

Universidad de Costa Rica

Escuela de Matemática

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + \frac{h k}{1!1!} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) + \frac{k^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) + \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0, y_0) + \frac{h^2 k}{2!1!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x_0, y_0) + \frac{h k^2}{1!2!} \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x_0, y_0) + \frac{k^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x_0, y_0) + \dots + \sum_{n+m=p-1} \frac{h^m k^n}{m! n!} \frac{\partial^{p-1} f}{\partial x^m \partial y^n}(x_0, y_0) + \sum_{n+m=p} \frac{h^m k^n}{m! n!} \frac{\partial^p f}{\partial x^m \partial y^n}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k), \quad 0 < \theta < 1.$$

Serie: Cabécar

Cálculo diferencial en espacios vectoriales normados: funciones en varias variables



Editorial CIMPA



Prof. Jorge Poltronieri

2006

515.430.76

512.52

P772c Poltronieri Vargas, Jorge, 1952–

Cálculo diferencial en espacios vectoriales normados :
funciones en varias variables / Jorge Poltronieri. – [San José,
C.R.: CIMPA], 2004.

170p. : il. ; 27cm (Serie cabécar)

A la cabeza de la port: Universidad de Costa Rica,
Escuela de Matemática.

ISBN 9968-9979-8-6

1. ESPACIOS VECTORIALES. 2. CALCULO
DIFERENCIAL. 3. FUNCIONES DE VARIAS
VARIABLES. I. Título.

CIP/1428

CC/SIBDI.UCR

Cálculo diferencial en espacios vectoriales normados: funciones en varias variables

© Jorge Poltronieri Vargas, Catedrático

Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica.

Diagramación en \LaTeX realizada por el autor

Diseño y concepto de carátula realizada por el autor

Impreso en Costa Rica

San José, 2004

Contenidos

1	Topología en espacios vectoriales normados	1
1.1	Familias de conjuntos	1
1.1.1	Imágenes directas e inversas	1
1.1.2	Familias de conjuntos	1
1.2	Espacio vectorial normado	3
1.2.1	Definición de una norma sobre \mathbb{R}^n	3
1.2.2	Otras normas sobre \mathbb{R}^n	4
1.2.3	Espacios vectoriales con producto escalar	5
1.3	Abiertos y cerrados de E	7
1.3.1	Bolas abiertas y cerradas	7
1.3.2	Adherencia y puntos de acumulación	10
1.4	Sucesiones en E	12
1.4.1	Distancia	17
1.5	Conjuntos compactos de E	18
1.6	Producto de compactos	22
1.7	Funciones continuas	24
1.7.1	Funciones continuas y compactos	27
1.8	Continuidad uniforme	28
1.9	Aplicaciones lineales continuas	29
1.9.1	Matrices	32

1.9.2 Composición de aplicaciones lineales continuas	34
1.10 Aplicaciones multilineales continuas	38
1.11 Ejercicios	41
1.11.1 Generalidades	41
1.11.2 Normas	42
1.11.3 Topología de un espacio vectorial normado	43
1.11.4 Frontera	48
1.11.5 Partes densas	49
1.11.6 Puntos aislados	50
1.11.7 Puntos de acumulación	50
1.11.8 Convexidad	51
1.11.9 Distancia de un punto a una parte	51
1.11.10 Topología inducida	52
1.11.11 Sucesiones en un espacio vectorial normado	53
1.11.12 Continuidad	54
1.11.13 Homeomorfismos	55
1.11.14 Funciones Lipschitzianas	56
1.11.15 Completitud	57
1.11.16 Compacidad	59
1.11.17 Aplicaciones lineales	65
1.11.18 Espacio de matrices	67
1.11.19 Continuidad	68
2 Cálculo Diferencial en \mathbb{R}^n	73
2.1 Introducción	73
2.2 Derivadas Parciales	74
2.2.1 Derivadas Segundas	75
2.2.2 Derivadas direccionales	77

Contenidos	iii
2.3 El diferencial	77
2.3.1 Caso de una función diferenciable de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^p	79
2.3.2 Criterio suficiente de diferenciabilidad	81
2.4 Regla de la cadena para varias variables	82
2.4.1 Regla de la cadena para varias variables	84
2.4.2 Teorema de incrementos finitos	88
2.5 Teorema de la función implícita	91
2.5.1 Teorema de funciones implícitas para un sistema de ecuaciones	97
2.6 Fórmula de Taylor para funciones de varias variables	101
2.7 Diferenciabilidad en espacios de Banach	105
2.7.1 Convergencia de una sucesión de funciones diferenciables	107
2.7.2 Diferenciales de orden superior	108
2.8 Ejercicios	113
2.8.1 Diferenciabilidad	113
2.8.2 Regla de la cadena	119
2.8.3 Aplicaciones	121
2.8.4 Función implícita	123
2.8.5 Formas diferenciales	127
3 Máximos y mínimos de funciones en varias variables	131
3.1 Matrices simétricas y formas cuadráticas	131
3.1.1 Formas cuadráticas	132
3.2 Máximos y mínimos de funciones de varias variables	133
3.3 Extremos de una función de varias variables con restricciones	138
3.3.1 Multiplicadores de Lagrange	138
3.3.2 Condiciones de segundo orden	148
3.4 Extremos bajo restricciones en forma de desigualdades (Kuhn–Tucker)	157
3.5 Ejercicios	185

3.5.1	Extremos sin restricciones	185
3.5.2	Extremos con restricciones	188
	Bibliografía	193
	Indice	198

Capítulo 1

Topología en espacios vectoriales normados

1.1 Familias de conjuntos

1.1.1 Imágenes directas e inversas

Sea $f: E \rightarrow F$ una aplicación, si $A \subset E$ definimos $f(A) = \{f(x)/x \in A\}$. Si $B \subset F$ definimos $f^{-1}(B) = \{x \in E/f(x) \in B\}$. Recordemos que $A \subset f^{-1}(f(A))$ y $f(f^{-1}(B)) \subset B$ y que en general no siempre se da la igualdad.

1.1.2 Familias de conjuntos

Definición 1.1.1 Sean L y X dos conjuntos, sea $\mathcal{P}(X)$ el conjunto de subconjuntos de X ($\mathcal{P}(X)$ el conjunto de partes de X). Una familia de subconjuntos de X (de partes de X), es una aplicación $L \rightarrow \mathcal{P}(X)$ tal que $\lambda \mapsto A_\lambda$ y se denota por $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$, con $A_\lambda \subset X$ (o $A_\lambda \in \mathcal{P}(X)$), para cada $\lambda \in L$.

Ejemplo 1.1.1

1. Si $X = \mathbb{R}$, $L = [0, 1]$, definimos $A_\lambda = \{x \in \mathbb{R}/x \geq \lambda\}$.
2. Si $X = \mathbb{N}$, $L = \mathbb{N}$, definimos $A_n = \{x \in \mathbb{N}/x < 2n + 1\}$.

Reunión e intersección de familias

Sea $(A_i)_{i \in I}$ una familia de conjuntos de X (i.e. $A_i \subset X, \forall i \in I$), definimos:

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in X / x \in A_i, \forall i \in I\},$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in X / \exists i_o \in I \text{ tal que } x \in A_{i_o}\}.$$

Observación Si $I = \emptyset$, por definición escribimos $\bigcup_{i \in I} A_i = \emptyset$; $\bigcap_{i \in I} A_i = X$.

Proposición 1.1.1 Sean $(A_i)_{i \in I}$ una familia de partes de A , $(B_j)_{j \in J}$ una familia de partes de B y $f: A \rightarrow B$ una aplicación de A en B , entonces

1. $A \setminus \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (A \setminus A_i), \quad A \setminus \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (A \setminus A_i).$
2. $(\bigcup_{i \in I} A_i) \cap (\bigcup_{j \in J} B_j) = \bigcup_{j \in J} (\bigcup_{i \in I} (A_i \cap B_j)) = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J} (A_i \cap B_j) = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} A_i \cap B_j.$
3. $(\bigcap_{i \in I} A_i) \cup (\bigcap_{j \in J} B_j) = \bigcap_{j \in J} \bigcap_{i \in I} (A_i \cup B_j) = \bigcap_{i \in I} \bigcap_{j \in J} (A_i \cup B_j) = \bigcap_{(i,j) \in I \times J} A_i \cup B_j.$
4. $f(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} f(A_i).$
5. $f(\bigcap_{i \in I} A_i) \subset \bigcap_{i \in I} f(A_i).$
6. $f^{-1}(\bigcup_{j \in J} B_j) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(B_j).$
7. $f^{-1}(\bigcap_{j \in J} B_j) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(B_j).$
8. Si $I = \bigcup_{k \in K} I_k$ entonces $\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{k \in K} \bigcup_{i \in I_k} A_i.$

Demostración Las demostraciones se hacen aplicando mecánicamente las definiciones. Hagamos por ejemplo la parte 4.

Sea $y \in f(\bigcup_{i \in I} A_i)$, entonces $\exists x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ tal que $f(x) = y \implies \exists i_o \in I$ tal que $x \in A_{i_o}$ y $f(x) = y \implies y \in f(A_{i_o}) \implies y \in \bigcup_{i \in I} f(A_i).$

Similarmente si $y \in \bigcup_{i \in I} f(A_i) \implies \exists i_o$ tal que $y \in f(A_{i_o}) \implies \exists x \in A_{i_o}$ tal que $f(x) = y \implies x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ con $f(x) = y \implies y \in f(\bigcup_{i \in I} A_i).$

Haga las otras demostraciones como ejercicio.

1.2 Espacio vectorial normado

Sea E un espacio vectorial sobre \mathbb{R} , una *norma* sobre E , $\|\cdot\|: E \rightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación de E en \mathbb{R} tal que:

1. $\|\mathbf{x}\| \geq 0$, $\forall \mathbf{x} \in E$ y $\|\mathbf{x}\| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
2. $\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\|$, $\forall \mathbf{x} \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.
3. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$, $\forall \mathbf{x} \in E$, $\forall \mathbf{y} \in E$.

Un espacio vectorial provisto de una norma, se llama espacio vectorial normado y se denota por $(E, \|\cdot\|)$.

Ejemplo 1.2.1 \mathbb{R} con el valor absoluto es un espacio vectorial normado, $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Caso de \mathbb{R}^n Recordemos que \mathbb{R}^n es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} , con las operaciones usuales, es decir que si $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} + \mathbf{y} &= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \\ \lambda \mathbf{x} &= (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).\end{aligned}$$

1.2.1 Definición de una norma sobre \mathbb{R}^n

Sea $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, definimos $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$.

Proposición 1.2.1 Desigualdad de Schwarz¹

Sean $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$, donde $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} =$

¹**Hermann Amandus Schwarz (1843-1921)** Nace en Hermsdorf, Silesia (hoy Polonia) y muere en Berlín, Alemania. Schwarz comenzó en Berlín sus estudios en química, pero fue influenciado por Kummer y Weierstrass y se interesa en la geometría. Continuó estudiando en Berlín supervisado por Weierstrass hasta su doctorado (en 1864) sobre superficies mínimas (superficies de menor área), un problema típico del cálculo de variaciones, que estableció un puente entre la teoría de superficies mínimas y la teoría de funciones analíticas. En 1869 fue designado como profesor de matemáticas en el Eidgenössische Technische Hochschule en Zurich y en 1875, aceptó un puesto de Matemáticas en la Universidad de Göttingen. Schwarz dio un método alternativo para resolver el problema de Dirichlet que pronto llegó a ser una técnica usual. Schwarz contestó la pregunta de si una superficie mínima dada rinde realmente un área mínima. Una idea de este trabajo, en que él construyó una función que usa aproximaciones sucesivas, Emile Picard la usó para la prueba de la existencia para soluciones de ecuaciones diferenciales. Contiene también la desigualdad para la integral ahora conocido como “la desigualdad de Cauchy-Schwarz o de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz”. Creó métodos generales basado en su magnífica intuición geométrica. La desigualdad de Cauchy-Schwarz aparece en aritmética, geometría y en las formulaciones teóricas del trabajo de matemáticos tal como Bunyakovsky, Cauchy, Grassmann, von Neumann y Weyl.

$x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$ es el *producto escalar*.

Demostración $\forall \lambda \in \mathbb{R}, (x_i - \lambda y_i)^2 = x_i^2 - 2\lambda x_i y_i + \lambda^2 y_i^2 \geq 0, \forall i = 1, \dots, n$, por lo que:

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\lambda \sum_{i=1}^n x_i y_i + \lambda^2 \sum_{i=1}^n y_i^2 \geq 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

Para que una cuádrlica (en este caso $A - 2\lambda B + \lambda^2 C$) sea mayor que cero, su discriminante debe ser negativo. El discriminante de la cuádrlica (1.1) en λ es:

$$4 \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 - 4 \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \leq 0 \implies \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

i.e. $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$.

Proposición 1.2.2 La aplicación de $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$, es una norma sobre \mathbb{R}^n .

Demostración Es obvio que $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ y $\|\mathbf{x}\| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$ y que $\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\|$, si $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Demostremos la desigualdad triangular $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

Sea $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ y como $(x_i + y_i)^2 = x_i^2 + 2x_i y_i + y_i^2$,

$$\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2 = 2 \sum_{i=1}^n x_i y_i + \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2 \leq 2\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2,$$

por la proposición 1.2.1, entonces $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2$ y tomando raíz cuadrada se tiene $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

La norma definida en la proposición 1.2.2, se llama *norma euclídea*² sobre \mathbb{R}^n .

1.2.2 Otras normas sobre \mathbb{R}^n

Las aplicaciones $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $\|\mathbf{x}\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$,

$$\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|_1 \quad \mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|_\infty$$

$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$, si $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, son también normas sobre \mathbb{R}^n .

Normas equivalentes

²**Euclides** Nace en el año 365 a.C. en Alejandría, Egipto y muere alrededor del año 300 a.C. Muy poco se sabe con certeza de su vida. Probablemente, fue llamado a Alejandría en el año 300 a.C. Sin duda que la gran reputación de Euclides se debe a su famosa obra titulada "Los elementos geométricos", conocida simplemente por "Elementos". Tal es la importancia de esta obra que se ha usado como texto de estudios cerca de 2000 años. Esta obra de Euclides es la coronación de las investigaciones realizadas por los geómetras de Atenas, así como de sus antecesores. La forma que emplea fue la deductiva.

Dos normas $\| \cdot \|_a$ y $\| \cdot \|_b$ definidas en un espacio vectorial E , se dicen normas equivalentes si existen $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, tales que $\alpha \|x\|_a \leq \|x\|_b \leq \beta \|x\|_a$, $\forall x \in E$.

Proposición 1.2.3 *La norma euclídea, la norma $\| \cdot \|_1$ y la norma $\| \cdot \|_\infty$ definidas sobre \mathbb{R}^n son equivalentes.*

Demostración Puesto que:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|x\| \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|; \quad \|x\|_\infty \leq \|x\| \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty; \quad \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

se tiene el resultado.

1.2.3 Espacios vectoriales con producto escalar

Definición 1.2.1 *Sea E un espacio vectorial sobre \mathbb{R} , se llama producto escalar sobre E una aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:*

1. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
2. $\langle x, y_1 + y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \langle x, y_2 \rangle$
3. $\langle \lambda x, y \rangle = \langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
4. $\langle x, x \rangle > 0$, si $x \neq 0$ y $\langle 0, 0 \rangle = 0$.

Veamos primero que en todo espacio vectorial con producto escalar, se verifica la desigualdad de Schwarz:

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle, \quad \forall x, y \in E.$$

En efecto, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$0 \leq \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle,$$

por lo que el discriminante del polinomio de grado dos en λ debe satisfacer $\langle x, y \rangle^2 - \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \leq 0$.

La aplicación $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ define una norma sobre E .

1. $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = 0 \iff x = 0$

2. $\|\lambda \mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \lambda \mathbf{x}, \lambda \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = |\lambda| \|\mathbf{x}\|$
3. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \|\mathbf{y}\|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2$.

Así, se ha establecido que un espacio vectorial con producto escalar es un espacio vectorial normado. El espacio $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se denomina espacio pre-hilbertiano³.

Ejemplo 1.2.2 Sea $C([a, b], \mathbb{R})$ el conjunto de funciones continuas de $[a, b]$ en \mathbb{R} . Se define $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$, es un producto escalar.

En un espacio vectorial con producto escalar, la norma obtenida del producto escalar verifica la ley del paralelogramo:

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{y}\|^2,$$

ya que:

$$\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle.$$

En general, en un espacio vectorial normado no existe un producto escalar asociado a la norma. Una condición necesaria y suficiente, para que un producto escalar se pueda definir de la norma, es que satisfaga la ley del paralelogramo (verificarlo). En este caso, el producto escalar es de la forma:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \frac{1}{4}(\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2).$$

Ejemplo 1.2.3 Un ejemplo de espacio vectorial normado cuya norma no sale de un producto escalar, es $C([a, b], \mathbb{R})$ el conjunto de funciones continuas de $[a, b]$ en \mathbb{R} y

³**David Hilbert (1862-1943)** Matemático alemán nace en Königsberg y fallece en Göttingen. Durante el siglo XIX se puso de manifiesto, cada vez de una manera más evidente, que Euclides no había partido de conceptos patentes y que había supuesto muchas cosas sin especificarlas. Se hicieron esfuerzos para fijar un número mínimo de términos y definiciones básicas y de éstas deducir rigurosamente la estructura matemática completa. Esta es la ciencia axiomática y fueron Hilbert y Peano quienes la fundaron. Hilbert publicó en 1899 "Foundations of Geometry", en la que por primera vez se exponían satisfactoriamente una serie de axiomas de geometría. También probó que su sistema de axiomas era bastante completo, algo que los griegos habían admitido de los axiomas de Euclides, pero sin demostrarlo. Así completó el trabajo de Euclides sin efectuar cambios en la esencia, pero su fundamento pasó de intuitivo a lógico.

se toma la norma del extremo superior i.e. $\|f\| = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|$, ya que las funciones $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dadas por $f(x) = x - a$ y $g(x) = b - x$ no verifican la ley del paralelogramo. En efecto:

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2(b - a)^2 \neq 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2 = 4(b - a)^2.$$

1.3 Abiertos y cerrados de E

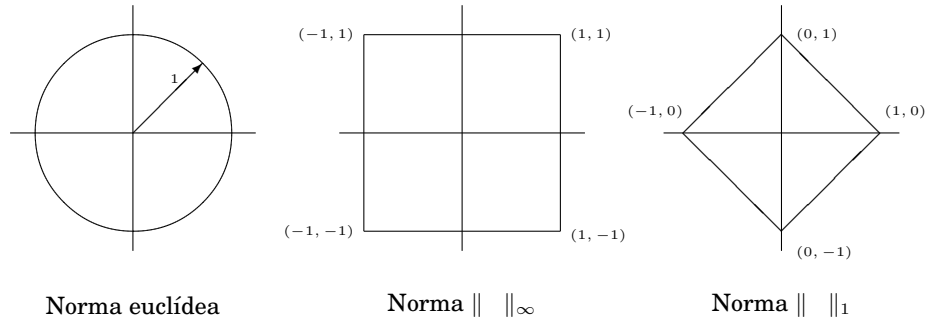
1.3.1 Bolas abiertas y cerradas

Definición 1.3.1 Sea E un espacio vectorial normado, sea $\rho \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$ y sea $\mathbf{x} \in E$. Llamaremos bola abierta de centro \mathbf{x} y radio ρ y la designamos por $B(\mathbf{x}, \rho)$ (o a veces por $B_\rho(\mathbf{x})$), al conjunto $B(\mathbf{x}, \rho) = \{\mathbf{y} \in E / \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \rho\}$.

