > 0, & \end{array}$$

son integrables sobre S . Además: $\int_S (f \pm g) = \int_S f \pm \int_S g$, $\int_S \alpha f = \alpha \int_S f$.

Teorema 1.5.9 Si f , g , φ son funciones reales acotadas e integrables sobre $S \subset \mathbb{R}^n$ medible, que satisfacen $f(x) \leq g(x)$, $\varphi(x) \geq 0$, $\forall x \in S$, entonces:

$$\int_S f(x)\varphi(x)dx \leq \int_S g(x)\varphi(x)dx.$$

Si $a \leq f(x) \leq b$, $\forall x \in S$, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que:

$$\int_S f(x)\varphi(x)dx = c \int_S \varphi(x)dx$$

(Teorema de valor medio para integrales múltiples).

Teorema 1.5.10 Sean $S' \subset \mathbb{R}^p$, $S'' \subset \mathbb{R}^{n-p}$ medibles, entonces $S' \times S''$, es medible en \mathbb{R}^n y $V(S' \times S'') = V(S') \cdot V(S'')$

Prueba Sabemos que el resultado es válido si S' y S'' son intervalos p y $n-p$ dimensionales.

Dado que S' y S'' son medibles, existen intervalos R' y R'' p y $n-p$ dimensionales respectivamente, tales que $S' \subset R' \subset \mathbb{R}^p$, $S'' \subset R'' \subset \mathbb{R}^{n-p}$, i.e. $S' \times S'' \subset R = R' \times R''$, rectángulo n -dimensional.

Dado que $I_{S'}$ y $I_{S''}$ son integrables, existen funciones escalonadas s', s'', t', t'' tales que $0 \leq s' \leq I_{S'} \leq t', 0 \leq s'' \leq I_{S''} \leq t''$, entonces $0 \leq s's'' \leq I_{S' \times S''} \leq t't''$, sobre $R' \times R''$ y es claro que $s's''$ y $t't''$ son funciones escalonadas que encierran $I_{S' \times S''}$, por lo tanto:

$$\sup_{\substack{s' \leq I_{S'} \\ s'' \leq I_{S''}}} \int_{R' \times R''} s's'' \leq \sup_{s \leq I_{S' \times S''}} \int_{R' \times R''} s \leq \inf_{I_{S' \times S''} \leq t} \int_{R' \times R''} t \leq \inf_{\substack{I_{S'} \leq t' \\ I_{S''} \leq t''}} \int_{R' \times R''} t't'',$$

donde s y t son funciones escalonadas tales que $s \leq I_{S' \times S''} \leq t$. Pero si h' y h'' son escalonadas, $s's'' = \sum_i \alpha_i I_{R'_i} \sum_j \beta_j I_{R''_j}$, con $R'_i \subset R', R''_j \subset R''$ i.e.:

$$\begin{aligned} \int_{R' \times R''} h'h'' &= \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j \int_{R' \times R''} I_{R'_i \times R''_j} = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j V(R'_i \times R''_j) \\ &= \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j V(R'_i) V(R''_j) = \sum_i \alpha_i V(R'_i) \sum_j \beta_j V(R''_j) = \int_{R'} h' \int_{R''} h'', \end{aligned}$$

con lo cual se tiene:

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{s' \leq I_{S'} \\ s'' \leq I_{S''}}} \int_{R' \times R''} s's'' &= \sup_{s' \leq I_{S'}} \int_{R'} s' \sup_{s'' \leq I_{S''}} \int_{R''} s'' = \int_{R'} I_{S'} \int_{R''} I_{S''} = V(S') \cdot V(S''), \\ \inf_{\substack{I_{S'} \leq t' \\ I_{S''} \leq t''}} \int_{R' \times R''} t't'' &= \inf_{I_{S'} \leq t'} \int_{R'} t' \inf_{I_{S''} \leq t''} \int_{R''} t'' = V(S') \cdot V(S''), \end{aligned}$$

es decir se ha probado que $\bar{I}(I_{S' \times S''}) = \underline{I}(I_{S' \times S''}) = V(S' \times S'')$, por lo que $S' \times S''$ es medible y $V(S' \times S'') = V(S')V(S'')$.

Corolario 1.5.6 Sean g y h funciones integrables sobre $S' \subset \mathbb{R}^p, S'' \subset \mathbb{R}^{n-p}$ conjuntos medibles respectivamente. Sea $f(x, y) = g(x)h(y)$ definida sobre $S' \times S'' \subset \mathbb{R}^n$, entonces f es integrable y se tiene que:

$$\int_{S' \times S''} f = \int_{S'} g \int_{S''} h.$$

Prueba Primeramente demostraremos que el resultado es válido para $g \geq 0$ y $h \geq 0$. Dado que g y h son integrables, existen funciones escalonadas s', s'', t', t'' tales que $0 \leq s' \leq g \leq t', 0 \leq s'' \leq h \leq t''$, entonces $0 \leq s's'' \leq f \leq t't''$, sobre $S' \times S''$. Pero si h' y h'' son escalonadas,

$$\int_{S' \times S''} h'h'' = \int_{S'} h' \int_{S''} h'',$$

por lo tanto:

$$\sup_{\substack{s' \leq g \\ s'' \leq h}} \int_{S' \times S''} s's'' \leq \sup_{s \leq f} \int_{S' \times S''} s = \underline{I}(f) \leq \bar{I}(f) = \inf_{f \leq t} \int_{S' \times S''} t \leq \inf_{\substack{g \leq t' \\ h \leq t''}} \int_{S' \times S''} t't'',$$

pero

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{s' \leq g \\ s'' \leq h}} \int_{S' \times S''} s' s'' &= \sup_{s' \leq g} \int_{S'} s' \sup_{s'' \leq h} \int_{S''} s'' = \int_{S'} g \int_{S''} h = \\ \inf_{g \leq t'} \int_{S'} t' \inf_{h \leq t''} \int_{S''} t'' &= \inf_{\substack{g \leq t' \\ h \leq t''}} \int_{S' \times S''} t' t'', \end{aligned}$$

con lo cual se concluye que f es integrable y $\int_{S' \times S''} f = \int_{S'} g \int_{S''} h$.

Para el caso general, observemos que $h = h^+ - h^-$, $g = g^+ - g^-$ y que $f = gh$ es tal que $f^+ = h^+g^+ + h^-g^-$, $f^- = h^+g^- + h^-g^+$.

Teorema 1.5.11 Teorema de Fubini

Sean $S' \subset \mathbb{R}^p$, $S'' \subset \mathbb{R}^{n-p}$ conjuntos medibles y sea $f: S' \times S'' \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable sobre $S = S' \times S''$, tal que $f_x(y) = f(x, y)$ es integrable sobre S'' . Sea $F(x) = \int_{S''} f_x = \int_{S''} f(x, y) dy$, entonces F es integrable y

$$\int_{S' \times S''} f = \int_{S'} F = \int_{S'} \left(\int_{S''} f(x, y) dy \right) dx.$$

La expresión $\int_{S''} f(x, y) dy$ se entiende como la integral de Riemann de f con respecto a y para x fijo, cuando existe y como un número entre la integral superior e inferior de $f(x, y)$ con respecto a $y \in S''$, cuando la integral no existe.

La integral de F con respecto a $x \in S'$ existe en el sentido de Riemann.

Si además $\forall y \in S''$, $f_y(x) = f(x, y)$ es integrable sobre S' , entonces la función $G(y) = \int_{S'} f_y = \int_{S'} f(x, y) dx$ es integrable y

$$\int_{S' \times S''} f = \int_{S''} G = \int_{S''} \left(\int_{S'} f(x, y) dx \right) dy.$$

Demostración Sea $\epsilon > 0$ y sean s, t funciones escalonadas sobre $S' \times S''$, tales que $s \leq f \leq t$ y $\int_{S' \times S''} (t - s) < \epsilon$. Para cada $x \in S$, $s_x \leq f_x \leq t_x$ i.e. si $S(x) = \int_{S''} s_x$, $T(x) = \int_{S''} t_x$, S y T son escalonadas sobre S' tales que $S \leq F \leq T$ y $\int_{S'} (T - S) = \int_{S' \times S''} (t - s) < \epsilon$, entonces F es integrable con $\int_{S'} S \leq \int_{S'} F \leq \int_{S'} T$, pero $\int_{S'} S = \int_{S' \times S''} s \leq \int_{S'} F \leq \int_{S' \times S''} t = \int_{S'} T$, $\int_{S' \times S''} s \leq \int_{S' \times S''} f \leq \int_{S' \times S''} t$, i.e. $\left| \int_{S' \times S''} f - \int_{S'} F \right| < \epsilon$.

La otra desigualdad se prueba de manera similar.

Aplicaciones del teorema de Fubini

Las siguientes aplicaciones del teorema de Fubini, son generalizaciones de los métodos de cálculo avanzado para el cálculo de volúmenes.

Teorema 1.5.12 Principio de Cavalieri

Sea $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un conjunto medible, de modo que $S \subset \mathbb{R} \times [a, b]$, donde \mathbb{R} es un n -intervalo de \mathbb{R}^n . Sea $S_t = \{x \in \mathbb{R}^n / (x, t) \in S\}$ y supongamos que S_t es medible para cada $t \in [a, b]$ y escribamos $S(t) = V(S_t)$, entonces:

$$V(S) = \int_a^b S(t) dt.$$

Prueba $V(S) = \int_S 1 = \int_{\mathbb{R} \times [a, b]} I_S = \int_{[a, b]} \left(\int_{\mathbb{R}} I_{S_t} \right) = \int_a^b \left(\int_{S_t} 1 \right) = \int_a^b S(t) dt.$

Teorema 1.5.13 Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible y sean ϕ_1, ϕ_2 funciones continuas sobre S tales que $\phi_1 \leq \phi_2$, entonces $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} / x \in S, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$ es medible y si $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, se tiene:

$$\int_C f = \int_S \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Prueba Como ϕ_1 y ϕ_2 son continuas en S , $\phi_1(S) \cup \phi_2(S)$ es acotado i.e. existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $\phi_1(S) \cup \phi_2(S) \subset [a, b]$. Así, $C \subset \bar{S} \times [a, b]$. Probemos que $\partial C \subset \partial S \times [a, b] \cup G_{\phi_1} \cup G_{\phi_2}$, donde $G_{\phi_i} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} / y = \phi_i(x)\}$, $i = 1, 2$. En efecto, sea $(x, y) \in \partial C$, entonces:

– si $x \in \partial S \implies (x, y) \in \partial S \times [a, b]$

– si $x \notin \partial S$, $x \in \overset{\circ}{S} \implies (x, y) \in G_{\phi_1} \cup G_{\phi_2}$, pues si no $y \neq \phi_1(x)$, $y \neq \phi_2(x)$, i.e. $x \in S$, $\phi_1(x) < y < \phi_2(x) \implies (x, y) \in \overset{\circ}{C}$ que es contradictorio.

Así concluimos que ∂C es de contenido nulo, al estar contenido en la unión de tres conjuntos de contenido nulo: $G_{\phi_1}, G_{\phi_2}, \partial S \times [a, b]$, pues $V(\partial S \times [a, b]) = V(\partial S) \cdot (b - a) = 0$.

Como C es medible y f es integrable sobre C , $h = fI_C$ es integrable y

$$\int_C f = \int_{S \times [a, b]} h = \int_S \left(\int_{[a, b]} h_x dy \right) dx = \int_S \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx,$$

ya que $h(x, y) = f(x, y)I_C(x, y)$, con $a \leq \phi_1(x) \leq \phi_2(x) \leq b$, entonces:

$$h_x(y) = f_x(y)I_{[\phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)]}(y),$$

ya que $(I_C)_x(y) = I_A(y)$, con $A = \{y \in [a, b] / \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$, que lo denotamos $(I_C)_x(y) = I_{[\phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)]}(y)$. Así tenemos:

$$\int_{[a, b]} h_x(y) dy = \int_a^b f_x(y)I_{[\phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)]}(y) dy = \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f_x(y) dy,$$

es decir,

$$\int_C f = \int_S \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Ejemplo 1.5.2 Si f es continua sobre la bola unitaria $B_3 \subset \mathbb{R}^3$, entonces:

$$\int_{B_3} f = \int_{B_2} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x, z) dz \right) dx.$$

Corolario 1.5.7 Sea f una función real continua sobre $\mathbb{R} = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$, entonces:

$$\int_{\mathbb{R}} f = \int_{a_n}^{b_n} \left(\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \cdots \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \right) \cdots dx_{n-1} \right) dx_n.$$

Teorema 1.5.14 Sean $S' \subset \mathbb{R}^p$, $S'' \subset \mathbb{R}^{n-p}$ conjuntos medibles y sea $f: S' \times S'' \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua sobre $S = S' \times S''$, entonces f es integrable sobre S y tenemos:

$$\int_{S' \times S''} f(x, y) dx dy = \int_{S'} \left(\int_{S''} f(x, y) dy \right) dx = \int_{S''} \left(\int_{S'} f(x, y) dx \right) dy.$$

Teorema 1.5.15 Sea $f(x)$ una función real acotada e integrable sobre el n -intervalo \mathbb{R} , satisfaciendo que para todo $k = 1, \dots, n-1$ y para todo conjunto de valores (x_1, \dots, x_k) , la función f es integrable sobre la proyección Δ^k de \mathbb{R} en el subespacio de puntos $u^k = (x_{k+1}, \dots, x_n)$, entonces para el n -intervalo \mathbb{R} se tiene:

$$\int_{\mathbb{R}} \cdots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \cdots \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \right) \cdots dx_2 \right) dx_1,$$

donde las integrales del segundo término se entienden en el sentido de Riemann.

Demostración Aplicando los teoremas anteriores se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x) dx &= \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{\Delta^1} f(x_1, u^1) du^1 \right) dx_1 = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{\Delta^2} f(x_1, x_2, u^2) du^2 \right) dx_2 \right) dx_1 = \\ &\cdots = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \cdots \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n \right) \cdots dx_2 \right) dx_1. \end{aligned}$$

La integral del tipo $\int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n \cdots dx_1$ se llama integral iterada de f . En el caso general, la reducción de una integral múltiple a una integral iterada, se tiene con el siguiente teorema.

Sea S un conjunto medible, sea w_1 la proyección de S sobre el eje x_1 y sea $S_{x_1}^o$ la sección de S en el plano $x_1 = x_1^o$ i.e. el conjunto de puntos de la forma $(x_1^o, x_2, \dots, x_n) \in S$. En este caso w_1 y S_{x_1} son acotados y si S es cerrado, w_1 y S_{x_1} son cerrados. Sin embargo debemos asegurar la integrabilidad de f sobre w_1 y S_{x_1} .

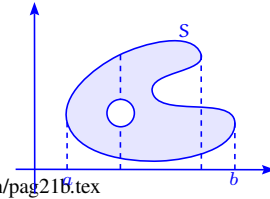
Teorema 1.5.16 Si f una función real, acotada e integrable sobre S medible, de modo que f es integrable sobre S_{x_1} , $\forall x_1 \in w_1$, entonces:

$$\begin{aligned} \int_S f(x) dx &= \int_S \cdots \int_S f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int_{w_1} \left(\int_{S_{x_1}} f(x_1, \dots, x_n) du^1 \right) dx_1. \end{aligned}$$

Demostración Como S es acotado, $S \subset \Delta = [a_1, b_1] \times \Delta^1$, $\Delta^1 = \prod_{i=2}^n [a_i, b_i]$. Sea \tilde{f} la extensión de f sobre \mathbb{R} , entonces:

$$\begin{aligned} \int_S f(x) dx &= \int_{\Delta} \tilde{f}(x) dx = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{\Delta^1} \tilde{f}(x_1, \dots, x_n) du^1 \right) dx_1 \\ &= \int_{w_1} \left(\int_{S_{x_1}} f(x_1, \dots, x_n) du^1 \right) dx_1. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.5.3 Consideremos S un conjunto cerrado y acotado con frontera Γ , formada por dos curvas cerradas y un punto. El conjunto S es tal que la proyección sobre el eje x es el intervalo cerrado $[a, b]$.



Toda sección S_x de S por una recta

paralela al eje y que pasa por x , es un segmento de recta o un sistema de dos segmentos de recta, o de un segmento de recta y un punto o de un punto. Si f es continua sobre S , es integrable en S y sobre toda sección S_x con respecto a y . Consecuentemente se obtiene:

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{S_x} f(x, y) dy \right) dx.$$

Observación Se puede aplicar el teorema sucesivamente de la siguiente manera:

Si definimos por $w_2(x_1)$ la proyección de S_{x_1} , sobre el eje x_2 y si $S_{x_1 x_2}$ es la sección de S_{x_1} por el plano $x_2 = x_2^0$, entonces se tiene:

$$\int_S f(x) dx = \int_{w_1} \left(\int_{w_2(x_1)} \left(\int_{S_{x_1 x_2}} f(x_1, \dots, x_n) du^2 \right) dx_2 \right) dx_1,$$

si f es integrable sobre $S_{x_1 x_2}$ y sobre S_{x_1} . Procediendo de esta manera obtenemos la fórmula:

$$\int_S f(x) dx = \int_{w_1} \left(\int_{w_2(x_1)} \left(\int_{w_3(x_1, x_2)} \cdots \left(\int_{w_n(x_1, \dots, x_{n-1})} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \right) \cdots dx_3 \right) dx_2 \right) dx_1,$$

asumiendo que la integral de f así como todas las integrales internas del término derecho existen.

1.6 Cambios de variables especiales en integrales triples

En el caso tri-dimensional escribimos (x, y, z) en lugar de (x_1, x_2, x_3) , (u, v, w) en lugar de (v_1, v_2, v_3) .

La fórmula de transformación para las integrales triples toma la forma:

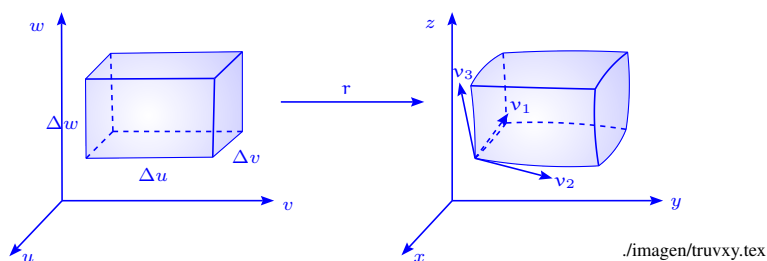
$$\iiint_S f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{S'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |\det J(u, v, w)| du dv dw,$$

donde el Jacobiano $\det J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$.

En el espacio 3-dimensional el determinante también puede verse como un factor de ampliación de volúmenes. En efecto, si introducimos la función \mathbf{r} definida por la ecuación $\mathbf{r}(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$ y los vectores:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right), \quad \mathbf{v}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right), \quad \mathbf{v}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} = \left(\frac{\partial x}{\partial w}, \frac{\partial y}{\partial w}, \frac{\partial z}{\partial w} \right).$$

Un 3-intervalo de dimensiones Δu , Δv , Δw , de volumen ΔV en el espacio uvw , se transforma en un sólido que es un paralelepípedo curvilíneo, en el espacio xyz aproximado por los vectores $\mathbf{v}_1 \Delta u$, $\mathbf{v}_2 \Delta v$, $\mathbf{v}_3 \Delta w$.



Las caras que limitan este sólido son las superficies obtenidas tomando a u , v , w como constantes. El volumen del paralelepípedo curvilíneo es aproximadamente igual al valor absoluto del producto mixto de los tres vectores que lo determinan, es decir:

$$|(\mathbf{v}_1 \Delta u) \cdot (\mathbf{v}_2 \Delta v \times \mathbf{v}_3 \Delta w)| = |\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3| \Delta u \Delta v \Delta w = |\det J(u, v, w)| \Delta u \Delta v \Delta w = |\det J(u, v, w)| \Delta V'.$$

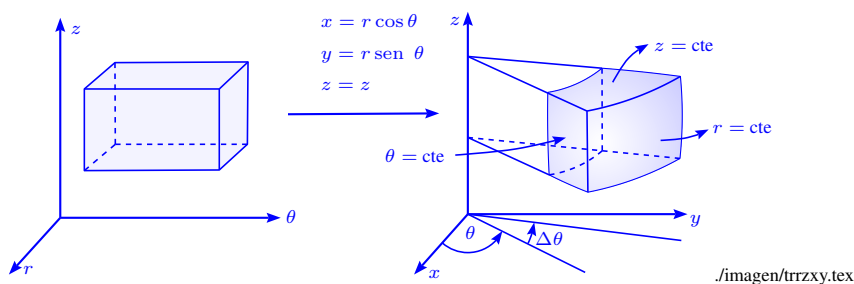
Así tenemos que el volumen ΔV de S se transforma en el volumen $\Delta V'$ de S' de modo que:

$$\lim_{\Delta V' \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta V'} = |\det J(u, v, w)|.$$

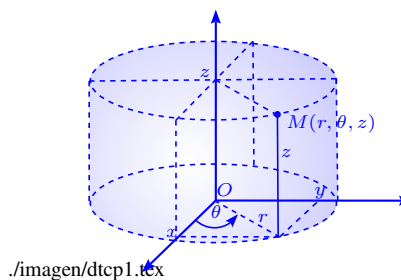
1.6.1 Caso de coordenadas cilíndricas

Consideremos las variables r, θ, z en vez de x, y, z y definimos la aplicación mediante las ecuaciones $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z$.

Observemos que reemplazamos x, y por sus coordenadas polares y no cambiamos z . Para obtener una aplicación biyectiva debemos tener $r > 0$ y limitar θ a un intervalo de la forma $\theta_o \leq \theta < \theta_o + 2\pi$. El gráfico adjunto muestra un paralelepípedo del espacio $r\theta z$. El jacobiano de la transformación es:



$$\det J(r, \theta, z) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$



y la fórmula se escribe:

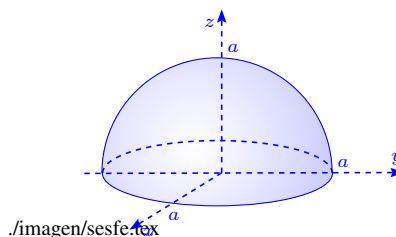
$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz.$$

El Jacobiano se anula en $r = 0$, pero esto no afecta la validez de la fórmula de la transformación, porque el conjunto de los puntos con $r = 0$, es de contenido nulo.

Ejemplo 1.6.1 Calcular la masa m de una semiesfera de radio a centrada en el origen, si la densidad ρ del material es proporcional a la distancia entre el punto y la base, o sea $\rho(x, y, z) = kz$.

La ecuación de la semiesfera superior es $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ y en coordenadas cilíndricas es $z = \sqrt{a^2 - r^2}, 0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi$, por lo que:

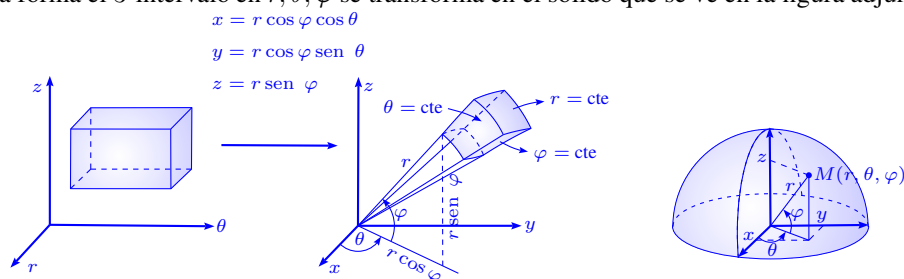
$$\begin{aligned}
 m &= \iiint_V k z r \, dr \, d\theta \, dz = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} k z \, dz \right) r \, dr \right] d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^a \frac{1}{2} k z^2 \Big|_0^{\sqrt{a^2-r^2}} r \, dr \right) d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^a \frac{1}{2} k (a^2 - r^2) r \, dr \right) d\theta \\
 &= \frac{k}{2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{a^4}{2} - \frac{a^4}{4} \right] d\theta = \frac{1}{4} k \pi a^4.
 \end{aligned}$$



1.6.2 Caso de coordenadas esféricas

En el caso de coordenadas esféricas, la posición de un punto (x, y, z) en el espacio está determinada por los números r, θ, φ , donde r es la distancia del punto al origen, θ mide el ángulo que forma la proyección del punto sobre el plano xy que forma con el eje x (longitud), en ángulo φ que forma el punto sobre el plano xy (latitud).

Para obtener una aplicación biyectiva, tomamos $r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$. Las superficies $r = \text{constante}$ son esferas concéntricas de centro en el origen, las superficies $\theta = \text{constante}$ son planos paralelos que pasan por el eje x y las superficies $\varphi = \text{constante}$ son conos circulares cuyo eje es el eje z . De esta forma el 3-intervalo en r, θ, φ se transforma en el sólido que se ve en la figura adjunta.



El Jacobiano de la transformación es:

$$\det J(r, \theta, \varphi) = \begin{vmatrix} \cos \varphi \cos \theta & -r \cos \varphi \sen \theta & -r \sen \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi \sen \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sen \varphi \sen \theta \\ \sen \varphi & 0 & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r^2 \cos \varphi.$$

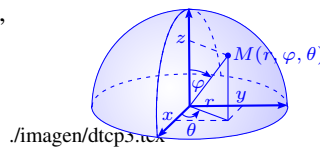
En estas condiciones tenemos la igualdad:

$$\iiint_V f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{V'} F(r, \theta, \varphi) r^2 |\cos \varphi| \, dr \, d\theta \, d\varphi,$$

donde $F(r, \theta, \varphi) = f(r \cos \theta \cos \varphi, r \sen \theta \cos \varphi, r \sen \varphi)$ y la función f es acotada e integrable sobre V .

Algunos autores consideran el ángulo φ medido desde el eje z , en vez de medirlo desde el plano $z = 0$ (latitud). En este caso se tiene que $x = r \operatorname{sen} \varphi \cos \theta$, $y = r \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta$, $z = r \cos \varphi$, $r > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$:

$$\det J = -r^2 \operatorname{sen} \varphi.$$



Observemos que esta segunda fórmula del Jacobiano está acorde con el hecho que, al medir de esta manera φ tenemos en realidad $\frac{\pi}{2} - \varphi$ en la primera fórmula del Jacobiano, es decir $\cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \operatorname{sen} \varphi$.

1.6.3 Momento de inercia. Coordenadas del centro de gravedad

Definición 1.6.1 El momento de inercia de un cuerpo V , de densidad $\rho(x, y, z)$ en el punto $(x, y, z) \in V$, respecto a los ejes x, y, z están dados respectivamente por:

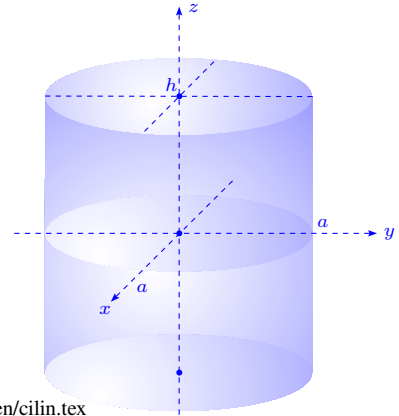
$$\begin{aligned} I_{xx} &= \iiint_V (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz, \\ I_{yy} &= \iiint_V (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz, \\ I_{zz} &= \iiint_V (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dx dy dz. \end{aligned}$$

Definición 1.6.2 Las coordenadas del centro de gravedad de un cuerpo V , de densidad $\rho(x, y, z)$ en $(x, y, z) \in V$, se expresa por las fórmulas:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{m} \iiint_V x \rho(x, y, z) dx dy dz, \\ \bar{y} &= \frac{1}{m} \iiint_V y \rho(x, y, z) dx dy dz, \\ \bar{z} &= \frac{1}{m} \iiint_V z \rho(x, y, z) dx dy dz, \end{aligned}$$

donde $m = \iiint_V \rho(x, y, z) dx dy dz$ es la masa del volumen V .

Ejemplo 1.6.2 Calcular el momento de un cilindro recto circular de radio a y altura $2h$ respecto al diámetro de su sección media, si la densidad es constante e igual a ρ_o .

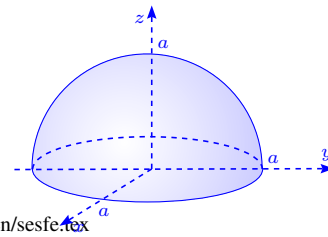


Tomemos el eje z como eje del cilindro y el origen en el centro de simetría. Así tenemos el problema de calcular el momento del cilindro, respecto al eje x :

$$\begin{aligned}
 I_{xx} &= \iiint_V (y^2 + z^2) \rho_o dx dy dz = \rho_o \int_0^{2\pi} \left(\int_0^a \left(\int_{-h}^h (z^2 + r^2 \sin^2 \theta) dz \right) r dr \right) d\theta \\
 &= \rho_o \int_0^{2\pi} \left(\int_0^a \left[\frac{2}{3} h^3 + 2hr^2 \sin^2 \theta \right] r dr \right) d\theta = \rho_o \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{3} h^3 a^3 + \frac{1}{2} h a^4 \sin^2 \theta \right) d\theta \\
 &= \rho_o \left[\frac{2}{3} h^3 a^2 \pi + \frac{1}{2} h a^4 \pi \right] = \pi \rho_o h a^2 \left[\frac{2}{3} h^2 + \frac{1}{2} a^2 \right].
 \end{aligned}$$

Ejemplo 1.6.3 Calcular las coordenadas de centro de gravedad de la mitad superior de una esfera de radio a , con centro en el origen de coordenadas y densidad constante ρ_o .

La mitad superior de la esfera está dada por $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. Por razones de simetría y dado que $\rho = \rho_o$, se tiene $\bar{x} = \bar{y} = 0$.



Además, $m = \iiint_V \rho_o dx dy dz = \frac{2}{3} \rho_o \pi a^3$ y

$$\iiint_V z \rho_o dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \rho_o r^3 \cos \psi \sin \psi dr d\psi d\theta = 2\pi \rho_o \frac{a^4}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \rho_o \pi a^4,$$

i.e. $\bar{z} = \frac{3}{8} a$.

1.7 Cambio de variable en integración múltiple – Caso general

El problema básico es el siguiente: Dada $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación de clase C^1 y C^1 invertible en algún vecindario U del conjunto medible $S \subset \mathbb{R}^n$, en el cual T es biyectiva sobre U y $T^{-1}: T(U) \rightarrow U$ es también de clase C^1 .

Si $f: T(S) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función integrable, deseamos transformar la integral $\int_{T(S)} f(x) dx$ en una integral sobre S .

La idea fundamental de este criterio es la aproximación local de la transformación T por su diferencial

dT .

Primeramente vamos a estudiar el comportamiento de los volúmenes bajo transformaciones lineales.

Sea $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y sea $S \subset \mathbb{R}^n$ medible, queremos determinar la relación entre $V(S)$ y $V(T(S))$ ($T(S)$ es claramente medible).

Es claro que se tiene que $T(x) = Bx$, donde B es la matriz $n \times n$ asociada a la base canónica y escribimos $\det T = \det B = |B|$.

Teorema 1.7.1 *Sea $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación lineal, $S \subset \mathbb{R}^n$ medible i.e. $T(S)$ es medible, entonces $V(T(S)) = |\det T|V(S)$.*

Demostración Si $\det T = 0$, las columnas de la matriz asociada a T son linealmente dependientes, entonces $T(S)$ es un subconjunto en un subespacio propio de \mathbb{R}^n i.e. $V(T(S)) = 0$, por ser un conjunto de medida cero y claramente se da la fórmula.

Si $\det T \neq 0$, la matriz B asociada a T se puede escribir como el producto de k matrices $B = B_1 \cdots B_k$, donde cada B_i es de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & a & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \quad (1) \quad \text{o de la forma} \quad \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \cdots \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

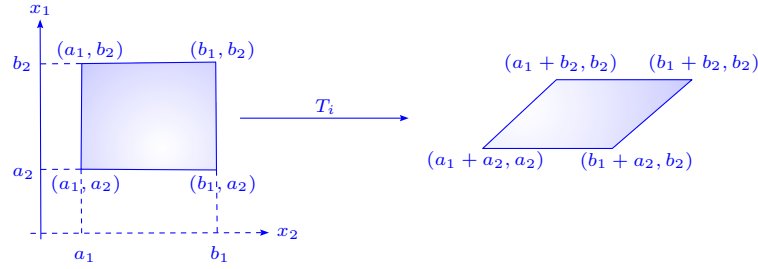
donde en las matrices de tipo (1) todo elemento diagonal salvo uno es igual a 1 y en las matrices de tipo (2) hay un único elemento no diagonal. Así $T = T_1 \circ \cdots \circ T_k$, donde T_i es la transformación lineal asociada a B_i .

Si B_i es de la forma (2), entonces $T_i(x_1, \dots, x_n) = (x_1, x_{p-1}, ax_p, x_{p+1}, \dots, x_n)$ y tenemos que si R es un n -intervalo, $T_i(R)$ es un n -intervalo y se tiene $V(T_i(R)) = |a|V(R)$.

De este modo, si S es medible, $T_i(S)$ es medible y se tiene que $V(T_i(S)) = |a|V(S) = |\det T_i|V(S)$.

Si B_i es de la forma (1), consideremos el caso en que el elemento no diagonal es de la forma $A_i =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i.e. } T_i(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + x_2, x_2, \dots, x_n).$$



Verifiquemos que T_i preserva el volúmen de un n -intervalo $I = [a, b] = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$.

Si escribimos $R = R' \times R''$, con $R' \subset \mathbb{R}^2$, $R'' \subset \mathbb{R}^{n-2}$, entonces $T_i(R) = R^* \times R''$, donde R^* es un paralelogramo en \mathbb{R}^2 (ver gráfico adjunto)*.

Claramente $V(R^*) = V(R')$, por lo que:

$$\begin{aligned} V(T_i(R)) &= \int_{T_i(R)} dx = \int_{R^* \times R''} du dv = \int_{R^*} du \int_{R''} dv = V(R^*)V(R'') \\ &= V(R')V(R'') = \int_{R'} du \int_{R''} dv = \int_{R' \times R''} du dv = \int_R dx = V(R), \end{aligned}$$

donde u es un vector en \mathbb{R}^2 y v es un vector en \mathbb{R}^{n-2} . Así, si S es medible, $T_i(S)$ es medible y se tiene que:

$$V(T_i(S)) = V(S).$$

En efecto, dado $\epsilon > 0$, existen R_1, \dots, R_p y J_1, \dots, J_q , n -intervalos de \mathbb{R}^n que no se cruzan tales que:

$$\bigcup_{j=1}^p R_j \subset S \subset \bigcup_{j=1}^q J_j$$

y donde $\sum_{j=1}^p V(R_j) > V(S) - \epsilon$, $\sum_{j=1}^q V(J_j) < V(S) + \epsilon$.

Como los T_i preservan el volumen de los n -intervalos tenemos:

$$\bigcup_{j=1}^p T_i(R_j) \subset T_i(S) \subset \bigcup_{j=1}^q T_i(J_j)$$

y

$$\sum_{j=1}^p V(T_i(R_j)) > V(S) - \epsilon, \quad \sum_{j=1}^q V(T_i(J_j)) < V(S) + \epsilon,$$

lo que prueba que $T_i(S)$ es medible y $V(T_i(S)) = V(S)$.

Corolario 1.7.1 Si $S \subset \mathbb{R}^n$ es medible y $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un movimiento rígido (traslación y una rotación), $T(S)$ es medible y $V(T(S)) = V(S)$.

Prueba Tenemos que $T = \tau_a \circ P$, donde τ_a es la traslación por a : $\tau_a(x) = a + x$ y P es una transformación ortogonal, i.e. $\det P = 1$.

Así tenemos que $T(S)$ es medible y $V(T(S)) = V(S)$.

Hasta ahora hemos visto los efectos que tienen las transformaciones lineales en los volúmenes de regiones medibles.

Un ingrediente clave para la derivación de la fórmula de cambio de variable, es el hecho que si T es una transformación de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n de clase C^1 , tal que el diferencial en $dT_0 = I$, entonces en un vecindario de 0 , T difiere muy poco de la transformación identidad y en particular los volúmenes de los conjuntos en el vecindario de 0 no varían significativamente, es decir que si C_r es el cubo centrado en el origen, con un vértice en (r, r, \dots, r) (cubo de centro 0 y radio r) y si el diferencial dT_x difiere en norma muy poco de la identidad, $\forall x \in C_r$, entonces la imagen $T(C_r)$ contiene un cubo ligeramente menor que C_r y está contenido en un cubo ligeramente mayor que C_r .

Lema 1.7.1 *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto conteniendo a C_r y sea $T: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 tal que $T(0) = 0$ y $dT_0 = I$. Supongamos que existe $\epsilon \in]0, 1[$ tal que $\|dT_x - I\| \leq \epsilon$, $\forall x \in C_r$ entonces:*

$$C_{(1-\epsilon)r} \subset T(C_r) \subset C_{(1+\epsilon)r}.$$

Prueba Observamos que $\|T(x+h) - T(x)\|_\infty \leq \|h\|_\infty \max_{x \in L} \|dT_x\|_\infty$, donde L es el segmento $\overline{x; x+h}$.

En efecto sea $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\gamma(t) = T(x+th)$, $\gamma_i(t) = T^i(x+th)$ es la aplicación coordenada de T , entonces $\gamma'_i(t) = dT_{x+th}^i(h)$, por lo que para algún k :

$$\begin{aligned} \|T(x+h) - T(x)\|_\infty &= |T^k(x+h) - T^k(x)| = |\gamma_k(1) - \gamma_k(0)| = \left| \int_0^1 \gamma'_k(t) dt \right| \\ &\leq \int_0^1 |\gamma'_k(t)| dt = \int_0^1 |dT_{x+th}^k(h)| dt \leq \max_{0 \leq t \leq 1} |dT_{x+th}^k(h)| \\ &\leq \|h\|_\infty \max_{0 \leq t \leq 1} \|dT_{x+th}\|_\infty = \|h\|_\infty \max_{x \in L} \|dT_x\|_\infty. \end{aligned}$$

Así tenemos que si g es una aplicación lineal:

$$\|T(x) - T(y) - g(x-y)\|_\infty \leq \|x-y\|_\infty \max_{x \in L} \|dT_x - g\|_\infty$$

y si $g = I$ se cumple que:

$$\|T(x) - T(y) - (x-y)\|_\infty \leq \epsilon \|x-y\|_\infty,$$

o sea

$$(1-\epsilon)\|x-y\|_\infty \leq \|T(x) - T(y)\|_\infty \leq (1+\epsilon)\|x-y\|_\infty.$$

Observemos que la desigualdad de la siguiente prueba que T es inyectiva en C_r y si hacemos $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ se cumple que:

$$\|T(\mathbf{x})\|_\infty \leq (1 + \epsilon)\|\mathbf{x}\|_\infty, \quad \forall \mathbf{x} \in C_r,$$

es decir:

$$T(C_r) \subset C_{(1+\epsilon)r}$$

Queda por probar que $C_{(1-\epsilon)r} \subset T(C_r)$.

Sea $\mathbf{y} \in C_{(1-\epsilon)r}$, $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - T(\mathbf{x}) + \mathbf{y}$, vamos a probar que φ es contractiva sobre C_r y el único punto fijo será un elemento $\mathbf{x} \in C_r$ tal que $T(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$.

Veamos que $\varphi(C_r) \subset C_r$. En efecto si $\mathbf{x} \in C_r$:

$$\begin{aligned} \|\varphi(\mathbf{x})\|_\infty &\leq \|T(\mathbf{x}) - \mathbf{x}\|_\infty + \|\mathbf{y}\|_\infty = \|T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{0}) - dT_{\mathbf{0}}(\mathbf{x} - \mathbf{0})\|_\infty + \|\mathbf{y}\|_\infty \\ &\leq \|\mathbf{y}\|_\infty + \|\mathbf{x}\|_\infty \max_{\mathbf{x} \in C_r} \|dT_{\mathbf{x}} - dT_{\mathbf{0}}\| \leq (1 - \epsilon)r + r\epsilon = r, \end{aligned}$$

es decir si $\mathbf{x} \in C_r \implies \varphi(\mathbf{x}) \in C_r$.

Si $\mathbf{y} \in \overset{\circ}{C}_{(1-\epsilon)r}$, entonces $\|\varphi(\mathbf{x})\|_\infty < r$ i.e. $\varphi(\mathbf{x}) \in \overset{\circ}{C}_r$.

Para ver que $\varphi: C_r \rightarrow C_r$ es una contracción, notemos que:

$$\|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y})\|_\infty = \|T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{y}) - (\mathbf{x} - \mathbf{y})\|_\infty \leq \epsilon\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty,$$

o sea φ es una contracción $\epsilon < 1$, por lo que el único punto fijo \mathbf{x} es tal que $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, i.e. $T(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. Así hemos probado que si $\mathbf{y} \in C_{(1-\epsilon)r}$, $\mathbf{y} = T(\mathbf{x})$, con $\mathbf{x} \in C_r$, es decir $C_{(1-\epsilon)r} \subset T(C_r)$.

Teorema 1.7.2 *Sea \mathbb{R} un n -intervalo centrado en $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ y sea $T: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 invertible en el abierto U conteniendo a \mathbb{R} , si existe $0 < \epsilon < 1$, tal que $\|dT_{\mathbf{a}}^{-1} \circ dT_{\mathbf{x}} - I\| < \epsilon$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}$, entonces $T(\mathbb{R})$ es medible de modo que:*

$$(1 - \epsilon)^n |\det J_T(\mathbf{a})| V(\mathbb{R}) \leq V(T(\mathbb{R})) \leq (1 + \epsilon)^n |\det J_T(\mathbf{a})| V(\mathbb{R}).$$

Demostración Es obvio que $T(\mathbb{R})$ es medible. Nos queda por verificar la desigualdad.

Es claro que si \mathbb{R} es un n -cubo de centro \mathbf{a} y de radio r , $\tau_{\mathbf{a}}(C_r) = \mathbb{R}$, donde C_r es el n -cubo centrado en $\mathbf{0}$ de radio r y $\tau_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} + \mathbf{x}$.

Sea $\mathbf{b} = T(\mathbf{a})$, entonces si $F = dT_{\mathbf{a}}^{-1} \circ \tau_{\mathbf{b}}^{-1} \circ T \circ \tau_{\mathbf{a}}$ se tiene:

$$dF_{\mathbf{x}} = dT_{\mathbf{a}}^{-1} \circ d\tau_{\mathbf{b}}^{-1} \circ dT \circ d\tau_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = dT_{\mathbf{a}}^{-1} \circ dT_{\tau_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})}, \quad \forall \mathbf{x} \in C_r,$$

pues el diferencial de una traslación es la identidad y el diferencial de una transformación lineal es ella misma. Así tenemos que $\|dF_x - I\| < \epsilon, \forall x \in C_r$, por lo que $C_{(1-\epsilon)r} \subset T(C_r) \subset C_{(1+\epsilon)r}$, es decir:

$$(1 - \epsilon)^n V(C_r) \leq V(T(C_r)) \leq (1 + \epsilon)^n V(C_r). \quad (1)$$

Como $dT_a(T(C_r)) = \tau_b^{-1}(T(\mathbb{R}))$, por el teorema ?? se tiene:

$$V(T(\mathbb{R})) = |\det(dT_a)|V(T(C_r)) = |\det J_T(\mathbf{a})|V(T(C_r)).$$

Además, como $V(\mathbb{R}) = V(C_r)$, multiplicando (1) por $|\det J_T(\mathbf{a})|$ obtenemos el resultado cuando \mathbb{R} es un n -cubo.

Si \mathbb{R} es un n -intervalo, consideremos $\rho: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ la aplicación lineal tal que $\tau_a \circ \rho(C_1) = \mathbb{R}$, entonces $V(\mathbb{R}) = |\det \rho|V(C_1)$.

Sea $S = T \circ \tau_a \circ \rho$, entonces:

$$dS_0^{-1} \circ dS_x = (dT_a \circ \rho)^{-1} \circ (dT_y \circ \rho) = \rho^{-1} \circ dT_a^{-1} \circ dT_y \circ \rho,$$

con $y = T_a(x) \in \mathbb{R}$. Así tenemos:

$$\|dS_0^{-1} \circ dS_x - I\| \leq \|\rho\|^{-1} \|dT_a^{-1} \circ dT_y - I\| \|\rho\| \leq \epsilon,$$

pues $y \in \mathbb{R}$. De esta manera $S: C_1 \rightarrow \mathbb{R}$ satisface la hipótesis del teorema cuando C_1 es un n -cubo y tenemos:

$$(1 - \epsilon)^n |\det J_S(\mathbf{0})|V(C_1) \leq V(S(C_1)) \leq (1 + \epsilon)^n |\det J_S(\mathbf{0})|V(C_1),$$

pero como $S(C_1) = T(\mathbb{R})$ y $|\det J_S(\mathbf{0})|V(C_1) = |\det J_T(\mathbf{a})| |\det \rho|V(C_1) = |\det J_T(\mathbf{a})|V(\mathbb{R})$ tenemos el resultado.

Proposición 1.7.1 i) Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ de medida cero y sea $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 , entonces $T(S)$ es de medida cero.

ii) Si $S \subset \mathbb{R}^n$ es medible y sea $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación de clase C^1 que es C^1 -invertible en el interior de S , entonces $T(S)$ es medible.

Prueba Como T es de clase C^1 tenemos que $\exists c > 0$ tal que $\|T(x) - T(y)\| \leq c\|x - y\|, \forall x, y \in S$.

i) Sea $(\mathbb{R}_k)_{k=1, \dots, s}$ un recubrimiento uniforme de S (i.e. cada \mathbb{R}_k es un cubo de lado h , $V(\mathbb{R}_k) = h^n$), de modo que $S \subset \bigcup_{k=1}^s \mathbb{R}_k, \sum_{k=1}^s V(\mathbb{R}_k) \leq \frac{\epsilon}{c^n n^{\frac{1}{2}n}}$ i.e. $\sum_{k=1}^s 1 \leq \frac{\epsilon h^{-n}}{c^n n^{\frac{1}{2}n}}$.

Sea W_k un n -intervalo tal que $T(R_k) \subset W_k$, $d(W_k) = \sup_{y, y' \in W_k} \|y' - y''\| \leq c\sqrt{nh}$, entonces $T(S) \subset$

$\bigcup_{k=1}^s W_k$ y por lo tanto:

$$\bar{V}(T(S)) \leq \sum_{k=1}^s V(W_k) \leq \sum_{k=1}^s c^n n^{\frac{1}{2}n} h^n \leq c^n n^{\frac{1}{2}n} h^n \frac{\epsilon h^{-n}}{c^n n^{\frac{1}{2}n}} = \epsilon$$

i.e. $T(S)$ es de medida cero.

ii) Probemos primeramente que $\partial T^{-1}(B) \subset T^{-1}(\partial B)$, si T es continua.

En efecto, sea $x \in \partial T^{-1}(B) = \overline{T^{-1}(B)} \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus T^{-1}(B)}$.

Como T es continua en x , dado un $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $\|x - y\| < \delta \implies \|T(x) - T(y)\| < \epsilon$.

Dado que $x \in \overline{T^{-1}(B)}$, $\forall \rho > 0$, $B(x, \rho) \cap T^{-1}(B) \neq \emptyset$ y si $y \in B(x, \rho) \cap T^{-1}(B) \implies \|x - y\| < \rho$, $y \in T^{-1}(B) \implies \|T(x) - T(y)\| < \epsilon$, $T(y) \in B \implies B \cap B(T(x), \epsilon) \neq \emptyset \implies T(x) \in \bar{B}$ o sea $x \in T^{-1}(\bar{B})$.

Similarmente, $B(x, \rho) \cap (\mathbb{R}^n \setminus T^{-1}(B)) \neq \emptyset$, $\forall \rho > 0$, i.e. si $y \in B(x, \rho) \cap \mathbb{R}^n \setminus T^{-1}(B) \implies \|x - y\| < \rho$, $y \notin T^{-1}(B) \implies \|T(x) - T(y)\| < \epsilon$, $T(y) \notin B$ i.e. $T(y) \in \mathbb{R}^n \setminus B \implies B(T(x), \epsilon) \cap (\mathbb{R}^n \setminus B) \neq \emptyset \implies T(x) \in \overline{\mathbb{R}^n \setminus B}$, o sea $x \in T^{-1}(\overline{\mathbb{R}^n \setminus B})$.

Así $x \in T^{-1}(\bar{B}) \cap T^{-1}(\overline{\mathbb{R}^n \setminus B}) = T^{-1}(\bar{B} \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus B}) = T^{-1}(\partial B)$.

Sea S medible y $T \in C^1$ -invertible sobre $\overset{\circ}{S}$, entonces T^{-1} existe y es continua. Usando T^{-1} en vez de T en el resultado anterior tenemos que:

$$\partial T(S) \subset T(\partial S),$$

ya que si T es continua sobre $\overset{\circ}{S}$ que es acotado, también es uniformemente continua sobre $\overset{\circ}{S}$ y se extiende a S con continuidad i.e. es continua sobre S .

Así tenemos que si S es medible, ∂S es de contenido nulo, $T(\partial S)$ es de contenido nulo, por lo que $\partial T(S)$ es de contenido nulo, es decir $T(S)$ es medible.

Teorema 1.7.3 Teorema de cambio de variable

Sea R un n -intervalo de \mathbb{R}^n y sea la aplicación $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 -invertible en un abierto conteniendo a R i.e. $T: R \rightarrow T(R)$ es biyectiva de clase C^1 . Si $f: T(R) \rightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación integrable sobre $T(R)$ y $f \circ T$ es integrable sobre R tenemos:

$$\int_{T(R)} f = \int_R f \circ T |\det J_T|.$$

Es útil usar la notación siguiente: si $y = T(x)$ la igualdad anterior se puede escribir:

$$\int_{T(\mathbb{R})} f(y) dy = \int_{\mathbb{R}} f \circ T(x) |\det J_T(x)| dx.$$

Demostración Sea $\epsilon > 0$ y sea $P = \{R_1, \dots, R_k\}$ una partición de \mathbb{R} , sea $\mathbf{a} = \{a_1, \dots, a_k\}$ el conjunto

de puntos que son los centros de los n -intervalos de P , entonces por el teorema ??, página ??, existe $\delta_1 > 0$ tal que:

$$\left| S_k - \int_{\mathbb{R}} f \circ T |\det J_T| \right| < \frac{\epsilon}{2},$$

si $\|P\| < \delta_1$ y donde S_k denota la suma de Riemann $\sum_{i=1}^k f(T(a_i)) |\det J_T(a_i)| V(R_i)$.

Sean $A > 0$, $M > 0$ tales que $|\det J_T(x)| < A$, $|f(T(x))| < M$, $\forall x \in \mathbb{R}$, ya que $\det J_T(x)$ es continua y $f \circ T$ es integrable i.e. acotada sobre \mathbb{R} .

Sea $m_i = \inf_{x \in R_i} f(T(x))$, $M_i = \sup_{x \in R_i} f(T(x))$, entonces:

$$a' = \sum_{i=1}^k m_i \alpha_i V(R_i) \leq S_k \leq \sum_{i=1}^k M_i \alpha_i V(R_i) = b',$$

donde $\alpha_i = |\det J_T(a_i)|$. Además $\exists \delta_2 > 0$ tal que si $\|P\| < \delta_2$,

$$\sum_{i=1}^k (M_i - m_i) V(R_i) \leq \frac{\epsilon}{8A},$$

puesto que $f \circ T$ es integrable y podemos hacer que cualquiera dos sumas de Riemann tengan diferentes menos o igual a $\frac{\epsilon}{8A}$. Basta con que cada suma difiere de $\int_{\mathbb{R}} f \circ T$ a lo sumo en $\frac{\epsilon}{16A}$.

Así tenemos que:

$$b' - a' = \sum_{i=1}^k (M_i - m_i) \alpha_i V(R_i) \leq \frac{\epsilon}{8},$$

pues $\alpha_i < A$. Por otro lado:

$$\int_{T(\mathbb{R})} f = \sum_{i=1}^k \int_{T(R_i)} f,$$

por lo que:

$$a'' = \sum_{i=1}^k m_i V(T(R_i)) \leq \int_{T(\mathbb{R})} f \leq \sum_{i=1}^k M_i V(T(R_i)) = b''.$$

Nuestro interés es el de valorar $a'' - a'$ y $b'' - b'$, con el objeto de aplicar el teorema ?? y así verificar el resultado.

Sea $0 < \rho < 1$ tal que $(1 + \rho)^n - (1 - \rho)^n < \frac{\epsilon}{8AMV(\mathbb{R})}$.

Como T es de clase C^1 -invertible en \mathbb{R} , podemos obtener una cota superior a B para la norma $\|dT_x^{-1}\|$, si $x \in \mathbb{R}$. Además, por la continuidad uniforme de dT sobre \mathbb{R} , $\exists \delta_3 > 0$ tal que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}$, si $\|x - a\| < \delta_3$ se tiene $\|dT_x - dT_a\| < \frac{\epsilon}{B}$. En particular, se tiene que $\|P\| < \delta_3$, $\|dT_x - dT_{a_i}\| < \frac{\epsilon}{B}$, $\forall x \in \mathbb{R}_i, \forall i = 1, \dots, k$, por lo que:

$$\|dT_{a_i}^{-1} \circ dT_x - I\| \leq \|dT_{a_i}^{-1}\| \|dT_x - dT_{a_i}\| < B \cdot \frac{\epsilon}{B} = \epsilon,$$

para todo $x \in \mathbb{R}_i, \forall i = 1, \dots, k$. Aplicando el teorema ?? se tiene que:

$$(1 - \rho)^n \alpha_i V(\mathbb{R}_i) \leq V(T(\mathbb{R}_i)) \leq (1 + \rho)^n \alpha_i V(\mathbb{R}_i)$$

y como

$$(1 - \rho)^n \alpha_i V(\mathbb{R}_i) \leq \alpha_i V(T(\mathbb{R}_i)) \leq (1 + \rho)^n \alpha_i V(\mathbb{R}_i)$$

se cumple que:

$$|V(T(\mathbb{R}_i)) - \alpha_i V(\mathbb{R}_i)| \leq [(1 + \rho)^n - (1 - \rho)^n] \alpha_i V(\mathbb{R}_i),$$

si $\|P\| < \delta_3$.

Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, entonces si $\|P\| < \delta$:

$$\begin{aligned} |b'' - b'| &\leq \sum_{i=1}^k |M_i| |V(T(\mathbb{R}_i)) - \alpha_i V(\mathbb{R}_i)| \\ &\leq M [(1 + \rho)^n - (1 - \rho)^n] \sum_{i=1}^n \alpha_i V(\mathbb{R}_i) \\ &\leq M \frac{\epsilon}{8AMV(\mathbb{R})} A \sum_{i=1}^n V(\mathbb{R}_i) = \frac{\epsilon}{8}. \end{aligned}$$

De manera similar se prueba que $|a'' - a'| \leq \frac{\epsilon}{8}$, por lo que si $\|P\| < \delta$:

$$\begin{aligned} \left| S_k - \int_{T(\mathbb{R})} f \right| &= \left| S_k - a' + a' - b' + b' - b'' + b'' - \int_{T(\mathbb{R})} f \right| \\ &\leq |S_k - a'| + |a' - b'| + |b' - b''| + \left| b'' - \int_{T(\mathbb{R})} f \right| \\ &\leq \frac{\epsilon}{8} + \frac{\epsilon}{8} + \frac{\epsilon}{8} + \frac{\epsilon}{8} = \frac{\epsilon}{2}, \end{aligned}$$

con lo cual obtenemos:

$$\left| \int_{T(\mathbb{R})} f - \int_{\mathbb{R}} f \circ T | \det J_T \right| \leq \left| \int_{T(\mathbb{R})} f - S_k \right| + \left| S_k - \int_{\mathbb{R}} f \circ T | \det J_T \right| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

y se concluye que:

$$\int_{T(\mathbb{R})} f = \int_{\mathbb{R}} f \circ T | \det J_T |.$$

Teorema 1.7.4 Sea R un n -intervalo de \mathbb{R}^n y sea $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación de clase C^1 -invertible en el interior de R , entonces si f es integrable sobre $T(R)$ y $f \circ T$ es integrable sobre R :

$$\int_{T(R)} f = \int_R f \circ T |\det J_T|.$$

Demostración Sea R^* un n -intervalo en el interior de R y sea $K = R \setminus R^*$, entonces:

$$\int_{T(R^*)} f = \int_{R^*} f \circ T |\det J_T|,$$

pero

$$\int_{T(R)} f = \int_{T(R^*)} f + \int_{T(K)} f$$

y

$$\int_R f \circ T |\det J_T| = \int_{R^*} f \circ T |\det J_T| + \int_K f \circ T |\det J_T|.$$

Como las integrales de K y $T(K)$ se pueden hacer todo lo pequeño que deseamos, desde que el volumen de K i.e. el volumen de $f(K)$ se puede hacer suficientemente pequeño.

El resultado anterior se puede extender al caso en que S es medible.

Teorema 1.7.5 Sea S un conjunto medible de \mathbb{R}^n y sea $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación de clase C^1 -invertible en el interior de S , entonces si f es integrable sobre $T(S)$ y $f \circ T$ es integrable sobre S se tiene:

$$\int_{T(S)} f = \int_S f \circ T |\det J_T|.$$

1.8 Consecuencias de la extensión del concepto de volumen

El concepto de volumen se extiende de manera natural a la clase de conjuntos, que llamados conjuntos medibles¹⁴ del espacio \mathbb{R}^n , de modo que si S es medible, su volumen es igual a la integral n -dimensional de la función $f(x) = 1$, si $x \in S$, es decir:

$$V(S) = \int_S \cdots \int_S dx_1 \cdots dx_n = \int_S dx.$$

En esta sección no analizaremos los conjuntos de \mathbb{R}^n , para los cuales existe el volumen, sino que nos limitaremos a calcular algunos volúmenes e integrales sobre conjuntos n -dimensionales que presentan algún interés para nosotros.

Como es natural:

$$V(R) = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} dx_n \cdots dx_1 = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \cdots \int_{a_n}^{b_n} dx_n = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

¹⁴Jordan medibles

Por ejemplo, nos podríamos interesar en calcular el volumen de una esfera n -dimensional de radio a .

En este caso $S_n(a) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq a^2\}$ y el volumen:

$$V(S_n(a)) = \int \cdots \int_{S_n(a)} dx_1 \cdots dx_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{1}{2}n + 1)} a^n.$$

En efecto, sea $x = au$, entonces:

$$V(S_n(a)) = \int \cdots \int_{S_n(a)} dx_1 \cdots dx_n = a^n \int \cdots \int_{S_n(1)} du_1 \cdots du_n = a^n V(S_n(1)).$$

Observamos que $u_1^2 + \dots + u_n^2 \leq 1 \iff u_3^2 + \dots + u_n^2 \leq 1 - u_1^2 - u_2^2$, por lo que $V(S_n(1))$ se integra en relación a u_3, \dots, u_n para el dominio referido por $u_3^2 + \dots + u_n^2 \leq 1 - u_1^2 - u_2^2$ y el resultado se integra en el círculo $u_1^2 + u_2^2 \leq 1$.

Notemos que el resultado de la integral primera es el volumen de una $n-2$ esfera de radio $\sqrt{1 - u_1^2 - u_2^2}$, o sea:

$$\begin{aligned} \iint_{u_1^2 + u_2^2 \leq 1} \left(\int \cdots \int_{u_3^2 + \dots + u_n^2 \leq 1 - u_1^2 - u_2^2} du_3 \cdots du_n \right) du_1 du_2 &= \iint_{u_1^2 + u_2^2 \leq 1} V(S_{n-2}(\sqrt{1 - u_1^2 - u_2^2})) du_1 du_2 = \\ \iint_{u_1^2 + u_2^2 \leq 1} V(S_{n-2}(1))(1 - u_1^2 - u_2^2)^{\frac{n-2}{2}} du_1 du_2 &= V(S_{n-2}(1)) \iint_{u_1^2 + u_2^2 \leq 1} (1 - u_1^2 - u_2^2)^{\frac{n-2}{2}} du_1 du_2. \end{aligned}$$

Usando coordenadas polares tenemos:

$$V(S_n(1)) = V(S_{n-2}(1)) \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r^2)^{\frac{n-2}{2}} r dr d\theta = V(S_{n-2}(1)) \frac{2\pi}{n}.$$

Recordemos que $V(S_1(1)) = 2$, es la longitud del intervalo $[-1, 1]$, $V(S_2(1)) = \pi$ es el área de un círculo de radio 1 y se encuentra fácilmente que $V(S_{2p}(1)) = \frac{\pi^p}{p!}$, $V(S_{2p+1}(1)) = \frac{2^{2p+1} p!}{(2p+1)!} \pi^p$, por lo

que si se define $w_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{1}{2}n + 1)}$, entonces:

$$w_{2p} = V(S_{2p}(1)) \quad \text{y} \quad w_{2p+1} = V(S_{2p+1}(1)),$$

donde Γ es la función Gama de Euler, $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$, con la propiedad $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Se concluye que $V(S_n(1)) = w_n$.

1.9 Integrales impropias dependiendo de un parámetro

Recordemos las condiciones en que se puede derivar bajo el signo de integral.

Teorema 1.9.1 Sea $f: \mathbb{R} \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que:

- $\forall t \in [a, b], x \mapsto f(x, t)$ es integrable sobre \mathbb{R} , $F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) dx$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, t \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$ es continua en $[a, b]$.
- $\forall t \in [a, b], x \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$ es integrable sobre \mathbb{R} y existe $g(x) \geq 0$ integrable sobre \mathbb{R} tal que $\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq g(x)$, entonces la función $F'(t) = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx$.

Ejemplo 1.9.1 Usando la derivación con respecto a un parámetro, calcular la integral $\int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} dx$, $\alpha > 0, \beta > 0$.

Sea $F(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} dx$, verifiquemos que se cumplen las hipótesis del teorema, tomando a α primeramente como parámetro.

Sea $f(\alpha, x) = \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x}$, β fijo, $\forall \alpha \in [a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$ es integrable en \mathbb{R}^+ , pues en $x = 0$, la continuidad de f se puede establecer tomando $f(\alpha, 0) = 0$.

Además $\forall x \in \mathbb{R}^+, \alpha \mapsto \frac{\partial f}{\partial \alpha} = -\frac{x^2 e^{-\alpha x^2}}{x} = -x e^{-\alpha x^2}$ es continua en $[a, b]$ y la función $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial \alpha} = -x e^{-\alpha x^2}$ es integrable en \mathbb{R}^+ . Así, si tomamos $g(x) = x e^{-\alpha x^2}$ es tal que $\left| \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha) \right| \leq g(x)$ y $g(x)$ es integrable en \mathbb{R} , por lo que:

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha}(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} -x e^{-\alpha x^2} dx = -\frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha x^2} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2\alpha},$$

de modo que $F(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \ln \alpha + c(\beta)$. Si tomamos $\alpha = \beta$, entonces $F(\beta, \beta) = 0 \implies c(\beta) = \frac{1}{2} \ln \beta$ i.e. $F(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \ln \alpha - \frac{1}{2} \ln \beta = \frac{1}{2} \ln \frac{\alpha}{\beta}$.

1.10 Integrales dobles impropias

a) **Caso en que la región de integración es no acotada:**

Si la función $f(x, y)$ es continua en una región no acotada S del plano \mathbb{R}^2 y S_n es una región medible contenida en S , $S_n \subset S_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, de modo que si $n \rightarrow \infty$, $S_n \rightarrow S$, entonces si $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{S_n} f(x, y) dx dy$ no depende de la elección que se haga de S_n , la integral impropia correspondiente se dice convergente y escribimos:

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{S_n} f(x, y) dx dy.$$

En caso contrario la integral impropia se dice divergente.

b) Caso de una función discontinua

Si la función $f(x, y)$ es continua en toda la región cerrada y medible S , excepto en un punto (a, b) , definimos $S_\varepsilon = S \setminus B((a, b), \varepsilon)$, entonces si $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{S_\varepsilon} f(x, y) dx dy$ existe y no depende de la forma de las bolas $B((a, b), \varepsilon)$, la integral se dice convergente y escribimos:

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{S_\varepsilon} f(x, y) dx dy.$$

En caso contrario la integral se dice divergente.

c) Integral doble impropia con singularidades en la frontera

Proposición 1.10.1 Sea $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión creciente de abiertos medibles en \mathbb{R}^2 , tales que $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} S_k = S$ es medible, entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} V(S_k) = V(S)$.

Demostración Es claro que $V(S_k) \leq V(S_{k'}) \leq V(S)$, si $k \leq k'$. Dado $\varepsilon > 0$, existe un cerrado medible $F \subset S$, tal que $V(F) > V(S) - \varepsilon$ y existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $F \subset S_{k_0}$ i.e. $V(S) - \varepsilon \leq V(F) \leq V(S_{k_0}) \leq V(S)$, si $k \geq k_0$.

Definición 1.10.1 Sea $f(x, y)$ una función definida y continua (pero no acotada) sobre un abierto S (no necesariamente medible). Si el límite

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{S_k} f(x, y) dx dy = \iint_S f(x, y) dx dy$$

existe, donde $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de abiertos medibles de \mathbb{R}^2 , con la propiedad $\bar{S}_k \subset S$, $S_1 \subset S_2 \subset \dots$, $S = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} S_k$ y donde S_k tiene frontera regular o regular a trozos,¹⁵ decimos que la integral impropia de f sobre S es convergente.

La existencia del límite se entiende en el sentido que es independiente de la escogencia de la sucesión $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Teorema 1.10.1 Sean $x = \phi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, con $(u, v) \in S$, definiendo una transformación continuamente diferenciable sobre la cerradura \bar{S} de S conjunto medible, tal que el Jacobiano es diferente de cero sobre S :

$$\det J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial u} & \frac{\partial \phi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (u, v) \in S,$$

de modo que sea uno a uno de S en S' .

¹⁵Ver definiciones ?? y ?? de la página ??

Si la función $f(x, y)$ es continua (pero no acotada) sobre la región S' de modo que la función $f(\phi(u, v), \psi(u, v))|\det J(u, v)|$ es uniformemente continua sobre S (y por tanto se puede extender continuamente a \bar{S}), entonces:

$$\iint_{S'} f(x, y) dx dy = \iint_S f(\phi(u, v), \psi(u, v)) |\det J| du dv,$$

donde la integral de la izquierda se entiende en el sentido de la integral impropia.

Demostración Sea $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión creciente de abiertos tales que $\bar{S}_k \subset S$ y $S = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} S_k$ y donde sus fronteras son regulares o regulares a trozos.

A esta sucesión corresponde una sucesión $(S'_k)_{k \in \mathbb{N}}$ por la bicontinuidad de la transformación, la cual tiene la propiedad indicada.

Por el teorema de cambio de variable, (aplicable a f sobre \bar{S}'_k) se tiene:

$$\iint_{S'_k} f(x, y) dx dy = \iint_{S_k} f(\phi(u, v), \psi(u, v)) |\det J| du dv, \quad k = 1, 2, \dots$$

y además

$$\begin{aligned} & \left| \iint_S f(\phi(u, v), \psi(u, v)) |\det J| du dv - \iint_{S_k} f(\phi(u, v), \psi(u, v)) |\det J| du dv \right| \\ &= \left| \iint_{S \setminus S_k} f(\phi(u, v), \psi(u, v)) |\det J| du dv \right| \leq M V(S \setminus S_k) \longrightarrow 0 \text{ si } k \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

donde $|f(\phi(u, v), \psi(u, v))|\det J| \leq M$, para $(u, v) \in \bar{S}$. Así tenemos que la integral converge al mismo número independientemente de la sucesión $(S'_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

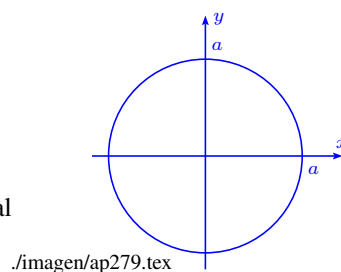
Es importante notar que la frontera regular de S'_k bajo la transformación, es la frontera regular de S_k , siempre que S_k sea medible.

Ejemplo 1.10.1 Investigar la convergencia de la integral $\iint_S \frac{dx dy}{(1+x^2+y^2)^\alpha}$, S es el plano \mathbb{R}^2 .

Sea σ_a el círculo de radio a con centro en el origen; usando coordenadas polares si $\alpha \neq 1$ tenemos:

$$\begin{aligned} I_\alpha &= \iint_{\sigma_a} \frac{dx dy}{(1+x^2+y^2)^\alpha} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} \int_0^a \frac{2r dr}{(1+r^2)^\alpha} \right) d\theta = \pi \frac{(1+r^2)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_0^a \\ &= \frac{\pi}{1-\alpha} ((1+a^2)^{1-\alpha} - 1). \end{aligned}$$

- Si $\alpha < 1$ se tiene $\lim_{a \rightarrow \infty} I_a = +\infty$ y la integral diverge.
- Si $\alpha > 1$ se tiene $\lim_{a \rightarrow \infty} I_a = \frac{\pi}{1-\alpha}$ y la integral converge.
- Si $\alpha = 1$ se tiene $I_a = \pi \ln(1+a^2)$ i.e. $\lim_{a \rightarrow \infty} I_a = +\infty$ y la integral diverge.



Nota El concepto de integral múltiple impropia, se puede extender de manera natural del concepto de integral doble impropia.

Ejemplo 1.10.2 Un ejemplo interesante de gran utilidad, es el cálculo de las funciones de densidades marginales en Teoría de probabilidades, esto es, si tenemos una cierta función de densidad $f(x_1, \dots, x_n) \geq 0$, necesitamos determinar a través de una biyección $x \rightleftharpoons y$ y una cierta función que depende solamente de un y_j , resultado de la integración en \mathbb{R}^{n-1} sobre las variables $y_i, i \neq j$. Esto se escribe así:

Si la biyección entre x y y se da, entonces tenemos que:

$$1 = \int_V \cdots \int f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = \int_{V'} \cdots \int f(x(y)) |\det J| dy_1 \cdots dy_n.$$

Nos interesa calcular la densidad marginal de y_j , es decir:

$$f_j(y_j) = \int_{\mathbb{R}^{n-1} \cap V'} \cdots \int f(x(y)) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n dx_i.$$

Supongamos que la densidad $f(x_1, \dots, x_n) = g(x'Ax) \geq 0$, g continua, $x'Ax = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$, con A matriz simétrica, definida positiva.

Si definimos $y = x'Ax$, probar que la densidad marginal de y es de la forma:

$$f_y(y) = \begin{cases} \frac{\pi^{\frac{1}{2}n}}{\sqrt{\det A} \Gamma(\frac{1}{2}n)} y^{\frac{1}{2}n-1} g(y) & \text{si } y \geq 0 \\ 0 & \text{si } y < 0. \end{cases}$$

Consideremos $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$, los valores propios de A , P la matriz de pasaje ortogonal tal que $P' = P^{-1}$, $\det P = 1$, $D_\lambda = P^{-1}AP$ (matriz de los valores propios de A).

Sea $z = P'x$, entonces $x'Ax = z'P'APz = \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i^2$, ($x \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}^n$).

$$1 = \int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int g(x'Ax) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int g(z'D_\lambda z) |P| dz = \int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int g(z'D_\lambda z) dz.$$

Definiendo $y_i = z_i \sqrt{\lambda_i}$, tenemos $z' D_\lambda z = x' A x = \mathbf{y}' \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n y_i^2 = y$, $\det J = \det D \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{\det A}}$
i.e.

$$1 = \int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int_{\mathbb{R}^n} g(z' D_\lambda z) dz = \int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{y}' \mathbf{y}) \frac{1}{\sqrt{\det A}} dy.$$

El próximo cambio de variable nos muestra una faceta interesante en el cambio de variable. Si definimos $\alpha_1 = y_1^2, \alpha_2 = y_1^2 + y_2^2, \dots, \alpha_n = y_1^2 + \dots + y_n^2$, la inversa conduce a considerar 2^n funciones (y regiones) diferentes para abarcar la gama de posibilidades de las biyecciones:

$$\begin{aligned} y_1 &= \pm \sqrt{\alpha_1} \\ y_2 &= \pm \sqrt{\alpha_2 - \alpha_1} \\ &\vdots \\ y_n &= \pm \sqrt{\alpha_n - \alpha_{n-1}} \end{aligned} \quad 0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n < +\infty.$$

El Jacobiano de la transformación $|\det J| = \frac{1}{2^n \sqrt{\alpha_1} \sqrt{\alpha_2 - \alpha_1} \cdots \sqrt{\alpha_n - \alpha_{n-1}}}$.