Se llama bola cerrada de centro \mathbf{x} y radio ρ y se designa por $\bar{B}(\mathbf{x}, \rho)$, al conjunto definido por $\bar{B}(\mathbf{x}, \rho) = \{\mathbf{y} \in E / \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \rho\}$.

Ejemplo 1.3.1 En \mathbb{R} , la bola abierta $B(1, 2)$ es el intervalo $] -1, 3 [$ y $\bar{B}(1, 2)$ el intervalo $[-1, 3]$.

En \mathbb{R}^2 , la forma geométrica de la bola $\bar{B}((0, 0), 1)$, depende de la norma que se escoja.



Aunque puede usarse cualquier norma, generalmente nos referiremos a la norma euclídea.

Conjuntos abiertos de E

Definición 1.3.2 Un subconjunto $U \subset E$, se llama conjunto abierto o simplemente un abierto, si $\forall \mathbf{x} \in U$, existe $\rho > 0$ tal que $B(\mathbf{x}, \rho) \subset U$.

Ejemplo 1.3.2

En \mathbb{R} , los conjuntos $]0, 1[$ y $]1, +\infty[$ son abiertos.

En \mathbb{R}^2 , el conjunto $U = \{(x, y)/x > 0\}$ es abierto.

Proposición 1.3.1 *Toda bola abierta es un conjunto abierto.*

Demostración Sea $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, \rho) \implies \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \rho$, sea $r = \rho - \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| > 0$ y sea $\mathbf{z} \in B(\mathbf{y}, r)$, entonces:

$$\|\mathbf{z} - \mathbf{y}\| < r = \rho - \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \implies \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\| + \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < \rho,$$

pero $\|\mathbf{z} - \mathbf{x}\| = \|\mathbf{z} - \mathbf{y} + \mathbf{y} - \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\| + \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$, luego $\|\mathbf{z} - \mathbf{x}\| < \rho \implies \mathbf{z} \in B(\mathbf{x}, \rho)$.

Resulta que $B(\mathbf{y}, r) \subset B(\mathbf{x}, \rho)$, lo que demuestra que $B(\mathbf{x}, \rho)$ es un abierto.

Proposición 1.3.2 *Sea E espacio vectorial normado, entonces tenemos las siguientes propiedades:*

1. E y \emptyset son abiertos.
2. Toda reunión de abiertos es un abierto.
3. Toda intersección finita de abiertos es un abierto.

Demostración

1. Es evidente.
2. Sea $(O_i)_{i \in I}$ una familia de abiertos de E , sea $\mathbf{x} \in \bigcup_{i \in I} O_i$, entonces existe $i_0 \in I$ tal que $\mathbf{x} \in O_{i_0}$ y como O_{i_0} es abierto existe $B(\mathbf{x}, \rho) \subset O_{i_0}$, o sea $B(\mathbf{x}, \rho) \subset \bigcup_{i \in I} O_i$, lo que demuestra que $\bigcup_{i \in I} O_i$ es abierto.
3. Sean O_1, O_2, \dots, O_n , n abiertos y sea $\mathbf{x} \in O_1 \cap O_2 \cap \dots \cap O_n \implies \mathbf{x} \in O_k$, para $k = 1, \dots, n$, entonces existe $\rho_k > 0$ tal que $B(\mathbf{x}, \rho_k) \subset O_k$, para $k = 1, \dots, n$.

Sea $\rho = \min\{\rho_1, \dots, \rho_n\}$, entonces $\rho > 0$ y se tiene $B(\mathbf{x}, \rho) \subset B(\mathbf{x}, \rho_k) \subset O_k, \forall k = 1, \dots, n$, o sea $B(\mathbf{x}, \rho) \subset O_1 \cap \dots \cap O_n$.

Conjuntos cerrados de E

Definición 1.3.3 Un subconjunto $F \subset E$ se llama cerrado, si $E \setminus F$ es abierto.

Ejemplo 1.3.3 En \mathbb{R} , $[-1, 0]$, $[1, +\infty[$, \mathbb{N} son cerrados.

Puede haber conjuntos que no son *ni abiertos, ni cerrados o que son abiertos y cerrados*, por ejemplo en \mathbb{R} , $[0, 1[$ no es *ni abierto, ni cerrado*. \mathbb{R} es abierto y cerrado.

Proposición 1.3.3 En E tenemos las siguientes propiedades:

1. E y \emptyset son cerrados.
2. Toda unión finita de cerrados es un cerrado.
3. Toda intersección de cerrados es un cerrado.

Demostración

1. Como $E \setminus E = \emptyset$ y \emptyset es abierto, por la proposición 1.3.2 se tiene que E es cerrado. Similarmente para el conjunto vacío \emptyset .
2. Sean F_1, \dots, F_k , k cerrados, entonces $E \setminus (F_1 \cup \dots \cup F_k) = (E \setminus F_1) \cap \dots \cap (E \setminus F_k)$, pero cada $E \setminus F_k$ es abierto, entonces por la proposición 1.3.2 resulta que $E \setminus (F_1 \cup \dots \cup F_k)$ es abierto, o sea $F_1 \cup \dots \cup F_k$ es cerrado.
3. Similarmente, sea $(F_j)_{j \in J}$ una familia de cerrados, $E \setminus \bigcap_{j \in J} F_j = \bigcup_{j \in J} (E \setminus F_j)$ y como cada $E \setminus F_j$ es abierto, resulta que la unión es un abierto por la proposición 1.3.2 y $\bigcap_{j \in J} F_j$ es un cerrado.

Definición 1.3.4 Sea E un espacio vectorial normado y sea $A \subset E$, definimos el interior de A y lo denotamos $\overset{\circ}{A}$, como el mayor abierto contenido en A i.e. si O es un abierto de E tal que $O \subset A \implies O \subset \overset{\circ}{A}$.

Recordemos que una familia de abiertos \mathfrak{T} de E es una topología sobre E si:

- $\emptyset, E \in \mathfrak{T}$,

- Si $(O_i)_{i \in I} \subset \mathfrak{T}$ (es una familia de abiertos), $\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathfrak{T}$.
- Si $(O_i)_{i=1, \dots, m}$ es una familia finita de abiertos, $\bigcap_{i=1}^m O_i \in \mathfrak{T}$.

Al par (E, \mathfrak{T}) lo llamamos espacio topológico.

Definición 1.3.5 Sea E un espacio vectorial normado y sea $E' \subset E$; se dice que $A' \subset E'$ es un abierto de E' (resp. cerrado), si existe $A \subset E$ abierto (resp. cerrado) tal que $A' = A \cap E'$.

1.3.2 Adherencia y puntos de acumulación

Definición 1.3.6 Sea $A \subset E$, $x \in E$ se llama punto adherente de A , si toda bola abierta de centro x contiene puntos de A , es decir si $B(x, \rho) \cap A \neq \emptyset$, para todo $\rho > 0$.

El conjunto de puntos adherentes de A , se llama la adherencia de A y se designa por \bar{A} .

Ejemplo 1.3.4

Si $A =]0, 1[$, entonces $\bar{A} = [0, 1]$.

Si $A = \mathbb{Q}$, entonces $\bar{A} = \mathbb{R}$.

Proposición 1.3.4 Sean A y B subconjuntos de E , entonces:

1. $A \subset \bar{A}$.
2. \bar{A} es cerrado y si $F \subset E$ es un cerrado tal que $A \subset F$, entonces $\bar{A} \subset F$, es decir \bar{A} es el cerrado más pequeño que contiene a A .
3. F es cerrado si y sólo si $F = \bar{F}$.
4. Si $A \subset B \implies \bar{A} \subset \bar{B}$.
5. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Demostración

1. Es evidente

2. Sea $x \in E \setminus \bar{A} \implies x \notin \bar{A}$, entonces existe $\rho > 0$ tal que $B(x, \rho) \cap A = \emptyset$. Sea $z \in B(x, \rho)$, existe ρ' tal que $B(z, \rho') \subset B(x, \rho)$. Así $B(z, \rho') \cap A = \emptyset$, lo que implica $z \notin \bar{A}$. Esto muestra que $B(x, \rho) \subset E \setminus \bar{A}$ y que \bar{A} es un cerrado. Sea ahora $F \subset E$ cerrado tal que $F \supset A$. Sea $x \in \bar{A}$, supongamos que $x \notin F$, entonces existe $\rho > 0$ tal que $B(x, \rho) \subset E \setminus F$ (puesto que $E \setminus F$ es un abierto); pero como $A \subset F$ y $E \setminus F \subset E \setminus A$, tenemos $B(x, \rho) \subset E \setminus A$, es decir $B(x, \rho) \cap A = \emptyset$ lo que contradice $x \in \bar{A}$, o sea si $x \in \bar{A}$ implica $x \in F$.
3. F es un cerrado que contiene a F , entonces por 2.) $\bar{F} \subset F$ y por 1.) $F \subset \bar{F}$.
4. Si $A \subset B \implies A \subset \bar{B}$ por 1.) y por 2.) $\bar{A} \subset \bar{B}$, puesto que \bar{B} es un cerrado que contiene a A .
5. Como $A \subset \bar{A}; B \subset \bar{B} \implies A \cup B \subset \bar{A} \cup \bar{B}$ y $\bar{A} \cup \bar{B}$ es un cerrado, luego por 2.) $\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cup \bar{B}$. También $A \subset A \cup B \subset \overline{A \cup B}$, $B \subset A \cup B \subset \overline{A \cup B}$ y por 2.) $\bar{A} \subset \overline{A \cup B}$ y $\bar{B} \subset \overline{A \cup B} \implies \bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$.

Definición 1.3.7 Sea $A \subset E$, se dice que $x \in E$ es un punto de acumulación de A , si para cada $\rho > 0$, $B(x, \rho) \cap A$ contiene un punto $y \neq x$.

Ejemplo 1.3.5

Si $A =]0, 1[$, los puntos de acumulación de A son $[0, 1]$.

Si $A = \{\frac{1}{n}/n \in \mathbb{N}\}$, 0 es el único punto de acumulación de A .

Si $A = \mathbb{N}$, A no tiene puntos de acumulación.

Definición 1.3.8 Sea E un espacio vectorial normado y sean A y B dos subconjuntos de E , se dice que A es denso en B si $\bar{A} \supset B$.

El conjunto A es denso en E si $\bar{A} = E$.

Definición 1.3.9 Un espacio vectorial normado E se dice separable, si existe un subconjunto numerable A de E tal que A es denso en E i.e. $\bar{A} = E$.

Definición 1.3.10 Sea $A \subset E$, se llama frontera de A al conjunto $\mathfrak{fr}(A) = \bar{A} \cap \overline{E \setminus A}$.

Definición 1.3.11 Sea E un espacio vectorial normado y sea $A \subset E$, se dice que A es convexo, si $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$, se tiene que $\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \in A$, $\forall \lambda \in [0, 1]$, i.e. si el segmento de recta que une a \mathbf{x} con \mathbf{y} está contenido en A .

1.4 Sucesiones en E

Definición 1.4.1 Sea $(\mathbf{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de puntos de E , decimos que el límite de la sucesión es $\mathbf{x} \in E$ y escribimos $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$ (o $\mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{x}$, cuando $k \rightarrow \infty$ o simplemente $\mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{x}$), si para cada bola abierta $B(\mathbf{x}, \rho)$, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq K$, implica que $\mathbf{x}_k \in B(\mathbf{x}, \rho)$.

Ejemplo 1.4.1 Si $\mathbf{x}_k = (1, \frac{1}{k}, e^{-k} + 1)$, entonces $\mathbf{x}_k \rightarrow (1, 0, 1)$, cuando $k \rightarrow \infty$ en \mathbb{R}^3 .

Proposición 1.4.1 Sea $(\mathbf{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de E , las siguientes condiciones son equivalentes.

1. $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$.
2. $\forall \varepsilon > 0$, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq K \implies \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| < \varepsilon$.
3. $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\| = 0$.

Demostración La demostración es evidente. Notemos que $(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|)_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales.

Proposición 1.4.2 Si $\mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{x}$ con una de las tres normas euclídea, $\|\cdot\|_1$ o $\|\cdot\|_\infty$, entonces también lo hace con cualquiera de las otras dos.

Demostración Es un resultado evidente porque las tres normas son equivalentes.

Proposición 1.4.3 Sea $\mathbf{x}_k = (x_k^1, \dots, x_k^n)$ una sucesión de \mathbb{R}^n y sea $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$ en \mathbb{R}^n , entonces:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x} \iff \lim_{k \rightarrow \infty} x_k^i = x^i, \forall i = 1, \dots, n.$$

Notemos que $(x_k^i)_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales y son las componentes de los vectores $(x_k)_k$, para $i = 1, \dots, n$.

Demostración Supongamos que $x_k \rightarrow x$ y consideremos por ejemplo la norma euclídea.

Sea $\varepsilon > 0$, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq K \implies \|x_k - x\| < \varepsilon$, esto implica que:

$$|x_k^1 - x^1|^2 + \dots + |x_k^n - x^n|^2 < \varepsilon^2 \implies |x_k^i - x^i| < \varepsilon,$$

es decir que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k^i = x^i$.

Supongamos ahora que $x_k^i \rightarrow x^i$, cuando $k \rightarrow \infty$, para cada $i = 1, \dots, n$. Sea $\varepsilon > 0$, existe $K_i \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq K_i \implies |x_k^i - x^i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$.

Sea $K = \max\{K_1, \dots, K_n\}$, entonces $k \geq K \implies |x_k^i - x^i|^2 < \frac{\varepsilon^2}{n}$, para todo $i = 1, \dots, n$, por lo que para $k \geq K$ se tiene $|x_k^1 - x^1|^2 + \dots + |x_k^n - x^n|^2 < \varepsilon^2 \implies \|x_k - x\| < \varepsilon$, o sea que $x_k \rightarrow x$.

Ejemplo 1.4.2 En \mathbb{R}^4 si consideramos $x_k = (\frac{1}{k} + 1, \frac{\ln k}{k}, 2, (\frac{1}{2})^k)$, entonces $x_k \rightarrow (1, 0, 2, 0)$.

Definición 1.4.2 Un espacio vectorial normado E se dice completo o que E es un espa-

*cio de Banach*⁴, si toda sucesión de Cauchy⁵ es convergente en E .

⁴**Stefan Banach (1892-1945)** Matemático polaco, que nace el 30 el marzo de 1892 en Cracovia, Austria-Hungría (hoy Polonia) y muere el 31 de agosto de 1945 en Lvov, (hoy Ucrania). El padre de Stefan Banach era Stefan Greczek. La primera cosa en darse cuenta fue que Banach no era el apellido de su padre. Stefan Greczek fue un oficial de impuestos que no se casó con la madre de Banach, la cual desapareció de escena después del bautizo de Stefan, cuando tenía cuatro días de nacido y no se supo más de ella. El nombre que aparece como la madre de Stefan en su certificado del nacimiento es Katarzyna Banach. Unos creían que era la sirvienta de la madre de Stefan, mientras otros, que era una lavandera que cuidaba a Stefan cuando era muy joven. En vida, más tarde Banach trató de determinar quién fue su madre, pero su padre se negó a decir algo sobre su identidad.

Stefan Greczek nació en un pueblo pequeño llamado Ostrowsko, 50 km al sur de Cracovia. Fue en la casa de su abuela en Ostrowsko, donde se bautizó Banach. Sin embargo, cuando la abuela de Banach enfermó, Stefan Greczek arregló traer a su hijo con Franciszka Plowa que vivía en Cracovia, junto con su hija María. Aunque Banach no volvió a vivir con su abuela, la visitaba frecuentemente cuando crecía. El guardián de María era un francés intelectual, Juliusz Mien, quien rápidamente reconoce los talentos que Banach tenía. Mien enseñó al joven Banach a hablar francés y en general le dio una apreciable educación. Banach asistió a la escuela en Cracovia y sale la escuela en 1902 para empezar su educación secundaria en el Henryk Sienkiewicz Institute, en Cracovia. Por coincidencia, uno de los estudiantes en la clase de Banach fue Witold Wilkosz que se hizo profesor de matemática. En 1906, Wilkosz cambia a un mejor Instituto, aunque Banach mantuvo contacto con Wilkosz. En sus primeros años en el Instituto, Banach alcanzó las primeras clasificaciones en matemática y ciencias naturales. Un compañero recuerda a Banach en este período de su vida: ... era agradable en el trato con sus colegas, pero fuera de la matemática no se interesaba en nada. Si hablaba, lo hacía rápidamente, tan rápidamente como pensaba en matemática... Wilkosz era similar. Para ellos no había problema matemático que no resolvieran rápidamente. Mientras Banach era muy rápido resolviendo problemas matemáticos, Wilkosz era fenomenalmente rápido resolviendo problemas en física, que no eran de interés para Banach. Las calidades excelentes de sus primeros años escolares, dieron paso a calidades más pobres cuando se acercó su final escolar. Pasó los exámenes en 1910 pero no alcanzó distinción. Al salir de la escuela, Banach y Wilkosz querían estudiar matemática, pero ambos sienten que nada nuevo se puede descubrir en matemático y deciden trabajar en otra cosa. Banach escogió estudiar ingeniería, Wilkosz escogió idiomas orientales. El padre de Banach nunca no le había dado mucho apoyo a su hijo, pero ahora una vez salió escuela le dijo abiertamente que ahora era su vida. Banach deja Cracovia y se va a Lvov, donde entra en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Técnica de Lvov. Es casi cierto ese Banach, sin cualquier apoyo financiero, tenía que ayudarse enseñando. Esto le ocupó mucho tiempo y cuando se graduó en 1914, había durado más de lo normal. Banach había visitado Cracovia frecuentemente durante su período de sus estudios en Lvov de 1910 a 1914. No estaban claros los planes de Banach en 1914, pero con la irrupción de I Guerra Mundial en agosto, al poco tiempo de su graduación, Banach se va de Lvov. Lvov estaba, en el tiempo que Banach estudió allí, bajo el control austriaco desde que se dio la partición de Polonia en 1772. En la época de la juventud de Banach, Polonia en cierto sentido no existía y Rusia controlaba gran parte del país. Varsovia sólo tenía una universidad en idioma ruso y se situó en lo que se llamaba "Vistula Land". Con el inicio de la I Guerra Mundial, las tropas rusas ocupaban la ciudad de Lvov. Banach no era apto para el ejército, por tener pobre visión en su ojo izquierdo. Durante la guerra, trabajó construyendo caminos pero en el tiempo que pasó en Cracovia, ganó dinero enseñando en las escuelas locales. También enseñó en la Universidad Jagiellonian en Cracovia y aunque no es completamente seguro, se cree que asiste a las conferencias de Zaremba. Un hecho importante ocurrió en la primavera de 1916, que impactó la vida de Banach. Steinhaus, que hacía el servicio militar, estuvo cerca de tomar un puesto en la Universidad Jan Kazimierz en Lvov. Sin embargo vivía en Cracovia en la primavera de 1916, aguardando tomar la oportunidad. Caminaba por las calles de

Cracovia en las tardes y, relató en sus memorias: ...Durante una de las caminatas oí por casualidad las palabras “medida de Lebesgue”, me acerqué al parque y me presenté a los jóvenes matemáticos. Me dijeron de otro compañero de nombre Witold Wilkosz, que ellos alaban extravagantemente. Los jóvenes eran Stefan Banach y Otto Nikodým. Desde entonces, nosotros tendríamos una base común y decidimos establecer una sociedad matemática.