Es importante ver que en esta transformación $\alpha_n = y$, es decir que para determinar la densidad marginal que deseamos, es equivalente a integrar sobre $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ en la región $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n$, 2^n integrales cada una de las cuales son iguales, es decir:

$$\begin{aligned} f_y(\alpha_n) &= \int_{\substack{0 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_{n-1} \leq \alpha_n \\ \alpha_n = \alpha_n}} \cdots \int_{\alpha_2}^{2^n g(\alpha_n) |\det J| d\alpha_1 \cdots d\alpha_{n-1}} \\ &= 2^n \int_0^{\alpha_n} \cdots \int_0^{\alpha_2} g(\alpha_n) |\det J| d\alpha_1 \cdots d\alpha_{n-1} \\ &= \frac{g(\alpha_n)}{\sqrt{\det A}} \int_0^{\alpha_n} \cdots \int_0^{\alpha_2} \frac{d\alpha_1 \cdots d\alpha_{n-1}}{\sqrt{\alpha_1} \cdots \sqrt{\alpha_n - \alpha_{n-1}}}. \end{aligned}$$

Observemos que:

$$\begin{aligned} \int_0^{\alpha_2} \frac{d\alpha_1}{\sqrt{\alpha_1} \sqrt{\alpha_2 - \alpha_1}} &= \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} (1-x)^{-\frac{1}{2}} dx = \beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ \int_0^{\alpha_3} (\alpha_3 - \alpha_2)^{-\frac{1}{2}} d\alpha_2 &= \sqrt{\alpha_3} \int_0^1 (1-x)^{-\frac{1}{2}} dx = \sqrt{\alpha_3} \beta\left(1, \frac{1}{2}\right) \\ \int_0^{\alpha_4} \sqrt{\alpha_3} (\alpha_4 - \alpha_3)^{-\frac{1}{2}} d\alpha_3 &= \alpha^4 \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} (1-x)^{-\frac{1}{2}} dx = \alpha_4 \beta\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ &\vdots \\ \int_0^{\alpha_n} \alpha_n^{\frac{1}{2}n - \frac{3}{2}} (\alpha_n - \alpha_{n-1})^{-\frac{1}{2}} d\alpha_{n-1} &= \alpha_n^{\frac{1}{2}n - 1} \int_0^1 x^{\frac{1}{2}n - \frac{3}{2}} (1-x)^{-\frac{1}{2}} dx = \alpha_n^{\frac{1}{2}n - 1} \beta\left(\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} f_y(\alpha_n) &= \frac{g(\alpha_n)}{\sqrt{\det A}} \cdot \beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cdot \beta\left(1, \frac{1}{2}\right) \cdot \beta\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \cdots \beta\left(\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \alpha_n^{\frac{1}{2}n-1} \\ &= \frac{g(\alpha_n)}{\sqrt{\det A}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} \cdot \frac{\Gamma(1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2)} \cdots \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)} \cdot \alpha_n^{\frac{1}{2}n-1} \\ &= \frac{g(\alpha_n)}{\sqrt{\det A}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)} \alpha_n^{\frac{1}{2}n-1} = \frac{\pi^{\frac{1}{2}n} \alpha_n^{\frac{1}{2}n-1}}{\sqrt{\det A} \Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)} g(\alpha_n), \text{ si } \alpha_n \geq 0. \end{aligned}$$

Nota Se concluye que $\int_0^\infty g(y)y^{\frac{1}{2}n-1}dy = \frac{\sqrt{\det A} \Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)}{\pi^{\frac{1}{2}n}}$.

Ejercicio Sea f una función de densidad de modo $f(x_1, \dots, x_n) = g(a_1x_1 + \dots + a_nx_n)$ en la región $x_1 > 0, \dots, x_n > 0$, con $a_1 > 0, \dots, a_n > 0$. Verificar que la densidad marginal de $y = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$ es $\frac{1}{a_1 \cdots a_n \Gamma(n)} y^{n-1} g(y)$ si $y > 0$.

1.11 Ejercicios

1.11.1 Cálculo de integrales dobles

1. Evaluar las siguientes integrales dobles:

a) $\iint_{\mathbf{R}} \frac{x^2}{1+y^2} dx dy, \mathbf{R} = [0, 1] \times [0, 1]$

b) $\iint_{\mathbf{R}} \frac{dx dy}{(x+y+1)^2}, \mathbf{R} = [0, 1] \times [0, 1]$

c) $\iint_{\mathbf{R}} \frac{y dx dy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \mathbf{R} = [0, 1] \times [0, 1]$

d) $\iint_{\mathbf{R}} x \operatorname{sen}(x+y) dx dy, \mathbf{R} = [0, \pi] \times [0, \frac{\pi}{2}]$

e) $\iint_{\mathbf{R}} x^2 y e^{xy} dx dy, \mathbf{R} = [0, 1] \times [0, 2]$.

f) $\iint_{\mathbf{R}} x^2 y \cos(xy^2) dx dy, \mathbf{R} = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2]$.

2. Calcular las siguientes integrales dobles.

a) $\int_0^2 \int_0^1 (x^2 + 2y) dx dy$

b) $\int_3^4 \int_1^2 \frac{dy dx}{(x+y)^2}$

c) $\int_1^2 \int_1^2 \frac{x^2 dy dx}{y^2}$

d) $\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2 dy dx}{1+y^2}$

e) $\int_{-3}^3 \int_{y^2-4}^5 (x+2y) dx dy$

f) $\int_0^{2\pi} \int_{a \operatorname{sen} \theta}^a r dr d\theta$

g) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{3 \cos \theta} r^2 \operatorname{sen}^2 \theta dr d\theta$

h) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} dy dx.$

3. Dar las ecuaciones de las curvas que limitan las regiones de las integrales dobles y dibujarlas.

a) $\int_{-6}^2 \int_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x, y) dx dy$

b) $\int_1^3 \int_{x^2}^{x+9} f(x, y) dy dx$

c) $\int_0^4 \int_y^{10-y} f(x, y) dx dy$

d) $\int_1^3 \int_{\frac{x}{3}}^{2x} f(x, y) dy dx$

$$e) \int_0^3 \int_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x, y) dx dy$$

$$f) \int_{-1}^2 \int_{x^2}^{x+2} f(x, y) dy dx.$$

4. Calcular las integrales dobles por integración iterada:

$$a) \iint_{\mathbf{R}} xy(x+y) dx dy, \mathbf{R} = [0, 1] \times [0, 1]$$

$$b) \iint_{\mathbf{R}} (x^3 + 3x^2y + y^3) dx dy, \mathbf{R} = [0, 1] \times [0, 1]$$

$$c) \iint_{\mathbf{R}} (\sqrt{y} + x - 3xy^2) dx dy, \mathbf{R} = [0, 1] \times [1, 3]$$

$$d) \iint_{\mathbf{R}} \sin^2 x \sin^2 y dx dy, \mathbf{R} = [0, \pi] \times [0, \pi]$$

$$e) \iint_{\mathbf{R}} \sin(x+y) dx dy, \mathbf{R} = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$f) \iint_{\mathbf{R}} |\cos(x+y)| dx dy, \mathbf{R} = [0, \pi] \times [0, \pi]$$

$$g) \iint_{\mathbf{R}} f(x+y) dx dy, \mathbf{R} = [0, 2] \times [0, 2], f(t) = \lfloor t \rfloor$$

$$h) \iint_{\mathbf{R}} y^{-3} e^{\frac{tx}{y}}, \mathbf{R} = [0, t] \times [1, t], t > 0.$$

5. Sea $\mathbf{R} \subset \mathbb{R}^2$ un rectángulo, $\mathbf{R} = [a, b] \times [c, d]$ y sean $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $g: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, funciones integrables en los intervalos respectivos. Supongamos que $h(x, y) = f(x)g(y)$ es integrable sobre \mathbf{R} , probar que $\iint_{\mathbf{R}} f(x)g(y) dx dy = \left(\int_a^b f(x) dx \right) \left(\int_c^d g(y) dy \right)$.

6. Calcular las siguientes integrales y dibujar las regiones de integración:

$$a) \int_0^{\pi} \int_0^{1+\cos x} y^2 \sin x dy dx \quad b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\cos x}^1 y^4 dy dx \quad c) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{3 \cos y} x^2 \sin^2 y dx dy.$$

7. Calcular las siguientes integrales dobles.

$$a) \iint_{\mathbf{R}} xy^2 dx dy, \mathbf{R} \text{ está limitada por la parábola } y^2 = 2px \text{ y la recta } x = p.$$

$$b) \iint_{\mathbf{R}} \frac{dx dy}{\sqrt{2a-x}}, \mathbf{R} \text{ es un círculo de radio } a, \text{ tangente a los ejes de coordenadas y se encuentra en el primer cuadrante.}$$

8. Dibujar las regiones cuyas áreas se expresan por las siguientes integrales. Calcular el área y cambiar el orden de integración en a) y b).

$$\text{a) } \int_{-1}^2 \int_{x^2}^{x+2} dy dx$$

$$\text{b) } \int_0^a \int_{a-y}^{\sqrt{a^2-y^2}} dx dy$$

$$\text{c) } \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2} \int_0^{3 \sec \theta} r dr d\theta$$

$$\text{d) } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_a^{a(1+\cos \theta)} r dr d\theta.$$

9. Calcular la integral $\iint_{\mathbb{R}} xy dx dy$, donde \mathbb{R} es la región limitada por el eje x y la semi-círculo superior $(x-2)^2 + y^2 = 1$.

10. Calcular la integral $\iint_{\mathbb{R}} y dx dy$, donde \mathbb{R} es la región limitada por el eje x y el cicloide $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

11. Calcular la integral $\iint_{\mathbb{R}} xy dx dy$, donde \mathbb{R} es la región limitada por los ejes coordenados y el arco de astroide $x = a \sin^3 t$, $y = a \cos^3 t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

12. Calcular las integrales $\iint_{\mathbb{R}} f(x, y) dx dy$, donde:

$$\text{a) } \mathbb{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}, f(x, y) = \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}.$$

$$\text{b) } \mathbb{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 \leq 2p(y+1), x^2 \leq -2p(y-1)\}, f(x, y) = x^2 - 2py, p > 0.$$

$$\text{c) } \mathbb{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq \pi, |y| \leq \sin x\}, f(x, y) = y^2 \sin x.$$

$$\text{d) } \mathbb{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y^2 + 2x \leq 1\}, f(x, y) = x^2 + y^2.$$

$$\text{e) } \mathbb{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y \leq 0, y - x \geq 0\}, f(x, y) = \sqrt{y-x}.$$

$$\text{f) } \mathbb{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}, f(x, y) = a^x b^y, a > 1, b > 1.$$

$$\text{g) } \mathbb{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}, f(x, y) = \frac{1}{x+y+1}.$$

$$\text{h) } \mathbb{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 2, y^2 \leq 2x\}, f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}.$$

$$\text{i) } \mathbb{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq 0, (x+y)^2 \leq 2x\}, f(x, y) = \sqrt{xy}.$$

$$\text{j) } \mathbb{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}, f(x, y) = x + y.$$

$$\text{k) } \mathbb{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}, f(x, y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}.$$

$$\text{l) } \mathbb{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq c^2\}, f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, a, b, c > 0.$$

$$\text{m) } \mathbb{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + xy + y^2 \leq 1\}, f(x, y) = e^{-(x^2+xy+y^2)}.$$

$$\text{n) } \mathbb{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq a^2\}, f(x, y) = \frac{y}{x^2 + a^2}, a > 0.$$

$$\text{o) } \mathbb{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 4 \leq x^2 + y^2 \leq 16\}, f(x, y) = \frac{1}{x^2 + xy + y^2}.$$

$$\text{p) } \mathbb{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x^2 + y^2 \geq 1\}, f(x, y) = \frac{xy}{(1+x^2+y^2)^2}.$$

1.11.2 Colocación de límites

13. Colocar los límites de integración en la integral doble $\iint_{\mathbf{R}} f(x, y) dx dy$ y dibujar la región \mathbf{R} en cada caso:

a) \mathbf{R} es el paralelogramo cuyos lados están sobre la recta $x = 3, x = 5, 3x - 2y + 4 = 0, 3x - 2y + 1 = 0$.

b) El triángulo cuyos lados están sobre las rectas $x = 0, y = 0, x + y = 2$.

c) $x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$.

d) $x + y \leq 1, x - y \leq 1, x \geq 0$.

e) $y \geq x^2, y \leq 4 - x^2$.

f) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1$.

g) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 \leq 4$.

h) \mathbf{R} está limitado por las parábolas $y = x^2, x = \sqrt{y}$.

i) \mathbf{R} es el triángulo con los lados sobre $y = x, y = 2x, x + y = 6$.

j) \mathbf{R} es el paralelogramo con los lados sobre $y = x, y = x + 3, y = -2x + 1, y = -2x + 5$.

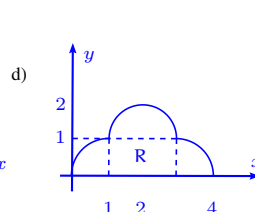
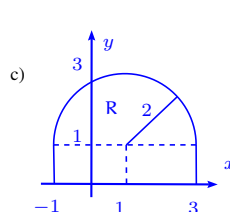
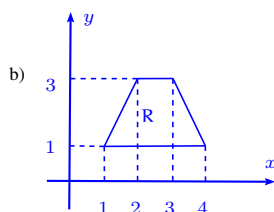
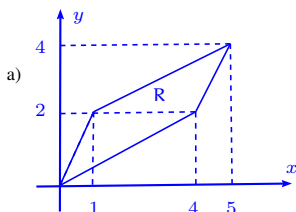
k) $y - 2x \leq 0, 2y - x \geq 0, xy \leq 2$.

l) $y^2 \leq 8x, y \leq 2x, y + 4x - 24 \leq 0$.

m) \mathbf{R} está limitado por la hipérbola $y^2 - x^2 = 1$ y por la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$.

14. Expresar la integral doble $\iint_{\mathbf{R}} f(x, y) dx dy$, donde \mathbf{R} representan regiones en las siguientes gráficas. En

c) y d) las curvas son arcos de circunferencias.



15. Calcular las siguientes integrales dobles:

a) $\int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{x}} dy \right) dx.$

b) $\int_2^4 \left(\int_x^{2x} \frac{y}{x} dy \right) dx.$

c) $\int_1^2 \left(\int_0^{\ln y} e^x dx \right) dy.$

d) $\iint_{\mathbf{R}} x^3 y^2 dx dy, \mathbf{R} : x^2 + y^2 \leq a^2.$

- e) $\iint_{\mathbf{R}} (x^2 + y) dx dy$, \mathbf{R} : acotado por $y = x^2$, $x = y^2$.
- f) $\iint_{\mathbf{R}} \frac{x^2}{y^2} dx dy$, \mathbf{R} : acotado por $x = 2$, $y = x$, $xy = 1$.
- g) $\iint_{\mathbf{R}} \cos(x + y) dx dy$, \mathbf{R} : acotado por $x = 0$, $y = x$, $y = \pi$.
- h) $\iint_{\mathbf{R}} x^2 y^2 \sqrt{1 - x^3 - y^3} dx dy$, \mathbf{R} : acotado por $x^3 + y^3 = 1$, $x = 0$, $y = 0$.

16. Colocar los límites de integración en uno y otro orden en las siguientes integrales dobles.

- a) \mathbf{R} es el rectángulo de vértice $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$, $(0, 1)$.
- b) \mathbf{R} es el triángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$.
- c) \mathbf{R} es el trapecio cuyos vértices son $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$.
- d) \mathbf{R} es el paralelogramo cuyos vértices son $(1, 2)$, $(2, 4)$, $(2, 7)$, $(1, 5)$.
- e) \mathbf{R} es el sector circular OAB con centro $(0, 0)$, cuyo arco tiene sus extremos en $A(1, 1)$ y $B(-1, 1)$.
- f) \mathbf{R} es un segmento parabólico recto AOB , limitado por la parábola BOA y por el segmento de recta AB , que une entre sí los puntos $B(-1, 2)$ y $A(1, 2)$.
- g) \mathbf{R} es el anillo circular limitado por las circunferencias cuyos radios son $r = 1$, $r = 2$ y cuyo centro en común es $(0, 0)$.
- h) \mathbf{R} está limitado por la hipérbola $y^2 - x^2 = 1$ y por la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ (se considera la región que comprende el origen de coordenadas).

17. Determinar los límites de integración en uno y otro orden de la integral doble $\iint_{\mathbf{R}} f(x, y) dx dy$, si la región \mathbf{R} está dada por:

- a) $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 1$
- b) $x^2 + y^2 \leq a^2$
- c) $x^2 + y^2 \leq x$
- d) $y \geq x$, $x \geq -1$, $y \leq 1$
- e) $y \leq x \leq y + 2a$, $0 \leq y \leq a$.

18. Calcular las siguientes integrales dobles:

- a) $\iint_{\mathbf{R}} x dx dy$, \mathbf{R} es el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$.
- b) $\iint_{\mathbf{R}} x dx dy$, \mathbf{R} está limitado por la recta que pasa por $(2, 0)$, $(0, 2)$ y por la circunferencia de radio 1 que tiene su centro en $(0, 1)$.

- c) $\iint_R \frac{dx dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$, R es el círculo de radio a y centro $(0, 0)$, situado en el primer cuadrante.
- d) $\iint_R \sqrt{x^2 - y^2} dx dy$, R es el triángulo con los vértices en $(0, 0)$, $(1, -1)$ y $(1, 1)$.
- e) $\iint_R \sqrt{xy - y^2} dx dy$, R es el triángulo con los vértices en $(0, 0)$, $(10, 1)$ y $(1, 1)$.
- f) $\iint_R e^{\frac{x}{y}} dx dy$, R es la región limitada por la parábola $y^2 = x$, $x = 0$, $y = 1$.
- g) $\iint_R \frac{x dx dy}{x^2 + y^2}$, R es la región limitada por la parábola $y = \frac{x^2}{2}$, $y = x$.

1.11.3 Inversión de límites

19. Graficar la región e invertir el orden de integración en las siguientes integrales dobles:

- a) $\int_0^4 \int_{3x^2}^{12x} f(x, y) dy dx$
- b) $\int_0^1 \int_{2x}^{3x} f(x, y) dy dx$
- c) $\int_0^a \int_{\frac{a^2 - x^2}{2a}}^{\sqrt{a^2 - x^2}} f(x, y) dy dx$
- d) $\int_{\frac{a}{2}}^a \int_0^{\sqrt{2ax - x^2}} f(x, y) dy dx$
- e) $\int_0^{2a} \int_{\sqrt{2ax - x^2}}^{\sqrt{4ax}} f(x, y) dy dx$
- f) $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx dy$
- g) $\int_0^1 \int_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x, y) dx dy$
- h) $\int_0^\pi \int_0^{\text{sen } x} f(x, y) dy dx$
- i) $\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} \int_0^x f(x, y) dy dx + \int_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^R \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} f(x, y) dy dx$.

20. Se supone que f es integrable en una cierta región R dada, representada por los límites de integración.

En cada caso representar R e invertir el orden de integración:

- a) $\int_0^1 \left(\int_0^y f(x, y) dx \right) dy$.
- b) $\int_0^2 \left(\int_{y^2}^{2y} f(x, y) dx \right) dy$.
- c) $\int_1^4 \left(\int_{\sqrt{x}}^2 f(x, y) dy \right) dx$.
- d) $\int_1^2 \left(\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy \right) dx$.
- e) $\int_{-6}^2 \left(\int_{\frac{1}{4}(x^2-4)}^{2-x} f(x, y) dy \right) dx$.
- f) $\int_1^e \left(\int_0^{\ln x} f(x, y) dy \right) dx$.
- g) $\int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \right) dx$.
- h) $\int_0^1 \left(\int_{x^3}^{x^2} f(x, y) dy \right) dx$.
- i) $\int_0^\pi \left(\int_{-\text{sen } \frac{x}{2}}^{\text{sen } x} f(x, y) dy \right) dx$.
- j) $\int_0^4 \left(\int_{-\sqrt{4-y}}^{\frac{(y-4)}{2}} f(x, y) dx \right) dy$.

21. a) Al calcular el volumen V situado debajo del paraboloido $z = x^2 + y^2$ y limitado por la región R del plano xy , se ha llegado a que:

$$V = \int_0^1 \left(\int_0^y (x^2 + y^2) dx \right) dy + \int_1^2 \left(\int_0^{2-y} (x^2 + y^2) dx \right) dy.$$

Dibujar R y expresar el volumen en el orden invertido y calcularlo.

En los casos b) y c), dibujar R y expresar la integral en el orden invertido.

$$b) V = \int_0^{a \operatorname{sen} c} \left(\int_{\sqrt{a^2 - y^2}}^{\sqrt{b^2 - y^2}} f(x, y) dx \right) dy + \int_{a \operatorname{sen} c}^{b \operatorname{sen} c} \left(\int_{y \operatorname{cot} c}^{\sqrt{b^2 - y^2}} f(x, y) dx \right) dy, \quad 0 < a < b, \quad 0 < c < \frac{\pi}{2}.$$

$$c) V = \int_1^2 \left(\int_x^{x^3} f(x, y) dy \right) dx + \int_2^8 \left(\int_x^8 f(x, y) dy \right) dx.$$

22. Un cono se obtiene uniendo todos los puntos de una región plana A , con un punto no situado en el plano de A . Designando con A el área de A y con h la altura del cono, demuestre que:

a) El área de la sección al cortarla con un plano paralelo a la base y a distancia t del vértice es $(\frac{t}{h})^2 A$, si $0 \leq t \leq h$.

b) El volumen del cono es $\frac{1}{3} Ah$.

23. Invertir el orden de integración para verificar que ($a > 0, m \in \mathbb{R}$):

$$\int_0^a \left(\int_0^y e^{m(a-x)} f(x) dx \right) dy = \int_0^a (a-x) e^{m(a-x)} f(x) dx = \int_0^a x e^{mx} f(a-x) dx.$$

24. Cambiar el orden de integración de las siguientes integrales dobles:

$$a) \int_0^1 \left(\int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx \right) dy.$$

$$b) \int_{-1}^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \right) dx.$$

$$c) \int_0^r \left(\int_x^{\sqrt{2rx-x^2}} f(x, y) dy \right) dx.$$

$$d) \int_{-2}^2 \left(\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy \right) dx.$$

$$e) \int_1^2 \left(\int_x^{2x} f(x, y) dy \right) dx.$$

$$f) \int_0^2 \left(\int_{2x}^{6-x} f(x, y) dy \right) dx.$$

25. Cambiar el orden de integración en las siguientes integrales dobles:

$$a) \int_0^1 \left(\int_0^x f(x, y) dy \right) dx + \int_1^2 \left(\int_0^{2-x} f(x, y) dy \right) dx.$$

$$b) \int_0^1 \left(\int_0^2 f(x, y) dy \right) dx + \int_1^3 \left(\int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

$$c) \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} f(x, y) dy \right) dx + \int_1^3 \left(\int_0^{\frac{3-x}{2}} f(x, y) dy \right) dx.$$

$$d) \int_0^1 \left(\int_0^{x^{\frac{2}{3}}} f(x, y) dy \right) dx + \int_1^2 \left(\int_0^{1-\sqrt{4x-x^2-3}} f(x, y) dy \right) dx.$$

1.11.4 Cambio de variable

26. Cambiar al sistema de coordenadas polares las siguientes integrales dobles $\iint_{\mathbf{R}} f(x, y) dx dy$:

a) \mathbf{R} es el círculo $x^2 + y^2 \leq a^2$.

b) \mathbf{R} es el círculo $x^2 + y^2 \leq ax$.

c) \mathbf{R} es el círculo $x^2 + y^2 \leq by$.

d) \mathbf{R} está limitado por las circunferencias $x^2 + y^2 = 4x$, $x^2 + y^2 = 8x$ y las rectas $y = x$, $y = 2x$.

e) \mathbf{R} es la parte común de los círculos $x^2 + y^2 \leq ax$, $x^2 + y^2 \leq by$.

f) \mathbf{R} está limitado por las rectas $y = x$, $y = 0$, $x = 1$.

g) \mathbf{R} es el menor de los segmentos circulares, en que es cortado el círculo $x^2 + y^2 \leq 4$ por la recta $x + y = 2$.

h) \mathbf{R} está determinado por $x \geq 0$, $y \geq 0$, $(x^2 + y^2)^3 = 4a^2 x^2 y^2$.

27. Transformar las integrales dobles siguientes a coordenadas polares:

a) $\int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y) dy \right) dx.$

b) $\int_{\frac{a}{2}}^{2a} \left(\int_0^{\sqrt{2ay-y^2}} f(x, y) dx \right) dy.$

c) $\int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x^2 + y^2) dy \right) dx.$

d) $\int_0^{\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}} \left(\int_0^{ax} f\left(\frac{x}{y}\right) dy \right) dx + \int_{\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}}^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} f\left(\frac{x}{y}\right) dy \right) dx.$

28. Calcular las siguientes integrales dobles, pasando a coordenadas polares:

a) $\int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \ln(1 + x^2 + y^2) dy \right) dx.$

b) $\iint_{\mathbf{R}} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} dx dy, \mathbf{R} : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0.$

c) $\iint_{\mathbf{R}} (h - 2x - 2y) dx dy, \mathbf{R} : x^2 + y^2 \leq a^2.$

d) $\iint_{\mathbf{R}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy, \mathbf{R} : x^2 + y^2 \leq ax.$

$$e) \iint_{\mathbf{R}} \arctan \frac{y}{x} dx dy, \mathbf{R} : x^2 + y^2 \geq 1, x^2 + y^2 \leq 9, y \geq \frac{x}{\sqrt{3}}, y \leq x\sqrt{3}.$$

29. Transformar las siguientes integrales dobles pasando a coordenadas polares:

$$a) \iint_{\mathbf{R}} f(x, y) dx dy, \mathbf{R} \text{ está limitado por la elipse } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

$$b) \iint_{\mathbf{R}} f(x, y) dx dy, \mathbf{R} \text{ está limitado por la curva } \left(x^2 + \frac{y^2}{3}\right)^2 = x^2 y.$$

$$c) \iint_{\mathbf{R}} f\left(\sqrt{4 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\right) dx dy, \mathbf{R} \text{ está limitado por las elipses } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{4b^2} = 1.$$

$$d) \iint_{\mathbf{R}} xy dx dy, \mathbf{R} \text{ está limitado por la elipse } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, x = 0, y = 0.$$

$$e) \iint_{\mathbf{R}} \sqrt{xy} dx dy, \mathbf{R} \text{ está limitado por la curva } \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3}\right)^4 = \frac{xy}{\sqrt{6}}, x = 0, y = 0.$$

30. Evaluar las siguientes integrales dobles.

$$a) \iint_{\mathbf{R}} (x + y + 10) dx dy, \mathbf{R} \text{ es el círculo } x^2 + y^2 \leq 4.$$

$$b) \iint_{\mathbf{R}} (x^2 + 4y^2 + 9) dx dy, \mathbf{R} \text{ es el círculo } x^2 + y^2 \leq 4.$$

$$c) \iint_{\mathbf{R}} (x + y + 1) dx dy, \mathbf{R} \text{ es el rectángulo } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2.$$

31. Pasar a coordenadas polares y colocar los límites de integración.

$$a) \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx.$$

$$b) \int_0^2 \int_0^x f(\sqrt{x^2 + y^2}) dy dx.$$

$$c) \int_{\mathbf{R}} f(x, y) dx dy, \mathbf{R} \text{ es el triángulo limitado por las rectas } y = x, y = -x, y = 1.$$

$$d) \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 f\left(\frac{y}{x}\right) dy dx.$$

32. Calcular las siguientes integrales dobles.

$$a) \iint_{\mathbf{R}} y dx dy, \mathbf{R} \text{ es un semicírculo de diámetro } a, \text{ con centro } \left(\frac{1}{2}a, 0\right).$$

$$b) \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy dx.$$

33. Calcular la integral doble de la función $f(r, \theta) = r$, sobre la región limitada por la cardioide $r = a(1 + \cos \theta)$ y la circunferencia $r = a$. Se considera el recinto que no contiene el polo.

34. Calcular la integral doble $\iint_{\mathbb{R}} dx dy$, donde \mathbb{R} es la región limitada por la curva:

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2}{h^2} - \frac{y^2}{k^2}.$$

35. Calcular la integral $\iint_{\mathbb{R}} \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy$, donde \mathbb{R} es la región $x^2 + y^2 \leq 1$.

36. Efectuar el cambio de variable a coordenadas polares de $\iint_{\mathbb{R}} f(x, y) dx dy$, donde \mathbb{R} es la región limitada por la lemniscata $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

37. Calcular la integral $\iint_{\mathbb{R}} (x^2 + y^2) dx dy$, donde \mathbb{R} está limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 2ax$.

38. Determinar $\iint_{\mathbb{R}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy$, donde:

a) \mathbb{R} es el semicírculo de radio a con centro en el origen, situado sobre el eje x .

b) \mathbb{R} es la hoja de lemniscata $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, $x \geq 0$.

39. Calcular $\iint_{\mathbb{R}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy$, en la región limitada por la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

40. En cada uno de los ejercicios siguientes, dibujar la región S y expresar la integral doble $\iint_S f(x, y) dx dy$ como una integral iterada y luego hacerlo en coordenadas polares.

a) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq a^2\}$, $a > 0$

b) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 2x\}$

c) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}$, $0 < a < b$

d) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq x \leq 1\}$

e) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 \leq y \leq 1, -1 \leq x \leq 1\}$.

41. Transformar la integral $\int_0^c \int_{\alpha x}^{\beta x} f(x, y) dy dx$, ($0 < \alpha < \beta$, $c > 0$) introduciendo las nuevas variables $u = x + y$, $uv = y$.

42. Efectuar el cambio de variable $u = x + y$, $v = x - y$, en la integral $\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx$.

43. Calcular el área limitada por:

a) $(y - x)^2 + x^2 = 1$.

b) $r = a(1 + \cos \psi)$, $r = a \cos \psi$, $a > 0$.

$$c) \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

44. Hallar el área limitada por la elipse $(x - 2y + 3)^2 + (3x + 4y - 1)^2 = 100$.

45. Hallar el área del cuadrilátero curvo limitado por:

a) las curvas $y^2 = ax$, $y^2 = bx$, $xy = \alpha$, $xy = \beta$, con $0 < a < b$ y $0 < \alpha < \beta$,

b) las parábolas $x^2 = ay$, $x^2 = by$, $y^2 = \alpha x$, $y^2 = \beta x$, con $0 < a < b$ y $0 < \alpha < \beta$.

46. Calcular el área de las siguientes regiones:

a) área limitada por $x = y$, $x = 2y$, $x + y = a$, $x + 3y = a$, $a > 0$.

b) área limitada por el eje x , la parábola $y^2 = 4ax$ y la recta $x + y = 3a$.

c) área limitada por las parábolas $y^2 = 10x + 25$, $y^2 = -6x + 9$.

47. Determinar el área de las siguientes regiones:

a) limitada por $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $y = x$, $y = 0$.

b) limitada por la recta $r \cos \theta = 1$ y la circunferencia $r = 2$. (se considera la superficie que no contiene el polo).

48. Determinar el área de las regiones que se indican usando integrales dobles:

a) Región limitada por $(x^2 + y^2)^2 = 2ax^3$.

b) Región limitada por $(x^2 + y^2)^2 = x^4 + y^4$.

c) Región limitada por la curva $(x + y)^3 = xy$, situada en el primer cuadrante (lazo).

d) Región limitada por la curva $(x + y)^5 = x^2y^2$, situada en el primer cuadrante (lazo).

e) Región limitada por la curva $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 = \frac{xy}{c^2}$.

f) Región limitada por la curva $\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{25}$.

1.11.5 Cálculo de volúmenes

49. Calcular los volúmenes de los cuerpos limitados por las superficies que se indican en cada caso:

a) Por los planos coordenados, los planos $x = 4$, $y = 4$ y el paraboloides $z = x^2 + y^2 + 1$.

b) Por los planos coordenados, los planos $x = a$, $y = b$ y el paraboloides $z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$.

c) Por el plano $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ y los planos coordenados.

d) Por los planos $y = 0$, $z = 0$, $3x + y = 6$, $3x + 2y = 12$, $x + y + z = 6$.

e) Por el paraboloides $z = x^2 + y^2$, los planos coordenados y el plano $x + y = 1$.

- f) Por el paraboloides $z = x^2 + y^2$, los planos $z = 0$, $y = 1$, $y = 2x$, $y = 6 - x$.
- g) Por los planos coordenados, el plano $2x + 3y = 12$ y el cilindro $z = \frac{y^2}{2}$.
- h) Por el cilindro $z = 9 - y^2$, los planos coordenados y el plano $3x + 4y = 12$, $y \geq 0$.
- i) Por el cilindro $z = 4 - x^2$, los planos coordenados y el plano $2x + y = 4$, $x \geq 0$.
- j) Por el cilindro $2y^2 = x$, los planos $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1$ y $z = 0$.
- k) Por el cilindro circular de radio r de eje y , los planos coordenados y por el plano $\frac{x}{r} + \frac{y}{a} = 1$.
- l) Por el cilindro elíptico $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, los planos $z = 12 - 3x - 4y$ y $z = 1$.
- m) Por los cilindros $x^2 + y^2 = a^2$ y $x^2 + z^2 = a^2$.
- n) Por los cilindros $z = 4 - y^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$ y el plano $z = 0$.
- o) Por los cilindros $x^2 + y^2 = b^2$, $z = \frac{x^3}{a^2}$ y el plano $z = 0$, $x \geq 0$.
- p) Por el paraboloides hiperbólico $z = x^2 - y^2$ y los planos $z = 0$, $x = 3$, $x = 0$.
- q) Por el paraboloides hiperbólico $z = xy$, el cilindro $y = \sqrt{x}$ y los planos $x + y = 2$, $y = 0$ y $z = 0$.
- r) Por el paraboloides $z = x^2 + y^2$, el cilindro $y = x^2$ y los planos $y = 1$ y $z = 0$.
- s) Por el paraboloides $z = \frac{1}{a}(a^2 - x^2 - 4y^2)$ y el plano $z = 0$.
- t) Por los cilindros $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $z = e^2 - y^2$ y el plano $z = 0$.
- u) Por los cilindros $y = \ln x$, $y = \ln^2 x$ y los planos $z = 0$, $y + z = 1$.
- v) Por los cilindros $z = \ln x$, $z = \ln y$ y los planos $z = 0$, $x + y = 2e$, $x \geq 1$.
- w) Por los cilindros $y = x + \sin x$, $y = x - \sin x$, $z = \frac{1}{4}(x + y)^2$ y el plano $z = 0$ ($0 \leq x \leq \pi$, $y \geq 0$).
- x) Por la superficie cónica $z^2 = xy$, el cilindro $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ y el plano $z = 0$.
- y) Por la superficie cónica $4y^2 = x(2 - z)$ y los planos $z = 0$, $x + z = 2$.
- z) Por la superficie $z = \cos x \cos y$ y los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y $x + y = \frac{\pi}{2}$.
- a') Por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$, los planos $z = 0$ y $z = x + y + 10$.
- b') Por el cilindro $x^2 + y^2 = 2x$, los planos $2x - z = 0$ y $4x - z = 0$.
- c') Por el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, el paraboloides $az = 2a^2 + x^2 + y^2$ y el plano $z = 0$.
- d') Por el cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$, el paraboloides $z = \frac{1}{a}(x^2 + y^2)$ y el plano $z = 0$.
- e') Por el paraboloides hiperbólico $z = \frac{1}{a}xy$, el cilindro $x^2 + y^2 = ax$ y el plano $z = 0$, ($x \geq 0$, $y \geq 0$).
- f') Por los cilindros $x^2 + y^2 = x$, $x^2 + y^2 = 2x$, el paraboloides $z = x^2 + y^2$ y los planos $x + y = 0$,

$$x - y = 0 \text{ y } z = 0.$$

g') Por los cilindros $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 2y$ y por los planos $z = x + 2y$ y $z = 0$.

h') Por la superficie cónica $z^2 = xy$ y el cilindro $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

i') Por el helicoido (escalera de caracol) $z = h \arctan \frac{y}{x}$, el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ y los planos $x = 0$, $z = 0$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$).

50. Dar el volumen de una pirámide cuyos vértices son $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$.

51. Calcular los volúmenes que expresan las siguientes integrales dobles sin integrar. Hacer los gráficos respectivos.

a) $\int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y) dy dx$

b) $\int_0^2 \int_0^{2-x} (4-x-y) dy dx$

c) $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1-x) dy dx$

d) $\int_0^2 \int_{2-x}^2 (4-x-y) dy dx$

e) $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2} dy dx.$

52. Determinar el volumen limitado por las superficies siguientes:

a) $z = x^2 - y^2$, $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$.

b) $x^2 + z^2 = a^2$, $y = 0$, $z = 0$, $y = x$.

c) $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $x + z = 6$, $z = 0$.

d) $x + y + z = a$, $3x + y = a$, $\frac{3}{2}x + y = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

53. Determinar el volumen de los cuerpos limitados por las superficies siguientes:

a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $y = \frac{b}{a}x$, $y = 0$, $z = 0$

b) $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + y^2 + a^2 = z^2$

c) $2(x^2 + y^2) - z^2 = 0$, $x^2 + y^2 + a^2 = z^2$

d) $2az = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$, (volumen dentro del paraboloido)

e) $x^2 + y^2 = 2ax$, $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 0$.

f) $z = ae^{-(x^2+y^2)}$, $x^2 + y^2 = b^2$, $z = 0$.

g) $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2\frac{x}{a}$, $z = 0$.

54. Determinar la razón en que el hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$, divide el volumen de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3a^2$.

55. Calcular el volumen $V = \iiint_{\mathbb{R}} f$ en los siguientes casos:

$$\text{a) } f(x, y) = \begin{cases} 1 - x - y & \text{si } x + y \leq 1, \\ 0 & \text{en los otros puntos de } \mathbb{R} = [0, 1] \times [0, 1]. \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{si } x^2 \leq y \leq 2x^2, \\ 0 & \text{en los demás puntos de } \mathbb{R} = [0, 1] \times [0, 1]. \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{si } x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0 & \text{en los demás puntos de } \mathbb{R} = [-1, 1] \times [-1, 1]. \end{cases}$$

$$\text{d) } f(x, y) = \begin{cases} (x + y)^{-2} & \text{si } x \leq y \leq 2x, \\ 0 & \text{en los demás puntos de } \mathbb{R} = [1, 2] \times [1, 4]. \end{cases}$$

56. Sea f una función definida en el rectángulo $\mathbb{R} = [0, 1] \times [0, 1]$ del siguiente modo:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

Demostrar la existencia de la integral doble $\iint_{\mathbb{R}} f$ y que es igual a cero.

57. Calcular la integral doble y dibuje la región de integración \mathbb{R} .

$$\text{a) } \iint_{\mathbb{R}} x \cos(x + y) dx dy, \mathbb{R} \text{ es el triángulo de vértices } (0, 0), (\pi, 0), (\pi, \pi).$$

$$\text{b) } \iint_{\mathbb{R}} (1 + x) \sin y dx dy, \mathbb{R} \text{ es el trapecioide } (0, 0), (1, 0), (1, 2), (0, 1).$$

$$\text{c) } \iint_{\mathbb{R}} e^{x+y} dx dy, \mathbb{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| + |y| \leq 1\}.$$

$$\text{d) } \iint_{\mathbb{R}} x^2 y^2 dx dy, \mathbb{R} \text{ es la parte acotada del primer cuadrante situada entre las hipérbolas } xy = 1, xy = 2 \text{ y las rectas } y = x, y = 4x.$$

$$\text{e) } \iint_{\mathbb{R}} (x^2 - y^2) dx dy, \mathbb{R} \text{ es la región limitada por } y = \sin x \text{ en el intervalo } [0, \pi].$$

58. Una pirámide está determinada por los tres planos coordenados y el plano $x + 2y + 3z = 6$. Representar el sólido y calcular el volumen por integral doble.

59. Un sólido está limitado por la superficie $z = x^2 - y^2$, el plano xy y los planos $x = 1, x = 3$.

Representar el sólido y calcular su volumen por integración doble.

60. Calcular el volumen determinado por la función $f(x, y)$ en la región \mathbb{R} :

$$\text{a) } f(x, y) = x^2 + y^2, \mathbb{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| \leq 1, |y| \leq 1\}.$$

b) $f(x, y) = 3x + y$, $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 4x^2 + 9y^2 \leq 36, x \geq 0, y \geq 0\}$.

c) $f(x, y) = 2x + y + 20$, $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 16\}$.

1.11.6 Masa, centro de gravedad, momentos de inercia, aplicaciones

61. Usando integración doble, calcular los momentos estáticos de las figuras planas homogéneas siguientes:
- del rectángulo de lados a y b , con respecto al lado a .
 - del semicírculo con respecto al diámetro.
 - del círculo respecto a una tangente.
 - del triángulo de base a y b , respecto a la base.
62. Usando integración doble, determinar los centros de gravedad de las figuras planas homogéneas siguientes:
- la figura limitada por mitad superior de la elipse la cual se apoya en el eje mayor.
 - la figura limitada por la senoide $y = \sin x$, el eje x y la recta $x = \frac{\pi}{4}$.
 - del segmento circular correspondiente al ángulo central 2α , radio a .
 - de la figura limitada por la curva cerrada $y^2 = x^2 - x^4$, $x \geq 0$.
63. Determinar los momentos de inercia de las figuras planas homogéneas siguientes:
- círculo de radio a respecto a una tangente.
 - elipse respecto a su centro.
 - del rectángulo de lados a y b , con respecto al punto de intersección de las diagonales.
 - del triángulo isósceles, de base a y la altura h , con respecto a su vértice.
 - del círculo de radio a , respecto al punto situado sobre su circunferencia.
64. Demostrar que la suma de los momentos de inercia de una figura plana R , con respecto a la cualquier par de ejes perpendiculares entre sí, que están en el mismo plano que R y que pasan por un punto fijo O , es constante.
65. Determinar la masa de una lámina cuadrada de lado $2a$, si la densidad del material de la misma es proporcional al cuadrado de distancia a partir del punto de intersección de las diagonales y en las esquinas del cuadrado igual a 1.
66. Un anillo plano limitado por las circunferencias concéntricas de radio a y b , $b > a$, tiene densidad inversamente proporcional a la distancia al centro de las circunferencias. Determinar la masa del anillo, si la densidad sobre la circunferencia interior es igual a 1.

67. Una figura limitada por una elipse de semiejes a y b , tiene una masa de modo que su densidad es proporcional a la distancia desde el eje mayor, siendo igual a γ a la distancia unidad del mismo eje. Determinar la masa.
68. Determinar el centroide de la región R , dada por:
- $y = x^2, x + y = 2$
 - $y^2 = x + 3, y^2 = 5 - x$
 - $x - 2y + 8 = 0, x + 3y + 5 = 0, x = -2, x = 4$
 - $y = \sin^2 x, y = 0, 0 \leq x \leq \pi$
 - $y = \sin x, y = \cos x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$
 - $y = \ln x, y = 0, 1 \leq x \leq a$
 - $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1, x = 0, y = 0$ en el primer cuadrante
 - $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1, x = 0, y = 0.$
69. Una lámina delgada está limitada por el arco de parábola $y = 2x - x^2, 0 \leq x \leq 2$. Determinar la masa, si la densidad en cada punto (x, y) es $f(x, y) = \frac{1-y}{1+x}$.
70. Determinar el centro de gravedad de una lámina delgada rectangular $ABCD$ si la densidad en todos sus puntos es el producto de sus distancias a los lados AB y AD .
71. Determinar los momentos de inercia I_x, I_y de una lámina delgada R del plano y determinada por las curvas siguientes ($f(x, y)$ es la densidad).
- $y = \sin^2 x, y = -\sin^2 x, -\pi \leq x \leq \pi, f(x, y) = 1.$
 - $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \frac{x}{c} + \frac{y}{b} = 1, y = 0, 0 < c < a, b > 0, f(x, y) = 1.$
 - $(x - r)^2 + (y - r)^2 = r^2, x = 0, y = 0, 0 \leq x \leq r, 0 \leq y \leq r, f(x, y) = 1.$
 - $xy = 1, xy = 2, x = 2y, y = 2x, x > 0, y > 0, f(x, y) = 1.$
 - $y = e^x, y = 0, 0 \leq x \leq a, f(x, y) = xy.$
 - $y = \sqrt{2x}, y = 0, 0 \leq x \leq 2, f(x, y) = |x - y|.$
72. **Teorema de Steiner** Sea R una lámina delgada de masa m y sean ℓ_0 y ℓ rectas paralelas en el plano R , pasando ℓ_0 por el centro de gravedad de R . Demostrar que $I_\ell = I_{\ell_0} + mh^2$, donde h es la distancia entre las dos rectas ℓ_0 y ℓ .
73. El contorno de una lámina delgada es una elipse de semi-ejes a y b , ℓ representa una recta en el plano de la lámina, que pasa por el centro de la elipse y forma un ángulo α con el eje de la longitud $2a$. Si la

densidad es constante y la masa m , demostrar que el momento de inercia I_ℓ es igual a $\frac{1}{4}m(a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)$.

74. Encontrar la distancia media desde el vértice de un cuadrado de lado h a los puntos interiores de los mismos.
75. Sea δ la distancia desde un punto arbitrario P interior a un círculo de radio r a un punto fijo P_0 cuya distancia al centro del círculo es h . Calcular el valor medio de la función δ^2 en la región limitada por el círculo.
76. Hallar la masa de una lámina circular de radio a , si su densidad es proporcional a la distancia desde el punto al centro e igual a δ en el borde de la lámina.
77. Una lámina tiene la forma de un triángulo rectángulo con catetos $\overline{OB} = a$, $\overline{OA} = b$; su densidad en cualquier punto es igual a la distancia desde esta al cateto \overline{OA} . Determinar los momentos estáticos de la lámina con respecto a los catetos \overline{OA} y \overline{OB} .
78. Calcular las coordenadas del centro de gravedad de la figura limitada por la curva $y = \sin x$, la recta \overline{OA} que pasa por el origen y por el vértice $A = (\frac{\pi}{2}, 1)$ de la senoide.
79. Determinar las coordenadas del centro de gravedad de la figura limitada por la cardioide $r = a(1 + \cos \theta)$.
80. Determinar las coordenadas del centro de gravedad de un sector circular de radio a , cuyo ángulo central es igual a 2α .
81. Calcular las coordenadas del centro de gravedad de la figura limitada por las parábolas $y^2 = 4x + 4$, $y^2 = -2x + 4$.
82. Calcular el momento de inercia de un anillo circular de diámetro d y D ($d < D$):
 - a) con respecto a su propio centro
 - b) con respecto al diámetro.
83. Calcular el momento de inercia del triángulo limitado por las rectas $x + y = 2$, $x = 2$, $y = 2$, con respecto al eje x .
84. Calcular el momento de inercia de un cuadrado de lado a con respecto al eje que, pasando por uno de sus vértices, es perpendicular al plano del cuadrado.
85. Calcular el momento de inercia de la región interceptada por la parábola $y^2 = ax$, por la recta $x = a$, respecto a la recta $y = -a$.

86. Calcular el momento de inercia de la superficie limitada por la hipérbola $xy = 4$ y la recta $x + y = 5$, con respecto a la recta $x = y$.
87. En una lámina cuadrada de lado a , la densidad es proporcional a la distancia hasta uno de sus vértices. Calcular el momento de inercia de dicha lámina respecto a los lados que pasan por el vértice.
88. Determinar el momento de inercia de la cardioide $r = a(1 + \cos \theta)$ con respecto al polo.
89. Calcular el momento de inercia de la superficie de la lemniscata $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ con respecto al eje, perpendicular al plano de la misma que pasa por el polo.
90. Calcular el momento de inercia de una lámina homogénea limitada por un arco de la cicloide $x = a(\theta - \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$ y el eje x , con respecto al eje x y al eje y .
91. En cada caso determinar el valor medio de la función $f(x, y)$ en la región indicada:
- $f(x, y) = 2x + y$, \mathbb{R} : limitada por $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 3$.
 - $f(x, y) = x + 6y$, \mathbb{R} : limitado por $y = x$, $y = 5x$, $x = 1$.
 - $f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, \mathbb{R} : $x^2 + y^2 \leq a^2$.
 - $f(x, y) = 12 - 2x - 3y$, \mathbb{R} : limitada por $x = 0$, $y = 0$, $12 - 2x - 3y = 0$.
92. Hallar el valor medio de la función $f(x, y) = xy^2$ en la región $\mathbb{R} = [0, 1] \times [0, 1]$.
93. Hallar el valor medio del cuadrado de la distancia del punto (x, y) del círculo $(x - a)^2 + y^2 \leq b^2$, al origen de coordenadas.

1.11.7 Ejercicios especiales

94. a) Para $(m, \epsilon) \in \mathbb{R} \times]0, 1[$, calcular $I_{m, \epsilon} = \iint_{[\epsilon, 1]^2} \frac{dx dy}{(x + y)^m}$.
- b) Estudiar, para m fijo, el límite de $I_{m, \epsilon}$, cuando $\epsilon \rightarrow 0^+$.
95. a) Calcular el área de $\mathbb{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 1, \sqrt{1-x} + \sqrt{1-y} \geq 1\}$.
- b) Calcular el área de $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2} / \alpha \leq \frac{y}{x} \leq \beta, a \leq xy \leq b\}$, para $\alpha, \beta, a, b \in \mathbb{R}$, tales que $0 < \alpha < \beta, 0 < a < b$.
96. Establecer, para $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \frac{1}{i} \binom{n}{i} \left(\sum_{j=1}^i \frac{1}{j} \right)$.
97. Para $a > 0$, sea $D_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq a^2\}$, $\Delta_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| \leq a, |y| \leq a\}$, $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$, $I_a = \iint_{D_a} f(x, y) dx dy$, $J_a = \iint_{\Delta_a} f(x, y) dx dy$.
- a) Calcular I_a .

- b) Probar que $I_a \leq J_a \leq I_{a\sqrt{2}}$.
- c) Deducir $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.
98. a) Probar que $\forall x \in [0, 1], \ln(1+x) = \int_0^1 \frac{xdy}{1+xy}$.
- b) Deducir el valor de $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$.
99. Sean $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ y consideremos el conjunto $E = \{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^*/f \text{ es continua}\}$. Calcular $\inf_{f \in E} \left(\int_a^b f(x) dx \right) \left(\int_a^b \frac{dx}{f(x)} \right)$ y encontrar las funciones f que dan el mínimo.
100. Sea $K = [-1, 1]^2$, Γ el borde de K y sea E el espacio vectorial real de aplicaciones de K en \mathbb{R} de clase C^∞ que se anulan, así como sus derivadas parciales sucesivas sobre Γ .
- a) Se denota $\Phi: E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la aplicación definida por $\Phi(f, g) = \iint_K f(x, y)g(x, y) dx dy$. Verificar que Φ es un producto escalar sobre E .
- b) Demostrar que las aplicaciones d_x y d_y de E en E , definidas por $d_x f = \frac{\partial f}{\partial x}$ y $d_y f = \frac{\partial f}{\partial y}$ son endomorfismos anti-simétricos de (E, Φ) .
- c) Deducir que el Laplaciano $\Delta: E \rightarrow E$, con $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ es un endomorfismo simétrico de (E, Φ) .
101. Sea $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$ y sean $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ aplicaciones continuas a trozos. Estudiando la integral $\iint_{[a,b]^2} (f(x)g(y) - f(y)g(x))^2 dx dy$, encontrar la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Estudiar el caso de igualdad para f y g continuas.
102. Sean $f, g_1, g_2: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $f \geq 0$, continua y g_1, g_2 son crecientes. Estudiando $\iint_{[0,1]^2} f(x)f(y)(g_1(x) - g_1(y))(g_2(x) - g_2(y)) dx dy$, demostrar que:
- $$\left(\int_0^1 f(x) dx \right) \left(\int_0^1 f(x)g_1(x)g_2(x) dx \right) \geq \left(\int_0^1 f(x)g_1(x) dx \right) \left(\int_0^1 f(x)g_2(x) dx \right).$$
103. Calcular $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ estudiando $\iint_{[0,1]^2} \frac{dx dy}{1-xy}$.
104. Calcular $\int_0^\infty \left(\int_x^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt \right) dx$.
105. Sea $\lambda > \frac{1}{2}$, demostrar que no existe aplicación continua $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\forall x \in [0, 1], f(x) = 1 + \lambda \int_x^1 f(y)f(y-x) dy$.
106. Sean $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ y sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación continua tal que $\forall t \in \mathbb{R} \setminus [a, b], f(t) = 0$. Para

$h > 0$ se denota $f_h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) dt$. Demostrar que $\forall h > 0, \int_a^b |f_h(t)| dt \leq \int_a^b |f(t)| dt$.

1.11.8 Integrales triples

107. Calcular las siguientes integrales triples:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \int_0^1 \left(\int_0^2 \left(\int_0^3 dz \right) dy \right) dx. & \text{b)} \int_0^a \left(\int_0^b \left(\int_0^c (x+y+z) dz \right) dy \right) dx. \\ \text{c)} \int_0^a \left(\int_0^x \left(\int_0^y xyz dz \right) dy \right) dx. & \text{d)} \int_0^a \left(\int_0^x \left(\int_0^{xy} x^3 y^2 z dz \right) dy \right) dx. \end{array}$$

108. Calcular las siguientes integrales triples en el volumen indicado:

$$\begin{array}{l} \text{a)} \iiint_V \frac{dx dy dz}{(x+y+z+1)^3}, V \text{ es el volumen limitado por } x=0, y=0, z=0, x+y+z=1. \\ \text{b)} \iiint_V xy dx dy dz, V \text{ es el volumen limitado por } z=xy, x+y=1, z=0, (z \geq 0). \\ \text{c)} \iiint_V y \cos(z+x) dx dy dz, V \text{ es el volumen limitado por } y=\sqrt{x}, y=0, z=0, x+z=\frac{\pi}{2}. \end{array}$$

109. Calcular las siguientes integrales y dibujar la región de integración:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{x+y+z+1}} & \text{b)} \int_0^2 \int_0^{2\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{\frac{4x-y^2}{2}}} x dz dy dx. \\ \text{c)} \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \frac{dz}{\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}} & \text{d)} \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} xyz dz dy dx. \end{array}$$

1.11.9 Cambio de variable en \mathbb{R}^3

110. Calcular las siguientes integrales en la región indicada.

$$\begin{array}{l} \text{a)} \iiint_V (x+y+z)^2 dx dy dz, V \text{ en la parte común del paraboloides } 2az \geq x^2 + y^2 \text{ y la esfera } x^2 + y^2 + z^2 \leq 3a^2. \\ \text{b)} \iiint_V z^2 dx dy dz, V \text{ es la intersección de las esferas } x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az. \\ \text{c)} \iiint_V z dx dy dz, V \text{ está limitado por el plano } z=0 \text{ y la mitad superior del elipsoide } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \\ \text{d)} \iiint_V \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx dy dz, V \text{ es el interior del elipsoide } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \end{array}$$

- e) $\iiint_V z \, dx \, dy \, dz$, V es la región limitada por el cono $z^2 = \frac{h^2}{a^2}(x^2 + y^2)$ y el plano $z = h$.
111. Calcular $\iiint_V x^2 \, dx \, dy \, dz$ en la región V limitada por el elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.
112. Calcular $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz$, si V es la región limitada por $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.
113. Colocar los límites de integración, en la integral $\iiint_V f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$ para las regiones dadas por:
- V es el tetraedro limitado por los planos $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
 - V está limitada por las superficies $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$, $z = h$.
 - V está limitada por las superficies $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$, $z = c$.
 - V es el volumen limitado por las superficies $z = 1 - x^2 - y^2$, $z = 0$.
114. Calcular la integral $\iiint_V dx \, dy \, dz$ en la región limitada por las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$, $x^2 + y^2 = z^2$ que contiene el punto $(0, 0, a)$.
115. Calcular la integral $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^a z \sqrt{x^2 + y^2} \, dz \, dy \, dx$.
116. Calcular la integral $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz$ en la región limitada por $x^2 + y^2 + z^2 = x$.
117. Calcular las integrales:
- $I = \int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} (x^2 + y^2) \, dz \, dy \, dx$.
 - $I = \int_0^{2a} dx \int_{-\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}} dz$.
118. Calcular las integrales triples cuando:
- $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq xy\}$, $f(x, y, z) = x^2 y^3 z$.
 - $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq 2pz, 0 \leq z \leq a\}$, $f(x, y, z) = |xyz|$, $p > 0$, $a > 0$.
 - $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq b^2 z^2, 0 \leq z \leq a\}$, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.
 - $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$, $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.
 - $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$, $f(x, y, z) = x^2 y^2 z^2$, $a, b, c > 0$.
 - $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$, $f(x, y, z) = \cos(\alpha x + \beta y + \gamma z)$, $a > 0$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.
 - $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$, $f(x, y, z) = x^p y^q z^r (1 - x - y - z)^s$, $p, q, r, s \in \mathbb{R}^*$.

119. En cada una de las siguientes integrales representar la región V de integración y calcularla.

a) $\iiint_V xy^2z^3 dx dy dz$, V es la región limitada por la superficie $z = xy$ y los planos $x = y$, $x = 1$, $z = 0$.

b) $\iiint_V xyz dx dy dz$, V es el primer octante de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

c) $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, V es la hoja superior del cono $z^2 = x^2 + y^2$ y el plano $z = 1$.

120. En las siguientes integrales iteradas de una función $f(x, y, z)$ positiva, dibujar la región de integración S y expresar la integral efectuando la primera integración respecto a y .

a) $\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{x+y} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$.

b) $\int_{-1}^1 \left(\int_{-x}^x \left(\int_{\sqrt{x^2-y^2}}^1 f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$.

c) $\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx$.

121. Verificar que $\int_0^x \left(\int_0^v \left(\int_0^u f(t) dt \right) du \right) dv = \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 f(t) dt$, donde f es una función integrable sobre todo intervalo $[0, x]$.

122. Calcular las integrales siguientes pasando a coordenadas cilíndricas:

a) $\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz$, V es el sólido limitado por la superficie $x^2 + y^2 = 2z$ y el plano $z = 2$.

b) $\iiint_V dx dy dz$, V es el sólido limitado por los tres planos coordenados, $z = x^2 + y^2$, $x + y \leq 1$.

c) $\iiint_V (y^2 + z^2) dx dy dz$, V es el cono recto de revolución de altura h , de base en el plano xy de radio a , cuyo eje es el eje z .

123. Calcular las siguientes integrales pasando a coordenadas esféricas.

a) $\iiint_V dx dy dz$, V es el sólido limitado entre dos esferas de radio a y b ($0 < a < b$).

b) $\iiint_V \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} dx dy dz$, V es una esfera de radio ρ centrada en el origen y el punto (a, b, c) es un punto exterior a la esfera.

124. Se puede definir la transformación $x = a\rho \cos^m \varphi \sin^n \psi$, $y = b\rho \sin^m \varphi \sin^n \psi$, $z = c\rho \cos^n \psi$,

donde a, b, c, m, n son constantes positivas. Demostrar que el Jacobiano es igual a

$$-abcmn\rho^2 \cos^{m-1} \varphi \sin^{m-1} \varphi \cos^{n-1} \psi \sin^{2n-1} \psi.$$

125. Colocar los límites de integración pasando a coordenadas cilíndricas o coordenadas esféricas en la integral triple $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$.

a) V es el volumen situado en el primer octante y limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ y los planos $z = 0, z = 1, y = x, y = \sqrt{3}x$.

b) V es el volumen limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 2x$, el plano $z = 0$ y el paraboloides $z = x^2 + y^2$.

c) V es la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ situada en el primer octante.

d) V es una parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ situada dentro del cilindro $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, $x \geq 0$.

e) V es la parte común de las esferas $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ y $x^2 + y^2 + (z - a)^2 \leq a^2$.

126. Calcular las siguientes integrales triples pasando a coordenadas esféricas o cilíndricas:

a) $\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dz \right) dy \right) dx$.

b) $\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz$, V es el volumen dado por $a^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2, z \geq 0$.

c) $\iiint_V \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 2)^2}}$, V es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

d) $\iiint_V \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 2)^2}}$, V es el cilindro $x^2 + y^2 \leq 1, -1 \leq z \leq 1$.

1.11.10 Cálculo de volúmenes

127. Calcular el volumen de un sólido limitado por dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ y dentro del paraboloides $x^2 + y^2 = 4z$.

128. Calcular el volumen de un sólido limitado por el plano xy , el cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ y el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

129. Calcular el volumen de la región limitada por:

a) el elipsoide $4x^2 + y^2 + 16z^2 = 16$.

b) la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 7$.

c) paraboloides elíptico $z = 2x^2 + y^2 + 1$, el plano $x + y = 1$ y los planos coordenados.

d) $az = y^2, x^2 + y^2 = b^2, z = 0$.

e) $z = x^2 + y^2, y = x^2, y = 1, z = 0.$

f) $x^2 + y^2 = 2ax, z = \alpha x, z = \beta x, \alpha > \beta.$

g) $2az = x^2 + y^2, x^2 + y^2 - z^2 = a^2, z = 0.$

h) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$

i) $z = x + y, xy = 1, xy = 2, y = x, y = 2x, z = 0, x > 0, y > 0.$

j) $z = 2 - x - 2y, x = 0, y = 0, z = 0.$

k) por el paraboloide $x^2 + 4y^2 + z = 4$ y el plano $xy.$

l) $z = 1 - x^2 - y^2, \text{ el plano } z = 1 - y, z = 0, x = 0, y = 0.$

m) $y^2 = 4a^2 - 3ax, y^2 = ax, z = \pm h.$

n) la parte del cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$ comprendida entre el paraboloide $x^2 + y^2 = 2az$ y el plano $xy.$

o) la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y el cono $z^2 = x^2 + y^2$ (parte exterior respecto al cono).

p) la superficie $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}.$

q) las superficies $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, z \geq 0.$

130. Calcular el volumen de los cuerpos limitados por las superficies dadas, efectuando integración triple:

a) Por los cilindros $z = 4 - y^2, z = y^2 + 2$ y por los planos $x = -1, x = 2.$

b) Por los paraboloides $z = x^2 + y^2, z = x^2 + 2y^2$ y los planos $y = x, y = 2x, x = 1.$

c) Por los paraboloides $z = x^2 + y^2, z = 2x^2 + 2y^2,$ el cilindro $y = x^2$ y el plano $y = x.$

d) Por los cilindros $z = \ln(x + 2), z = \ln(6 - x)$ y los planos $x = 0, x + y = 2, x - y = 2.$

e) Por el paraboloide $(x - 1)^2 + y^2 = z$ y el plano $2x + z = 2.$

f) Por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = x + y.$

g) Por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y el paraboloide $x^2 + y^2 = 3z.$

h) Por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y el paraboloide $x^2 + y^2 = a(a - 2z), z \geq 0.$

i) Por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el cono $z^2 = xy.$

j) Por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4az - 3a^2$ y el cono $z^2 = 4(x^2 + y^2)$ (tomando en cuenta la parte de la esfera dentro del cono).

k) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3x,$ o bien $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3z.$

l) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = axyz.$

m) $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^2z^4.$

$$\text{n) } (x^2 + y^2 + z^2)^3 = \frac{a^6 z^2}{x^2 + y^2}.$$

$$\text{o) } (x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^2(x^2 + y^2)^2.$$

$$\text{p) } (x^2 + y^2)^2 + z^4 = a^3 z.$$

$$\text{q) } x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 + z^2 = 16, z^2 = x^2 + y^2, x = 0, y = 0, z = 0, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$$

1.11.11 Centro de gravedad, masa, momentos de inercia

131. Calcular el momento de inercia de un cilindro de radio a y masa m , si su densidad en cada punto es proporcional a la distancia de ese punto del eje del cilindro.
132. El tallo de una seta es un cilindro recto de revolución de diámetro 1 y longitud 2 y su cabeza es un hemisferio de radio a . Si la seta es un sólido homogéneo con simetría axial y su centro de gravedad está situado en el plano en el que el tallo se une a la cabeza, calcular a .
133. Hallar la masa m del paralelepípedo rectangular $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c$, si la densidad en el punto (x, y, z) en $\rho(x, y, z) = x + y + z$.
134. Del octante de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq c^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$, se ha cortado la región limitada por los planos coordenados y por el plano $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, a \leq c, b \leq c$. Determinar la masa de este cuerpo, si su densidad en cada punto (x, y, z) vale z .
135. En el cuerpo de forma semiesférica $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, z \geq 0$, la densidad varía proporcionalmente a la distancia del centro. Determinar el centro de gravedad de este cuerpo.
136. Hallar el centro de gravedad del cuerpo limitado por el paraboloido $y^2 + 2z^2 = 4x$ y por el plano $x = 2$.
137. Hallar el momento de inercia del cilindro circular que tiene por altura h y por radio de la base a , con respecto al eje que sirve de diámetro de la base del propio cilindro.
138. Hallar el momento de inercia del cono circular, que tiene por altura h , por radio de la base a y densidad ρ , con respecto al diámetro de su base.
139. Demostrar que los momentos de inercia respecto a los ejes coordenados son:

$$I_x = I_{xy} + I_{xz}; \quad I_y = I_{yx} + I_{yz}; \quad I_z = I_{zx} + I_{zy}.$$

140. Calcular la masa del sólido limitado por dos esferas concéntricas de radio a y $b, 0 < a < b$, si la densidad en cada punto es igual al cuadrado de su distancia al centro.
141. Un cono circular recto homogéneo tiene altura h . Demostrar que la distancia de su centro de gravedad a la base es $\frac{h}{4}$.

142. Determinar el centro de gravedad de un cono de altura h , si su densidad en cada punto es proporcional a la distancia de ese punto a la base.
143. Determinar el centro de gravedad de un cono de altura h , si su densidad en cada punto es proporcional a la distancia del punto al eje del cono.
144. Un sólido está limitado por dos hemisferios superiores concéntricos de radio a y b , siendo $0 < a < b$. Si la densidad es constante, encontrar el centro de gravedad.
145. Determinar el centro de gravedad de un cubo de lado h si su densidad en cada punto es proporcional al cuadrado de la distancia de un punto a un vértice de la base.
146. Un cono recto de revolución tiene altura h , radio de la base a , densidad constante y masa m . Determinar su momento de inercia respecto a un eje paralelo a la base y que pasa por el vértice.
147. Calcular el momento de inercia de una esfera de radio a y masa m respecto a un diámetro, si la densidad es constante.
148. Calcular los volúmenes de las siguientes regiones:
- el cuerpo limitado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y el paraboloido $x^2 + y^2 = 3z$ (la parte interior con respecto al paraboloido)
 - el cuerpo limitado por el plano $z = 0$, el cilindro $x^2 + y^2 = ax$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ (interno con respecto al cilindro).
 - el cuerpo limitado por el paraboloido $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2\frac{x}{a}$ y el plano $x = a$.

1.11.12 Momento de inercia, centro de gravedad en \mathbb{R}^3

149. Determinar los momentos estáticos de los sólidos homogéneos siguientes:
- paralelepípedo recto de aristas a, b, c con respecto a sus caras.
 - cono circular recto (radio de la base a , altura h), con respecto al plano que pasa por el vértice que es paralelo a la base.
 - sólido limitado por el elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ y el plano xy con respecto a este mismo.
150. Determinar los centros de gravedad de los cuerpos homogéneos limitados por las superficies dadas:
- por los planos $x = 0, y = 0, z = 0, x = 2, y = 4, x + y + z = 8$ (paralelepípedo truncado).
 - por el elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ y los planos coordenados.
 - por el cilindro $z = \frac{y^2}{2}$ y los planos $x = 0, y = 0, z = 0$ y $2x + 3y - 12 = 0$.
 - por los cilindros $y = \sqrt{x}, y = 2\sqrt{x}$ y los planos $z = 0, x + z = 6$.

- e) por el paraboloido $z = \frac{x^2 + y^2}{2a}$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$, $z \geq 0$.
- f) por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y el cono $z \tan \alpha = \sqrt{x^2 + y^2}$ (sector esférico).
151. Determinar los momentos de inercia de los cuerpos homogéneos siguientes, cuya masa es m .
- El paralelepípedo recto, de aristas a , b , c con respecto a cada una de las mismas y con respecto al centro de gravedad.
 - De la esfera respecto a la recta tangente.
 - Del elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ con respecto a sus ejes.
 - De la parte entre las esferas concéntricas cuyo radio exterior es igual a a y el interior es r , respecto al diámetro.
 - Del paraboloido de revolución (radio a , altura h), con respecto al eje que pasa por su centro de gravedad y es perpendicular al eje de revolución (momento ecuatorial).
152. El cuerpo limitado por dos superficies esféricas concéntricas cuyos radios son a y b , $b > a$, tiene una densidad inversamente proporcional a la distancia al centro de las esferas, con densidad γ a la distancia unidad. Calcular la masa del cuerpo.
153. Calcular la masa del cuerpo limitado por un cilindro circular recto de radio a y altura h , si su densidad en cualquier punto es igual al cuadrado de la distancia del punto al centro de la base.
154. Calcular la masa del cuerpo limitado por un cono circular cuya altura es igual a h y el ángulo formado por el eje y la generatriz es igual a α . La densidad es proporcional a la potencia $n > 0$, de la distancia desde el plano trazado por el vértice del cono paralelamente a la base, valiendo γ a la distancia unidad.
155. Calcular la masa de una esfera de radio a , si su densidad es proporcional al cubo de la distancia al origen y vale γ a la distancia unidad.
156. Determinar la masa del cuerpo limitado por el paraboloido $x^2 + y^2 = 2az$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$, $z > 0$, si la densidad en cada punto es igual a la suma de los cuadrados de coordenadas.
157. La densidad de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az$ es igual al cuadrado de la distancia al origen. Determinar el centro de gravedad de la esfera.
158. Determinar el momento estático de la parte común de las esferas $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ y $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az$ respecto al plano xy , si la densidad es igual a la distancia entre el punto y el plano xy .
159. Demostrar que le momento de inercia de un cuerpo respecto a cualquier eje ℓ es igual $md^2 + I_c$, donde m es la masa del cuerpo, d es la distancia del eje al centro de gravedad, I_c es el momento de inercia con

respecto al eje que es paralelo al eje dado y que pasa por el centro de gravedad del cuerpo. (Teorema de Steiner).

1.11.13 Aplicaciones a la gravedad

160. Hallar la atracción que ejerce el cono homogéneo, de altura h y ángulo en el vértice α (en la sección axial), sobre un objeto material que tenga masa m y que está situado en su vértice.
161. Demostrar que la atracción que ejerce una esfera homogénea sobre un punto material exterior a ella no varía, si toda la masa de la esfera se concentra en su centro.
162. Demostrar que la fuerza de interacción entre dos esferas homogéneas no varía si las masas de las esferas estuvieran concentradas en sus centros.
163. Consideramos una esfera sólida heterogénea $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, donde la densidad varía de acuerdo con $\delta(x, y, z) = \lambda z^2$. Calcular la fuerza con la cual atrae un punto material de masa m , si se sitúa sobre el eje z a una distancia igual a $2R$ del centro de la esfera.
164. Se considera un sólido homogéneo limitado por un cilindro circular recto, radio de la base R y altura h y densidad γ . Determinar la fuerza sobre el punto de masa m situado en el centro de la base del cilindro.
165. Se considera una esfera sólida heterogénea de radio R , cuya densidad γ está dada por $\gamma = a - b\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, con $a > 0, b > 0$.
- Determinar las constantes a y b , si la densidad media de la esfera es γ_m y la densidad sobre la superficie de la esfera es γ_0 .
 - Calcular la fuerza de atracción ejercida por la esfera en un punto m situado sobre la superficie de la esfera.
166. Se considera un cuerpo homogéneo limitado por dos esferas concéntricas (capa esférica). Demostrar que la atracción que ejerce esta capa sobre una masa m situada dentro de la cavidad del cuerpo, es nula.

1.11.14 Ejercicios especiales

167. Sea $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1, x \leq z \leq y\}$, $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, demostrar
$$\iiint_V f(x)f(y)f(z)dx dy dz = \frac{1}{6} \left(\int_0^1 f(t)dt \right)^3.$$
168. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ y sean $f, g, h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ aplicaciones continuas. Estudiar la integral:

$$\iiint_{[a,b]^3} \begin{vmatrix} f(x) & f(y) & f(z) \\ g(x) & g(y) & g(z) \\ h(x) & h(y) & h(z) \end{vmatrix}^2 dx dy dz,$$

para probar que:

$$\left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b gh\right)^2 + \left(\int_a^b g^2\right)\left(\int_a^b fh\right)^2 + \int_a^b h^2\left(\int_a^b fg\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right)\left(\int_a^b h^2\right) + 2\left(\int_a^b fg\right)\left(\int_a^b fh\right)\left(\int_a^b gh\right).$$

169. a) Demostrar que $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^+, a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$.

b) Sean $f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ funciones continuas, demostrar que:

$$\iiint_{[0,1]^3} [(f(x)g(y)g(z))^3 + (f(y)g(z)g(x))^3 + (f(z)g(x)g(y))^3 - 3f(x)f(y)f(z)g^2(x)g^2(y)g^2(z)] dx dy dz \geq 0.$$

c) Deducir que si ϕ, ψ son aplicaciones continuas en $[0, 1]$, con valor en \mathbb{R}^+ ,

$$\int_0^1 \phi(x)\psi(x)dx \leq \left(\int_0^1 (\phi(x))^3 dx\right)^{\frac{1}{3}} \left(\int_0^1 (\psi(x))^{\frac{3}{2}} dx\right)^{\frac{2}{3}}.$$

170. a) Calcular $\iiint_V \frac{dx dy dz}{(1+x^2z^2)(1+y^2z^2)}$, si $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, z \geq 0\}$.

b) Deducir el valor de $\int_0^\infty \left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2 dt$.

1.11.15 Integrales múltiples

171. Designemos con $S_n(a) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / |x_1| + \dots + |x_n| \leq a\}$, con $a \geq 0$. Cuando $n = 2$, el conjunto es un cuadrado con vértices en $(0, \pm a)$ y $(\pm a, 0)$. Cuando $n = 3$ es un octaedro con vértices en $(0, 0, \pm a)$, $(0, \pm a, 0)$, $(\pm a, 0, 0)$. Denotemos $V_n(a)$ el volumen de $V_n(a)$ dado por $V_n(a) =$

$$\int_{S_n(a)} \dots \int dx_1 \dots dx_n.$$

a) Demostrar que $V_n(a) = a^n V_n(1)$.

b) Para $n \geq 2$, expresar la integral que da $V_n(1)$ como una iteración de una integral unidimensional y una integral $(n-1)$ -múltiple y demostrar que:

$$V_n(1) = V_{n-1}(1) \int_{-1}^1 (1 - |x|)^{n-1} dx = \frac{2}{n} V_{n-1}(1).$$

c) Usando a) y b) deducir que $V_n(a) = \frac{2^n a^n}{n!}$.

172. Sea $S_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / |x_i| + |x_n| \leq a, i = 1, \dots, n-1\}$, siendo $a > 0$ y $n \geq 2$.

a) Dibujar $S_n(1)$, cuando $n = 2$ y cuando $n = 3$.

b) Denotamos $V_n(a) = \int_{S_n(a)} \dots \int dx_1 \dots dx_n$, demostrar que $V_n(a) = a^n V_n(1)$.

$$\begin{aligned} \text{b)} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \operatorname{sen} mx \, dx, \alpha > 0, \beta > 0 & \quad \text{e)} \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{\operatorname{sen} \beta x}{x} \, dx, \alpha \geq 0. \\ \text{c)} \int_0^{\infty} \frac{\arctan \alpha x}{x(1+x^2)} \, dx & \end{aligned}$$

181. Determinar el dominio de la función $f(x) = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{x^2 + z^2}}$.

182. Calcular la curvatura de la curva $y = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} \alpha x}{\alpha} d\alpha$ en el punto en que $x = 1$.

183. Usando la igualdad $\int_0^b \frac{dx}{1+ax} = \frac{1}{a} \ln(1+ab)$, obtener la fórmula siguiente derivando respecto al parámetro:

$$\int_0^b \frac{x \, dx}{(1+ax)^2} = \frac{1}{a^2} \ln(1+ab) - \frac{b}{a(1+ab)}.$$

184. a) Usando la igualdad $\int_0^b \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{b}{a}$, obtener $\int_0^b \frac{dx}{(x^2+a^2)^3}$.

b) Usando la igualdad $\int_0^{\infty} \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{2a}$, calcular la integral $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

185. Calcular el valor de la integral $\int_0^{\infty} e^{-ax} x^{n-1} \, dx$, $a > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$.

186. Usando la igualdad $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \operatorname{sen}^2 x} = \frac{\pi}{2|ab|}$, determinar $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(a^2 \cos^2 x + b^2 \operatorname{sen}^2 x)^2}$.

187. Calcular las siguientes integrales derivando respecto al parámetro.

a) $\int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-ax}}{x e^x} \, dx$, $a > -1$.

b) $\int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-ax^2}}{x e^{x^2}} \, dx$, $a > -1$.

c) $\int_0^1 \frac{\arctan ax}{x\sqrt{1-x^2}} \, dx$.

d) $\int_0^1 \frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}} \, dx$, $a^2 < 1$.

e) $\int_0^{\infty} \frac{\arctan ax}{x(1+x^2)} \, dx$.

f) $\int_0^1 \frac{\ln(1-a^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$, $a^2 < 1$.

g) $\int_0^{\pi} \frac{\ln(1+a \cos x)}{\cos x} \, dx$, $a^2 < 1$.

h) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \left(\frac{1+a \operatorname{sen} x}{1-a \operatorname{sen} x} \right) \frac{dx}{\operatorname{sen} x}$, $a^2 < 1$.

i) $\int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-ax^2}}{x^2} \, dx$, $a > 0$.

j) $\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2} \, dx$, $a > 0$, $b > 0$.

k) $\int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\operatorname{sen} bx - \operatorname{sen} cx}{x} \, dx$, $a > 0$.

l) $\int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\cos bx - \cos cx}{x} \, dx$, $a > 0$.

m) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 \cos^2 x + b^2 \operatorname{sen}^2 x) \, dx$, $a > 0$, $b > 0$.

188. Calcular la integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctan(a \tan x)}{\tan x} \, dx$, para luego determinar $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan x} \, dx$.

189. Usar la igualdad $\int_0^1 x^n \, dx = \frac{1}{n+1}$, para calcular la integral $\int_0^1 \frac{x^\beta - x^\alpha}{\ln x} \, dx$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$.

190. Usando que $2a \int_0^\infty e^{-a^2 x^2} dx = \sqrt{\pi}$, calcular la integral $\int_0^\infty \left(e^{-\frac{a^2}{x^2}} - e^{-\frac{b^2}{x^2}} \right) dx$.

191. Dada la relación $\int_0^\infty e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, usarla para deducir $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-z^2 x} dx$. Usar los resultados para calcular las integrales de Fresnel.

$$\text{a) } \int_0^\infty \frac{\cos x dx}{\sqrt{x}} \qquad \text{b) } \int_0^\infty \frac{\text{sen } x}{\sqrt{x}} dx.$$

192. Sea f una función continua para $x \geq 0$, tal que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \ell$, entonces si $a > 0, b > 0$:

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = (\ell - f(0)) \ln \frac{a}{b}.$$

Usar este resultado en los siguientes casos:

$$\text{a) } \int_0^\infty \frac{\arctan ax - \arctan bx}{x} dx \qquad \text{b) } \int_0^\infty \frac{e^{-ax^n} - e^{-bx^n}}{x} dx, (n > 0).$$

193. Sea f una función continua para $x \geq 0$, tal que $\int_A^\infty \frac{f(x)}{x} dx$ converge, para todo $A > 0$. Probar que si $a > 0, b > 0$, se tiene que $\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a}$.

Usar este resultado en los siguientes casos:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx & \text{b) } \int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx \\ \text{c) } \int_0^\infty \frac{\text{sen } ax \text{sen } bx}{x} dx & \text{d) } \int_0^\infty \frac{b \text{sen } ax - a \text{sen } bx}{x^2} dx \\ \text{e) } \int_0^\infty \frac{\text{sen}^3 x}{x^2} dx. & \end{array}$$

194. Verificar que la función de Laplace $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$, satisface las siguientes relaciones:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \int_0^x \Phi(az) dz = \frac{e^{-a^2 x^2} - 1}{a\sqrt{\pi}} + x\Phi(ax). \\ \text{b) } \int_0^\infty (1 - \Phi(x)) dx = \frac{1}{\sqrt{x}}. \end{array}$$

195. Las funciones $\text{si}(x)$ y $\text{ci}(x)$ se definen por $\text{si}(x) = - \int_x^\infty \frac{\text{sen } t}{t} dt$ (seno integral) y por $\text{ci}(x) = - \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt$ (coseno integral). Demostrar que $\int_0^\infty \text{sen } x \text{si}(x) dx = - \int_0^\infty \cos x \text{ci}(x) dx = \frac{\pi}{4}$.

196. La función de Bessel de orden cero es $J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \text{sen } \theta) d\theta$. Demostrar que:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \int_0^\infty e^{-ax} J_0(x) dx = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}, a > 0. \\ \text{b) } \int_0^\infty \frac{\text{sen } ax}{x} J_0(x) dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } a \geq 1 \\ \arcsen a & \text{si } |a| \leq 1 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } a \leq -1. \end{cases} \end{array}$$

197. Verificar que las siguientes funciones satisfacen las ecuaciones diferenciales dadas:

a) $f(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-xz}}{1+z^2} dz, y'' + y = \frac{1}{x}.$

b) $f(x) = \int_{-1}^1 (z^2 - 1)^{n-1} e^{xz} dz, xy'' + 2ny' - xy = 0.$

c) $f(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-xz}}{(1+z^2)^{n+1}} dz, xy'' - 2ny' + xy = 1.$

d) $J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \operatorname{sen} \theta) d\theta, y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0.$

1.11.17 Integrales impropias

198. Calcular las siguientes integrales impropias.

a) $\int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} e^{-(x+y)} dy \right) dx$

b) $\int_0^1 \left(\int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}} dx \right) dy$

c) $\iint_S \frac{dx dy}{x^4 + y^2}, S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 1, y \geq x^2\}$

d) $\int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} \frac{dy}{(x^2 + y^2 + a^2)^2} \right) dx, a > 0$

e) $\int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} \frac{dz}{(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^2} \right) dy \right) dx.$

199. Determinar la convergencia de las siguientes integrales dobles impropias.

a) $\iint_S \ln \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, S$ es el círculo $x^2 + y^2 \leq 1.$

b) $\iint_S \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^\alpha}, S$ es la parte exterior del círculo de radio 1 con centro $(0, 0).$

c) $\iint_S \frac{dx dy}{\sqrt[3]{(x-y)^2}}, S$ es el cuadrado $|x| \leq 1, |y| \leq 1.$

d) $\iiint_V \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^\alpha}, V$ es la parte exterior de la esfera de centro $(0, 0, 0)$ y radio 1.

200. Calcular las siguientes integrales dobles impropias.

a) $\iint_S \frac{1}{x-y} dx dy, S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1\}.$

b) $\iint_S \frac{1}{\sqrt{xy}} dx dy, S = [0, 1] \times [0, 1].$

c) $\iint_S \frac{1}{\sqrt{|x-y|}} dx dy, S = [0, 1] \times [0, 1].$

d) $\iint_S \frac{x}{y} dx dy, S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \leq x \leq 2y, 0 \leq y \leq 1\}.$

e) $\iint_S \log x \, dx \, dy$, $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq e^y, 0 \leq y \leq 1\}$.

201. a) Indicar la manera de colocar los límites de integración, de la integral doble $\iint_S f(x, y) \, dx \, dy$, si S es la región no acotada $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x), x \geq a\}$, donde $\phi_1 \leq \phi_2$, si $x \geq a$.

b) Evaluar $\iint_S xy e^{-(x^2+y^2)} \, dx \, dy$, $S = [0, +\infty[\times [0, 1]$.

c) Evaluar $\iint_S e^{-xy} \, dx \, dy$, $S = [0, +\infty[\times [1, 2]$. Suponga que el teorema de Fubini se cumple y probar que $\int_0^\infty \frac{e^x - e^{-2x}}{x} \, dx = \ln 2$.

202. Calcular las integrales impropias siguientes:

a) $\int_0^1 \left(\int_0^a \frac{x}{\sqrt{a^2 - y^2}} \, dy \right) dx$

b) $\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x+y}{x^2 + 2xy + y^2} \, dx \right) dy$.

203. Analizar la convergencia de las integrales dobles siguientes:

a) $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{\operatorname{sen}^2(x-y)}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \, dx \, dy$

b) $\int_0^1 \left(\int_0^x \frac{e^{x^2+y^2}}{x-y} \, dy \right) dx$.

204. a) Calcular la integral impropia $\iiint_V \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{z + (x^2 + y^2 + z^2)^2}} \, dx \, dy \, dz$, donde V es el primer octante de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

b) Determinar la existencia de la integral impropia $\iint_S x^{-\frac{3}{2}} e^{y-x} \, dx \, dy$, sobre el conjunto $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq y \leq x, x \geq 0\}$.

c) Calcular $\iiint_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$, con $f(x, y, z) = \frac{1}{(1 + (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}})^{\frac{3}{2}}}$.

d) Calcular $\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dx \, dy}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

e) Calcular $\iiint_V \frac{dx \, dy \, dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$, donde V es la región exterior a la esfera de centro $(0, 0, 0)$ y radio 1.

205. En cada uno de los siguientes casos, calcular la integral impropia o probar la divergencia.

a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx \, dy}{1 + x^2 + y^2}$.

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx \, dy}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

c) $\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{dx \, dy}{(x^2 + y^2 + a^2)^2}$.

d) $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|-|y|} \, dx \, dy$.

e) $\int_0^\infty \int_0^\infty (x+y) e^{-(x+y)} \, dx \, dy$.

f) $\int_0^\infty \int_0^\infty xy e^{-x^2-y^2} \, dx \, dy$.

$$g) \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+2xy \cos \alpha+y^2)} dx dy.$$

$$h) \int_0^{\infty} \left(\int_x^{\infty} e^{-y^2} dy \right) dx.$$

$$i) \int_0^{\infty} \left(\int_x^{\infty} x e^{-y} \frac{\operatorname{sen} y}{y^2} dy \right) dx.$$

206. Determinar la convergencia de las siguientes integrales impropias, usando coordenadas polares sobre el círculo de centro $(0, 0)$ y radio a , que denotamos D .

$$a) \iint_D \ln \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$$

$$b) \iint_D \frac{e^{-x^2-y^2}}{x^2 + y^2} dx dy.$$

$$c) \iint_D \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy.$$

$$d) \iint_D \frac{\cos(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} dx dy.$$

207. Determinar la existencia de un número m tal que $\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^m}$ sea convergente.

208. Calcular las siguientes integrales impropias.

$$a) \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{dx dy dz}{\sqrt{(1+z+y+x)^7}}.$$

$$b) \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{xy dx dy dz}{(1+x^2+y^2+z^2)^3}.$$

$$c) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2-z^2} dx dy dz.$$

209. Determinar la convergencia de las integrales impropias tomadas sobre la esfera V de radio a y centro $(0, 0, 0)$.

$$a) \iiint_V \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} \ln \sqrt[3]{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

$$b) \iiint_V \frac{\ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz.$$

$$c) \iiint_V \frac{xyz}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} dx dy dz.$$

$$d) \iiint_V \ln(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz.$$

210. Calcular el volumen de los siguientes sólidos:

a) el sólido limitado por la superficie $z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ y el plano $z = 0$.

b) el sólido limitado por la superficie $z = x^2 y^2 e^{-(x^2+y^2)}$ y el plano $z = 0$.

c) el sólido limitado por la superficie $z = x e^{-(x^2+y^2)}$ y el plano $z = 0$, con $z \geq 0$.

Capítulo 2

Integrales de línea

2.1 Curvas en \mathbb{R}^n

Sea $r(t)$ una función continua de $[a, b]$ en \mathbb{R}^n , cuando t recorre $[a, b]$ los puntos especificados por la función $r(t)$ describen un conjunto de puntos en \mathbb{R}^n , que llamamos trayectoria de la función vectorial $r(t)$.

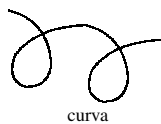
Definición 2.1.1 Sea $r = (r_1, \dots, r_n)$ una función vectorial continua definida en el intervalo $[a, b]$. La imagen originada por r se dice que es la curva determinada por r y que une los puntos $r(a)$ y $r(b)$.

Si $r(a) = r(b)$, la curva se dice cerrada.

Si r es uno a uno en $[a, b]$, la curva se dice simple. Si r es uno a uno en el intervalo $[a, b]$ y $r(a) = r(b)$ se llama curva simple cerrada o curva de Jordan.

Si r es constante en $[a, b]$, la curva se dice curva punto.

Observación Funciones distintas pueden representar la misma curva. Así, se dice que Γ es una curva simple, cuando existe al menos una función r , continua uno a uno en algún intervalo $[a, b]$ tal que Γ es la imagen de $[a, b]$ por r .



Dada una función vectorial $r(t)$ se puede construir una nueva función vectorial definida sobre $[c, d]$ por $u(\tau) = r(\lambda(\tau)) = (r_1(\lambda(\tau)), \dots, r_n(\lambda(\tau)))$, donde $\lambda: [c, d] \rightarrow [a, b]$ es una función real estrictamente monótona biyectiva. Es claro que u especifica la misma trayectoria Γ que r y que el orden de sus puntos inducidos por los parámetros t y τ son el mismo si λ es estrictamente creciente y en sentido opuesto si λ es estrictamente decreciente. Así, para diferentes funciones continuas estrictamente monótonas,

corresponden diferentes representaciones paramétricas de la misma curva continua Γ .

Las funciones $\mathbf{r}(\tau)$ pueden dividirse en dos clases: la clase de funciones estrictamente creciente y la clase de funciones estrictamente decreciente. La primera clase especifica el orden de los puntos de Γ y la segunda clase el orden de los puntos de Γ en sentido opuesto. Así podemos denotar por Γ_+ la curva orientada con ayuda del parámetro t . Γ_+ también determina todas las posibles funciones λ estrictamente crecientes. Es clara que en este caso debe tenerse $\lambda(c) = a$ y $\lambda(d) = b$. La misma curva Γ con orientación opuesta se denota Γ_- . La curva orientada Γ_- se especifica por la clase de todas las funciones λ estrictamente decrecientes.

Nota Cuando \mathbf{r} y \mathbf{u} describen curvas cerradas, se requiere que $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b) = \mathbf{u}(c) = \mathbf{u}(d)$.

Dos funciones de la misma clase (o equivalentes) describen la misma curva. El recíproco es cierto para aquellas funciones que describen curvas simples.

Proposición 2.1.1 *Las funciones vectoriales \mathbf{r} y \mathbf{u} que describen curvas simples son equivalentes, si describen la misma curva y recíprocamente.*

Demostración Claramente las funciones equivalentes describen necesariamente la misma curva. La dificultad radica en la demostración del recíproco.

Sea \mathbf{r} definida en $[a, b]$ y \mathbf{u} definida en $[c, d]$ y supongamos que ambas funciones describen la misma curva simple Γ . Puesto que \mathbf{u} es uno a uno y continua en el compacto $[c, d]$, existe \mathbf{u}^{-1} y es continua en $\mathbf{u}([c, d]) = \mathbf{r}([a, b]) = \Gamma$. Sea $\lambda(t) = \mathbf{u}^{-1}(\mathbf{r}(t))$ para $t \in [a, b]$, entonces λ es continua y $\mathbf{r}(t) = \mathbf{u}(\lambda(t))$. Queda por demostrar que λ es estrictamente monótona en $[a, b]$. Ya que \mathbf{r} y \mathbf{u}^{-1} son uno a uno, lo mismo ocurre con λ . Para precisar supongamos que $\lambda(a) < \lambda(b)$ y debemos demostrar que λ es estrictamente creciente en $[a, b]$ y que $\lambda(a) = c$, $\lambda(b) = d$.

Si $a < t_1 < t_2 < b \implies \lambda(t_1) \neq \lambda(t_2)$. Supongamos que $\lambda(t_1) > \lambda(t_2)$; si $\lambda(a) < \lambda(t_2)$ en el intervalo $[a, t_1]$ todos los valores entre $\lambda(a)$ y $\lambda(t_1)$ serán tomados por algún valor t y en particular $\lambda(t_2)$ i.e. existe $t_o \in [a, t_1]$ tal que $\lambda(t_o) = \lambda(t_2)$, lo que contradice la biyectividad. Si $\lambda(a) > \lambda(t_2)$, entonces $\lambda(a)$ es tomado por un valor en $[t_2, b]$, lo que no puede ser. Así $\lambda(t_1) < \lambda(t_2)$, o sea λ es estrictamente creciente en $]a, b[$ [por la continuidad de λ en $[a, b]$. De la definición de λ , $\lambda(a) = c$ y $\lambda(b) = d$; por lo tanto \mathbf{r} y \mathbf{u} son equivalentes.

Definición 2.1.2 *Una curva Γ se dice regular sobre $[a, b]$ (resp. $]a, b[$) si admite una representación paramétrica (parametrización), con ayuda de una función vectorial $\mathbf{r}(t)$ con derivada continua¹*

¹Se define la derivada de una función vectorial $\mathbf{r}(t)$ por $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h} = \mathbf{r}'(t) = (r'_1(t), \dots, r'_n(t))$.

en $[a, b]$ (resp. $]a, b[$), de modo que $r'(t) \neq \mathbf{0}$, en $[a, b]$ (resp. $]a, b[$), o lo que es equivalente, las componentes $r'_i(t)$ sobre $[a, b]$ (resp. $]a, b[$) no se anulan simultáneamente.

Esta última propiedad es equivalente al hecho $\|r'(t)\|^2 = \sum_{i=1}^n (r'_i(t))^2 > 0, \forall t \in [a, b]$ (resp. $]a, b[$). En esta última formulación, la continuidad de $r(t)$ en los puntos finales a y b es unilateral, lo mismo que para la derivada $r'(t)$.

Definición 2.1.3 Se dice que τ es un parámetro admisible para la curva regular Γ representada por $r(t)$, si está conectado con t por medio de una función λ , la cual no sólo es estrictamente monótona y continua sino que tiene derivada continua diferente de cero en $[c, d]$ (resp. $]c, d[$). En este caso

$$\sum_{i=1}^n \beta'_i(\tau)^2 = \lambda'(\tau)^2 \sum_{i=1}^n r'_i(\tau)^2 > 0.$$

Observación En particular, en el caso 2-dimensional una curva regular está determinada por dos ecuaciones:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in]a, b[, \quad (1)$$

donde φ y ψ tienen derivadas continuas que no valen cero simultáneamente. Si $\varphi'(t_0) \neq 0$ existe un intervalo $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$ sobre el cual φ tiene una inversa $t = \varphi^{-1}(x)$ y $y = f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x))$. En este caso decimos que la función $y = f(x)$ se especifica paramétricamente por las ecuaciones (1).

Definición 2.1.4 Se dice que Γ es una curva regular a trozos sobre $[a, b]$ (resp. $]a, b[$) si puede ser representada por una función vectorial $r(t)$ sobre $[a, b]$ (resp. $]a, b[$), tal que el intervalo cerrado $[a, b]$ (resp. abierto $]a, b[$) se puede particionar por medio de una división $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, de modo que $r(t)$ es una curva regular sobre cada uno de los intervalos $[a, t_1]$ (resp. $]a, t_1[$), $[t_1, t_2], \dots, [t_{n-1}, b]$ (resp. $]t_{n-1}, b[$).

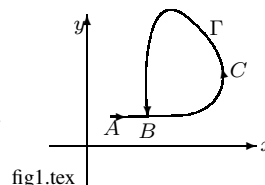
Nota Es importante señalar que en general en un punto de la división t_k , ($k = 1, \dots, n-1$), la derivada izquierda $r'(t_k^-)$ puede ser diferente de la derivada derecha $r'(t_k^+)$, pero ambas derivadas son diferentes de cero.

La curva $x = \cos \theta, y = \sin \theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi$, es un ejemplo de una curva cerrada que no se interseca así misma.

Es posible definir dos funciones $x = \varphi(t), y = \psi(t), 0 \leq t \leq 1$, continuas en un intervalo $[0, 1]$, tales que cuando el parámetro varía de $t = 0$ a $t = 1$, el punto variable $(\varphi(t), \psi(t))$ que sale de $(0, 0)$ en $t = 0$, recorre todos los puntos del cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ y llega a la esquina derecha superior $(1, 1)$ para $t = 1$. Esta curva conocida como curva de Peano literalmente pasa por cada punto del cuadrado

$$0 \leq x, y \leq 1.$$

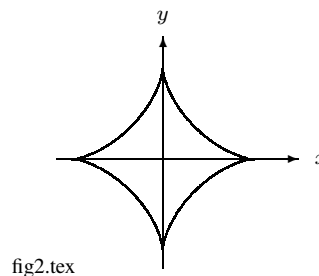
En la siguiente figura tenemos la curva Γ que se representa por funciones continuamente diferenciables $x = \varphi(t), y = \psi(t), \varphi'^2 + \psi'^2 > 0, 0 < t < 1$. Cuando t crece continuamente en el intervalo $]0, 1[$, el punto (x, y) se mueve a lo largo de Γ desde A pasando por B y C hasta llegar a B , cuando $t \rightarrow 1$.



Se observa que en el punto B la curva Γ tiene una singularidad en el sentido que la parte de Γ dentro de un rectángulo de centro B , no puede proyectarse uno a uno sobre cualquiera de los ejes de coordenados. Si una curva Γ es no deficiente en este sentido, es decir que cada punto puede ser cubierto con un rectángulo Δ con lados paralelos a los ejes tales que $\Gamma \cap \Delta$, se proyecta uno a uno sobre alguno de los ejes coordenados, Γ se llama una variedad diferenciable 1-dimensional.

Ejemplo 2.1.1 El asteroide Γ determinado por la ecuación $|ax|^{2/3} + |by|^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}, 0 < b < a$, es una curva cerrada regular continua, pues la ecuación es equivalente a las ecuaciones paramétricas $x = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 \theta, y = \frac{a^2 - b^2}{b} \sen^3 \theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ y porque existe sólo un par de valores de θ ($\theta = 0, \theta = 2\pi$), para los cuales son uno y el mismo punto de Γ .

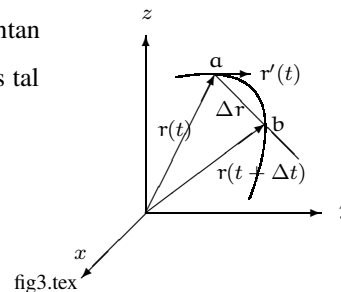
Se observa que la ecuación es simétrica respecto a los ejes coordenados e indica que es continua. Las derivadas $x'(\theta), y'(\theta)$ son continuas y se anulan sólo en los puntos $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$, por lo que las partes de Γ correspondientes a los intervalos $]0, \frac{\pi}{2}[,]\frac{\pi}{2}, \pi[,]\pi, \frac{3\pi}{2}[,]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$ son regulares.



2.1.1 Interpretación geométrica de la derivada de una función vectorial

Sea $r(t) = (r_1(t), r_2(t), r_3(t))$ una función vectorial regular con $t \in [a, b]$. Consideremos dos puntos $a = r(a)$ y $b = r(b)$ que representan los vectores $r(t)$ y $r(t + \Delta t)$. El vector $\Delta r = r(t + \Delta t) - r(t)$ es tal que cuando $\Delta t \rightarrow 0$, b tiende a a y $\frac{\Delta r}{\Delta t}$ tiende a $r'(t)$, es decir:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = r'(t),$$



que es diferente de $\mathbf{0}$ y tiende a la tangente que pasa por a . Si t es el tiempo y $r(t)$ describe el movimiento de una partícula a lo largo de la curva, $r'(t)$ representa la velocidad. La norma $\|r'(t)\|$ es el valor absoluto de la velocidad (rapidez). Además $r''(t)$ es la aceleración en t .

Una función vectorial $\mathbf{r}(t)$, donde $\|\mathbf{r}(t)\| > 0$ para todo t , puede escribirse de la forma $\mathbf{r} = \alpha\omega$, donde:

$$\omega(t) = \frac{\mathbf{r}(t)}{\|\mathbf{r}(t)\|} = \left(\frac{r_1(t)}{\|\mathbf{r}(t)\|}, \frac{r_2(t)}{\|\mathbf{r}(t)\|}, \frac{r_3(t)}{\|\mathbf{r}(t)\|} \right)$$

$$\alpha(t) = \|\mathbf{r}(t)\| = \sqrt{r_1(t)^2 + r_2(t)^2 + r_3(t)^2}.$$

Además $\mathbf{r}'(t) = \alpha'(t)\omega(t) + \alpha(t)\omega'(t)$. La primera componente $\alpha'(t)\omega(t)$ es el cociente de cambio de la longitud de \mathbf{r} y el segundo término $\alpha(t)\frac{d\omega}{dt}$ es ortogonal a ω . Este resultado es usado en mecánica para descomponer la velocidad en dos componentes: una en la dirección del movimiento y la otra perpendicular a esta.

Definición 2.1.5 Una aplicación $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}$, con $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto se denomina campo escalar o función escalar.

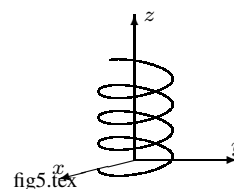
Definición 2.1.6 Un campo vectorial en $S \subset \mathbb{R}^n$ es una función $f: S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, que asigna a cada x en su dominio S , un vector $f(x)$.

Definición 2.1.7 Un campo vectorial f definido sobre un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ se dice campo gradiente si existe un campo escalar $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en U , tal que $\nabla\varphi(x) = f(x)$, $\forall x \in U$.

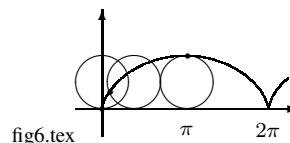
También se dice que f es el gradiente de φ .

Proposición 2.1.2 Sea Γ una curva regular en \mathbb{R}^3 , la recta tangente a Γ en $\mathbf{r}(t_0)$ está dada por $\mathbf{r}(t_0) + \lambda\mathbf{r}'(t_0)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 2.1.2 Sea $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, la curva asociada Γ se le llama hélice. El vector velocidad es $(-\sin t, \cos t, 1)$ y su norma (la rapidez) es $v(t) = \|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{2}$.



Ejemplo 2.1.3 Sea $\mathbf{r}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, la función describe la posición de un punto fijo en un círculo de radio 1 que va rodando, sin resbalar. Esta curva se llama cicloide y su velocidad es $(1 - \cos t, \sin t)$ que se anula en $t = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. La rapidez es $v(t) = \sqrt{2 - 2\cos t}$.



Ejemplo 2.1.4 La ley de gravitación de Newton establece que la fuerza f que ejerce una partícula de masa M sobre otra partícula de masa m , es un vector de magnitud GmM/r^2 , donde G es la constante de gravitación universal y r es la distancia entre las partículas. Situando la masa M en el origen de coordenadas, el vector posición de la partícula m está dada por $\mathbf{r} = (x, y, z)$, entonces $r = \|\mathbf{r}\|$ y $-\mathbf{r}/r$ es un vector unitario con la misma dirección que f , con lo que la ley de Newton toma la forma $f = -GmMr^{-3}\mathbf{r}$.

Las leyes de Newton² muestran que un planeta moviéndose alrededor del sol con una trayectoria $\mathbf{r}(t)$, obedece la ley $m\mathbf{r}''(t) = -\frac{GmM}{\|\mathbf{r}(t)\|^3}\mathbf{r}(t)$ i.e. $m\mathbf{r}'' = -\frac{GmM}{r^3}\mathbf{r}$, donde M es la masa del sol, m la masa del planeta.

Si consideramos que el cuerpo de masa m se mueve con rapidez constante ω en una trayectoria circular de radio r_o , podemos suponer que se mueve en el plano xy , y suprimir la tercera componente $\mathbf{r}(t) = (r_o \cos \frac{t\omega}{r_o}, r_o \sin \frac{t\omega}{r_o})$. Además, se tiene que $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = (-\frac{\omega^2}{r_o} \cos \frac{t\omega}{r_o}, -\frac{\omega^2}{r_o} \sin \frac{t\omega}{r_o}) = -\frac{\omega^2}{r_o}\mathbf{r}(t)$. Así la aceleración va en dirección contraria a $\mathbf{r}(t)$, es decir se dirige hacia el centro del círculo. Esta aceleración multiplicada por m se llama fuerza centrípeta, por lo que $-\frac{\omega^2 m}{r_o}\mathbf{r}(t) = -\frac{GmM}{r_o^3}\mathbf{r}(t)$.

Si T es el periodo de una revolución, entonces $2\pi r_o/T = \omega$ y obtenemos:

$$T^2 = r_o^3 \frac{(2\pi)^2}{GM}.$$

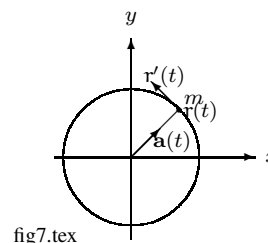


fig7.tex

Así, el cuadrado del periodo es proporcional al cubo del radio. Esta ley es una de las tres famosas leyes

²**Sir Isaac Newton (1643-1727)** Nace en Wolsthorpe, Lincolnshire, Inglaterra. Fue enviado a Cambridge en 1661 y se graduó en 1665. Newton no se distinguió en el primer año de estudios en Cambridge. Pero por fortuna, tuvo la ayuda valiosa de Barrow, distinguido profesor de matemáticas. Barrow quedó impresionado con las aptitudes de Newton y en 1664, lo recomendó para una beca de matemáticas. Gracias a la instrucción de Barrow, tenía un excelente fundamento en la geometría y la óptica. Se familiarizó con la geometría algebraica de Descartes; conocía la óptica de Kepler y estudió la refracción de la luz, la construcción de los telescopios y el pulimento de las lentes.

En 1664 se cerró provisionalmente la Universidad de Cambridge debido a la gran peste (bubónica) y Newton volvió a Woolsthorpe, donde pasó un año y medio, durante ese tiempo hizo tres de sus grandes descubrimientos científicos. El primero fue el binomio de Newton y los elementos del cálculo diferencial, que llamaba fluxiones. Poco después dijo que "había encontrado el método inverso de las fluxiones", es decir el cálculo integral y el método para calcular las superficies encerradas en curvas como la hipérbola, y los volúmenes y de los sólidos. Años más tarde, cuando se publicaron sus hallazgos, hubo cierta duda acerca de si el matemático alemán Leibniz era considerado el creador del cálculo diferencial. Al parecer ambos, independiente y casi simultáneamente, hicieron este notable descubrimiento.

Su segundo gran descubrimiento se relacionó con la Teoría de la Gravitación.

El tercer gran esfuerzo, correspondió a la esfera de la óptica y la refracción de la luz.

A la edad de treinta años fue elegido miembro de la Sociedad Real de Londres, que era el más alto honor para un científico. Para corresponder a este honor, obsequió a la Sociedad el primer telescopio reflector que manufacturó. En 1675 Newton envía un comunicado a la Royal Society sobre la luz. Murió en 1727 en Londres, Inglaterra.

de Kepler³, que dedujo de los datos astronómicos experimentales recogidos por Tycho Brahe⁴ durante 30 años.

Ejemplo 2.1.5 Al considerar dos conductores, uno con carga positiva y otro con carga negativa en el que se instala un potencial eléctrico, $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, el campo eléctrico está dado por $\mathbf{E} = \nabla\varphi$.

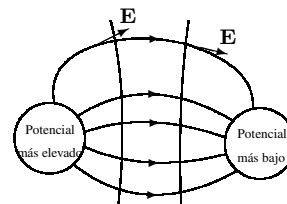


fig8.tex línea de φ constante

Sabemos que \mathbf{E} es perpendicular a las superficies de nivel de φ . Estas superficies de nivel se llaman superficies equipotenciales, pues en ellas el potencial es constante. Las superficies equipotenciales son ortogonales al campo de fuerza eléctrico \mathbf{E} .

En el espacio de tres dimensiones, los conjuntos de nivel φ se llaman superficies equipotenciales. En dos dimensiones se llaman líneas equipotenciales. Si φ es la temperatura, equipotencial se reemplaza por isoterma y si φ es la presión se usa la palabra isobara.

Ejemplo 2.1.6 En electrostática, la fuerza \mathbf{F} de atracción entre dos partículas de cargas opuestas está dado por $\mathbf{F} = k \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3}$ (ley de Coulomb⁵), donde k es una constante y $\mathbf{r} = (x, y, z)$; \mathbf{F} es el gradiente de $-k/\|\mathbf{r}\|$.

³**Johannes Kepler (1571-1639)** Nace el 27 de diciembre de 1571 en Leonberg, Holy Roman Empire (hoy Alemania). Muere el 15 noviembre de 1630 en Rosensburg (hoy Alemania). En Tubinga tuvo el apoyo de un profesor que secretamente le enseñó las ideas de Copérnico, cosa que fue necesario hacer en secreto debido a que sólo la teoría ptoloméica tenía la aprobación oficial. En esta época de la carrera de Kepler, parecía seguro que sería sacerdote, pero por alguna razón desconocida cambio de planes y aceptó el empleo de maestro de astronomía y matemática en Graz, capital de la provincia austriaca de Estiria. Fue en Graz, en 1596, donde Kepler publicó su notable libro: El misterio del Universo. Con el ardor y la exuberancia de la juventud, declaró que había descubierto el orden fundamental que servía de base a las distancias que separaban a los planetas del Sol; en otras palabras, creyó haber resuelto el enigma del plan divino del Universo.

Kepler envió informes de esta teoría a todos aquellos en quienes pudo pensar, contando a Galileo y el famoso astrónomo Ticho Brahe. Los dos hombres sostuvieron correspondencia con el joven astrónomo; y cuando la intolerancia religiosa obligó al protestante Kepler a irse de Graz, aceptó la invitación de ayudar a Brahe, quién era matemático de la corte de Rodolfo II de Praga, el 1 de enero de 1600, Kepler llegó a Praga. Cuando murió Ticho en 1601, Kepler lo sucedió en el puesto de matemático imperial. En 1615, después de penosos estudios que llenaron quinientas hojas de papel de oficio, se preparó para publicar su Nueva astronomía, primer libro moderno sobre la materia. En la esfera de las matemáticas, se le atribuye el haber contribuido a crear el cálculo infinitesimal y estimular el uso de los logaritmos en los cálculos. Fue uno de los primeros en advertir el efecto que tiene la Luna sobre las mareas.

⁴**Ticho Brahe (1546-1601)** Nace el 14 de diciembre de 1546 en Knudstrup, actual Suecia, antes Dinamarca. Muere el 24 de octubre de 1601 en Praga, Bohemia, hoy República Checa. Fue uno de los mejores observadores de astros a vista a ojo de todos los tiempos. Mandó construir bajo el rey Federico II de Dinamarca el primer observatorio astronómico de la historia. Dedujo las órbitas elípticas para la trayectoria de los cometas, pero en su contra cabe decir que se negó a aceptar la concepción heliocéntrica. Fue el maestro de Kepler.

⁵**Charles Augustin de Coulomb (1736-1806)** Nace el 14 de junio de 1736 en Angoulême, Francia. Muere el 23 de agosto de 1806 en París. En 1760 entró a l'Ecole du Génie en Mézières. En 1773 presenta su primer trabajo a la Academia de Ciencias de

2.2 Curvas rectificables y longitud de arco de una curva

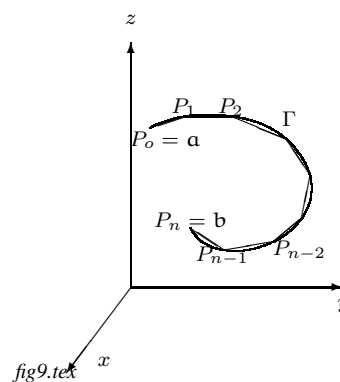
Sea Γ una curva continua dada por $\mathbf{r}(t) = (r_1(t), \dots, r_n(t))$, con $a \leq t \leq b$. Consideremos la partición P del intervalo $[a, b]$, con la ayuda de los puntos de división $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{m-1} < t_m = b$. Sean $\mathbf{a} = P_0, P_1, \dots, P_{m-1}, P_m = \mathbf{b}$ los puntos correspondientes y consideremos la línea poligonal inscrita en Γ .

Definición 2.2.1 La longitud de la curva Γ se define como el límite al cual tienden las sumas de las longitudes de los segmentos de la línea poligonal inscrita en Γ , cuando el máximo en la partición tiende a cero:

$$\ell_\Gamma = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m |\overline{P_{k-1}P_k}| = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \|\mathbf{r}(t_k) - \mathbf{r}(t_{k-1})\|,$$

con $\max_{1 \leq k \leq m} (t_k - t_{k-1}) = \|P\| \rightarrow 0$, si $m \rightarrow \infty$.

Si el límite existe, la curva Γ se dice rectificable sobre el intervalo $[a, b]$ de variación del parámetro t . Si el límite no existe, se dice que la curva no es rectificable o que no tiene longitud de arco.



Teorema 2.2.1 Sea Γ una curva regular descrita por $\mathbf{r}(t) = (r_1(t), \dots, r_n(t))$, $a \leq t \leq b$, entonces la longitud de arco de la curva Γ está dada por $s = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt$ y es independiente del parámetro t .

Prueba Por la regularidad de Γ tenemos la continuidad de las funciones $r_1(t), \dots, r_n(t), r'_1(t), \dots, r'_n(t)$ en $[a, b]$. Sea P una partición de $[a, b]$, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = b$ y tomemos la expresión $S(\mathbf{r}, P) = \sum_{k=1}^m \|\mathbf{r}(t_k) - \mathbf{r}(t_{k-1})\| = \sum_{k=1}^m \left[\sum_{i=1}^n (r_i(t_k) - r_i(t_{k-1}))^2 \right]^{1/2}$, donde r_i y r'_i son continuas $i = 1, \dots, n$, i.e. $r_i(t_k) - r_i(t_{k-1}) = r'_i(t_k^*)(t_k - t_{k-1})$, con $t_{k-1} < t_k^* < t_k$, $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$, $\|P\| = \max_{1 \leq k \leq m} \Delta t_k$.

Esta suma es obviamente igual a la longitud de la línea poligonal inscrita en Γ , con vértices en los puntos correspondientes a los valores $t = t_k, k = 1, \dots, m$. Podemos escribir:

$$S(\mathbf{r}, P) = \sum_{k=1}^m \left[\sum_{i=1}^n [r'_i(t_k^*)]^2 \right]^{1/2} \Delta t_k = \sum_{k=1}^m \left[\sum_{i=1}^n [r'_i(t_k^*)]^2 \right]^{1/2} \Delta t_k + \sum_{k=1}^m E_k \Delta t_k,$$

París: "Sur une application de règles, de maximis et minimis a quelque problèmes de statique, relatifs a l'architecture". Coulomb usó el cálculo de variaciones de resolver los problemas de ingeniería. Al final de su carrera desarrolla una teoría generalizada de deslizamiento de cuñas en mecánica de suelos, que permanece aún en uso hoy en la práctica en ingeniería básica. El escribió siete tratados importantes en la electricidad y el magnetismo, que sometió a la Academia de Ciencias entre 1785 y 1791.

donde $E_k = \alpha(t_k^1, \dots, t_k^n) - \alpha(t_k^*, \dots, t_k^*)$, $t_k^* \in [t_{k-1}, t_k]$ y la función auxiliar $\alpha(x_1, \dots, x_n) = \left[\sum_{i=1}^n [r'_i(x_i)]^2 \right]^{1/2}$.

Observemos que $S_m^* = \sum_{k=1}^m \left[\sum_{i=1}^n [r'_i(t_k^*)^2] \right]^{1/2} \Delta t_k$ es una suma de Riemann que converge a $\int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt$, que $\alpha(t, \dots, t) = \|\mathbf{r}'(t)\|$ y que α es continua sobre $[a, b]^n$ i.e. es uniformemente continua, por lo que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que si $\|t' - t''\| < \delta_1 \implies |\alpha(t') - \alpha(t'')| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^m E_k \Delta t_k \right| &\leq \sum_{k=1}^m |\alpha(t_k^1, \dots, t_k^n) - \alpha(t_k^*, \dots, t_k^*)| \Delta t_k \leq \sum_{k=1}^m \frac{\epsilon}{2(b-a)} \Delta t_k \\ &= \frac{\epsilon}{2(b-a)} \sum_{k=1}^m \Delta t_k = \frac{\epsilon(b-a)}{2(b-a)} = \frac{\epsilon}{2}, \end{aligned}$$

si se tiene que $|t_k^i - t_k^*| \leq |t_k - t_{k-1}| \leq \|P\| \leq \delta_1$.

Además, como la suma de Riemann $S_m^* = \sum_{k=1}^m \|\mathbf{r}'(t_k^*)\| \Delta t_k$ converge a $\int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt$, existe $\delta_2 > 0$ tal que si $\|P\| < \delta_2 \implies \left| S_m^* - \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt \right| < \frac{\epsilon}{2}$.

Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, si $\|P\| < \delta$:

$$\left| S(\mathbf{r}, P) - \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt \right| \leq \left| S(\mathbf{r}, P) - S_m^* \right| + \left| S_m^* - \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt \right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Así se ha probado que la longitud de arco de una curva regular Γ existe y está dada por la fórmula $s = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt$.

Haciendo el cambio de variable $t = \lambda(\tau)$, ($\lambda'(\tau) > 0$, $c \leq \tau \leq d$), donde $\lambda(\tau)$ es continuamente diferenciable se obtiene:

$$s = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_c^d \|\mathbf{r}'(\lambda(\tau))\| |\lambda'(\tau)| d\tau = \int_c^d \|\mathbf{x}'(\tau)\| d\tau,$$

donde $\mathbf{x} = \mathbf{r} \circ \lambda$, lo que prueba que la longitud de arco es invariante con respecto al cambio de variable (parámetro).

Nota Observemos que $s(t) = \int_a^t \|\mathbf{r}'(t)\| dt$, por lo que $s'(t) = \|\mathbf{r}'(t)\|$.

– Supongamos que la curva Γ es regular, es decir las funciones r_1, \dots, r_n son continuas y tienen derivadas continuas sobre $[a, b]$, satisfaciendo la condición $\|\mathbf{r}'(t)\| > 0$, para todo $t \in [a, b]$. Se verifica fácilmente que una curva regular Γ es rectificable sobre cualquier sub-intervalo de variación del parámetro t y que la longitud de arco de la curva Γ tiene la propiedad aditiva, en el sentido de que si P_1 es un punto arbitrario de Γ , donde t_1 es el parámetro que se le asocia ($a < t_1 < b$), de modo que Γ se particiona en Γ_1 y Γ_2 , entonces $\ell_\Gamma = \ell_{\Gamma_1} + \ell_{\Gamma_2}$.

– Consideremos la función $s(t)$, $t \in [a, b]$, igual a la longitud del arco correspondiente a la variación del parámetro en el intervalo $[a, t]$:

$$s'(t) = \frac{ds}{dt} = \sqrt{r_1'(t)^2 + \cdots + r_n'(t)^2} = \|\mathbf{r}'(t)\| > 0.$$

Además $s(a) = 0$. Tenemos que s es estrictamente creciente en $[a, b]$, lo que especifica una aplicación del intervalo $[a, b]$ en el intervalo $[0, \ell]$ de variación de s y que su inversa $t = \lambda(s)$, $0 \leq s \leq \ell$ existe, es continua y tiene derivada continua $\lambda'(s) > 0$.

Notemos que s puede escogerse como un parámetro admisible para la curva regular Γ :

$$x_1 = r_1(\lambda(s)), x_2 = r_2(\lambda(s)), \dots, x_n = r_n(\lambda(s)), \quad 0 \leq s \leq \ell.$$

Sea τ un parámetro admisible de la curva Γ , conectado con t por la función $t = \alpha(\tau)$ con derivada no cero continua. Así el signo de $\frac{ds}{d\tau} = \frac{ds}{dt} \alpha'(\tau)$ depende de $\alpha'(\tau)$ i.e.

$$\frac{ds}{d\tau} = \alpha'(\tau) \sqrt{r_1'(t)^2 + \cdots + r_n'(t)^2} = \pm \sqrt{x_1'(\tau)^2 + \cdots + x_n'(\tau)^2},$$

donde $x_1 = x_1(\tau) = r_1(\alpha(\tau)), \dots, x_n = x_n(\tau) = r_n(\alpha(\tau))$, con $c \leq \tau \leq d$; son las ecuaciones de Γ en términos del parámetro τ y la raíz cuadrada toma el signo \pm dependiendo de si s crece o decrece cuando τ crece.

Así tenemos, abusando de la notación $ds = \pm \sqrt{dx_1^2 + \cdots + dx_n^2}$.

Si $d\tau > 0$, se toma el signo $+$ en el primer caso y menos en el segundo caso. Pero si $d\tau < 0$, inversamente en el primer caso, el signo $-$ se considera y en el segundo caso el signo $+$.

Si se escribe $\tau = s$, debe tomarse el signo $+$ y obtenemos $1 = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{dx_n}{ds}\right)^2}$.

Recordemos que asumimos $s = 0$ para $t = a$ y que s crece con t . La definición de longitud de arco lleva implícita una función paramétrica de la curva Γ , pero se puede ver que la longitud de arco es invariante de la escogencia del parámetro t de la curva. Hemos demostrado el siguiente teorema.

Teorema 2.2.2 Sea Γ una curva descrita por $\mathbf{r}(t) = (r_1(t), \dots, r_n(t))$, $a \leq t \leq b$, donde $\mathbf{r}'(t)$ es continua y no se anula, entonces la longitud de arco s se puede introducir como un parámetro de la curva y $\left\| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right\| = \left\| \frac{\mathbf{r}'(t)}{s'(t)} \right\| = 1$.

2.2.1 Caso de coordenadas polares

Si se usan coordenadas polares tenemos que $x(\theta) = \rho(\theta) \cos \theta$, $y(\theta) = \rho(\theta) \sin \theta$, por lo que $\sqrt{(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2} = \sqrt{(\rho' \cos \theta - \rho \sin \theta)^2 + (\rho' \sin \theta + \rho \cos \theta)^2} = \sqrt{(\rho')^2 + \rho^2}$, o sea $ds = \sqrt{(\rho')^2 + \rho^2} d\theta$.

Ejemplo 2.2.1 Si una curva plana está representada por la ecuación $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, donde f tiene derivada continua en $[a, b]$, la longitud de arco se expresa por la fórmula $s = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$, la cual se tiene si se toma $t = x$, $y = f(t)$, i.e. $r(t) = (t, f(t))$.

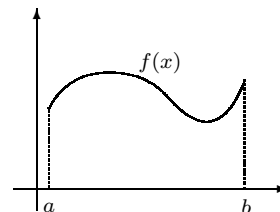


fig10.tex

Ejemplo 2.2.2 Si se considera la hélice $x = a \cos \theta$, $y = a \sin \theta$, $z = b\theta$, donde $0 \leq \theta \leq \theta_0$, la longitud de arco está dada por $s = \int_0^{\theta_0} \sqrt{a^2 + b^2} d\theta = \sqrt{a^2 + b^2} \theta_0$.

Ejemplo 2.2.3 Consideremos el cicloide $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, para $0 \leq t \leq 2\pi$, la longitud de arco está dada por $s = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos t} = 2 \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos t}{2}} dt = 2 \int_0^{2\pi} \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt = 8$.

Ejemplo 2.2.4 La imagen de una trayectoria de clase C^1 no necesariamente es regular. En efecto pueden tener dobleces, cúspides o cambios bruscos de dirección. Por ejemplo el cicloide tiene picos en los puntos del eje x , cuando $t = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Otro ejemplo es el hipocicloide de cuatro picos $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, la longitud de arco:

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{(3 \cos^2 t \sin t)^2 + (3 \sin^2 t \cos t)^2} dt = 3 \int_0^{2\pi} |\sin t| |\cos t| dt = 6.$$

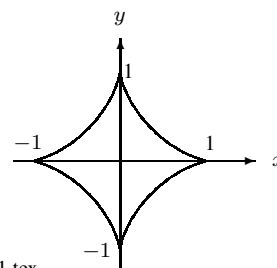


fig11.tex

Note que se ha considerado que la curva Γ es la unión de cuatro curvas regulares.

Ejemplo 2.2.5 Un círculo de radio 1 rueda sobre un círculo de radio 4. La trayectoria de un punto del borde del círculo menor viene dada por $x = 5 \cos t - \cos 5t$, $y = 5 \sin t - \sin 5t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, llamado epicicloide.

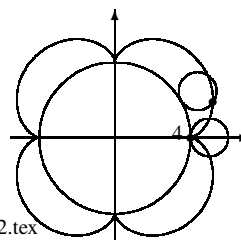


fig12.tex

Calcular la distancia recorrida por dicho punto en el transcurso de una vuelta alrededor del círculo mayor.

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-5 \sin t + 5 \sin 5t)^2 + (5 \cos t - 5 \cos 5t)^2} dt = 5 \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \sin t \sin 5t - 2 \cos t \cos 5t} dt = 5 \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos 4t} dt = 10 \int_0^{2\pi} |\sin 2t| dt =$$

$$40 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} 2t \, dt = 40.$$

Ejemplo 2.2.6 El cicloide dado por $x = 2t - \pi \operatorname{sen} t$, $y = 2 - \pi \cos t$ se interseca así misma en $(0, 2)$.

2.3 Integral de línea

En muchas aplicaciones físicas se hace necesario contar con el concepto de integral a lo largo de una trayectoria. Tal es el caso de una partícula que se mueve sobre una curva Γ y se desea calcular el trabajo realizado por una fuerza a lo largo de esta trayectoria, o bien el estudio de la energía potencial, flujo de calor, la entropía o la circulación de un fluido.

El problema planteado por estos ejemplos físicos, nos lleva a la formalización del concepto de integral de línea (integral curvilínea o integral de contorno). En este sentido, el intervalo clásico $[a, b]$ se ve reemplazado por una curva regular Γ , con representación paramétrica en \mathbb{R}^n , $\mathbf{r}(s)$, $s \in [0, \ell]$, donde s es la longitud de arco.

2.3.1 Integral de línea para campos escalares

Consideremos el espacio \mathbb{R}^n , en el cual se define una curva continua Γ rectificable a trozos descrita por $\mathbf{r}(s) = (r_1(s), \dots, r_n(s))$, $0 \leq s \leq \ell$, donde el parámetro s es la longitud de arco, es decir las funciones r_1, \dots, r_n son continuas en el intervalo cerrado $[0, \ell]$, de modo que se puede particionar en un número finito de intervalos con los puntos $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_m = \ell$, donde las funciones r_i tienen derivadas continuas en cada intervalo cerrado $[s_j, s_{j+1}]$, satisfaciendo la condición $\|\mathbf{r}'(s)\| = 1$.

La partición del intervalo $[0, \ell]$, induce la partición de la curva Γ en un número finito de m partes Γ_i , es decir los puntos $P_i = \mathbf{r}(s_i)$, $i = 1, \dots, m$.

Consideremos una función $f(x_1, \dots, x_n)$ real definida en los puntos de Γ o en un conjunto que contiene a cada parte rectificable Γ_i , los puntos de discontinuidad de la función $f(\mathbf{r}(s))$ pueden ser solamente en los puntos s_i .

En el interior o en la frontera de cada Γ_i se escoge un punto M_i , con coordenadas $\mathbf{r}(s_i)$ y se define $\Delta s_i = |\overline{P_{i-1}P_i}|$ (longitud del segmento).

Se consideran las sumas $\sum_{i=1}^m f(\mathbf{r}(s_i))\Delta s_i$, de modo que la norma de la partición P :

$$\|P\| = \sup_{1 \leq i \leq m} \{s_i - s_{i-1}\} \longrightarrow 0, \text{ si } m \rightarrow \infty.$$

Si el límite existe y no depende de la elección de los puntos P_i , M_i , se denomina integral de línea de f a lo largo de Γ y la denotamos:

$$\int_{\Gamma} f(\mathbf{x}) \, ds = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m f(\mathbf{r}(s_i))\Delta s_i.$$

La integral de línea de la función f sobre la curva Γ se define por:

$$\int_{\Gamma} f ds = \int_{\Gamma} f(x) ds = \int_0^{\ell} f(\mathbf{r}(s)) ds,$$

donde los dos miembros de la izquierda son simplemente la notación de la integral de línea y el último término de la derecha, es una integral de Riemann de $f \circ \mathbf{r}$ sobre $[0, \ell]$.

Si $\mathbf{r}(t)$ es solamente de clase C^1 a trozos o $f \circ \mathbf{r}$ es continua a trozos, el resultado sigue siendo válido.

Se ve claramente que el problema de la formalización de la integral de línea a lo largo de Γ , no es más que el problema de la existencia de la integral de Riemann de $f \circ \mathbf{r}$ en $[0, \ell]$.

Una propiedad importante que se tiene es que si se cambia el parámetro s por $s' = \ell - s$, el valor de la integral no cambia:

$$\int_0^{\ell} f(\mathbf{r}(\ell - s)) ds = - \int_{\ell}^0 f(\mathbf{r}(s')) s' = \int_0^{\ell} f(\mathbf{r}(s)) ds.$$

Se puede definir la integral de línea de la función f a lo largo de Γ , cuando el parámetro es $t \in [a, b]$ (y no s) como:

$$\int_{\Gamma} f ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| dt.$$

Observemos que si $f = 1$, estamos hablando de longitud de arco.

Ejemplo 2.3.1 Sea Γ la hélice dada por $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$ y sea $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, calcule $\int_{\Gamma} f ds$.

Se tiene que $x'(t) = -\sin t$, $y'(t) = \cos t$, $z' = 1$, $\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$, la función f a lo largo de Γ es $f(x(t), y(t), z(t)) = x^2 + y^2 + z^2 = 1 + t^2$, entonces:

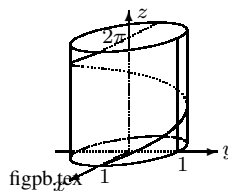
$$\int_{\Gamma} f ds = \int_0^{2\pi} (1 + t^2) \sqrt{2} dt = \sqrt{2} \left(t + \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{2}{3} \sqrt{2} \pi (3 + 4\pi^2).$$

– Cuando se trabaja en el plano xy y la curva está dada por $y = \varphi(x)$, $a \leq x \leq b$, i.e. $\Gamma = \{(x, \varphi(x)) / a \leq x \leq b\}$, tenemos que:

$$\int_{\Gamma} f ds = \int_a^b f(x, \varphi(x)) \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2} dx.$$

– Si en \mathbb{R}^3 , la curva Γ se da por las ecuaciones $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$, con φ y ψ de clase C^1 , $a \leq x \leq b$, se tiene que:

$$\int_{\Gamma} f ds = \int_a^b f(x, \varphi(x), \psi(x)) \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2 + (\psi'(x))^2} dx.$$



figpb.tex

– En general, si $f: S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en S y Γ una curva contenida en S convexo, $\Gamma = r([a, b])$, r de clase C^1 , entonces existe la integral de línea a lo largo de la curva Γ y tenemos:

$$\int_{\Gamma} f ds = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m f(r(t_i)) \Delta s_i.$$

Además:

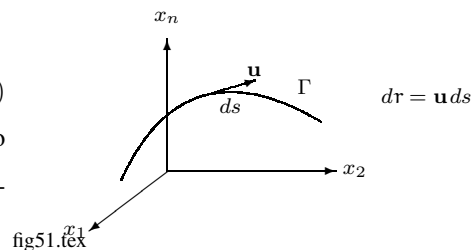
$$\int_{\Gamma} f ds = \int_a^b f(r(t)) \|r'(t)\| dt = \int_a^b f(r(t)) s'(t) dt.$$

2.3.2 Integral de línea para campos vectoriales

Consideremos una curva continua Γ rectificable orientada, con representación paramétrica $r(s)$, $0 \leq s \leq \ell$, de clase C^1 , donde s es la longitud de arco a lo largo de Γ . Así cuando $s = 0$ le corresponde el punto \mathbf{a}_0 y cuando $s = \ell$, le corresponde \mathbf{a}_1 . Además la dirección de crecimiento de s es coherente con la orientación de Γ .

En cada punto \mathbf{a} de cada parte rectificable de Γ (no debe ser un punto esquina de Γ), está únicamente determinado el vector unitario tangente $\mathbf{u} = r'(s)$ (es la dirección de crecimiento de s).

Se supone que existe una función $f = (f_1, \dots, f_n)$ (campo vectorial continuo) sobre Γ o sobre un abierto $S \supset \Gamma$, donde f_1, \dots, f_n son continuas sobre Γ (o sobre S).



Consideremos una partición P de $[0, \ell]$, con $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_m = \ell$, donde la función r tienen derivadas continuas en cada intervalo cerrado $[s_j, s_{j+1}]$, satisfaciendo la condición $\|r'(s)\| = 1$ y tomemos la suma $\sum_{i=1}^m f(r(s_i)) \cdot \Delta r_i$, donde $\Delta r_i = r(s_i) - r(s_{i-1})$, de modo que la norma de partición P : $\|P\| = \sup_{1 \leq i \leq m} \{|s_i - s_{i-1}|\} \rightarrow 0$, si $m \rightarrow \infty$.

Si el límite existe, cuando $m \rightarrow \infty$ y es independiente de los puntos s_i , se denomina integral de línea de f a lo largo de la curva orientada Γ y se escribe:

$$\int_{\Gamma} f \cdot dr = \int_{\Gamma} f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n = \int_{\Gamma} (f \cdot \mathbf{u}) ds = \int_0^{\ell} (f \cdot \mathbf{u}) ds,$$

$dr = \mathbf{u} ds$ representa el elemento de arco de curva en magnitud y dirección.

La expresión $\int_{\Gamma} f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n$ sale del hecho que:

$$f(r(s_i)) \cdot \Delta r_i = f_1(r(s_i)) \Delta r_1 + \dots + f_n(r(s_i)) \Delta r_n.$$

Si $f \circ r(s)$ es regular a trozos, el resultado sigue siendo válido.

En el caso general la función $f \cdot \mathbf{u}$ puede tener discontinuidades de primera especie ligadas a algún punto esquina de Γ .

Si la curva Γ se orienta en sentido contrario, el vector tangente es $-\mathbf{u}$ y denotando el contorno Γ_- se tiene $\int_{\Gamma_-} f \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\Gamma} f \cdot d\mathbf{r}$.

Si el parámetro de la curva es t (y no s), $t \in [a, b]$, entonces:

$$\int_{\Gamma} f \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_0^{\ell} f(\mathbf{r}(s)) \cdot \mathbf{u} ds,$$

ya que $\|\mathbf{r}'(s)\| = 1 = \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{ds} \right\| = \|\mathbf{r}'(t)\| \frac{dt}{ds} \implies \|\mathbf{r}'(t)\| = \frac{ds}{dt}$. De esta forma se puede escribir:

$$\int_{\Gamma} f \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{u}(t) \|\mathbf{r}'(t)\| dt.$$

La fórmula anterior establece que la integral de línea $\int_{\Gamma} f \cdot d\mathbf{r}$, es igual a la integral de trayectoria de la componente tangencial $f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{u}(t)$ de f a lo largo de Γ , siempre que la curva Γ no se interseque a sí misma.

Si la curva orientada Γ es cerrada, a menudo se usa el símbolo $\oint_{\Gamma} f \cdot d\mathbf{r}$ para indicar la propiedad de ser cerrada y la integral de f es llamada circulación del vector f (campo vectorial) sobre Γ .

Si f es un campo de fuerza, la integral de línea de f sobre Γ representa el trabajo de un campo f a lo largo de la curva orientada Γ .

Si $n = 2$, $x = x(t)$, $y = y(t)$, la integral de línea $\int_{\Gamma} f \cdot d\mathbf{r}$ se escribe $\int_{\Gamma} f_1 dx + f_2 dy$, o bien $\int_{\Gamma} f_1(x, y) dx + f_2(x, y) dy$.

En tres dimensiones $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ y escribimos:

$$\int_{\Gamma} f \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz.$$

Si la curva Γ se representa paraméricamente por $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, con $t \in [a, b]$, se tiene:

$$\int_{\Gamma} f \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz = \int_a^b (f_1(\mathbf{r}(t))x'(t) + f_2(\mathbf{r}(t))y'(t) + f_3(\mathbf{r}(t))z'(t)) dt.$$

Si la curva orientada Γ puede representarse como la unión de dos curvas orientadas Γ_1 y Γ_2 , especificada por las mismas ecuaciones correspondiendo a la variación del parámetro s sobre el intervalo $[0, c]$ y $[c, \ell]$, $0 < c < \ell$, entonces:

$$\int_{\Gamma} f \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1} f \cdot d\mathbf{r} + \int_{\Gamma_2} f \cdot d\mathbf{r}.$$

Observación Si $f: S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua sobre S , la integral de línea de f a lo largo de la curva Γ ($r: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $\Gamma = r([a, b]) \subset S$ convexo, r de clase C^1), entonces:

$$\int_{\Gamma} f \cdot dr = \int_a^b f(r(t)) \cdot r'(t) dt.$$

Si $f = (f_1, \dots, f_n)$, $r = (x_1, \dots, x_n)$, entonces $\int_{\Gamma} f \cdot dr = \sum_{k=1}^n \int_a^b f_k(r(t)) x'_k(t) dt$.

Ejemplo 2.3.2 Considere el campo vectorial bidimensional $f(x, y) = (\sqrt{x}, x^3 + y)$, con $(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, calcular la integral de línea de f desde $(0, 0)$ a $(1, 1)$, a lo largo de las siguientes trayectorias:

a) la recta $x = t, y = t, 0 \leq t \leq 1$,

b) la curva $x = t^2, y = t^3, 0 \leq t \leq 1$.

a) Se tiene que $r(t) = (t, t)$, $r'(t) = (1, 1)$, $f(r(t)) = (\sqrt{t}, t^3 + t)$, entonces $\int_{\Gamma_1} f \cdot dr = \int_0^1 (\sqrt{t} + t + t^3) dt = \frac{17}{12}$.

b) En este caso $r(t) = (t^2, t^3)$, $r'(t) = (2t, 3t^2)$, $f(r(t)) = (t, t^6 + t^3)$ y $\int_{\Gamma_2} f \cdot dr = \int_0^1 (2t^2 + 3t^5 + 3t^8) dt = \frac{3}{2}$.

Se observa con este ejemplo, que la integral de línea de un punto a otro depende de la trayectoria que los une.

Calculemos la integral b) usando la parametrización de la curva $(t, t^{\frac{3}{2}})$, $0 \leq t \leq 1$, entonces $r(t) = (t, t^{\frac{3}{2}})$, $r'(t) = (1, \frac{3}{2}\sqrt{t})$, $\int_{\Gamma} f \cdot dr = \int_0^1 (t^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}t^{\frac{7}{2}} + \frac{3}{2}t^2) dt = \frac{3}{2}$.

Esto nos evidencia una propiedad más general de las integrales de línea: La integral de línea es independiente de la parametrización utilizada para describir la curva, propiedad que hereda de la independencia del parámetro en el cálculo de la longitud de arco.

Ejemplo 2.3.3 Considere la curva Γ con representación paramétrica $r(t) = (\sin t, \cos t, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ y $f(x, y, z) = (x, y, z)$, calcular la integral de línea $\int_{\Gamma} f \cdot dr$.

Se tiene que $f(r(t)) = (\sin t, \cos t, t)$, $r'(t) = (\cos t, -\sin t, 1)$, por lo que la integral de línea $\int_{\Gamma} f \cdot dr = \int_0^{2\pi} t dt = 2\pi^2$.

Ejemplo 2.3.4 Consideremos el campo de fuerzas $f(x, y, z) = (x^3, y, z)$ y consideremos la circunferencia sobre el plano yz de radio a , con parametrización $x = 0, y = a \cos t, z = a \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$. Demuestre que $\int_{\Gamma} f \cdot dr = 0$.

Observemos que $f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$, entonces el campo de fuerzas es normal a la circunferencia en todo punto, por lo que el trabajo es nulo cuando se mueve una partícula a lo largo del círculo:

$$W = \int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma} x^3 dx + y dy + z dz = \int_0^{2\pi} (0 - a^2 \cos t \sin t + a^2 \cos t \sin t) dt = 0.$$

Ejemplo 2.3.5 Una curva Γ en el espacio se puede ver como un alambre delgado de densidad variable. Supongamos que la densidad se expresa por un escalar $f(x, y, z)$, la masa total m del alambre está dada por la integral de línea de f , con respecto a la longitud de arco $\int_{\Gamma} f(x, y, z) ds$.

El centro de gravedad se define como el punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, cuyas coordenadas están dadas por las ecuaciones:

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \int_{\Gamma} x f(x, y, z) ds, \quad \bar{y} = \frac{1}{m} \int_{\Gamma} y f(x, y, z) ds, \quad \bar{z} = \frac{1}{m} \int_{\Gamma} z f(x, y, z) ds.$$

Un alambre con densidad constante se dice uniforme y el centro de gravedad se llama centroide.

2.3.3 Propiedades de la integral de línea

Es claro que las integrales de línea, al poderse definir a través de las integrales ordinarias, heredan las propiedades de éstas.

- **Linealidad** $\int_{\Gamma} (f + \lambda g) \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma} f \cdot d\mathbf{r} + \lambda \int_{\Gamma} g \cdot d\mathbf{r}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- **Aditividad** $\int_{\Gamma} f \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1} f \cdot d\mathbf{r} + \int_{\Gamma_2} f \cdot d\mathbf{r}$, con $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 = \mathbf{r}([a, c])$, $\Gamma_2 = \mathbf{r}([c, b])$, $a \leq c \leq b$.
- **Cambio de parámetro** En general si $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{w}(t)$ son representaciones paramétricas equivalentes de la misma curva Γ rectificable en la misma dirección, entonces $\int_{\Gamma} f \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma} f \cdot d\mathbf{w}$.

Además $\int_{\Gamma_-} f \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\Gamma} f \cdot d\mathbf{r}$.

Sea $\mathbf{r}(t)$ una parametrización de Γ , continua definida para $t \in [a, b]$ y sea $u: [c, d] \rightarrow [a, b]$ una función real derivable, de modo que $u'(t) \neq 0$ en $[c, d]$ y tal que $u([c, d]) = [a, b]$, entonces $\mathbf{w}(t) = \mathbf{r}(u(t))$ representa la misma curva Γ . Las curvas así definidas son equivalentes, pues dan distintas representaciones paramétricas de la misma curva Γ .

Si la derivada $u'(t) > 0$, las curvas tienen la misma orientación.

Si $u'(t) < 0$, las curvas invierten la orientación.

Así tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.3.1 Si $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{w}(t)$ son dos parametrizaciones regulares o regulares a trozos de Γ , entonces:

$$\int_{\Gamma} f \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma} f \cdot d\mathbf{w} \text{ si } \mathbf{r} \text{ y } \mathbf{w} \text{ tienen la misma orientación y}$$

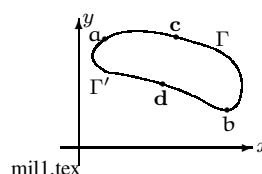
$$\int_{\Gamma} f \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\Gamma} f \cdot d\mathbf{w} \text{ si } \mathbf{r} \text{ y } \mathbf{w} \text{ tienen orientaciones opuestas.}$$

Demostración Es suficiente realizar la prueba para trayectorias regulares, pues por la propiedad aditiva con respecto a la trayectoria, se deduce el resultado para trayectorias regulares a trozos.

Sabemos que $w(t) = r(u(t))$, para alguna función derivable u , tal que su derivada no se anula, entonces $w'(t) = r'(u(t))u'(t)$, por lo que:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f \cdot dw &= \int_c^d f(w(t)) \cdot w'(t) dt = \int_c^d f(r(u(t))) \cdot r'(u(t))u'(t) dt \\ &= \int_{u(c)}^{u(d)} f(r(v)) \cdot r'(v) dv = \pm \int_a^b f(r(v)) \cdot r'(v) dv = \pm \int_{\Gamma} f \cdot dr. \end{aligned}$$

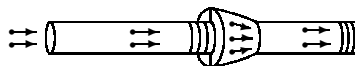
En general $\int_{\Gamma} f \cdot dr \neq \int_{\Gamma'} f \cdot dr$, aunque las curvas coincidan en los extremos.



2.3.4 Potencial de un campo vectorial

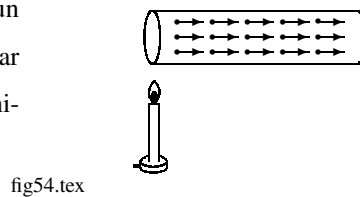
Ejemplo 2.3.6 Consideremos un fluido moviéndose en una tubería con flujo estacionario (que no depende del tiempo).

Si en cada punto colocamos el vector de la velocidad del fluido, obtenemos un campo vectorial de velocidad del fluido. fig53.tex



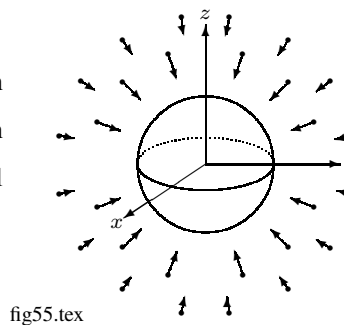
Notemos que la longitud de las flechas (rapidez) y la dirección del fluido pueden cambiar de un punto a otro.

Ejemplo 2.3.7 Consideremos una pieza de metal que se calienta por un lado. La temperatura en cada punto produce un campo escalar $T(x, y, z)$. El flujo real de calor se puede marcar mediante un campo de flechas que indican la dirección y magnitud del flujo.



Ejemplo 2.3.8 La fuerza de atracción de la Tierra sobre un cuerpo m se puede describir mediante un campo vectorial en \mathbb{R}^3 , el campo gravitacional. De acuerdo con la ley de Newton el campo está dado por:

$$f = - \frac{GmM}{\|r\|^3} r.$$



Ejemplo 2.3.9 En el plano \mathbb{R}^2 la función f definida por $f(x, y) = \left(\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\right)$ es un campo vectorial continuo en \mathbb{R}^2 , salvo el origen. Este campo de velocidad aproxima al campo de velocidad del agua en movimiento circular tal como ocurre cuando se quita el tapón a un cubo de agua.

Notamos que en general, un campo vectorial no tiene que ser un campo gradiente. Sin embargo, el concepto de superficie equipotencial tiene sentido sólo si el campo vectorial resulta ser un campo gradiente.

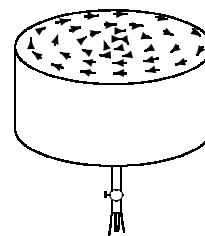


fig56.tex

Otro concepto importante es el de línea de flujo, que es simplemente una trayectoria que sigue una partícula suspendida en el fluido. También es apropiado llamar a las líneas de flujo, líneas de corriente o curvas integrales.

Definición 2.3.1 Si f es un campo vectorial, una línea de flujo para f es una trayectoria $\tau(t)$ tal que $\tau'(t) = f(\tau(t))$, es decir f produce el campo de velocidad en la trayectoria $\tau(t)$.

Analíticamente, el problema de hallar una línea de flujo que pasa por x_0 en el tiempo $t = 0$ es equivalente a resolver una ecuación diferencial i.e. $x'(t) = f_1(\tau(t))$, $y'(t) = f_2(\tau(t))$, $z'(t) = f_3(\tau(t))$, con las condiciones iniciales $(x(0), y(0), z(0)) = (x_0, y_0, z_0)$.

Si definimos $\phi(x, t)$ la posición del punto en la línea de flujo que pasa por x después de transcurrido el tiempo t , tenemos $\frac{\partial}{\partial t} \phi(x, t) = f(\phi(x, t))$, $\phi(x, 0) = x$. ϕ se llama flujo de f , la función ϕ es diferenciable con respecto a x y tenemos:

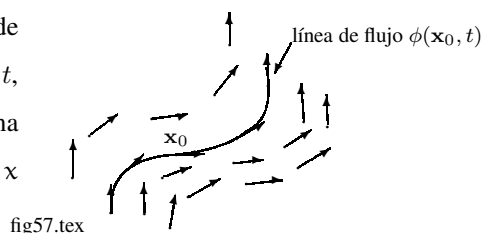


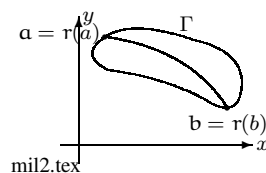
fig57.tex

$$D_x \frac{\partial}{\partial t} \phi(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} D_x \phi(x, t) = D_x f(\phi(x, t)) D_x \phi(x, t).$$

Definición 2.3.2 Consideremos el campo vectorial f sobre $S \subset \mathbb{R}^n$ abierto y supongamos que existe una función escalar $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ definida sobre S con derivadas parciales continuas y donde $\nabla \varphi = f$. La función escalar φ es llamada potencial del campo vectorial f .

2.3.5 Condición de independencia de la trayectoria

Una condición para que la integral en línea no dependa de la trayectoria que une los puntos a y b es que $f = \nabla\varphi$, con $\varphi \in C^1$, en cuyo caso $f_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$:



$$\int_{\Gamma} f \cdot dr = \int_{\Gamma} f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n = \int_{\Gamma} d\varphi = \varphi(b) - \varphi(a).$$

Nota La circulación a lo largo de un circuito plano Γ (integral de línea $\oint_{\Gamma} P dx + Q dy$ a lo largo de una curva cerrada plana Γ) cuando se cumple la condición $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ es igual a cero, si esta región no contiene puntos en su interior, en los cuales una de las funciones P , Q , $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ sea discontinua o no esté definida.