Steinhaus da a Banach un problema que trabajaba sin éxito. Después de unos días Banach tenía la idea principal para el requerido contraejemplo. Steinhaus y Banach escriben un artículo en conjunto, que presentaron en Zaremba para su publicación. La guerra atrasó la publicación y el artículo apareció en el Boletín de la Academia de Cracovia en 1918. De estos primeros resultados con Steinhaus, Banach comenzó a producir importantes artículos matemático rápidamente. Por supuesto, es imposible decir que sin la reunión con Steinhaus, Banach habría seguido la ruta de investigación en matemático. Es también a través de Steinhaus que Banach conoce a su futura esposa Lucja Braus. Se casaron en Zakopane en 1920. Por iniciativa de Steinhaus, la Sociedad Matemática de Cracovia fue creada en 1919. Zaremba se encargó de la reunión inaugural y se eligió como al primero presidente de la Sociedad. Banach disertó en la Sociedad dos veces durante 1919 y continuó produciendo artículos de calidad en la investigación. La Sociedad Matemática de Cracovia siguió y se volvió la Sociedad Polaca Matemática en 1920. Se le ofreció a Banach un puesto de asistente de Lomnicki, en la Universidad Técnica de Lvov en 1920. Trabajó en matemático y presentó una tesis doctoral bajo la tutoría de Lomnicki. Por supuesto, no la ruta normal a un doctorado, pues Banach no tenía cursos matemáticos universitarios. Sin embargo, se hizo una excepción en su caso para someter su tesis “On Operations on Abstract Sets and their Application to Integral Equations”. Esta tesis, se dice que marca el nacimiento de análisis funcional.

En 1922 la Universidad Jan Kazimierz en Lvov, le otorgó a Banach su habilitación para una tesis en Teoría de la medida. El Calendario Universitario de 1921-22 informa: “En 7 el abril de 1922, por resolución del Concejo de la Facultad, el Dr. Stefan Banach recibió su habilitación por un Grado de Docente de Matemática. Se nombró Profesor extraordinario por decreto del Jefe de Estado emitido el 22 de julio de 1922.”

En 1924 Banach se promovió a Profesor Titular y pasó el año académico 1924-25 en París. Los años entre las guerras fueron sumamente ocupados para Banach. Así, continúa produciendo un flujo de artículos importantes, escribió sobre aritmética, geometría y textos del álgebra para secundaria. También se envolvió mucho con la publicación de Matemáticas. En 1929 junto con Steinhaus, comenzó una revista nueva “Studia Mathematica” y Banach y Steinhaus fueron los primeros editores. La política de la dirección o redacción de una publicación era: “enfocar en investigación en análisis funcional y temas relacionados”.

Otra publicación importante empieza en 1931, una nueva serie Monografías Matemáticas. Se desarrollan bajo la dirección de Banach y Steinhaus de Lvov y Knaster, Kuratowski, Mazurkiewicz, y Sierpinski de Varsovia. El primer volumen en la serie Théorie des opérations linéaires fue escrito por Banach y apareció en 1932. Era una versión francesa de un volumen que originalmente publicó en polaco en 1931, que rápidamente se volvió un clásico. En 1936 Banach dio una conferencia plenaria en el Congreso Internacional de Matemáticos en Oslo. En esta conferencia describió el trabajo completo de la escuela de Lvov y también habló de los planes que tenían para desarrollar ideas futuras. Otra influencia importante de Banach, fue el hecho que Kuratowski se quedó en la Universidad Técnica de Lvov en 1927 y trabajó allí hasta que 1934. Banach colaboró con Kuratowski y escribieron juntos un artículo. La manera de trabajar de Banach era libre de reglas. A él le gustaba hacer matemático con sus colegas en los cafés de Lvov. Andrzej Turowicz, también profesor de matemática la Universidad Kazimierz en Lvov, describió el estilo de trabajo de Banach: “Banach gastaba la mayor parte de su tiempo en cafés, no sólo por la compañía de otros, sino también por él mismo. A él le gustaba el ruido y la música. No le impedían concentrarse y pensar. Había ocasiones, después que el café cerraba por la noche, que caminaba por la vía férrea de la estación, donde la cafetería estaba abierta alrededor del reloj. Allí, sobre un vidrio de cerveza, pensaba en sus problemas”. En 1939, antes del inicio de la II Guerra Mundial, Banach fue

elegido presidente de la Sociedad Matemática Polaca. Al principio de la guerra las tropas soviéticas ocupaban Lvov. Banach estaba en buenos términos con los matemáticos soviéticos antes de que la guerra comenzara. Visitó Moscú varias veces y se le trató bien por parte de la nueva administración soviética. Esto le permitió continuar con su puesto en la Universidad y se nombró Decano de la Facultad de Ciencia de la Universidad, ahora nombrada Universidad Ivan Franko. El padre de Banach llegó a Lvov huyendo del ejército alemán. La vida de Banach en esta fase sufre un pequeño cambio, pero continúa su investigación, su escritura del libro de texto, enseñando y sesionando en los cafés. Sobolev y Aleksandrov visitaron a Banach en Lvov en 1940, mientras que Banach asistió a unas conferencias en la Unión Soviética. Estando en Kiev, Alemania invadió a la Unión Soviética y se volvió inmediatamente a su familia en Lvov. La ocupación Nazi de Lvov, en el junio de 1941, significó para Banach que viviera bajo condiciones muy difíciles. Fue arrestado bajo sospecha de traficar en dinero alemán, pero salió después de algunas semanas. Sobrevivió a un período cuando en Polonia asesinaban académicos. Su supervisor de tesis Lomnicki murió la noche trágica de 3 el julio de 1941, cuando muchas matanzas ocurrieron. Hacia el final de 1941 Banach estaba en el instituto alemán de enfermedades infecciosas, trabajando sobre el ácaro de alimentos. El ácaro del alimento fue su vida durante la ocupación Nazi de Lvov, hasta el julio de 1944. Cuando las tropas soviéticas volvieron a tomar Lvov, Banach renovó sus contactos. Encontró Sobolev en Moscú, pero claramente en ese tiempo estaba gravemente enfermo. Sobolev dio una disertación en una Conferencia Conmemorativa de Banach, y dijo: “A pesar de los rastros de los años de la guerra bajo la ocupación alemana y a pesar de la enfermedad grave que minaba su fuerza, los ojos de Banach todavía eran vivos. Siguió siendo el mismo Stefan Banach sociable, alegre y extraordinariamente bien intencionado, quien había visitado en Lvov antes de la guerra. Es así como queda en mi memoria: con un gran sentido del humor, con energía, una alma bella y un gran talento”.

Banach pensaba ir a Cracovia después de la guerra, a tomar un puesto matemático en la Universidad Jagiellonian, pero murió en Lvov en 1945 de cáncer pulmonar. Banach fundó el análisis funcional moderno e hizo su mayor contribución a la teoría de espacios vectoriales topológicos. Además, contribuyó a la teoría de la medida e integración, la teoría de juegos y la teoría de series ortogonales. En su disertación escrita en 1920, definió axiomáticamente lo que hoy se llamaba un espacio de Banach. La idea fue introducida por otros matemáticos al mismo tiempo, por ejemplo Wiener introdujo la noción. pero no había desarrollado la teoría. El nombre espacio de Banach fue acuñado por Fréchet. También se nombraron las álgebras de Banach.

La importancia de la contribución de Banach es que desarrolló una teoría sistemática de análisis funcional, donde antes habían sólo resultados aislados, fueron armonizados para constituir una nueva teoría. Generaliza la teoría de las contribuciones que hicieron Volterra, Fredholm y Hilbert en ecuaciones integrales. Banach demostró numerosos resultados de espacios lineales normados, y muchos teoremas importantes hoy se nombran por él. El teorema de Hahn-Banach en la extensión de un funcional lineal continuo, el teorema de Banach-Steinhaus sobre familias de transformaciones acotadas, el teorema de Banach-Alaoglu, el teorema del punto fijo de Banach y el teorema y la paradoja de la descomposición de una bola de Banach-Tarski. La paradoja de Banach-Tarski apareció en un artículo de dos matemáticos en 1926 en *Fundamenta Mathematicae* llamado “Sur la décomposition des ensembles de points en partiens respectivement congruent”. El enigmática de la paradoja muestra que se puede dividir una bola en dos subconjuntos que pueden ser ajustados a dos bolas idénticas a la primera. Se necesita el axioma de elección para definir la descomposición y el hecho que puede tal resultado no es intuitivo, ha hecho que algunos matemáticos se cuestionen el uso del axioma. El paradoja de Banach-Tarski fue la mayor contribución hecha al trabajo de la teoría axiomática de conjuntos, alrededor de este período. La función abierta de Banach de 1929 también usa conceptos de la teoría de conjuntos, esta vez introducidos por Baire en su trabajo de 1899.

⁵**Augustín Louis Cauchy (1789-1857)** Nace el 21 de Agosto 1789 en Paris, Francia. Muere el 23 de Mayo 1857 en Sceaux (cerca de Paris), Francia. Agustín Louis Cauchy fue pionero en el análisis. Investigó la convergencia y la divergencia de las series infinitas, las ecuaciones diferenciales, los determinantes, la probabilidad y física matemática.

Definición 1.4.3 *Un espacio E pre-hilbertiano completo se denomina espacio de Hilbert.*

1.4.1 Distancia

Definición 1.4.4 *Sea $E \neq \emptyset$ y sean $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in E$, llamamos distancia en E una aplicación $d: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ que verifica las propiedades:*

1. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{y}$
2. $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$.

Al par (E, d) se le llama espacio métrico.

Como consecuencia de la definición se tiene:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0, \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x}).$$

Observemos la norma induce una distancia si definimos $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ (verificarlo).

La situación inversa se da, pues si tenemos una distancia en E , se puede definir la norma $\|\mathbf{x}\| = d(\mathbf{x}, \mathbf{0})$ (verificarlo).

Un resultado interesante sucede con los espacios vectoriales normados de dimensión finita, ya que en estos espacios todas las normas son equivalentes i.e. todos los espacios vectoriales normados de dimensión finita son completos.

Definición 1.4.5 *Sean A y $B \subset E$ no vacíos y sea $\mathbf{x} \in E$, entonces:*

1. *se llama distancia de \mathbf{x} a A (y se denota) $d(\mathbf{x}, A) = \inf_{\mathbf{y} \in A} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$*

Ocupó diversos puestos en la Facultad de Ciencia de París, el Colegio de Francia y la Escuela Politécnica. En 1814 publicó su trabajo de la integral definida que llegó a ser la base de la teoría de las funciones complejas.

Gracias a Cauchy, el análisis infinitesimal adquiere bases sólidas.

Cauchy, produjo 789 escritos, pero fue desaprobado por la mayoría de sus colegas. Mostró una obstinada rectitud a sí mismo y un agresivo fanatismo religioso. Como un apasionado del realismo pasó algún tiempo en Italia después de rechazar tomar un juramento de lealtad. Dejó París después de la Revolución de 1830. Aceptó una oferta del Rey de Piedmont para dar una cátedra en Turín donde estuvo hasta 1832. En 1833 se marchó a Praga en atención a Charles X y para ser el tutor de su hijo.

Cauchy volvió a París en 1838 y retoma su cargo en la academia pero no su posición de profesor por haber rechazado tomar el juramento de lealtad. Cuando Louis Philippe fue destronado en 1848 Cauchy vuelve a su cátedra en la Sorbonne. Ayudó en los posgrados hasta su muerte.

2. se llama *distancia entre A y B* , al valor $d(A, B) = \inf_{\substack{\mathbf{x} \in A \\ \mathbf{y} \in B}} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$
3. se llama *diámetro de A* al valor $\text{diam}(A) = \sup_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$.

Es claro que si $\text{diam}(A) < \infty$, A es acotado.

1.5 Conjuntos compactos de E

Definición 1.5.1 Sea $A \subset E$, una familia $(O_i)_{i \in I}$ de abiertos de E se llama un *recubrimiento abierto de A* , si $A \subset \bigcup_{i \in I} O_i$.

Definición 1.5.2 El conjunto $K \subset E$ se llama un *conjunto compacto de E* o simplemente un *compacto*, si de todo recubrimiento abierto de K , se puede extraer un recubrimiento finito.

Ejemplo 1.5.1 Todo conjunto finito de E es compacto, pues de cualquier recubrimiento abierto basta seleccionar sólo los abiertos que contienen puntos del conjunto y ese será un recubrimiento finito.

Proposición 1.5.1 Sean $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, el intervalo $[a, b]$ es compacto (en \mathbb{R}).

Demostración Sea $(O_i)_{i \in I}$ un recubrimiento abierto cualquiera de $[a, b]$, entonces $[a, b] \subset \bigcup_{i \in I} O_i$. Debemos demostrar que podemos extraer un recubrimiento finito.

Sea $A = \{x \in [a, b] / [a, x] \text{ se puede recubrir con un número finito de abiertos } O_i\}$, tenemos que $A \neq \emptyset$, puesto que $a \in A$. Además A es acotado superiormente ya que b es una cota superior. Sea entonces $m = \sup A$.

Se tiene que $a \leq m \leq b$ y existe $i_0 \in I$ tal que $m \in O_{i_0}$, pero como O_{i_0} es abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $]m - \varepsilon, m + \varepsilon[\subset O_{i_0}$ y dado que $m - \varepsilon$ no es cota superior de A , existe $x_0 \in A$ tal que $m - \varepsilon < x_0 \leq m$.

Resulta entonces que el intervalo $[a, m]$ es recubierto por un número finito de los abiertos O_i , pues $[a, m - \varepsilon] \subset \bigcup_{k=1}^p O_{i_k}$, $]m - \varepsilon, m + \varepsilon[\subset O_{i_0} \implies m \in A$.

La proposición queda demostrada si probamos que $m = b$. Supongamos por el contrario

que $m < b$, entonces se puede escoger $\varepsilon > 0$ tal que siempre se cumpla $]m - \varepsilon, m + \varepsilon[\subset O_{i_0}$ y además $m + \varepsilon/2 < b$, pero esto implicaría que $m + \varepsilon/2 \in A$, lo que es imposible porque $m = \sup A$.

Observación Un conjunto $A \subset E$ se dice acotado, si existe una bola abierta B tal que $A \subset B$.

Proposición 1.5.2 *Sea $A \subset E$, A compacto, entonces A es acotado.*

Demostración Se tiene que $A \subset \bigcup_{\rho > 0} B(\mathbf{a}, \rho)$, con $\mathbf{a} \in A$. $(B(\mathbf{a}, \rho))_{\rho > 0}$ es un recubrimiento abierto de A y por lo tanto se puede extraer un recubrimiento finito $A \subset B(\mathbf{a}_1, \rho_1) \cup \dots \cup B(\mathbf{a}_r, \rho_r)$. Sea $\rho = \max\{\rho_1, \dots, \rho_r\}$, es claro que $A \subset B(\mathbf{a}, \rho)$.

Proposición 1.5.3 *Si $A \subset E$ es compacto, entonces A es cerrado.*

Demostración Demostremos que $E \setminus A$ es un abierto. Sea $\mathbf{x} \in E \setminus A$, para cada $\mathbf{a} \in A$ sea $\rho_{\mathbf{a}} = \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|}{2} > 0$, $A \subset \bigcup_{\mathbf{a} \in A} B(\mathbf{a}, \rho_{\mathbf{a}})$, pero como A es compacto se puede extraer un recubrimiento finito. Luego $A \subset B(\mathbf{a}_1, \rho_{\mathbf{a}_1}) \cup \dots \cup B(\mathbf{a}_m, \rho_{\mathbf{a}_m})$.

Sea $\rho = \min\{\rho_{\mathbf{a}_1}, \dots, \rho_{\mathbf{a}_m}\}$, demostremos que $B(\mathbf{x}, \rho) \subset E \setminus A$, o sea $B(\mathbf{x}, \rho) \cap A = \emptyset$.

En efecto, tenemos que:

$$\begin{aligned} B(\mathbf{x}, \rho) \cap A &\subset B(\mathbf{x}, \rho) \cap \left(B(\mathbf{a}_1, \rho_{\mathbf{a}_1}) \cup \dots \cup B(\mathbf{a}_m, \rho_{\mathbf{a}_m}) \right) = \\ &\left(B(\mathbf{x}, \rho) \cap B(\mathbf{a}_1, \rho_{\mathbf{a}_1}) \right) \cup \left(B(\mathbf{x}, \rho) \cap B(\mathbf{a}_2, \rho_{\mathbf{a}_2}) \right) \cup \dots \cup \left(B(\mathbf{x}, \rho) \cap B(\mathbf{a}_m, \rho_{\mathbf{a}_m}) \right). \end{aligned}$$

Si existe $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, \rho) \cap B(\mathbf{a}_i, \rho_{\mathbf{a}_i})$, para algún $i = 1, \dots, m$, entonces:

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < \rho \quad \text{y} \quad \|\mathbf{y} - \mathbf{a}_i\| < \rho_{\mathbf{a}_i} \implies \|\mathbf{x} - \mathbf{a}_i\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| + \|\mathbf{y} - \mathbf{a}_i\| < 2\rho_{\mathbf{a}_i}$$

lo que implica que $2\rho_{\mathbf{a}_i} < 2\rho_{\mathbf{a}_i}$. Contradicción.

Luego cada intersección es vacía y por lo tanto $B(\mathbf{x}, \rho) \cap A = \emptyset$.

Proposición 1.5.4 *Si $A \subset E$ es compacto y $F \subset A$ con F es cerrado, entonces F es compacto.*

Demostración Sea $(O_i)_{i \in I}$ un recubrimiento abierto de F , i.e. $F \subset \bigcup_{i \in I} O_i$ y los O_i son abiertos. Se tiene $A \subset F \cup (E \setminus F) \subset (\bigcup_{i \in I} O_i) \cup (E \setminus F)$ y como $E \setminus F$ es un abierto, resulta que A está recubierto por una familia de abiertos y basta un número finito de estos abiertos para recubrirlo. Así $F \subset A \subset (O_{i_1} \cup \dots \cup O_{i_m}) \cup (E \setminus F)$ y resulta que $F \subset O_{i_1} \cup \dots \cup O_{i_m}$, lo que demuestra que F es compacto.

Proposición 1.5.5 *Si $A \subset E$ es compacto, entonces es cerrado y acotado.*

Demostración Es una consecuencia de las proposiciones 1.5.2 y 1.5.3.

Más adelante veremos que el recíproco de esta proposición es cierto en \mathbb{R}^n .

Proposición 1.5.6 Propiedad de intersección finita

Sea $K \subset E$ compacto y $(F_m)_{m \in \mathbb{N}}$ una sucesión de cerrados de E , tales que $F_m \subset K$, $F_{m+1} \subset F_m$ y $F_m \neq \emptyset$, para cada $m \in \mathbb{N}$, entonces $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} F_m \neq \emptyset$.

Demostración Haremos la prueba por contradicción.