Se usará el símbolo \oint para indicar que la integral se realiza sobre una curva cerrada y orientada.

En el caso $n = 3$, la condición de independencia de la integral de línea $\oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz$ de la trayectoria Γ , es que exista una función real φ tal que $\nabla\varphi = (P, Q, R)$, o sea $P = \frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $R = \frac{\partial\varphi}{\partial z}$.

Cuando se cumplen las condiciones $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, la integral de línea es nula, si la región encerrada por la curva no contiene en su interior puntos en los cuales una de las funciones P , Q , R , $\frac{\partial Q}{\partial z}$, $\frac{\partial R}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial z}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ no sea continua o no esté definida.

En general para que se tenga que la integral en línea sea independiente de la trayectoria, debe tenerse que $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$, $i, j = 1, \dots, n$, en la región S , siempre que una de las funciones f_i , $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$, no sea discontinua o no esté definida en S .

Ejemplo 2.3.10 El concepto de trabajo como integral de línea

Supongamos que una partícula de masa m se mueve a lo largo de una trayectoria Γ , bajo la acción de una fuerza f . Nos preguntamos por el trabajo realizado por f sobre la partícula que se mueve sobre Γ .

Si el desplazamiento es una línea recta, dada por el vector d y una fuerza f constante, el trabajo realizado es $f \cdot d$:

$$f \cdot d = \text{fuerza} \times \text{desplazamiento en la dirección de la fuerza.}$$

Si la trayectoria es una curva $\Gamma = r([a, b])$ es regular a trozos, el trabajo realizado por f , sobre la partícula a lo largo de Γ es: $\int_a^b f(r(t)) \cdot r'(t) dt = \int_{\Gamma} f \cdot dr$.

Ejemplo 2.3.11 El trabajo realizado por una fuerza constante

Si f es una fuerza constante ($f = \mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$), el trabajo realizado por f al mover una partícula de un punto \mathbf{a} al punto \mathbf{b} , es $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})$.

En efecto, sea $\mathbf{r}(t)$ una trayectoria de \mathbf{a} a \mathbf{b} , de modo que $\mathbf{r}'(t)$ sea continua en $[a, b]$, entonces:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b (c_1 x'(t) + c_2 y'(t) + c_3 z'(t)) dt = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}).$$

En este caso el trabajo depende sólo de los puntos extremos \mathbf{a} y \mathbf{b} y no de la curva que los une. Los campos de fuerza con esta propiedad se llaman campos conservativos.

Si la partícula se mueve con una velocidad $v(t)$, su energía cinética es $\frac{1}{2}mv^2(t)$, entonces la variación de la energía cinética en cualquier intervalo es igual al trabajo realizado por f durante dicho intervalo de tiempo.

En efecto, si $\mathbf{r}(t)$ es la posición de la partícula en el instante t , el trabajo realizado por f durante el intervalo de tiempo $[a, b]$ es $\int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$.

Queremos probar que $\int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2}mv^2(b) - \frac{1}{2}mv^2(a)$.

Según la segunda ley de Newton del movimiento, tenemos $\mathbf{f}(\mathbf{r}(t)) = m\mathbf{r}''(t) = m\mathbf{v}'(t)$, donde $\mathbf{v}(t)$ es el vector velocidad en el instante t . La velocidad es la magnitud $v(t) = \|\mathbf{v}(t)\|$, por lo que $\mathbf{f}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{v}'(t) = m\mathbf{v}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) = \frac{1}{2}m(\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t))' = \frac{1}{2}m(v^2(t))'$.

Integrando sobre $[a, b]$ obtenemos:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{f}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \frac{1}{2}mv^2(t) \Big|_a^b = \frac{1}{2}mv^2(b) - \frac{1}{2}mv^2(a).$$

Definición 2.3.3 Sea $S \subset \mathbb{R}^2$ se dice conexo, si todo par de puntos de S puede unirse por medio de una curva regular a trozos dentro de S .

Definición 2.3.4 Sea $S \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y conexo, se dice que es simplemente conexo, si para toda curva de Jordan Γ situada en S , la región interior de S es también subconjunto de S .

Un anillo no es un conjunto simplemente conexo. Se dirá de manera intuitiva que un conjunto simplemente conexo, no tiene agujeros.

Otra manera de describir un conjunto simplemente conexo, es que una curva Γ_1 en S que une dos puntos cualesquiera, puede transformarse en otra curva Γ_2 que une los puntos sin ruptura en S , con la particularidad que todas las curvas intermedias en la deformación están contenidas en S .

Otra caracterización establece que un conjunto es simplemente conexo, si su complemento no es conexo.

Un conjunto abierto y conexo que no es simplemente conexo, se llama múltiplemente conexo.

Teorema 2.3.2 Sea $\varphi: S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 , donde S es un conjunto conexo abierto, entonces para dos puntos $\mathbf{a} = \mathbf{r}(a)$ y $\mathbf{b} = \mathbf{r}(b)$ unidos por una curva regular a trozos $\Gamma \subset S$, se tiene:

$$\int_{\Gamma} \nabla \varphi \cdot d\mathbf{r} = \varphi(\mathbf{r}(b)) - \varphi(\mathbf{r}(a)).$$

Demostración En efecto, $\int_{\Gamma} \nabla \varphi \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \nabla \varphi[\mathbf{r}(t)] \cdot \mathbf{r}'(t) dt$, pero si definimos $g(t) = \varphi(\mathbf{r}(t))$, se tiene $g'(t) = \nabla \varphi(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)$, por lo que:

$$\int_{\Gamma} \nabla \varphi \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b g'(t) dt = g(b) - g(a) = \varphi(\mathbf{r}(b)) - \varphi(\mathbf{r}(a)).$$

2.3.6 Aplicaciones a la mecánica

Ejemplo 2.3.12 Potencial Newtoniano La ley de gravitación de Newton establece que la fuerza \mathbf{f} que ejerce una partícula de masa M sobre otra partícula de masa m se puede ver como el vector $\mathbf{f} = -GmMr^{-3}\mathbf{r}$.

De esta forma vemos que la fuerza de gravitación \mathbf{f} es el gradiente del campo escalar $\varphi(x, y, z) = GmMr^{-1}$, que llamamos potencial de Newton.

El trabajo efectuado por la fuerza de gravitación al mover la partícula de masa m desde (x_1, y_1, z_1) a (x_2, y_2, z_2) es:

$$\varphi(x_1, y_1, z_1) - \varphi(x_2, y_2, z_2) = GmM \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right),$$

con $r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$, $r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$.

Si los dos puntos están en la misma superficie equipotencial, entonces $r_1 = r_2$ y no se realiza trabajo.

2.3.7 Principio de conservación de la energía mecánica

Si \mathbf{f} es un campo de fuerzas que tiene un potencial $\varphi \in C^1$ en un conjunto conexo abierto S , entonces el trabajo realizado por \mathbf{f} al mover una partícula desde $\mathbf{r}(a)$ a $\mathbf{r}(x)$ siguiendo una curva regular a trozos dentro de S es $\varphi(\mathbf{r}(x)) - \varphi(\mathbf{r}(a))$. También el trabajo realizado es igual a la variación de la energía cinética ψ de la partícula en $\mathbf{r}(x)$. Así tenemos que:

$$\psi(\mathbf{r}(x)) - \psi(\mathbf{r}(a)) = \varphi(\mathbf{r}(x)) - \varphi(\mathbf{r}(a)), \text{ o bien}$$

$$\psi(\mathbf{r}(x)) - \varphi(\mathbf{r}(x)) = \psi(\mathbf{r}(a)) - \varphi(\mathbf{r}(a)).$$

El escalar $\varphi(\mathbf{r}(x))$ se denomina energía potencial de la partícula.

Observemos que $\psi(\mathbf{r}(x)) - \varphi(\mathbf{r}(x))$ es constante, por lo que si un campo de fuerza es un gradiente, la suma de la energía cinética y potencial de una partícula que se desplaza en dicho campo es constante.

Un campo de fuerzas con una función potencial se llama conservativo, por que la energía total, cinética más potencial, se conserva. En un campo conservativo, no se realiza trabajo al mover una partícula alrededor de una curva cerrada volviendo al punto de partida.

Un campo de fuerzas no es conservativo si existe fricción o viscosidad en el sistema, pues éstas tienden a convertir energía mecánica en energía calórica.

Teorema 2.3.3 *Sea f un campo vectorial definido sobre un abierto $S \subset \mathbb{R}^n$, entonces las siguientes propiedades son equivalentes:*

- i) Existe una función escalar φ de clase C^1 tal que $\nabla\varphi = f$ sobre S .
 ii) La integral de f sobre curva cerrada regular a trozos $\Gamma \subset S$ es igual a cero:

$$\oint_{\Gamma} f \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

- iii) Si \mathbf{a}_o es un punto fijo sobre S , la integral $\int_{\Gamma_o} f \cdot d\mathbf{r}$ sobre cualquier curva orientada regular a trozos $\Gamma_o \subset S$, con punto inicial \mathbf{a}_o y terminal \mathbf{a} , depende solamente de \mathbf{a}_o y \mathbf{a} y es independiente de la forma de la curva: $\int_{\Gamma_o} f \cdot d\mathbf{r} = V(\mathbf{a})$ para cada punto fijo \mathbf{a}_o .

La función V es una función potencial de f sobre S , es decir difiere de φ en una constante.

Demostración Se hará la demostración para el caso $n = 3$. El caso general se sigue fácilmente del caso $n = 3$.

i) \implies iii) Sea φ una función potencial de f sobre S , denotemos $\mathbf{a}_o = (x_o, y_o, z_o)$, $\mathbf{a} = (x, y, z)$ un punto arbitrario y $\Gamma = \Gamma_o$ una curva regular a trozos dada por $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t_o \leq t \leq t_1$, i.e. \mathbf{a}_o corresponde al valor t_o , \mathbf{a} corresponde al valor t .

Si φ varía sobre la curva Γ , se tiene $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t}$ en los puntos de regularidad de Γ , i.e. en los puntos en que existe la tangente de la curva Γ . Así se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z} dz &= \int_{t_o}^t \frac{d\varphi}{dt} dt = \varphi(x(t), y(t), z(t)) - \varphi(x(t_o), y(t_o), z(t_o)) \\ &= \varphi(\mathbf{a}) - \varphi(\mathbf{a}_o) = V(\mathbf{a}), \end{aligned}$$

lo que prueba, para un punto inicial \mathbf{a}_o , que la integral depende solamente de $\mathbf{a} \in S$ y es independiente de la forma de la curva que conecta \mathbf{a} y \mathbf{a}_o .

iii) \implies i) Sea $\mathbf{a}_o \in S$ arbitrario pero fijo y supongamos que dado el campo vectorial f , la integral sobre cualquier curva regular a trozos conectando \mathbf{a}_o con $\mathbf{a} \in S$, es independiente de la forma de la curva y depende solamente del punto \mathbf{a} , lo que implica que existe una función $V(\mathbf{a})$ tal que:

$$\int_{\Gamma_o} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz = V(\mathbf{a}) = V(x, y, z).$$

La prueba queda concluida si probamos que $\frac{\partial V}{\partial x} = f_1$, $\frac{\partial V}{\partial y} = f_2$, $\frac{\partial V}{\partial z} = f_3$.

Probemos que $\frac{\partial V}{\partial x} = f_1$ en un punto arbitrario $\mathbf{a}_1 = (x_1, y_1, z_1) \in S$.

Del punto \mathbf{a}_1 se extiende un segmento $\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1$, dentro de S , paralelo al eje x . Por definición, el segmento está dado por $y = y_1, z = z_1, x_2 \leq x \leq x_1$. Así $\mathbf{a}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ y el punto \mathbf{a}_o está conectado con \mathbf{a}_2 por una curva orientada arbitraria regular a trozos Γ_1 , yendo de \mathbf{a}_o a \mathbf{a}_2 .

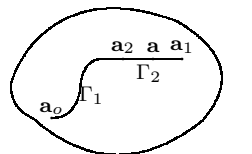


fig58.tex

Sea Γ_2 el segmento de $\overline{\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1}$ orientado en la dirección de \mathbf{a}_2 a $\mathbf{a}_1 \in \overline{\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1}$, i.e. $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, entonces $V(x, y_1, z_1) = \int_{\Gamma_1} (f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz) + \int_{\Gamma_2} f_1 dx$, pues $\int_{\Gamma_2} f_2 dy = \int_{\Gamma_2} f_3 dz = 0$. Dado que la integral sobre Γ_1 es constante se tiene:

$$V(x, y_1, z_1) = K + \int_{x_2}^x f_1(t, y_1, z_1) dt.$$

La función f_1 es continua y en particular continua con respecto a x para y, z constantes i.e. $\frac{\partial V}{\partial x} = f_1(x, y_1, z_1)$. En particular se tiene también que es válido si $x = x_1$, lo que prueba la igualdad deseada. Similarmente se prueba las otras igualdades. Para completar la prueba con i) tomamos $\varphi = V$.

ii) \iff iii) La equivalencia es obvia. En efecto supongamos que ii) es válida y sea $\Gamma' = \Gamma'_o$ y $\Gamma'' = \Gamma''_o$ dos curvas regulares a trozos y continuas dentro de S uniendo \mathbf{a}_o y \mathbf{a} . La curva $\Gamma' \cup \Gamma''$ es un contorno cerrado y tenemos:

$$0 = \int_{\Gamma'} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\Gamma''} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma'} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} - \int_{\Gamma''} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$$

lo que prueba iii).

Inversamente si iii) es válida y $\Gamma \subset S$ es una curva cerrada regular a trozos, podemos representar Γ en la forma $\Gamma = \Gamma' \cup \Gamma''$, donde Γ' y Γ'' son regulares a trozos y escribimos:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma'} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\Gamma''} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma'} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} - \int_{\Gamma''} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0,$$

pues Γ' y Γ'' unen los mismos puntos extremos.

Observación La integral de línea se puede expresar de varias maneras:

- 1) Forma vectorial: $\int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} ds$
- 2) Forma paramétrica: $\int_a^b (f_1(t) \frac{dx_1}{dt} + \cdots + f_n(t) \frac{dx_n}{dt}) dt$
- 3) Forma diferencial: $\int_{\Gamma} f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n$.

Definición 2.3.5 Si un campo vectorial $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ definido sobre un abierto $S \subset \mathbb{R}^3$ y donde f_1, f_2, f_3 tienen derivadas parciales continuas, entonces definimos el vector:

$$\text{rot } \mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{f} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right),$$

llamado rotacional del campo vectorial \mathbf{f} .

Si un campo vectorial \mathbf{f} tiene una de las propiedades ii) o iii) del teorema anterior, entonces existe una función $\varphi(x, y, z)$, función potencial de \mathbf{f} sobre S de modo que $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = f_1, \frac{\partial \varphi}{\partial y} = f_2, \frac{\partial \varphi}{\partial z} = f_3$. En este caso si las funciones f_1, f_2, f_3 son de clase C^1 sobre S , la función φ tiene derivadas parciales de segundo orden continuas y tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = 0, \\ \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} = 0, \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} = 0, \end{aligned}$$

lo que demuestra el siguiente teorema.

Teorema 2.3.4 Si un campo vectorial \mathbf{f} de clase C^1 en un abierto $S \subset \mathbb{R}^3$, con la propiedad $\oint_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0$, para cualquier curva cerrada orientable regular a trozos $\Gamma \subset S$, entonces $\text{rot } \mathbf{f} = \mathbf{0}$ sobre S .

Observación El inverso de este teorema no es válido para un abierto arbitrario S , salvo cuando S es conexo. Por otro lado, el resultado es válido cuando S un paralelepípedo rectangular de la forma $S = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \times [c_1, c_2]$. Así, dado un campo vectorial \mathbf{f} continuamente diferenciable sobre S , para el cual $\text{rot } \mathbf{f} = \mathbf{0}$, el potencial φ se construye por:

$$\varphi(x, y, z) = \int_{x_0}^x f_1(u, y_0, z_0) du + \int_{y_0}^y f_2(x, v, z_0) dv + \int_{z_0}^z f_3(x, y, w) dw + \varphi(x_0, y_0, z_0),$$

donde $(x_o, y_o, z_o), (x, y, z) \in S$. Para verificar la fórmula derivando con respecto a x tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= f_1(x, y_o, z_o) + \int_{y_o}^y \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, v, z_o) dv + \int_{z_o}^z \frac{\partial f_3}{\partial x}(x, y, w) dw \\ &= f_1(x, y_o, z_o) + \int_{y_o}^y \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, v, z_o) dv + \int_{z_o}^z \frac{\partial f_1}{\partial z}(x, y, w) dw \\ &= f_1(x, y_o, z_o) + [f_1(x, y, z_o) - f_1(x, y_o, z_o)] + [f_1(x, y, z) - f_1(x, y, z_o)] \\ &= f_1(x, y, z). \end{aligned}$$

En este proceso se ha utilizado la propiedad iii) y la derivación bajo el signo de integral. Las relaciones

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = f_2, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = f_3 \text{ se prueban de forma similar.}$$

Así $\nabla \varphi = \mathbf{f}$ y consecuentemente $\int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0$, vale para toda curva orientado cerrada regular a trozos $\Gamma \subset S$.

Observe que la fórmula de $\varphi(x, y, z)$ sin el último término, es la integral de línea de \mathbf{f} sobre la línea poligonal con vértices en los puntos $(x_o, y_o, z_o), (x, y_o, z_o), (x, y, z_o), (x, y, z)$.

Teorema 2.3.5 *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ un abierto simplemente conexo, es decir tal que para cada curva cerrada regular a trozos, puede ser contraído a un punto $P_o \in S$, de modo que quede dentro de S el proceso de contracción, entonces si un campo vectorial \mathbf{f} continuamente diferenciable en S satisface la condición $\text{rot } \mathbf{f} = \mathbf{0}$, la igualdad $\int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0$ se tiene para cualquier curva $\Gamma \subset S$ orientada y cerrada.*

Observación Las condiciones del teorema implican la existencia de una función vectorial \mathbf{f} en S . Como un ejemplo de una región satisfaciendo la condición del teorema, podemos tomar una curva conectando dos superficies de esferas concéntricas. La región obtenida del espacio entero por la supresión de los puntos del eje z que no satisfacen la condición.

En el ejemplo siguiente se construye un campo vectorial donde el teorema ?? no se da. Más adelante se probarán el teorema de Green y de Stokes. Estos dan una explicación de la validez del teorema.

Todas las nociones y teoremas pueden aplicarse en el caso del plano. Sea \mathbb{R}^2 el plano xy y sea $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leq t \leq b$, $a < b$, las ecuaciones paramétricas de una curva orientada regular a trozos Γ dentro de un abierto $S \subset \mathbb{R}^2$.

Sea $\mathbf{f}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ definido en S , la integral de línea de \mathbf{f} sobre Γ , puede considerarse como un caso especial de la integral de línea en 3 dimensiones, en la cual $f_3 = 0$, $f_1 = P$, $f_2 = Q$, es decir:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma} P dx + Q dy = \int_a^b [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)] dt.$$

En este caso el potencial φ de f es una función $\varphi(x, y)$ definida sobre S de modo que su gradiente es $\nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = f$.

Ejemplo 2.3.13 El vectorial f en el plano xy con componentes:

$$P(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

tiene derivadas parciales continuas en $S = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. El conjunto S no satisface las condiciones del teorema ??.

Si consideramos a $S^* = \mathbb{R}^2 \setminus]-\infty, 0] \times \{0\}$, es decir \mathbb{R}^2 sin el semieje x negativo, de acuerdo al teorema existe φ definido sobre S^* tal que $\nabla\varphi = f$. Así se puede definir la integral de línea de f sobre una curva $\Gamma \subset S^*$ que va desde $(1, 0)$ a (x, y) :

$$\varphi(x, y) = \int_{\Gamma} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}.$$

Sin embargo, esta función no puede extenderse a S^* de modo que sea continua. Además el valor de $\varphi(x, y)$ en un punto arbitrario $(\cos \theta, \sin \theta) \in S^*$ del círculo de radio 1 y centro $(0, 0)$, es igual a $\varphi(\cos \theta, \sin \theta) = \int_0^\theta d\theta = \theta$.

El punto variable puede moverse a lo largo del círculo unidad del punto inicial $(1, 0)$ al punto $(-1, 0)$ variando θ de π a $-\pi$. En el primer caso, el valor límite de φ es igual a π y en el segundo caso es igual a $-\pi$, lo que prueba que la función φ no puede extenderse al plano en la vía deseada.

Como las funciones φ que son potenciales de f sobre S difieren en una constante, existe una única función definida sobre S con estas consideraciones. Así hemos probado que existe una curva singular cerrada en S , tal que la integral de f sea distinta de cero. Como una curva de este tipo, se puede tomar el círculo Γ de radio 1 y centro en el origen y tenemos $\int_{\Gamma} f \cdot dr = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$, lo que implica que no existe φ definida sobre S que sea una función potencial de f sobre S .

2.4 Teorema de Green

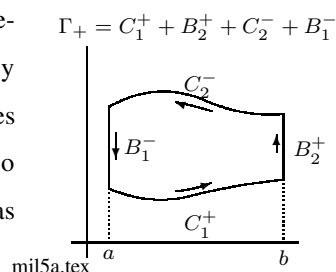
El teorema de Green⁶ relaciona la integral de línea, a lo largo de una curva cerrada Γ en el plano, con la integral doble sobre la región encerrada por la curva Γ . En este sentido nos referiremos a integrales de

⁶**George Green (1793-1841)** Nace el julio de 1793 en Sneinton, Nottingham, Inglaterra. Muere el 31 de mayo de 1841 en Sneinton, Nottingham, Inglaterra. Su padre era panadero en Nottingham y trabajó en la panadería con su padre. No se tiene conocimiento cómo llegó a ser uno de los matemáticos más avanzadas de su tiempo, con clara influencia de las ideas matemáticas francesas.

Nadie sin suficientes conocimientos matemáticas podría apreciar la importancia del trabajo de Green. Las cosas cambiaron cuando se contactó con Sir Edward Bromhead. Bromhead había estudiado matemática en Cambridge y había sido un miembro de la Sociedad Analítica y le propuso estudiar en Cambridge. Green va a Cambridge en octubre de 1833 a la edad de 40. En 1838 y

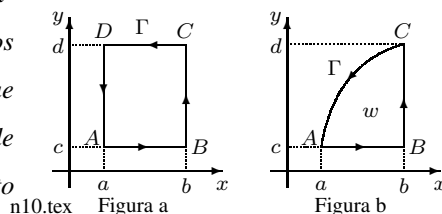
línea sobre curvas que son frontera de regiones S en el plano. Es importante recordar que una curva simple cerrada, que es frontera de una región S del tipo I o II, tiene dos orientaciones: una positiva (Γ_+ en el sentido contrario a las manecillas del reloj) y una negativa (Γ_- en el sentido de las manecillas del reloj).

La frontera Γ de S , se puede descomponer en cuatro curvas: una superior, una inferior (C_2, C_1), una izquierda y una derecha (B_1 y B_2) y podemos escribir $\Gamma_+ = C_1^+ + B_2^+ + C_2^- + B_1^-$, donde los exponentes $+$ indican las curvas orientadas en la dirección de izquierda a derecha o de abajo hacia arriba y los exponentes $-$ indican las curvas orientadas en la dirección de derecha a izquierda o de arriba hacia abajo.



Diremos también que la dirección de recorrido de la curva Γ frontera de la región S es positiva, si al desplazarse a lo largo de la curva, con la orientación correcta, la región S está a la izquierda. Esta observación presenta toda su utilidad con las superficies en \mathbb{R}^3 .

Teorema 2.4.1 Sea $S \subset \mathbb{R}^2$ un abierto, $P, Q: S \rightarrow \mathbb{R}$ funciones de clase C^1 , sea Γ una curva cerrada regular a trozos y sea R la unión de Γ y la región que encierra, de modo que $R \subset S$, con la propiedad de que se puede partir con ayuda de líneas paralelas a los ejes coordenados x, y , en un número finito de partes, cada una de las cuales es del tipo w , entonces:



$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\Gamma} P dx + Q dy,$$

donde w es una región del tipo de la figura b) adjunta.

Demostración Vamos a probar que la fórmula de Green es válida para un rectángulo $\Delta = [a, b] \times [c, d]$ (ver Figura a). En este caso, la frontera Γ de R es la unión de cuatro segmentos de recta, dos verticales

1839 publica dos trabajos en hidrodinámica (el movimiento de las olas en canales), dos trabajos en reflexión y refracción de luz y dos trabajos en reflexión y refracción del sonido.

En mayo de 1840 vuelve a Nottingham padeciendo problemas de salud. Sólo unas semanas antes de la muerte de Green, se le había admitido en el Saint Peter's College de Cambridge. Sesenta años más tarde Thomson recuerda su excitación y la de Liouville y Sturm, a quienes les mostró el trabajo de Green en París en el verano de 1845. Después de volver a Cambridge, Thomson fue responsable de recolectar los trabajos de Green, con una introducción (1850-54). Ni Thomson, ni Maxwell, ni persona alguna, hubiera pensado que la teoría matemática general de potencial que desarrolló el hijo de un panadero autodidacta, llevaría las teorías matemáticas de electricidad a la industria del siglo veinte. Su trabajo versó sobre la teoría del potencial en relación con la electricidad y el magnetismo, las vibraciones, las ondas y la teoría de elasticidad. Permaneció casi desconocido en Inglaterra hasta después de su muerte.

y dos horizontales, recorridos en el sentido indicado en la figura a) adjunta. Por otro lado, la integral de línea $\oint_{\Gamma} P dx = \int_{\Gamma_{AB}} P dx + \int_{\Gamma_{CD}} P dx$, puesto que la integral de línea a lo largo de cada segmento vertical es cero. Igualmente, $\oint_{\Gamma} Q dy = \int_{\Gamma_{BC}} Q dy + \int_{\Gamma_{DA}} Q dy$ y así tenemos que:

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy &= \int_c^d \int_a^b \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_c^d (Q(b, y) - Q(a, y)) dy \\ &= \int_{\Gamma_{BC}} Q(x, y) dy + \int_{\Gamma_{DA}} Q(x, y) dy = \oint_{\Gamma} Q(x, y) dy \\ - \iint_{\Delta} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \int_a^b \int_c^d \frac{\partial P}{\partial y} dy dx = - \int_a^b (P(x, d) - P(x, c)) dx \\ &= \int_{\Gamma_{CD}} P(x, y) dx + \int_{\Gamma_{AB}} P(x, y) dx = \oint_{\Gamma} P(x, y) dx. \end{aligned}$$

Vamos a probar que la fórmula es válida para una región del tipo w , donde la curva Γ_{AC} está descrita por la función $y = f(x)$ continua y estrictamente creciente sobre $[a, b]$. La inversa de la función $x = f^{-1}(y)$ está definida sobre $[c, d]$. Así tenemos:

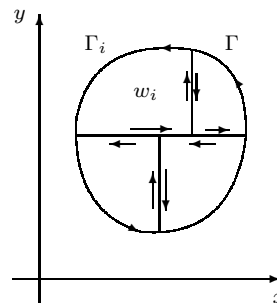
$$\begin{aligned} \iint_w \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy &= \int_c^d \int_{f^{-1}(y)}^b \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_c^d (Q(b, y) - Q(f^{-1}(y), y)) dy \\ &= \int_{\Gamma_{BC}} Q(x, y) dy + \int_{\Gamma_{CA}} Q(x, y) dy = \oint_{\Gamma} Q(x, y) dy, \\ - \iint_w \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= - \int_a^b \int_c^{f(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy dx = - \int_a^b (P(x, f(x)) - P(x, c)) dx \\ &= \int_{\Gamma_{CA}} P(x, y) dx + \int_{\Gamma_{AB}} P(x, y) dx = \oint_{\Gamma} P(x, y) dx. \end{aligned}$$

Rotando la región w , $\frac{\pi}{2}$, π , $\frac{3\pi}{2}$ radianes (el sistema de coordenadas se deja invariante) obtenemos tres tipos de región adicionales, los cuales junto con w forman el conjunto de regiones del tipo w . Es claro que cualquier rectángulo es una región del tipo w .

Consideramos ahora que $R = \bigcup_{k=1}^p w_k$ es una partición de R , en partes del tipo w y sean Γ_k , $k = 1, \dots, p$, las curvas frontera orientadas positivamente de cada región w_k . La fórmula de Green aplicada a cada uno de las regiones w_k da:

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \sum_{k=1}^p \iint_{w_k} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \sum_{k=1}^p \oint_{\Gamma_k} P dx + Q dy = \oint_{\Gamma} P dx + Q dy.$$

La última integral se explica como sigue. La unión C de las fronteras de todas las partes w_k consiste de Γ y la unión de un número finito de segmentos, cada uno de los cuales está contenido en \mathbb{R} y sirve de frontera común de dos partes contiguas de tipo w . Cada segmento es recorrido en dos direcciones opuestas.



n11.tex

La integral de línea de estas partes se cancelan mutuamente, quedando sólo la integral sobre Γ .

La fórmula de Green se aplica a funciones P y Q que son continuas en \mathbb{R} y donde las derivadas parciales $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ son sólo continuas en $\mathring{\mathbb{R}}$. En tales casos, la fórmula de Green es válida si la integral de la izquierda se entiende en el sentido impropio. Por ejemplo, sea \mathbb{R} el interior del círculo $x^2 + y^2 = 1$. Se denota \mathbb{R}_ε el interior del círculo $x^2 + y^2 = (1 - \varepsilon)^2$, $\varepsilon > 0$, con frontera Γ_ε (borde del círculo de radio $1 - \varepsilon$). Se puede escribir la relación:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}_\varepsilon} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = & \\ \int_{-1+\varepsilon}^{1+\varepsilon} P(x, \sqrt{(1-\varepsilon)^2 - x^2}) dx + \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} P(x, -\sqrt{(1-\varepsilon)^2 - x^2}) dx + & \\ \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} Q(\sqrt{(1-\varepsilon)^2 - y^2}, y) dy + \int_{1-\varepsilon}^{-1+\varepsilon} Q(-\sqrt{(1-\varepsilon)^2 - y^2}, y) dy, & \quad (\varepsilon > 0). \end{aligned}$$

Dado que $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son uniformemente continuas en \mathbb{R} , las integrales de la derecha, tienden a un límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, la cual es igual a la integral de la izquierda cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, es decir tiene al mismo límite que es la integral doble impropia con singularidades en Γ . Así obtenemos:

$$\iint_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\Gamma} P dx + Q dy.$$

Ejemplo 2.4.1 El área expresada como integral de línea

El área de una región plana puede calcularse por $\frac{1}{2} \oint_{\Gamma} x dy - y dx$, donde Γ es la curva que limita a la región plana (en el sentido de integración positivo).

En efecto, se sabe que el área de una región \mathbb{R} está dada por:

$$\text{Área}(\mathbb{R}) = \iint_{\mathbb{R}} dx dy = \iint_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

donde P, Q son tales que $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$. Se puede tomar $Q(x, y) = \frac{1}{2}x$, $P(x, y) = -\frac{1}{2}y$.

Si R es la región encerrada por la curva Γ , podemos aplicar de teorema de Green y se tiene:

$$\text{Área}(R) = \oint_{\Gamma} P dx + Q dy = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} -y dx + x dy.$$

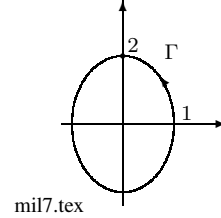
Si la curva frontera Γ está dada por $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leq t \leq b$, la integral de línea que da el área, toma la forma:

$$\text{Área}(R) = \frac{1}{2} \int_a^b (-y(t)x'(t) + x(t)y'(t)) dt = \frac{1}{2} \int_a^b \begin{vmatrix} x(t) & y(t) \\ x'(t) & y'(t) \end{vmatrix} dt.$$

Es evidente que se da la igualdad $\oint_{\Gamma_{\pm}} x dy = -\oint_{\Gamma_{\pm}} y dx = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma_{\pm}} x^2 d\left(\frac{y}{x}\right) = \pm|R|$, donde el signo $+$ corresponde al caso de orientación del contorno $\Gamma = \Gamma_+$ y el signo $-$ corresponde a la orientación negativa $\Gamma = \Gamma_-$.

Ejemplo 2.4.2 El área de una elipse representada por la ecuación paramétrica $x = a \cos \theta$, $y = b \sin \theta$, $a > 0$, $b > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$, se puede determinar usando la fórmula anterior: $|R| = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos \theta b \cos \theta - b \sin \theta (-a \sin \theta)) d\theta = \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} d\theta = ab\pi$.

Ejemplo 2.4.3 Usando el teorema de Green calcular el trabajo realizado por la fuerza $f(x, y) = (y + 3x, 2y - x)$, al mover una partícula a lo largo de la elipse $4x^2 + y^2 = 4$, en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

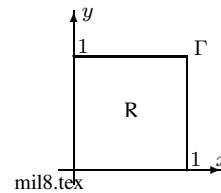


En efecto, el trabajo es $\int_{\Gamma} f \cdot dr = \int_{\Gamma} P dx + Q dy$, con $P(x, y) = y + 3x$, $Q(x, y) = 2y - x$ y Γ es la elipse. Como $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -2$, por el teorema de Green tenemos:

$$\oint_{\Gamma} P dx + Q dy = \iint_R (-2) dx dy = -2\text{Área}(R) = -2(2\pi) = -4\pi.$$

Ejemplo 2.4.4 Calcular $\int_{\Gamma} (5 - xy - y^2) dx - (2xy - x^2) dy$ sobre la curva Γ que es el cuadrado de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$.

Se tiene que $P = 5 - xy - y^2$, $Q = 2xy + x^2$, $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 3x$, por lo que:



$$\oint_{\Gamma} P dx + Q dy = 3 \iint_R x dx dy = 3 \int_0^1 dy \int_0^1 x dx = \frac{3}{2}.$$

Se puede verificar que el teorema de Green es también válido para regiones del tipo $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$, donde f, g son continuas en $[a, b]$ de modo que $f \leq g$.

Una razonamiento similar se puede emplear, para demostrar el teorema de Green para regiones del tipo $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/c \leq y \leq d, h(y) \leq x \leq \ell(y)\}$, donde h, ℓ son continuas en $[c, d]$, con $h \leq \ell$.

2.4.1 Demostración de la fórmula de cambio de variable usando el teorema de Green

Vamos a demostrar la fórmula $\iint_R dx dy = \iint_{R'} |\det J(u, v)| du dv$, en el caso particular que las aplicaciones $x(u, v), y(u, v)$ son de clase C^2 , usando el teorema de Green. Supongamos que $\det J(u, v)$ nunca se anula en R' . El significado del signo del Jacobiano es que, cuando un punto (x, y) describe la frontera de R en el sentido contrario de las agujas del reloj, el punto imagen (u, v) describe la frontera R' , en el mismo sentido si $\det J(u, v) > 0$ y en sentido contrario si $\det J(u, v) < 0$. Supongamos que $\det J(u, v) > 0$.

Primeramente veamos que la integral doble en el plano xy :

$$\iint_R dx dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

cuando $Q(x, y) = x, P(x, y) = 0$. Por el teorema de Green tenemos que:

$$\iint_R dx dy = \int_{\Gamma} P dx + Q dy = \int_{\Gamma} x dy,$$

donde Γ es la frontera de R reconocida en sentido contrario a las agujas del reloj.

De manera similar, transformamos la integral doble en la región R' a una integral de línea a lo largo de la frontera Γ' de R' . El Jacobiano $\det J(u, v)$ se escribe:

$$\det J(u, v) = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + x \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} - x \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \left(x \frac{\partial y}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(x \frac{\partial y}{\partial u} \right)$$

y aplicando el teorema de Green tenemos:

$$\iint_{R'} \det J(u, v) du dv = \int_{\Gamma'} \left(x \frac{\partial y}{\partial u} du + x \frac{\partial y}{\partial v} dv \right).$$

Consideremos la parametrización de Γ' , $\alpha(t) = (u(t), v(t))$ y la representación de Γ dada por $\beta(t) = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)))$, entonces tenemos que:

$$\beta'(t) = \left(\frac{\partial x}{\partial u} u'(t) + \frac{\partial x}{\partial v} v'(t), \frac{\partial y}{\partial u} u'(t) + \frac{\partial y}{\partial v} v'(t) \right)$$

y se concluye que:

$$\int_{\Gamma} x dy = \int_a^b x(u(t), v(t)) \left(\frac{\partial y}{\partial u} u'(t) + \frac{\partial y}{\partial v} v'(t) \right) dt = \int_{\Gamma'} x \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right),$$

es decir:

$$\iint_{\mathbf{R}} dx dy = \iint_{\mathbf{R}'} |\det J(u, v)| du dv.$$

Una vez establecido este resultado, podemos probar la fórmula general:

$$\iint_{\mathbf{R}} f(x, y) dx dy = \iint_{\mathbf{R}'} f(x(u, v), y(u, v)) |\det J(u, v)| du dv.$$

Sea h una función escalonada sobre \mathbf{R} y sea P una partición de $m \cdot n$ sub-rectángulos \mathbf{R}_{ij} de tamaño $\Delta x_i \cdot \Delta y_j$ y sea c_{ij} el valor que toma h sobre \mathbf{R}_{ij} , entonces:

$$\Delta x_i \cdot \Delta y_j = \iint_{\mathbf{R}_{ij}} dx dy = \iint_{\mathbf{R}_{ij}} |\det J(u, v)| du dv,$$

es decir:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} c_{ij} \Delta x_i \Delta y_j &= \iint_{\mathbf{R}} h(x, y) dx dy = \sum_{i,j} c_{ij} \iint_{\mathbf{R}_{ij}} |\det J(u, v)| du dv \\ &= \iint_{\mathbf{R}'} h(x(u, v), y(u, v)) |\det J(u, v)| du dv. \end{aligned}$$

Sea f una función acotada integrable en \mathbf{R} y sean s y t funciones escalonadas tales que:

$$s(x, y) \leq f(x, y) \leq t(x, y), \quad (x, y) \in \mathbf{R},$$

entonces $S(u, v) = s(x(u, v), y(u, v)) \leq f(x(u, v), y(u, v)) = F(u, v) \leq t(x(u, v), y(u, v)) = T(u, v)$, $(u, v) \in \mathbf{R}'$, por lo que:

$$\iint_{\mathbf{R}'} S(u, v) |\det J(u, v)| du dv \leq \iint_{\mathbf{R}'} F(u, v) |\det J(u, v)| du dv \leq \iint_{\mathbf{R}'} T(u, v) |\det J(u, v)| du dv,$$

o bien:

$$\iint_{\mathbf{R}} s(x, y) dx dy \leq \iint_{\mathbf{R}'} F(u, v) |\det J(u, v)| du dv \leq \iint_{\mathbf{R}} t(x, y) dx dy.$$

Como f es integrable se tiene que:

$$\iint_{\mathbf{R}} f(x, y) dx dy = \iint_{\mathbf{R}'} f(x(u, v), y(u, v)) |\det J(u, v)| du dv$$

y la fórmula es válida sobre rectángulos.

El resultado se puede extender a regiones S más generales, eligiendo un rectángulo que contenga a S y considerar en vez de f una función \tilde{f} que coincide con f en S y vale 0 en $\mathbf{R} \setminus S$. De esta manera tenemos que:

$$\iint_S f = \iint_{\mathbf{R}} \tilde{f} = \iint_{\mathbf{R}'} \tilde{f}(x(u, v), y(u, v)) |\det J(u, v)| du dv = \iint_{S'} f(x(u, v), y(u, v)) |\det J(u, v)| du dv.$$

Teorema 2.4.2 Si $f(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ es un campo vectorial de clase C^1 en un conjunto abierto simplemente conexo S del plano, entonces f es un gradiente en S si y sólo si tenemos que $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \forall (x, y) \in S$.

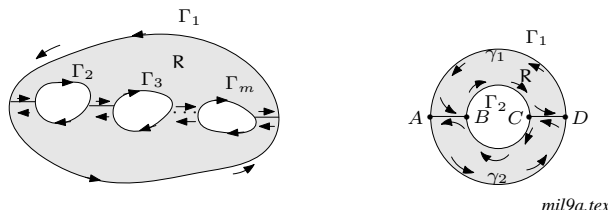
Teorema 2.4.3 Sean $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$, m curvas de Jordan, regulares a trozos que tienen las propiedades siguientes:

- Dos curvas cualesquiera $\Gamma_i, \Gamma_j, i \neq j$, no se cortan.
- Todas las curvas $\Gamma_2, \dots, \Gamma_m$ están situadas en el interior de Γ_1 .
- La curva Γ_i está en el exterior de la curva Γ_j para cada $i \neq j, i > 1, j > 1$.

Sea R la región que consiste en la unión de Γ_1 con el interior de Γ_1 que no está dentro de cualquiera de las curvas $\Gamma_2, \dots, \Gamma_m$ (ver siguiente figura).

Sean P y Q aplicaciones de clase C^1 en un conjunto abierto S que contiene a R , entonces:

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\Gamma_1} P dx + Q dy - \sum_{k=2}^m \oint_{\Gamma_k} P dx + Q dy.$$



mil9a.tex

Se puede demostrar el teorema, introduciendo cortes que transformen R en una unión de un número finito de regiones simplemente conexas, limitadas por curvas de Jordan.

El teorema de Green se aplica separadamente a cada una de las partes y se suman los resultados.

Analizaremos el caso $m = 2$, por inducción se demuestra para un número m de curvas.

Para el caso $m = 2$, tomamos las circunferencias Γ_1 y Γ_2 , siendo Γ_1 la mayor.

Se realizan los cortes AB y CD (ver figura anterior); sea γ_1 la curva de Jordan que consiste en las mitades superiores de Γ_1 y Γ_2 y los segmentos AB y CD . Llamamos γ_2 la otra curva de Jordan formada por las mitades inferiores de Γ_1 y Γ_2 y los segmentos AB y CD . Aplicamos el teorema de Green a cada una de las regiones limitadas por γ_1 y γ_2 y sumamos las dos identidades así obtenidas. Las integrales calculadas a lo largo de los cortes se eliminan unas con otras, ya que cada corte es recorrido una vez en cada dirección y se obtiene:

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\Gamma_1} P dx + Q dy - \oint_{\Gamma_2} P dx + Q dy.$$

El signo menos aparece debido a la dirección (contraria a las agujas del reloj) con que se recorre Γ_2 .

Observación Para una región simplemente conexa, la condición $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ implica que la integral de línea $\int P dx + Q dy$ es independiente del camino. Como ya sabemos, si S no es simplemente conexo, la condición $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ no implica la independencia del camino. No obstante para este caso existe una condición de independencia del camino.

Teorema 2.4.4 Invariancia de una integral de línea al deformar al curva Sean P y Q aplicaciones de clase C^1 sobre un conjunto abierto conexo $S \subset \mathbb{R}^2$, tales que $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ en todo S . Sean Γ_1 y Γ_2 dos curvas de Jordan regulares a trozos situadas en S y que satisfagan las siguientes condiciones:

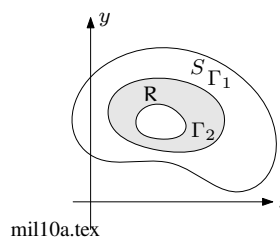
a) Γ_2 está en el interior de Γ_1 .

b) Los puntos interiores a Γ_1 que son exteriores a Γ_2 pertenecen a S , entonces:

$$\oint_{\Gamma_1} P dx + Q dy = \oint_{\Gamma_2} P dx + Q dy,$$

recorriendo ambas curvas en el mismo sentido.

Demostración La región R está constituida por los puntos situados entre las dos curvas Γ_1 y Γ_2 y las propias curvas. Dado que $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ en S , se tiene que $\iint_R \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx dy = 0$, por lo que $\oint_{\Gamma_1} P dx + Q dy = \oint_{\Gamma_2} P dx + Q dy$.

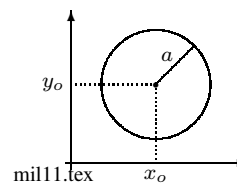


2.4.2 Número de giros

El valor de una integral de línea depende frecuentemente de la curva y el sentido de recorrido de la misma. Así el teorema de Green necesita que la integral se haga en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

Consideremos la curva Γ descrita por $r(t) = (x_0, y_0) + (a \cos t, a \sin t)$ (circunferencia de radio a con centro (x_0, y_0) , $0 \leq t \leq 2\pi$). Se dice que la curva recorre la circunferencia en el sentido positivo o contrario al de las agujas del reloj. Además si se reemplaza t por $-t$ la curva describe la circunferencia en el sentido negativo o de las agujas del reloj.

Así se ha dado una descripción completamente analítica del sentido de una circunferencia. Sin embargo, en general no es tan simple hacer lo mismo con una curva cerrada.



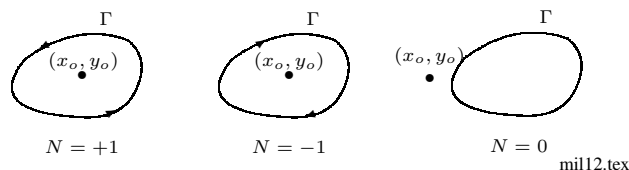
Para curvas regulares a trozos puede hacerse introduciendo el concepto de números de giros, que es un instrumento analítico que nos da un método preciso para contar el número de veces que el vector $r(t)$ gira alrededor de un punto dado, cuando describe una curva cerrada dada.

Sea Γ una curva cerrada regular a trozos en \mathbb{R}^2 , descrita por la función $r(t)$ definida en un intervalo $[a, b]$, $r(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$. Si $(x_0, y_0) \notin \Gamma$, el número de giros de r alrededor del punto (x_0, y_0) se define por:

$$\begin{aligned} N(r, (x_0, y_0)) &= \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{(x(t) - x_0)y'(t) - (y(t) - y_0)x'(t)}{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \frac{-(y - y_0)dx + (x - x_0)dy}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}. \end{aligned}$$

Se puede probar que el valor de esta integral siempre es un entero. Además, si Γ es una curva de Jordan (curva cerrada simple) este entero es:

$$\begin{aligned} 0 & \text{ si } (x_0, y_0) \text{ es exterior a } \Gamma \\ \pm 1 & \text{ si } (x_0, y_0) \text{ es interior a } \Gamma, \end{aligned}$$



lo que permite definir la orientación positiva y negativa para Γ del siguiente modo:

$N = 1$ para todo punto (x_0, y_0) interior de Γ , decimos que $r(t)$ describe la curva Γ en el sentido positivo.

$N = -1$ para todo punto (x_0, y_0) interior de Γ , decimos que $r(t)$ describe la curva Γ en el sentido negativo.

Para probar que la integral que da el número de giros es siempre ± 1 para una curva cerrada simple alrededor de (x_0, y_0) , usamos en teorema ??.

Sea S la región abierta conexa constituida por todos los puntos del plano excepto (x_0, y_0) , la integral de línea $\frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \frac{-(y - y_0)dx + (x - x_0)dy}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ se escribe de la forma $\int_{\Gamma} P dx + Q dy$ y se comprueba que $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ en todo S , por lo que si (x_0, y_0) es interior a Γ , el teorema ?? nos permite reemplazar Γ por una circunferencia con centro (x_0, y_0) sin que cambie el valor de la integral. En tal caso tenemos que si tomamos la curva $r(t) = (x_0, y_0) + a(\cos t, \sin t)$, tenemos que:

$$N(r, (x_0, y_0)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 dt = 1.$$

Un razonamiento análogo prueba que la integral es -1 , cuando Γ está orientada negativamente. Esto demuestra que el número de giros es ± 1 , para una curva cerrada simple que incluye en su interior el punto (x_0, y_0) .

2.5 Formas diferenciales

Definición 2.5.1 Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, se llama forma diferencial (de grado uno) sobre U toda aplicación $\omega: U \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, tal que existen n aplicaciones $f_i: U \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 sobre U , de modo que $\forall x \in U$, $\omega(x) = f_1(x)dx_1 + \cdots + f_n(x)dx_n$.

Recordemos que $dx_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es tal que $dx_i(h) = h_i$, con $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$.

Definición 2.5.2 Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, ω una forma diferencial sobre U se dice exacta (o que ω admite una primitiva sobre U), si existe una aplicación $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 sobre U tal que $d\varphi = \omega$ (i.e. $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = f_i$, $i = 1, \dots, n$). La aplicación φ , si existe, se llama primitiva de ω sobre U .

Ejemplo 2.5.1 La forma diferencial $\omega(x) = \sum_{i=1}^n x_i dx_i$ es exacta y admite como primitiva $\varphi(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + \cdots + x_n^2)$.

Observación Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y ω una forma diferencial sobre U . Si U es conexo, ω es exacta y si φ es una primitiva de ω , entonces $\varphi + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ es también una primitiva de ω .

Definición 2.5.3 Forma diferencial cerrada Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, ω una forma diferencial sobre U , se dice que ω es cerrada sobre U si y sólo si $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$, $i, j = 1, \dots, n$.

Teorema 2.5.1 Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, ω una forma diferencial sobre U , si ω es exacta entonces ω es cerrada sobre U .

Demostración Sean f_1, \dots, f_n las aplicaciones de ω , entonces $\exists \varphi: U \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = f_i$, $i = 1, \dots, n$ y como f_i es de clase C^1 , $i = 1, \dots, n$, se tiene que φ es de clase C^2 sobre U , por lo que $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$, con $i, j = 1, \dots, n$.

Teorema 2.5.2 Poincaré⁷

⁷**Jules Henri Poincaré (1854-1912)** Matemático francés nacido en Nancy y fallecido en París. Poincaré ha sido calificado por algunos como el último de los matemáticos que dominó toda esta ciencia, ya que fue capaz de realizar un trabajo creador en casi todas las ramas de las matemáticas, y también en astronomía, e incluso en literatura. Se interesó ya de muy joven por las matemáticas, graduándose como doctor en 1879, siendo Hermite uno de sus profesores. Este interés está documentado por sus escritos filosóficos y por una masa imponente de trabajos matemáticos, en las cuales, entre otras cosas, contribuyó a echar las bases de la topología. Más imponente todavía es el conjunto de trabajos en torno a la física matemática y la física teórica. Su obra científica fue muy notable; además de treinta volúmenes, un número impresionante de artículos, ensayos y memorias, reunidos en "Tratados y memorias". Fue uno de los primeros en comprender la importancia de la teoría de la relatividad de Einstein.

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y ω una forma diferencial sobre U , si U es conexo y ω es cerrada, entonces ω es exacta sobre U .

Demostración Se tiene que $\forall \mathbf{x} \in U$, $\omega(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x})dx_1 + \dots + f_n(\mathbf{x})dx_n$, $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$. Sea $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in U$ y sea $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in U$, entonces $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\varphi(\mathbf{x}) = \int_0^1 (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{a} + t(\mathbf{x} - \mathbf{a})) dt$ es una primitiva de ω sobre U .

En efecto, la aplicación $(t, x_1, \dots, x_n) \mapsto (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{a} + t(\mathbf{x} - \mathbf{a}))$ en $[0, 1] \times U$ es de clase C^1 , entonces $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \int_0^1 \left(f_i(\mathbf{a} + t(\mathbf{x} - \mathbf{a})) + \sum_{j=1}^n (x_j - a_j) t \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\mathbf{a} + t(\mathbf{x} - \mathbf{a})) \right) dt$, $\mathbf{x} \in U$.

Como ω es cerrada sobre U , integrando por partes se tiene:

$$\int_0^1 \left(\sum_{j=1}^n (x_j - a_j) t \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\mathbf{a} + t(\mathbf{x} - \mathbf{a})) \right) dt = \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^n (x_j - a_j) t \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(\mathbf{a} + t(\mathbf{x} - \mathbf{a})) \right) dt =$$

$$t f_i(\mathbf{a} + t(\mathbf{x} - \mathbf{a})) \Big|_0^1 - \int_0^1 f_i(\mathbf{a} + t(\mathbf{x} - \mathbf{a})) dt = f_i(\mathbf{x}) - \int_0^1 f_i(\mathbf{a} + t(\mathbf{x} - \mathbf{a})) dt, \text{ es decir } \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x}).$$

Así φ es una primitiva de ω sobre U y ω es exacta sobre U .

2.5.1 Aplicaciones a las ecuaciones diferenciales exactas de primer orden

Las formas diferenciales pueden aplicarse a la solución de ecuaciones diferenciales de la forma $y' = f(x, y)$. Si multiplicamos por un factor $R(x, y)$ no nulo, la ecuación diferencial la escribimos $R(x, y)y' - f(x, y)R(x, y) = 0$ i.e. $Q(x, y)y' + P(x, y) = 0$, o bien $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$.

Supongamos que P, Q son continuas en un conjunto $S \subset \mathbb{R}^2$ conexo, el campo vectorial $\mathbf{f}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ es tal que ω es exacta si $\mathbf{f} = \nabla \varphi$, para cada $(x, y) \in S$. Así tenemos que $\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0$ i.e. $\varphi(x, y) = c$, es decir una solución $y(x)$ de la ecuación diferencial $y' = \varphi(x, y)$, para $x \in [a, b]$ es tal que $(x, y(x)) \in S$.

Demostremos que $\varphi(x, y(x)) = c$ para una cierta constante c .

Sea $g(x) = \varphi(x, y(x))$, entonces $g'(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y(x))y'(x) = P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$, por lo que $g'(x) = 0$, $x \in]a, b[\implies g(x) = c$, $x \in]a, b[$.

Se puede invertir el razonamiento para hallar una solución de la ecuación diferencial. Sea la ecuación $\varphi(x, y) = c$ y consideremos y como función diferenciable de x y sea $g(x) = \varphi(x, y(x)) = c$, entonces g es constante en $]a, b[$, por lo que $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$, de modo que y es una solución. Así hemos demostrado el teorema siguiente.

Teorema 2.5.3 Consideremos la forma diferencial exacta $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ en un conjunto conexo abierto S y sea φ tal que $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = P$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q$ en todo S , entonces la ecuación diferencial $Q(x, y)y' + P(x, y) = 0$ tiene por solución $y(x)$ que satisface la ecuación $\varphi(x, y(x)) = c$.

Inversamente, si la ecuación $\varphi(x, y) = c$ define y como función implícita diferenciable de x , entonces esta función es una solución de la ecuación diferencial $Q(x, y)y' + P(x, y) = 0$.

Observación El teorema anterior nos da una manera de resolver ecuaciones diferenciales exactas de primer orden. La función φ primitiva de ω satisface $\varphi(x, y(x)) = c$, por lo que podemos considerar la ecuación $\varphi(x, y) = c$ como la representación de una familia de curvas integrales. Es claro que los únicos valores admisibles de c son aquellos para los cuales $\varphi(x_o, y_o) = c$, para algún $(x_o, y_o) \in S$.

Ejemplo 2.5.2 Consideremos la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2 + 6xy^2}{6x^2y + 4y^3}$.

Es claro que podemos escribir $(3x^2 + 6y^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$ i.e. $P(x, y) = 3x^2 + 6xy^2$, $Q(x, y) = 6x^2y + 4y^3$. Integrando P con respecto a x e integrando Q respecto a y , tenemos que $\varphi(x, y) = x^3 + 3x^2y^2 + c_1(y) = 3x^2y^2 + y^4 + c_2(x)$ i.e. $\varphi(x, y) = x^3 + y^4 + 3x^2y^2$.

La solución y de la ecuación diferencial satisface $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = c$, para cierto $c \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 2.5.3 Consideremos la ecuación diferencial $2xy' + y = 0$, entonces tenemos $\omega = ydx + 2xdy$ i.e. $P(x, y) = y$, $Q(x, y) = 2x$, pero $\frac{\partial P}{\partial y} = 1 \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = 2$ y la ecuación diferencial no es exacta. Sin embargo, si multiplicamos ambos miembros por y obtenemos una ecuación que es exacta: $y^2dx + 2xydy = 0$.

La función $\varphi(x, y) = xy^2$ primitiva de la forma diferencial $\omega = y^2dx + 2xydy$, es tal que $\varphi(x, y) = xy^2 = c$.

Definición 2.5.4 Si la ecuación diferencial lineal de primer orden $Q(x, y)y' + P(x, y) = 0$, satisface que al multiplicarse por $\mu(x, y)$, la expresión $\omega = \mu(x, y)Q(x, y)dy + \mu(x, y)P(x, y)dx$ es exacta, se dirá que la ecuación diferencial $\mu(x, y)Q(x, y)y' + \mu(x, y)P(x, y) = 0$ es exacta y $\mu(x, y)$ se denomina factor integrante de la ecuación original $Q(x, y)y' + P(x, y) = 0$.

Nota Una ecuación diferencial puede tener más de un factor integrante. Por ejemplo $\mu(x, y) = 2xy^3$ es otro factor integrante de $ydx + 2xdy = 0$.

2.5.2 Caso de funciones de tres variables

Sea φ un campo escalar de clase C^2 , sobre $U \subset \mathbb{R}^3$ abierto, entonces $\text{rot}(\nabla\varphi(x, y, z)) = \mathbf{0}$, $\forall (x, y, z) \in U$. En efecto, recordemos que $\nabla\varphi(x, y, z) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial\varphi}{\partial z}(x, y, z)\right)$, entonces el rotacional del gradiente es continua sobre U :

$$\text{rot}(\nabla\varphi) = \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\right) = \mathbf{0}.$$

Condición necesaria Supongamos que f es de clase C^1 sobre el abierto $U \subset \mathbb{R}^3$, si f es la derivada de un potencial escalar φ , se tiene $\nabla\varphi(x, y, z) = f(x, y, z)$, por lo que $\text{rot } f(x, y, z) = \mathbf{0}$.

Dado que f es de clase C^1 sobre el abierto U , la condición necesaria para que sea así es que $\text{rot } f(x, y, z) = \mathbf{0}$, $\forall (x, y, z) \in U$, que se traduce en las condiciones:

$$\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

Condición suficiente Sea $U \subset \mathbb{R}^3$ abierto, $f \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$ un campo de vectores tal que $\text{rot } f(x, y, z) = \mathbf{0}$, $\forall (x, y, z) \in U$, entonces para todo $B = [a, b] \times [c, d] \times [e, f] \subset U$, existe un campo escalar $\varphi \in C^2(B, \mathbb{R})$ tal que $\nabla\varphi(x, y, z) = f(x, y, z)$, $\forall (x, y, z) \in B$.

En efecto, sea $f = (P, Q, R)$ con $\text{rot } f = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \mathbf{0}$.

Buscamos una función $\varphi(x, y, z)$ tal que $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = P$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = Q$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z} = R$, donde $f = (P, Q, R)$.

Así tenemos que $\varphi(x, y, z) = \int_a^x P(t, y, z) dt + \alpha(y, z)$,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \int_a^x \frac{\partial P}{\partial y}(t, y, z) dt + \frac{\partial\alpha}{\partial y}(y, z),$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \int_a^x \frac{\partial P}{\partial z}(t, y, z) dt + \frac{\partial\alpha}{\partial z}(y, z).$$

Como $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ y $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$ tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial y} &= \int_a^x \frac{\partial P}{\partial y}(t, y, z) dt + \frac{\partial\alpha}{\partial y}(y, z) \\ &= \int_a^x \frac{\partial Q}{\partial x}(t, y, z) dt + \frac{\partial\alpha}{\partial y}(y, z) = Q(x, y, z) - Q(a, y, z) + \frac{\partial\alpha}{\partial y}(y, z) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} &= \int_a^x \frac{\partial P}{\partial z}(t, y, z) dt + \frac{\partial\alpha}{\partial z}(y, z) \\ &= \int_a^x \frac{\partial R}{\partial x}(t, y, z) dt + \frac{\partial\alpha}{\partial z}(y, z) = R(x, y, z) - R(a, y, z) + \frac{\partial\alpha}{\partial z}(y, z). \end{aligned}$$

Si ponemos que $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = Q$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z} = R$, entonces $Q(a, y, z) = \frac{\partial\alpha}{\partial y}(y, z)$, $R(a, y, z) = \frac{\partial\alpha}{\partial z}(y, z)$, por lo que $\alpha(y, z) = \int_c^y Q(a, t, z) dt + \beta(z)$ i.e.

$$\frac{\partial\alpha}{\partial z} = \int_c^y \frac{\partial Q}{\partial z}(a, y, t) dt + \beta'(z) = \int_c^y \frac{\partial R}{\partial y}(a, t, z) dt + \beta'(z) = R(a, y, z) - R(a, c, z) + \beta'(z).$$

Dado que $\frac{\partial\alpha}{\partial z} = R(a, y, z)$, tenemos que $\beta'(z) = R(a, c, z)$, con lo cual se concluye que $\beta(z) = \int_c^z R(a, b, u) du + c$.

$$\begin{aligned} \text{Finalmente } \varphi(x, y, z) &= \int_a^x P(t, y, z) dt + \alpha(y, z) = \int_a^x P(t, y, z) dt + \int_c^y Q(a, t, z) dt + \beta(z) \\ &= \int_a^x P(t, y, z) dt + \int_c^y Q(a, t, z) dt + \int_e^z R(a, b, t) dt + c. \end{aligned}$$

Tomando en cuenta la construcción hecha, $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = P$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = R$.

2.5.3 Forma diferencial exacta de una función de tres variables

De lo anterior podemos deducir la propiedad siguiente.

Teorema 2.5.4 Sean P, Q, R funciones de clase C^1 sobre $U = [a, b] \times [c, d] \times [e, f] \subset \mathbb{R}^3$, la forma diferencial $\omega = P dx + Q dy + R dz$ es exacta si y sólo si $\forall (x, y, z) \in U$,

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Ejemplo 2.5.4 Consideremos el campo de vectores $P = -\frac{2x}{z}$, $Q = \frac{2y}{z}$, $R = \frac{x^2 - y^2}{z^2}$. El campo está definido en el abierto $U \subset \mathbb{R}^3$ dado por $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z \neq 0\}$.

El campo de vectores es de clase C^1 (en realidad C^∞) sobre U y tenemos que $\forall (x, y, z) \in U$, $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} = -\frac{2y}{z^2}$, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{2x}{z^2}$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0$.

Las condiciones de un diferencial exacto se satisfacen. Verifiquemos que las condiciones de suficiencia se satisfacen. Vamos a determinar una función $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 sobre U tal que $\forall (x, y, z) \in U$, $\nabla \varphi(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$.

Si una función tal φ existe, $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{x^2 - y^2}{z^2}$, por lo que se tiene la existencia de una aplicación $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x, y, z) = \int \frac{x^2 - y^2}{z^2} dz + \psi(x, y) = -\frac{x^2 - y^2}{z} + \psi(x, y)$.

Para determinar φ debemos tener:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y, z) &= -\frac{2x}{z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} = P = -\frac{2x}{z} \implies \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y, z) &= \frac{2y}{z} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = Q = \frac{2y}{z} \implies \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \end{aligned}$$

es decir $\psi(x, y) = c$, con lo cual concluimos que $\varphi(x, y, z) = \frac{y^2 - x^2}{z} + c$.

2.5.4 Caso de funciones de dos variables

Si consideramos que $R = 0$ y que P, Q son independientes de z , tenemos la siguiente propiedad.

Teorema 2.5.5 Sean P, Q funciones numéricas de clase C^1 sobre $B = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$, la forma diferencial $\omega = P dx + Q dy$ es exacta en U si y sólo si $\forall (x, y) \in B$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

Ejemplo 2.5.5 Consideremos el diferencial $\omega = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$, entonces $P = -\frac{y}{x^2 + y^2}$, $Q = \frac{x}{x^2 + y^2}$.

Las aplicaciones P, Q están definidas sobre el abierto $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, son de clase C^1 (en realidad C^∞) sobre U y $\forall (x, y) \in U$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$.

La condición necesaria del teorema ?? se satisface en todo punto del abierto U . Vamos a probar que $\forall B = [a, b] \times [c, d] \subset U$, existe una aplicación $\varphi: B \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 sobre B tal que $\forall (x, y) \in B$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}$.

Observemos que para todo conjunto $B \subset U$ no interseca a la vez las rectas $x = 0$, $y = 0$.

Caso 1 B no interseca la recta $x = 0$.

$$\forall (x, y) \in B, \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} \implies \varphi(x, y) = x \int \frac{dy}{x^2 + y^2} + \psi(x) = \arctg \frac{y}{x} + \psi(x), \psi \in C^2.$$

Además $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \implies -\frac{y}{x^2 + y^2} + \psi'(x) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \implies \psi'(x) = 0$, es decir $\varphi(x, y) = \arctan \frac{y}{x} + c$.

Caso 2 B no interseca la recta $y = 0$.

Una demostración análoga a la anterior, verifica que para B se tiene $\varphi(x, y) = \arctg \frac{x}{y} + c$.

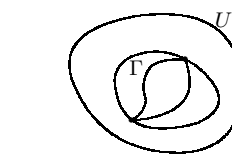
2.5.5 Análisis en los campos gradientes en \mathbb{R}^3

Supongamos en particular que el campo vectorial f de clase C^1 , deriva de un potencial escalar $\varphi(x, y, z)$ de clase C^2 i.e. $f = \nabla \varphi = (P, Q, R)$ en un conjunto $U \subset \mathbb{R}^3$ conexo.

Sea Γ un arco de curva de origen (x_0, y_0, z_0) y extremo (x_1, y_1, z_1) , entonces la integral del diferencial $\omega = P dx + Q dy + R dz = \nabla \varphi \cdot dr$ satisface:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Gamma} \omega = \int_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz = \int_{\Gamma} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \nabla \varphi \cdot dr = \varphi(x_1, y_1, z_1) - \varphi(x_0, y_0, z_0). \end{aligned}$$

En las condiciones indicadas, la integral de línea solo depende de los valores del potencial φ en los extremos de Γ . En otras palabras, la integral de línea no depende del camino seguido, sino sólo de los extremos.



mfd1.tex

En particular, la integral de un gradiente sobre una curva cerrada es nula.

Se pueden generalizar estos resultados de la manera siguiente:

Recordemos que se llaman superficies equipotenciales, o superficies de nivel, las superficies de ecuación $\varphi(x, y, z) = \text{constante}$.

Sean S_1 y S_2 dos superficies equipotenciales, (x_1, y_1, z_1) un punto de S_1 y (x_2, y_2, z_2) un punto de S_2 , Γ una curva que une los puntos (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) . La integral de línea

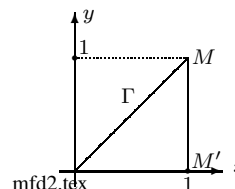
$$\int_{\Gamma} \omega = \int_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz = \varphi(x_2, y_2, z_2) - \varphi(x_1, y_1, z_1) = c_2 - c_1 = c,$$

es un valor constante, independiente de los puntos (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) y depende sólo de S_1 y S_2 . Representa la diferencia de potencial entre S_1 y S_2 .

Ejemplo 2.5.6 La expresión $x dy - y dx$ no es un diferencial exacto. En efecto, $P = -y$, $Q = x$, pero $\frac{\partial Q}{\partial x} \neq \frac{\partial P}{\partial y}$.

Calculemos la integral $I = \int_{\Gamma} x dy - y dx$, donde Γ es el segmento $\{(x, x)/0 \leq x \leq 1\}$. La curva Γ se escribe $\{(t, t)/0 \leq t \leq 1\}$, entonces:

$$I = \int_0^1 (t dt - t dt) = 0.$$



Si existiera una función $\varphi(x, y)$ que tenga diferencial $x dy - y dx$, esta función sería constante lo que es una contradicción.

Calculando I sobre el trayecto Γ' dado por $OM'M$, donde M' es la proyección M sobre el eje x , se tiene⁸:

$$I = \int_{\Gamma'} x dy - y dx = \int_{M'M} x dy = \int_0^1 1 \cdot dt = 1.$$

Las dos trayectorias Γ y Γ' conducen a dos valores distintos de la integral de línea.

Ejemplo 2.5.7 Integrar el diferencial $\omega = \frac{(z+y)dx + (z-x)dy - (x+y)dz}{(y+z)^2}$.

Para verificar las condiciones de continuidad, nos situamos en un dominio simplemente conexo que no corta el plano $y+z=0$. En este caso tenemos que:

$$P = \frac{1}{y+z}, \quad Q = \frac{z-x}{(y+z)^2}, \quad R = -\frac{x+y}{(y+z)^2},$$

satisfacen las condiciones del teorema ??.

En efecto, se busca una función φ tal que:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{y+z}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{z-x}{(y+z)^2}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{x+y}{(y+z)^2},$$

⁸Recordemos que si Γ es una curva plana cerrada, el área encerrada por Γ es $\frac{1}{2} \int_{\Gamma} x dy - y dx$.

$$\text{entonces } \varphi = \frac{x}{y+z} + \psi(y, z) \implies \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{x}{(y+z)^2} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{z-x}{(y+z)^2},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{x}{(y+z)^2} + \frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{x+y}{(y+z)^2},$$

$$\text{por lo que } \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{z}{(y+z)^2}, \frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{y}{(y+z)^2} \implies \psi(y, z) = -\frac{z}{y+z} + \beta(z).$$

$$\text{Por otro lado, } \frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{1}{y+z} + \frac{z}{(y+z)^2} + \beta'(z) = -\frac{y}{(y+z)^2} \implies \beta'(z) = 0 \text{ i.e. } \beta(z) = C.$$

$$\text{Finalmente, } \varphi(x, y, z) = \frac{x-z}{y+z} + C.$$

Observemos que en el transcurso del cálculo hemos determinado la función $\psi(y, z)$ por la condición $d\psi = \frac{z dy - y dz}{(y+z)^2}$. En vez de proceder como anteriormente, notemos que $d\psi = \frac{z(dy+dz) - (y+z)dz}{(y+z)^2} = \frac{z d(y+z) - (y+z) dz}{(y+z)^2}$ y se ve que $d\psi$ es el diferencial de $-\frac{z}{y+z}$. Se tiene pues que $\psi(y, z) = -\frac{z}{y+z} + c$.

En conclusión $\int_{\Gamma} \omega$ depende sólo del punto inicial (x_0, y_0, z_0) y del punto final (x_1, y_1, z_1) i.e.

$$\int_{\Gamma} \omega = \varphi(x_1, y_1, z_1) - \varphi(x_0, y_0, z_0).$$

2.5.6 Caso de campos vectoriales que no son gradientes

En general se demuestra que si se tiene que $f = \nabla \varphi = (P, Q, R)$ de clase C^1 ,

donde φ es un campo escalar de clase C^2 , en un conjunto simplemente conexo

$$U \subset \mathbb{R}^3, \text{ la integral } I = \int_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz =$$

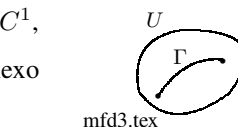
$$\int_{\Gamma} \nabla \varphi \cdot dr \text{ sólo depende del punto inicial y el punto final de } \Gamma.$$

En principio es fácil ver las consecuencias de que U no sea conexo. Para simplificar y con el objeto de ser didácticos, supongamos que $R = 0$ y P, Q son funciones de (x, y) , de modo que P y Q satisfacen las hipótesis $f = \nabla \varphi = (P, Q)$ en $U \subset \mathbb{R}^2$, salvo en un punto (x_0, y_0) del interior de U . Sean Γ_1 y Γ_2 dos curvas contenidas en U tales que (x_0, y_0) este en el interior de la curva cerrada formada por Γ_1 y Γ_2 . Supongamos que las dos integrales de línea sobre Γ_1 y Γ_2 sean diferentes.

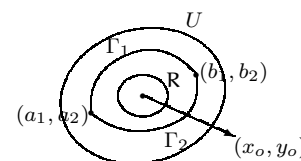
Quitemos de U una región simplemente conexa R que contiene a (x_0, y_0)

y que no interseque a $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Así tenemos un conjunto no simplemente

conexo $U_1 = U \setminus R$ en el que las condiciones se dan y sin embargo la integral de línea depende del camino.



mfd3.tex



mfd4.tex

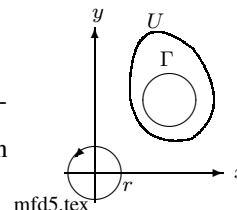
En el ejemplo que sigue veremos una situación en la cual se da esta situación.

Consideremos en el plano $P(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$, $Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ que son continuas en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ al igual que sus derivadas y cumplen $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Vamos a calcular la integral de línea sobre Γ curva cerrada.

$$I = \int_{\Gamma} P dx + Q dy = \int_{\Gamma} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}.$$

Si Γ no contiene al origen entonces $I = 0$, pues existe una región U simplemente conexa que contiene a Γ y no contiene al origen. En esta región las funciones P y Q son continuas y se aplica el teorema anterior.



Si Γ contiene al origen, la integral no es nula. En efecto tomemos el círculo de centro $(0, 0)$ y radio r i.e. $\Gamma = (r \cos \theta, r \sin \theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, entonces

$$\int_{\Gamma} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta}{r^2} d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.$$

Así tenemos $U \subset \mathbb{R}^3$ conexo, donde P, Q, R son continuas salvo en ciertos puntos de discontinuidad, puede suceder que la integral de línea

$$I = \int_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz,$$

dependa no sólo de los puntos inicial y final, sino también de Γ y cuando Γ sea una curva cerrada, la integral no sea nula.

Si tomamos $P(x, y) = \frac{y}{x^2}$, $Q(x, y) = \frac{1}{x}$, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}$, por lo que podemos tener la condición $(P, Q) = \nabla(\frac{y}{x})$ aunque las funciones P, Q son discontinuas en todo el eje y y no sólo en un punto.

2.6 Funciones holomorfas

Sea Ω un abierto de \mathbb{C} , como todo número complejo z se escribe $z = x + iy$, los conjuntos \mathbb{C}_z y $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ están en correspondencia biunívoca. Si f es una aplicación de Ω en \mathbb{C} , se puede considerar f como una aplicación del abierto Ω de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 i.e. si $f \in C^1$, el diferencial de f se escribe $df = f_x(z)dx + f_y(z)dy$, donde f_x, f_y son las derivadas parciales con respecto a las variables x, y . Consideremos las aplicaciones $z \mapsto z$ y $z \mapsto \bar{z}$, los diferenciales de estas aplicaciones son $dz = dx + idy$, $d\bar{z} = dx - idy$. Recuerde que si $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$. Se puede expresar df en función de dz y $d\bar{z}$. En efecto:

$$df = f_x \left(\frac{dz + d\bar{z}}{2} \right) + f_y \left(\frac{dz - d\bar{z}}{2i} \right) = \frac{1}{2}(f_x - if_y)dz + \frac{1}{2}(f_x + if_y)d\bar{z},$$

por lo que se tiene:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}(f_x - if_y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(f_x + if_y).$$

Definición 2.6.1 Sea Ω un abierto sobre \mathbb{C} y una aplicación $f \in C^1$ sobre Ω en \mathbb{C} . Se dice que f es holomorfa si

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \quad \text{i.e.} \quad f_x + if_y = 0.$$

Ejemplo 2.6.1 Si $f = P + iQ$ donde P y Q son reales, demostraremos que f es holomorfa sobre Ω si y sólo si P y Q son de clase C^1 y se tiene:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$$

(condiciones de Cauchy⁹). Así, una función holomorfa sobre Ω es una función a valores complejos que es solución de la ecuación en derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

En efecto, $f(z) = f(x + iy)$ entonces $f_x = f'(z)$, $f_y = if'(z)$, o sea $f_x + if_y = 0$. Por otro lado $f_x = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}$, $f_y = \frac{\partial P}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial y}$, es decir $\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial x} + i\frac{\partial P}{\partial y} = 0$, por lo que:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y}.$$

Ejercicio Las funciones z , z^2 son holomorfas. En efecto:

a) $z = x + iy$, $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial z}{\partial y} = i$, $\frac{\partial z}{\partial x} + i\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

b) $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$, $P(x, y) = x^2 - y^2$, $Q(x, y) = 2xy$ y se tiene

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 2x = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Proposición 2.6.1 Sean f , g funciones holomorfas sobre un abierto Ω , entonces las funciones $f + g$, fg son holomorfas. En un abierto donde $g \neq 0$, las funciones $\frac{1}{g}$, $\frac{f}{g}$ son holomorfas. Si S es una serie entera, la aplicación $x \mapsto S(x)$ es holomorfa al interior del disco de convergencia.

⁹**Augustín Louis Cauchy (1789-1857)** Nace el 21 de Agosto 1789 en Paris, Francia. Muere el 23 de Mayo 1857 en Sceaux (cerca de Paris), Francia. Agustín Louis Cauchy fue pionero en el análisis. Investigó la convergencia y la divergencia de las series infinitas, las ecuaciones diferenciales, los determinantes, la probabilidad y física matemática.

Ocupó diversos puestos en la Facultad de Ciencia de París, el Colegio de Francia y la Escuela Politécnica. En 1814 publicó su trabajo de la integral definida que llegó a ser la base de la teoría de las funciones complejas.

Gracias a Cauchy, el análisis infinitesimal adquiere bases sólidas.

Cauchy, produjo 789 escritos, pero fue desaprobado por la mayoría de sus colegas. Mostró una obstinada rectitud a sí mismo y un agresivo fanatismo religioso. Como un apasionado del realismo pasó algún tiempo en Italia después de rechazar tomar un juramento de lealtad. Dejó París después de la Revolución de 1830. Aceptó una oferta del Rey de Piedmont para dar una cátedra en Turín donde estuvo hasta 1832. En 1833 se marchó a Praga en atención a Charles X y para ser el tutor de su hijo.

Cauchy volvió a París en 1838 y retoma su cargo en la academia pero no su posición de profesor por haber rechazado tomar el juramento de lealtad. Cuando Louis Philippe fue destronado en 1848 Cauchy vuelve a su cátedra en la Sorbonne. Ayudó en los posgrados hasta su muerte.

Demostración En efecto,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(f + g) &= 0 + 0 = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)fg &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)g + f\left(\frac{\partial g}{\partial x} + i\frac{\partial g}{\partial y}\right) = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{1}{g} &= -\frac{1}{g^2}\left(\frac{\partial g}{\partial x} + i\frac{\partial g}{\partial y}\right) = 0, \quad \text{si } g \neq 0. \end{aligned}$$

Para $\frac{f}{g}$ se utiliza la fórmula del producto.

Sea S una serie entera

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k x^k.$$

Los teoremas generales relativos a la convergencia uniforme prueban que:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k z^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) a_k z^k.$$

La función z^k es holomorfa pues $z^k = z \times \cdots \times z$, k veces, con $z \mapsto z$ holomorfa. Las funciones e^z , $\sen z$, $\cos z$ Se define $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sen y)$, se verifica que $\frac{\partial e^z}{\partial \bar{z}} = 0$, por lo que e^z es holomorfa definida sobre el plano complejo.

Se escribe $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$, $\sen z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ y son holomorfas pues son combinaciones lineales de funciones holomorfas. Además se tiene $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$ pues

$$\begin{aligned} e^z e^{z'} &= e^{x+x'} [\cos(y+y') + i \sen(y+y')] \\ &= e^x (\cos y + i \sen y) e^{x'} (\cos y' + i \sen y'). \end{aligned}$$

Integración de funciones holomorfas Si f es una función holomorfa en un abierto Ω de \mathbb{C} . Sea Γ una curva orientada contenida en Ω , lo que significa que Γ es la unión de un número finito de curvas $\Gamma_j: t \mapsto z_j(t)$, donde z_j es una aplicación continuamente derivable, inyectiva, con diferencial inyectivo, de un intervalo en $[a, b]$ en \mathbb{C} . Se escribe:

$$\int_{\Gamma_j} f(z) dz = \int_a^b f(z_j(t)) z'_j(t) dt \quad \text{i.e.} \quad \int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_j \int_{\Gamma_j} f(z) dz.$$

Ejemplo 2.6.2 Calculemos $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z^n}$, donde Γ es un círculo de centro $(0,0)$ y radio R , orientado positivamente.

Consideremos la parametrización $z = Re^{i\theta}$, $dz = iRe^{i\theta} d\theta$, por lo que:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z^n} = \frac{1}{2\pi R^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{-(n-1)i\theta} d\theta = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \neq 1. \end{cases}$$

Homotopía

Definición 2.6.2 Sean Γ, Γ' dos curvas orientadas en un abierto Ω . Sean f_0 y $f_1: I \rightarrow \mathbb{C}$ parametrizaciones de estas curvas con $I = [0, 1]$. Se dice que las curvas son homotópicas si existe una aplicación continua $I_t \times I_\theta \xrightarrow{f} \mathbb{C}$, $(t, \theta) \mapsto f(t, \theta)$ tal que $f(t, 0) = f_0(t)$ y $f(t, 1) = f_1(t)$.

Se observa que esta definición es independiente de la parametrización escogida. De la misma manera, si se define una curva orientada cerrada Γ_A de Ω , se dice que Γ_A y Γ_C son homotópicas. Se ve que esto no depende del origen A escogido en las curvas.

El conjunto de las curvas orientadas homotópicas a una curva Γ forma una clase de equivalencia llamada *clase de homotopía de Γ*

Teorema 2.6.1 Teorema de Cauchy

Sea f una función holomorfa en un abierto Ω de \mathbb{C} , sean Γ_1 y Γ_2 dos curvas cerradas orientadas homotópicas sobre Ω , entonces:

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz = \int_{\Gamma_2} f(z) dz.$$

Demostración Admitiremos que en general el teorema es válido, pues lo demostraremos para el caso en que Γ_1 es el borde de un rectángulo R , cuyos lados son paralelos a los ejes y donde Γ_2 se reduce a un punto de R . Se debe probar que $\int_{\Gamma_1} (P + iQ)(dx + i dy) = 0$, donde P (resp. Q) es la parte real (resp. imaginaria) de f . Es suficiente probar que:

$$\int_{\Gamma_1} P dx - Q dy = \int_{\Gamma_1} Q dx + P dy = 0.$$

Así, si $R = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$ se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} P dx - Q dy &= \int_{a_1}^{a_2} [P(x, b_1) - P(x, b_2)] dx - \int_{b_1}^{b_2} [Q(a_2, y) - Q(a_1, y)] dy \\ &= - \iint_R \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx dy = 0, \end{aligned}$$

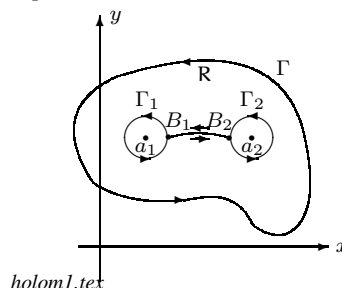
pues $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$. De manera similar se prueba que $\int_{\Gamma_1} Q dx + P dy = 0$.

Teorema 2.6.2 Teorema de residuos simplificado

Sean a_1, a_2 dos puntos distintos de un abierto Ω de \mathbb{C} , sea f una función holomorfa en el abierto de $\Omega' = \Omega \setminus \{a_1, a_2\}$ y sea Γ_j un círculo orientado positivamente, de centro a_j y radio ε , $j = 1, 2$, de modo que tengan una intersección vacía y estén contenidos en Ω' . Sea Γ una curva cerrada orientada de Ω' , se supone que se puede encontrar una curva orientada $\overline{B_1 B_2}$, ($B_j \in \Gamma_j$), tal que la curva cerrada Γ

sea homotópica en Ω' a la curva Γ' obtenida al unir pedazo a pedazo:

- la circunferencia orientada Γ_1 (origen B_1)
- la curva $\overline{B_1 B_2}$
- la circunferencia orientada Γ_2 (origen B_2)
- la curva $\overline{B_2 B_1}$.



Definiendo $\text{Res}(f, a_j) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_j} f(z) dz$ (residuo de f en el punto a_j) se tiene:

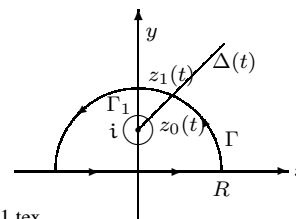
$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^2 \text{Res}(f, a_j).$$

Prueba El teorema de Cauchy aplicado a las curvas orientadas homotópicas Γ y Γ' implican

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^2 \text{Res}(f, a_j) + \int_{\overline{B_1 B_2}} f(z) dz + \int_{\overline{B_2 B_1}} f(z) dz$$

y las dos últimas integrales se anulan, pues representan números opuestos.

Ejemplo a) No se pide en general con detalle verificar que dos curvas orientadas son homotópicas. Por ejemplo si Ω es el semiplano donde $\Im m z > 0$, con $a_1 = i$. Se ve que las curvas orientadas Γ y Γ_1 de la figura son homotópicas en $\Omega' = \Omega \setminus \{i\}$. Además, sea la semi-recta $\Delta(t)$ que sale de i de modo que $\arg(z - i) = 2\pi t$, con $0 \leq t \leq 1$.



Sea $z_0(t)$ y $z_1(t)$ las intersecciones de $\Delta(t)$ con Γ_1 y Γ respectivamente. Γ_1 y Γ son homotópicas, pues la homotopía definida por $(t, \theta) \mapsto z_0(t) + \theta(z_1(t) - z_0(t))$ permite pasar continuamente de Γ_1 a Γ cuando θ varía de 0 a 1.

Ejemplo b) Para calcular un residuo, en general se puede hacer un desarrollo limitado de f en el vecindario considerado. Por ejemplo, $f(z) = (z^2 + 1)^{-2}$ es holomorfa en el semiplano superior sin el punto $z = i$. Definiendo $z - i = u$ se obtiene (para $|u| < \varepsilon$):

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z+i)^2(z-i)^2} = \frac{1}{u^2(2i+u)^2} = \frac{1}{(2i)^2 u^2 \left(1 + \frac{u}{2i}\right)^2} \\ &= -\frac{1}{4u^2} \left(1 - \frac{u}{i} - \frac{3u^2}{4} + \dots\right) = -\frac{1}{4u^2} + \frac{1}{4ui} + o(1) \\ \therefore \text{Res}(f, i) &= -\frac{1}{8\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{du}{u^2} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{du}{4ui} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} o(1) du \\ &= 0 + \frac{1}{4i} + o(\varepsilon), \text{ si } \varepsilon \rightarrow 0, \end{aligned}$$

o sea $\text{Res}(f, i) = \frac{1}{4i}$ (ver ejemplo ??).

Ejemplo c) La aplicación del teorema de los residuos resulta interesante, cuando se realiza un paso al límite. Para calcular la integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$, podemos aplicar el teorema de los residuos sobre la curva estudiada en a) y aplicar b):

$$\int_{-R}^R \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{2\pi i}{4i} - \int_{\substack{|z|=R \\ \Im z > 0}} \frac{dz}{(1+z^2)^2},$$

pero sobre el semicírculo Γ_R se tiene:

$$|(1+z^2)^2| = |z+i|^2 |z-i|^2 \geq ||z|-|i||^2 ||z|-|i||^2 = (R-1)^4,$$

por lo tanto:

$$\left| \int_{\substack{|z|=R \\ \Im z > 0}} \frac{dz}{(1+z^2)^2} \right| \leq \frac{1}{(R-1)^4} \int_{\substack{|z|=R \\ \Im z > 0}} |dz| \leq \frac{\pi R}{(R-1)^4}.$$

Si $R \rightarrow \infty$, tenemos $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{2}$.

2.7 Resumen

Recordemos que si $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$:

– el producto escalar de los vectores \mathbf{r} y \mathbf{u} es $\mathbf{r} \cdot \mathbf{u} = r_1 u_1 + r_2 u_2 + r_3 u_3$ y

– el producto vectorial de los vectores \mathbf{r} y \mathbf{u} es $\mathbf{r} \times \mathbf{u} = (r_2 u_3 - r_3 u_2, r_3 u_1 - r_1 u_3, r_1 u_2 - r_2 u_1)$.

Proposición 2.7.1 Sean $\mathbf{r}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, entonces:

1) $\mathbf{r} \times \mathbf{u} = -\mathbf{u} \times \mathbf{r}$.

2) $\mathbf{r} \times (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{r} \times \mathbf{u} + \mathbf{r} \times \mathbf{v}$.

3) $\alpha(\mathbf{r} \times \mathbf{u}) = (\alpha\mathbf{r}) \times \mathbf{u} = \mathbf{r} \times (\alpha\mathbf{u})$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

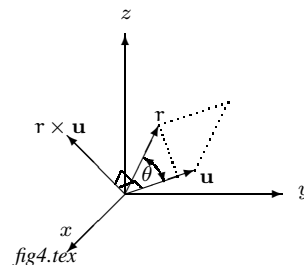
4) $\mathbf{r} \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$.

5) $\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{u}) = 0$.

6) $\|\mathbf{r} \times \mathbf{u}\| = \|\mathbf{r}\| \|\mathbf{u}\| \sin \theta$, donde θ es el ángulo formado por el vector \mathbf{r} y el vector \mathbf{u} .

Prueba $\|\mathbf{r} \times \mathbf{u}\|^2 = (r_2 u_3 - r_3 u_2)^2 + (r_3 u_1 - r_1 u_3)^2 + (r_1 u_2 - r_2 u_1)^2$
 $= r_2^2 u_3^2 - 2r_2 u_3 r_3 u_2 + r_3^2 u_2^2 + r_3^2 u_1^2 - 2r_3 u_1 r_1 u_3$
 $+ r_1^2 u_2^2 + r_1^2 u_2^2 - 2r_1 u_2 r_2 u_1 + r_2^2 u_1^2.$

Por otro lado, $\|\mathbf{r}\|^2\|\mathbf{u}\|^2 \sin^2 \theta = \|\mathbf{r}\|^2\|\mathbf{u}\|^2(1 - \cos^2 \theta) = \|\mathbf{r}\|^2\|\mathbf{u}\|^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{u})^2 = (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) - (r_1u_1 + r_2u_2 + r_3u_3)^2$ y desarrollando esta expresión se tiene el resultado.



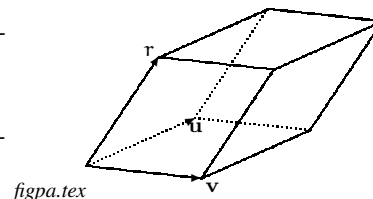
Se observa que $\|\mathbf{r} \times \mathbf{u}\|$ es el área del paralelogramo con lados \mathbf{r} y \mathbf{u} .

$$7) \mathbf{r} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

8) $\mathbf{r} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{r}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{u})$, cualquier permutación entre \mathbf{r} , \mathbf{u} y \mathbf{v} es invariante.

9) El intercambio del producto escalar y vectorial deja invariante el producto triple $\mathbf{r} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (\mathbf{r} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$.

El triple producto $\mathbf{r} \times \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ es igual a \pm el volumen del paralelepípedo con arista \mathbf{r} , \mathbf{u} y \mathbf{v} .



10) $\mathbf{r} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \neq (\mathbf{r} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{v}$.

11) $\mathbf{r} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{u})\mathbf{v}$, $(\mathbf{r} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{v} = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{r}$.

12) $2\mathbf{r} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{r} + \mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{r}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2$, $4\mathbf{r} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{r} + \mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{r} - \mathbf{u}\|^2$.

13) $\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}$ es la norma de la proyección de \mathbf{r} sobre \mathbf{u} e inversamente $w_1 = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2} \mathbf{u}$ es la proyección de \mathbf{r} sobre \mathbf{u} , $w_2 = \mathbf{r} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2} \mathbf{u}$ es la componente de \mathbf{r} ortogonal a \mathbf{u} .

14) $\|\mathbf{r} \times \mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{r}\|^2\|\mathbf{u}\|^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{u})^2$ (Identidad de Lagrange).

15) $\|\mathbf{r} + \mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{r} - \mathbf{u}\|^2 = 2\|\mathbf{r}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|^2$.

$$16) (\mathbf{r} \times \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} & \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \\ \mathbf{r} \cdot \mathbf{w} & \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \end{vmatrix}$$

- Las líneas vectoriales (líneas de fuerza, líneas de flujo, líneas de corriente) del campo vectorial \mathbf{f} , se deducen del sistema de ecuaciones diferenciales $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{r}(t))$.
- El campo escalar o vectorial que no depende del tiempo t , se llama estacionario.
- El gradiente del campo escalar $\varphi(x, y, z)$ se define por, $\nabla \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$, donde el operador $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ es el operador de Hamilton (nabla).

- Se llama rotacional de un campo vectorial $f = (f_1, f_2, f_3)$ de clase C^1 , el vector:

$$\text{rot } f = \nabla \times f = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right).$$

- La integral de línea del vector f sobre la curva Γ , se determina por la fórmula:

$$\int_{\Gamma} f \cdot dr = \int_{\Gamma} f \cdot \frac{dr}{ds} ds = \int_{\Gamma} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz,$$

y representa el trabajo realizado por el campo vectorial f a lo largo de la curva Γ .

$f \cdot \frac{dr}{ds}$ es la proyección del vector f sobre la tangente a Γ .

- Si la curva Γ es cerrada, la integral de línea se llama circulación del campo vectorial f a lo largo de la curva Γ .
- Un campo vectorial f se dice potencial, si existe un campo escalar φ (potencial del campo) tal que $f = \nabla \varphi$.
- Para que un campo vectorial f sea un potencial en una región simplemente conexa, es necesario y suficiente que f sea irrotacional, es decir $\text{rot } f = \mathbf{0}$. En este caso existe un potencial φ que se determina por la ecuación $d\varphi = f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$.
- El potencial φ satisface $d\varphi = \nabla \varphi \cdot dr$ y tenemos:

$$\int_a^b d\varphi = \int_a^b \nabla \varphi \cdot dr = \varphi(b) - \varphi(a).$$

En particular la circulación del vector $\nabla \varphi$ es igual a cero: $\oint_{\Gamma} \nabla \varphi \cdot dr = 0$.

2.8 Ejercicios

2.8.1 Longitud de arco

1. Calcular la longitud de arco de la curva $r(t) = (r \cos t, r \sin t)$, para $0 \leq t \leq 2\pi$.
2. Calcular la longitud de arco, velocidad y rapidez de la cicloide $(t - \sin t, 1 - \cos t)$.
3. Una partícula se mueve sobre el hipocicloide $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$. Determinar la velocidad y la rapidez.
4. Hallar la longitud de arco de la trayectoria $r(t) = (|t|, |t - \frac{1}{2}|, 0)$, $-1 \leq t \leq 1$.
5. Calcular la longitud de arco de la curva dada por:

a) $r(t) = (6t, 3t^2, t^3)$, $0 \leq t \leq 1$.	b) $r(t) = (\sin 3t, \cos 3t, 2t^{\frac{3}{2}})$, $0 \leq t \leq 1$.
c) $r(t) = (t, t \sin t, t \cos t)$, $0 \leq t \leq \pi$.	d) $r(t) = (2t, t, t^2)$, $0 \leq t \leq 2$.

$$\text{e) } \mathbf{r}(t) = (t \operatorname{sen} t, t \operatorname{cos} t, \sqrt{3}t), 0 \leq t \leq 1. \quad \text{f) } \mathbf{r}(t) = (\sqrt{2}t, e^t, e^{-t}), -1 \leq t \leq 1.$$

$$\text{g) } \mathbf{r}(t) = (t, t, \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}), t_0 \leq t \leq t_1.$$

6. Determinar la longitud de arco $s(t) = \int_a^t \|\mathbf{r}'(t)\| dt$ de las curvas:

$$\text{a) } \mathbf{r}(t) = (\cosh t, \operatorname{senh} t, t), a = 0$$

$$\text{b) } \mathbf{r}(t) = (\operatorname{cos} t, \operatorname{sen} t, t), a = 0.$$

7. Calcular la longitud de arco de la curva en los siguientes casos:

$$\text{a) } \mathbf{r}(t) = (2t, t^2, \ln t), t > 0 \text{ entre los puntos } (2, 1, 0) \text{ y } (4, 4, \ln 2).$$

$$\text{b) } \mathbf{r}(t) = (t, t \operatorname{sen} t, t \operatorname{cos} t) \text{ entre } (0, 0, 0) \text{ y } (\pi, 0, -\pi).$$

2.8.2 Conjuntos convexos

8. Determinar cuáles de los siguientes conjuntos S de \mathbb{R}^2 son convexos. Para cada uno explicar, cómo se puede ir de un punto a otro de S por una curva regular a trazos que los une.

$$\text{a) } S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \geq 0\}$$

$$\text{b) } S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 > 0\}$$

$$\text{c) } S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 1\}$$

$$\text{d) } S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 < x^2 + y^2 < 2\}$$

$$\text{e) } S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 > 1 \text{ y } (x-3)^2 + y^2 > 1\}$$

$$\text{f) } S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 1 \text{ o } (x-3)^2 + y^2 < 1\}.$$

9. Sea $\mathbf{f}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ un campo vectorial en \mathbb{R}^2 , de clase C^1 en un abierto S . Si \mathbf{f} es el gradiente de un cierto potencial φ , probar que $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ en S .

2.8.3 Integrales de línea

10. Calcular las siguientes integrales de línea:

$$\text{a) } \int_{\Gamma} \frac{ds}{x-y}, \Gamma \text{ segmento de recta } y = \frac{1}{2}x - 2, \text{ con } x \in [0, 4].$$

$$\text{b) } \int_{\Gamma} xy ds, \Gamma \text{ es el contorno del rectángulo con vértices: } (0, 0), (4, 0), (4, 2), (0, 2).$$

$$\text{c) } \int_{\Gamma} y ds, \Gamma \text{ es el arco de la parábola } y^2 = 2px, \text{ recortada por la parábola } x^2 = 2py.$$

$$\text{d) } \int_{\Gamma} (x^2 + y^2)^n ds, \Gamma \text{ es la circunferencia } x = a \operatorname{cos} t, y = a \operatorname{sen} t.$$

$$\text{e) } \int_{\Gamma} xy ds, \Gamma \text{ es la cuarta parte de la elipse } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ situada en el primer cuadrante.}$$

$$\text{f) } \int_{\Gamma} \sqrt{2y} ds, \Gamma \text{ es el primer arco del cicloide } x = a(t - \operatorname{sen} t), y = a(1 - \operatorname{cos} t).$$

11. Deducir la fórmula para calcular la integral $\int_{\Gamma} f(x, y) ds$ en coordenadas polares, si la curva Γ está dada por $\rho = \rho(\theta)$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$.

12. Calcular las siguientes integrales de línea:

a) $\int_{\Gamma} (x - y) ds$, Γ es la circunferencia $x^2 + y^2 = ax$.

b) $\int_{\Gamma} x\sqrt{x^2 - y^2} ds$, Γ es la curva dada por la ecuación $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, $x \geq 0$.

c) $\int_{\Gamma} \arctan \frac{y}{x} ds$, Γ es la espiral de Arquímedes $\rho = 2\theta$, comprendida dentro de un círculo de centro $(0, 0)$ y radio a .

d) $\int_{\Gamma} \frac{z^2 ds}{x^2 + y^2}$, Γ es la primera espira de la hélice $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = at$.

e) $\int_{\Gamma} xyz ds$, Γ es la parte de la circunferencia $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$, situada en el primer octante.

f) $\int_{\Gamma} (2z - \sqrt{x^2 + y^2}) ds$, Γ es la primera espira de la curva $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, $z = t$.

g) $\int_{\Gamma} (x + y) ds$, Γ es la parte de la circunferencia $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $y = x$, situada en el primer octante.

13. Calcular las siguientes integrales curvilíneas:

a) $\oint_{\Gamma} xy ds$, Γ es la curva $|x| + |y| = a$, $a > 0$.

b) $\int_{\Gamma} \frac{ds}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$, Γ es el segmento de recta que une los puntos $(0, 0)$ y $(1, 2)$.

c) $\int_{\Gamma} xy ds$, Γ es la parte de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, situada en el primer cuadrante.

d) $\int_{\Gamma} y^2 ds$, Γ es el primer arco de cicloide $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

e) $\int_{\Gamma} \sqrt{x^2 + y^2} ds$, Γ es el arco de la envolvente de la circunferencia $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

f) $\int_{\Gamma} (x^2 + y^2)^2 ds$, Γ es el arco de la espiral logarítmica $r = ae^{m\varphi}$, $m > 0$, desde $(0, a)$ hasta $(-\infty, 0)$.

g) $\oint_{\Gamma} (x + y) ds$, Γ es el lazo derecho de la lemniscata $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

h) $\int_{\Gamma} (x + z) ds$, Γ es un arco de la curva $x = t$, $y = \frac{3}{\sqrt{2}}t^2$, $z = t^3$, $0 \leq t \leq 1$.

i) $\int_{\Gamma} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} ds$, Γ es la primera esfera de la hélice circular $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$.

14. Calcular $\oint_{\Gamma} \sqrt{2y^2 + z^2} ds$, donde Γ es el círculo $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x = y$.

15. Hallar el área de la superficie lateral del cilindro parabólico $y = \frac{3}{8}x^2$, limitada por los planos $z = 0$, $x = 0$, $z = x$, $y = 6$.
16. Hallar la longitud del arco de la hélice cónica $x = ae^t \cos t$, $y = ae^t \sin t$, $z = ae^t$ desde el punto $(0, 0, 0)$ hasta el punto $(a, 0, a)$.
17. Calcular la integral de línea con respecto a la longitud de arco en:
- $\int_{\Gamma} (x + y) ds$, siendo Γ el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$ recorrido en sentido contrario al de las agujas del reloj.
 - $\int_{\Gamma} y^2 ds$, donde Γ tiene la ecuación vectorial $\mathbf{r}(t) = a(t - \sin t, 1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
 - $\int_{\Gamma} (x^2 + y^2) ds$, donde Γ tiene la ecuación vectorial $\mathbf{r}(t) = a(\cos t + t \sin t, \sin t - t \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
 - $\int_{\Gamma} z ds$, donde Γ tiene la ecuación vectorial $\mathbf{r}(t) = (t \cos t, t \sin t, t)$, $0 \leq t \leq t_0$.

2.8.4 Masa, centros de gravedad, momentos,...

18. Un alambre uniforme tiene la forma de una porción de curva de intersección de las superficies $x^2 + y^2 = z$, $y = x$, que une los puntos $(0, 0, 0)$ y $(1, 1, 2)$. Determinar la coordenada \bar{z} del centroide.
19. Calcular la masa m de un muelle que tiene la forma de la hélice $\mathbf{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, si la densidad $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Determinar los centros de gravedad y los momentos de inercia respecto a los ejes coordenados.
20. Hallar la masa de un alambre cuya forma es la curva de la intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y el plano $x + y + z = 0$, si la densidad del alambre en (x, y, z) es x^2 .
21. Determinar la masa de la curva $y = \ln x$ comprendida entre los puntos x_1 y x_2 , si la densidad de la curva en cada punto es igual al cuadrado de la abscisa del punto.
22. Determinar la masa de un fragmento de la catenaria $y = a \cosh \frac{x}{a}$ entre los puntos cuyas abscisas son $x_1 = 0$, $x_2 = a$, si la densidad de la curva en cada punto es inversamente proporcional a la ordenada del punto, con la densidad δ en el punto $(0, a)$.
23. Calcular la masa de la parte de la elipse $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $a > b$, situada en el primer cuadrante, si la densidad en cada punto es igual a la ordenada del punto.
24. Calcular la masa de la primera espira de la hélice $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$, cuya densidad en cada punto es igual al cuadrado del radio polar en ese punto.
25. Calcular la masa del arco de la curva $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^t$, desde $t = 0$ hasta un punto

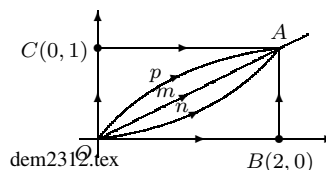
arbitrario, si la densidad es inversamente proporcional al cuadrado del radio polar y en el punto $(1, 0, 1)$ es igual a 1.

26. Determinar las coordenadas del centro de gravedad de la primera semi-espira de la hélice $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$, si la densidad γ es constante.
27. Calcular el momento estático de la primera espira de la curva helicoidal cónica $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, $z = t$, con respecto al plano xy , considerando la densidad proporcional al cuadrado del punto desde el plano xy .
28. Calcular los momentos de inercia con respecto a los ejes de coordenadas de la primera esfera de la hélice $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = \frac{h}{2\pi}t$.
29. Determinar la masa del contorno de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, si su densidad lineal en cada punto (x, y) es igual a $|y|$.
30. Hallar la masa de la primera espira de la hélice circular $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$, si la densidad en cada punto es igual a $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
31. Determinar las coordenadas del centro de gravedad del semi-arco de la cicloide, dada por $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq \pi$.
32. Determinar el momento de inercia con respecto al eje z , de la primera espira de la hélice circular $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$.
33. Calcular la fuerza con que la masa M distribuida con densidad constante en la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$, influye sobre una masa m situada en el punto $(0, 0, b)$.
34. Consideremos un alambre semicircular uniforme de radio a .
 - a) Demostrar que el centroide está situado en el eje de simetría a una distancia $2\frac{a}{\pi}$ del centro.
 - b) Demostrar que el momento de inercia respecto al diámetro que pasa por los extremos del alambre es $\frac{1}{2}Ma^2$, siendo M la masa del alambre.
35. Un alambre tiene la forma de un círculo $x^2 + y^2 = a^2$. Determine su masa y su momento de inercia con respecto a un diámetro, si la densidad en (x, y) es $|x| + |y|$.

2.8.5 Integrales de línea de campos vectoriales

36. Calcular la integral de línea del vector r a lo largo de una espira de la hélice circular $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = ht$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
37. Calcule la integral de línea del campo vectorial f a lo largo de la curva indicada:

- a) $f(x, y) = (x^2 - 2xy, y^2 - 2xy)$, $y = x^2$ desde $(-1, 1)$ a $(1, 1)$.
- b) $f(x, y) = (2a - y, x)$, $r(t) = a(t - \text{sen } t, 1 - \text{cos } t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
- c) $f(x, y, z) = (y^2 - z^2, 2yz, -x^2)$, $r(t) = (t, t^2, t^3)$, $0 \leq t \leq 1$.
- d) $f(x, y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$, $y = 1 - |1 - x|$ de $(0, 0)$ a $(2, 0)$.
- e) $f(x, y) = (x + y, x - y)$, la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, en sentido contrario a las agujas del reloj.
- f) $f(x, y, z) = (2xy, x^2 + z, y)$, desde $(1, 0, 2)$ a $(3, 4, 1)$ a lo largo del segmento de recta que los une.
- g) $f(x, y, z) = (x, y, xz - y)$, desde $(0, 0, 0)$ a $(1, 2, 4)$, a lo largo de un segmento rectilíneo que los une.
- h) $f(x, y, z) = (x, y, xz - y)$, a lo largo del camino dado por $r(t) = (t^2, 2t, 4t^3)$, $0 \leq t \leq 1$.
38. Calcule $\int_{\Gamma} (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy$, donde Γ el arco de parábola $y = x^2$ que une los puntos $(-2, 4)$ y $(1, 1)$.
39. Calcule $\int_{\Gamma} \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$, donde Γ es la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$, recorrida en sentido contrario al de las agujas del reloj.
40. Calcule $\int_{\Gamma} \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$, donde Γ es el contorno del cuadrado de vértices $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ y $(0, -1)$ recorrido en sentido contrario al de las agujas del reloj.
41. Calcule $\int_{\Gamma} (y dx + z dy + x dz)$, donde:
- a) Γ es la curva de intersección de las dos superficies $x + y = 2$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$. La curva es recorrida de tal modo que mirando desde el origen, el sentido es el de las agujas de un reloj.
- b) Γ es la intersección de las dos superficies $z = xy$ y $x^2 + y^2 = 1$, recorrida en sentido que visto desde encima del plano xy , es el contrario al de las agujas del reloj.
42. Calcular las siguientes integrales curvilíneas:
- a) $\int_{\Gamma} (x^2 - 2xy) dx + (2xy + y^2) dy$, Γ es el arco de parábola $y = x^2$ que va desde $(1, 1)$ a $(2, 4)$.
- b) $\int_{\Gamma} (2a - y) dx + x dy$, Γ es el primer arco de la cicloide $x = a(t - \text{sen } t)$, $y = a(1 - \text{cos } t)$ recorrido en el sentido de crecimiento de t .
- c) $\int_{\Gamma} 2xy dx - x^2 dy$, donde Γ está descrita por los diferentes caminos que parten del origen $O(0, 0)$ y que finaliza en $A(2, 1)$:
- α) sobre la recta OmA .
- β) sobre la parábola con eje de simetría el eje x .
- γ) sobre la parábola con eje de simetría el eje y .
- δ) sobre la línea quebrada OBA .



dem2312.tex

- e) sobre la línea quebrada OCA .
- d) $\int_{\Gamma} 2xy dx + x^2 dy$ en las mismas condiciones que en c).
- e) $\oint_{\Gamma} \frac{(x+y) dx - (x-y) dy}{x^2 + y^2}$, Γ es la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$, tomada en el sentido contrario a las agujas del reloj.
- f) $\int_{\Gamma} y^2 dx + x^2 dy$, Γ es la mitad superior de la elipse $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, en el sentido de las agujas del reloj.
- g) $\int_{\Gamma} \cos y dx - \sin x dy$, Γ es el segmento AB de la bisectriz del segundo ángulo coordenado, si la abscisa del punto A es 2 y la ordenada del punto B es 2.
- h) $\oint_{\Gamma} \frac{xy(y dx - x dy)}{x^2 + y^2}$, Γ es el lazo derecho de la lemniscata $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$, recorrida en el sentido contrario a las agujas del reloj.

43. Calcular las integrales curvilíneas en las curvas indicadas:

- a) $\int_{\Gamma} x dy$, Γ es la curva dada por el triángulo con los dos ejes coordenados y la recta $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$, en el sentido positivo.
- b) $\int_{\Gamma} x dy$, Γ es un segmento de la recta $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, desde el punto de intersección del eje y hasta el punto de intersección del eje x .
- c) $\int_{\Gamma} (x^2 - y^2) dx$, Γ es el arco de parábola desde $(0, 0)$ hasta $(2, 4)$.
- d) $\int_{\Gamma} (x^2 - y^2) dy$, Γ es el contorno de un cuadrilátero con vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(4, 4)$, $(0, 4)$ indicados según el recorrido.
- e) $\int_{\Gamma} -x \cos y dx + y \sin x dy$, Γ es el segmento que une los puntos $(0, 0)$ y $(\pi, 2\pi)$.
- f) $\int_{\Gamma} xy dx + (y - x) dy$, Γ es la curva: $\alpha) y = x$, $\beta) y = x^2$, $\gamma) y^2 = x$, $\delta) y = x^3$.
- g) $\int_{\Gamma} 2xy dx + x^2 dy$, Γ es la curva: $\alpha) y = x$, $\beta) y = x^2$, $\gamma) y^2 = x$, $\delta) y = x^3$.
- h) $\int_{\Gamma} y dx + x dy$, Γ es la parte de la circunferencia $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.
- i) $\int_{\Gamma} y dx - x dy$, Γ es la elipse $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ recorrida en el sentido positivo.
- j) $\int_{\Gamma} \frac{y^2 dx - x^2 dy}{x^2 + y^2}$, Γ es la semicircunferencia $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.
- k) $\int_{\Gamma} (2a - y) dx - (a - y) dy$, Γ es el primer arco de la cicloide $x = a(t - \sin t)$,
 $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
- l) $\int_{\Gamma} \frac{x^2 dy - y^2 dx}{x^{\frac{5}{3}} + y^{\frac{5}{3}}}$, Γ es la cuarta parte del astroide $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, desde el punto $(a, 0)$

hasta el punto $(0, a)$.

m) $\int_{\Gamma} x dx + y dy + (x + y - 1) dz$, Γ es el segmento de recta que va desde el punto $(1, 1, 1)$ hasta el punto $(2, 3, 4)$.

n) $\int_{\Gamma} yz dx + zx dy + xy dz$, Γ es el arco de la hélice $x = b \cos t$, $y = b \sin t$, $z = \frac{at}{2\pi}$, desde el plano $z = 0$ hasta el plano $z = a$.

o) $\int_{\Gamma} \frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - x - y + 2z}}$, Γ es el segmento de recta que une el punto $(1, 1, 1)$ y el punto $(4, 4, 4)$.

p) $\int_{\Gamma} y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$, Γ es la curva de intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y del cilindro $x^2 + y^2 = ax$, $a > 0$, $z \geq 0$, recorrida en sentido contrario a las agujas del reloj, si se observa desde el origen.

44. Calcular las integrales curvilíneas siguientes:

a) $\int_{\Gamma} (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz$, Γ es una espira de la hélice circular $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$, con $0 \leq t \leq 2\pi$.

b) $\oint_{\Gamma} y dx + z dy + x dz$, Γ es la circunferencia $x = a \cos \alpha \cos t$, $y = a \cos \alpha \sin t$, $z = a \sin \alpha$, $\alpha = \text{cte}$, recorrida en el sentido de crecimiento del parámetro.

c) $\int_{\Gamma} xy dx + yz dy + zx dz$, donde Γ es el arco de la circunferencia $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$, $z = x$, situado por el lado del plano xz , con $y > 0$.

2.8.6 Aplicaciones

45. Calcular $\int_{\Gamma} (6xy^2 - y^3) dx + (6x^2y - 3xy^2) dy$, a lo largo de cualquier curva Γ desde el punto $(1, 2)$ al punto $(3, 4)$.

46. Calcular la integral curvilínea $\int_{\Gamma} x dx + y dy - z dz$, a lo largo de cualquier curva Γ que va desde $(1, 0, -3)$ a $(6, 4, 8)$.

47. Calcular $\int_{\Gamma} xy dx + yz dy + zx dz$, donde Γ es la circunferencia que resulta al intersecar $x^2 + y^2 + z^2 = 4x$, con $z = x$, recorrida en el sentido contrario de la manecillas del reloj, vista sobre el semieje positivo de la z .

48. Verificar que las integrales tomadas a lo largo de las curvas cerradas, son iguales a cero para cualquier función f integrable.

a) $\oint_{\Gamma} f(xy)(y dx + x dy)$.

b) $\oint_{\Gamma} f\left(\frac{y}{x}\right) \frac{x dy - y dx}{x^2}$.

$$c) \oint_{\Gamma} [f(x+y) + f(x-y)] dx + [f(x+y) - f(x-y)] dy.$$

$$d) \oint_{\Gamma} f(x^2 + y^2 + z^2)(x dx + y dy + z dz).$$

49. Calcular la integral $\int_{\Gamma} \frac{x dy - y dx}{x^2 + 4y^2}$, sobre la circunferencia $\Gamma: x^2 + y^2 = 1$, en sentido positivo.

50. Calcular las integrales de línea siguientes:

$$a) \int_{(0,0)}^{(2,1)} 2xy dx + x^2 dy.$$

$$b) \int_{-(1,2)}^{(2,3)} y dx + x dy.$$

$$c) \int_{(3,4)}^{(5,12)} \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} \text{ (el origen } (0,0) \text{ no está en la trayectoria de integración).}$$

d) $\int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ (los puntos (x_1, y_1) , (x_2, y_2) están situados en circunferencias concéntricas, con centro en el origen y de radios con R_1 y R_2 respectivamente. El origen no está en la trayectoria de integración).

$$e) \int_{(1,-1,2)}^{(2,1,3)} x dx - y^2 dy + z dz.$$

$$f) \int_{(1,2,3)}^{(3,2,1)} yz dx + zx dy + xy dz.$$

$$g) \int_{(7,2,3)}^{(5,3,1)} \frac{zx dy + xy dz - yz dx}{(x - yz)^2} \text{ (la trayectoria de integración no corta la superficie } z = \frac{x}{y} \text{).}$$

51. Determinar las funciones $\varphi(x, y)$, dadas en los diferenciales siguientes:

$$a) d\varphi = x^2 dx + y^2 dy$$

$$b) d\varphi = 4(x^2 - y^2)(x dx - y dy).$$

$$c) d\varphi = \frac{(x + 2y)dx + y dy}{(x + y)^2}.$$

$$d) d\varphi = \frac{x}{y\sqrt{x^2 + y^2}} dx - \frac{x^2 + \sqrt{x^2 + y^2}}{y^2\sqrt{x^2 + y^2}} dy.$$

$$e) d\varphi = \left(\frac{x - 2y}{(y - x)^2} + x \right) dx + \left(\frac{y}{(y - x)^2} - y^2 \right) dy.$$

$$f) d\varphi = (2x \cos y - y^2 \operatorname{sen} x) dx + (2y \cos x - x^2 \operatorname{sen} y) dy.$$

$$g) d\varphi = \frac{2x(1 - e^y)}{(1 + x^2)^2} dx + \left(\frac{e^y}{1 + x^2} + 1 \right) dy.$$

$$h) d\varphi = \frac{(3y - x)dx + (y - 3x)dy}{(x + y)^3}.$$

$$i) d\varphi = \frac{dx + dy + dz}{x + y + z}.$$

$$j) d\varphi = \frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

$$k) d\varphi = \frac{yz dx + xz dy + xy dz}{1 + x^2 y^2 z^2}.$$

$$l) d\varphi = \frac{2(zx dy + xy dz - yz dx)}{(x - yz)^2}.$$

$$m) d\varphi = \frac{dx - 3dy}{z} + \frac{3y - x + x^3}{z^2} dz.$$

$$n) d\varphi = e^{\frac{y}{z}} dx + \left(\frac{e^{\frac{y}{z}}(x+1)}{z} + ze^{yz} \right) dy + \left(-\frac{e^{\frac{y}{z}}(x+1)y}{z^2} + ye^{yz} + e^{-z} \right) dz.$$

52. Decidir si los siguientes campos vectoriales poseen o no función potencial. Encontrarla en caso que exista.

$$a) f(x, y, z) = (2xy^3, x^2z^2, 3x^2yz^2).$$

$$b) g(x, y, z) = (4xy - 3x^2z^2 + 1, 2x^2 + 2, -2x^3z - 3z^2).$$

$$c) h(x, y, z) = (y^2 \cos x + z^3, -4 + 2y \operatorname{sen} x, 3xz^2 + 2).$$

53. Supongamos que la ecuación diferencial $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$, tiene un factor integrante $\mu(x, y)$ que nos permite obtener una familia de soluciones de la forma $\varphi(x, y) = c$. Si la pendiente de la curva $\varphi(x, y) = c$ en (x, y) es $\tan \theta$, el vector unitario normal $\boldsymbol{\eta}$ se expresa $\boldsymbol{\eta} = (\operatorname{sen} \theta, -\cos \theta)$. Existe un campo escalar $g(x, y)$ tal que la derivada normal de φ viene dada por la fórmula $\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\eta}} = \mu(x, y)g(x, y)$, donde $\frac{\partial \varphi}{\partial \boldsymbol{\eta}} = \nabla \varphi \cdot \boldsymbol{\eta}$. Hallar una fórmula explícita de $g(x, y)$ en función de $P(x, y)$ y $Q(x, y)$.

54. Demostrar que las ecuaciones diferenciales siguientes son exactas y en cada caso hallar la primitiva de la forma diferencial asociada y la solución de la ecuación diferencial.

$$a) (x + 2y)dx + (2x + y)dy = 0.$$

$$b) 2xydx + x^2dy = 0.$$

$$c) (x^2 - y)dx - (x + \operatorname{sen}^2 y)dy = 0.$$

$$d) 4 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3y \cos x dx - 3 \cos 3y \cos 2x dy = 0.$$

$$e) (3x^2y + 8xy^2)dx + (x^3 + 8x^2y + 12ye^y)dy = 0.$$

55. Sea $\mu(x, y)$ de clase C^1 un factor integrante de la ecuación diferencial $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, donde P y Q son de clase C^1 , demostrar que $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = Q \frac{\partial}{\partial x} \log |\mu| - P \frac{\partial}{\partial y} \log |\mu|$.

Deducir de esta ecuación las siguientes reglas para encontrar factores integrantes:

a) Si $\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) / Q = f(x)$ es función sólo de x , entonces $e^{\int f(x) dx}$ es un factor integrante.

b) Si $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) / P = g(y)$ es una función que depende sólo de y , entonces $e^{\int g(y) dy}$ es un factor

integrante.

56. Usando el ejercicio anterior, determinar el factor integrante y la solución de las ecuaciones diferenciales siguientes.

a) $ydx - (2x + y)dy = 0$

b) $(x^3 + y^3)dx - xy^2dy = 0$.

57. Si $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = f(x)Q(x, y) - g(y)P(x, y)$, demostrar que $e^{\int f(x)dx + \int g(y)dy}$ es un factor integrante de la ecuación diferencial $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$.

Determinar el factor integrante y la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $(2x^2y + y^2)dx + (2x^3 - xy)dy = 0$

b) $(e^x \sec y - \tan y)dx + dy = 0$.

58. Calcular las siguientes integrales curvilíneas de las expresiones diferenciales exactas siguientes:

a) $\int_{(-1,2)}^{(2,3)} x dy + y dx$

b) $\int_{(0,1)}^{(3,4)} x dx + y dy$

c) $\int_{(0,0)}^{(1,1)} (x + y)(dx + dy)$

d) $\int_{(1,2)}^{(2,1)} \frac{y dx - x dy}{y^2}$ el camino no corta el eje x .

e) $\int_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}^{(x,y)} \frac{dx + dy}{x + y}$ el camino no corta la recta $x + y = 0$.

f) $\int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} \varphi(x) dx + \psi(y) dy$.

59. Determinar las primitivas de las expresiones y calcular las siguientes integrales:

a) $\int_{(-2,-1)}^{(3,0)} (x^4 + 4xy^3) dx + (6x^2y^2 - 5y^4) dy$

b) $\int_{(0,-1)}^{(1,0)} \frac{x dy - y dx}{(x - y)^2}$, el camino de integración no corta la recta $y = x$.

c) $\int_{(1,1)}^{(3,1)} \frac{(x + 2y) dx + y dy}{(x + y)^2}$, el camino de integración no corta la recta $y = -x$.

d) $\int_{(0,0)}^{(1,1)} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y \right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + x \right) dy$.

60. Calcular la integral $I = \int_{\Gamma} \frac{x dx + y dy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$ a lo largo del cuarto de elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, que se encuentra en el primer cuadrante, en el sentido de las agujas del reloj.

61. Demostrar que si $f(u)$ es una función continua y Γ es una curva cerrada regular a trozos, la integral

$$\oint_{\Gamma} f(x^2 + y^2)(x dx + y dy) = 0.$$

62. Determinar la función primitiva φ si:

a) $d\varphi = (2x + 3y) dx + (3x - 4y) dy$.

b) $d\varphi = (3x^2 - 2xy + y^2) dx - (x^2 - 2xy + 3y^2) dy$.

c) $d\varphi = e^{x-y} [(1+x+y)dx + (1-x-y)dy]$.

d) $d\varphi = \frac{dx}{x+y} + \frac{dy}{x+y}$.

63. Calcular las integrales curvilíneas de las diferenciales exactas siguientes:

a) $\int_{(1,0,-3)}^{(6,4,8)} x dx + y dy + z dz$ b) $\int_{(1,1,1)}^{(a,b,c)} yz dx + xz dy + xy dz$ c) $\int_{(0,0,0)}^{(3,4,5)} \frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

d) $\int_{(1,1,1)}^{(x,y,\frac{1}{xy})} \frac{yz dx + zx dy + xy dz}{xyz}$, donde la curva esta situada en el primer octante.

64. En este problema se trata el trabajo de una fuerza en el plano.

a) En cada punto del plano, sobre un punto material actúa una fuerza cuya magnitud es constante e igual a F y cuya dirección sigue el lado positivo del eje x . Determinar el trabajo realizado por esta fuerza, cuando el punto se desplaza a lo largo de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ situada en el primer cuadrante.

b) Sobre cada punto del plano, actúa una fuerza \mathbf{F} que es igual a $(xy, x+y)$. Calcular el trabajo realizado por \mathbf{F} al desplazarse desde $(0, 0)$ hasta el punto $(1, 1)$ a lo largo de:

α) la región $y = x$ β) la parábola $y = x^2$

γ) una trayectoria de dos eslabones, cuyos lados se encuentran sobre los ejes coordenados. Considere los dos casos.

c) En cada punto M de la elipse $x = a \cos t, y = b \sin t$, está aplicada la fuerza \mathbf{F} cuyo valor es igual a la distancia al centro de la elipse, dirigida al centro de la misma.

α) Calcular el trabajo realizado por la fuerza \mathbf{F} al desplazar el punto M a lo largo de la elipse situada en el primer cuadrante.

β) Calcular el trabajo cuando se recorre toda la elipse.

d) Si la fuerza $\mathbf{F} = (2xy, x^2)$, probar que el trabajo realizado por la fuerza, depende sólo de su posición inicial y final y no depende de la forma del trayecto. Calcular el trabajo al desplazarse desde el punto $(1, 0)$ hasta el punto $(0, 3)$.

e) La magnitud de la fuerza es inversamente proporcional a la distancia del punto al plano xy . La fuerza está dirigida hacia el origen de coordenadas. Calcular el trabajo al desplazarse el punto bajo la acción de esta fuerza a lo largo de la recta $x = at, y = bt, z = ct$, desde el punto (a, b, c) hasta el punto $(2a, 2b, 2c)$.

f) La magnitud de la fuerza es inversamente proporcional a la distancia que media entre el punto de su aplicación y el eje z . La fuerza es perpendicular a este eje y está dirigida hacia él. Calcular el trabajo al desplazarse el punto bajo la acción de dicha fuerza a lo largo de la circunferencia $x = \cos t, y = 1$,

$z = \text{sen } t$, desde el punto $(1, 1, 0)$ hasta el punto $(0, 1, 1)$.

g) Demostrar que el trabajo de la fuerza de gravitación de dos masas puntuales, efectuado al desplazarse una de ellas no depende de la forma de la trayectoria. La magnitud de la fuerza de atracción F establece la ley de Newton $F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$, donde r es la distancia entre los puntos, m_1 y m_2 son las masas concentradas en dichos puntos, G es la constante de gravitación.

65. Un campo está generado por una fuerza de magnitud constante F , que tiene la dirección del semi-eje positivo x . Determinar el trabajo realizado por dicho campo, cuando un punto material describe en el sentido positivo, el cuarto de círculo $x^2 + y^2 = a^2$ que se encuentra en el primer cuadrante.
66. Hallar el trabajo que realiza la fuerza de gravedad al trasladar un punto material de masa m , desde la posición $A(x_1, y_1, z_1)$ hasta la posición $B(x_2, y_2, z_2)$ (el eje z está dirigido verticalmente hacia arriba).
67. Hallar el trabajo de una fuerza elástica dirigida hacia el origen de coordenadas, cuya magnitud es proporcional al alejamiento del punto al origen de coordenadas, si el punto de aplicación de dicha fuerza describe en el sentido positivo, el cuarto de elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ situado en el primer cuadrante.
68. Determinar la función potencial de la fuerza $f(x, y, z)$ y determinar el trabajo realizado por dicha fuerza en el camino que se indica, si:
- $X = 0, Y = 0, Z = -mg$ (fuerza de gravedad) y el punto se desliza desde la posición $A(x_1, y_1, z_1)$ a la posición $B(x_2, y_2, z_2)$.
 - $X = -\mu \frac{x}{r^3}, Y = -\mu \frac{y}{r^3}, Z = -\mu \frac{z}{r^3}$, donde μ es la constante y $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (fuerza de atracción de Newton) y el punto material se desliza desde el punto $A(a, b, c)$ hasta infinito.
 - $X = -k^2x, Y = -k^2y, Z = -k^2z$, donde $k = \text{constante}$ (fuerza elástica), estando el punto inicial de camino en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y el final en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ ($a > r$).
69. En cada caso determinar si f es o no el gradiente de un campo escalar. Cuando f sea un gradiente, hallar la correspondiente función potencial φ .
- $f(x, y) = (x, y)$
 - $f(x, y) = (3x^2y, x^3)$
 - $f(x, y) = (2xe^y + y), x^2e^y + x - 2y)$
 - $f(x, y) = (\text{sen } y - y \text{sen } x + x, \cos x + x \cos y + y)$
 - $f(x, y) = (\text{sen } (xy) + xy \cos(xy), x^2 \cos(xy))$
 - $f(x, y, z) = (x, y, z)$
 - $f(x, y, z) = (x + z, -y - z, x - y)$

- h) $f(x, y, z) = (2xy^3, x^2, 3x^2yz^2)$
 i) $f(x, y, z) = (3y^4z^2, 4x^3z^2, -3x^2y^2)$
 j) $f(x, y, z) = (2x^2 + 8xy^2, 3x^3y - 3xy, -4y^2z^2 - 2x^3z)$
 k) $f(x, y, z) = (y^2 \cos x + z^3, -4 + 2y \operatorname{sen} x, 3xz^2 + 2)$
 l) $f(x, y, z) = (4xy - 3x^2y^2 + 1, 2(x^2 + 1), -2x^3z - 3z^2).$

2.8.7 Formas diferenciales

70. Estudiar las formas diferenciales ω siguientes, en dos variables. ¿Es ω cerrada? ¿ ω es exacta? En caso afirmativo, calcular las primitivas de ω ; si ω no es cerrada, buscar una función $\varphi(x, y) \neq 0$ en el que la forma diferencial $\omega_1(x, y) = \varphi(x, y)\omega(x, y)$ sea cerrada (φ es el factor integrante de ω) ¿Es ω_1 exacta? En caso afirmativo calcular las primitivas de ω_1 :

- a) $(2x + 2y + e^{x+y})(dx + dy)$
 b) $\frac{xdy - ydx}{(x - y)^2}$
 c) $\frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} - ydy$
 d) $((1 + 2xy)dx + 2y^2dy) \cos(x^2 + y^2) + ((1 - 2xy)dy - 2x^2dx) \operatorname{sen}(x^2 + y^2)$
 e) $\frac{y^2dx + x^2dy}{(x + y)^2}$
 f) $\frac{(x - y)dx + (x + y)dy}{x^2 + y^2}$
 g) $(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}}((1 + x^2)dy + (xy - 2x^2 - 1)dx)$
 h) $\frac{1}{(1 - x^2)^2 + y^4} (2xy^2dx + 2(1 - x^2)ydy)$
 i) $\frac{(ax + by)(xdy - ydx)}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, a, b \in \mathbb{R}$
 j) $\frac{1}{x^2y} dx - \frac{1}{xy^2} dy$, $\varphi(x, y)$ depende sólo de $x^2 + y^2$
 k) $(x^2 + y^2 - 1)dx - 2ydy$, $\varphi(x, y)$ depende sólo de x
 l) $y^2dx + x^2dy$, $\varphi(x, y)$ depende sólo de $x + y$
 m) $\frac{ydx - xdy}{xy - 1}$, $\varphi(x, y)$ depende sólo de xy
 n) $2x(y - 1)dx - (x^2 - 1)dy$, $\varphi(x, y)$ depende sólo de x
 o) $(x^2 + y^2 - 1)dx - 2xydy$, $\varphi(x, y)$ depende sólo de $x^2 - y^2$
 p) $y(1 + x)e^{-y}dx + x(1 - y)e^{-y}dy$, $\varphi(x, y)$ depende sólo de x
 q) $(1 + (x + y)y)dx + (1 + (x + y)x)dy$, $\varphi(x, y)$ depende sólo de xy .

71. La misma pregunta anterior, para el caso de formas diferenciales en tres variables.

- a) $3(x^2 + 2xy + 2xz)dx + 3(x^2 + y^2)dy + 3(x^2 + z^2)dz$
 b) $\left(\frac{1}{y} - \frac{z}{x^2}\right)dx + \left(\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}\right)dy + \left(\frac{1}{x} - \frac{y}{z^2}\right)dz$
 c) $2xzdx - 2yzdy + (z^2 - x^2 + y^2)dz$, $\varphi(x, y, z)$ depende sólo de z
 d) $(y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$, $\varphi(x, y, z)$ depende sólo de $y - z$
 e) $yz(y + z)dx + zx(z + x)dy + xy(x + y)dz$, $\varphi(x, y, z)$ depende sólo de $x + y + z$.

72. Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 y ω la forma diferencial definida por:

$$\omega(x, y) = \frac{(x^2 + y^2 + f(x, y))(ydx - xdy)}{x^2 + y^2}.$$

¿Cómo escoger f para que ω sea exacta en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$?

73. Determinar $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 para que la forma diferencial ω definida por $\omega(x, y, z) = 2xzdx + f(y)g(z)dy + (x^2 + \frac{1}{2}y^2)dz$ sea cerrada en \mathbb{R}^3 . Calcular las primitivas.

74. A cada aplicación $\varphi: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 se asocia la forma diferencial ω_φ definida sobre $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, por $\omega_\varphi(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} [(x - y\varphi(x, y))dx + (x\varphi(x, y) + y)dy]$.

- a) Demostrar que ω_φ es cerrada sii φ verifica una ecuación en derivadas parciales (E).
 b) Demostrar que $\varphi_0(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$ es solución de (E).
 c) ¿La forma diferencial ω_{φ_0} es exacta en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$?

75. Hallar el trabajo realizado por la fuerza $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$, al mover una partícula en sentido contrario al de las agujas del reloj, recorriendo una vez al contorno del cuadrado limitado por los ejes coordenados y las rectas $x = a$ y $y = a$, $a > 0$.

76. Un campo de fuerzas bidimensional f viene dado por la ecuación $f(x, y) = (cxy, x^6y^2)$, siendo c una constante positiva. Esa fuerza actúa sobre una partícula que se mueve desde $(0, 0)$ hasta la recta $x = 1$, siguiendo una curva de la forma $y = ax^b$, en donde $a > 0$ y $b > 0$. Encontrar el valor de a (en función de c) tal que el trabajo realizado por esa fuerza sea independiente de b .

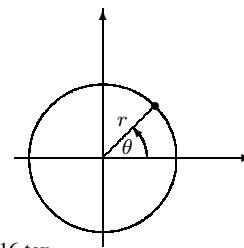
77. Un campo de fuerzas f en el espacio de tres dimensiones viene dado por la fórmula $f(x, y, z) = (yz, xz, x(y + 1))$. Calcular el trabajo realizado por f al mover una partícula recorriendo una vez el contorno del triángulo de vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$, $(-1, 1, -1)$, en este orden.

78. Calcular el trabajo realizado por el campo de fuerzas $f(x, y, z) = (y - z, z - x, x - y)$, a lo largo de la curva de intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y el plano $z = y \tan \theta$, en donde $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. El

88. Calcular el trabajo realizado por la fuerza $f(x, y) = (3y^2 + 2, 16x)$ al mover una partícula desde $(-1, 0)$ a $(1, 0)$, siguiendo la mitad superior de la elipse $b^2x^2 + y^2 = b^2$. ¿Sobre qué elipse se hace el mínimo trabajo?
89. Un fluido se desplaza en un plano xy de modo que cada partícula se mueve en línea recta desde el origen. Si una partícula está a una distancia r del origen, su velocidad es ar^n . Determinar una función potencial de la velocidad, que sea una gradiente.
90. Si φ y ψ son funciones potenciales para un campo vertical f en un conjunto convexo abierto $S \subset \mathbb{R}^n$, demostrar que $\varphi - \psi$ es constante en S .
91. Sea S el conjunto $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, sea $r = \|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ y sea f un campo vectorial sobre S dado por $f(\mathbf{x}) = r^p \mathbf{x}$, $p \in \mathbb{R}$.
- a) Determinan una función potencial para f en S .
- b) Determinar φ , si $f(x) = \frac{g'(r)}{r} \mathbf{x}$, g de clase C^1 en \mathbb{R} .
92. Sea f un campo vectorial definido en $S = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, dado por la fórmula

$$f(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right) = (f_1(x, y), f_2(x, y)).$$

- a) Probar que $\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(y^2 + x^2)^2}$.
- b) Sea $S' = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 0, x \leq 0\}$, si $(x, y) \in S'$ expresar x, y en coordenadas polares, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $r > 0$, $-\pi < \theta < \pi$, demostrar que θ viene dado por la fórmula:



ap40416.tex

$$\theta = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{si } x > 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0, \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Deducir que $\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}$, $\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}$, para $(x, y) \in S'$.

93. Si $P(x) = xe^{-y^2}$, $Q(x, y) = -x^2ye^{-y^2} + \frac{1}{x^2 + y^2}$, calcular $\oint_{\Gamma} P dx + Q dy$, donde Γ es la frontera del cuadrado de lado $2a$, determinado por las desigualdades $|x| \leq a$ y $|y| \leq a$, circulando en el sentido contrario a las manecillas del reloj.

2.8.8 Fórmula de Green

94. Calcular $\oint_{\Gamma} y^2 dx + x dy$ en cada caso y usar el teorema de Green para verificar el resultado:

- a) Γ es el cuadrado de los vértices $(0, 0), (2, 0), (2, 2), (0, 2)$.
- b) Γ es el cuadrado de los vértices $(\pm 1, \pm 1)$.
- c) Γ es el cuadrado de los vértices $(\pm 2, 0), (0, \pm 2)$.
- d) Γ es la circunferencia de radio 2 y centro $(0, 0)$.
- e) Γ tiene la ecuación vectorial $r(t) = (2 \cos^3 t, 2 \sin^3 t), 0 \leq t \leq 2\pi$.
95. Si Γ es una curva cerrada simple en el plano x, y y representamos con I_z al momento de inercia (alrededor del eje z) de la región interior a Γ , demostrar que existe un entero $n \in \mathbb{N}$ tal que $nI_z = \oint_{\Gamma} x^3 dy - y^3 dx$.
96. Sean u, v funciones de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R} de clase C^1 en un conjunto U conteniendo el círculo $x^2 + y^2 \leq 1$, que lo denotamos S . Se define $f(x, y) = (v(x, y), u(x, y)), g(x, y) = (u_x - u_y, v_x - v_y)$. Determinar el valor de la integral doble $\iint_S f \cdot g dx dy$, si se sabe que en la frontera de S se tiene $u(x, y) = 1, v(x, y) = y$.
97. Si f y g son funciones reales de clase C^1 en un conjunto abierto conexo S del plano, demostrar que $\oint_{\Gamma} f \nabla g \cdot dr = -\oint_{\Gamma} g \nabla f \cdot dr$, para toda curva de Jordan Γ regular a trozos contenida en S .
98. Sean u, v funciones de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R} de clase C^2 en un abierto conexo S del plano. Sea R una región de S limitada por la curva Jordan Γ regular a trozos. Demostrar que:
- i) $\oint_{\Gamma} uv dx + uv dy = \iint_R \left(v \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + u \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) dx dy$.
- ii) $\frac{1}{2} \oint_{\Gamma} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left(u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy = \iint_R \left(u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) dx dy$.
99. Si $f(x, y) = (Q(x, y), -P(x, y))$ es de la clase C^1 sobre un abierto $S \subset \mathbb{R}^2$ y si Γ una curva contenida en S , demostrar que $\int_{\Gamma} P dx + Q dy = \int_{\Gamma} f \cdot \eta ds$, donde η es el vector normal a la curva Γ .
100. Sean f, g funciones de clase C^2 en un conjunto abierto S del plano. Supongamos que R es una región contenida en S , cuya frontera es una curva de Jordan Γ regular a trozos. Demostrar las identidades siguientes, donde $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$:
- a) $\oint_{\Gamma} f \frac{\partial g}{\partial \eta} ds = \iint_R \nabla^2 g dx dy$.
- b) $\oint_{\Gamma} f \frac{\partial g}{\partial \eta} ds = \iint_R (f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g) dx dy$.

$$c) \oint_{\Gamma} \left(f \frac{\partial g}{\partial \eta} - g \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) ds = \iint_{\mathbb{R}} (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) dx dy \text{ (fórmula de Green)}$$

d) Si f, g son armónicas en \mathbb{R} , verificar que:

$$\oint_{\Gamma} f \frac{\partial g}{\partial \eta} ds = \oint_{\Gamma} g \frac{\partial f}{\partial \eta} ds, \quad \oint_{\Gamma} f \frac{\partial g}{\partial \eta} ds = \iint_{\mathbb{R}} \nabla f \cdot \nabla g dx dy, \quad \oint_{\Gamma} \frac{\partial g}{\partial \eta} ds = \oint_{\Gamma} \frac{\partial f}{\partial \eta} ds = 0.$$

101. Sea $v(x, y) = (y^c, x^c)$, $c > 0$ y sea $r(x, y) = (x, y)$. Consideremos una región plana R' bordeada por una curva de Jordan Γ regular a trozos. Calcular $\text{div}(v \times r)$ y $\text{rot}(v \times r)$ y aplicando el Teorema de Green, demostrar que $\oint_{\Gamma} v \times r \cdot dw = 0$, donde w es la función que describe la curva Γ .

102. Demostrar que el teorema de Green puede expresarse en la forma:

$$\iint_{\mathbb{R}} (\text{rot } v) \cdot k dx dy = \oint_{\Gamma} v \cdot t ds,$$

donde t es el vector unitario tangente a Γ y s es la longitud del arco.

103. Una región R está limitada por una curva de Jordan, regular a trozos Γ . Se conocen los momentos de inercia de R alrededor de los ejes x e y que valen respectivamente a y b . Calcular la integral de línea $\oint_{\Gamma} \nabla r^4 \cdot \eta ds$, en función de a y b .

En la integral $r = (x, y)$, $r = \|r\|$, η representa el vector unitario normal exterior a Γ y s es la longitud de arco. La curva se recorre en el sentido contrario a las agujas del reloj.

104. Sea f un campo vectorial en el plano, dar una definición de la integral de línea $\int_{\Gamma} f \times dr$. Esta definición debe ser tal que, pueda obtenerse como consecuencia del teorema de Green, la fórmula siguiente:

$$\int_{\Gamma} f \times dr = k \iint_{\mathbb{R}} (\text{div } f) dx dy.$$

105. Transformar la siguiente integral curvilínea $\oint_{\Gamma} \sqrt{x^2 + y^2} dx + y(xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})) dy$, usando la fórmula de Green, donde Γ es la curva que limita la región R .

106. Usando el Teorema de Green, calcular las siguientes integrales curvilíneas:

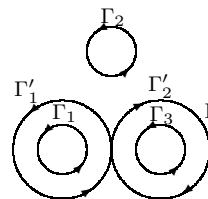
a) $\oint_{\Gamma} 2(x^2 + y^2) dx + (x + y)^2 dy$, Γ es el borde del triángulo de vértices $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(1, 3)$ recorrido en el sentido positivo. Verificar el resultado calculando la integral directamente.

b) $\oint_{\Gamma} -x^2 y dx + xy^2 dy$, Γ es la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ recorrida en el sentido contrario a las agujas del reloj. Verificar el resultado directamente.

c) $\oint_{\Gamma} (x + y) dx - (x - y) dy$, Γ es la curva que une los puntos $A(1, 0)$ y $B(2, 3)$ por una parábola cuyo eje es el eje y , y la cuerda \overline{BA} . Verificar el resultado directamente.

- d) $\oint_{\Gamma} e^{xy}(y^2 dx + (1 + xy) dy)$, Γ es una curva que une los puntos A y B situados sobre el eje x y el segmento AB , de modo que el área limitada por Γ es igual a R .
107. Calcular la integral $\oint_{\Gamma} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$ examinando dos casos:
- el origen $(0, 0)$ está fuera de la curva Γ ,
 - cuando la curva rodea n veces el origen $(0, 0)$.
108. Demostrar que si Γ es una curva cerrada, entonces $\oint_{\Gamma} \cos(x, \boldsymbol{\eta}) ds = 0$, donde R es la longitud de arco y $\boldsymbol{\eta}$ es la normal exterior.
109. Usando la fórmula de Green, determinar la integral $I = \oint_{\Gamma} (x \cos(x, \boldsymbol{\eta}) + y \operatorname{sen}(x, \boldsymbol{\eta})) ds$, donde s es la longitud de arco y $\boldsymbol{\eta}$ es la normal exterior a la curva Γ .
110. Calcular la integral $\oint_{\Gamma} \frac{dx - dy}{x + y}$, tomada sobre el borde del cuadrado con vértices $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$, en el sentido contrario a las agujas del reloj.
111. Sean $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 > 0\}$, $P(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$, $Q(x, y) = \frac{-x}{x^2 + y^2}$ en S y sea Γ una curva de Jordan regular a trozos contenida en S .
- Si $(0, 0)$ es interior a Γ , demostrar que la integral $\oint_{\Gamma} P dx + Q dy$ toma el valor $\pm 2\pi$ y analizar cuando el signo es positivo.
 - Calcular el valor de la integral $\int_{\Gamma} P dx + Q dy$, cuando $(0, 0)$ es exterior a Γ .
112. Sean $r = (x, y)$, $r = \|r\|$ y $f(x, y) = \left(\frac{\partial \log r}{\partial y}, -\frac{\partial \log r}{\partial x} \right)$, para $r > 0$. Sea Γ una curva de Jordan regular a trozos situada en el anillo $1 < x^2 + y^2 < 25$. Determinar todos los valores posibles de la integral de línea de f a lo largo de Γ .
113. Una región conexa con un sólo agujero se llama doblemente conexa (el anillo $1 < x^2 + y^2 < 25$ es un ejemplo). Si P y Q son de clase C^1 en una región abierta R doblemente conexa y si $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, en todo R , ¿cuántos valores distintos posibles existen para las integrales $\int_{\Gamma} P dx + Q dy$, donde Γ es una curva de Jordan regular a trozos en R ?
114. Resolver el ejercicio ?? para regiones triplemente conexas, es decir regiones planas con dos agujeros solamente.
115. Sean P, Q funciones de clase C^1 tales que $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ en todo punto excepto en tres puntos. Sean $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ tres círculos como se muestra en la figura adjunta y sea $I_k = \oint_{\Gamma_k} P dx + Q dy$. Supongamos que $I_1 = 12, I_2 = 10, I_3 = 15$.
- Determinar el valor $\int_{\Gamma} P dx + Q dy$, siendo Γ la curva en forma de ocho.

b) Dibujar otra curva cerrada Γ a lo largo de la cual $\int P dx + Q dy = 1$. Indicar en el dibujo el sentido en que recorre el camino.



ap47814a.tex

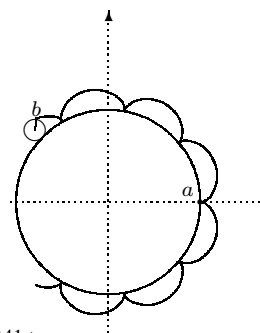
c) Si $I_1 = 12$, $I_2 = 9$, $I_3 = 15$, demostrar que no existe camino cerrado alguno Γ a lo largo del cual $\int_{\Gamma} P dx + Q dy = 1$.

116. Sea $I_k = \int_{\Gamma_k} P dx + Q dy$, donde $P(x, y) = -y \left[\frac{1}{(x-1)^2 + y^2} + \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{(x+1)^2 + y^2} \right]$ y $Q(x, y) = \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2} + \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{x+1}{(x+1)^2 + y^2}$. En la figura adjunta Γ_1 es la circunferencia menor $x^2 + y^2 = \frac{1}{8}$ (con el sentido contrario al de las agujas del reloj), Γ_2 es la circunferencia mayor $x^2 + y^2 = 4$ (con el sentido contrario al de las agujas del reloj) y Γ_3 es la curva unión de las tres circunferencias $\gamma_1 : (x-1)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$, $\gamma_2 : x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$, $\gamma_3 : (x+1)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$, dibujadas en los sentidos que se indican en la figura. Si $I_2 = 6\pi$ e $I_3 = 2\pi$, hallar el valor de I_1 .

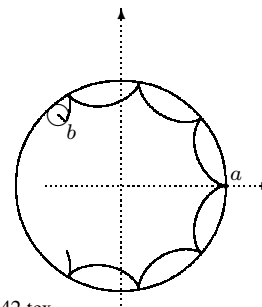
117. Calcular el área de las figuras limitadas por las siguientes curvas:

- a) la elipse $x = a \cos t$, $y = b \sin t$.
- b) la astroide $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$.
- c) la cardioide $x = a(2 \cos t - \cos 2t)$, $y = a(2 \sin t - \sin 2t)$.
- d) el lazo del folio de Descartes $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, $a > 0$.
- e) la curva $(x + y)^3 = axy$.