Si $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} F_m = \emptyset$, se tiene $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} (E \setminus F_m) = E \supset K$, como K es compacto y cada $E \setminus F_m$ no es vacío, K se puede recubrir con un número finito de abiertos $K \subset (E \setminus F_{m_1}) \cup \dots \cup (E \setminus F_{m_\ell})$ para $\ell \in \mathbb{N}$ finito. Sea $m_0 = \max\{m_1, \dots, m_\ell\}$, como $F_{m_0} \subset F_{m_i}$ para $i = 1, \dots, \ell$, implica que $E \setminus F_{m_0} \supset (E \setminus F_{m_1}) \cup \dots \cup (E \setminus F_{m_\ell})$, o sea $K \subset E \setminus F_{m_0}$, pero también $K \supset F_{m_0}$, es decir que $F_{m_0} = \emptyset$. Contradicción.

Teorema 1.5.1 Bolzano⁶-Weierstrass⁷

Sea $K \subset E$ un compacto, entonces toda sucesión $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de puntos de K tiene una subsucesión que converge a un punto $x \in K$.

Demostración Sea $A_k = \{x_\ell / \ell > k\}$, como $A_k \subset K$, $\bar{A}_k \subset K$ y $\bar{A}_{k+1} \subset \bar{A}_k$ y $\bar{A}_k \neq \emptyset$, $\forall k \in \mathbb{N}$ y por la proposición 1.5.6, resulta que $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bar{A}_k \neq \emptyset$.

Sea $x \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bar{A}_k$, como $\bar{A}_k \subset K$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $x \in K$. Sea:

$$\begin{aligned} k_1 &= \min\{k \in \mathbb{N} / x_k \in B(x, 1) \cap A_1\} \\ k_2 &= \min\{k \in \mathbb{N} / x_k \in B(x, \frac{1}{2}) \cap A_{k_1}\} \\ &\vdots \\ k_m &= \min\{k \in \mathbb{N} / x_k \in B(x, \frac{1}{m}) \cap A_{k_{m-1}}\}. \end{aligned}$$

⁶**Bernhard Bolzano (1781-1848)** De nacionalidad checa, fue filósofo, matemático y teólogo. Hizo contribuciones significantes tanto en la matemática como en la teoría del conocimiento. Bolzano ingresó a la facultad de filosofía en la Universidad de Praga en 1796, estudió filosofía y matemática. En 1819 fue suspendido de su puesto a causa de presión del gobierno austriaco, quienes se oponían a su pacifismo y su expresión de la justicia económica. Liberó al cálculo del concepto infinitesimal. En metafísica Bolzano se opuso a Kant, reivindicando el carácter constructivo y no simplemente regulativo de algunas ideas metafísicas como las relativas a Dios y a la inmortalidad del alma. Bolzano, se adelantó a los analistas rigurosos del siglo XIX, con el concepto de función continua y en la demostración de sus propiedades, en el criterio de convergencia de series y en la existencia de funciones continuas sin derivadas. Como publicó sus escritos de análisis en Praga, ciudad entonces alejada de los centros científicos, o de permanecer inéditos, como su importante obra "Teoría de funciones", que apareció en 1930, la influencia de sus ideas fue escasa.

⁷**Karl Weierstrass (1815-1897)** Nace el 31 de octubre de 1815 en Ostenfelde, Bavaria (hoy Alemania). Muere el 19 de febrero 1897 en Berlín, Alemania. Karl Weierstrass fue más conocido por su construcción de la teoría de las funciones complejas por medio de series. Después que Weierstrass había ocupado varias posiciones de enseñanza menor, llegó a ser reconocido después que publicó una gran cantidad de escritos de funciones abelianas en el Journal de Créelle. En 1856 obtuvo apoyo de Kummer y fue aceptado en la Universidad de Berlín.

Sus exquisitas conferencias en matemáticas atraían a los estudiantes de todo el mundo. Los tópicos de sus conferencias incluían: física matemática (1856-57), introducción de la teoría de funciones analíticas (donde los resultados obtenidos en el año 1841 no fueron jamás publicados), la teoría de las funciones elípticas y aplicaciones a problemas en geometría y mecánica.

En las conferencias de 1859-60 Weierstrass presentó "Introducción al Análisis". En su curso "Teoría general de las funciones analíticas" en los años 1863-64, comenzó a formular su Teoría de los números reales.

En sus conferencias el año 1863 Weierstrass probó que los números complejos son sólo conmutativos en su extensión algebraica de los números reales. Gauss había prometido una prueba de esto en el año 1831 pero falló en el intento.

Observemos que ninguno de los conjuntos anteriores es vacío, pues $\mathbf{x} \in \bar{A}_k$ y $B(\mathbf{x}, \frac{1}{r}) \cap A_k \neq \emptyset$, sea cual sea r y k . Además $k_m > k_{m-1}$, para $m \in \mathbb{N}$, esto quiere decir que $(\mathbf{x}_{k_m})_{m \in \mathbb{N}}$ es una subsucesión de $(\mathbf{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Así:

$$\mathbf{x}_{k_m} \in B(\mathbf{x}, \frac{1}{m}), \quad \forall m \in \mathbb{N} \implies \|\mathbf{x}_{k_m} - \mathbf{x}\| < \frac{1}{m},$$

lo que implica $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{x}_{k_m} = \mathbf{x}$.

1.6 Producto de compactos

Sean E y F espacios vectoriales normados i.e. se tiene $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$, se define el producto cartesiano de los espacios vectoriales normados E y F por $(E \times F, \|\cdot\|_{E \times F})$, donde $\|(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|_{E \times F} = \|\mathbf{x}\|_E + \|\mathbf{y}\|_F$, si $\mathbf{x} \in E$ y $\mathbf{y} \in F$.

Se verifica sin dificultad que $\|\cdot\|_{E \times F}$ es una norma sobre $E \times F$.

Otras normas inducidas por las normas de E y F se pueden considerar, por ejemplo,

$$\|(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|_{E \times F} = \sup\{\|\mathbf{x}\|_E, \|\mathbf{y}\|_F\}, \text{ o bien } \|(\mathbf{x}, \mathbf{y})\|_{E \times F} = \sqrt{\|\mathbf{x}\|_E^2 + \|\mathbf{y}\|_F^2}.$$

Lema 1.6.1 Sean E y F espacios vectoriales normados, sean $\mathbf{a} \in E$, $\mathbf{b} \in F$ y sea $B((\mathbf{a}, \mathbf{b}), \rho)$ la bola abierta de centro (\mathbf{a}, \mathbf{b}) y radio $\rho > 0$ de $E \times F$, entonces existen bolas abiertas $B(\mathbf{a}, \alpha) \subset E$ y $B(\mathbf{b}, \alpha) \subset F$, ($\alpha > 0$) tales que $B(\mathbf{a}, \alpha) \times B(\mathbf{b}, \alpha) \subset B((\mathbf{a}, \mathbf{b}), \rho)$.

Demostración Tomemos $\alpha = \frac{1}{2}\rho$ y sean $\mathbf{x} \in E$, $\mathbf{y} \in F$ tales que $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in B(\mathbf{a}, \frac{1}{2}\rho) \times B(\mathbf{b}, \frac{1}{2}\rho)$, entonces:

$$\|(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - (\mathbf{a}, \mathbf{b})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| + \|\mathbf{y} - \mathbf{b}\| < \frac{1}{2}\rho + \frac{1}{2}\rho = \rho \implies (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in B((\mathbf{a}, \mathbf{b}), \rho).$$

Teorema 1.6.1 Producto de compactos Sean E y F espacios vectoriales normados y sean $K_1 \subset E$ compacto, $K_2 \subset F$ compacto, entonces $K_1 \times K_2$ es un compacto de $E \times F$.

Demostración Sea $(W^i)_{i \in I}$ un recubrimiento abierto de $K_1 \times K_2$, i.e. $K_1 \times K_2 \subset \bigcup_{i \in I} W^i$, donde W^i es un abierto para cada $i \in I$, $W^i \subset E \times F$. Sea $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in K_1 \times K_2$, entonces $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in W^i_{\mathbf{x}\mathbf{y}}$, para algún i , por lo que $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in B((\mathbf{x}, \mathbf{y}), \rho_{\mathbf{x}\mathbf{y}}) \subset W^i_{\mathbf{x}\mathbf{y}}$.

Por el lema anterior, existe una bola abierta $B_1^y(x)$ (bola de centro en x , pero que depende de y) en E y existe bola abierta $B_2^x(y) \subset F$ (bola de centro en y , pero que depende de x) tales que:

$$B_1^y(x) \times B_2^x(y) \subset B((x, y), \rho_{xy}) \subset W_{xy}^i. \quad (1.2)$$

Los radios de las bolas $B_1^y(x)$ y $B_2^x(y)$ no interesan. Para $x \in K_1$ fijo, $K_2 \subset \bigcup_{y \in K_2} B_2^x(y)$ y como K_2 es compacto se puede extraer un recubrimiento finito, $K_2 \subset B_2^x(y_1) \cup \dots \cup B_2^x(y_{p_x})$, p_x finito. Sea $B_1(x) = B_1^{y_1}(x) \cap \dots \cap B_1^{y_{p_x}}(x)$, se tiene que $K_1 \subset \bigcup_{x \in K_1} B_1(x)$ y como K_1 es compacto, $K_1 \subset B_1(x_1) \cup \dots \cup B_1(x_q)$.

Sea $(x, y) \in K_1 \times K_2$, $x \in B_1(x_r)$, con $r \in \{1, \dots, q\}$ y $y \in B_2^{x_r}(y_s)$, con $s \in \{1, \dots, p_{x_r}\}$. Como $x \in B_1(x_r)$, $x \in B_1^{y_s}(x_r)$, por lo tanto $B_1^{y_s}(x_r) \times B_2^{x_r}(y_s) \subset W_{x_r y_s}^i$, o sea $(x, y) \in W_{x_r y_s}^i$, para algún $r \in \{1, \dots, q\}$ y algún $s \in \{1, \dots, p_{x_r}\}$. Esto demuestra que $K_1 \times K_2 \subset \bigcup_{r=1}^q \bigcup_{s=1}^{p_{x_r}} W_{x_r y_s}^i$.

Corolario 1.6.1 *El producto finito de compactos es compacto.*

Teorema 1.6.2 *Los conjuntos compactos de \mathbb{R}^n son los conjuntos cerrados y acotados.*

Demostración

(\implies) Sabemos que si $K \subset \mathbb{R}^n$ es compacto entonces es cerrado y acotado.

(\impliedby) Supongamos $K \subset \mathbb{R}^n$ acotado y cerrado, como K es acotado existe una bola $B(a, \rho)$ tal que $K \subset B(a, \rho)$, con $a = (a_1, \dots, a_n)$, entonces:

$$K \subset [a_1 - \rho, a_1 + \rho] \times \dots \times [a_n - \rho, a_n + \rho],$$

pues $B(a, \rho) \subset [a_1 - \rho, a_1 + \rho] \times \dots \times [a_n - \rho, a_n + \rho]$. Pero cada $[a_i - \rho, a_i + \rho]$ es compacto, entonces $[a_1 - \rho, a_1 + \rho] \times \dots \times [a_n - \rho, a_n + \rho]$ es un compacto como producto finito de compactos y como K es cerrado resulta que es compacto por la proposición 1.5.4.

Este resultado es válido para espacios vectoriales normados de dimensión finita.

1.7 Funciones continuas

Definición 1.7.1 Sean E y G espacios vectoriales normados, sea $A \subset E$, $f: A \rightarrow G$, $\mathbf{a} \in A$; decimos que f es continua en \mathbf{a} , si para toda bola abierta $B(f(\mathbf{a}), \varepsilon)$, existe una bola abierta $B(\mathbf{a}, \delta)$ tal que si $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, \delta) \cap A$, entonces $f(\mathbf{x}) \in B(f(\mathbf{a}), \varepsilon)$, es decir $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$, $\mathbf{x} \in A \implies \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})\| < \varepsilon$.

Se dice que f es continua en A , si es continua en cada punto de A .

Proposición 1.7.1 Sea $A \subset E$ y sea $f: A \rightarrow G$, las siguientes condiciones son equivalentes:

1) f es continua en A .

2) Si $O \subset G$ es un abierto, entonces $f^{-1}(O) = U \cap A$, donde U es un abierto de E .

3) Si $F \subset G$ es un cerrado, entonces $f^{-1}(F) = C \cap A$, donde C es un cerrado de E .

En particular si $f: E \rightarrow G$; f es continua en E si y sólo si $f^{-1}(O)$ es un abierto, para todo abierto $O \subset G$ si y sólo si $f^{-1}(F)$ es un cerrado, para todo cerrado $F \subset G$.

Demostración

(1 \implies 2) Sea $O \subset G$ abierto y sea $\mathbf{x} \in f^{-1}(O)$ (o $f^{-1}(O) = \emptyset$ abierto), entonces $\mathbf{x} \in A$ y $f(\mathbf{x}) \in O \implies \exists \varepsilon_{\mathbf{x}} > 0$ tal que $B(f(\mathbf{x}), \varepsilon_{\mathbf{x}}) \subset O$ y existe $\delta_{\mathbf{x}} > 0$ tal que si $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, \delta_{\mathbf{x}}) \cap A \implies f(\mathbf{y}) \in B(f(\mathbf{x}), \varepsilon)$. Sea $U = \bigcup_{\mathbf{x} \in A} B(\mathbf{x}, \delta_{\mathbf{x}})$, U es abierto y además:

$$f(U \cap A) \subset \bigcup_{\mathbf{x} \in A} f(B(\mathbf{x}, \delta_{\mathbf{x}})) \subset \bigcup_{\mathbf{x} \in A} B(f(\mathbf{x}), \varepsilon_{\mathbf{x}}) \subset O,$$

de donde $U \cap A \subset f^{-1}(O)$. Además, si $\mathbf{x} \in f^{-1}(O)$ y $f^{-1}(O) \neq \emptyset \implies \mathbf{x} \in A$ y $\mathbf{x} \in U \cap A$.

(2 \implies 1) Sea $\mathbf{x} \in A$ y sea $B(f(\mathbf{x}), \varepsilon)$ una bola abierta de G . Sea U un abierto de E tal que $f^{-1}(B(f(\mathbf{x}), \varepsilon)) = U \cap A$. Como $\mathbf{x} \in U \cap A$ existe $B(\mathbf{x}, \delta) \subset U$ y si $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, \delta) \cap A \implies \mathbf{y} \in U \cap A$, pero $f(U \cap A) = f(f^{-1}(B(f(\mathbf{x}), \varepsilon))) \subset B(f(\mathbf{x}), \varepsilon) \implies f(\mathbf{y}) \in B(f(\mathbf{x}), \varepsilon)$, lo que implica que f es continua en \mathbf{x} .

(2 \implies 3) Sea F cerrado de G , $f^{-1}(G \setminus F) = U \cap A$, U abierto de E . Sea $C = E \setminus U$ entonces se tiene $f^{-1}(F) = C \cap A$.

(3 \implies 2) Sea O abierto de G , $G \setminus O$ es cerrado, $f^{-1}(G \setminus O) = C \cap A$ y $E \setminus C$ es abierto de E , por lo que $f^{-1}(O) = (E \setminus C) \cap A$.

Proposición 1.7.2 Sea $f: A \subset E \longrightarrow G$, si $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset A$ es una sucesión tal que $x_k \longrightarrow x$ y $x \in A$, entonces si f es continua en A , $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(x)$.

Demostración Sea $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $y \in B(x, \delta) \cap A \implies f(y) \in B(f(x), \varepsilon)$ debido a la continuidad de f en x . Por otro lado $\exists K \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq K \implies x_k \in B(x, \delta)$, luego si $k \geq K \implies f(x_k) \in B(f(x), \varepsilon)$.

Recíproco Si $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión de E convergente a $x \in E$, se tiene $f(x_n) \longrightarrow f(x)$, entonces la función f es continua en x .

Proposición 1.7.3 La función constante y la función identidad son continuas, es decir:

Si $f: A \subset E \longrightarrow G$ es tal que $f(x) = c$, $\forall x \in A$, entonces f es continua en A .

Si $f: E \longrightarrow E$ es tal que $f(x) = x$, $\forall x \in E$, entonces f es continua en E .

Demostración Si f es constante y O abierto en G , entonces $f^{-1}(O) = E \cap A$, si $c \in O$ ó $f^{-1}(O) = \emptyset \cap A = \emptyset$, si $c \notin O$, lo que demuestra que f es continua.

Si $f(x) = x$ y O abierto en $E \implies f^{-1}(O) = O$.

Proposición 1.7.4 Sean E, F, G espacios vectoriales normados, la composición de funciones continuas es continua, es decir si la función $f: A \subset E \longrightarrow G$ es continua en $a \in A$ y si $g: G \longrightarrow H$ es continua en $f(a)$, entonces $h = g \circ f$ es continua en a .

Demostración Sea $\varepsilon > 0$, como g es continua en $f(a)$, existe $\lambda > 0$ tal que $\|y - f(a)\| < \lambda \implies \|g(y) - g(f(a))\| < \varepsilon$. Por ser f es continua en a , existe $\delta > 0$ tal que $\|x - a\| < \delta$, $x \in A \implies \|f(x) - f(a)\| < \lambda$. Luego, si $\|x - a\| < \delta$, $x \in A \implies \|h(x) - h(a)\| < \varepsilon$.

Proposición 1.7.5 Se tienen las siguientes propiedades:

a) Sean $f: A \subset E \longrightarrow G$, $g: A \subset E \longrightarrow G$ dos funciones continuas en $a \in A$, entonces $f + g$ es continua en a y si $\lambda \in \mathbb{R}$, λf es continua en a .

b) Si $f: A \subset E \rightarrow \mathbb{R}$, $g: A \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ son continuas en $\mathbf{a} \in A$, entonces $f \cdot g$ es continua en \mathbf{a} y $\frac{f}{g}$ también es continua en \mathbf{a} , siempre y cuando $g(\mathbf{a}) \neq 0$.

Demostración La demostración es similar al caso de las funciones reales $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Definición 1.7.2 Sea $\boldsymbol{\kappa} = (\kappa_1, \dots, \kappa_n)$ un vector de enteros positivos o nulos, $q \in \mathbb{N}$ y sea $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, con $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, se denota $\mathbf{x}^{\boldsymbol{\kappa}} = x_1^{\kappa_1} x_2^{\kappa_2} \cdots x_n^{\kappa_n}$, $|\boldsymbol{\kappa}| = \sum_{j=1}^n \kappa_j$, entonces $P_q(\mathbf{x}) = \sum_{|\boldsymbol{\kappa}| \leq q} a_{\boldsymbol{\kappa}} \mathbf{x}^{\boldsymbol{\kappa}} = \sum_{|\boldsymbol{\kappa}| \leq q} a_{\kappa_1 \dots \kappa_n} x_1^{\kappa_1} \cdots x_n^{\kappa_n}$, donde $a_{\boldsymbol{\kappa}} = a_{\kappa_1 \dots \kappa_n}$ son constantes y la suma se realiza sobre todos los posibles vectores de enteros positivos con $|\boldsymbol{\kappa}| \leq q$, se denomina polinomio en n varias variables de grado q .

Corolario Todo polinomio en varias variables es continuo en \mathbb{R}^n . También son continuas las fracciones racionales donde no se anule el denominador.

Definición 1.7.3 La proyección i -ésima es la aplicación $p_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i, \quad \text{i.e. } p_i(\mathbf{x}) = x_i, \quad \text{para } i = 1, \dots, n.$$

Proposición 1.7.6 Las proyecciones son continuas en todo \mathbb{R}^n .

Demostración Es evidente de la siguiente relación:

$$|p_i(\mathbf{x}) - p_i(\mathbf{y})| = |x_i - y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

Definición 1.7.4 Sea $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, las funciones $p_i \circ f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se llaman funciones componentes de f y se designan por $f_i = p_i \circ f$, para $i = 1, \dots, p$.

La función f se escribe $f = (f_1, \dots, f_p)$, con $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ tal que $\mathbf{x} \mapsto (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_p(\mathbf{x}))$ y donde $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es tal que $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \mapsto f_i(\mathbf{x}) = f_i(x_1, \dots, x_n)$.

Proposición 1.7.7 Sea $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ con $f = (f_1, \dots, f_p)$ y $f_i: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, entonces f es continua en $\mathbf{a} \in A$ si y sólo si cada función componente f_i de f es continua en \mathbf{a} .

Demostración Si f es continua en \mathbf{a} , entonces $f_i = p_i \circ f$ es continua en \mathbf{a} , como composición de funciones continuas (proposición 1.7.4).

Supongamos que f_1, \dots, f_p son continuas en \mathbf{a} . Sea $\varepsilon > 0$, existe $\delta_i > 0$ tal que si

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta_i, \mathbf{x} \in A \implies |f_i(\mathbf{x}) - f_i(\mathbf{a})| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{p}}, \text{ para } i = 1, \dots, p.$$

Sea $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_p\}$, entonces $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta, \mathbf{x} \in A$ implica

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})\| = (|f_1(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{a})|^2 + \dots + |f_p(\mathbf{x}) - f_p(\mathbf{a})|^2)^{\frac{1}{2}} < \left(\frac{\varepsilon^2}{p} + \dots + \frac{\varepsilon^2}{p}\right)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon.$$

1.7.1 Funciones continuas y compactos

Teorema 1.7.1 Sea K un compacto de E , $f: K \rightarrow G$ una función continua sobre K , entonces $f(K)$ es compacto en G .

Demostración Sea $(W_i)_{i \in I}$ un recubrimiento abierto de $f(K)$.

$$f(K) \subset \bigcup_{i \in I} W_i \implies K \subset f^{-1}(f(K)) \subset \bigcup_{i \in I} f^{-1}(W_i).$$

Pero como f es continua $f^{-1}(W_i) = O_i \cap K$, con $O_i \subset E$ abierto y resulta que $K \subset \bigcup_{i \in I} O_i$ y por ser K es compacto:

$$\begin{aligned} K \subset O_{i_1} \cup \dots \cup O_{i_m} &\implies K \subset (O_{i_1} \cap K) \cup \dots \cup (O_{i_m} \cap K) \implies \\ f(K) &\subset f(O_{i_1} \cap K) \cup \dots \cup f(O_{i_m} \cap K) \subset W_{i_1} \cup \dots \cup W_{i_m}. \end{aligned}$$

Lema 1.7.1 Si $A \subset \mathbb{R}$ es acotado, entonces $\sup A \in \bar{A}$ y $\inf A \in \bar{A}$.

Teorema 1.7.2 Sea $K \subset E$ compacto y sea $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ continua en K , entonces existen $\alpha \in K$ y $\beta \in K$ tales que $f(\alpha) \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\beta), \forall \mathbf{x} \in K$, es decir la función es acotada en K y alcanza su máximo y su mínimo.

Demostración Por teorema 1.7.1, $f(K)$ es compacto ($f(K) \subset \mathbb{R}$), entonces es acotado y existen $a = \inf_{\mathbf{x} \in K} f(\mathbf{x}), b = \sup_{\mathbf{x} \in K} f(\mathbf{x})$. Por el Lema 1.7.1, $a \in \overline{f(K)}, b \in \overline{f(K)}$, pero $f(K)$ es cerrado ya que es compacto, entonces $a \in f(K)$ y $b \in f(K)$ y existen $\alpha \in K$ y $\beta \in K$ tales que $a = f(\alpha)$ y $b = f(\beta)$.

1.8 Continuidad uniforme

Definición 1.8.1 Sea $A \subset E$ y sea $f: A \rightarrow G$, decimos que f es uniformemente continua en A , si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $\forall \mathbf{x} \in A, \forall \mathbf{y} \in A$, con $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta \implies \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| < \varepsilon$.

Note que δ sólo puede depender de ε y no de \mathbf{x} o de \mathbf{y} .

Proposición 1.8.1 Si $f: A \subset E \rightarrow G$ es uniformemente continua en A , entonces es continua en A .

Demostración (Obvia)

Observación El recíproco es falso, una función puede ser continua en A sin ser uniformemente continua en A .

Ejemplo 1.8.1 Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $x \mapsto x^2$, esta función es continua en \mathbb{R} , sin embargo para $\varepsilon = 1$ y $\delta > 0$ tenemos $\left| \frac{\delta}{2} + \frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta} \right| = \frac{\delta}{2} < \delta$, pero $\left| f\left(\frac{\delta}{2} + \frac{1}{\delta}\right) - f\left(\frac{1}{\delta}\right) \right| = 1 + \frac{\delta^2}{4} > 1$, lo que muestra que para $\varepsilon < 1$ no se puede conseguir ningún $\delta > 0$ que cumpla la condición de la convergencia uniforme.

Teorema 1.8.1 Sea $K \subset E$ compacto, $f: K \rightarrow G$ continua en K , entonces f es uniformemente continua en K .

Demostración Sea $\varepsilon > 0$, puesto que f es continua en K , si $\mathbf{x} \in K$, existe $\delta_{\mathbf{x}} > 0$ tal que $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, \delta_{\mathbf{x}}) \implies f(\mathbf{y}) \in B(f(\mathbf{x}), \frac{1}{2}\varepsilon)$. Así, $K \subset \bigcup_{\mathbf{x} \in K} B(\mathbf{x}, \frac{1}{2}\delta_{\mathbf{x}})$ y como K es compacto se tiene, $K \subset B(\mathbf{x}_1, \frac{1}{2}\delta_{\mathbf{x}_1}) \cup \dots \cup B(\mathbf{x}_m, \frac{1}{2}\delta_{\mathbf{x}_m})$.

Sea $\delta = \min\{\frac{1}{2}\delta_{\mathbf{x}_1}, \dots, \frac{1}{2}\delta_{\mathbf{x}_m}\}$, si $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta$, ($\mathbf{x} \in K, \mathbf{y} \in K$), $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_{m_0}, \frac{1}{2}\delta_{\mathbf{x}_{m_0}})$, para algún m_0 ente 1 y m , entonces:

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_{m_0}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{m_0}\| < \frac{1}{2}\delta_{\mathbf{x}_{m_0}} + \frac{1}{2}\delta_{\mathbf{x}_{m_0}} = \delta_{\mathbf{x}_{m_0}} \implies \|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}_{m_0})\| < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Puesto que $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{m_0}\| < \frac{1}{2}\delta_{\mathbf{x}_{m_0}} < \delta_{\mathbf{x}_{m_0}}$, también $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_{m_0})\| < \frac{1}{2}\varepsilon$ y así:

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \leq \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_{m_0})\| + \|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}_{m_0})\| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Definición 1.8.2 Sea E y F espacios vectoriales normados y sea $f: E \rightarrow F$ una aplicación, se dice que f es k -lipschitziana⁸ si $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \leq k\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$.

Si $0 \leq k < 1$ se dice que f es contractiva.

1.9 Aplicaciones lineales continuas

Proposición 1.9.1 Sea E y F espacios vectoriales normados y sea $f: E \rightarrow F$ una aplicación lineal, entonces las proposiciones siguientes son equivalentes:

- f es continua
- f es continua en el origen
- f es acotada en la bola unidad
- existe $M > 0$ tal que $\|f(\mathbf{x})\| \leq M\|\mathbf{x}\|, \forall \mathbf{x} \in E$.

Demostración

a) \implies b) Es claro.

b) \implies c) Sea $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $\|\mathbf{x}\| < \delta \implies \|f(\mathbf{x})\| < \epsilon$, entonces si $\mathbf{x} \in E$, con $0 < \|\mathbf{x}\| < 1$, se tiene $\left\| \frac{\delta \mathbf{x}}{2\|\mathbf{x}\|} \right\| = \frac{\delta}{2} < \delta \implies \left\| f\left(\frac{\delta \mathbf{x}}{2\|\mathbf{x}\|}\right) \right\| = \frac{\delta}{2\|\mathbf{x}\|} \|f(\mathbf{x})\| < \epsilon$, es decir que si $\mathbf{x} \in E$, con $\|\mathbf{x}\| < 1$, tenemos $\|f(\mathbf{x})\| < \frac{2\epsilon}{\delta} \|\mathbf{x}\| \leq \frac{2\epsilon}{\delta} = M$, es decir f es acotada en la bola unidad.

c) \implies d) Si $\|f(\mathbf{x})\| \leq M, \forall \mathbf{x} \in E$, con $\|\mathbf{x}\| \leq 1$, entonces si $\mathbf{x} \in E$, con $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $\left\| \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \right\| = 1$ y se

⁸**Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1832-1903)** Nace el 4 de mayo de 1832 en Königsberg, Alemania (hoy Kaliningrado, Rusia). Muere el 7 de octubre de 1903 en Bonn, Alemania. Su padre era un hacendado. Empezó sus estudios universitarios muy joven, bajo la supervisión de Franz Neumann. También estudió en Berlín con Dirichlet. Completó su doctorado en 1853 y fue lector de la tesis de Klein en Bonn en 1868. Sus contribuciones más notables se dan en teoría de números, funciones de Bessel y series de Fourier, ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, mecánica analítica y teoría potencial. Su trabajo en la interpretación mecánica de la geometría diferencial de Riemann resultaría un paso esencial en el camino hacia la teoría especial de Einstein de relatividad: Lipschitz se recuerda para la “condición de Lipschitz”, una desigualdad que garantiza una solución extraordinaria a la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$. Peano dio un teorema de la existencia para esta ecuación diferencial, las condiciones garantizan por lo menos una solución. Su trabajo en la teoría algebraica de números lo dirigió para estudiar los cuaterniones y la generalización de las álgebras de Clifford. Lipschitz redescubrió las álgebras de Clifford y fue el primer en aplicarlas para representar rotaciones en espacios euclidianos.

tiene $\left\| f \left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \right) \right\| \leq M$, es decir $\|f(\mathbf{x})\| \leq M\|\mathbf{x}\|$.

d) \implies a) Es evidente.

Observemos que d) implica continuidad uniforme, o sea que una aplicación lineal continua es uniformemente continua.

Definición 1.9.1 Sean E y F espacios vectoriales normados, el espacio de aplicaciones lineales continuas de E a F , que denotamos $\mathcal{L}(E, F)$ es un espacio vectorial.

Al espacio de funciones lineales continuas que son invertibles, lo denotamos $\text{Isom}(E, F)$ y es un subespacio de $\mathcal{L}(E, F)$.

El espacio vectorial de aplicaciones lineales lo denotamos $\mathcal{L}(E, F) \supset \mathcal{L}(E, F)$.

Sea $f \in \mathcal{L}(E, F)$, entonces existe $M > 0$ tal que $\|f(\mathbf{x})\| \leq M\|\mathbf{x}\|, \forall \mathbf{x} \in E$, por lo que existe $\sup_{\substack{\mathbf{x} \in E \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}}} \frac{\|f(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} = \sup_{\|\mathbf{y}\|=1} \|f(\mathbf{y})\|$ y lo denotamos $\|f\|^*$. Así, la aplicación $\|\cdot\|^*: \mathcal{L}(E, F) \longrightarrow \mathbb{R}$ es una norma sobre $\mathcal{L}(E, F)$.

Se podrá escribir $\|f(\mathbf{x})\| \leq \|f\|^* \|\mathbf{x}\|$. En lo sucesivo se prescindirá del $*$ en la norma de la aplicación lineal, ya que en el contexto es claro la norma que se está tratando.

Teorema 1.9.1 Si F es un espacio de Banach, entonces $\mathcal{L}(E, F)$ también es un espacio de Banach.

Demostración Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}(E, F)$, entonces para $\mathbf{x} \in E$, $\|f_m(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x})\| \leq \|f_n - f_m\| \|\mathbf{x}\|$, pero como $(f_n(\mathbf{x}))_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en F , tiene un límite que lo denotamos $f(\mathbf{x})$. Así se ha definido $f: E \longrightarrow F$, donde $f(\mathbf{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\mathbf{x})$. Falta probar que $f \in \mathcal{L}(E, F)$ y que $f_n \longrightarrow f$ en $\mathcal{L}(E, F)$.

– f es lineal, ya que $f(\lambda \mathbf{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\lambda \mathbf{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda f_n(\mathbf{x}) = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x})$,

$f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(\mathbf{x}) + f_n(\mathbf{y})) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$,

– f es continua, pues si $\epsilon > 0$, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq n_o$ se tiene $\|f_n - f_m\| < \epsilon$, por lo tanto:

$$\|f_n\| \leq \|f_n - f_m\| + \|f_m\| \implies \|f_n\| < \epsilon + \|f_{n_o}\|,$$

con lo cual tenemos que si $\mathbf{x} \in E$:

$$\|f(\mathbf{x})\| = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\mathbf{x}) \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(\mathbf{x})\| \leq (\|f_{n_0}\| + \epsilon)\|\mathbf{x}\|$$

y se concluye que $f \in L(E, F)$.

– Finalmente, veamos que $f_n \rightarrow f$ en $L(E, F)$. Sean $\epsilon > 0$, n_0 y \mathbf{x} dados anteriormente, entonces si $n, m \geq n_0$ se tiene que:

$$\|f_n(\mathbf{x}) - f_m(\mathbf{x})\| \leq \|f_n - f_m\| \|\mathbf{x}\| \leq \epsilon \|\mathbf{x}\|,$$

por lo que, tomando el límite cuando $n \rightarrow \infty$:

$$\|f_m(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})\| \leq \epsilon \|\mathbf{x}\|,$$

es decir que si $m \geq n_0$, se cumple:

$$\|f_m - f\| = \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \|(f_m - f)(\mathbf{x})\| \leq \epsilon,$$

i.e. $f_m \rightarrow f$ en $L(E, F)$, lo que verifica que $L(E, F)$ es completo.

Si $F = \mathbb{R}$, $L(E, \mathbb{R})$ es un espacio de Banach, que se llama dual topológico de E y lo denotamos E' . Recordemos que al conjunto $L(E, \mathbb{R})$ de formas lineales sobre E se llama dual algebraico de E y se denota E^* . Es claro que $E' \subset E^*$.

Si E es un espacio vectorial de dimensión finita, tenemos que $\mathcal{L}(E, F) = L(E, F)$.

Si $E = F$, $L(E, E)$ se denota $L(E)$ y sus elementos se llaman operadores en E .

Definición 1.9.2 Sean E y F espacios vectoriales normados, una función $f: E \rightarrow F$ se dice que es un homeomorfismo si f es biyectiva y tanto f como f^{-1} son continuas.

Teorema 1.9.2 Sea E un espacio vectorial normado de dimensión finita y sea $\Omega \subset L(E)$ formado por los elementos invertibles de $L(E)$, entonces:

1. Si $f \in \Omega$, con $\|f^{-1}\| = \alpha^{-1}$ y $g \in L(E)$, con $\|f - g\| = \beta < \alpha \implies g \in \Omega$
2. Ω es un abierto de $L(E)$

3. $p: \Omega \longrightarrow \Omega$ tal que $p(f) = f^{-1}$ es un homeomorfismo.

Demostración

1. En efecto, si $\mathbf{x} \in E$, $\|\mathbf{x}\| = \|f^{-1}(f(\mathbf{x}))\| \leq \alpha^{-1}\|f(\mathbf{x})\|$, por lo que:

$$(\alpha - \beta)\|\mathbf{x}\| \leq \|f(\mathbf{x})\| - \beta\|\mathbf{x}\| \leq \|f(\mathbf{x})\| - \|(g - f)(\mathbf{x})\| \leq \|g(\mathbf{x})\| \quad (1.3)$$

i.e. g es inyectiva, o sea $g \in \Omega$, ya que si $g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{y}) \implies 0 = \|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{y})\| \geq (\alpha - \beta)\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \implies \mathbf{x} = \mathbf{y}$. Así se tiene que g es biyectiva i.e. $g \in \Omega$.

2. Sea $f \in \Omega$, $\|f^{-1}\| = \alpha^{-1}$ y sea $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon < \alpha$, entonces $B(f, \frac{\epsilon}{2}) \subset \Omega$, pues si $g \in B(f, \frac{\epsilon}{2}) \implies \|g - f\| < \frac{\epsilon}{2} < \epsilon < \alpha \implies g \in \Omega$.

3. Si en (1.3) tomamos $\mathbf{x} = g^{-1}(\mathbf{y})$ se tiene:

$$(\alpha - \beta)\|g^{-1}(\mathbf{y})\| \leq \|g(g^{-1}(\mathbf{y}))\| = \|\mathbf{y}\| \implies \|g^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha - \beta}.$$

Además, $g^{-1} - f^{-1} = g^{-1}(f - g)f^{-1} \implies \|f^{-1} - g^{-1}\| \leq \|f^{-1}\|\|f - g\|\|g^{-1}\|$, es decir que $\|p(f) - p(g)\| \leq M\|f - g\|$, con $M = \frac{1}{\alpha(\alpha - \beta)}$, lo que prueba que p es continua y como $p = p^{-1}$, tenemos que p es un homeomorfismo de Ω .

1.9.1 Matrices

Sean E, F y G espacios vectoriales normados de dimensiones finitas (n, m y r respectivamente), con bases B_E, B_F y B_G respectivamente. Sea $f \in L(E, F)$, sea $A(m \times n)$ la matriz asociada a f por las bases B_E y B_F y sea $g \in L(F, G)$ con matriz asociada $B(r \times m)$ por las bases B_F y B_G . La matriz asociada a la composición $g \circ f \in L(E, G)$, en las bases B_E y B_G es la matriz $BA(r \times n)$.

Observemos que si $\mathfrak{M}_{m \times n}$ es el conjunto de matrices $m \times n$, es un espacio vectorial normado (Banach) que es isomorfo a $\mathbb{R}^{n \cdot m}$.

La norma $\|\cdot\|_i$ en \mathbb{R}^n induce una norma en $\mathfrak{M}_{n \times n}$, de modo que si $A \in \mathfrak{M}_{n \times n}$, $\|A\|_i^* =$

$\sup_{\|\mathbf{x}\|_i=1} \|A\mathbf{x}\|_i$. Se verifica que:

1. $\|A\|_1^* = \sup_{\|\mathbf{x}\|_1=1} \|A\mathbf{x}\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|.$
2. $\|A\|_2^* = \sup_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \|A\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i},$ donde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son los valores propios de $A'A.$
3. $\|A\|_\infty^* = \sup_{\|\mathbf{x}\|_\infty=1} \|A\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$

Sea E un espacio vectorial normado, la norma $\mathbf{u} \mapsto \|\mathbf{u}\|$ es una aplicación continua de E en \mathbb{R} , pues $|\|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\|| \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|.$

La topología de E es separada⁹ ya que si $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = r$ y las bolas abiertas $B(\mathbf{x}, \frac{1}{2}r)$, $B(\mathbf{y}, \frac{1}{2}r)$ son disjuntas.