118. Una circunferencia de radio b rueda sin resbalar sobre otra circunferencia fija de radio a , por fuera de la misma. Supongamos que $\frac{a}{b} \in \mathbb{N}^*$, entonces determinar el área limitada por la curva (epicicloide) que describe un punto fijo sobre la circunferencia de radio b al rodar sobre la circunferencia de radio a . Analizar el caso en que $a = b$ (cardioide). dem2341.tex



119. Una circunferencia de radio b rueda sin resbalar por otra circunferencia fija de radio a permaneciendo dentro de ella, de modo que $\frac{a}{b} \in \mathbb{N}^*$. Calcular el área limitada por la curva (hipocicloide) descrita por un punto fijo de la circunferencia móvil al rodar dentro de la circunferencia de radio b .



dem2342.tex

Analizar el caso particular en que $a = \frac{b}{4}$ (astroide).

120. Transformar las integrales de línea tomadas a lo largo de las curvas cerradas Γ , en el sentido positivo, en las integrales dobles sobre los dominios limitados por estos contornos:

- a) $\oint_{\Gamma} (1 - x^2)y dx + x(1 + x^2)dy$.
 b) $\oint_{\Gamma} (e^{xy} + 2x \cos y)dx + (e^{xy} - x^2 \sin y)dy$.

Solución

a) Tomando $P = (1 - x^2)y$, $Q = x(1 + y^2)$, entonces $\frac{\partial P}{\partial y} = 1 - x^2$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1 + y^2$, con lo cual tenemos:

$$\oint_{\Gamma} (1 - x^2)y dx + x(1 + y^2)dy = \iint_S (x^2 + y^2) dx dy.$$

b) Sea $P = e^{xy} + 2x \cos y$, $Q = e^{xy} - x^2 \sin y$, entonces $\frac{\partial P}{\partial y} = xe^{xy} - 2x \sin y$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = ye^{xy} - 2x \sin y$, por lo tanto:

$$\oint_{\Gamma} (e^{xy} + 2x \cos y)dx + (e^{xy} - x^2 \sin y)dy = \iint_S (y - x)e^{xy} dx dy.$$

121. Calcular la integral $\oint_{\Gamma} (1 - x^2)y dx + x(1 + y^2)dy$, donde Γ es la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$, directamente y aplicando la fórmula de Green.

Solución Tomando la parametrización $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, entonces:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (1 - x^2)y dx + x(1 + y^2)dy &= \\ \int_0^{2\pi} \left((1 - a^2 \cos^2 t)a \sin t (-a \sin t) + a \cos t(1 + a^2 \sin^2 t)a \cos t \right) dt &= \\ 4a^4 \int_0^{2\pi} 2 \cos^2 t(1 - \cos^2 t)dt + a^2 \int_0^{2\pi} \cos 2t dt &= 8a^4 \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} \frac{3}{4} \right) = \frac{1}{2} \pi a^4. \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\int_{\Gamma} (1 - x^2)y dy + x(1 + y^2)dy = \iint_S (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^a r^3 dr \right) d\theta = 2\pi \frac{a^4}{4} = \frac{1}{2} \pi a^4.$$

122. Calcular la integral $\int_{\Gamma} (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy$, donde Γ es la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ y cuando Γ es la circunferencia $x^2 + y^2 = ax$. La integral debe calcularse directamente y usando la fórmula de Green.

Solución

a) Usando la parametrización $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, tenemos:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy = \\ & \int_0^{2\pi} \left((ab \sin t \cos t + a \cos t + b \sin t)(-a \sin t) + (ab \sin t \cos t + a \cos t - b \sin t)b \cos t \right) dt = \\ & \int_0^{2\pi} \left(-a^2 b \sin^2 t \cos t - a^2 \sin t \cos t - ab \sin^2 t + ab^2 \sin t \cos^2 t - b^2 \sin t \cos t + ab \cos^2 t \right) dt = \\ & -a^2 b \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos t dt - ab^2 \int_0^{2\pi} \cos^2(-\sin t) dt - (a^2 + b^2) \int_0^{2\pi} \sin t \cos t dt + ab \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \end{aligned}$$

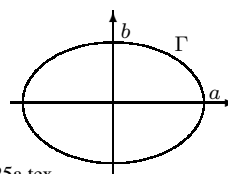
$$0 + 0 + 0 + 0 = 0.$$

Usando la fórmula de Green tenemos:

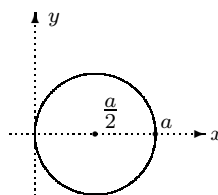
$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy = \iint_{\mathbb{R}} (y + 1 - (x + 1)) dx dy = \iint_{\mathbb{R}} (y - x) dx dy = \\ & \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (br \sin t - ar \cos t) ab r dr \right) dt = ab \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (br \sin t - ar \cos t) dt \right) r dr = \\ & ab \int_0^1 0 \cdot r dr = 0. \end{aligned}$$

b) La circunferencia se escribe $r = a \cos \theta$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, entonces $x = r \cos \theta = a \cos^2 \theta$, $y = r \sin \theta = a \sin \theta \cos \theta$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy = \\ & \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[(a^2 \cos^3 \theta \sin \theta + a \cos^2 \theta + a \sin \theta \cos \theta)(-2a \cos \theta \sin \theta) + \right. \\ & \left. (a^2 \cos^3 \theta \sin \theta + a \cos^2 \theta - a \sin \theta \cos \theta)a(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \right] d\theta = \\ & -2 \left[a^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta \sin^2 \theta d\theta + a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta \sin \theta d\theta + a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta \right] + \end{aligned}$$



ber3825a.tex



ber3825b.tex

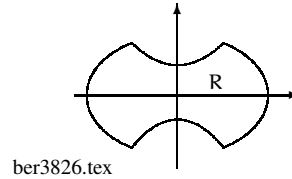
$$\begin{aligned}
& a^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \theta \sin \theta d\theta - a^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta \sin^3 \theta d\theta + a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta - a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta + \\
& a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta \cos \theta d\theta - a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta \sin \theta d\theta = \\
& -2a^3 \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 \theta - \cos^6 \theta) d\theta - 3a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta + a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta = \\
& -4a^3 \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} \frac{3}{4} \left(1 - \frac{5}{6}\right) - 3a^2 \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{4}\right) + a^2 \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} \frac{3}{4} = -\frac{3 \cdot 4 \pi a^3}{4 \cdot 4} \frac{1}{6} = -\frac{1}{8} \pi a^3.
\end{aligned}$$

Usando la fórmula de Green tenemos:

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} (xy + x + y) dx + (xy + x - y) dy &= \iint_{\mathbf{R}} (y - x) dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{a \cos \theta} (\sin \theta - \cos \theta) r^2 dr \right) d\theta = \\
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} a^3 \cos^3 \theta (\sin \theta - \cos \theta) d\theta &= \frac{1}{3} a^3 \left(0 - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta \right) = -\frac{2}{3} a^3 \frac{\pi}{2} \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} = -\frac{1}{8} a^3 \pi.
\end{aligned}$$

123. Demostrar que la integral $\int_{\Gamma} (y^2 x^3 + e^y) dx + (xy^3 + xe^y - 2y) dy$ es igual a cero, si Γ es una curva cerrada simétrica respecto al eje y .

Solución Sea $P(x) = y^2 x^3 + e^y$, $Q(x, y) = xy^3 + xe^y - 2y$, entonces $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y^3 + e^y - 2yx^3 - e^y = y^3 - 2yx^3$, por lo tanto la simetría respecto al eje y implica que



ber3826.tex

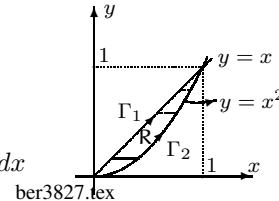
$\varphi(x, y) = y^3 - 2yx^3$, satisface $\varphi(x, -y) = -\varphi(x, y)$ y la integral sobre la región encerrada R es nula, pues $\int_{\Gamma} P dx + Q dy = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{-\rho(x)}^{\rho(x)} \varphi(x, y) dy dx = \int_{\alpha}^{\beta} 0 dx = 0$.

Recuerde que una función impar tiene integral nula sobre intervalos de la forma $[-a, a]$.

124. Usando la fórmula de Green, calcular la diferencia entre $I_1 = \int_{\Gamma_1} (x + y)^2 dx - (x - y)^2 dy$ e $I_2 = \int_{\Gamma_2} (x + y)^2 dx - (x - y)^2 dy$, donde Γ_1 es un segmento de la recta que une los puntos $(0, 0)$ y $(1, 1)$ y Γ_2 es el arco de la parábola $y = x^2$.

Solución Tenemos que:

$$\begin{aligned}
I_1 - I_2 &= \iint_{\mathbf{R}} (-2(x - y) - 2(x + y)) dx dy = \iint_{\mathbf{R}} 4x dx dy \\
&= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^x 4x dy \right) dx = 4 \int_0^1 xy \Big|_{x^2}^x dx = 4 \int_0^1 (x^2 - x^3) dx \\
&= 4 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$



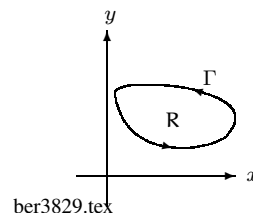
ber3827.tex

125. Demostrar que el valor de la integral $\int_{\Gamma} (2xy - y) dx + x^2 dy$, donde Γ es la curva cerrada, es igual al

área del dominio limitado por esta curva.

Solución En este caso, $\int_{\Gamma} (2xy - y) dx + x^2 dy =$

$$\iint_{\mathbf{R}} (2x - 2x + 1) dx dy = \iint_{\mathbf{R}} dx dy = |\mathbf{R}|.$$



126. Demostrar que la integral $\int_{\Gamma} \varphi(y) dx + [x\varphi'(y) + x^3] dy$, es igual al momento de inercia triple de una figura plana homogénea limitada por el contorno Γ , respecto al eje de ordenadas, donde φ es de clase C^1 .

Solución Se tiene que:

$$\int_{\Gamma} \varphi(y) dx + [x\varphi'(y) + x^3] dy = \iint_{\mathbf{R}} (\varphi'(y) + 3x^2 - \varphi'(y)) dx dy = 3 \iint_{\mathbf{R}} x^2 dx dy = 3I_y.$$

127. Calcular el área de las figuras limitadas por las curvas cerradas, usando la integral de línea:

a) $(x + y)^4 = x^2 y$ b) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ c) $(\sqrt{y} + \sqrt{x})^{12} = xy$.

2.8.9 Cálculo de residuos

128. Sea $I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \operatorname{sen} t}$, con $a > 1$, verificar que I es la integral sobre la circunferencia unidad de una función holomorfa. Deducir el valor de I .

129. Calcular $I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2}$ y $I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + x^4}$.

130. Calcular la integral $I = \int_0^{\pi} \frac{\cos nt dt}{1 - 2a \cos t + a^2}$, donde $I = \Re \epsilon J$, con $J = \int_0^{\pi} \frac{e^{int} dt}{1 - 2a \cos t + a^2}$, si $|a| \neq 1$.

131. Integrando e^{-z^2} sobre el contorno del rectángulo $|\Re z| \leq R, 0 \leq \Im z \leq b$, demostrar que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \cos 2bt dt = \sqrt{\pi} e^{-b^2}$.

132. Integrando $(1 + z^n)^{-1}$ sobre el contorno del sector donde $0 < \arg z < \frac{2\pi}{n}$ y $|z| \leq R$, probar que $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + x^n} = \frac{\pi}{n} \operatorname{sen}^{-1} \frac{\pi}{n}$.

133. Integrando e^{-z^2} en el contorno del sector donde $0 < \arg z < \frac{\pi}{n}$ y $|z| < R$, demostrar que:

$$\int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \int_0^{\infty} \operatorname{sen} x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Capítulo 3

Integrales de superficie

3.1 Teoría de superficies

Cuando estudiamos las funciones del tipo $z = f(x, y)$, donde $(x, y) \in \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ abierto, identificamos su gráfica como una superficie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y) \in \mathbb{R}, z = f(x, y)\}$, lo que supone una correspondencia biunívoca entre S y \mathbb{R} . Es claro que se necesita generalizar esta noción de superficie, pues el toro, la esfera y otras figuras de \mathbb{R}^3 no son de la forma $z = f(x, y)$. Es importante observar que una superficie puede escribirse tanto explícitamente $z = f(x, y)$, como implícitamente a través de una función $F(x, y, z) = 0$, al menos localmente bajo ciertas condiciones (Teorema de la función implícita).

3.1.1 Representación paramétrica de una superficie

Al considerar una superficie que satisface la ecuación $F(x, y, z) = 0$, algunas veces podemos representar z en función de (x, y) . Por ejemplo, si $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$, se puede escribir $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ o $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Existe otra manera de representar una superficie, la representación paramétrica por medio de tres ecuaciones que expresan x, y, z en función de dos parámetros (u, v) :

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v).$$

El conjunto $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ es donde varía (u, v) y los puntos correspondientes (x, y, z) constituyen una superficie en el espacio xyz .

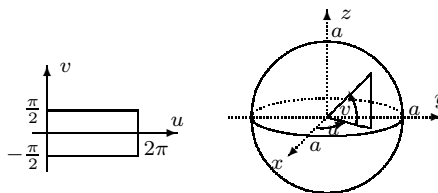
Si escribimos $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, con $(u, v) \in \mathbb{R}$, \mathbf{r} se denomina representación paramétrica de la superficie.

Cuando la superficie se escribe $z = f(x, y)$, tenemos $\mathbf{r}(u, v) = (u, v, f(u, v))$.

Por otro lado si es posible eliminar u, v en las ecuaciones paramétricas, obtenemos $z = f(x, y)$.

Ejemplo 3.1.1 Representación paramétrica de la superficie de una esfera

Las ecuaciones $x = a \cos v \cos u$, $y = a \cos v \sin u$, $z = a \sin v$, $0 \leq u \leq 2\pi$ y $-\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$, representan la superficie de una esfera de radio a y centro en el origen. Elevando al cuadrado las tres ecuaciones tenemos que $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

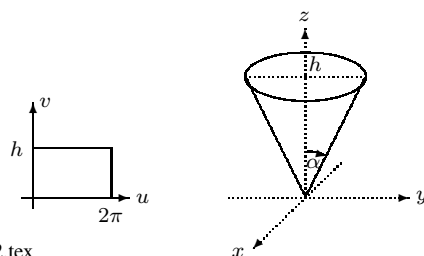


mis1.tex

Ejemplo 3.1.2 Representación paramétrica de un cono

Sea $\mathbf{r}(u, v) = (v \sin \alpha \cos u, v \sin \alpha \sin u, v \cos \alpha)$, una representación paramétrica que describe el cono circular recto de la figura adjunta.

Si elevamos al cuadrado x , y , z y los sumamos se tiene $x^2 + y^2 + z^2 = v^2$.



mis2.tex

Definición 3.1.1 Una superficie parametrizada es una función $\mathbf{r}: \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. La superficie $S = \mathbf{r}(\mathbb{R})$ y se puede escribir $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$.

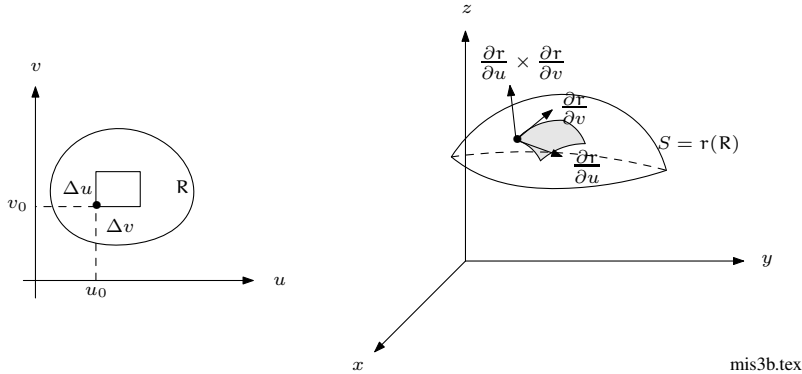
Si \mathbf{r} es diferenciable o de clase C^1 , decimos que la superficie S es diferenciable o de clase C^1 .

Definición 3.1.2 Si la aplicación $\mathbf{r}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{r}(\mathbb{R})$ es biyectiva, la superficie $\mathbf{r}(\mathbb{R})$ se denomina superficie paramétrica simple.

Consideremos una superficie representada por la fórmula $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, con $(u, v) \in \mathbb{R}$. Si x, y, z son de clase C^1 , podemos considerar los dos vectores:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right), \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right).$$

El producto vectorial $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \left(\left| \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right|, \left| \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right|, \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \right).$



mis3b.tex

Si r es diferenciable en $(u_o, v_o) \in R$, fijando u en u_o obtenemos $v \mapsto r(u_o, v)$ de modo que el vector tangente a la curva en $r(u_o, v_o)$ es $\frac{\partial r}{\partial v}(u_o, v_o) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) (u_o, v_o)$.

De manera similar $\frac{\partial r}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) (u_o, v_o)$. Como los vectores $\frac{\partial r}{\partial u}, \frac{\partial r}{\partial v}$ son tangentes a las curvas sobre la superficie $r(u, v)$, el vector $\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}$ determina el plano tangente a la superficie en $r(u, v)$, siempre que la superficie no presente anomalías, como sucediera si $\frac{\partial r}{\partial u}$ o $\frac{\partial r}{\partial v}$ fuera $\mathbf{0}$. El hecho que $\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \neq \mathbf{0}$, asegura la existencia del plano tangente.

Definición 3.1.3 Sea $R \subset \mathbb{R}^2$ un abierto y sea S la superficie en \mathbb{R}^3 dada por $r: R \rightarrow S$ de clase C^1 , se dice que la superficie es regular en $(u, v) \in R$, si $\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}(u, v) \neq \mathbf{0}$.

Los puntos $(u, v) \in R$ en los que las derivadas parciales $\frac{\partial r}{\partial u}, \frac{\partial r}{\partial v}$ no son continuas o bien $\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}(u, v) = \mathbf{0}$, se llaman puntos singulares de la superficie S o de r .

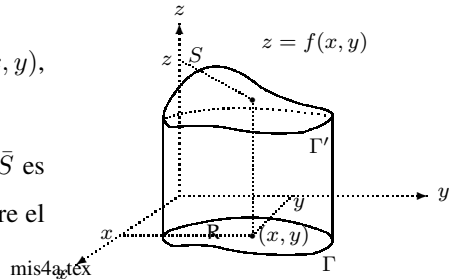
Toda superficie tiene más de una representación paramétrica y puede suceder que un punto puede ser regular para una representación y singular para otra.

Caso en que la superficie se escribe $z = f(x, y)$

Sea $z = f(x, y)$ una superficie con $(x, y) \in R \subset \mathbb{R}^2$ abierto y acotado, con frontera Γ , si las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ son uniformemente continuas sobre R , la función f y sus derivadas pueden extender a \bar{R} .

El conjunto \bar{S} descrito por la función f extendida ($z = f(x, y)$, $(x, y) \in \bar{R}$) tiene por borde $\Gamma' = \bar{S} \setminus S$.

En el caso en que la superficie S es regular, diremos que \bar{S} es regular con frontera. Es obvio que la proyección de Γ' sobre el plano $z = 0$, es Γ .



mis4a.tex

Si Γ es regular a trozos descrita por $x = x(s)$, $y = y(s)$, $0 \leq s \leq s_o$, Γ' también es regular a trozos, representada por las funciones $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = f(x(s), y(s))$, $0 \leq s \leq s_o$, que llamamos *curva frontera* de S (o de \bar{S}) o simplemente *frontera* (∂S).

Sea (x_o, y_o, z_o) un punto de la superficie regular dada por $z = f(x, y)$, como f es de clase C^1 existe un abierto en \mathbb{R}^3 de la forma $O \times]z_o - \varepsilon, z_o + \varepsilon[$, $O \subset \mathbb{R}^2$ acotado, de modo que corta la superficie en un elemento S' regular (con curva borde) especificada por $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \bar{O}$. A este corte S' lo llamamos elemento de superficie de la superficie regular S de la forma $z = f(x, y)$.

Los conceptos que venimos de expresar, se aplican a los casos en que $x = g(y, z)$ o $y = h(x, z)$, es decir cuando se proyecta uno a uno sobre el plano $x = 0$ o $y = 0$.

Se puede decir que $S \subset \mathbb{R}^3$, es una superficie regular, si para todo $(x_o, y_o, z_o) \in S$ existe un paralelepípedo $\Delta = [x_o - \delta_1, x_o + \delta_1] \times [y_o - \delta_2, y_o + \delta_2] \times [z_o - \delta_3, z_o + \delta_3]$ que corta la superficie S en un elemento regular σ , el cual se puede describir localmente por las ecuaciones de uno de los tres tipos siguientes:

$$z = f_1(x, y), (x, y) \in \Delta_z, \quad x = f_2(y, z), (y, z) \in \Delta_x, \quad y = f_3(x, z), (x, z) \in \Delta_y,$$

donde las funciones f_1, f_2, f_3 tienen derivadas parciales continuas sobre los rectángulos cerrados.

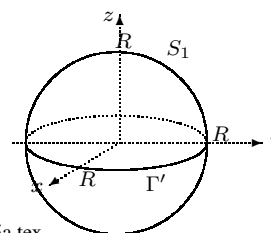
Observación En vez del paralelepípedo Δ se pudo definir en general un abierto acotado S , de modo que \bar{S}_u sea la proyección sobre el plano $u = 0$.

Proposición 3.1.1 Si $g(x, y, z)$ es una función de clase C^1 , $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$ abierto tal que $\|\nabla g(x, y, z)\| > 0$, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}$ y si la superficie S para la cual $g(x, y, z) = 0$ no es vacía, entonces S es regular:

Demostración En efecto, si $\frac{\partial g}{\partial z}(x_o, y_o, z_o) \neq 0$, por el teorema de la función implícita existe U abierto acotado, para el cual $z = f(x, y)$, $(x, y) \in U$ y $g(x, y, f(x, y)) = 0$, la función f es de la clase C^1 . Así la superficie es regular sobre \bar{U} .

- El plano tangente de la superficie S es $z - z_o = \frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o)(x - x_o) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o)(y - y_o)$ y por el hecho que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x_o, y_o, z_o)}{\frac{\partial g}{\partial z}(x_o, y_o, z_o)}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial y}(x_o, y_o, z_o)}{\frac{\partial g}{\partial z}(x_o, y_o, z_o)}$, se tiene $\frac{\partial g}{\partial x}(x_o, y_o, z_o)(x - x_o) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_o, y_o, z_o)(y - y_o) + \frac{\partial g}{\partial z}(x_o, y_o, z_o)(z - z_o) = 0$.
- La superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, ($R > 0$), es regular, pues si $(x_o, y_o, z_o) \in S$, una de las coordenadas es $\neq 0$, digamos $z_o \neq 0$ y existe un abierto $(x_o, y_o) \in O \subset B((0, 0), R)$ de modo

que $z = f(x, y) = \text{signo}(z_o)\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, $(x, y) \in O$ y tiene derivadas parciales continuas. La superficie de la esfera es una superficie regular sin frontera. La parte S_1 de la superficie de la esfera con $z > 0$, es una superficie regular con borde Γ' , dado por $x^2 + y^2 = R^2$.



La cerradura de $\bar{S}_1 = S_1 \cup \Gamma'$ es el hemisferio superior (con frontera). Así \bar{S}_1 se proyecta uno a uno sobre el plano xy y no puede proyectarse uno a uno sobre otro plano que no sea xy .

mis5a.tex

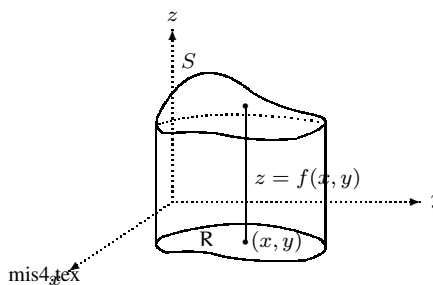
Definición 3.1.4 Una superficie que se puede partir en un número finito de elementos regulares se dice regular a trozos.

Definición 3.1.5 Una superficie parametrizada S es regular a trozos, si es la unión de imágenes de superficies parametrizadas $r_i: R_i \rightarrow \mathbb{R}^3$, $R_i \subset \mathbb{R}^2$ tales que:

- i) R_i es un abierto del plano
- ii) r_i es de clase C^1 y uno a uno excepto tal vez en la frontera de R_i
- iii) S_i , la imagen de r_i es regular, excepto tal vez en un número finito de puntos.

Ejemplo 3.1.3 Cuando una superficie S se da en la forma explícita $z = f(x, y)$, podemos representarla por la ecuación $r(x, y) = (x, y, f(x, y))$. La proyección de S sobre el plano xy determina R . Además, el producto vectorial es:

$$\frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial y} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right),$$

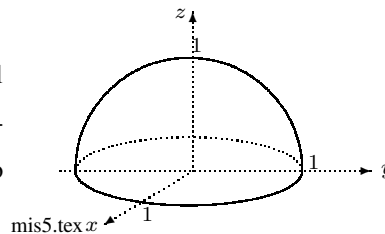


mis4.tex

por lo que $\frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial y} \neq \mathbf{0}$, $\forall (x, y) \in R$. Los únicos puntos singulares que se pueden dar son puntos en los que una de las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ no es continua.

Un caso típico es la ecuación $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ que representa el hemisferio superior de radio 1, centrado en el origen, con $x^2 + y^2 \leq 1$.

Las derivadas parciales $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}$ existen y son continuas en el interior del círculo $x^2 + y^2 \leq 1$, pero no existen en la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. Consideremos ahora el mismo hemisferio anterior, representado por:



$$\mathbf{r}(u, v) = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v), \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = (-\sin u \cos v, \cos u \cos v, 0),$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (-\cos u \sin v, -\sin u \sin v, \cos v), \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \cos v \mathbf{r}(u, v), \quad \mathbf{R} = [0, 2\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}].$$

La imagen de \mathbf{R} no es una superficie paramétrica simple, pues al punto $(0, 0, 1)$ (polo norte) se le asocia $[0, 2\pi] \times \{\frac{\pi}{2}\}$ y es el único punto singular. Además $\mathbf{r}(0, v) = \mathbf{r}(2\pi, v)$ de modo que los lados izquierdo y derecho de S se aplican a la misma curva, que es un arco que une el polo norte al punto $(1, 0, 0)$ del ecuador.

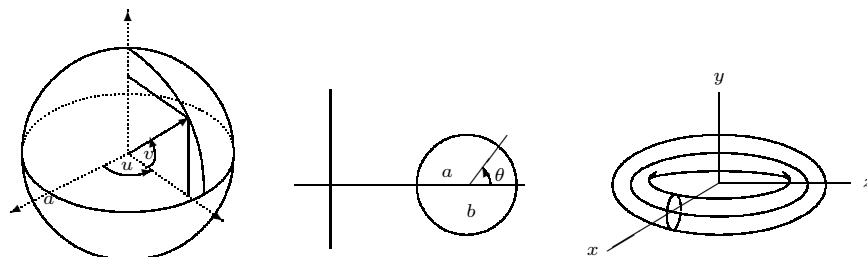
Ejemplo 3.1.4 La definición de superficie regular implica la existencia de una región la cual corta S , en un elemento regular σ que se representa explícitamente, digamos por la función $z = f(x, y), (x, y) \in \Delta'$, la cual es de clase C^1 , entonces el vector:

$$\boldsymbol{\eta} = \left(\mp \frac{f_x}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \mp \frac{f_y}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \right)$$

es normal a la superficie y podemos decir que S es una superficie regular localmente orientable¹.

Ejemplo 3.1.5 Las ecuaciones $x = a \cos v \cos u, y = a \cos v \sin u, z = a \sin v, -\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}, 0 < u < 2\pi$, representan la superficie de una esfera de radio a con centro en el origen.

Un cálculo breve determina $\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| = a^2 |\cos v|$. De acuerdo a este resultado no podemos decir que la superficie de la esfera S de radio a es regular, pero esto no es debido a la superficie S sino a la escogencia de la parametrización, pues los polos en los valores $v = \pm \frac{\pi}{2}$ de los parámetros no son singulares.



¹Más adelante se precisará la noción de superficie orientable

Ejemplo 3.1.6 Toro Si consideramos en el plano xy un círculo de radio a con centro en $(b, 0)$, ($0 < a < b$), la rotación del círculo en el espacio alrededor del eje y , genera una superficie T llamada *toro*. Sea θ el ángulo de la figura y ϕ el ángulo a través del cual el círculo es rotado alrededor del eje y .

La superficie es representada paramétricamente con ayuda de θ y ϕ por $x = (b + a \cos \theta) \cos \phi$, $y = a \sin \theta$, $z = (b + a \cos \theta) \sin \phi$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$. En coordenadas cartesianas, la ecuación del toro es:

$$F(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + z^2} - b)^2 + y^2 - a^2 = 0,$$

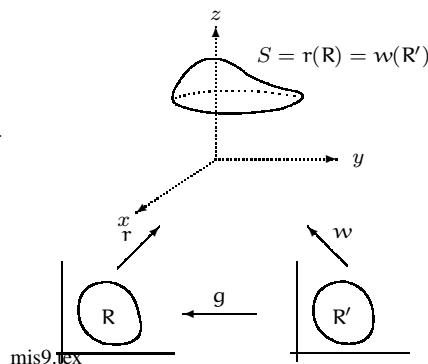
donde $F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 = 4(\sqrt{x^2 + z^2} - b)^2 + 4y^2 > 0$ sobre T . Es claro que T es una superficie regular.

3.1.2 Cambio de representación paramétrica de una superficie

Supongamos que la función $r: R \rightarrow \mathbb{R}^3$, $R \subset \mathbb{R}^2$ es la representación paramétrica de la superficie $S = r(R)$ y que la R es la imagen de la región $R' \subset \mathbb{R}^2$ por la aplicación biyectiva $g: R' \rightarrow R$ de clase C^1 , dada por $g(s, t) = (u(s, t), v(s, t))$. Así tenemos que $w(s, t) = r(g(s, t))$ y las aplicaciones $r: R \rightarrow \mathbb{R}^3$, $w: R' \rightarrow \mathbb{R}^3$, representan la misma superficie, es decir $r(R) = w(R') = S$ (regularmente equivalentes).

Teorema 3.1.1 Sean r y w dos funciones regularmente equivalentes dadas por $w = r \circ g$, donde $g(s, t) = (u(s, t), v(s, t))$ es de clase C^1 , $g: R' \rightarrow R$, entonces:

$$\frac{\partial w}{\partial s} \times \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)} \right|,$$



donde las derivadas parciales $\frac{\partial r}{\partial u}$, $\frac{\partial r}{\partial v}$ están evaluadas en el punto $(u(s, t), v(s, t))$, o sea el producto vectorial de w , es igual al producto vectorial de r , multiplicado por el determinante jacobiano de la transformación g .

Demostración Usando la regla de la cadena para varias variables tenemos:

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial r}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial r}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial s}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial r}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t},$$

donde las derivadas $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ están evaluadas en $(u(s, t), v(s, t))$. El producto vectorial nos da:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} &= \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial s} \right) \times \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} \right) \\ &= \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial v}{\partial t} + \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right) \frac{\partial v}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \left(\frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial s} \right) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)} \right|. \end{aligned}$$

3.2 Área de una superficie

Consideremos en Γ un segmento rectilíneo horizontal, su imagen por \mathbf{r} es una curva situada en la superficie $\mathbf{r}(\Gamma)$. Para v fija, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ es un vector tangente a la curva y cuando u se incrementa Δu , el punto situado en $\mathbf{r}(u, v)$ se desplaza a lo largo de la u -curva una distancia aproximadamente igual a $\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right\| \Delta u$. Similarmente, para u fija un punto de la v -curva se desplaza por el incremento Δv , una distancia aproximada a $\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| \Delta v$. El área del paralelogramo determinado por $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \Delta u$ y $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \Delta v$ es la norma de su producto vectorial:

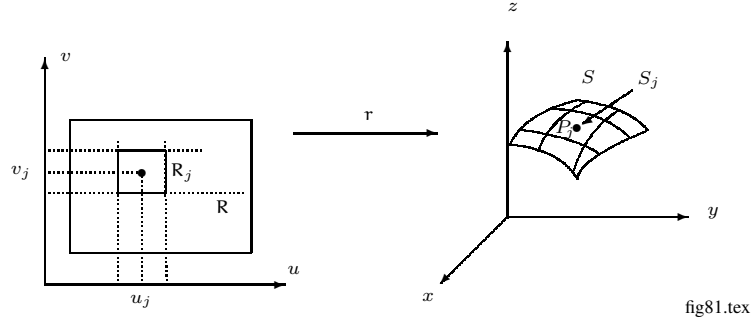
$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \Delta u \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \Delta v \right\| = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| \Delta u \Delta v.$$

Recordemos que la norma del producto vectorial puede verse como un factor de proporcionalidad de las áreas. Así en los puntos en que el producto vectorial es nulo, el paralelogramo degenera en un punto o en una curva.

En cada punto regular los vectores $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ y $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ determinan el plano tangente, que es normal al vector $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$. La continuidad de $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ implican la continuidad del desplazamiento del plano tangente, en una superficie regular. De este modo vemos que la continuidad de $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ no permite la presencia de aristas o puntas en la superficie.

Para simplificar, consideremos una superficie regular S de clase C^1 , dada por $\mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in \mathbf{R}$, donde \mathbf{R} es un rectángulo acotado.

Sea P una partición de \mathbf{R} es un número finito de rectángulos (en el sentido de 2-dimensional), con lados paralelos a los ejes coordenados, $\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_m$, ($\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 \cup \dots \cup \mathbf{R}_m$), donde cualesquiera dos partes se intercambian sólo en alguna parte de sus fronteras.



Sea $(u_j, v_j) \in R_j$ un punto arbitrario, a este punto le corresponde un punto $P_j = r(u_j, v_j) = (x_j, y_j, z_j) \in S_j$. Cada elemento R_j de la partición P , genera una parte de la superficie S_j de S , de modo que $(S_j)_{j=1, \dots, m}$ es una partición de S . Sea $|S_j|$ el área de S_j , entonces el área de S es el límite de la suma de los $|S_j|$, cuando $\|P\| \rightarrow 0$, es decir:

$$|S| = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{j=1}^m |S_j|,$$

si el límite existe. Recordemos que $|S_j|$ es aproximadamente igual a:

$$\left\| \frac{\partial r}{\partial u}(P_j) \Delta u_j \times \frac{\partial r}{\partial v}(P_j) \Delta v_j \right\| = \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}(P_j) \right\| \Delta u_j \Delta v_j,$$

donde $|R_j| = \Delta u_j \Delta v_j$. Así tenemos que:

$$|S| = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{j=1}^m |S_j| = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{j=1}^m \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}(P_j) \right\| \Delta u_j \Delta v_j = \iint_R \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\| du dv.$$

El resultado fácilmente se generaliza a una región R acotada y medible. Se observa que si el área $|S|$ existe, es independiente de la partición R y de la escogencia de los puntos P_j .

Así se ha demostrado el siguiente teorema.

Teorema 3.2.1 *Sea S una superficie regular con representación paramétrica de clase C^1 , $r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $(u, v) \in R \subset \mathbb{R}^2$, R acotado medible, entonces el área de la superficie S está dado por:*

$$|S| = \iint_R \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\| du dv.$$

Cuando $r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ se tiene que:

$$|S| = \iint_R \sqrt{\left| \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right|^2 + \left| \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right|^2 + \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|^2} du dv.$$

Si S se expresa por la ecuación $z = f(x, y)$ i.e. $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$ se tiene que:

$$|S| = \iint_{\mathbf{R}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

Si S se expresa por la ecuación $F(x, y, z) = 0$, donde S puede proyectarse uno a uno sobre el plano xy y si la ecuación $F(x, y, z) = 0$, define a z como función de x, y i.e. $z = f(x, y)$, entonces $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$,

$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$ en los puntos en que $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ y tenemos:

$$|S| = \iint_{\mathbf{R}} \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}{\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|} dx dy.$$

Teorema 3.2.2 Si \mathbf{r} y \mathbf{w} son dos funciones regularmente equivalentes, entonces el área de la superficie $|S|$ es independiente de la representación paramétrica usada para describir la superficie S , es decir si $\mathbf{r}: \mathbf{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{R} \subset \mathbb{R}^2$ es la representación paramétrica de la superficie $S = \mathbf{r}(\mathbf{R})$ y \mathbf{R} es la imagen de la región $\mathbf{R}' \subset \mathbb{R}^2$ por la aplicación biyectiva $\mathbf{g}: \mathbf{R}' \rightarrow \mathbf{R}$ de clase C^1 , dada por $\mathbf{g}(s, t) = (u(s, t), v(s, t))$, de modo que $\mathbf{w}(s, t) = \mathbf{r}(\mathbf{g}(s, t))$, ($\mathbf{r}(\mathbf{R}) = \mathbf{w}(\mathbf{R}') = S$), entonces

$$\iint_{\mathbf{R}} \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| du dv = \iint_{\mathbf{R}'} \left\| \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \right\| ds dt$$

Demostración Dado que $\mathbf{w} = \mathbf{r} \circ \mathbf{g}$, donde \mathbf{g} es de clase C^1 y biyectiva, $\mathbf{g}: \mathbf{R}' \rightarrow \mathbf{R}$, por la fórmula de cambio de variable tenemos que:

$$|S| = \iint_{\mathbf{R}} \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| du dv = \iint_{\mathbf{R}'} \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \circ \mathbf{g}(s, t) \right\| \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)} \right| ds dt = \iint_{\mathbf{R}'} \left\| \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \right\| ds dt.$$

- Si consideramos una superficie regular S representada paramétricamente por $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, donde $\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| > 0$, para $(u, v) \in \mathbf{R}$ abierto medible en el plano uv y donde x, y, z son de la clase C^1 en $\bar{\mathbf{R}}$. Se supone que existe una correspondencia uno a uno entre S y \mathbf{R} . Como \mathbf{R} es un abierto medible, es acotado y tiene frontera γ no vacía. La frontera γ se transforma bajo las condiciones de \mathbf{r} , en el borde $\Gamma = \bar{S} \setminus S$ de la superficie. No se requiere que la transformación de γ en Γ sea uno a uno.

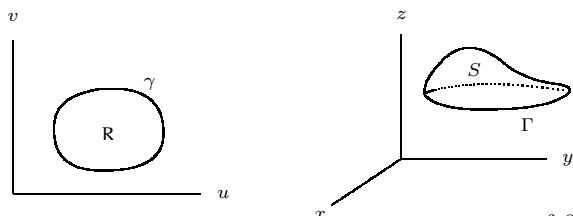


fig82.tex

- Supongamos que la superficie S es proyectable uno a uno sobre el plano $z = 0$ i.e. $z = f(x, y)$ y que $x = g_1(u, v)$, $y = g_2(u, v)$, $(x, y) \in \mathbb{R}'$, $(u, v) \in \mathbb{R}$ de clase C^1 es una biyección entre los conjuntos abiertos medibles \mathbb{R}' y \mathbb{R} de modo que el Jacobiano $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \neq 0$.

Sean $p = \frac{\partial f}{\partial x}$, $q = \frac{\partial f}{\partial y}$ las derivadas parciales de $z = f(x, y) = g_3(u(x, y), v(x, y))$, $(x, y) \in \mathbb{R}'$, donde $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son las soluciones del sistema $x = g_1(u, v)$, $y = g_2(u, v)$, tales que no sólo son continuas sobre \mathbb{R} , sino que son uniformemente continuas, entonces tenemos:

$$|S| = \iint_{\mathbb{R}} \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| du dv = \iint_{\mathbb{R}'} \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy.$$

Si las funciones p y q son solamente continuas y acotadas, la igualdad anterior puede fallar, salvo que se pueda garantizar el cambio de variable en la integral. Además si p y q son continuas pero no acotadas sobre \mathbb{R} , la igualdad anterior puede sin embargo, ser válida si la integral de la derecha se entiende en el sentido de la integral impropia.

- Si ω es un abierto medible, $\omega \subset \mathbb{R}$, la parte $S(\omega)$ de la superficie regular S dada por $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $(u, v) \in \omega$ es a su vez regular y su área está dada por:

$$|S(\omega)| = \iint_{\omega} \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| du dv.$$

La integral anterior tiene sentido cuando ω es un conjunto medible arbitrario de $\bar{\mathbb{R}}$ y es natural verla como la integral del área de la parte $S(\omega)$, de una superficie regular S descrita por $\mathbf{r} = (x, y, z)$.

Es obvio que $|S(\omega)| = |S(\bar{\omega})|$ y en particular $|\bar{S}| = |S(\bar{\mathbb{R}})| = |S(\mathbb{R})| = |S|$. Así, se puede hablar de la parte $S(\omega)$ de la superficie \bar{S} descrita por $\mathbf{r} = (x, y, z)$, correspondiente a cada posible subconjunto $\omega \subset \mathbb{R}$. A cada una de estos subconjuntos le asociamos el número $|S(\omega)|$. Si ω_1, ω_2 son medibles $|S(\omega_1 \cup \omega_2)| = |S(\omega_1)| + |S(\omega_2)|$.

- Al describir la superficie por la ecuación $F(x, y, z) = z - f(x, y) = 0$, el vector $\nabla F = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right) = \boldsymbol{\eta}$ es normal a la superficie. Así:

$$\cos \gamma = \frac{\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{k}}{\|\boldsymbol{\eta}\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}},$$

por lo tanto:

$$|S| = \iint_{\mathbf{R}} \frac{1}{\cos \gamma} dx dy = \iint_{\mathbf{R}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy.$$

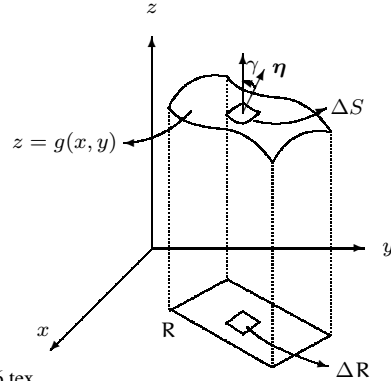


fig86.tex

Este resultado es sugestivo geoméricamente, pues si un rectángulo en el plano xy tiene área ΔR , el área de la parte correspondiente sobre la superficie es $\Delta S \approx \Delta R / \cos \gamma$.

Ejemplo 3.2.1 Área de la superficie de la esfera Tenemos la representación cartesiana $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, la representación funcional $z = \pm \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ y la representación paramétrica $\mathbf{r}(u, v) = (a \cos u \cos v, a \sin u \cos v, a \sin v)$.

Usando la representación implícita $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2$, tenemos que $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial F}{\partial z} = 2z$. El hemisferio superior o el inferior se proyecta uno a uno sobre $\mathbf{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq a^2\}$ en el plano xy . No podemos aplicar la fórmula directamente porque $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$ en la frontera de \mathbf{R} , pero no se anula en el interior de \mathbf{R} , por lo que podemos considerar un disco centrado en el origen $\mathbf{R}(b)$ de radio $b < a$.

Si $S(b)$ representa la porción de superficie correspondiente del hemisferio superior podemos usar la fórmula y tenemos:

$$\begin{aligned} |S(b)| &= \iint_{\mathbf{R}(b)} \frac{\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + (2z)^2}}{|2z|} dx dy = \iint_{\mathbf{R}(b)} \frac{a}{z} dx dy = a \int_0^{2\pi} \int_0^b \frac{r dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} d\theta \\ &= 2\pi a (a - \sqrt{a^2 - b^2}) \longrightarrow 2\pi a^2 \text{ cuando } b \longrightarrow a. \end{aligned}$$

El área de la superficie de la esfera es $4\pi a^2$.

Usando la representación paramétrica $\mathbf{r}(u, v)$ tenemos que $\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| = \|a \cos v \mathbf{r}(u, v)\| = a^2 |\cos v|$, donde $\mathbf{R} =]0, 2\pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Las ecuaciones especifican una superficie regular que es la parte de la superficie de la esfera de radio a obtenida borrando el meridiano $u = 0$, $|v| < \frac{\pi}{2}$ y la condición $\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| > 0$ se da. En particular la

correspondencia es uno a uno entre S y R y sin embargo no se establece una correspondencia uno a uno entre $\gamma = \bar{R} \setminus R$ y $\Gamma = \bar{S} \setminus S$. El borde Γ de la superficie S es el mencionado meridiano. La superficie de la cerradura \bar{S} de la superficie S descrita por r está dada por:

$$|\bar{S}| = |S| = \iint_R a^2 |\cos v| du dv = 4\pi a^2.$$

También el área de la superficie \bar{S} se puede ver como la suma de las áreas de ocho partes contiguas de \bar{S} cortadas por los planos coordenados. Una de estas es la parte σ del primer octante descrita por $z = +\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x^2 + y^2 \leq a^2$, con derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$. Esta área se puede calcular usando coordenadas cartesianas, pero la integral debe verse como una integral impropia:

$$|S| = \lim_{\rho \rightarrow a} \iint_{x^2 + y^2 \leq \rho^2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy = \lim_{\rho \rightarrow a} \iint_{x^2 + y^2 \leq \rho^2} \frac{dx dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

Ejemplo 3.2.2 Calculemos el área de la superficie de un toro dada por $x = (b + a \cos \theta) \cos \varphi$, $y = a \sin \theta$, $z = (b + a \cos \theta) \sin \varphi$, $0 < a < b$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \right\| = a(b + a \cos \theta) > 0$.

Para aplicar los teoremas debemos ver a la superficie como una cerradura \bar{T} de una superficie regular T descrita por las ecuaciones paramétricas en $R =]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[$. Así las condiciones se establecen y

$$|\bar{T}| = |T| = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} a(b + a \cos \theta) d\theta = 2\pi a \cdot 2\pi b = 4\pi^2 ab.$$

Ejemplo 3.2.3 Teorema de Guldin–Pappus Uno de los teoremas de Guldin–Pappus establece que una superficie de revolución obtenida por la rotación de una curva plana de longitud ℓ alrededor de un eje situado en el plano de la curva, tiene por área $2\pi \ell h$, donde h es la distancia desde el centro de gravedad de la curva al eje de rotación. Usaremos la fórmula para demostrar este teorema en un caso especial de superficie de revolución.

Consideremos una curva Γ , inicialmente en el plano xz , que gira alrededor del eje z . Sea $z = f(x)$ su ecuación en el plano xz , donde $a \leq x \leq b$, $a \geq 0$, la superficie de revolución S así engendrada puede representarse por la ecuación vectorial $\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, f(u))$, donde $(u, v) \in [a, b] \times [0, 2\pi]$. Los parámetros u, v pueden interpretarse como el radio y el ángulo polar como se ve en la figura siguiente.

Si $a \leq u \leq b$, todos los puntos (x, y, z) a una misma distancia u del eje z , tienen la misma coordenada z , $f(u)$, de manera que están todos en la superficie.

Así tenemos que:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos v & \sin v & f'(u) \\ -u \sin v & u \cos v & 0 \end{vmatrix} = (-u f'(u) \cos v, -u f'(u) \sin v, u),$$

por lo que $\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| = u \sqrt{1 + [f'(u)]^2}$ y el área es:

$$|S| = \int_0^{2\pi} \int_a^b u \sqrt{1 + (f'(u))^2} du dv = 2\pi \int_a^b u \sqrt{1 + (f'(u))^2} du = 2\pi \int_{\Gamma} x ds.$$

En efecto, la integral resultante puede expresarse como $\int_{\Gamma} x ds$, que es una integral de línea respecto a la longitud del arco tomada a lo largo de Γ . Como esta integral vale $\bar{x}\ell$, donde \bar{x} es la coordenada x del centro de gravedad de Γ y ℓ la longitud de Γ , entonces el área de S es $2\pi\ell\bar{x}$.

Ejemplo 3.2.4 La definición de área de una superficie oculta una dificultad, ya que la simple generalización de la definición de longitud de arco no es válida, pues si aproximamos el área mediante superficies poliédricas inscritas, de modo que las dimensiones de las caras de la superficie poliédrica tiendan a cero, el límite de las correspondientes áreas de las superficies poliédricas, puede no existir dependiendo del tipo de superficie poliédrica usada.

Consideremos un cilindro regular de radio R y altura H . Sea σ la superficie lateral y $|\sigma|$ el área de la superficie. Se divide σ en partes con ayuda de un sistema equidistante de planos perpendiculares al eje del cilindro, distanciados por H/m^3 . Denotando C_1, \dots, C_{m^3} los círculos resultantes del corte de los planos en la superficie σ , y partamos el círculo C con ayuda de $2m$ partes iguales.

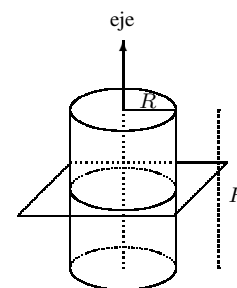
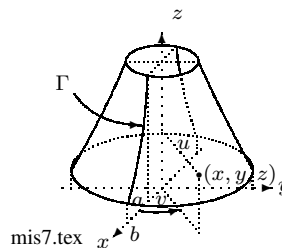


fig83.tex

El paso siguiente es eliminar de los círculos C_k con índice impar, los puntos con índices pares y de los círculos C_k con índice par, los puntos con índices impares. Así quedan un número finito de puntos marcados sobre la superficie σ y se construye un sistema de triángulos con vértices estos puntos, i.e. se obtiene una superficie σ_m inscrita en σ . Dos puntos de cada tripleta pertenece a un mismo círculo C_k y el tercero pertenece a C_{k+1} o C_{k-1} . El número de triángulos es igual a $2m \cdot m^3 = 2m^4$ y el área



de cada triángulo es $\frac{1}{2} \left(2R \sin \frac{\pi}{m} \right) \sqrt{R^2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{m} \right)^2 + \left(\frac{H}{m^3} \right)^2} \sim \frac{\pi^3}{2m^3} R^2$ cuando $m \rightarrow \infty$. Así $|\sigma_m| \sim 2m^4 \cdot \frac{\pi^3 R^2}{2m^3} = \pi^3 R^2 m \rightarrow +\infty$, cuando $m \rightarrow \infty$.

Esto nos indica que el área no puede definirse simplemente como el límite del área de la superficie poligonal inscrita, cuando el máximo diámetro tiende a cero.

Este ejemplo es conocido como el ejemplo de Schwarz², quien lo dió a conocer en 1890.

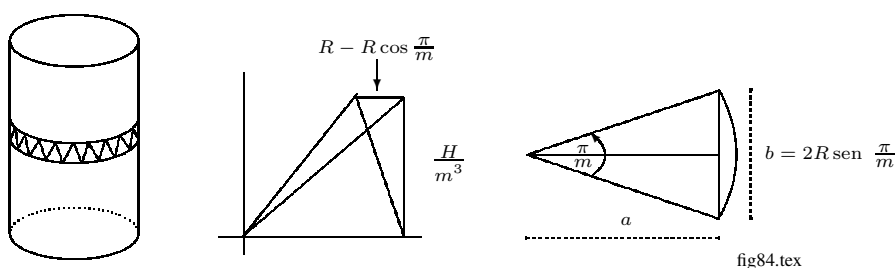


fig84.tex

Ejemplo 3.2.5 Se considera $y = f(x)$ una función continua sobre $[a, b]$ y se desea calcular el área de la superficie generada al girar el gráfico de $f(x)$ alrededor del eje x .

Se define la parametrización $x = u$, $y = f(u) \sin v$, $z = f(u) \cos v$, sobre la región $D: a \leq u \leq b, 0 \leq v \leq 2\pi$.

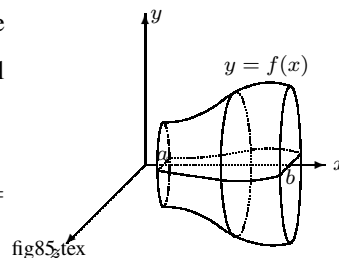


fig85.tex

²**Hermann Amandus Schwarz (1843-1921)** Nace en Hermsdorf, Silesia (hoy Polonia) y muere en Berlín, Alemania. Schwarz comenzó en Berlín sus estudios en química, pero fue influenciado por Kummer y Weierstrass y se interesa en la geometría. Continuó estudiando en Berlín supervisado por Weierstrass hasta su doctorado (en 1864) sobre superficies mínimas (superficies de menor área), un problema típico del cálculo de variaciones, que estableció un puente entre la teoría de superficies mínimas y la teoría de funciones analíticas. En 1869 fue designado como profesor de matemáticas en el Eidgenössische Technische Hochschule in Zurich y en 1875, aceptó un puesto de Matemáticas en la Universidad de Göttingen. Schwarz dio un método alternativo para resolver el problema de Dirichlet que pronto llegó a ser una técnica usual. Schwarz contestó la pregunta de si una superficie mínima dada rinde realmente un área mínima. Una idea de este trabajo, en que él construyó una función que usa aproximaciones sucesivas, Emile Picard la usó para la prueba de la existencia para soluciones de ecuaciones diferenciales. Contiene también la desigualdad para la integral ahora conocido como “la desigualdad de Cauchy-Schwarz o de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz”. Creó métodos generales basado en su magnífica intuición geométrica. La desigualdad de Cauchy-Schwarz aparece en aritmética, geometría y en las formulaciones teóricas del trabajo de matemáticos tal como Bunyakovsky, Cauchy, Grassmann, von Neumann y Weyl.

Así tenemos $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = -f(u) \sin v$, $\left| \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right| = f(u)f'(u)$, $\left| \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} \right| = f(u) \cos v$ y el área es:

$$\begin{aligned} |S| &= \iint_D \sqrt{f(u)^2 \sin^2 v + f(u)^2 f'(u)^2 + f(u)^2 \cos^2 v} \, du \, dv \\ &= \iint_D |f(u)| \sqrt{1 + f'(u)^2} \, du \, dv = \int_0^{2\pi} \int_a^b |f(u)| \sqrt{1 + f'(u)^2} \, du \, dv \\ &= 2\pi \int_a^b |f(u)| \sqrt{1 + [f'(u)]^2} \, du. \end{aligned}$$

3.3 Integral de un campo escalar sobre una superficie

En esta sección nos interesa definir la integral de una función f sobre una superficie regular parametrizada S .

Definición 3.3.1 Sea S una superficie regular parametrizada por la función $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, donde $(u, v) \in \mathbb{R}$ abierto medible, \mathbf{r} de clase C^1 sobre $\bar{\mathbb{R}}$, de modo que $\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| > 0$, para todo $(u, v) \in \mathbb{R}$, \mathbf{r} es una biyección entre \mathbb{R} y S .

Sea $h(x, y, z)$ una función definida y acotada sobre \bar{S} y sea \mathcal{P} una partición de \mathbb{R} en m partes \mathbb{R}_j , tales que dos partes se intersecan a lo sumo en sus fronteras. A cada \mathbb{R}_j le corresponde una parte S_j de la superficie S y se considera $\xi_j = (x_j, y_j, z_j)$, ($j = 1, \dots, m$) un punto arbitrario de S_j .

Se considera la suma $\sum_{j=1}^m h(\xi_j) |S_j|$, donde $|S_j|$ es el área de S_j y se toma el límite:

$$\lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{j=1}^m h(\xi_j) |S_j| = \iint_S h(x, y, z) \, dS,$$

si existe, le decimos integral de superficie de la función escalar h sobre la superficie S .

Se observa que la integral de superficie (si existe) es independiente de la partición de \mathbb{R} en las partes \mathbb{R}_j y de la escogencia de los puntos ξ_j .

Proposición 3.3.1 Con las hipótesis de la definición ??, la integral de superficie (si existe) es independiente de la representación parametrizada de la superficie S .

Prueba Sean $(x_j, y_j, z_j) = \xi_j = \mathbf{r}(u_j, v_j)$, $(u_j, v_j) \in \mathbb{R}_j$, ($j = 1, \dots, m$) y sea $u = g_1(u', v')$, $v = g_2(u', v')$, $(u', v') \in \mathbb{R}'$, abierto medible, $g = (g_1, g_2)$ biyección de \mathbb{R}' en \mathbb{R} de clase C^1 en \mathbb{R}' y donde $\left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(u', v')} \right| \neq 0$, $(u', v') \in \mathbb{R}'$, entonces la suma:

$$\sum_{j=1}^m h(\xi_j) \iint_{\mathbb{R}_j} \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| \, du \, dv = \sum_{j=1}^m h(\xi_j) \iint_{\mathbb{R}'_j} \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u'} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v'} \right\| \, du' \, dv' \longrightarrow \iint_S h(x, y, z) \, dS.$$

Corolario 3.3.1 *Bajo las hipótesis de la definición ??, se tiene:*

$$\iint_S h(x, y, z) dS = \iint_{\mathbf{R}} h \circ \mathbf{r}(u, v) \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| du dv.$$

Prueba En efecto:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m h \circ \mathbf{r}(u_j, v_j) \iint_{\mathbf{R}_j} \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| du dv &= \sum_{j=1}^m h \circ \mathbf{r}(u_j, v_j) \mu_j |\mathbf{R}_j| = \\ \sum_{j=1}^m h \circ \mathbf{r}(u_j, v_j) \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\|_j |\mathbf{R}_j| + \epsilon_m &\longrightarrow \iint_{\mathbf{R}} h \circ \mathbf{r}(u, v) \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| du dv, \end{aligned}$$

cuando $\|P\| = \max_{1 \leq j \leq m} d(\mathbf{R}_j) \longrightarrow 0$, donde $\| \cdot \|_j$ significa que la expresión se evalúa en $\xi_j = (x_j, y_j, z_j)$

$$y p_j = \inf_{(u,v) \in \mathbf{R}_j} \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| \leq \mu_j \leq P_j = \sup_{(u,v) \in \mathbf{R}_j} \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\|.$$

Es claro que $|\epsilon_m| = \left| \sum_{j=1}^m h(\xi_j) (\mu_j - \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\|) |\mathbf{R}_j| \right| \leq k \sum_{j=1}^m (\mu_j - p_j) |\mathbf{R}_j| \longrightarrow 0$, cuando $\|P\| \rightarrow 0$, con $|h(\xi)| \leq k$, $\xi \in S$.

Observación Si una superficie regular S está determinada por la ecuación $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \mathbf{R}$, $f \in C^1$ sobre $\bar{\mathbf{R}}$, se puede parametrizar S con ayuda de x y y : $x = x$, $y = y$, $z = f(x, y)$, por lo que $\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right\| = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$, $p = \frac{\partial f}{\partial x}$, $q = \frac{\partial f}{\partial y}$ y se tiene:

$$\iint_S h(x, y, z) dS = \iint_{\mathbf{R}} h(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy.$$

Si la superficie regular S se representa por la parametrización $\mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in \mathbf{R}$ abierto medible, de la forma $x = u$, $y = v$, $z = f(u, v)$, donde f es continua sobre \mathbf{R} y no acotada en la frontera de \mathbf{R} . En tal caso la integral de h sobre S se da, si la integral de la derecha se considera en el sentido impropio. Esto sucede cuando la integral se calcula sobre la superficie de una semi-esfera.

Si S es la unión de superficies parametrizadas S_i , $i = 1, \dots, p$, que se intersecan a lo sumo en curvas que forman parte de sus fronteras, la integral de h sobre S está dada por:

$$\iint_S h dS = \sum_{i=1}^p \iint_{S_i} h dS.$$

Ejemplo 3.3.1 Sea la helicoides S definido por $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ y $z = \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq 1$, y se desea hallar la integral de $h(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$ sobre S .

Sabemos que $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = r$, $\left| \frac{\partial(y, z)}{\partial(r, \theta)} \right| = \sin \theta$, $\left| \frac{\partial(x, z)}{\partial(r, \theta)} \right| = \cos \theta$ y $f(r \cos \theta, r \sin \theta, \theta) = \sqrt{r^2 + 1}$, es decir:

$$\iint_S f dS = \iint_{\mathbf{R}} f(\mathbf{r}(r, \theta)) \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right\| r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{r^2 + 1} \sqrt{r^2 + 1} r dr d\theta = \frac{8}{3} \pi.$$

Teorema 3.3.1 Si \mathbf{r} y \mathbf{w} son dos funciones regularmente equivalentes y la integral de superficie $\iint_{\mathbf{r}(\mathbf{R})} f \, dS$

existe, entonces $\iint_{\mathbf{w}(\mathbf{R}')} f \, dS$ también existe y se tiene que $\iint_{\mathbf{r}(\mathbf{R})} f \, dS = \iint_{\mathbf{w}(\mathbf{R}')} f \, dS$.

Demostración Se tiene que $\iint_S f \, dS = \iint_{\mathbf{r}(\mathbf{R})} f \, dS = \iint_{\mathbf{R}} f(\mathbf{r}(u, v)) \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| du dv$.

Por otro lado $\mathbf{w} = \mathbf{r} \circ \mathbf{g}$ donde \mathbf{g} es de clase C^1 y biyectiva, $\mathbf{g}: \mathbf{R}' \rightarrow \mathbf{R}$. La fórmula de cambio de variable establece que:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbf{R}} f[\mathbf{r}(u, v)] \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| du dv &= \iint_{\mathbf{R}'} f(\mathbf{r}(\mathbf{g}(s, t))) \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)} \right| ds dt \\ &= \iint_{\mathbf{R}'} f(\mathbf{w}(s, t)) \left\| \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \right\| ds dt = \iint_{\mathbf{w}(\mathbf{R}')} f \, dS. \end{aligned}$$

3.3.1 Centro de gravedad, momento de inercia

Si un campo escalar f se interpreta como la densidad (masa por unidad de área) de una lámina delgada adaptada a la superficie S , la masa m de la superficie se define por la fórmula $m = \iint_S f(x, y, z) \, dS$.

Su centro de gravedad es el punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ determinado por las fórmulas:

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \iint_S x f(x, y, z) \, dS, \quad \bar{y} = \frac{1}{m} \iint_S y f(x, y, z) \, dS, \quad \bar{z} = \frac{1}{m} \iint_S z f(x, y, z) \, dS.$$

El momento de inercia I_ℓ de S alrededor de un eje ℓ viene dado por:

$$I_\ell = \iint_S \delta^2(x, y, z) f(x, y, z) \, dS,$$

donde $\delta(x, y, z)$ representa la distancia de un punto (x, y, z) de S a la recta ℓ .

Ejemplo 3.3.2 Determinar el centro de gravedad de la superficie de una semi-esfera uniforme de radio a .

Consideremos la representación paramétrica $\mathbf{r}(u, v) = (a \cos u \cos v, a \sin u \cos v, a \sin v)$, en la que $0 \leq u \leq 2\pi$, $0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$. En este caso la densidad f es constante, es decir $f = c$ y la masa m es $2\pi a^2 c$ (c veces el área de S). Dada la simetría de la esfera, las coordenadas $\bar{x} = \bar{y} = 0$. La coordenada \bar{z} es:

$$\bar{z} = \frac{1}{m} \iint_S z \, dS = \frac{c}{m} \iint_{\mathbf{R}} a(\sin v) a^2 (\cos v) \, du dv = \frac{1}{m} 2\pi a^3 c \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin v \cos v \, dv = \frac{\pi}{m} a^3 c = \frac{a}{2}.$$

3.4 Superficies orientables

Consideremos una superficie S arbitraria representada por $r(u, v) = (x, y, z)$. La normal a S en el punto (u, v) puede escogerse de dos vectores con direcciones opuestas, a saber $\eta = \pm \frac{\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\|}$, $(u, v) \in \mathbb{R}$.

El signo $+$ corresponde a un lado de la superficie S (con una familia “continua” de vectores unitarios) y el signo $-$ corresponde al otro lado de la superficie.

Definición 3.4.1 Si en cada punto (x, y, z) de la superficie regular S , es posible asociarle un vector unitario $\eta(x, y, z)$, de modo que como función sea continua sobre toda la superficie S , entonces se dice que la superficie S es orientable.

Cuando se habla de superficie regular orientable, no sólo hablamos de S como superficie regular sino que también se habla de una función $\eta(x, y, z)$ continua sobre S , que determina o define un lado de la superficie regular S , i.e. el lado que determina la familia de vectores unitarios $\eta(x, y, z)$ dependiendo continuamente de (x, y, z) .

La misma superficie orientada contrariamente, debe designarse distintamente. Es conveniente denotar estas dos superficies orientadas opuestas S_+ y S_- . Por supuesto la escogencia del lado denotado S_+ es arbitraria y después que se ha escogido, el otro lado se denota S_- .

La definición supone que la superficie tiene dos lados. Daremos un ejemplo de superficie de un sólo lado y por lo tanto no orientable. El primer ejemplo conocido de este tipo de superficie fue la cinta de Möbius.

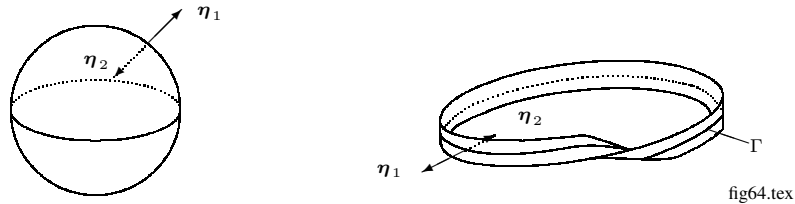


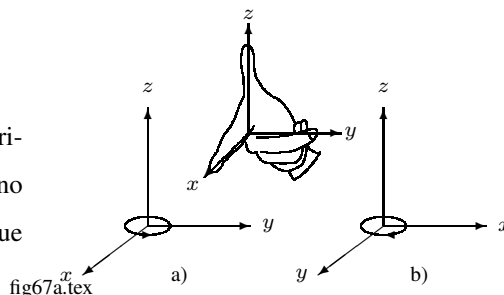
fig64.tex

En cada punto (x, y, z) de la cinta de Möbius hay dos normales η_1 y η_2 , sin embargo η_1 no determina un lado único de la superficie en (x, y, z) , ni tampoco η_2 . Para ver esto “deslizamos” η_2 alrededor de una curva cerrada Γ . Cuando η_2 regresa al punto de partida coincidiría con η_1 y η_2 apuntan del mismo lado de (x, y, z) por lo que la superficie tiene un solo lado. Más adelante volveremos sobre este asunto.

En el espacio 3-dimensional hay esencialmente dos tipos de sistemas de coordenadas, como se muestra en la siguiente figura. El sistema a) se conoce como sistema de mano derecha y el sistema b) se conoce

como sistema de mano izquierda. En el sistema a), la rotación más pequeña que se debe realizar, para hacer coincidir el eje positivo x , con el eje positivo y , dejando fijo el eje z , es un movimiento en sentido contrario a las agujas del reloj. En el sistema b) el movimiento es en el sentido de las agujas del reloj.

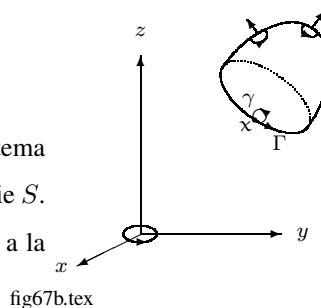
Diremos que el sistema de coordenadas xyz está orientado positivamente, si se rige por la ley de la mano derecha (sistema a)). En el caso contrario diremos que el sistema está orientado negativamente.



Es natural asociar a cada uno de los dos sistemas de coordenadas, un “tornillo” entendido como un objeto consistiendo de un vector unitario en la dirección positiva del eje z y un círculo (cabeza del tornillo), cuyo plano es perpendicular al eje z y cuyo borde es orientado en la dirección de la más pequeña rotación para ir del eje positivo x , al eje positivo y .

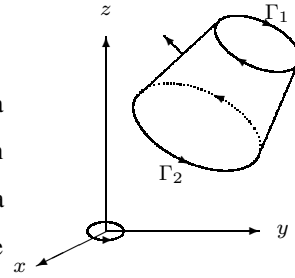
El eje z se puede ver como el eje del tornillo y el círculo como la cabeza de un tornillo de mano derecha (rígidamente conectado a la cabeza), entonces la cabeza es rotada en la dirección de la flecha como se muestra en la figura a) y el tornillo se dirige en la dirección positiva del eje z .

Consideremos que en el espacio 3-dimensional se escogió un sistema de coordenadas, el cual se especifica una orientación de la superficie S . Esto lleva implícito que es posible dibujar un vector normal $\eta(x)$ a la superficie en todo punto de S , que sea continuo.



Si en un punto $x = (x, y, z)$ de la superficie S consideramos una bola $B((x, y, z), \epsilon)$, corta la superficie en una parte $\sigma(x)$ conteniendo al punto x . Se escoge la dirección de la curva $\Gamma(x)$ tal que el vector $\eta(x)$ y el elemento de superficie $\sigma(x)$ formen un sistema cuya orientación sea coherente con la orientación del sistema de coordenadas escogido.

Si la superficie S tiene un borde Γ , la construcción que establecimos da una manera para definir la dirección de Γ . Consideremos un punto x en el contorno Γ , en este punto coinciden la dirección de Γ y de la frontera γ de una pequeña porción de la superficie S que pasa por x . Adjunto se muestra una superficie orientada cuya frontera son las curvas Γ_1 y Γ_2 .



Una superficie S orientada que se corta en dos superficies S_1 y S_2 por una curva regular γ , las orientaciones de S_1 y S_2 son coherentes con la orientación de S . A lo largo de la curva γ los bordes de S_1 y S_2 se describen en direcciones opuestas. Esta observación es esencial para la definición de una superficie regular orientable a trozos.

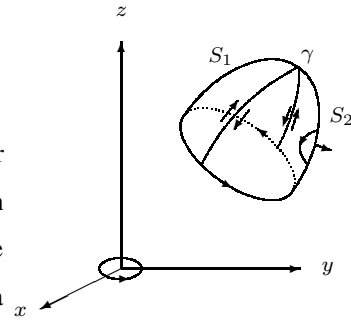


fig68.tex

Definición 3.4.2 Una superficie S regular a trozos se dice orientable si cada uno de los elementos son regulares orientados y si las direcciones correspondientes en los contornos de los elementos son coherentes en el sentido de que son opuestos entre si a lo largo de toda la frontera común.

Si observamos la superficie del cubo, es una superficie regular a trozos orientable, compuesta por seis superficies cuadradas que son regulares y orientables.

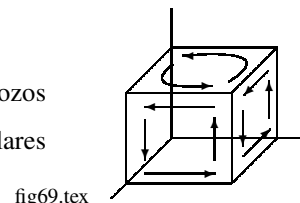


fig69.tex

Definición 3.4.3 Sea $r: R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización de la superficie S regular orientable, donde $\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \neq \mathbf{0}$, para $(u, v) \in R$.

Sea $\eta(u, v)$ la normal unitaria, se dice que la parametrización r preserva la orientación si $\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} = \|\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}\| \eta(u, v)$ en todo $(u, v) \in R$. En caso contrario se dice que r invierte la orientación.

3.5 Integral de un campo vectorial sobre una superficie

Definición 3.5.1 Sea $f: T \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T \subset \mathbb{R}^3$, acotado y medible, f un campo vectorial de clase C^1 y sea S una superficie regular parametrizada por la función $r(u, v)$, donde $(u, v) \in R$ abierto medible, de

modo que $S \subset \mathbb{T}$, la integral de la función vectorial f sobre la superficie S se define por:

$$\iint_S f \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS = \iint_R f \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \, du \, dv.$$

Ejemplo 3.5.1 Flujo a través de una superficie

Imaginemos que un fluido es una colección de partículas y que a cada partícula (x, y, z) le asignamos un vector $\mathbf{v}(x, y, z)$ que representa la velocidad. Este es el campo de velocidad de la corriente, el cual puede variar o no con el tiempo. Vamos a considerar corrientes estacionarias (corrientes en que la velocidad $\mathbf{v}(x, y, z)$ depende sólo de la posición de la partícula y no del tiempo).

Sea $\rho(x, y, z)$ la densidad (masa por unidad de volumen) del fluido en el punto (x, y, z) , si el fluido es incomprensible la densidad ρ será constante en todo el fluido. Para un fluido comprensible (como el gas) la densidad puede variar de un punto a otro. Así se tendrá que la densidad es un campo escalar asociado a la corriente. El producto de la densidad por la velocidad la representamos por $f(x, y, z) = \rho(x, y, z)\mathbf{v}(x, y, z)$, es un campo vectorial llamado densidad de flujo de corriente.

Dicho de otro modo, el campo vectorial de flujo f nos dice cuanta masa de fluido circula por el punto (x, y, z) , en la dirección de $\mathbf{v}(x, y, z)$, por unidad de área y de tiempo.

Sea $S = \mathbf{r}(R)$ una superficie paramétrica simple, en cada punto regular de S designaremos con $\boldsymbol{\eta}$ el vector unitario normal que tenga el mismo sentido que el producto vectorial, es decir:

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\|}.$$

El producto escalar $f \cdot \boldsymbol{\eta}$ representa el componente del vector densidad de flujo en la dirección de $\boldsymbol{\eta}$. La masa de fluido que pasa a través de S , por unidad de tiempo en la dirección de $\boldsymbol{\eta}$, se define con la integral de superficie:

$$\iint_S f \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS = \iint_R f \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \, du \, dv.$$

3.5.1 Observaciones sobre las integrales de superficie

Si $S = \mathbf{r}(R)$ es una superficie parametrizada, el producto vectorial $\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ es normal a la superficie S , en cada punto regular de la superficie. Sabemos que en cada uno de estos puntos existen dos vectores normales unitarios, uno $\boldsymbol{\eta}_1$ que tiene la misma dirección que \mathbf{n} y otro $\boldsymbol{\eta}_2$ que tiene dirección opuesta:

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|}, \quad \boldsymbol{\eta}_2 = -\boldsymbol{\eta}_1.$$

Sea $\boldsymbol{\eta}$ una de las dos normales $\boldsymbol{\eta}_1$ o $\boldsymbol{\eta}_2$, sea f un campo vectorial definido sobre S y supongamos que la integral de superficie $\iint_S f \cdot \boldsymbol{\eta} dS$ existe, entonces podemos escribir:

$$\iint_S f \cdot \boldsymbol{\eta} dS = \pm \iint_R f(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) du dv,$$

donde el signo $+$ se usa si $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_1$ y el signo $-$ se usa si $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_2$.

Supongamos ahora que $f = (P, Q, R)$, $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, entonces el producto vectorial de \mathbf{r} está dado por $\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \left(\left| \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right|, \left| \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right|, \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \right)$.