Ejemplo 1.9.1 Sea X un espacio topológico y sea $\mathcal{C}_b(X, \mathbb{R})$ el conjunto de las funciones numéricas $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, continuas y acotadas. Decir que f es acotada significa que $\sup_{\mathbf{x} \in X} |f(\mathbf{x})|$ es finito. Es claro que $\mathcal{C}_b(X, \mathbb{R})$ es un espacio vectorial, entonces se define $\|f\| = \sup_{\mathbf{x} \in X} |f(\mathbf{x})|.$ Se puede probar que $\|f\|$ es una norma sobre $\mathcal{C}_b(X, \mathbb{R})$ que se denomina norma de la convergencia de funciones. Con esta norma el espacio $\mathcal{C}_b(X, \mathbb{R})$ es completo, pues el límite de una sucesión uniformemente convergente de funciones continuas y acotadas es una función continua y acotada.

Ejemplo 1.9.2 Consideremos ahora $\mathcal{C}_b(X, F)$, con F un espacio de Banach; así definimos $\|f\| = \sup_{\mathbf{x} \in X} \|f(\mathbf{x})\|_F,$ $\|f\|$ es una norma, es decir $\mathcal{C}_b(X, F)$ es un espacio vectorial normado completo.

Definición 1.9.3 Sea $(\mathbf{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en E , espacio de Banach, la serie de término general \mathbf{u}_p es convergente a $\mathbf{u} \in E$, si $\mathbf{x}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i \rightarrow \mathbf{u}$, es decir $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N \implies \|\mathbf{x}_n - \mathbf{u}\| < \epsilon.$ El límite \mathbf{u} se denota $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{u}_n.$

Definición 1.9.4 Sea $(\mathbf{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de E , espacio de Banach, se dice que la serie de término general \mathbf{u}_n es normalmente convergente, si la serie de las normas $\sum_{n \geq 0} \|\mathbf{u}_n\|$ es convergente.

⁹Una topología \mathfrak{T} sobre un conjunto E se dice separable si $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ tales que $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, existe abiertos U y V de modo que $\mathbf{x} \in U, \mathbf{y} \in V$ con $U \cap V = \emptyset.$

Nota Existen series convergentes sin ser normalmente convergentes, como por ejemplo

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}.$$

Teorema 1.9.3 Si la serie de término general \mathbf{u}_n en E espacio de Banach, es normalmente convergente, entonces es convergente y $\left\| \sum_{n \geq 0} \mathbf{u}_n \right\| \leq \sum_{n \geq 0} \|\mathbf{u}_n\|$.

Demostración Sea $\mathbf{x}_n = \sum_{k=0}^n \mathbf{u}_k$, probemos que $(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy, es decir $(\mathbf{x}_n)_n$ converge a $\mathbf{u} \in E$.

Sea $\epsilon > 0$, como $\sum_{n \geq 0} \|\mathbf{u}_n\|$ converge, $\exists N$ tal que si $n, p \geq N \implies \sum_{k=n}^{n+p} \|\mathbf{u}_k\| < \epsilon$, así tenemos

$$\text{que } \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n+p}\| = \left\| \sum_{k=n}^{n+p} \mathbf{u}_k \right\| \leq \sum_{k=n}^{n+p} \|\mathbf{u}_k\| < \epsilon.$$

Además, $\|\mathbf{x}_n\| \leq \sum_{k=0}^n \|\mathbf{u}_k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|\mathbf{u}_k\|$, o sea $\|\mathbf{u}\| = \left\| \sum_{n \geq 0} \mathbf{u}_n \right\| \leq \sum_{n \geq 0} \|\mathbf{u}_n\|$.

Ejemplo 1.9.3 Consideremos ahora $\mathbf{u}_n \in \mathcal{C}_b(X, \mathbb{R})$, decir que \mathbf{u}_n es el término general de una serie normalmente convergente, con \mathbf{u}_n una función numérica continua y acotada sobre el espacio topológico X equivale a que existe una serie convergente de términos positivos $\epsilon_n \geq 0$ tales que se verifica $\forall n \in \mathbb{N}, |\mathbf{u}_n(\mathbf{x})| \leq \epsilon_n, \forall \mathbf{x} \in X$. En efecto, basta tomar $\epsilon_n = \|\mathbf{u}_n\| = \sup_{\mathbf{x} \in X} |\mathbf{u}_n(\mathbf{x})|$ y tenemos así la noción de convergencia en norma de una serie de funciones.

1.9.2 Composición de aplicaciones lineales continuas

Sean E, F, G espacios vectoriales normados y sean $f: E \longrightarrow F, g: F \longrightarrow G$ aplicaciones lineales y continuas, entonces $g \circ f: E \longrightarrow G$ es una aplicación lineal y continua. Para todo $\mathbf{x} \in E$ se tiene que $\|g \circ f(\mathbf{x})\| = \|g(f(\mathbf{x}))\| \leq \|g\| \|f(\mathbf{x})\| \leq \|g\| \|f\| \|\mathbf{x}\|$, por lo que $\|g \circ f\| \leq \|g\| \|f\|$.

Definición 1.9.5 Sea E, F espacios vectoriales normados, la aplicación $f: E \longrightarrow F$ es un isomorfismo si:

i) f es lineal y continua.

ii) existe g lineal y continua, $g: F \longrightarrow E$, tal que $g \circ f = I_E$ y $f \circ g = I_F$.

Es claro que estas condiciones implican que f es una biyección de E en F y que g es biyectiva. Sin embargo si f es lineal biyectiva continua, no implica que la biyección inversa g sea continua. De estas observaciones se tiene otra caracterización de los isomorfismos: Para que $f: E \rightarrow F$ sea un isomorfismo es necesario y suficiente que f sea un homeomorfismo (de espacios topológicos) y que sea lineal.

Señalamos sin demostración un teorema muy importante en análisis debido a Banach.

Teorema 1.9.4 Banach *Si E y F son espacios de Banach, toda aplicación lineal continua biyectiva $f: E \rightarrow F$ es un isomorfismo.*

Nota El teorema indica que la aplicación inversa $f^{-1}: F \rightarrow E$ es continua.

Definición 1.9.6 *Sean E, F espacios vectoriales normados, una aplicación $f: E \rightarrow F$ es una isometría si f es lineal biyectiva tal que $\|f(\mathbf{x})\|_F = \|\mathbf{x}\|_E, \forall \mathbf{x} \in E$.*

Esta condición implica que $\|f(\mathbf{x})\|$ es acotada sobre la bola unidad, por lo cual f es una aplicación lineal continua. El mismo razonamiento prueba que la aplicación inversa g es lineal continua. Así toda isometría es un isomorfismo, pero el recíproco no es cierto, pues por ejemplo, una homotecia $\mathbf{x} \mapsto \lambda\mathbf{x}$ es un isomorfismo de E en E , pero no es una isometría si $|\lambda| \neq 1$.

Teorema 1.9.5 *Sea E un espacio vectorial normado de dimensión finita, entonces E es un espacio de Banach y toda aplicación lineal de E en un espacio vectorial normado F es continua.*

Demostración Sea $n = \dim E$, existe una aplicación lineal biyectiva $f: \mathbb{R}^n \rightarrow E$ y es un isomorfismo. Como \mathbb{R}^n es completo, E es completo.

Sea $g: E \rightarrow F$ lineal, si se prueba que $h = g \circ f: \mathbb{R}^n \rightarrow F$ es continua, se tiene que $g = h \circ f^{-1}$ es continua. Falta probar que toda aplicación lineal $h: \mathbb{R}^n \rightarrow F$ es continua.

En efecto, $h(\mathbf{x}) = h\left(\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i h(\mathbf{e}_i) \therefore \|h(\mathbf{x})\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|h(\mathbf{e}_i)\| \leq M \|\mathbf{x}\|_1$, con $M = \max\{\|h(\mathbf{e}_i)\|/i = 1, \dots, n\}$, así h es continua.

Ejemplo 1.9.4 Si $E = \mathbb{R}$, vamos a definir una isometría natural $L(\mathbb{R}, F) \simeq F$. Sea $\mathbf{y} \in F$, la aplicación lineal $\lambda \mapsto \lambda \mathbf{y}$ de \mathbb{R} en F , es continua pues $\|\lambda \mathbf{y}\| = \|\mathbf{y}\| |\lambda|$ y se tiene una aplicación $\varphi: F \rightarrow L(\mathbb{R}, F)$ que es lineal. Además la aplicación lineal $\varphi(\mathbf{y}): \mathbb{R} \rightarrow F$ tiene norma $\|\mathbf{y}\|$.

Inversamente, sea $f: \mathbb{R} \rightarrow F$ una aplicación lineal y sea $f(1) \in F$. Así se define una aplicación $\psi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, F)$ que es lineal. Es claro que φ y ψ son inversas una de la otra y cada una es una biyección. Además es una isometría, puesto que $\|\varphi(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{y}\|$.

Ejemplo 1.9.5 Sea E un espacio de Banach real; entonces $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ es un espacio de Banach real, llamado dual topológico de E y sus elementos son formas lineales continuas de E . No debe confundirse con el dual algebraico, que comprende las formas lineales continuas o no. Cuando E es de dimensión finita n , el dual topológico y el dual algebraico coinciden, el cual es también de dimensión n .

En general designamos con E^* el dual topológico de E que es un espacio de Banach.

Ejemplo 1.9.6 Consideremos $L(E, E)$ espacio de Banach, si E es de Banach. Además $g \circ f \in L(E, E)$, pero $g \mapsto g \circ f$ y $f \mapsto g \circ f$ son lineales. Una aplicación de este tipo se denomina bilineal. En general si en un espacio vectorial normado H se define una ley de composición interna (llamada multiplicación) bilineal se dice que H tiene la estructura de álgebra sobre el campo \mathbb{R} . Así tenemos que $L(E, E)$ es un álgebra asociativa y tenemos una norma tal que $\|g \circ f\| \leq \|g\| \|f\|$.

Dado que E es de Banach, diremos que $L(E, E)$ es un álgebra de Banach. En general se tiene que $\|g \circ f\| \neq \|g\| \|f\|$.

Teorema 1.9.6 Si E es un espacio de Banach y si $f \in L(E, E)$, la serie $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} f^n$ es normalmente convergente. Su suma se representa por e^f .

Demostración Por convención $f^0 = I$ elemento unidad del álgebra. Además $\|f^n\| \leq \|f\|^n$, por lo que la serie de las normas está acotada por $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \|f\|^n = e^{\|f\|}$, serie que es

convergente. Además, $\|e^f\| \leq e^{\|f\|}$.

Nota Observemos que si $g \circ f = f \circ g$ se tiene $e^f \circ e^g = e^{f+g}$. En particular $e^0 = I$ y $e^f \circ e^{-f} = I$ i.e. e^f es invertible en $L(E, E)$.

Las afirmaciones anteriores son válidas para toda álgebra de Banach.

Teorema 1.9.7 Sea E un espacio Banach y sea $\mathbf{u} \in L(E, E)$ tal que $\|\mathbf{u}\| < 1$, entonces $I - \mathbf{u}$ tiene inversa en $L(E, E)$ dada por $\sum_{n \geq 0} \mathbf{u}^n$.

Demostración La serie $\sum_{n \geq 0} \mathbf{u}^n = I + \mathbf{u} + \dots + \mathbf{u}^n + \dots$ es normalmente convergente puesto que $\|\mathbf{u}^n\| \leq \|\mathbf{u}\|^n$ y que la serie geométrica $\sum_{n \geq 0} \|\mathbf{u}\|^n$ es convergente, pues $\|\mathbf{u}\| < 1$.

Sea $\mathbf{v} = \sum_{n \geq 0} \mathbf{u}^n$, entonces $\mathbf{u}\mathbf{v} = \mathbf{v}\mathbf{u}$ que es la suma de la serie $\sum_{n \geq 1} \mathbf{u}^n$, entonces $\mathbf{v}(I - \mathbf{u}) = (I - \mathbf{u})\mathbf{v} = I$, es decir \mathbf{v} es el inverso de $(I - \mathbf{u})$.

Corolario 1.9.1 Si $\|\mathbf{u} - I\| < 1$, entonces \mathbf{u} tiene inversa dada por $\sum_{n \geq 0} (I - \mathbf{u})^n$.

Teorema 1.9.8 Sean E, F espacios de Banach, sea $\text{Isom}(E, F) \subset L(E, F)$, el subconjunto formado por los isomorfismos $E \rightarrow F$, entonces

i) $\text{Isom}(E, F)$ es abierto en $L(E, F)$

ii) la aplicación $\varphi: \text{Isom}(E, F) \rightarrow L(E, F)$, con $\varphi(\mathbf{u}) = \mathbf{u}^{-1}$ es continua.

Demostración Si $\text{Isom}(E, F) = \emptyset$ se tiene el resultado. Si $\text{Isom}(E, F) \neq \emptyset$, sea $\mathbf{u}_o \in \text{Isom}(E, F)$.

a) Debemos probar que si $\mathbf{u} \in L(E, F)$ está suficientemente próximo a \mathbf{u}_o , también es un isomorfismo. Pero para que $\mathbf{u}: E \rightarrow F$ sea un isomorfismo es necesario y suficiente que $\mathbf{u}_o^{-1}\mathbf{u}: E \rightarrow E$ sea un isomorfismo. Busquemos una condición suficiente para que $\mathbf{u}_o^{-1}\mathbf{u}$ sea un isomorfismo, es decir que $\|\mathbf{u}\|$ sea invertible en $L(E, F)$.

Sea $\mathbf{u}_o^{-1}\mathbf{u} = I - \mathbf{v}$, entonces si $\|\mathbf{v}\| < 1$ se tiene $I - \mathbf{v} = \mathbf{u}_o^{-1}\mathbf{u}$ es invertible, pero $\mathbf{v} = I - \mathbf{u}_o^{-1}\mathbf{u} = \mathbf{u}_o^{-1}(\mathbf{u}_o - \mathbf{u}) \implies \|\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}_o^{-1}\| \|\mathbf{u}_o - \mathbf{u}\|$, entonces si $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_o\| < \frac{1}{\|\mathbf{u}_o^{-1}\|}$ se puede asegurar que $\|\mathbf{v}\| < 1$ y por lo tanto \mathbf{u} es un isomorfismo. Así queda demostrado que todo \mathbf{u} suficientemente cercano a \mathbf{u}_o es un isomorfismo ($B(\mathbf{u}_o, \frac{1}{\|\mathbf{u}_o^{-1}\|}) \subset \text{Isom}(E, F)$).

Observemos que $\|\mathbf{u}_\circ^{-1}\| \neq \frac{1}{\|\mathbf{u}_\circ\|}$.

b) Sabemos que $\mathbf{u}^{-1} = \mathbf{u}_\circ^{-1}(I - \mathbf{v})^{-1} = (I - \mathbf{v})^{-1}\mathbf{u}_\circ^{-1} \implies \mathbf{u}^{-1} - \mathbf{u}_\circ^{-1} = [(I - \mathbf{v})^{-1} - I]\mathbf{u}_\circ^{-1}$, pero $(I - \mathbf{v})^{-1} = \sum_{n \geq 0} \mathbf{v}^n$, por lo tanto $(I - \mathbf{v})^{-1} - I = \sum_{n \geq 1} \mathbf{v}^n \therefore \|(I - \mathbf{v})^{-1} - I\| \leq \sum_{n \geq 1} \|\mathbf{v}\|^n = \frac{\|\mathbf{v}\|}{1 - \|\mathbf{v}\|} \implies \|\mathbf{u}^{-1} - \mathbf{u}_\circ^{-1}\| \leq \|\mathbf{u}_\circ^{-1}\| \frac{\|\mathbf{v}\|}{1 - \|\mathbf{v}\|}$.

Por otro lado, si $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}_\circ$, $\|\mathbf{v}\| \rightarrow 0$, entonces $\mathbf{u}^{-1} \rightarrow \mathbf{u}_\circ^{-1}$ lo que demuestra que φ es continua.

Nota Cuando E y F tienen la misma dimensión finita n y se identifica $L(E, F)$ al espacio de las matrices de n filas y n columnas. Se sabe que una matriz f es invertible, si la condición $\det f \neq 0$. Por ser continua la aplicación, $f \mapsto \det f$ de L en \mathbb{R} , la imagen inversa de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ es un abierto i.e. $\det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \text{Isom}(E, F)$.

1.10 Aplicaciones multilineales continuas

Definición 1.10.1 Sean E_1, E_2, \dots, E_n, F espacios vectoriales y sea $f: E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$ una aplicación, se denomina multilineal, si para cada $k = 1, \dots, n$ y para cada sistema de elementos $\mathbf{a}_i \in E_i$, $i \neq k$, la aplicación parcial $\mathbf{x}_k \mapsto f(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{x}_k, \mathbf{a}_{k+1}, \dots, \mathbf{a}_n)$ de E_k en F es lineal.

Observemos que $f(\lambda_1 \mathbf{x}_1, \dots, \lambda_n \mathbf{x}_n) = \lambda_1 \cdots \lambda_n f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$.

Teorema 1.10.1 Sean E_1, E_2, \dots, E_n, F espacios vectoriales y sea $f: E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$ una aplicación multilineal. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- i) f es continua en $E_1 \times \dots \times E_n$
- ii) f es continua en $(\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}) \in E_1 \times \dots \times E_n$
- iii) $\|f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)\|$ está acotada en el producto de bolas unitarias, $\|\mathbf{x}_1\| \leq 1, \dots, \|\mathbf{x}_n\| \leq 1$.

Demostración

i) \implies ii) Es claro.

ii) \implies iii) Como f es continua en $(\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})$, dado $\epsilon = 1$, $\exists \rho > 0$ tal que si $\|\mathbf{x}_i\| \leq \rho$,

para todo $i = 1, \dots, n$ implica $\|f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)\| \leq 1$, por lo que $\|\mathbf{x}_i\| \leq 1$, para todo $i = 1, \dots, n \implies \|f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)\| \leq \frac{1}{\rho^n}$, lo que prueba iii).

iii) \implies i) Suponiendo que iii) es cierta, $\exists M > 0$ tal que si $\|\mathbf{x}_i\| \leq 1$, $i = 1, \dots, n \implies \|f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)\| \leq M$, así $\forall \mathbf{x}_i \in E_i$, $i = 1, \dots, n$, se tiene que $\|f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)\| \leq M\|\mathbf{x}_1\| \cdots \|\mathbf{x}_n\|$.

Demostraremos que en estas condiciones f es continua en un punto arbitrario $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$.

Ahora,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) - f(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) &= f(\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{x}_n) + f(\mathbf{a}_1, \mathbf{x}_2 - \mathbf{a}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_n) + \\ &\quad \cdots + f(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{x}_n - \mathbf{a}_n), \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} \|f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) - f(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)\| &\leq M\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}_1\| \cdots \|\mathbf{x}_n\| + M\|\mathbf{a}_1\| \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{a}_2\| \|\mathbf{x}_3\| \cdots \|\mathbf{x}_n\| + \\ &\quad \cdots + M\|\mathbf{a}_1\| \cdots \|\mathbf{a}_{n-1}\| \|\mathbf{x}_n - \mathbf{a}_n\|. \end{aligned}$$

Si $\|\mathbf{x}_i - \mathbf{a}_i\| < \epsilon$, $\forall i = 1, \dots, n$, se tiene que $\|\mathbf{x}_i\| \leq \|\mathbf{a}_i\| + \epsilon$, $\forall i = 1, \dots, n$ i.e. $\exists A > 0$ tal que $\|\mathbf{x}_i\| \leq A$, $\forall i = 1, \dots, n$, independiente de ϵ . Así se tiene que $\|f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) - f(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)\| \leq MA^{n-1} \sum_{i=1}^n \|\mathbf{x}_i - \mathbf{a}_i\| \leq nMA^{n-1}\epsilon$, lo cual prueba la continuidad de la función f . Pero si se define la norma $\|(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)\| = \sum_{i=1}^n \|\mathbf{x}_i\|$ en $E_1 \times \cdots \times E_n$, basta escoger $\delta = \frac{\epsilon}{nMA^{n-1}}$.

Observemos que si $L(E_1, \dots, E_n; F)$ es el conjunto de aplicaciones lineales continuas de $E_1 \times \cdots \times E_n$ en F , es un subespacio vectorial del espacio de todas las aplicaciones de $E_1 \times \cdots \times E_n$ en F . Para $f \in L(E_1, \dots, E_n; F)$ se escribirá:

$$\|f\| = \sup_{\substack{\|\mathbf{x}_i\| \leq 1 \\ i=1, \dots, n}} \|f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)\|,$$

entonces $\|f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)\| \leq \|f\| \|\mathbf{x}_1\| \cdots \|\mathbf{x}_n\|$, donde f es el menor de los $M \geq 0$ que satisface $\|f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)\| \leq M\|\mathbf{x}_1\| \cdots \|\mathbf{x}_n\|$.

Ejercicio 1.10.1

a) Verificar que $\|f\|$ es una norma en el espacio vectorial normado $L(E_1, \dots, E_n; F)$

b) Verificar que si F es un espacio de Banach, $L(E_1, \dots, E_n; F)$ es también de Banach.

Ejemplo 1.10.1 Aplicación bilineal continua Sean E, F y G espacios vectoriales normados y sea $\varphi: L(F, G) \times L(E, F) \longrightarrow L(E, G)$ la aplicación compuesta i.e. $\varphi(g, f) = g \circ f$.

Observemos que esta aplicación es bilineal y que $\|g \circ f\| \leq \|g\| \|f\|$, lo cual implica que φ es continua y $\|\varphi\| \leq 1$.

Isometría entre $L(E, F; G)$ y $L(E; L(F, G))$

Vamos a definir una aplicación $\varphi: L(E, F; G) \longrightarrow L(E, L(F, G))$ de la siguiente manera. Sea $f \in L(E, F; G)$, $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ es una función de dos variables $\mathbf{x} \in E, \mathbf{y} \in F$. Fijada \mathbf{x} , la aplicación $\mathbf{y} \mapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ lineal de F en G y la representaremos $f_{\mathbf{x}}$. Se tiene:

$$\|f_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})\| = \|f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\| \leq \|f\| \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \quad \therefore \quad \|f_{\mathbf{x}}\| \leq \|f\| \|\mathbf{x}\|,$$

es decir $f_{\mathbf{x}}$ es una aplicación lineal continua, entonces $\mathbf{x} \mapsto f_{\mathbf{x}}$ es una aplicación $g: E \longrightarrow L(F, G)$ que también es lineal. Además $\|g(\mathbf{x})\| \leq \|f\| \|\mathbf{x}\|$, luego g es continua con $\|g\| \leq \|f\|$.

Hemos asociado a $f \in L(E, F; G)$ un elemento $g \in L(E, L(F, G))$ que por definición es $\varphi(f)$. Es claro que φ es lineal y que $\|\varphi(f)\| = \|g\| \leq \|f\| \therefore \|\varphi\| \leq 1$. Vamos ahora a definir una aplicación en el sentido inverso:

$$\psi: L(E, L(F, G)) \longrightarrow L(E, F; G).$$

Partamos de una aplicación lineal continua $g: E \longrightarrow L(F, G)$. Para $\mathbf{x} \in E, g(\mathbf{x}) \in L(F, G)$ i.e. para $\mathbf{x} \in E, \mathbf{y} \in F, g(\mathbf{x})(\mathbf{y})$ es una aplicación bilineal.

$f: E \times F \longrightarrow G$ es tal que $\|g(\mathbf{x})(\mathbf{y})\| = \|f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\| \leq \|g(\mathbf{x})\| \|\mathbf{y}\| \leq \|g\| \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$, lo que prueba que f es bilineal, continua y que $\|f\| \leq \|g\|$. Así cada $g \in L(E, L(F, G))$ define $f \in L(E, F; G)$ dada por $\varphi(\mathbf{y})$. Es claro que ψ es lineal y que $\|f\| \leq \|g\|$ i.e. $\|\psi\| \leq 1$. Ahora, las aplicaciones φ, ψ son inversas una de la otra, por lo que $\psi \circ \varphi$ es la identidad de $L(E \times F, G)$, su norma es 1, entonces $1 = \|\psi \circ \varphi\| \leq \|\psi\| \|\varphi\|$ y como $\|\varphi\| \leq 1, \|\psi\| \leq 1$, se tiene $\|\varphi\| = \|\psi\| = 1$. Así φ conserva la norma; es una isometría.

1.11 Ejercicios

1.11.1 Generalidades

- Dar un ejemplo de dos subconjuntos A y B de X tales que $B \subset A$ y de una aplicación $f: X \rightarrow Y$ tal que $f(A \setminus B) \neq f(A) \setminus f(B)$.
- Dar un ejemplo de aplicaciones $f: X \rightarrow Y$ y de subconjuntos $A \subset X$ tales que:
 - $f(X \setminus A) \subset Y \setminus f(A)$
 - $f(X \setminus A) \supset Y \setminus f(A)$
 - que no se cumpla a) ni b).
- ¿Se relacionan de algún modo los conjuntos $f^{-1}(Y \setminus B)$ y $X \setminus f^{-1}(B)$, si f es una aplicación de X en Y y $B \subset Y$?
- Sea f una aplicación $f: X \rightarrow Y$, probar que las siguientes condiciones son equivalentes:
 - f es inyectiva
 - $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$, para todos los subconjuntos A y B de X
 - $f^{-1}(f(A)) = A$, para todo $A \in \mathcal{P}(X)$.
- Dar un ejemplo de una familia de conjuntos $(A_i)_{i \in I}$ si:
 - $I = \{1, 2, 3\}$
 - $I = \mathbb{R}$
 - $I = \mathbb{N}$
 - $I = [2, 10]$.
- Dar un ejemplo de una familia de conjuntos $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que cumpla las siguientes condiciones: $\emptyset \neq A_n \subset \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}; A_{n+1} \subset A_n, \forall n \in \mathbb{N}$ y $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$.
- Sea $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una familia decreciente de conjuntos no vacíos, es decir $E_n \supset E_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ y $E_n \neq \emptyset, \forall n \in \mathbb{N}$. Sea $E = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n$ y sea $F_n = E_n \setminus E_{n+1}$. Demostrar que $E_1 \setminus E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ y que $F_i \cap F_j = \emptyset$ si $i \neq j$.
- Sea $f: E \rightarrow E$ una aplicación; se dice que $X \subset E$ es estable si $f(X) \subset X$. Demostrar que:
 - Si X es estable, entonces $f(X)$ es estable.
 - Toda unión de partes estables es estable y toda intersección de partes estables es estable.
 - Si $X \subset E$ existe un subconjunto $D \subset E$ que es estable, tal que $D \supset X$ y tal que si F es

una parte estable y $X \subset F$ entonces $D \subset F$. Designemos con \widehat{X} esta parte estable, es decir la parte estable más pequeña que contiene a X .

d) Demostrar que si $X \subset Y \implies \widehat{X} \subset \widehat{Y}$.

e) Sea $f^n(X) = f \circ f^{n-1}(X)$, $f^1(X) = f(X)$ y $f^0(X) = X$, demostrar que $\widehat{X} = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} f^n(X)$.

f) Demostrar que $\widehat{X} = X \cup f(\widehat{X}) = X \cup f(\widehat{X})$.

g) Sea $F = f(E)$ y $G = E \setminus F$, probar que $\forall X \subset G$, existe $Y \subset F$ tal que $f(X \cup Y) = Y$.

h) Si X_0 es la intersección de todas las partes estables no vacías de E , demostrar que $X_0 = f(X_0)$.

9. a) Sea $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, probar que $\sum_{i=1}^n x_i \leq \sqrt{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.

b) Probar que $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos \theta$, donde θ es el ángulo formado por los vectores \mathbf{x} y \mathbf{y} .

Utilice y verifique que $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos \theta$.

c) Probar que si $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$, \mathbf{x} y \mathbf{y} son colineales.

10. Si $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ y $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$, entonces $\sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{i=1}^n b_i \leq n \sum_{i=1}^n a_i b_i$.

1.11.2 Normas

11. Sea $N: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $N(x, y) = \sup_{t \in [0,1]} |x + ty|$, probar que N es una norma sobre \mathbb{R}^2 y determinar la bola cerrada de centro $(0, 0)$ y norma 1.

12. Sea E el espacio vectorial de aplicaciones continuas de $[0, 1]$ en \mathbb{R} , con la norma $\|\cdot\|_\infty$ definida por $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$. Sea $p \in \mathbb{N}$, fijo, $(f_1, f_2, \dots, f_p) \in E^p$, $N: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $N(x_1, \dots, x_p) = \left\| \sum_{i=1}^p x_i f_i \right\|_\infty$, dar una condición necesaria y suficiente para que N sea una norma en \mathbb{R}^p .

13. Sea E el espacio vectorial de aplicaciones de clase C^2 de $[0, 1]$ en \mathbb{R} , donde $N_\infty, N'_\infty, N''_\infty$ son aplicaciones de E^2 en \mathbb{R} , definidas por: $\forall f \in E$, $N_\infty(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$, $N'_\infty(f) = |f(0)| + \sup_{x \in [0,1]} |f'(x)|$ y $N''_\infty(f) = |f(0)| + |f'(0)| + \sup_{x \in [0,1]} |f''(x)|$. Probar que son normas y compararlas.

14. Sea E el espacio vectorial de sucesiones acotadas en \mathbb{R} , $\mathbf{u} = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tales que $u_0 = 0$.

Se define $N_\infty(\mathbf{u}) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$ y $N(\mathbf{u}) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_{n+1} - u_n|$.

- Demostrar que N_∞ y N son normas sobre E .
- Demostrar que $\forall \mathbf{u} \in E$, $N(\mathbf{u}) \leq 2N_\infty(\mathbf{u})$ y que $\exists \mathbf{u} \in E \setminus \{\mathbf{0}\}$ tal que $N(\mathbf{u}) = 2N_\infty(\mathbf{u})$.
- Demostrar que N y N_∞ no son equivalentes.

15. Sea E el \mathbb{R} -espacio de aplicaciones continuas de $[0, 1]$ en \mathbb{R} y sea $\mathbf{0} \neq g \in E$. Se define

$N_\infty, N_g: E \rightarrow \mathbb{R}$ por $N_\infty(f) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$ y $N_g(f) = N_\infty(fg)$.

- Probar que N_g es una norma sí y sólo si el interior de $g^{-1}(\{0\})$ es vacío.
- Demostrar que N_∞, N_g son normas equivalente sí y sólo si $g^{-1}(\{0\}) = \emptyset$.

16. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. Probar:

- $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{t} \in E$, $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| + \|\mathbf{z} - \mathbf{t}\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| + \|\mathbf{y} - \mathbf{t}\| \geq \|\mathbf{x} - \mathbf{t}\| + \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|$.
- $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in E$ tales que $\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z} = \mathbf{0}$ se tiene $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| + \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\| + \|\mathbf{z} - \mathbf{x}\| \geq \frac{3}{2}(\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{z}\|)$.
- $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E \setminus \{\mathbf{0}\}$ se cumple $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \geq \frac{1}{2} \sup\{\|\mathbf{x}\|, \|\mathbf{y}\|\} \left\| \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} - \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|} \right\|$.
- $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \geq \frac{1}{4}(\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|) \left\| \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} - \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|} \right\|$.

17. Sea E un espacio vectorial normado y $T: E \rightarrow E$ definida por $T(\mathbf{u}) = \mathbf{u} \iff \|\mathbf{u}\| \leq 1$ y

$T(\mathbf{u}) = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \iff \|\mathbf{u}\| \geq 1$. Probar que $\|T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v})\| \leq 2\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$.

18. Sea E un espacio vectorial, N y N_2 normas sobre E . Sea $B_1 = \{\mathbf{x} \in E / N_1(\mathbf{x}) < 1\}$ y

$B_2 = \{\mathbf{x} \in E / N_2(\mathbf{x}) < 1\}$. Probar que si $B_1 = B_2 \implies N_1 = N_2$.

19. Sea E un espacio vectorial normado y sean $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in E$, $r > 0$, $s > 0$, $\lambda \neq 0$. Demostrar que:

- $B(\mathbf{a} + \mathbf{b}, r + s) = B(\mathbf{a}, r) + B(\mathbf{b}, s)$.
- $\lambda B(\mathbf{a}, r) = B(\lambda \mathbf{a}, |\lambda|r)$.
- $B(\mathbf{a}, r) \cap B(\mathbf{b}, s) \neq \emptyset \iff \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| < r + s$.
- $B(\mathbf{a}, r) = B(\mathbf{b}, s) \iff (\mathbf{a}, r) = (\mathbf{b}, s)$.

1.11.3 Topología de un espacio vectorial normado

20. Demostrar que normas equivalentes definen los mismos abiertos i.e. todo abierto por una norma es unión de abiertos por la otra norma.

21. Dar un ejemplo en \mathbb{R} de:

- Una intersección de abiertos que no sea abierta.
- Una unión de cerrados que no sea cerrada.
- demostrar que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ no es abierto ni cerrado.

22. Sea E un espacio vectorial normado, $A \subset E$ abierto y sea $x \in E$; definimos $x + A = \{x + a/a \in A\}$. Demostrar que $x + A$ es un abierto.

Si $B \subset E$ definimos $B + A = \{b + a/b \in B, a \in A\}$; pruebe que $B + A$ es un abierto.

23. Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/y = \sin \frac{1}{x}\}$, $B = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2/|y| \leq 1\}$. Demostrar que $B \subset \bar{A}$.

24. Sea E un espacio vectorial normado, $A \subset E$, definimos la frontera de A por $\mathfrak{F}\tau(A) = \bar{A} \cap \overline{E \setminus A}$. Demostrar que:

- $\mathfrak{F}\tau(A) \subset A \iff A$ es cerrado.
- $\mathfrak{F}\tau(A) \cap A = \emptyset \iff A$ es abierto.
- $\mathfrak{F}\tau(A) = \emptyset \iff A$ es abierto y cerrado.

25. Dar un ejemplo de conjuntos de una parte $A \subset \mathbb{R}$ para la cual $A, \bar{A}, \overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{\bar{A}}, \overset{\circ}{A \setminus \bar{A}}, \overset{\circ}{\bar{A} \setminus A}$ sean dos a dos distintos.

26. Sea E un espacio vectorial normado. Probar que:

- A es abierto $\iff \overset{\circ}{A} = A$
- $\overline{\overset{\circ}{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$
- $\overset{\circ}{A} = E \setminus \overline{E \setminus A}$
- $\overline{\overset{\circ}{A \setminus B}} = \overset{\circ}{A} \setminus \bar{B}$
- $\overset{\circ}{\bar{A}} = \bar{\overset{\circ}{A}}$
- $\overset{\circ}{\bar{A}} = \bar{\overset{\circ}{A}}$
- $A \subset B \implies \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.

27. Sea E un espacio vectorial normado y sea $A \subset E$ un abierto, demostrar que $\overline{A \cup (E \setminus A)} = E$.

28. Sea E un espacio vectorial normado, A un abierto de E y $B \subset E$. Demostrar que $\overline{A \cap \bar{B}} = \bar{A \cap B}$. Dar un ejemplo de abiertos A y B de \mathbb{R} tales que $A \cap \bar{B}, \bar{A} \cap B, \overline{A \cap B}, \bar{A} \cap \bar{B}$ sean dos a dos distintos.

29. Sea E un espacio vectorial normado. Demostrar que:

- a) Si U y V son abiertos y si $\bar{U} = \bar{V} = E \implies \overline{U \cap V} = E$.
- b) Si U y V son abiertos de E y si $U \cap V = \emptyset \implies \overset{\circ}{U} \cap \overset{\circ}{V} = \emptyset$.
- c) Si F y G son cerrados con $\overset{\circ}{F} = \overset{\circ}{G} = \emptyset \implies \overline{\overset{\circ}{F \cup G}} = \emptyset$.
30. Sea E un espacio vectorial normado, sea $a \in E$ y F un cerrado tal que $a \notin F$. Demostrar que existen dos abiertos disjuntos U y V tales que $a \in U$ y $F \subset V$.
31. Sea E un espacio vectorial normado y sea A una parte de E , se dice A es una parte rara (o el conjunto es raro) sí y sólo si $\overset{\circ}{A} = \emptyset$. Las siguientes tres propiedades son equivalentes:
- a) A es rara
- b) \bar{A} es rara.
- c) $\overline{E \setminus A} = E$.
- d) Probar que si A y B son raros, entonces $A \cup B$ es raro.
32. Sea E un espacio vectorial normado, $X \subset E$. Probar que las siguientes propiedades son equivalentes:
- a) Todo punto de X es un cerrado de X .
- b) Para todo par de puntos distintos de X , existe un vecindario en X alrededor de uno de los puntos que no contiene al otro.
- c) Para todo $x \in X$ la intersección de los vecindarios de x en X es igual a $\{x\}$.
- d) Para toda parte A de X , la unión de partes cerradas de X inducidas en A es igual que A .
33. Sea E un espacio vectorial normado, X una parte de E . Las nociones de abierto, cerrado, interior, adherencia son relativas a X . Las siguientes propiedades son equivalentes:
- a) $\forall U \subset X$ abierto de X , \bar{U} es abierto de X .
- b) $\forall F \subset X$ cerrado de X , $\overset{\circ}{F}$ es un cerrado de X .
- c) $\forall A \subset X$, $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$.
- d) $\forall B \subset X$, $\bar{\bar{B}} = \bar{B}$.