Si $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_1$ la integral de superficie:

$$\begin{aligned} \iint_S f \cdot \boldsymbol{\eta} dS &= \iint_R P(\mathbf{r}(u, v)) \left| \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right| du dv + \iint_R Q(\mathbf{r}(u, v)) \left| \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right| du dv + \\ &\quad \iint_R R(\mathbf{r}(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv, \end{aligned}$$

y si $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_2$, cada una de las integrales dobles del segundo miembro se reemplaza por su inverso aditivo.

Frecuentemente las integrales del segundo miembro se escriben:

$$\iint_S P(x, y, z) dy \wedge dz + \iint_S Q(x, y, z) dz \wedge dx + \iint_S R(x, y, z) dx \wedge dy^3$$

o bien $\iint_S P dy \wedge dz + \iint_S Q dz \wedge dx + \iint_S R dx \wedge dy$, con lo cual tenemos que:

$$\iint_S P dy \wedge dz = \iint_R P[\mathbf{r}(u, v)] \left| \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right| du dv, \text{ etc.}$$

Debemos tener cuidado con la notación $\iint_S P dy \wedge dz$, pues no es integral doble (es una integral de superficie), ya que P es una función de tres variables (x, y, z) y que se debe tener en cuenta el orden en que aparecen los símbolos dy y dz en la integral de superficie, ya que $\left| \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right| = - \left| \frac{\partial(z, y)}{\partial(u, v)} \right|$ con lo cual tenemos: $\iint_S P dy \wedge dz = - \iint_S P dz \wedge dy$.

Finalmente escribimos $\iint_S f \cdot \boldsymbol{\eta} dS = \iint_S P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$, si $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_1$.

En el caso en que $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_2$ la integral del segundo miembro se reemplaza por su inverso aditivo.

³Una justificación formal del uso del símbolo \wedge se hará más adelante, cuando se traten las formas diferenciales.

Notemos que esta fórmula es similar a $\int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz$.

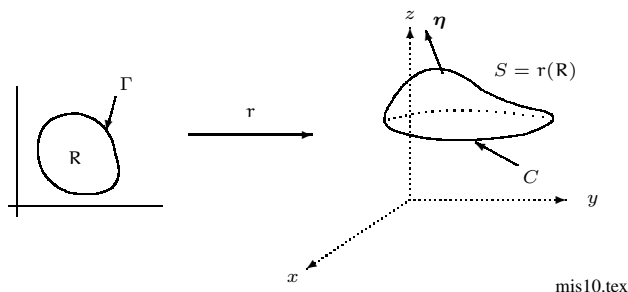
Si el vector unitario $\boldsymbol{\eta}$ se expresa en función de los cosenos directores $\boldsymbol{\eta} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, entonces $\mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} = P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma$ y se tiene:

$$\iint_S \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} dS = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS.$$

Observemos que $\cos \alpha = \cos(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{i})$, $\cos \beta = \cos(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{j})$, $\cos \gamma = \cos(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{k})$, donde la notación $(\boldsymbol{\eta}, \cdot)$ significa el ángulo formado entre el vector $\boldsymbol{\eta}$ y el eje \cdot .

Teorema 3.5.1 Teorema de Stokes⁴

Sea $S = \tau(\mathbb{R})$ una superficie paramétrica regular, donde \mathbb{R} es una región limitada por la curva de Jordan regular a trozos Γ . Supongamos que τ es una aplicación biyectiva de clase C^2 sobre un abierto $U \supset \mathbb{R} \cup \Gamma$, sea C la imagen de Γ por τ y sean P, Q, R aplicaciones de clase C^1 sobre S , entonces:



$$\iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy = \oint_C P dx + Q dy + R dz,$$

donde la curva Γ se recorre en el sentido positivo y la curva C en el sentido que resulte de aplicar a Γ , la función τ .

⁴**Sir George Gabriel Stokes** Nace el 13 agosto de 1819 en Skreen, Condado Sligo, Irlanda. Muere el 1 de febrero de 1903 en Cambridge, Cambridgeshire, Inglaterra.

En 1832, George asistió a escuela en Dublin. Siguió los estudios de la escuela y atrajo la atención del maestro de matemática por su solución de problemas de geométricos. En 1835, a la edad de 16, Stokes fue a Inglaterra y entra al Bristol College de Bristol, donde prepara sus estudios para Cambridge.

En 1845 publica las teorías de la fricción interior de fluidos en movimiento. Quizás el evento más importante en el reconocimiento de Stokes como un matemático importante fue su Informe en investigaciones en hidrodinámica que presentó a la Asociación Británica para el Avance de Ciencia en 1846.

En 1849 Stokes se nombra como profesor de Matemática en Cambridge. En 1851 Stokes se eligió a la Sociedad Real, se le otorgó medalla de esa Sociedad en 1852 y se quedó en la secretaría de la Sociedad en 1854. Fue profesor de Física en la Escuela del Gobierno de Minas en Londres. Stokes recibió la medalla Copley de la Sociedad Real de Londres en 1893. También es conocido por sus importantes aportes a la teoría de series infinitas, al flujo viscoso (ecuaciones de Navier-Stokes), la geodesia y la óptica.

Demostración Se van a establecer las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}\oint_C P dx &= \iint_S \left(-\frac{\partial P}{\partial y} dx \wedge dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \wedge dx \right) \\ \oint_C Q dy &= \iint_S \left(-\frac{\partial Q}{\partial z} dy \wedge dz + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy \right) \\ \oint_C R dz &= \iint_S \left(-\frac{\partial R}{\partial x} dz \wedge dx + \frac{\partial R}{\partial y} dy \wedge dz \right).\end{aligned}$$

Demostremos la primera igualdad, pues las otras dos son similares. La idea de la demostración consiste en expresar la integral de superficie como una integral doble sobre R y luego usar el teorema de Green para expresar la integral doble sobre R como una integral de línea sobre Γ y por último probar que esta integral de línea es igual a $\oint_C P dx$.

Escribamos $\mathbf{r}(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v))$, entonces:

$$\iint_S \left(-\frac{\partial P}{\partial y} dx \wedge dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \wedge dx \right) = \iint_R \left(-\frac{\partial P}{\partial y} \left| \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} \right| + \frac{\partial P}{\partial z} \left| \frac{\partial(Z, X)}{\partial(u, v)} \right| \right) du dv.$$

Sea $p(u, v) = P \circ \mathbf{r}(u, v) = P(X(u, v), Y(u, v), Z(u, v))$, entonces:

$$-\frac{\partial P}{\partial y} \left| \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} \right| + \frac{\partial P}{\partial z} \left| \frac{\partial(Z, X)}{\partial(u, v)} \right| = \frac{\partial}{\partial u} \left(p \frac{\partial X}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(p \frac{\partial X}{\partial u} \right).$$

En efecto:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u} \left(p \frac{\partial X}{\partial v} \right) &= \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial u} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial u} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial Z}{\partial u} \right) \frac{\partial X}{\partial v} + p \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} \\ -\frac{\partial}{\partial v} \left(p \frac{\partial X}{\partial u} \right) &= -\left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial v} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial Z}{\partial v} \right) \frac{\partial X}{\partial u} - p \frac{\partial^2 X}{\partial v \partial u},\end{aligned}$$

y sumando tenemos $-\frac{\partial p}{\partial y} \left(\frac{\partial Y}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} - \frac{\partial Y}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial u} \right) + \frac{\partial p}{\partial z} \left(\frac{\partial Z}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} - \frac{\partial Z}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial u} \right)$.

De esta forma tenemos que (usando la fórmula de Green):

$$\iint_R \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(p \frac{\partial X}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(p \frac{\partial X}{\partial u} \right) \right) du dv = \int_{\Gamma} p \frac{\partial X}{\partial u} du + p \frac{\partial X}{\partial v} dv,$$

donde Γ se recorre en sentido positivo. Parametrizando la curva Γ con ayuda de la función $g: [a, b] \rightarrow$

$\Gamma, t \mapsto (u(t), v(t))$, de modo que $\mathbf{w}(t) = \mathbf{r}(g(t))$ sea la parametrización de C , entonces:

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} p \left(\frac{\partial X}{\partial u} du + \frac{\partial X}{\partial v} dv \right) &= \int_a^b p(u(t), v(t)) \left(\frac{\partial X}{\partial u} u'(t) + \frac{\partial X}{\partial v} v'(t) \right) dt = \\ \int_a^b P(\mathbf{r}(u(t), v(t))) x'(t) dt &= \int_a^b P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) dt = \int_C P(x, y, z) dx,\end{aligned}$$

ya que $x(t) = X(u(t), v(t))$ y que $x'(t) = \frac{\partial X}{\partial u} u'(t) + \frac{\partial X}{\partial v} v'(t)$.

El teorema de Stokes puede expresarse en una forma más simple con la ayuda del rotacional de un campo vectorial. Sea f un campo vectorial de clase C^1 , dado por $f(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$.

Recordemos que el rotacional es otro campo vectorial definido por:

$$\text{rot } f = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right),$$

por lo que la integral de superficie del teorema de Stokes se escribe $\iint_S \text{rot } f \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS$, donde $\boldsymbol{\eta}$ es el vector unitario normal que tiene el mismo sentido que $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$.

La integral de línea del teorema de Stokes puede escribirse $\oint_C f \cdot d\mathbf{r}$, donde \mathbf{r} es la representación paramétrica de la curva C . De esta forma el teorema de Stokes se escribe:

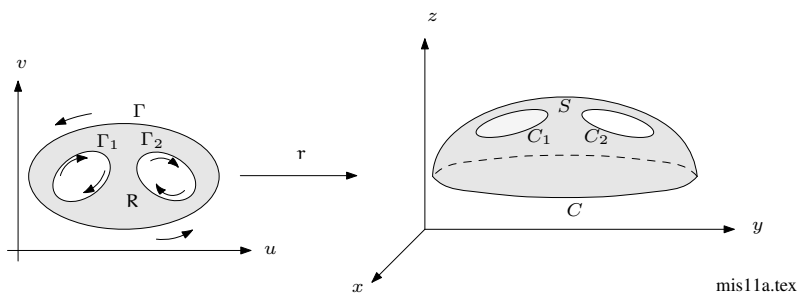
$$\iint_S \text{rot } f \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS = \oint_C f \cdot d\mathbf{r}.$$

En el caso en que S está en el plano xy y $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{k}$, la fórmula se reduce a:

$$\iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \, dy = \oint_C P \, dx + Q \, dy.$$

3.5.2 Extensiones del teorema de Stokes

El teorema de Stokes puede extenderse a superficies regulares simples más generales. Si R es una región múltiplemente conexa como en la figura abajo (con un número finito de agujeros), la imagen biyectiva $S = \mathbf{r}(R)$ tendrá el mismo número de agujeros que en R . Para extenderse el teorema de Stokes a tales superficies seguiremos el mismo tipo de razonamiento que en la demostración precedente, excepto que se usará el teorema de Green para regiones múltiplemente conexas. En lugar de la integral de línea, precisamos una suma de integrales de línea, con signos adecuados, tomadas sobre las imágenes de las curvas que constituyen la frontera de S .



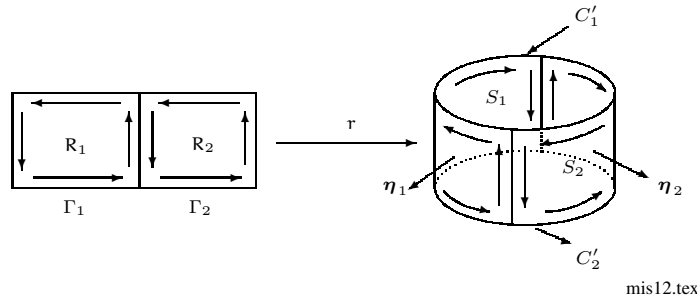
Si S tiene dos agujeros como en la figura anterior y las curvas $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ se recorren en la dirección indicada, la identidad del teorema de Stokes toma la forma:

$$\iint_S \text{rot } f \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS = \oint_C f \cdot dw + \oint_{C_1} f \cdot dw_1 + \oint_{C_2} f \cdot dw_2,$$

donde C, C_1, C_2 son las imágenes de $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ respectivamente y w, w_1 y w_2 son las funciones $w(t) = r(g(t)), w_1(t) = r(g_1(t)), w_2(t) = r(g_2(t))$. Las funciones g, g_1 y g_2 son las que describen $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ en las direcciones inducidas por la aplicación r a partir de $-\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$.

El teorema de Stokes se puede extender a algunas superficies regulares no simples (pero no a todas).

Ejemplo 3.5.2 Consideremos el cilindro de la figura adjunta. Es la unión de dos superficies paramétricas regulares simples S_1 y S_2 , imágenes de dos rectángulos adyacentes R_1 y R_2 a través de las aplicaciones r_1 y r_2 respectivamente.



Si g_1 describe la frontera Γ_1 positivamente orientada de R_1 y g_2 la frontera Γ_2 de R_2 también orientada positivamente, las funciones w_1 y w_2 definidas por $w_1(t) = r(g_1(t))$ y $w_2(t) = r(g_2(t))$, describen las imágenes C_1 y C_2 de Γ_1 y Γ_2 respectivamente. En este caso las representaciones r_1 y r_2 pueden elegirse de modo que están de acuerdo en la intersección $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$.

Si aplicamos el teorema de Stokes a cada punto S_1 y S_2 y sumamos, obtenemos:

$$\iint_{S_1} \text{rot } f \cdot \boldsymbol{\eta}_1 \, dS + \iint_{S_2} \text{rot } f \cdot \boldsymbol{\eta}_2 \, dS = \oint_{C_1} f \cdot dw_1 + \oint_{C_2} f \cdot dw_2, \tag{1}$$

donde $\boldsymbol{\eta}_1$ y $\boldsymbol{\eta}_2$ son las normales determinadas por los productos vectoriales de r_1 y r_2 respectivamente.

Designemos con r la aplicación de $R_1 \cup R_2$ que coincide con r_1 en R_1 y con r_2 en R_2 y sea $\boldsymbol{\eta}$ la correspondiente normal unitaria determinada por el producto vectorial r , i.e. $\boldsymbol{\eta}$ es igual a $\boldsymbol{\eta}_1$ en S_1 e igual a $\boldsymbol{\eta}_2$ en S_2 . Así, la suma de las integrales de superficie sobre S_1 y S_2 en el primer miembro de (1) es:

$$\iint_{S_1 \cup S_2} \text{rot } f \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS.$$

Aquí las representaciones r_1 y r_2 pueden elegirse de modo que w_1 y w_2 tengan direcciones opuestas en cada curva de $C_1 \cap C_2$ como lo indican las flechas en la figura.

Las integrales de línea del segundo miembro de (1) pueden sustituirse por una suma de integrales de línea a lo largo de las dos circunferencias C'_1 y C'_2 que forman el borde superior e inferior de $S_1 \cup S_2$, puesto que las integrales de línea de cada curva de la intersección $C_1 \cap C_2$ se eliminan. De esta forma la igualdad (1) puede escribirse:

$$\iint_{S_1 \cup S_2} \text{rot } f \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS = \oint_{C'_1} f \cdot dw_1 + \oint_{C'_2} f \cdot dw_2,$$

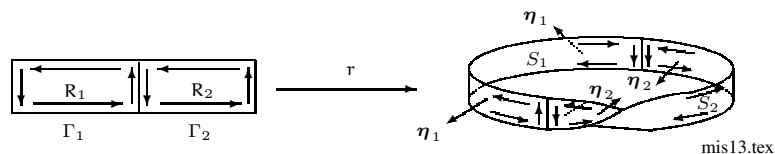
donde las integrales de línea se toman en las direcciones deducidas de las direcciones de Γ_1 y Γ_2 .

Las dos circunferencias C'_1 y C'_2 forman la frontera completa de $S_1 \cup S_2$ y claramente la integral de superficie de $\text{rot } f \cdot \boldsymbol{\eta}$ sobre $S_1 \cup S_2$ se expresa como la integral de línea sobre la frontera de $S_1 \cup S_2$.

La ecuación anterior es la extensión del teorema de Stokes a un cilindro.

Cinta de Möbius

La cinta de Möbius⁵ puede verse como la unión de dos superficies paramétricas regulares simples S_1 y S_2 , imágenes de dos rectángulos adyacentes R_1 y R_2 .



Se define w_1 , w_2 , C_1 y C_2 de la misma forma que se hizo para el cilindro. El borde de $S_1 \cup S_2$ en este caso es una curva cerrada simple C' y no dos, que es el borde completo de la cinta de Möbius.

Si aplicamos el teorema de Stokes a cada parte S_1 y S_2 obtenemos la ecuación (1), sin embargo esto presenta dos dificultades.

Primeramente, las dos normales $\boldsymbol{\eta}_1$ y $\boldsymbol{\eta}_2$ no coinciden en dirección en la intersección $C_1 \cap C_2$, por lo que no se puede definir una normal $\boldsymbol{\eta}$ para toda la superficie tomando $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_1$ en S_1 y $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_2$ en S_2 como se hizo con el cilindro. Esto no es un grave inconveniente ya que podemos definir $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_1$ en

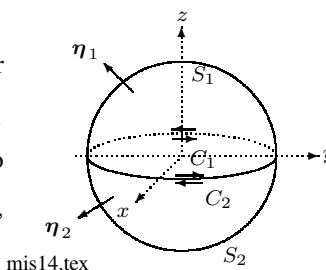
⁵**August Ferdinand Möbius (1790-1868)** Nace en Schulpforra, Alemania. Hizo estudios de matemática y astronomía en la Universidad de Leipzig, Göttingen y Halle. En 1815, a los 26 años fue designado profesor de Astronomía en Leipzig y dirige la construcción de un observatorio que va a dirigir. Ahí permanece hasta su muerte. Trabajó en mecánica celeste, pero sus investigaciones más importantes fueron sobre temas de Geometría y Teoría de números.

S_1 y en $C_1 \cap C_2$ y definir $\eta = \eta_2$ en el resto. Esta situación nos determina una normal discontinua, pero las discontinuidades así introducidas constituyen un conjunto de medida cero en el plano uv y no afectan la existencia o el valor de la integral de superficie $\iint_{S_1 \cup S_2} \text{rot } f \cdot \eta \, dS$.

Una dificultad más seria encontramos al intentar mantener las integrales de línea. En este ejemplo no es posible elegir las aplicaciones r_1 y r_2 de manera que w_1 y w_2 determinen direcciones opuestas en cada uno de las curvas de la intersección $C_1 \cap C_2$, lo que se indica con flechas en la figura. Una de las curvas es recorrido dos veces en la misma dirección y las integrales de línea no se eliminan como ocurrió en el cilindro, por lo que la suma de las integrales de línea de (1) no son necesariamente iguales a la integral de línea sobre la frontera completa de $S_1 \cup S_2$ y el teorema de Stokes no puede extenderse a la cinta de Möbius.

Observación El cilindro y la cinta de Möbius son ejemplos de superficies orientable y no orientable respectivamente. Para una superficie orientable $S_1 \cup S_2$ tomada por dos superficies regulares simples como las descritas anteriormente, las aplicaciones r_1 y r_2 siempre pueden elegirse de modo que w_1 y w_2 determinen direcciones opuestas sobre cada curva de la intersección $C_1 \cap C_2$. Para una superficie no orientable, no es posible una definición de normal. Las superficies no orientables tienen una sola cara.

Otra superficie orientable es la superficie de la esfera, que se puede ver como la unión de dos superficies paramétricas simples (hemisferios) S_1 y S_2 que pueden considerarse como imágenes de un círculo del plano xy a través de aplicaciones r_1 y r_2 respectivamente. Se les da a r , w_1 , w_2 , C_1 , C_2 el mismo significado que en los ejemplos anteriores.



Las curvas C_1 y C_2 están identificadas por la aplicación r (coinciden a lo largo del ecuador) y la superficie $S_1 \cup S_2$ se llama cerrada. Así, η_1 y η_2 pueden elegirse de modo que las direcciones determinadas por w_1 y w_2 sean opuestas en C_1 y C_2 , como se indica con las flechas en la figura. Esto sucede porque $S_1 \cup S_2$ es orientable.

Si aplicamos el teorema de Stokes a cada hemisferio y sumamos los resultados, obtenemos la ecuación (1). Las normales η_1 y η_2 coinciden en la intersección $C_1 \cap C_2$ y podemos unir las integrales sobre S_1 y S_2 en una sobre la superficie de la esfera.

Las dos integrales de línea del segundo miembro de (1) se cancelan y tenemos:

$$\oiint_{S_1 \cup S_2} \text{rot } f \cdot \eta \, dS = 0.$$

Este resultado es válido para toda superficie orientable cerrada. En el caso que la superficie S es cerrada se escribe $\oiint_S f dS$.

Definición 3.5.2 Sea f un campo vectorial sobre un abierto $R \subset \mathbb{R}^3$, definimos la divergencia de f y la denotamos $\operatorname{div} f$ por la expresión:

$$\operatorname{div} f = \nabla \cdot f = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot f = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}.$$

Si $\nabla \cdot f = 0$ se dice que un campo vectorial solenoidal. También se dice que el campo vectorial es incompresible.

En particular el campo vectorial $f = -G \frac{Mm\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3}$ es solenoidal.

Teorema 3.5.2 Sea f una función escalar de clase C^2 , entonces $\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$, es decir que el rotacional de un gradiente es nulo.

Prueba $\nabla \times \nabla f = (f_{zy} - f_{yz}, f_{xz} - f_{zx}, f_{yx} - f_{xy}) = \mathbf{0}$.

3.5.3 Teorema de la divergencia (Gauss – Ostrogradski)

El teorema de Stokes expresa una relación entre la integral sobre una superficie y la integral de línea tomada sobre la curva o curvas que forman la frontera de la superficie. El teorema de la divergencia, o de Gauss⁶–Ostrogradski⁷, análogo al teorema de Stokes, da la relación entre una integral extendida a un

⁶**Carl Friedrich Gauss (1777-1855)** Nace de 30 de abril 1777 en Brunswick, (hoy Alemania). Muere el 23 de febrero 1855 en Göttingen, Hanover (hoy Alemania). Hijo de un humilde albañil, fue un niño prodigio en matemáticas y continuó siéndolo toda su vida. Su inteligencia llamó la atención del duque de Brunswick, quien decidió costearle todos sus estudios, entrando en 1795 en la Universidad de Göttingen. El día 30 de marzo de 1796 hizo un brillante descubrimiento. Desde hacía más de 2000 años, se sabía como construir con regla y compás el triángulo equilátero, el cuadrado y el pentágono regular (así como algunos otros polígonos regulares cuyos números de lados son múltiplos de dos, de tres o de cinco), pero ningún otro polígono regular con un número primo de lados. Demostró que sólo ciertos polígonos equiláteros se podían construir con ayuda de regla y compás. Hizo una labor importante en la Teoría de Números, sintetizada en su obra “Disquisitiones arithmeticae”. También construyó una geometría no euclídea, basada en axiomas distintos a los de Euclides, pero se negó a publicarla. Lobachevski y Bolyai ostentan el honor de su descubrimiento al publicarla algo más tarde. En 1799 Gauss demostró el teorema fundamental del álgebra. El 1801 demostró el teorema fundamental de la aritmética: todo número natural se puede representar como el producto de números primos de una y solamente una forma. Fuera del dominio de las matemáticas puras, Gauss ganó gran fama por su labor sobre el planetoide Ceres, del que calculó su órbita, siendo nombrado director del observatorio de Göttingen en 1807.

⁷**Mikhail Vasilevich Ostrogradski (1801-1862)** Nace el 24 de setiembre de 1801 en Pashennaya (hoy Poltava), Ucrania. Muere el 1 de enero de 1862 en Poltava (hoy Ucrania). Ostrogradski entró a la Universidad de Kharkov en 1816 y estudia física y matemática. El dejó Rusia para estudiar en París. Entre 1822 y 1827 asistió a las conferencias de Laplace, Fourier, Legendre, Poisson, Binet y Cauchy. Hizo un rápido progreso en París y pronto comenzó a publicar en la Academia de París. Sus trabajos en este tiempo muestran la influencia de los matemáticos en París y escribió en física y cálculo integral. Sus trabajos se incorporaron luego en un trabajo mayor en hidrodinámica que publicó en París en 1832. Otros resultados que obtuvo en este tiempo sobre la teoría de residuos, aparecen en los trabajos de Cauchy. Ostrogradski fue a San Petersburgo en 1828. El presentó tres importantes trabajos en teoría del calor, integrales dobles y teoría de potencial, a la Academia de Ciencias. Fundándose en estos trabajos, fue elegido como académico en la sección de matemática aplicada.

sólido y una integral de superficie tomada sobre la frontera de ese sólido.

Teorema 3.5.3 Sea V un sólido en \mathbb{R}^3 limitado por una superficie orientable S y sea η la normal unitaria exterior a S , si f es un campo vectorial de clase C^1 sobre V , entonces:

$$\iiint_V \operatorname{div} f \, dx \, dy \, dz = \oiint_S f \cdot \eta \, dS.$$

Demostración Si expresamos f y η en términos de sus componentes $f = (P, Q, R)$, $\eta = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, tenemos:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz = \oiint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS.$$

Basta establecer las tres ecuaciones:

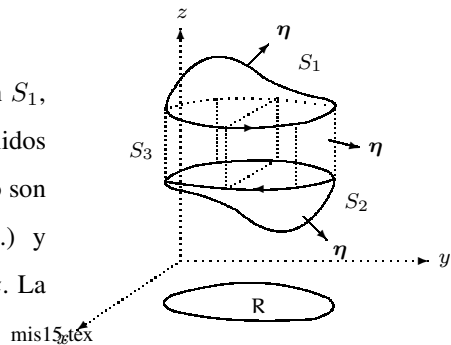
$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} \, dx \, dy \, dz &= \oiint_S P \cos \alpha \, dS, \\ \iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y} \, dx \, dy \, dz &= \oiint_S Q \cos \beta \, dS, \\ \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} \, dx \, dy \, dz &= \oiint_S R \cos \gamma \, dS. \end{aligned}$$

Demostremos que la tercera ecuación es válida para sólidos especiales del tipo

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / g(x, y) \leq z \leq f(x, y), (x, y) \in R\},$$

donde f y g son continuas en R y donde R es la proyección de V sobre el plano xy . Así toda recta paralela al eje z que atraviese R , corta el sólido V a lo largo de un segmento rectilíneo que une la superficie $z = g(x, y)$ a la superficie $z = f(x, y)$ y en algunos casos por una porción de cilindro S_3 generado por una recta que se mueve a lo largo de la frontera de R manteniéndose paralela al eje z .

La normal exterior a S tiene componente z no negativa en S_1 , no positiva en S_2 y es paralela al plano xy en S_3 . Los sólidos de este tipo se llaman xy proyectables. Sólidos de este tipo son todos los sólidos convexos (esferas, elipsoides, conos, etc.) y otros que no son convexos como el toro con eje paralelo a z . La idea de la demostración es sencilla.



Primeramente se expresa la integral triple como la integral doble extendida a la proyección R y luego

probamos que esta integral doble tiene el mismo valor que la integral de superficie considerada. Es claro que por la forma de V :

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz &= \iint_{\mathbf{R}} \left[\int_{g(x,y)}^{f(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \right] dx dy \\ &= \iint_{\mathbf{R}} [R(x, y, f(x, y)) - R(x, y, g(x, y))] dx dy. \end{aligned}$$

Para la integral de superficie tenemos:

$$\oiint_S R \cos \gamma dS = \iint_{S_1} R \cos \gamma dS + \iint_{S_2} R \cos \gamma dS + \iint_{S_3} R \cos \gamma dS.$$

Sobre S_3 la normal $\boldsymbol{\eta}$ es paralela al plano xy , de modo que $\cos \gamma = 0$ y la integral sobre S_3 es 0. Sobre S_1 usamos la representación paramétrica $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$ y sobre S_2 , $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, g(x, y))$.

En S_1 , la normal $\boldsymbol{\eta}$ tiene la misma dirección que $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = (-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1)$, por lo que:

$$\iint_{S_1} R \cos \gamma dS = \iint_{S_1} R dx \wedge dy = \iint_{\mathbf{R}} R(x, y, f(x, y)) dx dy.$$

En S_2 , la normal $\boldsymbol{\eta}$ tiene dirección opuesta a $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = (-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1)$, por lo que:

$$\iint_{S_2} R \cos \gamma dS = - \iint_{S_2} R dx \wedge dy = - \iint_{\mathbf{R}} R(x, y, g(x, y)) dx dy,$$

lo que permite verificar que:

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \oiint_S R \cos \gamma dS.$$

Se ha asumido que el sólido V es xy -proyectable para demostrar la igualdad anterior. Es claro que si V es xz -proyectable se puede demostrar que:

$$\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \oiint_S Q \cos \beta dS,$$

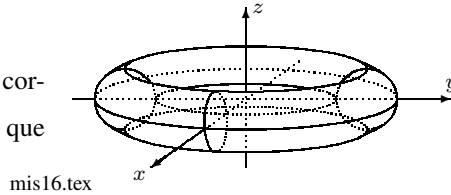
y si V es yz -proyectable:

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial z} dx dy dz = \oiint_S P \cos \alpha dS.$$

Así se tiene que el teorema de la divergencia es válido para todos los sólidos proyectables sobre los tres planos coordenados. En particular es válido para todo sólido convexo.

Un toro con el eje paralelo al eje z es xy -proyectable, pero no xz -proyectable ni yz -proyectable.

Para poder usar el teorema de la convergencia a este sólido cortamos el toro en cuatro partes iguales por medio de planos que pasan por su eje y son paralelos a los planos xz, yz .

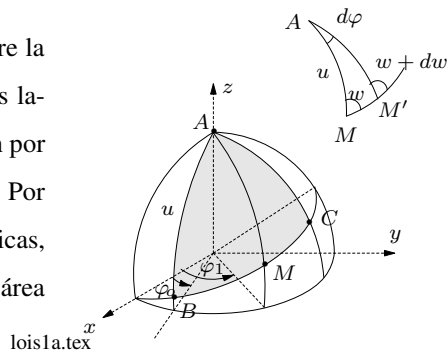


mis16.tex

La integral triple sobre el toro completo es la suma de las integrales triples sobre cada una de las cuatro partes, se tiene que las aportaciones de las caras comunes a las partes adyacentes se eliminan unas con otras, puesto que las normales exteriores tienen direcciones opuestas sobre tales caras. Por lo tanto, la suma de las integrales de superficie sobre las cuatro partes es igual a la integral sobre todo el toro completo. Este ejemplo nos muestra como podemos extender el teorema de la divergencia a ciertos sólidos no convexos.

Ejemplo 3.5.3 Triángulo esférico

Nos interesamos en determinar el área de un triángulo sobre la superficie de la esfera (triángulo esférico) ABC , donde los lados son las partes de las circunferencias máximas que pasan por los $(A, B), (B, C), (A, C)$, con centro $(0, 0, 0)$ y radio R . Por razones de conveniencia escogeremos las coordenadas esféricas, en que el ángulo ψ se mide desde el eje z . En este caso el área del triángulo es:



lois1a.tex

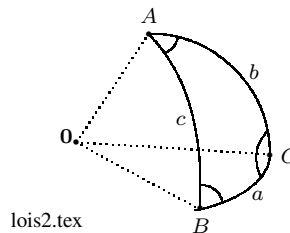
$$\text{Área} = R^2 \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \int_0^u \text{sen } \psi d\psi d\varphi,$$

donde u que está en función de φ , es la latitud del punto M , donde el lado BC corta el círculo máximo que pasa por OA y tiene φ como longitud. Así:

$$\text{Área} = R^2 \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} (1 - \cos u) d\varphi = R^2 A - R^2 \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \cos u d\varphi.$$

Se sabe que si a, b, c son los arcos (lados) del triángulo esférico, tenemos:

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \text{sen } b \text{sen } c \cos A \\ \cos A &= -\cos B \cos C + \text{sen } B \text{sen } C \cos a. \end{aligned}$$



lois2.tex

Aplicando la última fórmula a los ángulos $\pi - w - dw, d\varphi, w, u$ se tiene:

$$\begin{aligned} \cos(\pi - w - dw) &= -\cos(d\varphi) \cos w + \text{sen } (d\varphi) \text{sen } w \cos u \\ \cos(\pi - w) \cos(-dw) - \text{sen } (\pi - w) \text{sen } (-dw) &= -\cos w \cos(d\varphi) + \text{sen } (d\varphi) \text{sen } w \cos u, \end{aligned}$$

o sea:

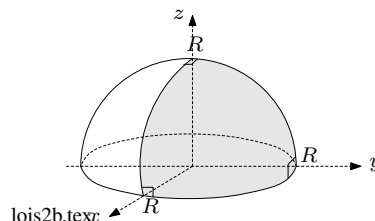
$$-\cos w + \operatorname{sen} w dw + o(dw) = -\cos w + \operatorname{sen} w \cos u d\varphi + o(d\varphi)$$

$$\frac{dw}{d\varphi} + \frac{dw}{d\varphi} o(1) = \cos u + o(1),$$

es decir $\frac{dw}{d\varphi} = \cos u$. Así se tiene que $\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \cos u d\varphi = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} dw = w(\varphi_1) - w(\varphi_0) = \pi - c - B$,

por lo que $\text{Área} = R^2(A + B + C - \pi)$.

Observe que si tenemos un triángulo esférico tri-rectángulo el área es $\frac{\pi}{2}R^2$, que es un octavo del área de la superficie de la esfera.



Ejemplo 3.5.4 Helicoides Un helicoides es la superficie generada por una curva que realiza un desplazamiento helicoidal alrededor de un eje. Si tomamos como eje el eje z , cuando la curva ha realizado una rotación θ , los puntos se han trasladado $d\theta$ paralelo al eje z . Sea $z = f(r)$ la ecuación de la sección de la superficie por un plano pasando por z . Las ecuaciones paramétricas del helicoides son:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta, \quad z = f(r) + a\theta.$$

El helicoides es una superficie de revolución si $a = 0$. En este caso se tiene que la superficie $g(r, \theta) = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta, f(r) + a\theta)$ es tal que:

$$\frac{\partial g}{\partial r} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos \theta & \operatorname{sen} \theta & f'(r) \\ -r \operatorname{sen} \theta & r \cos \theta & a \end{vmatrix} = (a \operatorname{sen} \theta - r \cos \theta f'(r), -a \cos \theta - r \operatorname{sen} \theta f'(r), r),$$

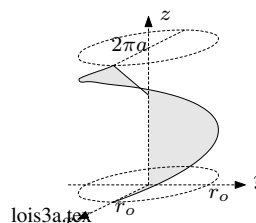
o sea $\left\| \frac{\partial g}{\partial r} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} \right\| = \sqrt{a^2 + r^2(1 + (f'(r))^2)}$ y el área es $|S| = \iint_{\mathbf{R}} \sqrt{a^2 + r^2(1 + f'^2(r))} dr d\theta$.

Ejemplo 3.5.5 Superficie de tornillo de filete de sección rectangular (escalera de caracol)

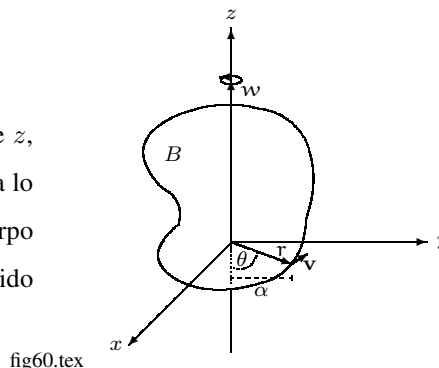
Esta superficie es un helicoides engendrado por una recta que corta al eje z un ángulo recto. Aquí se tiene que $f(r) = 0$.

El área de una espiral de superficie del tornillo es:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \sqrt{a^2 + r^2} dr d\theta = 2\pi \int_0^{r_0} \sqrt{r^2 + a^2} dr = \pi^2 a \left[\operatorname{arcsenh} \frac{r_0}{a} + \frac{r_0}{a} \sqrt{1 + \frac{r_0^2}{a^2}} \right].$$



Ejemplo 3.5.6 Si un cuerpo rígido B gira alrededor del eje z , el movimiento rotacional se puede escribir por un vector w a lo largo del eje z , donde $\omega = \|w\|$ es la rapidez circular del cuerpo B , es decir la rapidez tangencial de un punto cualquiera dividido por la distancia al eje z de rotación.



La velocidad v y la velocidad angular de un cuerpo que rota, está relacionada por $v = w \times r$. En efecto, tenemos que $\alpha = \|r\| \sin \theta$, $\|v\| = \omega \alpha = \|w\| \|r\| \sin \theta = \|w \times r\|$.

La velocidad v se dirige en sentido contrario a las manecillas del reloj, a lo largo de la tangente a un círculo paralelo al eje x y de radio α , por lo que $v = w \times r$.

Debido a la relación de los ejes, podemos escribir $w = \omega(0, 0, 1)$, $r = (x, y, z)$ de modo que $v = w \times r = (-\omega y, \omega x, 0)$ y $\text{rot } v = 2\omega(0, 0, 1) = 2w$, o sea para la rotación de un cuerpo rígido, el rotacional del campo vectorial de velocidad es un campo dirigido paralelo al eje de rotación con magnitud igual al doble de la rapidez angular.

Si f un campo vectorial representa el flujo de un fluido entonces $\nabla \times f = \mathbf{0}$. Físicamente significa que (ver ejemplo ??) el fluido no tiene rotaciones o es irrotacional: no tiene remolinos. Sin embargo podemos decir informalmente que $\nabla \times f = \mathbf{0}$ significa que si colocamos en el fluido una pequeña rueda con aspas se moverá en el fluido pero no girará alrededor de su eje. Por ejemplo, mediante experimentos el fluido drenado de una tina es, generalmente irrotacional excepto justo en el centro, aunque el fluido rota alrededor de la tina. Así debe tenerse cuidado con la confusión que puede emerger al usar la palabra irrotacional.

Definición 3.5.3 Sea $f: \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una función escalar, el laplaciano u operador de Laplace⁸ ∇^2

⁸**Pierre-Simon Laplace (1759-1827)** Nace el 28 de marzo de 1749 en Beaumont-en-Auge, Francia. Muere el 5 de marzo de 1827 en París, Francia. A la edad de dieciocho años, Laplace se distinguía como maestro y matemático en la escuela militar de la pequeña población de Beaumont. Partió para París a solicitar la ayuda del distinguido matemático francés D'Alembert. Con la ayuda de D'Alembert, obtuvo más tarde el nombramiento de profesor de matemáticas en la escuela Militar de París y quedó asegurado su ingreso en el mundo de la ciencia. El primer trabajo científico de Laplace fue su aplicación de las matemáticas a la mecánica celeste. A Newton y otros astrónomos les fue imposible explicar las desviaciones de los planetas de sus órbitas, predichas matemáticamente. Así por ejemplo, se determinó que Júpiter y Saturno se adelantaban a veces, y otras se retrasaban con respecto a las posiciones que debían ocupar en sus órbitas. Los siguientes años fueron de fructuosas investigaciones para Laplace, quién fue aclarando los conocimientos científicos sobre las fuerzas elementales de la Naturaleza y el Universo. Escribió artículos acerca de la fuerza de gravedad, el movimiento de los proyectiles y el flujo y reflujo de las mareas, la presión de los equinoccios, la forma y rotación de los anillos de Saturno, el equilibrio de una masa líquida en rotación, ideó una teoría de la

está definido por $\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

Si f es una función vectorial, $\nabla^2 f = (\nabla^2 f_1, \nabla^2 f_2, \nabla^2 f_3)$.

3.5.4 Propiedades de la divergencia y el rotacional

En lo que sigue φ, ψ representan funciones escalares y f, g, h funciones vectoriales:

Recordemos que $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ y que $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$.

- 1) $\nabla(\varphi + \psi) = \nabla\varphi + \nabla\psi$
- 2) $\nabla(c\varphi) = c\nabla\varphi, c \in \mathbb{R}$
- 3) $\nabla(\varphi\psi) = \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi$
- 4) $\nabla(\varphi/\psi) = (\psi\nabla\varphi - \varphi\nabla\psi)/\psi^2$ en los puntos donde $\psi(x) \neq 0$
- 5) $\operatorname{div}(f + g) = \operatorname{div}(f) + \operatorname{div}(g)$
- 6) $\operatorname{rot}(f + g) = \operatorname{rot}(f) + \operatorname{rot}(g)$
- 7) $\nabla(f \cdot g) = (f \cdot \nabla)g + (g \cdot \nabla)f + f \times \operatorname{rot} g + g \times \operatorname{rot} f$
- 8) $\operatorname{div}(\varphi f) = \varphi \operatorname{div} f + f \cdot \nabla\varphi$, o bien $\nabla \cdot (\varphi f) = \varphi \nabla \cdot f + f \cdot \nabla\varphi$.
- 9) $\operatorname{div}(f \times g) = g \cdot \operatorname{rot} f - f \cdot \operatorname{rot} g$
- 10) $\operatorname{div} \operatorname{rot} f = 0$
- 11) $\operatorname{rot}(f \times g) = f \operatorname{div} g - g \operatorname{div} f + (g \cdot \nabla)f - (f \cdot \nabla)g$
- 12) $\operatorname{rot}(\varphi g) = \varphi \operatorname{rot} g + \nabla\varphi \times g$, o bien $\nabla \times (\varphi g) = \varphi \nabla \times g + \nabla\varphi \times g$
- 13) $\operatorname{rot} \operatorname{rot} f = \nabla \operatorname{div} f - \nabla^2 f$
- 14) $\operatorname{rot} \nabla f = 0$
- 15) $\nabla(f \cdot f) = 2(f \cdot \nabla)f + 2f \times \operatorname{rot} f$
- 16) $\nabla^2(\varphi\psi) = \varphi \nabla^2\psi + \psi \nabla^2\varphi + 2\nabla\varphi \cdot \nabla\psi$

tensión superficial, con Lavoisier, estudió el calor específico y la combustión de diversas sustancias y puso los cimientos para la moderna ciencia de la termodinámica, inventó un instrumento para medir el calor específico de una sustancia, al estudiar la atracción gravitacional de un esferoide sobre un objeto externo, ideó lo que se conoce hoy como ecuación de Laplace, que se usa para calcular el potencial de una magnitud física en un momento dado mientras está en movimiento continuo. Esta ecuación no sólo tiene aplicación en la gravitación, sino también en la electricidad, la hidrodinámica y otros aspectos de la física.

Entre 1799 y 1825, Laplace reunió sus escritos en una obra de cinco volúmenes, titulada "Mecánica Celeste", en la que se proponía dar una historia de la astronomía, sistematizando la obra de generaciones de astrónomos y matemáticos y ofreciendo una solución completa a los problemas mecánicos del sistema solar. Más tarde publicó un volumen titulado "El sistema del mundo". En 1812 publicó su "Teoría analítica de las probabilidades", que es un estudio sobre las leyes de probabilidad. En vida aún, fue elegido para ser uno de los Cuarenta Inmortales de la Academia Francesa.

17) $\operatorname{div}(\nabla\varphi \times \nabla\psi) = 0$

18) $\nabla \cdot (\varphi \nabla\psi - \psi \nabla\varphi) = \varphi \nabla^2\psi - \psi \nabla^2\varphi$

19) $\nabla^2\varphi = (\nabla \cdot \nabla)\varphi$.

Ejemplos

a) Sea \mathbf{r} el campo vectorial $\mathbf{r}(x, y, z) = (x, y, z)$ vector de posición y sea $r = \|\mathbf{r}\|$. Calcular ∇r y $\nabla \cdot (r\mathbf{r})$.

$$\nabla r = \left(\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z} \right) = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right) = \frac{\mathbf{r}}{r}$$

$$\nabla \cdot (r\mathbf{r}) = r \nabla \cdot \mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot \nabla r = 3r + \frac{r^2}{r} = 4r.$$

b) $\nabla f \times \nabla g$ es siempre comprensible.

Solución Por 17) se tiene el resultado.

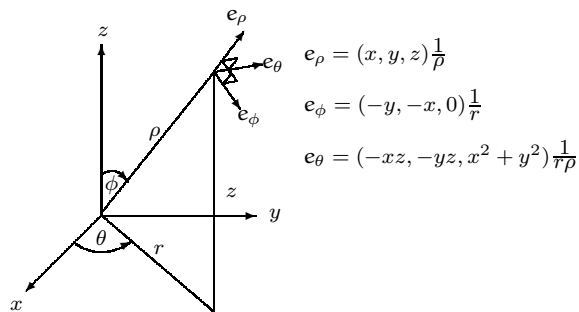
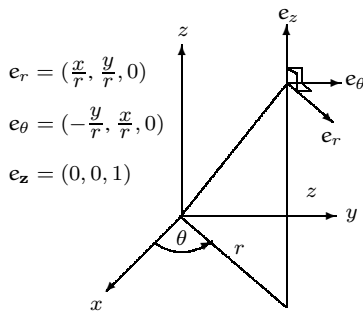
Es importante estudiar las expresiones del gradiente, divergencia y rotacional en coordenadas cilíndricas y esféricas.

Teorema 3.5.4 Las siguientes fórmulas se cumplen en coordenadas cilíndricas:

i) $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z$.

ii) $\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rf_r)}{\partial r} + \frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial(rf_z)}{\partial z} \right)$.

iii) $\nabla \times \mathbf{f} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rf_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial f_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_z - \left(\frac{\partial f_z}{\partial r} - \frac{\partial f_r}{\partial z} \right) \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial f_z}{\partial \theta} - \frac{\partial(rf_\theta)}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r$, donde $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ y \mathbf{e}_z son los vectores ortonormales unitarios canónicos y $\mathbf{f} = f_r \mathbf{e}_r + f_\theta \mathbf{e}_\theta + f_z \mathbf{e}_z$ con $f_r = \mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_r, f_\theta = \mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_\theta, f_z = \mathbf{f} \cdot \mathbf{e}_z$.



Teorema 3.5.5 En coordenadas esféricas:

i) $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi + \frac{1}{\rho \operatorname{sen} \phi} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta$.

ii) $\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 f_\rho) + \frac{1}{\rho \operatorname{sen} \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\operatorname{sen} \phi f_\phi) + \frac{1}{\rho \operatorname{sen} \phi} \frac{\partial f_\theta}{\partial \theta}$.

$$\text{iii) } \nabla \times \mathbf{f} = \left(\frac{1}{\rho \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\sin \phi f_\theta) - \frac{1}{\rho \sin \phi} \frac{\partial f_\phi}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_\rho + \left(\frac{1}{\rho \sin \phi} \frac{\partial f_\rho}{\partial \theta} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho f_\theta) \right) \mathbf{e}_\phi + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho f_\phi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial f_\rho}{\partial \phi} \right) \mathbf{e}_\theta,$$

donde \mathbf{e}_ρ , \mathbf{e}_ϕ y \mathbf{e}_θ son vectores ortonormales unitarios canónicos y $\mathbf{f} = f_\rho \mathbf{e}_\rho + f_\theta \mathbf{e}_\theta + f_\phi \mathbf{e}_\phi$.

La fórmula del rotacional se puede recordar fácilmente escribiéndola como:

$$\text{rot } \mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) = \nabla \times \mathbf{f},$$

donde el símbolo ∇ (operador), se escribe como un vector $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$.

Observemos que se puede usar $\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$, que lo hemos llamado divergencia de \mathbf{f} y lo denotamos por $\text{div } \mathbf{f}$.

Con anterioridad se ha usado el símbolo $\nabla \varphi$ para designar el gradiente de un campo escalar φ , o sea $\nabla \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$.

Finalmente el gradiente, la divergencia y el rotacional pueden expresarse simbólicamente por los tres productos $\nabla \varphi$, $\nabla \cdot \mathbf{f}$, $\nabla \times \mathbf{f}$.

Teorema 3.5.6 Sea $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ un campo vectorial de clase C^1 en un conjunto convexo abierto $S \subset \mathbb{R}^3$, entonces \mathbf{f} es un gradiente en S si y sólo si $\text{rot } \mathbf{f} = \mathbf{0}$ en S .

- Si $\mathbf{f}(x, y, z) = (f(x), g(y), h(z))$, $\text{div } \mathbf{f} = f'(x) + g'(y) + h'(z)$ y $\text{rot } \mathbf{f} = \mathbf{0}$.
- Si $\mathbf{f} = \nabla \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$, entonces $\text{div } \mathbf{f} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$.

La expresión $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$ se conoce como Laplaciano de φ y a menudo se representa por $\nabla^2 \varphi$. Así, la divergencia de un gradiente $\nabla \varphi$ es el Laplaciano de φ , es decir $\text{div}(\nabla \varphi) = \nabla \cdot \nabla \varphi = \nabla^2 \varphi$.

Cuando $\nabla^2 \varphi = 0$, la función φ se dice armónica, es decir el gradiente de una función armónica tiene divergencia nula.

Cuando φ es de clase C^2 se tiene que $\text{rot } \mathbf{f} = \mathbf{0}$, o sea $\text{rot}(\nabla \varphi) = \mathbf{0}, \forall \varphi \in C^2$.

Esto demuestra que $\text{rot } \mathbf{f} = \mathbf{0}$ es una condición necesaria para que un campo vectorial \mathbf{f} de clase C^1 sea un gradiente, es decir que si $\text{rot } \mathbf{f} \neq \mathbf{0}$ en un conjunto abierto S , entonces \mathbf{f} no es un gradiente en S . Además sabemos que si $\text{rot } \mathbf{f} = \mathbf{0}$ en un conjunto S abierto y convexo, entonces \mathbf{f} es un gradiente en S .

Definición 3.5.4 Un campo vectorial con rotacional nulo, se llama irrotacional.

Ejemplo 3.5.7 Campo vectorial con divergencia y rotacional nulos

Sea $S = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ y sea $f(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$, $(x, y) \in S$. Sabemos que f no es un gradiente de S (aunque f es un gradiente en todo rectángulo que no contenga el origen). La matriz Jacobiana es $\begin{pmatrix} 2xy & y^2 - x^2 \\ y^2 - x^2 & -2xy \end{pmatrix} \frac{1}{(x^2 + y^2)^2}$ y vemos que $\operatorname{div} f = 0$ y $\operatorname{rot} f = \mathbf{0}$ en S .

Ejemplo 3.5.8 Divergencia y rotacional de un rotacional

Sea $f = (f_1, f_2, f_3)$ un campo vectorial, el rotacional de f es un campo vectorial y podemos calcular su divergencia y su rotacional.

Si f es de clase C^2 tenemos que $\operatorname{div}(\operatorname{rot} f) = 0$ y que $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} f) = \nabla(\operatorname{div} f) - \nabla^2 f$, donde $\nabla^2 f$ se define por $\nabla^2 f = (\nabla^2 P, \nabla^2 Q, \nabla^2 R)$.

3.6 Resumen

- El campo escalar $f(x, y, z)$ es una función del punto (x, y, z) del espacio.
- Las superficies $f(x, y, z) = c$, c es una constante se llaman superficies de nivel del campo escalar.
- El campo vectorial $f = (f_1, f_2, f_3)$ es una función vectorial del punto (x, y, z) del espacio y denotamos $r = (x, y, z)$, el radio vector del punto.

Si se usa la base canónica, cada aplicación f_1, f_2, f_3 es la proyección del campo vectorial f sobre los ejes coordenados.

- El gradiente está dirigido por el vector normal $\boldsymbol{\eta}$ a la superficie de nivel en el punto (x, y, z) , en el sentido de crecimiento de la función $\varphi(x, y, z)$ y tiene una longitud igual a:

$$\nabla\varphi \cdot \boldsymbol{\eta} = \frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{\eta}} = \|\nabla\varphi\| = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}.$$

- Si la dirección se da por el vector unitario $\boldsymbol{\ell} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, entonces:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{\ell}} = \nabla\varphi \cdot \boldsymbol{\ell} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \cos \gamma.$$

(derivada de la función φ en la dirección $\boldsymbol{\ell}$).

- Si $f = (f_1, f_2, f_3)$ es un campo vectorial de clase C^1 , se llama divergencia de f al escalar $\operatorname{div} f = \nabla \cdot f = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$.
- Se llama flujo del campo vectorial $f = (f_1, f_2, f_3)$ a través de la superficie S , en el sentido determinado por el vector unitario de la normal $\boldsymbol{\eta}$ a dicha superficie S , la integral:

$$\iint_S f \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS = \iint_S (f_1 \cos \alpha + f_2 \cos \beta + f_3 \cos \gamma) \, dS.$$

- Si S es una superficie cerrada que limita un volumen V y $\boldsymbol{\eta}$ es el vector unitario normal $\boldsymbol{\eta} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ a la superficie S , es válida la fórmula de Gauss-Ostrogradski:

$$\oiint_S \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{f} \, dx \, dy \, dz.$$

- Si la curva cerrada Γ limita una superficie bilateral S , se verifica la fórmula de Stokes, cuya forma vectorial es:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS,$$

donde $\boldsymbol{\eta}$ es el vector de la normal a la superficie S .

- Un campo vectorial $\mathbf{f}(x, y, z)$ se llama solenoidal (incompresible) si en cada punto $\operatorname{div} \mathbf{f} = 0$. En este caso el flujo del vector a través de cualquier superficie cerrada es nulo.
- Si el campo es a la vez potencial y solenoidal, se tiene $\operatorname{div}(\nabla\varphi) = 0$ y la función potencial φ es armónica, es decir satisface la ecuación de Laplace $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$, o sea $\nabla^2 \varphi = 0$, donde $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ es el operador de Laplace.

3.7 Ejercicios

3.7.1 Teoría de campos

- a) Determinar las superficies de nivel del campo escalar $U = f(r)$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. ¿Cuáles son las superficies de nivel del campo $U = g(\rho)$, donde $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$?
 - b) Determinar las superficies de nivel del campo escalar $U = \arcsen \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.
- a) Demostrar que las líneas vectoriales del campo vectorial $\mathbf{f}(x, y, z) = \mathbf{c}$, donde \mathbf{c} es un vector constante, son rectas paralelas al vector \mathbf{c} .
 - b) Determinar las líneas vectoriales del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = (-wy, wx, 0)$, donde w es una constante.
- Sean u, v campos escalares de clase C^1 y φ una función real derivable. Deducir las fórmulas:
 - a) $\nabla(\alpha u + \beta v) = \alpha \nabla u + \beta \nabla v$, donde α, β son constantes.
 - b) $\nabla(uv) = u \nabla v + v \nabla u$.
 - c) $\nabla(u^2) = 2u \nabla u$.
 - d) $\nabla \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \nabla u - u \nabla v}{v^2}$.
 - e) $\nabla(\varphi(u)) = \varphi'(u) \nabla u$.
- a) Hallar la magnitud y la dirección del gradiente del campo $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ en el punto $(2, 1, 1)$. Determinar en qué puntos el gradiente del campo es perpendicular al eje z y en cuáles es igual

a cero.

b) Calcular el ∇u , si u es respectivamente igual a:

i) r ii) r^2 iii) $\frac{1}{r}$ iv) $f(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

c) Determinar el gradiente del campo escalar $u = \mathbf{c} \cdot \mathbf{r}$, donde \mathbf{c} es un vector constante y $\mathbf{r} = (x, y, z)$.
¿Cuáles son las superficies de nivel de este campo y cómo están situadas respecto al vector \mathbf{c} ?

5. a) Determinar la derivada de la función $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ en un punto (x, y, z) , en la dirección del vector \mathbf{r} en ese punto. ¿En qué caso esta derivada es igual a la magnitud del gradiente?

b) Determinar la derivada de la función $u = \frac{1}{r}$ en la dirección $\ell = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ ¿En qué caso esta derivada es igual a cero?

6. Sea φ un campo escalar de clase C^1 y \mathbf{f} , \mathbf{g} dos campos vectoriales de clase C^1 , con $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$, $\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3)$. Deducir las fórmulas:

a) $\operatorname{div}(\alpha \mathbf{f} + \beta \mathbf{g}) = \alpha \operatorname{div} \mathbf{f} + \beta \operatorname{div} \mathbf{g}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

b) $\operatorname{div}(\varphi \mathbf{c}) = \nabla \varphi \cdot \mathbf{c}$, \mathbf{c} es un vector constante.

c) $\operatorname{div}(\varphi \mathbf{f}) = \nabla \varphi \cdot \mathbf{f} + \varphi \operatorname{div} \mathbf{f}$.

d) $\operatorname{rot}(\alpha \mathbf{f} + \beta \mathbf{g}) = \alpha \operatorname{rot} \mathbf{f} + \beta \operatorname{rot} \mathbf{g}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

e) $\operatorname{rot}(\varphi \mathbf{c}) = \nabla \varphi \times \mathbf{c}$, \mathbf{c} es un vector constante.

f) $\operatorname{rot}(\varphi \mathbf{f}) = \nabla \varphi \times \mathbf{f} + \varphi \operatorname{rot} \mathbf{f}$.

7. a) Calcular la $\operatorname{div} \left(\frac{1}{r} \mathbf{r} \right)$.

b) Determinar la $\operatorname{div}(\mathbf{f})$ para el campo vectorial central $\mathbf{f}(x, y, z) = f(r) \frac{1}{r} \mathbf{r}$, f derivable.

8. Para cada uno de los siguientes campos vectoriales, determinar la matriz Jacobiana y calcular el rotacional y la divergencia:

a) $\mathbf{f}(x, y, z) = (x^2 + yz, y^2 + xz, z^2 + xy)$

b) $\mathbf{f}(x, y, z) = (2z - 3y, 3x - z, y - 2x)$

c) $\mathbf{f}(x, y, z) = (z + \operatorname{sen} y, -z + x \cos y, 0)$

d) $\mathbf{f}(x, y, z) = (e^{xy}, \cos(xy), \cos(xz^2))$

e) $\mathbf{f}(x, y, z) = (x^2 \operatorname{sen} y, y^2 \operatorname{sen}(xz), xy \operatorname{sen}(\cos z))$.

9. a) Si $\mathbf{r} = (x, y, z)$ y $r = \|\mathbf{r}\|$, calcule $\operatorname{rot} [f(r)\mathbf{r}]$, donde f es una función derivable.

b) Si $\mathbf{r} = (x, y, z)$ y \mathbf{a} es un vector constante, demostrar que $\operatorname{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{a}$.

c) Si $\mathbf{r} = (x, y, z)$ y $r = \|\mathbf{r}\|$, determinar todos los valores de n para los que $\operatorname{div}(r^n \mathbf{r}) = 0$.

10. Determinar un campo vectorial cuyo rotacional es (x, y, z) , o demostrar que no existe tal campo.

11. Demostrar que $\text{rot}(\text{rot } f) = \nabla(\text{div } f) - \nabla^2 f$, si $f = (f_1, f_2, f_3)$ es de clase C^2 .
12. Demostrar la identidad $\nabla \cdot (f \times g) = g \cdot (\nabla \times f) - f \cdot (\nabla \times g)$, donde f y g son campos vectoriales diferenciables.
13. Un campo vectorial f no será gradiente de un potencial a menos que $\text{rot } f = \mathbf{0}$. Sin embargo es posible encontrar una función real μ tal que μf es un gradiente.
 Demostrar que si un tal μ existe, f es perpendicular a su rotacional.
 Cuando el campo es bidimensional $f = (P, Q)$, este ejercicio nos da una condición para que la ecuación diferencial $P dx + Q dy = 0$ tenga un factor integrante.
14. Sea $f(x, y, z) = (y^2 z^2, z^2 x^2, x^2 y^2)$, demostrar que $\text{rot } f$ no siempre es $\mathbf{0}$, pero $f \cdot \text{rot } f = 0$. Hallar un campo escalar μ tal que μf sea un gradiente.
15. Determinar un campo vectorial $g(x, y, z)$, cuyo rotacional es $(2, 1, 3)$ en \mathbb{R}^3 . ¿Cuál es el campo vectorial de clase C^1 más general con esta propiedad?
16. Verificar que el campo vectorial $f(x, y, z) = (y - z, z - x, x - y)$ es solenoidal y determinar un campo vectorial g tal que $f = \text{rot } g$.
17. Sea $f(x, y, z) = (-z, 0, xy)$, determinar un campo vectorial g de clase C^1 de la forma $g(x, y, z) = (L(x, y, z), M(x, y, z), 0)$, tal que $\text{rot } f = g$ en todo paralelepípedo rectangular en \mathbb{R}^3 . ¿Cuál es el campo g más general con esta propiedad?
18. Si dos campos vectoriales u y v son irrotacionales, demostrar que $u \times v$ es solenoidal.
19. Sea $r = (x, y, z)$, $r = \|r\|$, demostrar que $n = -3$ es el único valor de n , para el cual $r^n r$ es solenoidal, siendo $r \neq 0$. Para este n , elegir un paralelepípedo S , que no contenga el origen y expresar $r^{-3} r$ como un rotacional en S .
20. Determinar la forma más general de una función f de clase C^1 y una sola variable real, tal que el campo vectorial $f(r)r$ sea solenoidal, donde $r = (x, y, z)$, $r = \|r\|$.
21. Sea v un campo vectorial de clase C^1 en un paralelepípedo R de \mathbb{R}^3 . Consideremos las dos afirmaciones siguientes relativas a v :
- $\text{rot } v = 0$ y $v = \text{rot } u$, para algún campo vectorial u de clase C^2 en R .
 - $\exists \varphi$ campo escalar de clase C^2 tal que, $v = \nabla \varphi$ y $\nabla^2 \varphi = 0$ en R .
- Demostrar que i) \implies ii), es decir un campo vectorial que es a la vez irrotacional y solenoidal en R , es el gradiente de una función armónica en R .
 - Demostrar que ii) \implies i) o dar un contraejemplo.

22. Sea \mathbf{h} un campo vectorial de clase C^1 en un abierto S , de modo que $\mathbf{h} = \mathbf{f} + \mathbf{g}$, donde \mathbf{f} es solenoidal y \mathbf{g} irrotacional, o sea existe un campo vectorial \mathbf{u} tal que $\mathbf{f} = \text{rot } \mathbf{u}$ y un campo escalar φ tal que $\mathbf{g} = \nabla\varphi$ en S . Demostrar que \mathbf{u} y φ satisfacen en S la siguiente ecuación diferencial en derivadas parciales:

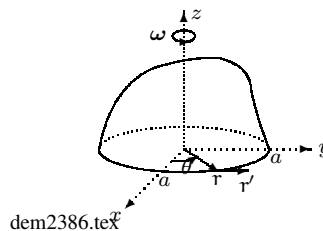
$$\nabla^2\varphi = \text{div } \mathbf{h}, \quad \text{grad}(\text{div } \mathbf{u}) - \nabla^2\mathbf{u} = \text{rot } \mathbf{h}.$$

23. Sea $\mathbf{h}(x, y, z) = (x^2y, y^2z, z^2x)$, determinar los campos vectoriales \mathbf{f} y \mathbf{g} , donde \mathbf{f} es un rotacional y \mathbf{g} es un gradiente, de modo que se verifique $\mathbf{h} = \mathbf{f} + \mathbf{g}$.
24. Calcular la divergencia y el rotacional de \mathbf{f} , si \mathbf{f} es igual a:

- a) \mathbf{r} b) $r\mathbf{c}$ c) $f(r)\mathbf{c}$, donde \mathbf{c} es un vector constante.

25. a) Hallar la divergencia y el rotacional del campo de las velocidades lineales de los puntos de un cuerpo que gira con una velocidad angular constante ω , alrededor del eje z , en dirección contraria a las agujas del reloj.

- b) Calcular el rotacional del campo de las velocidades lineales $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$ de los puntos del cuerpo, que gira con velocidad angular ω constante, alrededor del eje que pasa por el origen de coordenadas.



26. a) Calcular la divergencia y el rotacional del gradiente de un campo escalar u de clase C^2 .
- b) Demostrar que $\text{div}(\text{rot } \mathbf{f}) = 0$, si \mathbf{f} es de clase C^2 .
27. Demostrar que si \mathbf{f} es una fuerza central, es decir que está dirigida hacia un punto $\mathbf{0}$ fijo y depende solamente de la distancia r hasta este punto ($\mathbf{f} = f(r)\mathbf{r}$, donde $f(r)$ es una función continua), el campo será potencial. Determinar el potencial φ del campo.
28. Determinar el potencial φ del campo gravitacional que engendra un punto material de masa m situado en el origen de coordenadas: $\mathbf{f} = -\frac{m}{r^3}\mathbf{r}$. Demostrar que el potencial φ satisface la ecuación de Laplace $\nabla^2\varphi = 0$.
29. Comprobar si cada campo vectorial tiene potencial φ y si lo tiene determinarlo:
- a) $\mathbf{f}(x, y, z) = (5x^2y - 4xy, 3x^2 - 2, 0)$.
- b) $\mathbf{f}(x, y, z) = (yz, zx, xy)$.
- c) $\mathbf{f}(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$.
30. Demostrar que el campo central $\mathbf{f} = f(r)\mathbf{r}$ es solenoidal, solamente en el caso en que $f(r) = \frac{k}{r^3}$, donde k es una constante.

3.7.2 Área de superficie

31. Hallar el área de las siguientes superficies:
- La parte del plano $4x + 3y + 2z = 12$ que está en el primer octante.
 - La parte de la superficie $z^2 = 2xy$ que está por encima del rectángulo situado en el plano $z = 0$ y limitado por las rectas $x = 0, y = 0, x = 3, y = 6$.
 - La parte del cono $z^2 = x^2 + y^2$ situada por encima del plano $z = 0$ y recortada por el plano $z = \sqrt{2}\left(\frac{x}{2} + 1\right)$.
 - La parte de $z^2 = y^2 + x^2$ recortada por el cilindro $z^2 = 2py$.
 - La parte de $y^2 + z^2 = x^2$ situada dentro del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$.
 - La parte de $y^2 + z^2 = x^2$ recortada por el cilindro $x^2 - y^2 = a^2$ y los planos $y = \pm b$.
 - La parte de $z^2 = 4x$ recortada por el cilindro $y^2 = 4x$ y el plano $x = 1$.
 - La parte de $z = xy$ recortada por el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$.
 - La parte de $2z = x^2 + y^2$ recortada por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.
 - La parte de $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ recortada por el cilindro $x^2 + y^2 = b^2, (b \leq a)$.
 - La parte de $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ recortada por la superficie por la superficie $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.
 - La parte de $z = \frac{x+y}{x^2+y^2}$ recortada por las superficies $x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 4$ que está en el primer octante.
 - La parte de $(x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 + z^2 = a^2$ situada en el primer octante ($\alpha < \frac{\pi}{2}$).
32. Calcular el área de la superficie terrestre (considerándola esférica y siendo su radio $R \approx 6400\text{Km}$) comprendida entre los meridianos $\psi = 30^\circ, \psi = 60^\circ$ y los paralelos $\theta = 45^\circ, \theta = 60^\circ$.
33. Calcular el área determinada por las siguientes superficies:
- superficie limitada por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ y el paraboloides $x^2 + y^2 = 2az$.
 - superficie de uno de los cilindros de radio a , con ejes que se cortan en ángulo recto, la cual se encuentra dentro del otro cilindro.
34. Calcular el área de las siguientes superficies en las condiciones indicadas:
- $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, z = 0, y = 0, x = 0$.
 - $x^2 + y^2 = a^2, z \geq 0, z = mx, z = nx, m > n > 0$.
 - $x^2 - y^2 = z^2, y + z = a, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

- d) área de $x^2 + y^2 = ax$, acotada por $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.
- e) área de $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, acotada por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$.
- f) área de $y^2 + z^2 = 2ax$, comprendida entre $y^2 = ax$, $x = a$.
- g) área de $x^2 + y^2 = 2ax$, comprendida entre $z = 0$, $x^2 + y^2 = z^2$.
- h) área de $x^2 - y^2 = z^2$, dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$.
- i) área de $y^2 = 4x$, acotada por $x^2 + y^2 + z^2 = 5x$.
- j) área de $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, acotada por $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.
35. Demuestre que las áreas de las partes de las superficies de los paraboloides $x^2 + y^2 = 2az$ y $x^2 - y^2 = 2az$ cortadas por el cilindro $x^2 + y^2 = b^2$ son iguales.
36. Una esfera de radio a está cortada por dos cilindros circulares, cuyas bases tienen los diámetros iguales al radio de aquella y que son tangentes entre sí, a lo largo de uno de los diámetros de la misma. Hallar el volumen y el área de la parte de superficie de la esfera que queda.
37. En una esfera de radio a se ha cortado un orificio con salida de base cuadrada, cuyo lado es igual también a a . El eje de este orificio coincide con el diámetro de la esfera. Hallar el área de la superficie de ésta cortada por el orificio.
38. Calcular el área de la parte de superficie helicoidal $z = c \arctan \frac{x}{y}$, situada en el primer octante y que está comprendida entre los cilindros $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = b^2$.
39. Determinar el área de la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $a > 0$, contenida dentro del cono $z \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$.
40. En los siguientes ejercicios eliminar los parámetros u y v para obtener la ecuación la ecuación cartesiana, probando que la ecuación vectorial dada, representa la superficie que se da. Calcular el producto vectorial fundamental $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$, en función de u y v .
- a) Plano $\mathbf{r}(u, v) = (x_0 + a_1u + b_1v, y_0 + a_2u + b_2v, z_0 + a_3u + b_3v)$.
- b) Paraboloides elíptico $\mathbf{r}(u, v) = (au \cos v, bu \sin v, u^2)$.
- c) Elipsoide $\mathbf{r}(u, v) = (a \operatorname{sen} u \cos v, b \operatorname{sen} u \sin v, c \cos u)$.
- d) Superficie de revolución $\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, f(u))$.
- e) Cilindro $\mathbf{r}(u, v) = (u, a \operatorname{sen} v, b \cos v)$.
- f) Toro $\mathbf{r}(u, v) = ((a + b \cos u) \operatorname{sen} v, (a + b \cos u) \cos v, b \operatorname{sen} u)$, $0 < b < a$.
41. En los siguientes ejercicios calcular la magnitud del producto vectorial fundamental en función de u y

v . En la medida de lo posible determine la ecuación cartesiana.

a) $\mathbf{r}(u, v) = (a \operatorname{sen} u \cos hv, b \cos u \cosh v, c \operatorname{senh} v)$.

b) $\mathbf{r}(u, v) = (u + v, u - v, 4v^2)$.

c) $\mathbf{r}(u, v) = (u + v, u^2 + v^2, u^3 + v^3)$.

d) $\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \operatorname{sen} v, \frac{1}{2}u^2 \operatorname{sen} 2v)$.

42. Sea S un paralelogramo de lados no paralelos a ningún eje coordenado. Sean S_1 , S_2 y S_3 las áreas de las proyecciones de S sobre los planos coordenados. Demostrar que el área de S es $\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}$.
43. Calcular el área de la región que en el plano $x + y + z = a$, determina el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$.
44. Calcular el área de la porción de esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, interior al cilindro $x^2 + y^2 = ay$, $a > 0$.
45. Calcular el área de la porción de superficie $z^2 = 2xy$, que se proyecta en el primer cuadrante del plano xy y limitada por los planos $x = z$, $y = 1$.
46. Sea S una superficie de ecuación vectorial $\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \operatorname{sen} v, u^2)$, donde $0 \leq u \leq 4$, $0 \leq v \leq 2\pi$.
- a) Demostrar que S es una porción de cuádrica. Identificar la cuádrica y dibujarla.
- b) Calcular el producto vectorial fundamental $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ en función de u y v .
- c) Calcular el área de S .
47. Calcular el área de la porción de superficie cónica $x^2 + y^2 = z^2$, situada por encima del plano xy y limitada por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$.
48. Calcular el área de la porción de superficie cónica $x^2 + y^2 = z^2$, situada entre los dos planos $z = 0$, $x + 2z = 3$.
49. Calcular el área de la porción de paraboloides $x^2 + y^2 = 2az$, cortada por el plano $z = a$.
50. Calcular el área del toro de ecuación $\mathbf{r}(u, v) = ((a + b \cos u) \operatorname{sen} v, (a + b \cos u) \cos v, b \operatorname{sen} u)$, con $0 < b < a$, $0 \leq u \leq 2\pi$, $0 \leq v \leq 2\pi$.
51. Una esfera está inscrita en un cilindro circular recto. La esfera es cortada por dos planos paralelos perpendiculares al eje del cilindro. Demostrar que las porciones de la esfera y del cilindro comprendidas entre esos dos planos tienen la misma área.
52. Sea $T = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / u^2 + v^2 \leq 1\}$ y sea $\mathbf{r}(u, v) = \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right)$.
- a) Determinar la imagen por \mathbf{r} de cada uno de los siguientes conjuntos:
- i) La circunferencia $u^2 + v^2 = 1$.

- ii) El intervalo $-1 \leq u \leq 1$.
- iii) La parte de la recta $u = v$ situada en T .
- b) Determinar la superficie $S = r(T)$ y dibujarla.
- c) Determinar la imagen por r del plano uv . Indicar con un gráfico en el espacio xyz los significados geométricos de los parámetros u y v .
53. Calcular las áreas de las partes de las superficies cilíndricas comprendidas entre el plano xy y las superficies indicadas:
- a) $x^2 + y^2 = a^2, z = a + \frac{x^2}{a}$.
- b) $y^2 = 2px, z = \sqrt{2px - 4x^2}$.
- c) $y^2 = \frac{4}{9}(x - 1)^3, z = 2 - \sqrt{x}$
- d) $x^2 + y^2 = a^2, 2az = xy$.
- e) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z = kx, z = 0, (z \geq 0), k > 0$, herradura cilíndrica.
- f) $y = \sqrt{2px}, z = y, x = \frac{8}{9}p$.
54. Calcular el área de la porción de superficie helicoidal definida por $x = at \cos \theta, y = at \sin \theta, z = h\theta$, $(\theta, t) \in [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 1]$, $a > 0, h > 0$.
55. Calcular el área de la porción S del paraboloides de ecuación $z = xy$, que se proyecta sobre el plano xy , dentro del disco D definido por $x^2 + y^2 \leq 1$.
56. Calcular el área S de las siguientes superficies:
- a) $x^2 + y^2 = a^2, x > 0$, cortada por $\alpha x \leq z \leq \beta x, 0 < \alpha < \beta, a > 0$.
- b) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z > 0$, cortada por $x^2 + y^2 - ax \leq 0, a > 0$, (ventana de Viviani).
- c) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, cortada por $z = \frac{xy}{c}, z \geq 0, a, b, c > 0$.
- d) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, cortada por $x + y \leq a, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, a > 0$.
- e) $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax = 0, z \geq 0$, cortada por $x^2 + y^2 \leq z^2 \tan^2 \alpha, a > 0, \alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

3.7.3 Integrales de superficie de campos escalares

57. Calcular las integrales de superficie siguientes:
- a) $\iint_S (z + 2x + \frac{4}{3}y) dS$, S es la parte del plano $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$, situado en el primer cuadrante.
- b) $\iint_S xyz dS$, S es la parte del plano $x + y + z = 1$, situada en el primer cuadrante.

- c) $\iint_S x dS$, S es la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, situada en el primer cuadrante.
- d) $\iint_S y dS$, S es la semiesfera $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.
- e) $\iint_S \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dS$, S es la semiesfera $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.
- f) $\iint_S x^2 y^2 dS$, S es la semiesfera $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.
- g) $\iint_S \frac{dS}{r^2}$, S es el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, limitado por los planos $z = 0$, $z = h$ y r es la distancia del punto de la superficie al origen de coordenadas.
- h) $\iint_S \frac{dS}{r^n}$, S es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, r es la distancia de un punto de la esfera a un punto fijo $(0, 0, c)$, $c > a > 0$.
- i) $\iint_S \frac{dS}{r}$, S es la parte de la superficie del paraboloides hiperbólico $z = xy$, recortada por el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ y r es la distancia entre un punto de la superficie y el eje z .

58. Calcular las integrales de superficie $\iint_S f dS$, donde S es la superficie definida por la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \leq z \leq 1$, $f(x, y, z) = x^2 y^2 z$.

59. Calcular la integral de superficie $\iint_S f dS$ en los siguientes casos:

- a) $f(x, y, z) = xye^{xz}$, S es el cuarto de cilindro definida por $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.
- b) $f(x, y, z) = \ln z$, S es la parte esférica definida por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $\frac{1}{2} \leq z \leq 1$.
- c) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$ y S es el helicoides $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $z = \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq 1$.
- d) $f(x, y, z) = z^2$ y S es la esfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

60. Calcular las integrales de superficie $\iint_S f dS$, donde:

- a) $f(x, y, z) = y^2 + 2yz$, S es la parte del plano $2x + y + 2z = 6$ situada en el primer cuadrante.
- b) $f(x, y, z) = x + z$, S es la parte del cilindro $x^2 + y^2 = 9$ situada en el primer octante entre $z = 0$, $z = 4$.

61. El cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ corta una porción de la superficie S , en la hoja superior del cono $x^2 + y^2 = z^2$. Calcular la integral de superficie $\iint_S (x^4 - y^4 + y^2 z^2 - z^2 x^2 + 1) dS$.

62. Sea S la porción del plano del plano $x + y + z = t$ determinada por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Sea $\varphi(x, y, z) = 1 - x^2 - y^2 - z^2$, si (x, y, z) es interior a dicha esfera y $\varphi(x, y, z) = 0$ si no. Demostrar que
- $$\iint_S \varphi(x, y, z) dS = \begin{cases} \frac{\pi}{18}(3 - t^2)^2 & \text{si } |t| \leq \sqrt{3}, \\ 0 & \text{si } |t| > \sqrt{3}. \end{cases}$$

63. Calcular las siguientes integrales de superficie:

- a) $\oiint_S (x + y + z) dS$, S es el cubo $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.
- b) $\oiint_S (x^2 + y^2) dS$, S es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.
- c) $\iint_S \sqrt{x^2 + y^2} dS$, S es la superficie lateral del cono $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = \frac{z^2}{b^2}$, $0 \leq z \leq b$.

3.7.4 Centro de gravedad, masa, momentos de inercia. Aplicaciones

64. Determinar los centros de gravedad de las superficies homogéneas siguientes:
- La parte de la esfera situada en el primer octante.
 - La parte del paraboloido $x^2 + y^2 = 2z$ recortada por el plano $z = 1$.
65. Calcular el momento de inercia de las partes indicadas por las superficies homogéneas (la masa de cada superficie es m).
- De la superficie lateral del cilindro (de radio a y altura h) con respecto al eje que pasa por su centro de gravedad y es perpendicular al eje del cilindro.
 - De la parte del paraboloido $x^2 + y^2 = 2cz$ recortado por el plano $z = c$, con respecto al eje z .
 - De la superficie lateral del cono truncado (radios de la base son b y a ($b > a$), altura h) con respecto a su eje.
66. Calcular la masa de una esfera, si la densidad de superficie en cada punto es igual a la distancia entre el punto y un cierto diámetro fijo de la esfera.
67. Hallar la masa de una esfera, si su densidad de superficie en cada punto es igual al cuadrado de la distancia entre el punto y un cierto diámetro fijo de la esfera.
68. Determinar el centro de la placa homogénea R de densidad 1, donde R es la superficie definida por $x = ue^v \cos v$, $y = ue^v \sin v$, $z = e^v$, $(u, v) \in D = [0, 1] \times [0, 1]$.
69. Si S es la superficie del paraboloido $z = 2 - (x^2 + y^2)$ sobre el plano xy , calcule:
- Las coordenadas del centroide de esta superficie.
 - El momento de inercia de esta superficie con respecto al eje z , siendo la densidad de la superficie 1.

70. Demostrar que el momento de inercia de un recipiente esférico alrededor del diámetro es $\frac{2}{3}ma^2$, donde m es la masa del recipiente y a es su radio.
71. Determinar el centro de gravedad de la porción de superficie esférica homogénea dada por $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, situada sobre el primer cuadrante del plano xy .
72. Calcular la masa de una lámina superficial S , dada por $z = 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2}$ entre los planos $z = 0$, $z = 4$, si la densidad es proporcional a la distancia al eje z .
73. Un recipiente esférico homogéneo de radio a , está cortado por una hoja de un cono circular recto, cuyo vértice está en el centro de la esfera. Si el ángulo en el vértice del cono es α , $0 < \alpha < \pi$, determinar el centro de gravedad de la porción del recipiente esférico que es interior al cono.
74. Una hoja de papel rectangular homogénea de base $2\pi a$ y altura h se arrolla formando una superficie cilíndrica S de radio a .
- Calcular el momento de inercia de S , alrededor de un eje que contiene un diámetro de la base circular.
 - Calcular el momento de inercia de S , alrededor de un eje que está en el plano de la base y es tangente al borde circular de la base.
75. Calcular la masa de la superficie del cubo $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$, si la densidad superficial en el punto (x, y, z) es igual a xyz .
76. Determinar las coordenadas del centro de gravedad de la cápsula parabólica homogénea $az = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq a$.
77. Hallar el momento de inercia de la parte de la superficie del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq h$, con respecto al eje z .

3.7.5 Integrales de superficie de campos vectoriales

78. Sea S la superficie dada por el paraboloides $z = 4 - x^2 - y^2$ situada sobre el plano xy , orientado por un vector unitario hacia arriba. El fluido de densidad $\rho(x, y, z) = c$ fluye a través de la superficie S , por el campo de velocidades $f(x, y, z) = (x, y, z)$. Determinar la razón de flujo de masa a través de S .
79. Sean u y v dos campos escalares de clase C^2 en un conjunto abierto R de \mathbb{R}^3 .
- Mostrar que existe un campo vectorial f tal que $\nabla u \times \nabla v = \text{rot } f$ en R .
 - Determinar si cualquiera de los tres campos vectoriales siguientes pueden o no ser utilizados como f en la parte a): i) $\nabla(uv)$, ii) $u\nabla v$, iii) $v\nabla u$.

c) Si $u(x, y, z) = x^3 - y^3 + z^3$, $v(x, y, z) = x + y + z$, calcular la integral de superficie:

$$\iint_S \nabla u \times \nabla v \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS,$$

en donde S es la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$ y $\boldsymbol{\eta}$ es la normal unitaria con componente z no negativa.

80. Sea S la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, sea $f(x, y, z) = (x, y, 0)$ y sea $\boldsymbol{\eta}$ el vector normal unitario exterior a S . Calcular el valor de la integral de superficie $\iint_S f \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS$, empleando:

a) La representación vectorial $\mathbf{r}(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$.

b) La representación explícita $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

81. Sea S la porción del plano limitada por el triángulo de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, sea $f(x, y, z) = (x, y, z)$ y sea $\boldsymbol{\eta}$ la normal unitaria a S que tiene componente z no negativa. Calcular la integral de superficie $\iint_S f \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS$ usando:

a) La representación vectorial $\mathbf{r}(u, v) = (u + v, u - v, 1 - 2u)$.

b) Una representación explícita de la forma $z = f(x, y)$.

82. Sea S una superficie parametrizada de la forma $z = f(x, y)$, f de clase C^1 , de modo que $(x, y) \in T$, siendo T una región plana, proyección de S sobre el plano xy .

a) Sea $\mathbf{f} = (P, Q, R)$, con P, Q, R continuas y $\boldsymbol{\eta}$ la normal unitaria a S , de componente z no negativa.

Usar la representación paramétrica $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$ para demostrar que:

$$\iint_S \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS = \iint_T \left(-P \frac{\partial f}{\partial x} - Q \frac{\partial f}{\partial y} + R \right) dx \, dy,$$

donde P, Q y R se evalúan en $(x, y, f(x, y))$.

b) Sea φ un campo escalar, demostrar que:

$$\text{i) } \iint_S \varphi(x, y, z) \, dS = \iint_T \varphi(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2} \, dx \, dy.$$

$$\text{ii) } \iint_S \varphi(x, y, z) \, dy \wedge dz = - \iint_T \varphi(x, y, f(x, y)) \frac{\partial f}{\partial x} \, dx \, dy.$$

$$\text{iii) } \iint_S \varphi(x, y, z) \, dz \wedge dx = - \iint_T \varphi(x, y, f(x, y)) \frac{\partial f}{\partial y} \, dx \, dy.$$

83. Si S es la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, calcular el valor de las integrales de superficie:

a) $\oint_S xz dy \wedge dz + yz dz \wedge dx + x^2 dx \wedge dy.$

b) $\oint_S xz dy \wedge dz + yz dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy.$

Se debe elegir una representación para que el producto vectorial fundamental tenga la dirección de la normal exterior.

84. Calcular las siguientes integrales de superficie:

a) $\iint_S yz dy \wedge dz + xz dz \wedge dx + xy dx \wedge dy$, S es la cara exterior de la superficie del tetraedro limitado por $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = a$.

b) $\iint_S z dx \wedge dy$, S es la cara exterior del elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

c) $\iint_S x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy$, S es la cara exterior de la superficie de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0$.

85. Un flujo de fluido tiene como densidad de flujo el vector $f(x, y, z) = (x, -2x - y, z)$, sea S el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ y sea η la normal unitaria orientada hacia el exterior de la esfera.

a) Calcular la masa de fluido que atraviesa S por unidad de tiempo en la dirección η .

b) Calcular la masa de fluido que atraviesa S , si S también contiene la base plana del hemisferio. En la base inferior la normal es $-\mathbf{k}$.

86. Calcular las siguientes integrales de superficie:

a) $\oint_S x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy$, S es el lado positivo del cubo formado por los planos $x = 0, y = 0, z = 0, x = 1, y = 1, z = 1$.

b) $\oint_S x^2 y^2 z dx \wedge dy$, S es el lado positivo de la mitad inferior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

c) $\oint_S z dx \wedge dy$, S es la cara exterior del elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

d) $\oint_S z^2 dx \wedge dy$, S es la cara exterior del elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

e) $\oint_S xz dx \wedge dy + xy dy \wedge dz + yz dz \wedge dx$, S es la cara exterior de la pirámide formada por los planos $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$.

f) $\oint_S yz dx \wedge dy + xz dy \wedge dx + xy dz \wedge dx$, S es la cara exterior de la superficie situada en el primer

octante y formada por el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ y los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = h$.

g) $\oint_S y^2 z dx \wedge dy + xz dy \wedge dz + x^2 y dz \wedge dx$, S es la cara exterior de la superficie situada en el primer octante y formada por el paraboloido de revolución $z = x^2 + y^2$, por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y los planos de coordenadas.

3.7.6 Fórmula de Stokes

87. Usando el teorema de Stokes, evaluar $\iint_S \text{rot } \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} dS$, donde $\mathbf{f} = (x - z, x^3 + yz, -3xy^2)$ y S es la superficie del cono $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ sobre el plano xy y $\boldsymbol{\eta}$ es la normal unitaria exterior a S .
88. Verificar el teorema de Stokes para el campo vectorial $\mathbf{f} = (3y, -xz, yz^2)$, donde S es la superficie del paraboloido $2z = x^2 + y^2$, limitado por $z = 2$.
89. Usando el teorema de Stokes en el plano, calcular $\oint_{\Gamma} \frac{dx - dy}{x + y + 2}$, tomada a lo largo del contorno del cuadrado que tiene sus vértices en los puntos $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $C(-1, 0)$ y $D(0, -1)$, recorrido en sentido contrario de las manecillas del reloj.
90. Usar el Teorema de Stokes para verificar que las integrales de línea tienen los valores indicados. Explicar el sentido en el que se recorre Γ para llegar al resultado.
- a) $\oint_{\Gamma} y dx + z dy + x dz = \pi a^2 \sqrt{3}$, Γ es la curva intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y el plano $x + y + z = 0$.
- b) $\oint_{\Gamma} (y + z) dx + (z + x) dy + (x + y) dz = 0$, Γ es la curva intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 2y$ y el plano $z = y$.
- c) $\oint_{\Gamma} y^2 dx + xy dy + xz dz = 0$, Γ es la curva de b).
- d) $\oint_{\Gamma} (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz = 2\pi a(a + b)$, Γ es la curva de intersección del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ y el plano $\frac{x}{a} + \frac{z}{b} = 1$, $a > 0$, $b > 0$.
- e) $\oint_{\Gamma} (y^2 + z^2) dx + (x^2 + z^2) dy + (x^2 + y^2) dz = 2\pi ab^2$, Γ es la curva de intersección del hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$, $z > 0$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 2bx$, $0 < b < a$.
- f) $\oint_{\Gamma} (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz = \frac{9}{2}a^3$, Γ es la curva de intersección del cubo $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$, $0 \leq z \leq a$ y el plano $x + y + z = \frac{2}{3}a$.
91. Si $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{f} = (P, Q, R) = \mathbf{a} \times \mathbf{r}$, donde \mathbf{a} es un vector constante, demostrar que $\oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz = 2 \iint_S \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\eta} dS$, Γ es una curva que limita la superficie paramétrica S y $\boldsymbol{\eta}$ es la normal adecuada de S .

92. Sea $f = (P, Q, R)$, donde $P = -\frac{y}{x^2 + y^2}$, $Q = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $R = z$. Sea D el toro generado por la rotación de la circunferencia $(x - 2)^2 + z^2 = 1$, $y = 0$, alrededor de eje z . Demostrar que $\text{rot } f = \mathbf{0}$, pero que $\oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz$ no es cero, si la curva Γ es la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$.
93. Usando el teorema de Stokes, transformar las integrales:
- $\oint_{\Gamma} (x^2 - yz) dx + (y^2 + zx) dy + (z^2 - xy) dz$.
 - $\oint_{\Gamma} y dx + z dy + x dz$.
94. Usando la fórmula de Stokes calcular las integrales de línea y comprobar el resultado calculándolas directamente.
- $\oint_{\Gamma} (y + z) dx + (z + x) dy + (x + y) dz$, Γ es la circunferencia $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$.
 - $\oint_{\Gamma} (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz$, Γ es la elipse $x^2 + y^2 = 1$, $x + z = 1$.
 - $\oint_{\Gamma} x dx + (x + y) dy + (x + y + z) dz$, Γ es la curva $x = a \sin t$, $y = a \cos t$, $z = a(\sin t + \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
 - $\oint_{\Gamma} y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$, donde Γ es el borde del triángulo ABC con los vértices en los puntos $A(a, 0, 0)$, $B(0, a, 0)$, $C(0, 0, a)$.
95. ¿Cuáles son las condiciones que se deben dar para que la integral de línea $\oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz = 0$, para cualquier curva cerrada Γ ?
96. En los siguientes ejercicios calcular y transformar la integral de superficie $\iint_S \text{rot } f \cdot \boldsymbol{\eta} dS$, en una integral de línea usando el teorema de Stokes y calcular la integral de línea.
- $f(x, y, z) = (y^2, xy, z)$, S es el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$ y $\boldsymbol{\eta}$ es la normal unitaria con componente z no negativa.
 - $f(x, y, z) = (y, z, x)$, S es la parte de la paraboloides $z = 1 - x^2 - y^2$, con $z \geq 0$ y $\boldsymbol{\eta}$ es la normal unitaria con componente z no negativa.
 - $f(x, y, z) = (y - x, yz, -xz)$, S consta de cinco caras del cubo $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$, $0 \leq z \leq 2$, no situadas en el plano xy , $\boldsymbol{\eta}$ es la normal unitaria exterior.
 - $f(x, y, z) = (xz, -y, x^2y)$, S consta de las tres caras no situadas en el plano xz del tetraedro limitado por los tres planos coordenados y el plano $3x + y + 3z = 6$. La normal $\boldsymbol{\eta}$ es la normal exterior del tetraedro.
97. Transformar la integral de línea $\oint_{\Gamma} (x^2 + y^2) dx + (x^2 + z^2) dy + (x^2 + y^2) dz$ tomada a lo largo de

cierto contorno cerrado, en la integral de superficie tendida sobre este contorno, aplicando la fórmula de Stokes.

98. Calcular la integral $\oint_{\Gamma} x^2 y^3 dx + dy + z dz$, donde Γ es la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$:
- directamente, a lo largo de la curva Γ en el sentido positivo,
 - aplicando la fórmula de Stokes y considerando la semiesfera $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ como superficie.

3.7.7 Fórmula de Gauss–Ostrogradski

99. Verificar el teorema de la divergencia para el sólido limitado por las superficies $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ y $z = 0$, donde el campo vectorial es $f = (xz^2, x^2y - z^3, 2xy + y^2z)$.
100. Usar el teorema de la divergencia para evaluar la integral $\iint_S (x^2 + y + z) dS$, donde S es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Solución Para utilizar el teorema de Gauss, debemos determinar un campo vectorial $f = (f_1, f_2, f_3)$ sobre la bola sólida $V: x^2 + y^2 + z^2 = 1$, tal que $f \cdot \eta = x^2 + y + z$, donde η es la normal a la superficie S .

101. Evaluar $\iint_S f \cdot \eta dS$ usando el teorema de la divergencia, donde $f = (xy^2, x^2y, y)$ y S es la superficie del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, acotado por los planos $z = 1$, $z = -1$, incluyendo las porciones $x^2 + y^2 \leq 1$, cuando $z = \pm 1$.
102. Evaluar $\iint_S f \cdot \eta dS$ en los siguientes casos:
- $f = (xyz, xyz, xyz)$, S es la superficie del cubo $[0, 1]^3$.
 - $f = ((x + y)z^2, (y + z)x^2, (z + x)y^2)$, S es la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
 - $f = (1 - x^2, \frac{1}{2}y^2, z(2x - y))$, S es la superficie $x^2 + y^2 = 1$ y $0 \leq z \leq 1$.
 - $f = (xy^2z(z - 1), x^2yz(z - 1), z^3 - z^2)$, S es la superficie $x^2 + y^2 = 1$ y $0 \leq z \leq 1$.

103. Sea S la superficie del cubo unidad $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$ y sea η la normal unitaria exterior a S . Si $f(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$ emplear el teorema de la divergencia para calcular la integral de superficie $\iint_S f \cdot \eta dS$. Comprobar el resultado calculando la integral de superficie directamente.

104. Se corta la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ por el plano $z = 3$. La parte menor es un sólido V limitado por una superficie S_0 constituida por dos partes, una esférica S_1 y otra plana S_2 . Si la normal unitaria exterior a V es $\eta = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, calcular la integral de superficie $\iint_S (xz \cos \alpha + yz \cos \beta + \cos \gamma) dS$,

si:

a) S es el casquete esférico S_1 .

b) S es la base plana S_2 .

c) S es la frontera completa $S_0 = S_1 \cup S_2$.

Resolver la parte c) con los resultados de las partes a) y b) y también usando el teorema de la divergencia.

105. Sea $\boldsymbol{\eta} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ la normal unitaria exterior a una superficie cerrada S , que limita un sólido homogéneo V del tipo descrito en el teorema de la divergencia. Supongamos que el centro de gravedad $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ y el volumen $|V|$ de V son conocidos. Calcular las siguientes integrales de superficie en función de $|V|$ y de $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$.

a)
$$\oint_S (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS$$

b)
$$\oint_S (xz \cos \alpha + 2yz \cos \beta + 3z^2 \cos \gamma) dS$$

c)
$$\oint_S (y^2 \cos \alpha + 2xy \cos \beta - xz \cos \gamma) dS$$

d) Expresar $\oint_S (x^2 + y^2)(x, y, 0) \cdot \boldsymbol{\eta} dS$ en función del volumen $|V|$ y un momento de inercia del sólido.

106. Verificar las siguientes identidades, donde f y g son campos escalares de clase C^1 , $\boldsymbol{\eta}$ es la normal exterior unitaria a la superficie cerrada S , que limita un sólido V descrito en el teorema de la divergencia, $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\eta}} = \nabla f \cdot \boldsymbol{\eta}$, $\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\eta}} = \nabla g \cdot \boldsymbol{\eta}$.

a)
$$\oint_S \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\eta}} dS = \iiint_V \nabla^2 f dx dy dz.$$

b)
$$\oint_S \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\eta}} dS = 0$$
, siempre que f sea armónica en V .

c)
$$\oint_S f \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\eta}} dS = \iiint_V f \nabla^2 g dx dy dz + \iiint_V \nabla f \cdot \nabla g dx dy dz.$$

d)
$$\oint_S \left(f \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\eta}} - g \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\eta}} \right) dS = \iiint_V (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) dx dy dz.$$

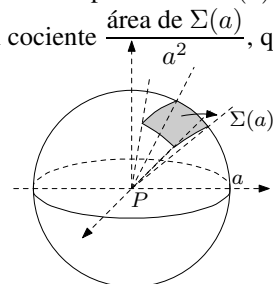
e)
$$\oint_S f \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\eta}} dS = \oint_S g \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\eta}} dS$$
, si f y g son ambas armónicas en V .

f)
$$\oint_S f \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\eta}} dS = \iiint_V \|\nabla f\|^2 dx dy dz$$
, si f es armónica en V .

107. Demostrar que $\nabla^2 f(\mathbf{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{|V(t)|} \oiint_{S(t)} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\eta}} dS$, donde $V(t)$ es una esfera de radio t y centro \mathbf{a} , $S(t)$ es la superficie de $V(t)$ y $|V(t)|$ es el volumen de $V(t)$.

108. Sean V una región convexa de \mathbb{R}^3 cuya frontera es una superficie cerrada S y $\boldsymbol{\eta}$ la normal unitaria exterior a S . Sean \mathbf{f} y \mathbf{g} dos campos vectoriales de clase C^1 , tales que $\text{rot } \mathbf{f} = \text{rot } \mathbf{g}$, $\text{div } \mathbf{f} = \text{div } \mathbf{g}$ en todo V , y que satisfacen $\mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\eta} = \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta}$ en todo punto de la superficie S . Demostrar que $\mathbf{f} = \mathbf{g}$ en V .
Sugerencia Sea $\mathbf{h} = \mathbf{f} - \mathbf{g}$, encontrar un campo escalar f de clase C^2 tal que $\mathbf{h} = \nabla f$ y usar una identidad adecuada para demostrar que $\iiint_V \|\nabla f\|^2 dx dy dz = 0$. De esto se deduce que $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ en V .

109. Sea S una superficie paramétrica regular con la propiedad de que cada semi-recta que sale de P , corta a S una vez a lo sumo. Representemos por $\Omega(S)$ el conjunto de rectas que pasan por P y atraviesan S (ver figura). El conjunto $\Omega(S)$ se llama ángulo sólido de vértice en P subtendido por S . Sea $\Sigma(a)$ la intersección de $\Omega(S)$ en la superficie de la esfera de radio a y centro P . El cociente $\frac{\text{área de } \Sigma(a)}{a^2}$, que se representa por $|\Omega(S)|$, se utiliza como medida del ángulo sólido $\Omega(S)$.



a) Demostrar que este cociente es igual a la integral de superficie $\iint_S \frac{\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\eta}}{r^3} dS$, donde \mathbf{r} es el vector que une P a un punto cualquiera de S y $r = \|\mathbf{r}\|$. El vector $\boldsymbol{\eta}$ es la normal unitaria a S en la dirección de alejamiento de P .

ap5638a.tex

Esto demuestra que el cociente $|\Omega(S)|$ es independiente del radio a , por lo que el ángulo sólido puede ser medido por el área de la intersección de $\Omega(S)$ y la esfera unidad entorno a P .

b) Dos planos se cortan a lo largo de un diámetro de una esfera con centro en P . El ángulo de intersección de los planos es θ , siendo $0 < \theta < \pi$. Sea S la parte menor de la superficie de la esfera interceptada por los dos planos. Demostrar que $|\Omega(S)| = 2\theta$.

110. Sean $V(t)$ un cubo de arista $2t$ y centro en $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$, $S(t)$ la frontera del cubo $V(t)$, $\boldsymbol{\eta}$ la normal unitaria exterior a $S(t)$ y $|V(t)|$ el volumen de cubo. Para un campo vectorial dado \mathbf{f} de clase C^1 en un abierto de \mathbf{a} , se supone que existe $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{|V(t)|} \oiint_{S(t)} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} dS$ y emplearlo como definición de $\text{div } \mathbf{f}(\mathbf{a})$.

Se toman como ejes coordenados xyz , ejes paralelos a las aristas de $V(t)$, sean P , Q y R los componentes de \mathbf{f} relativos a ese sistema de coordenadas. Demostrar que $\text{div } \mathbf{f}(\mathbf{a}) = \frac{\partial P}{\partial x}(\mathbf{a}) + \frac{\partial Q}{\partial y}(\mathbf{a}) + \frac{\partial R}{\partial z}(\mathbf{a})$.

Sugerencia Expresar la integral de superficie como una suma de seis integrales dobles tomadas sobre las caras del cubo. Demostrar que $\frac{1}{|V(t)|}$ multiplicado por la suma de las dos integrales dobles sobre

las caras perpendiculares al eje z , tiendan a $\frac{\partial R}{\partial z}(\mathbf{a})$ cuando $t \rightarrow 0$.

111. Un campo escalar φ tiene la propiedad $\|\nabla\varphi\|^2 = 4\varphi$ y $\operatorname{div}(\varphi\nabla\varphi) = 10\varphi$.

Calcular la integral de superficie $\iint_S \frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{\eta}} dS$, donde S es la superficie de la esfera unidad con centro en el origen y $\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{\eta}}$ es la derivada direccional de φ en la dirección de la normal unitaria exterior a S .

112. Usando la fórmula de Gauss–Ostrogradski transformar las siguientes integrales de superficie, sobre las superficies cerradas S que limitan el volumen V , donde $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ son los cosenos directores de la normal exterior $\boldsymbol{\eta}$ a la superficie S .

a) $\iint_S yz \, dy \wedge dz + zx \, dz \wedge dx + xy \, dx \wedge dy.$

b) $\iint_S x^2 \, dy \wedge dz + y^2 \, dz \wedge dx + z^2 \, dx \wedge dy.$

c) $\iint_S \frac{x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dS.$

d) $\iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma \right) dS, u$ es de clase C^2 .

113. Usando la fórmula de Gauss–Ostrogradski calcular las siguientes integrales de superficie:

a) $\iint_S x^2 \, dy \wedge dz + y^2 \, dz \wedge dx + z^2 \, dx \wedge dy$, S es la cara exterior de la superficie del cubo: $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$, $0 \leq z \leq a$.

b) $\iint_S x \, dy \wedge dz + y \, dz \wedge dx + z \, dx \wedge dy$, S es la cara exterior de la pirámide limitada por las superficies $x + y + z = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

c) $\iint_S x^3 \, dy \wedge dz + y^3 \, dz \wedge dx + z^3 \, dx \wedge dy$, S es la cara exterior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

d) $\iint_S (x^2 \cos\alpha + y^2 \cos\beta + z^2 \cos\gamma) dS$, S es la superficie exterior total del cono $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0$, $0 \leq z \leq b$.

114. Demostrar que si S es una superficie cerrada y $\boldsymbol{\ell}$ cualquier dirección constante, la integral $\iint_S \cos(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\ell}) dS = 0$, donde $\boldsymbol{\eta}$ es la normal exterior a la superficie S .

115. Demostrar que el volumen de V , limitado por la superficie S es igual a:

$$|V| = \frac{1}{3} \iint_S (x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma) dS,$$

donde $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ son los cosenos directores del la normal exterior $\boldsymbol{\eta}$ a la superficie.

116. a) Usando el Teorema de Gauss–Ostrogradski, demostrar que el flujo del vector $f = r$, a través de una superficie cerrada que limita un volumen arbitrario V es igual al triple del volumen.

b) Determinar el flujo del vector r a través de la superficie total del cilindro $x^2 + y^2 \leq a^2$, $0 \leq z \leq h$.

117. Calcular el flujo del vector $f(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3)$ a través de:

a) la superficie lateral del cono $\frac{x^2 + y^2}{a^2} \leq \frac{z^2}{h^2}$, $0 \leq z \leq h$.

b) la superficie total de este mismo cono.

118. Calcular la divergencia y el flujo de la fuerza de atracción $f = -\frac{m}{r^3}r$ de un punto de masa m , situado en el origen de coordenadas a través de una superficie cerrada arbitraria, que rodea dicho punto.

119. Aplicando la fórmula de Gauss–Ostrogradski, transformar la integral sobre la superficie cerrada, en una integral triple sobre el volumen del cuerpo limitado por esta superficie (cara exterior) $\oint_S \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) dS$. Calcular la integral si S es la esfera de radio a , con centro en el origen de coordenadas.

120. Usando la fórmula de Gauss–Ostrogradski, calcular las integrales de superficie del ejercicio ??, página ??.

Apéndice A

Formas diferenciales

A.1 Formas diferenciales

La teoría de formas diferenciales nos proporciona una manera simple y elegante de poder describir los teoremas de Green, Stokes y Gauss. De hecho las formas diferenciales nos proporciona una visión global que permiten ver estos teoremas como objetos de una teoría matemática más general en el caso de n dimensiones.

En esta parte, consideramos las formas diferenciales en un espacio de dimensión tres.

Definición A.1.1 Sea $U \subset \mathbb{R}^3$ abierto, una forma diferencial de grado 0 sobre U , es una aplicación $f: U \rightarrow \mathbb{R}$.

Definición A.1.2 Denotamos dx_1, dx_2, dx_3 las formas lineales canónicas de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R} i.e. $dx_i: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $dx_i(a_1, a_2, a_3) = a_i$. En el caso de 3 dimensiones $dx_1 = dx$, $dx_2 = dy$, $dx_3 = dz$.

Definición A.1.3 Sea $U \subset \mathbb{R}^3$ abierto y sean P, Q, R aplicaciones de U en \mathbb{R} , una forma diferencial de grado 1 sobre U , es la aplicación $\omega: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\omega = P dx + Q dy + R dz$.

Recordemos $\omega(x, y, z) = P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$. Si las aplicaciones P, Q, R son de clase C^k , se dice que la forma diferencial ω es de clase C^k .

Es claro que si $Q = R = 0$, entonces la forma diferencial $\omega = P dx$ es una forma diferencial de grado 1.

Se pueden sumar dos formas diferenciales de grado 1 i.e. si $\omega = P dx + Q dy + R dz$ y $\omega_1 = P_1 dx + Q_1 dy + R_1 dz$, entonces $\omega + \omega_1 = (P + P_1) dx + (Q + Q_1) dy + (R + R_1) dz$ es también una forma diferencial de grado 1.

También se puede definir la forma diferencial de grado 1, $f\omega$ por $fP dx + fQ dy + fR dz$.

Definición A.1.4 Sean f, g dos funciones lineales sobre \mathbb{R}^3 (i.e. $f, g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, donde f, g son lineales) se define la aplicación bilineal $f \wedge g: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ llamada producto exterior de f y g , por: $f \wedge g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x})g(\mathbf{y}) - f(\mathbf{y})g(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$.

Se observa que el producto exterior $f \wedge g$ es una forma bilineal alternada i.e. $f \wedge g = -g \wedge f$.

Ejemplo A.1.1 Consideremos el espacio \mathbb{R}^3 , $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$, $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3)$ entonces:

$$(dx_i \wedge dx_j)(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = dx_i(\mathbf{y})dx_j(\mathbf{z}) - dx_j(\mathbf{y})dx_i(\mathbf{z}) = y_i z_j - z_i y_j,$$

es el determinante de la matriz $\begin{pmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$, eliminando la primera fila y la columna que es $\neq i$ y $\neq j$.

Se observa que $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$ y que $dx_i \wedge dx_i = 0$.

Definición A.1.5 Sea $U \subset \mathbb{R}^3$ abierto, P, Q, R aplicaciones de U en \mathbb{R} , una forma diferencial de grado 2 sobre U , es la aplicación $\omega: U \rightarrow L(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ tal que:

$$\omega(x, y, z) = P(x, y, z)dy \wedge dz + Q(x, y, z)dz \wedge dx + R(x, y, z)dx \wedge dy.$$

Cuando P, Q, R son de clase C^k sobre U , se dice que la forma diferencial ω es de clase C^k sobre U .

Definición A.1.6 Sean f, g, h tres formas lineales sobre \mathbb{R}^3 , entonces se define la aplicación $f \wedge g \wedge h: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, llamada producto exterior de f, g, h , como:

$$f \wedge g \wedge h(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{t}) = \begin{vmatrix} f(\mathbf{y}) & g(\mathbf{y}) & h(\mathbf{y}) \\ f(\mathbf{z}) & g(\mathbf{z}) & h(\mathbf{z}) \\ f(\mathbf{t}) & g(\mathbf{t}) & h(\mathbf{t}) \end{vmatrix}, \quad \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{t} \in \mathbb{R}^3.$$

Se observa que $f \wedge g \wedge h$ es una forma trilineal alternada sobre \mathbb{R}^3 y que:

$$dx \wedge dy \wedge dz(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{t}) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \end{vmatrix}.$$

Definición A.1.7 Sea $U \subset \mathbb{R}^3$ un abierto y sea $P: U \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación, la aplicación $\omega: U \rightarrow L(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ (forma trilineal alternada), donde

$$\omega(x, y, z) = P(x, y, z)dx \wedge dy \wedge dz,$$

se llama forma diferencial de grado 3 sobre U .

Si P es de clase C^k en U , se dice que la forma diferencial ω es de clase C^k .

Observación Dado que la dimensión de \mathbb{R}^3 es 3, toda forma p -lineal alternada sobre \mathbb{R}^3 es nula para $p \geq 4$, i.e. toda forma diferencial de grado $p \geq 4$ sobre $U \subset \mathbb{R}^3$ es nula.

Observemos que si ω es una forma diferencial de grado k y η es una forma diferencial de grado ℓ , de modo que $0 \leq k + \ell \leq 3$, el producto exterior satisface:

- i) $f \wedge \omega = f\omega$
- ii) $(f\omega) \wedge \eta = f(\omega \wedge \eta) = \omega \wedge (f\eta)$
- iii) $\omega \wedge \eta = (-1)^{k\ell} \eta \wedge \omega$
- iv) $dx \wedge dy = dx dy, \quad dy \wedge dx = -dx dy = (-1) dx \wedge dy$
 $dx \wedge dx = 0 = dy \wedge dy = dz \wedge dz$
 $dx \wedge (dy \wedge dz) = (dx \wedge dy) \wedge dz = dx dy dz.$

A.2 Diferencial de formas diferenciales, diferenciación exterior

Definición A.2.1 Sea $U \subset \mathbb{R}^3$ abierto y sea $\omega = f$ una forma diferencial de grado 0, de clase C^1 sobre U . Se llama diferencial de ω , o diferencial exterior de ω , a la forma diferencial de grado 1, dada por:

$$d\omega = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz.$$

Los coeficientes de la forma diferencial $d\omega$ son las coordenadas de ∇f .

Definición A.2.2 Sea $U \subset \mathbb{R}^3$ y sea $\omega = P dx + Q dy + R dz$ una forma diferencial de grado 1, de clase C^1 sobre U . Se llama diferencial de ω (o diferencial exterior de ω) a la forma diferencial de grado 2, dada por:

$$d\omega = dP \wedge dx + dQ \wedge dy + dR \wedge dz.$$

Observemos que $dP = \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz$, $dQ = \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy + \frac{\partial Q}{\partial z} dz$, $dR = \frac{\partial R}{\partial x} dx + \frac{\partial R}{\partial y} dy + \frac{\partial R}{\partial z} dz$, entonces:

$$d\omega = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy.$$

Si $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ es tal que $f = (P, Q, R)$ de clase C^1 , los coeficientes de $d\omega$ son las coordenadas de $\text{rot } f$.

Definición A.2.3 Sea $U \subset \mathbb{R}^3$ abierto, $\omega = P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$ una forma diferencial de grado 2, de clase C^1 sobre U , se llama diferencial de ω , o diferencial exterior de ω , a la forma diferencial de grado 3:

$$d\omega = dP \wedge dy \wedge dz + dQ \wedge dz \wedge dx + dR \wedge dx \wedge dy = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz.$$

Si $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ es tal que $f = (P, Q, R)$ de clase C^1 , el coeficiente de $d\omega$ es $\text{div } f$. Observemos que ω es una forma diferencial de grado k y η es una forma diferencial de grado ℓ ($k + \ell \leq 3$), entonces $d(\omega \wedge \eta) = (d\omega \wedge \eta) + (-1)^k(\omega \wedge d\eta)$.

Teorema A.2.1 Sea $U \subset \mathbb{R}^3$ abierto y sea ω una forma diferencial de grado menor o igual a 1, de clase C^2 sobre U , entonces $d(d\omega) = \mathbf{0}$.

Se denota $d^2\omega = d(d\omega)$.

Demostración Si $\omega = f$ forma diferencial de grado 0, las coordenadas de $d\omega$ son las coordenadas de ∇f y los coeficientes de $d^2\omega$ son las coordenadas de $\text{rot}(\nabla f) = \mathbf{0}$.

Si $\omega = P dx + Q dy + R dz$ es una forma diferencial de grado 1, denotando $f = (P, Q, R)$, los coeficientes de la forma $d\omega$ son las coordenadas de $\text{rot } f$ y la coordenada de $d^2\omega$ es $\text{div}(\text{rot } f) = 0$.

Si ω es una forma de grado ≥ 2 , entonces $d^2\omega$ es una forma de grado ≥ 4 i.e. $d^2\omega = \mathbf{0}$.

A.3 Primitiva de una forma diferencial

Definición A.3.1 Sea $U \subset \mathbb{R}^3$ un abierto y sea ω una forma diferencial de grado $p = 1, 2, 3$, de clase C^1 sobre U , se dice que la forma diferencial ω es cerrada si $d\omega = \mathbf{0}$.

La forma diferencial ω de clase C^1 se dice exacta, si existe una forma diferencial η de grado $p - 1$ de clase C^2 sobre U , tal que $d\eta = \omega$.

η se llama primitiva (exterior) de ω .

Teorema A.3.1 Sea ω una forma diferencial de grado $p = 1, 2, 3$, sobre $U \subset \mathbb{R}^3$ abierto, de clase C^1 .

i) Si ω es exacta, entonces ω es cerrada.

ii) Si $p = 3$, entonces ω es exacta sobre U .

Si $p = 1, 2$, y si ω es cerrada sobre U , entonces ω es exacta sobre todo conjunto de la forma $[a, b] \times [c, d] \times [e, f] \subset U$.

Demostración

- i) si ω es exacta sobre U , entonces existe una forma diferencial φ de grado $p - 1$, de clase C^2 sobre U tal que $d\varphi = \omega$ i.e. $d\omega = d^2\varphi = \mathbf{0}$.
- ii) $\boxed{p = 1}$ Sea $\omega = P dx + Q dy + R dz$ de clase C^1 sobre U y supongamos que es cerrada sobre U : $d\omega = 0$, es decir $\text{rot}(P, Q, R) = 0$, entonces $\forall B = \prod_{i=1}^3 [a_i, b_i] \subset U$ existe $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que $\nabla f = (P, Q, R)$, por lo que $df = \omega$ y ω es exacta sobre B .

Las primitivas de ω son de la forma $f + k$, $k \in \mathbb{R}$.

$\boxed{p = 2}$ Sea $\omega = P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$, de clase C^1 sobre U y supongamos que ω es cerrada sobre U : $d\omega = \mathbf{0}$ i.e. $\text{div}(P, Q, R) = 0$, entonces $\forall B = \prod_{i=1}^3 [a_i, b_i] \subset U$, existe una aplicación $f = (f_1, f_2, f_3): B \rightarrow \mathbb{R}^3$, de clase C^2 sobre B , tal que $\text{rot } f = (P, Q, R)$.

Así, la forma diferencial de grado 1, $\varphi = f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz$ es una primitiva de ω sobre B , ($d\varphi = \omega$) y ω es exacta sobre B .

Todas las primitivas de ω sobre B son de la forma $\varphi + d\eta$, donde η es una forma de grado 0 de clase C^2 sobre B .

$\boxed{p = 3}$ Sea $\omega = P dx \wedge dy \wedge dz$ de clase C^1 sobre U , vamos a probar que es exacta, es decir que existe una forma diferencial φ de grado 2 y de clase C^2 sobre U :

$$\varphi = P_1 dy \wedge dz + P_2 dz \wedge dx + P_3 dx \wedge dy,$$

tal que $d\varphi = \omega$. Definamos $f = (f_1, f_2, f_3): U \rightarrow \mathbb{R}^3$, entonces debemos tener $\text{div } f = P$.

Una solución particular f_0 de esta ecuación es $f_0 = (P_1, 0, 0)$, con $P_1(x, y, z) = \int_a^x P(t, y, z) dt$, es decir la forma diferencial $\varphi = \left(\int_a^x P(t, y, z) dt \right) dy \wedge dz$ es una primitiva de ω sobre B , por lo tanto ω es exacta sobre U .

Todas las primitivas de ω son de la forma $\varphi = \left(\int_a^x P(t, y, z) dt \right) dy \wedge dz + d\eta$, donde η es una forma diferencial de grado 1 de clase C^2 sobre U .

Ejemplo A.3.1 Sean $\omega_1 = (x + y^2) dx + (zy) dy + e^{xyz} dz$ y $\omega_2 = \text{sen } y dx + \text{sen } x dy$ formas diferenciales de grado 1, entonces $\omega_1 + \omega_2 = (x + y^2 + \text{sen } y) dx + (zy + \text{sen } x) dy + e^{xyz} dz$.

Si $f(x, y, z) = x$, entonces $f\omega_2 = x \text{sen } y + x \text{sen } x dy$.

Ejemplo A.3.2

- i) Verificar que $dx \wedge dy dz = dx dy dz$.
- ii) Si $\omega = x dx + y dy$ y $\eta = zy dx + xz dy + xy dz$, determinar $\omega \wedge \eta$.

i) En efecto, $dx \wedge dy \wedge dz = dx \wedge (dy \wedge dz) = dx \wedge dy \wedge dz = dx \wedge dy \wedge dz$.

$$\begin{aligned} \text{ii) } \omega \wedge \eta &= (x dx + y dy) \wedge (zy dx + xz dy + xy dz) \\ &= (x dx + y dy) \wedge zy dx + (x dx + y dy) \wedge xz dy + (x dx + y dy) \wedge xy dz \\ &= \cancel{xyz dx \wedge dx} + zy^2 dy \wedge dx + x^2 z dx \wedge dy + \cancel{xyz dy \wedge dy} + x^2 y dx \wedge dz + xy^2 dy \wedge dz \\ &= (x^2 z - zy^2) dx \wedge dy - x^2 y dz \wedge dx + xy^2 dy \wedge dz. \end{aligned}$$

Ejemplo A.3.3 Si $\omega = x dx - y dy$ y $\eta = x dy \wedge dz + z dx \wedge dy$, calcular $\omega \wedge \eta$.

$$\begin{aligned} \omega \wedge \eta &= (x dx - y dy) \wedge (x dy \wedge dz + z dx \wedge dy) \\ &= (x dx) \wedge (x dy \wedge dz) + x dx \wedge (z dx \wedge dy) - y dy \wedge (x dy \wedge dz) - y dy \wedge (z dx \wedge dy) \\ &= x^2 dx \wedge dy \wedge dz + xz \cancel{dx \wedge dx \wedge dy} - xy \cancel{dy \wedge dy \wedge dz} + yz \cancel{dy \wedge dx \wedge dz} \\ &= x^2 dx \wedge dy \wedge dz = x^2 dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

Ejemplo A.3.4 Sea $\omega = P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy$ una forma diferencial de grado 1, de clase C^1 , en algún abierto $U \subset \mathbb{R}^3$, determinar $d\omega$.

$$\begin{aligned} d\omega &= d(P dx + Q dy) = d(P \wedge dx + Q \wedge dy) = dP \wedge dx + P \wedge d(dx) + dQ \wedge dy + Q \wedge d(dy) \\ &= dP \wedge dx + dQ \wedge dy = \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy + \frac{\partial Q}{\partial z} dz \right) \wedge dy \\ &= \frac{\partial P}{\partial x} \cancel{dx \wedge dx} + \frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial P}{\partial z} dz \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial Q}{\partial y} \cancel{dy \wedge dy} + \frac{\partial Q}{\partial z} dz \wedge dy \\ &= -\frac{\partial P}{\partial y} dx \wedge dy + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \wedge dx - \frac{\partial Q}{\partial z} dy \wedge dz \\ &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \wedge dx - \frac{\partial Q}{\partial z} dy \wedge dz. \end{aligned}$$

Ejemplo A.3.5 Si $\eta = F dx dy + G dy dz + H dz dx$ es de clase C^1 , determinar $d\eta$.

$$\begin{aligned} \text{Se tiene que } d\eta &= d(F dx dy) + d(G dy dz) + d(H dz dx) \\ &= d(F \wedge dx dy) + d(G \wedge dy dz) + d(H \wedge dz dx) \\ &= dF \wedge (dx dy) + dG \wedge (dy dz) + dH \wedge (dz dx), \end{aligned}$$

pues $d(dx dy) = d(dy dz) = d(dz dx) = 0$. Además:

$$\begin{aligned} d\eta &= \left(\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz \right) \wedge dx \wedge dy + \left(\frac{\partial G}{\partial x} dx + \frac{\partial G}{\partial y} dy + \frac{\partial G}{\partial z} dz \right) \wedge dy \wedge dz \\ &\quad + \left(\frac{\partial H}{\partial x} dx + \frac{\partial H}{\partial y} dy + \frac{\partial H}{\partial z} dz \right) \wedge dz \wedge dx \\ &= \frac{\partial F}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy + \frac{\partial G}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial H}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dx \\ &= \frac{\partial F}{\partial z} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial G}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial H}{\partial y} dx \wedge dy \wedge dz \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} \right) dx \wedge dy \wedge dz = \left(\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} \right) dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

Ejemplo A.3.6 Consideremos la forma diferencial de grado 2 en \mathbb{R}^3 definida por:

$$\omega = x f(x) dy \wedge dz + 3y f(x) dz \wedge dx - 4z dx \wedge dy, \text{ con } f \in C^1 \text{ en } \mathbb{R}.$$

- i) Determinar f para que ω sea cerrada.
 ii) Determinar en el caso i), las primitivas de ω .

Notemos que f es de clase C^1 , entonces la forma diferencial ω es de clase C^1 en \mathbb{R}^3 .

- i) Así se tiene que:

$$\begin{aligned} d\omega &= d(x f(x)) \wedge dy \wedge dz + 3d(y f(x)) \wedge dz \wedge dx - 4dz \wedge dx \wedge dy \\ &= (x f'(x) + f(x)) dx \wedge dy \wedge dz + 3f(x) dy \wedge dz \wedge dx - 4dx \wedge dy \wedge dz \\ &= (x f'(x) + 4f(x) - 4) dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

y tenemos $x f'(x) + 4f(x) - 4 = 0$, por lo que $f(x) = \frac{\lambda}{x^4} + 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

La función f es de clase C^1 sobre \mathbb{R} , entonces $\lambda = 0$. Así $f(x) = 1$.

- ii) En este caso $\omega = x dy \wedge dz + 3y dz \wedge dx - 4z dx \wedge dy$, por lo que ω es de clase C^∞ . De esta forma ω admite una primitiva en \mathbb{R}^3 del tipo $\varphi = P dx + Q dy + R dz$, donde $\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = x$, $\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 3y$, $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -4z$.

Si buscamos una primitiva particular con $R = 0$, se tiene que $Q = -xz$, $P = 3yz$, con lo cual tenemos la solución particular $\varphi_0 = 3yz dx - xz dy$.

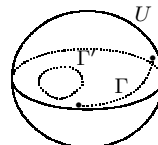
Las primitivas son de la forma $\varphi = 3yz dx - xz dy + d\eta$, η es de clase C^2 .

Verifiquemos que $d\varphi = \omega$. En efecto;

$$\begin{aligned} d\varphi &= 3d(yz) \wedge dx - d(xz) dy + d^2\eta = 3z dy \wedge dx + 3y dz \wedge dx - z dx \wedge dy - x dz \wedge dy \\ &= x dy \wedge dz + 3y dz \wedge dx - 4z dx \wedge dy = \omega. \end{aligned}$$

A.4 Aplicaciones de las formas diferenciales

Consideremos la forma diferencial de grado 1, $\omega = P dx + Q dy + R dz$ sobre $U \subset \mathbb{R}^3$ abierto y sea Γ una curva simple orientada contenida en U , entonces:



mfd6.tex

$$\int_{\Gamma} \omega = \int_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz.$$

Sea $r: [a, b] \rightarrow U$ tal que $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ una parametrización que preserva la orientación de Γ , entonces:

$$\int_{\Gamma} \omega = \int_a^b [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)] dt$$

y la integral no depende de la parametrización de Γ .

Similarmemente, sea una forma diferencial de grado 2; $\omega = P dx dy + Q dy dz + R dz dx$, sobre $U \subset \mathbb{R}^3$ abierto y sea S una superficie orientada contenida en U , de modo que Φ es una parametrización de S i.e. $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow U$, $\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in S$, entonces:

$$\begin{aligned} \iint_S \omega &= \iint_S P dx dy + Q dy dz + R dz dx \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} \left[P(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| + Q(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \left| \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right| + \right. \\ &\quad \left. H(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \left| \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right| \right] du dv, \end{aligned}$$

y la integral no depende de la parametrización Φ .

Finalmente, sea $\omega = f(x, y, z) dx dy dz$ una forma diferencial de grado 3 en un abierto $U \subset \mathbb{R}^3$ y sea V una región elemental de modo que $V \subset U$, entonces:

$$\iiint_V \omega = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz.$$

A.5 Elemento de área de una integral doble

En el cálculo de la integral doble $\iint_S f(x, y) d\omega$, de manera natural denotamos el elemento de área $d\omega = dx dy = dx \wedge dy$, con $S \subset V$ abierto de \mathbb{R}^3 . No se debe creer que el producto $dx dy$ es el producto de dos diferenciales, ya que $dx dy$ en realidad representa $dx \wedge dy$.

Si $\phi: U \rightarrow V$ es un difeomorfismo de clase C^1 tal que $\phi^{-1}(S) \subset U$, de modo que $\phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$, con Jacobiano $J_\phi = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$, entonces:

$$dx \wedge dy = \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) \wedge \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right) = J_\phi(u, v) du \wedge dv.$$

Es importante usar como elemento de área $d\omega$ a $|dx \wedge dy|$ por lo que la integral doble se escribirá $\iint_S f(x, y) |dx \wedge dy|$.

A.6 Fórmula de Green

Interpretemos en esta óptica la fórmula de Green. Sea R una región acotada en el plano xy , conexa de frontera a Γ contenida en un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ y consideremos $\omega = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ una forma diferencial de grado 1 y de clase C^1 , su diferencial exterior es $d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy$, por lo que:

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy = \int_{\Gamma} P dx + Q dy.$$

El elemento de área $dx \wedge dy$ aparece sin valor absoluto, pues la fórmula de Green considera conjuntos R con frontera orientada Γ . Si se intercambia x, y la orientación cambia y la integral cambia de signo.

Denotando ∂R la frontera de R que es Γ , la fórmula de Green se escribe:

$$\int_{\partial R} \omega = \iint_R d\omega.$$

Notemos que $d\omega$ es una forma diferencial de grado 2 sobre U y R es una superficie en \mathbb{R}^3 parametrizada por $\Phi: R \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\Phi(x, y) = (x, y, 0)$. Como P y Q no son funciones de z , $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial Q}{\partial z} = 0$, por lo que la igualdad $\int_{\partial R} \omega = \iint_R d\omega$ se transforma en $\int_{\partial R} P dx + Q dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy$.

La segunda integral es una integral doble de una forma diferencial de grado 2.

La primer integral es una integral curvilínea de una forma diferencial de grado 1, primitiva de la anterior.

A.7 Integral de superficie de una forma diferencial de grado dos

Sea S una superficie orientada de representación paramétrica $\Phi: R \rightarrow S$ de clase C^1 y sea $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función continua sobre $U \subset \mathbb{R}^3$ abierto, tal que $S \subset U$, el flujo de f a través de S es:

$$\iint_S f \cdot \boldsymbol{\eta} dS = \iint_R f(\Phi(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) du \wedge dv.$$

Consideremos $\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, en el punto (u, v) las coordenadas de:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) du \wedge dv = \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) du \wedge dv$$

i.e. $\boldsymbol{\eta} dS = (dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy)$.

Si $f = (P, Q, R)$, se tiene que $f \cdot \boldsymbol{\eta} dS = P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$ es una forma diferencial de grado dos:

$$\iint_S f \cdot \boldsymbol{\eta} dS = \iint_S P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy.$$

Ejemplo A.7.1 Calcular la integral de la forma diferencial de grado dos:

$$\omega = x dy \wedge dz + y dz \wedge dx - 2z dx \wedge dy,$$

sobre la superficie S , cono de revolución de representación $\phi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$, con $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi$.

Sobre la superficie S se tiene $dx = \cos v du - u \sin v dv$, $dy = \sin v du + u \cos v dv$, $dz = du$, por lo que:

$$dy \wedge dz = -u \cos v du \wedge dv, \quad dz \wedge dx = -u \sin v du \wedge dv, \quad dx \wedge dy = u du \wedge dv,$$

y en consecuencia $\omega = (-u^2 \cos^2 v - u^2 \sin^2 v - 2u^2) du \wedge dv = -3u^2 du \wedge dv$.

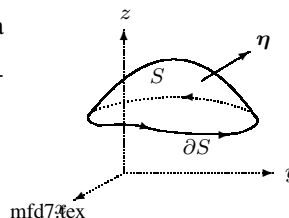
Finalmente:

$$\iint_S \omega = -3 \iint_S u^2 du \wedge dv = -3 \int_0^{2\pi} \int_0^1 u^2 du dv = -2\pi \int_0^1 3u^2 du = -2\pi.$$

A.8 Fórmula de Stokes

Sea S una superficie orientada en \mathbb{R}^3 , con frontera formada por una curva cerrada simple ∂S orientada según la frontera de S . Consideremos una forma diferencial ω de grado 1:

$$\omega = P dx + Q dy + R dz,$$



de clase C^1 sobre un abierto $U \subset \mathbb{R}^3$, tal que $S \subset U$, la diferencial exterior de ω es:

$$\begin{aligned} d\omega &= dP \wedge dx + dQ \wedge dy + dR \wedge dz \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy, \end{aligned}$$

entonces:

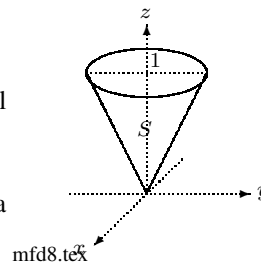
$$\iint_S d\omega = \int_{\partial S} \omega$$

Ejemplo A.8.1 Retomando el ejemplo anterior $\omega = x dy \wedge dz + y dz \wedge dx - 2z dx \wedge dy$, su diferencial $d\omega = dx dy dz + dy \wedge dz \wedge dx - 2dz \wedge dx \wedge dy = 0$, por lo que ω es cerrada y existe una forma diferencial φ de grado 1, de clase C^∞ sobre \mathbb{R}^3 tal que $d\varphi = \omega$.

Para calcular φ , se verifica que el campo $(x, y, -2z)$ deriva del vector potencial $(yz, -xz, 0)$, por lo que $\varphi = yz dx - xz dy$.

La superficie S tiene frontera ∂S , el círculo $x = \cos v, y = \sin v, z = 1$ y la fórmula de Stokes da:

$$\iint_S \omega = \iint_S d\varphi = \int_{\partial S} \varphi = \int_{\partial S} z(y dx - x dy) = - \int_0^{2\pi} dv = -2\pi.$$



A.9 Fórmula Gauss–Ostrogradski

Sea V una región acotada contenida en un abierto $U \subset \mathbb{R}^3$, con frontera orientada ∂V y sea ω una forma diferencial de grado 2, $\omega = P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$, de clase C^1 sobre el abierto U .

La diferencial exterior de ω es una forma diferencial de grado tres:

$$\begin{aligned} d\omega &= dP \wedge dy \wedge dz + dQ \wedge dz \wedge dx + dR \wedge dx \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz, \end{aligned}$$

entonces la fórmula de Gauss-Ostrogradski se escribe:

$$\iiint_V d\omega = \iint_{\partial V} \omega.$$

La primera integral es una integral triple de una forma diferencial de grado tres y el segundo miembro es la integral de superficie de una forma diferencial de grado dos, primitiva de la anterior.

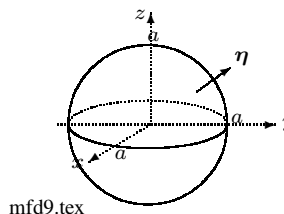
Ejemplo A.9.1 Calcular la integral $\iint_S 2x dy \wedge dz + 5y dz \wedge dx - 4z dx \wedge dy$, donde S es la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ (V) orientada hacia el exterior ($S = \partial V$).

Es claro que $P = 2x, Q = 5y, R = -4z$, por lo tanto:

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 2 + 5 - 4 = 3$$

y la fórmula de Gauss-Ostrogradski nos da:

$$\iint_{\partial V} \omega = \iiint_V 3 dx \wedge dy \wedge dz = 3 \cdot \frac{4}{3} \pi a^3 = 4\pi a^3.$$



Observación La analogía entre los teoremas enunciados es bien clara. Las formulaciones han sido diversas; se han usado divergencia en regiones de \mathbb{R}^3 (Gauss-Ostrogradski), rotacional para superficies

en \mathbb{R}^3 (Stokes) y regiones en \mathbb{R}^2 (Green).

Se ha usado únicamente el concepto de diferencial exterior de una forma diferencial para los tres teoremas. Sin embargo se puede enunciar un sólo teorema para los tres casos introduciendo la noción de variedad diferencial.

Se entenderá por una 2-variedad orientada con frontera en \mathbb{R}^3 , una superficie cuya frontera sea una curva cerrada simple orientada.

Similarmente una 3-variedad orientada con frontera en \mathbb{R}^3 , es una región en \mathbb{R}^3 de modo que su frontera es una superficie orientada.

Se puede enunciar el siguiente teorema unificado que lo llamamos Teorema de Stokes.

Teorema A.9.1 Teorema de Stokes *Sea M una k -variedad orientada en \mathbb{R}^3 ($k = 2$ o 3) contenida en un abierto $U \subset \mathbb{R}^3$, con frontera ∂M orientada y sea ω una forma diferencial de grado $k - 1$ sobre U , entonces:*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Apéndice B

Funciones eulerianas

B.1 La función gama Γ

Se llama integral euleriana de segunda especie la integral

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Esta integral es función del parámetro x , converge en infinito y cero si $x > 0$. β Propiedades

- $\Gamma(x)$ es continua.
- $\Gamma(x)$ es derivable y $\Gamma'(x) = \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} t^{x-1} e^{-t} dt$
- $\Gamma(1) = 1, \Gamma(2) = 1, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$
- $\Gamma(n+1) = n!$ si $n \in \mathbb{N}^*$
- El cambio de variable $t = u^2$ transforma la función a $\Gamma(x) = 2 \int_0^{\infty} u^{2x-1} e^{-u^2} du$ y en particular $\Gamma(\frac{1}{2}) = 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$.
- Si $n \in \mathbb{N}$ la fórmula de recurrencia permite calcular

$$\Gamma(x + \frac{1}{2}) = 2 \int_0^{\infty} u^{2x} e^{-u^2} du = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi} = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}.$$

- $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} p\pi}$.
- $|\Gamma(ix)|^2 = \frac{\pi}{x \operatorname{sen} \pi x}$.
- $\Gamma(2x)\sqrt{\pi} = 2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma(x + \frac{1}{2})$.
- $\Gamma(x)\Gamma(x + \frac{1}{m})\Gamma(x + \frac{2}{m}) \cdots \Gamma(x + \frac{m-1}{m}) = m^{\frac{1}{2}-mx} (2\pi)^{\frac{1}{2}(m-1)} \Gamma(mx)$.

- Otras definiciones de la función Γ :

$$\Gamma(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k}{(x+1)(x+2)\cdots(x+k)} k^x$$

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{m}\right) e^{-x/m}, \quad \gamma \text{ es la constante de Euler.}$$

- Derivada de la función $\Gamma(x)$:

$$\Gamma'(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} \ln x dx = -\gamma$$

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x+1}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x+n-1}\right) + \cdots$$

- **Fórmula de Sterling** $\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi x} x^x e^{-x} \left(1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{288x^2} - \frac{139}{51840x^3} + \cdots\right)$
Si $x \gg 0$, $\Gamma(x+1) \approx \sqrt{2\pi x} x^x e^{-x}$ i.e. $n \gg 0$, $n! \approx \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$.

B.2 La función beta β

La función euleriana β está definida por la integral

$$\beta(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt.$$

La integral existe si $p > 0$ y $q > 0$. β Propiedades

- $\beta(p, q) = \beta(q, p)$. En efecto, basta efectuar el cambio de variable $u = 1 - t$.
- Si $t = \sin^2 \theta$, $\beta(p, q) = 2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2p-1} \theta \cos^{2q-1} \theta d\theta$.
- Si $t = \frac{z}{z+1}$, $\int_0^{\infty} z^{p-1} (1+z)^{p+q} dz$.
- La función β se reduce a la función Γ :

$$\beta(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

En efecto, consideremos el producto $\Gamma(p)\Gamma(q)$ como una integral doble, es decir

$$I = \iint_{\Omega} t^{p-1} e^{-t} u^{q-1} e^{-u} dt du,$$

donde el dominio Ω es el primer cuadrante del plano u, t . Consideremos el cambio de variable $t+u = \alpha$, $\frac{t}{u} = \beta$, es decir $t = \frac{\alpha\beta}{1+\beta}$, $u = \frac{\alpha}{1+\beta}$ que va de Ω a Ω' , con Ω' el dominio $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

El Jacobiano de la transformación viene dado por $J = \frac{\alpha}{(1+\beta)^2}$, por lo que:

$$I = \iint_{\Omega'} \frac{\alpha^{p-1} \beta^{p-1}}{(1+\beta)^{p-1}} \frac{\alpha^{q-1}}{(1+\beta)^{q-1}} e^{-\alpha} \frac{\alpha}{(1+\beta)^2} d\alpha d\beta = \int_0^{\infty} \frac{\beta^{p-1}}{(1+\beta)^{p+q}} d\beta \int_0^{\infty} \alpha^{p+q-1} e^{-\alpha} d\alpha,$$

es decir

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \int_0^\infty \frac{\beta^{p-1}}{(1+\beta)^{p+q}} d\beta.$$

Efectuando el cambio de variable $1 + \beta = \frac{1}{1-t}$ o sea $\beta = \frac{t}{1-t}$ se tiene

$$\int_0^\infty \frac{\beta^{p-1}}{(1+\beta)^{p+q}} d\beta = \beta(p, q).$$

• Si $0 < p < 1$ se tiene $\int_0^\infty \frac{\beta^{p-1}}{1+\beta} d\beta = \frac{\pi}{\operatorname{sen} p\pi}$.

• $\beta(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \pi$.

• Se puede expresar la integral $I_{m,n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^m x \cos^n x dx$ por medio de la función beta.

En efecto, consideremos $u = \operatorname{sen}^2 x$, $du = 2 \operatorname{sen} x \cos x dx$, entonces:

$$\begin{aligned} I_{m,n} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^m x \cos^n x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen}^2 x)^{\frac{m-1}{2}} (1 - \operatorname{sen}^2 x)^{\frac{n-1}{2}} 2 \operatorname{sen} x \cos x dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 u^{\frac{m-1}{2}} (1-u)^{\frac{n-1}{2}} du = \frac{1}{2} \int_0^1 u^{\frac{m+1}{2}-1} (1-u)^{\frac{n+1}{2}-1} du = \frac{1}{2} \beta\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right). \end{aligned}$$

B.3 Fórmula de Wallis

Usando el cambio de variable $x = \frac{\pi}{2} - u$ se tiene que $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$ ¹. Además:

$$n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x dx = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{n-2} x dx - \operatorname{sen}^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \implies nI_n = (n-1)I_{n-2} \implies I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}. \text{ De esta forma tenemos:}$$

$$I_n = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} I_0 = \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \frac{\pi}{2}, & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3} I_1 = \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{2}{3}, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

¹ **John Wallis (1616-1703)** Matemático inglés nacido en Ashford y fallecido en Oxford. John Wallis fue el más importante de los matemáticos ingleses inmediatamente anteriores a Newton. Recibió las sagradas órdenes sacerdotales, pero dedicó la mayor parte de su tiempo a su profesión de matemático. Wallis escribió extensos trabajos de matemáticas, siendo el primero en extender el uso de los exponentes a los números negativos y a las fracciones. También utilizó por primera vez el símbolo con el que actualmente se designa al infinito. Además fue el primero en expresar geoméricamente los números imaginarios y también fue el primero en escribir una historia seria de las matemáticas. Escribió un importante tratado sobre geometría analítica, en el que se culmina el proceso de aritmetización de las secciones cónicas que había iniciado Descartes veinte años antes. También trató de introducirse en el análisis, pero tuvo la desgracia de quedar a la sombra de su joven contemporáneo Newton, quien se entregó de lleno al cálculo.

Bibliografía

- [1] Archinard Gabriel, Guerrien Bernard 1988 *Analyse mathématique pour économistes*, 3^a édition, Editorial Economica, Paris.
- [2] Apostol Tom 1977 *Análisis Matemático*, Editorial Reverté, Barcelona.
- [3] Apostol Tom, 1967 *Calculus*, Volumen II, Blaisdell Publishing Company, Massachusetts.
- [4] Attali P., Guillard J., Tissier A. 1995 *Analyse 2: Collection exercices et problèmes*, Editions Breal, Rosny.
- [5] Attali P., Guillard J., Tissier A. 1993 *Géométrie 1: Collection exercices et problèmes*, Editions Breal, Rosny.
- [6] Attali P., Guillard J., Tissier A. 1992 *Géométrie 2: Collection exercices et problèmes*, Editions Breal, Rosny.
- [7] Bass J. 1970 *Curso de matemáticas*, Tomo I, Editorial Toray–Masson, Barcelona
- [8] Berman G.N. 1983 *Problemas y ejercicios de análisis matemático*, 2^a edición, Editorial MIR, Moscú.
- [9] Bronshtein I., Semendiaev K. 1982 *Manual de matemáticas para ingenieros y estudiantes*, 4^a edición, Editorial MIR, Moscú.
- [10] Cartan Henri 1997 *Cours de Calcul différentiel*, Editorial Hermann, Paris.
- [11] Churchill R.V., Brown G.H. 1992 *Variable compleja y aplicaciones*, 5^a edición, McGraw-Hill, Madrid
- [12] De Castro Korgi, Rodrigo 2003 *El universo L^AT_EX*, Editorial Panamericana, Bogotá, Colombia.
- [13] Del Castillo F. 1980 *Análisis matemático*, Vol.2, Editorial Alhambra, Madrid.
- [14] Demidovich Boris P. 1976 *5000 Problemas de Análisis Matemático* Editorial Paraninfo, Madrid.
- [15] Demidovich Boris P. 1973 *Problemas y ejercicios de análisis matemático*, 4^a edición, Editorial MIR, Moscú.
- [16] Dixmier J. 1976 *Cours de Mathématiques*, Editorial Dunod, Paris

- [17] Douchet Jacques, Zwahlen Bruno 1983 *Calcul différentiel et intégral. Fonctions réelles d'une variable réelle*, Vol.1, Editorial Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, Suisse.
- [18] Douchet Jacques, Zwahlen Bruno 1987 *Calcul différentiel et intégral. Fonctions réelles d'une variable réelle, Exercices résolus*, Vol.3, Editorial Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, Suisse.
- [19] Douchet Jacques, Zwahlen Bruno 1986 *Calcul différentiel et intégral. Fonctions réelles de plusieurs variables réelles*, Vol.2, Editorial Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, Suisse.
- [20] Douchet Jacques, Zwahlen Bruno 1989 *Calcul différentiel et intégral. Fonctions réelles de plusieurs variables réelles, Exercices résolus*, Vol.4, Editorial Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, Suisse.
- [21] Doneddu A. 1981 *Fonctions vectorielles. Series. Équations différentielles*, Tome 5, 2^a édition, Vuibert, Paris.
- [22] Doneddu A. 1981 *Géométrie différentielle. Intégrales multiples*, Tome 6, 2^a édition, Vuibert, Paris.
- [23] Efimov A., Demidovich Boris 1983 *Problemas de las matemáticas superiores*, Vol.1, Editorial MIR, Moscú.
- [24] Edwards Jr., C.H. 1973 *Advanced calculus of several variables*, Dover, New York.
- [25] Efimov A., Demidovich Boris 1983 *Problemas de las matemáticas superiores*, Vol.2, Editorial MIR, Moscú.
- [26] Fogiel M. 1994 *Handbook of Mathematical, Scientific and Engineering*, New Jersey.
- [27] Goossens Michel, Mittelbach Frank, Samarin Alexander 1994, *The L^AT_EX Companion*, Addison Wesley Publishing Company.
- [28] Goossens Michel, Rahtz Sebastian 1999, *The L^AT_EX Web Companion*, Addison Wesley Publishing Company.
- [29] Hobby John 1997, *The MetaPost System*.
- [30] Hobby John 1997, *Drawing Graphs with MetaPost*.
- [31] Hobby John 1998, *A User's Manual for MetaPost*.
- [32] Knuth, Donald 1986, *The METAFONTbook*, Addison Wesley Publishing Company.
- [33] Knuth, Donald 1995, *The T_EXbook*, Addison Wesley Publishing Company.

- [34] Krée P. 1969 *Introduction aux mathématiques et a leurs applications fondamentales*, Editorial Dunod, Paris.
- [35] Kreysig Erwin 1993 *Matemáticas avanzadas para ingeniería*, Vol 1, Limusa, México.
- [36] Lampion, Leslie 1994 *L^AT_EX: A document preparation system*, Addison Wesley Publishing Company, 2^a Edition.
- [37] Lang Serge 1990 *Introducción al Análisis Matemático*, Addison–Wesley Iberoamericana, Delaware.
- [38] Lang Serge 1994 *Calculus of several variables*, Springer–Verlag.
- [39] Lelong–Ferrand Jaqueline 1963 *Géométrie différentielle*, Masson, Paris.
- [40] Liret F., Zisman M. 1984 *Maths*, Tome 2, Editorial Dunod, Paris
- [41] Liret F., Zisman M. 1987 *Maths*, Tome 3, Editorial Dunod, Paris
- [42] Marsden J, Tromba A. 1991 *Cálculo vectorial*, 3^a edición, Addison Wesley Iberoamericana, Delaware.
- [43] Nikolsky S.M. 1977 *A course of Mathematical Analysis*, Vol.1, Editorial MIR, Moscú.
- [44] Nikolsky S.M. 1977 *A course of Mathematical Analysis*, Vol.2, Editorial MIR, Moscú.
- [45] Monier J.M. 1990 *Analyse: Exercices résolus*, Tome 1, Dunod, Paris.
- [46] Monier J.M. 1990 *Analyse: Exercices résolus*, Tome 2, Dunod, Paris.
- [47] Monier J.M. 1993 *Géométrie: Exercices résolus*, Dunod, Paris.
- [48] Monier J.M. 1997 *Analyse*, Tome 4, Dunod, Paris.
- [49] Monier J.M. 1997 *Géométrie*, Tome 7, Dunod, Paris.
- [50] Ohl Thorsten 1997, *EMP: Encapsulated METAPOST for L^AT_EX*.
- [51] Piskunov N. 1978 *Cálculo diferencial e integral*, Vol I, Editorial MIR,
- [52] Piskunov N. 1978 *Cálculo diferencial e integral*, Vol II, Editorial MIR, Moscú.
- [53] Quinet J. 1978 *Cours élémentaire de mathématiques supérieures, Géométrie, Tomo 5*, 6^a édition, Dunod, Paris.
- [54] Quinet J. 1996 *Cours élémentaire de mathématiques supérieures, Calcul intégral et séries, Tomo 3*, 6^a édition, Dunod, Paris.
- [55] Restrepo G. 1997 *Análisis en \mathbb{R}^n* , Editorial Universidad del Valle, Cali.
- [56] Reckdahl Keith *Using Imported Graphics un L^AT_EX2e*.
- [57] Ríbnikov K. 1987 *Historia de las matemáticas*, Editorial MIR, Moscú.

- [58] Ruskeepää, Heikki 1999, *Mathematica Navigator*, Academic Press.
- [59] Spiegel M.R. 1992 *Manual de fórmulas y tablas matemáticas*, Editorial McGraw-Hill, México.
- [60] Taylor A., Mann W. Robert 1989 *Fundamentos de cálculo avanzado*, Editorial Limusa, Mexico.
- [61] Tauvel, Patrice 1999 *Analyse complexe*, Dunod, Paris.