- e) $\forall U, V$ abiertos de X tales que $U \cap V = \emptyset$, se tiene $\bar{U} \cap \bar{V} = \emptyset$.
- f) $\forall F, G$ cerrados de X tales que $F \cup G = X$, se tiene $\overset{\circ}{F} \cup \overset{\circ}{G} = X$.
34. Sea E un espacio vectorial normado, $\mathbf{a} \in E$, $\rho > 0$, probar que $\overline{B(\mathbf{a}, \rho)} = \bar{B}(\mathbf{a}, \rho)$ y $\overline{\overset{\circ}{B}(\mathbf{a}, \rho)} = B(\mathbf{a}, \rho)$.
35. Sea E un espacio vectorial normado y sean A y B dos partes de E , $\lambda \in \mathbb{R}$. Demostrar $\bar{A} + \bar{B} \subset \overline{A+B}$, $\lambda \bar{A} = \overline{\lambda A}$, $\overset{\circ}{A} + \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{A+B}$ y $\lambda \overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{\lambda A}$. Probar además que se puede tener $\bar{A} + \bar{B} \neq \overline{A+B}$ y $\overset{\circ}{A+B} \neq \overset{\circ}{A} + \overset{\circ}{B}$.
36. Sea E un espacio vectorial normado, F un subespacio vectorial de E tal que $\overset{\circ}{F} \neq \emptyset$, probar que $F = E$.
37. Sea E un espacio vectorial normado, F un subespacio de E , demostrar que \bar{F} es un subespacio de E .
38. Sea E un espacio vectorial normado, U un abierto de E , C el cono de vértice 0 sobre U , es decir $C = \{\lambda \mathbf{x} / \lambda > 0, \mathbf{x} \in U\}$.
- a) Demostrar que C es un abierto.
- b) Demostrar que si $0 \in U \implies C = E$.
39. Determinar todos los cerrados de \mathbb{R} conteniendo a \mathbb{Q} . Dar un ejemplo de una parte de \mathbb{R} que no sea la intersección de un abierto y un cerrado.
40. Demostrar que el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y > 1\}$ es un abierto de \mathbb{R}^2 y que el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 - (x^2 + y^2) = 0\}$ es un cerrado de \mathbb{R}^2 de interior vacío, teniendo $(0, 0)$ como punto aislado.
41. Sea $(u_n)_{n \geq 0}$ una sucesión de números positivos tales que $u_n \rightarrow +\infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se da un cerrado F_n de \mathbb{R} incluido en $\mathbb{R} \setminus [-u_n, u_n]$. Probar que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ es cerrado de \mathbb{R} .
42. Sea U abierto de \mathbb{R} , a cada $x \in U$ se asocian los elementos x', x'' de $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ definido por $x' = \inf\{y \in \mathbb{R} / y < x,]y, x[\subset U\}$, $x'' = \sup\{z \in \mathbb{R} / x < z,]x, z[\subset U\}$ y se denota $I_x =]x', x''[$.
- a) Probar que I_x es el intervalo abierto más grande que contiene a x y está contenido en

U .

b) Sea $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación estrictamente creciente y acotada; probar que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, existe a lo sumo un número finito de intervalos $I_x =]x', x''[$ distintos, tales que $f(x'') - f(x') > \frac{1}{n}$.

c) Deducir que U es la unión de una familia a lo sumo numerable de abiertos dos a dos disjuntos.

43. Sea E un espacio vectorial normado, $(A_i)_{i \in I}$ una familia de partes de E .

a) Probar que $\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} \subset \bigcap_{i \in I} \bar{A}_i$, $\bigcup_{i \in I} \bar{A}_i \subset \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$, $\widehat{\bigcap_{i \in I} A_i} \subset \bigcap_{i \in I} \overset{\circ}{A}_i$ y $\bigcup_{i \in I} \overset{\circ}{A}_i \subset \widehat{\bigcup_{i \in I} A_i}$.

b) Encontrar ejemplos en que la inclusión es estricta.

44. Sean E y F espacios vectoriales normados, $A \subset E$, $B \subset F$.

a) Probar que $\overline{A \times B} = \bar{A} \times \bar{B}$, $\widehat{A \times B} = \overset{\circ}{A} \times \overset{\circ}{B}$.

b) $A \times B$ es cerrado en $E \times F \iff A$ es cerrado de E y B es cerrado de F .

$A \times B$ es abierto en $E \times F \iff A$ es abierto de E y B es abierto de F .

c) $\mathfrak{Ft}(A \times B) = \bar{A} \times \mathfrak{Ft}(B) \cup \mathfrak{Ft}(A) \times \bar{B}$.

45. Sean E, F, G espacios vectoriales normados, A es un abierto de $E \times F$ y B abierto de $F \times G$. Se define $B \circ A = \{(x, z) \in E \times G / \exists y \in F, (x, y) \in A, (y, z) \in B\}$. Probar que $B \circ A$ es abierto de $E \times G$.

46. Sea E un espacio pre-hilbertiano:

a) Demostrar que $\forall a \in E$, la aplicación $f_a: E \rightarrow \mathbb{R}$ es continua.

$$x \mapsto \langle x, a \rangle$$

b) Deducir que $\forall A \subset E$ el ortogonal A^\perp de A es un subespacio vectorial cerrado de E .

47. Sea E el espacio vectorial normado sobre \mathbb{R} de aplicaciones continuas de $[0, 1]$ en \mathbb{R} , con la norma $\| \cdot \|_\infty$. Se define E_1 la parte de E formada por las aplicaciones derivables, M formada por las aplicaciones monótonas, P formada por las aplicaciones polinomiales. Demostrar que $\overset{\circ}{E}_1 = \overset{\circ}{M} = \overset{\circ}{P} = \emptyset$.

48. Sea E el \mathbb{R} -espacio vectorial de aplicaciones continuas de $[0, 1]$ en \mathbb{R} , provisto de $\| \cdot \|_\infty$,

I, S, B las partes de E formada por las aplicaciones elementales de E , con valores en $[0, 1]$ y respectivamente inyectivas, sobreyectivas, biyectivas. ¿Son I, S, B cerrados o abiertos en E ?

1.11.4 Frontera

49. Sea E un espacio vectorial normado y A, B dos partes de E , probar que:

- a) $\overline{E \setminus A} = E \setminus \overset{\circ}{A}$ y $\overline{\overset{\circ}{E \setminus A}} = E \setminus \bar{A}$
- b) $\mathfrak{Ft}(A), \overset{\circ}{A}, E \setminus \bar{A}$ son dos a dos disjuntos
- c) $\mathfrak{Ft}(A) = (A \cap (\overline{E \setminus A})) \cup (\bar{A} \cap (E \setminus A))$
- d) $\mathfrak{Ft}(\bar{A}) \subset \mathfrak{Ft}(A)$ y $\mathfrak{Ft}(\overset{\circ}{A}) \subset \mathfrak{Ft}(A)$
- e) $A \subset \mathfrak{Ft}(A) \iff \overset{\circ}{A} = \emptyset$
- f) A es una parte cerrada $\iff \mathfrak{Ft}(A) \subset A$
- g) A es a abierto $\iff A \cap \mathfrak{Ft}(A) = \emptyset$
- h) $\mathfrak{Ft}(A) = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$
- i) $\mathfrak{Ft}(A \cup B) \subset \mathfrak{Ft}(A) \cup \mathfrak{Ft}(B)$
- j) Si A es cerrado, entonces $B \cap \mathfrak{Ft}(A) \subset \mathfrak{Ft}(A \cap B)$
- k) $\bar{A} = A \cup \mathfrak{Ft}(A)$
- l) Si A y B son abiertos, entonces:

$$(A \cap \mathfrak{Ft}(B)) \cup (B \cap \mathfrak{Ft}(A)) \subset \mathfrak{Ft}(A \cap B) \subset (A \cap \mathfrak{Ft}(B)) \cup (B \cup \mathfrak{Ft}(A)) \cup (\mathfrak{Ft}(A) \cap \mathfrak{Ft}(B)).$$

Dar un ejemplo en que estos conjuntos sean dos a dos distintos.

50. ¿Se puede decir que $\mathfrak{Ft}(\mathfrak{Ft}(A)) = \emptyset, \forall A \subset E$, donde E es un espacio vectorial normado?

$$\mathfrak{Ft}(\mathfrak{Ft}(A)) = \mathfrak{Ft}(A)?$$

51. Sea E un espacio vectorial normado y consideremos $H = \{F \subset E / F \text{ es cerrado}\}$. ¿La aplicación $\mathfrak{Ft}: \mathcal{P}(E) \longrightarrow H$ es sobreyectiva?

52. Sea E un espacio vectorial normado, $U \subset E$ abierto, probar que $\mathfrak{Ft}(\bar{U}) = \mathfrak{Ft}(U) \iff \overset{\circ}{\bar{U}} = U$.

53. Sea E un espacio vectorial normado y sea $A \subset E$. Las tres propiedades siguientes son

equivalentes:

a) $\forall X \in \mathcal{P}(E), \overline{A \cap X} = \bar{A} \cap \bar{X}.$

b) $\forall X \in \mathcal{P}(E), \overline{A \cup X} = \bar{A} \cup \bar{X}.$

c) $\mathfrak{I}r(A) = \emptyset.$

d) Demostrar que $\mathfrak{I}r(\bar{A}) = \emptyset \iff \forall U$ abierto de E se tiene $\overline{\bar{A} \cap U} = \bar{A} \cap \bar{U}.$

1.11.5 Partes densas

54. Dar un ejemplo de dos partes A y B de \mathbb{R} , complementarios de \mathbb{R} , en biyección uno con el otro y densos en \mathbb{R} .
55. Sea D denso en \mathbb{R} , demostrar que D es infinito y que si se quita a D una parte finita se obtiene un conjunto denso en \mathbb{R} .
56. Sea E un espacio vectorial normado, $A, B, X, Y \subset E$. Demostrar que si A es denso en X (es decir $X \subset \bar{A}$) y B es denso en Y , entonces $A \cup B$ es denso en $X \cup Y$.
57. Sea E un espacio vectorial normado, $D \subset E$, demostrar que D es denso en $E \iff \forall U$ abierto de E , $D \cap U$ es denso en U .
58. Sea E un espacio vectorial normado, $D \subset E$ denso en E y $x \in D$. Demostrar que para todo V vecindario de x en D , \bar{V} es un vecindario de x en E .
59. Sea E un espacio vectorial normado, admitiendo una parte densa a lo sumo numerable, demostrar que toda familia de abiertos de E no vacíos, dos a dos disjuntos, es a lo sumo numerable.
60. Demostrar que \mathbb{Q}^2 es denso en \mathbb{R}^2 .
61. Sea E un espacio vectorial normado, $A \subset E$ que admite al menos un punto de acumulación en E , entonces A es infinito. Estudiar el recíproco.
62. Sea D una parte densa de \mathbb{R} , demostrar que D es infinito y que si se elimina en D una parte finita se obtiene un conjunto denso en \mathbb{R} .

1.11.6 Puntos aislados

63. Sea E un espacio vectorial normado, $X \subset E$, demostrar que para que todo punto de X sea aislado, es necesario y suficiente que todo punto de X sea abierto en X .
64. Sea $A \subset \mathbb{R}$, demostrar que si todos los puntos de A son aislados, entonces $\overset{\circ}{A} = \emptyset$. Estudiar el recíproco.
65. Sea E un espacio vectorial normado, U un abierto de E , $x \in U$, demostrar que si x es aislado en U , x es aislado en E .
66. Demostrar que si $A \subset E$ espacio vectorial normado, no tiene puntos aislados, sucede lo mismo con \bar{A} .

1.11.7 Puntos de acumulación

67. Sea E un espacio vectorial normado, para cada $X \subset E$ se denota por X' al conjunto de puntos de acumulación de X en E , llamado conjunto derivado de X . Sean $A, B \subset E$, U, V abiertos de E , probar:
- $A \subset B \implies A' \subset B'$
 - $(A \cup B)' = A' \cup B'$ y $(A \cap B)' \subset A' \cap B'$. Dar un ejemplo en que no haya igualdad
 - A' es cerrado y además $A' = \bar{A}' = (\bar{A})'$
 - $U \cap A' \subset (U \cap A)'$
 - $U \cap V = \emptyset \implies \overset{\circ}{U}' \cap \overset{\circ}{V}' = \emptyset$
 - A es cerrado sí y sólo si $A' \subset A$. Además $\bar{A} = A \cup A'$
 - Si F es un espacio vectorial normado y $C \subset F$, entonces $A' \times C' \subset (A \times C)'$. Dar un ejemplo donde no se da la igualdad
 - Se define A^n por $A^0 = A, A^{n+1} = (A^n)'$. Si $n \geq 0$, dar un ejemplo de un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ tal que $\emptyset \neq A^3 \neq A^2 \neq A'$.

1.11.8 Convexidad

68. Sean E un espacio vectorial normado, C_1, C_2, \dots, C_n partes convexas de E y $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Demostrar que $a_1 C_1 + \dots + a_n C_n$ es una parte convexa de E .
69. Sea E un espacio vectorial normado, se dice que una parte A de E es estrellada sí y sólo si existe un $\mathbf{a} \in A$ tal que $\forall \mathbf{x} \in A$ el segmento $[\mathbf{a}, \mathbf{x}] \subset A$, donde $[\mathbf{a}, \mathbf{x}] = \{\lambda \mathbf{a} + (1 - \lambda)\mathbf{x} / \lambda \in [0, 1]\}$. Demostrar que si A es estrellado, entonces \bar{A} es estrellado.
70. Sea E un espacio vectorial normado, C una parte convexa de E , probar que \bar{C} y $\overset{\circ}{C}$ son convexas.
71. Sea E un espacio vectorial normado, U un abierto de E , demostrar que U es convexo sí y sólo si $U + U = 2U$.
72. Demostrar que la parte de ℓ^2 , formada por las sucesiones $\mathbf{u} = (u_n)_{n \geq 1} \in \ell^2$, tales que $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 u_n^2$ converge y su límite de convergencia es menor que 1, es una parte convexa y con interior vacío. ℓ^2 es el espacio vectorial normado de sucesiones $\mathbf{u} = (u_n)_{n \geq 1}$ de términos reales, tales que $\sum_n u_n^2$ converge. La norma se define por $\|\mathbf{u}\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

1.11.9 Distancia de un punto a una parte

73. Sea E un espacio vectorial normado, $A \subset E$, $A \neq \emptyset$, $\mathbf{x} \in E$, comparar $d(\mathbf{x}, A)$ con $d(\mathbf{x}, \bar{A})$.
74. Sea E un espacio vectorial normado, a cada parte cerrada $A \neq \emptyset$ se le asocia la aplicación $d_A: E \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $d_A(\mathbf{x}) = d(\mathbf{x}, A) = \inf_{\mathbf{a} \in A} d(\mathbf{x}, \mathbf{a})$. Probar que la aplicación $A \mapsto d_A$ es inyectiva.
75. Sea E el espacio vectorial de aplicaciones acotadas de $[0, 1]$ en \mathbb{R} , provisto de la norma $\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$, sea $A \subset E$ formado por las aplicaciones continuas y se considera $f_0 \in E$, definida por $f_0(x) = 1$, si $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $f_0(x) = 2$, si $x \in]\frac{1}{2}, 1]$. Calcular $d(f_0, A)$.
76. Sea E el espacio vectorial sobre \mathbb{R} de aplicaciones continuas de $[0, 1]$ en \mathbb{R} , provisto de la norma $\|\cdot\|_{\infty}$ y $A = \{f \in E / f(0) = 0, \int_0^1 f \geq 1\}$.
- a) Demostrar que A es una parte cerrada de E .

b) Demostrar que $\forall f \in A, \|f\|_\infty > 1$.

c) Calcular $d(\mathbf{0}, A)$.

77. Sea E un espacio vectorial normado.

a) $\forall X \subset E, n \in \mathbb{N}^*$, se denota por $H_n(X) = \{\mathbf{x} \in E / d(\mathbf{x}, X) < \frac{1}{n}\}$. Demostrar que $H_n(X)$ es un abierto de E y que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} H_n(X) = \bar{X}$.

b) Deducir que todo cerrado es intersección de una familia numerable de abiertos de E .

c) Demostrar que todo abierto de E es unión de una familia numerable de cerrados de E .

78. Sea E un espacio vectorial normado, $\emptyset \neq A \subset E$ y $d_A: E \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $d_A(\mathbf{x}) = d(\mathbf{x}, A)$. Demostrar que si A es una parte convexa de E , d_A es una aplicación convexa. Estudiar el recíproco, suponiendo además que A es cerrado.

79. Sean E espacio vectorial normado, $A \subset E$ acotado, definimos el diámetro de A por

$$\text{diam}(A) = \sup_{\substack{\mathbf{x} \in A \\ \mathbf{y} \in A}} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

a) Demostrar que \bar{A} es acotado y que $\text{diam}(\bar{A}) = \text{diam}(A)$.

b) Pruebe que si $A, B \subset \mathbb{R}^n$ no vacíos y acotados $\text{diam}(A \cup B) \leq \text{diam}(A) + \text{diam}(B) + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \forall \mathbf{x} \in A, \forall \mathbf{y} \in B$.

c) Concluya que $\text{diam}(A \cup B) \leq \text{diam}(A) + \text{diam}(B) + d(A, B)$.

d) Si $A \cap B \neq \emptyset \implies d(A, B) = 0$ y que el recíproco es falso.

e) Demostrar que $\mathfrak{F}\tau(A)$ es acotada y que $\text{diam}(\mathfrak{F}\tau(A)) = \text{diam}(A)$.

1.11.10 Topología inducida

80. Sea E un espacio vectorial normado y sean $A \subset B \subset E$, probar que si A es una parte abierta de B y B una parte abierta de E , entonces A es una parte abierta de E . Probar que lo mismo ocurre con las partes cerradas.

81. Sea E un espacio vectorial normado y sean $A, B \subset E$ y $C \subset E$ tales que $C \subset A \cap B$. Demostrar que si C es un abierto de A y un abierto de B , entonces C es un abierto de $A \cup B$.

82. Sea E un espacio vectorial normado, sea $(U_i)_{i \in I}$ un recubrimiento abierto de E y A una

parte de E . Demostrar que A es cerrado en E sí y sólo si, $\forall i \in I$, $A \cap U_i$ es una parte cerrada de U_i .

1.11.11 Sucesiones en un espacio vectorial normado

83. Sea E un espacio vectorial normado, $X \subset E$, demostrar que todo punto de X es aislado sí y sólo si toda sucesión convergente en X es estacionaria.
84. Sea E un espacio vectorial normado y sean $(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\mathbf{y}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dos sucesiones en E tales que $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}$ y $\mathbf{y}_n \rightarrow \mathbf{y}$, entonces $d(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) \rightarrow d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.
85. Sea E un espacio vectorial normado y $(\mathbf{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de E tal que $(\mathbf{u}_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$, $(\mathbf{u}_{3n+1})_{n \in \mathbb{N}}$, $(\mathbf{u}_{3n+2})_{n \in \mathbb{N}}$ y $(\mathbf{u}_{7n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergen. Demostrar que $(\mathbf{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
86. Sean E y F espacios vectoriales normados, $(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ y $(\mathbf{y}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset F$ sucesiones.
- Demostrar que si (\mathbf{x}, \mathbf{y}) es un punto adherente de $((\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n))_{n \in \mathbb{N}}$ en $E \times F$, entonces \mathbf{x} es un punto adherente de $(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y \mathbf{y} es un punto adherente de $(\mathbf{y}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 - Dar un ejemplo en el cual $(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\mathbf{y}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admiten al menos un punto de acumulación, pero $(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no.
87. Sea E un espacio vectorial normado, $(\mathbf{u}_{(n,p)})_{(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ una sucesión doble en E . Se supone que $\forall n \in \mathbb{N}$, la sucesión $(\mathbf{u}_{(n,p)})_{p \in \mathbb{N}}$ converge a \mathbf{v}_n y que la sucesión $(\mathbf{v}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $\ell \in E$. Demostrar que existe una aplicación $\rho: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, estrictamente creciente tal que la sucesión $(\mathbf{u}_{(n,\rho(n))})_{n \in \mathbb{N}}$ converge a ℓ .
88. Sean E y F espacios vectoriales normados, $(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de E ; $\mathbf{x} \in E$, $(\mathbf{y}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión en F , $\mathbf{y} \in F$. Se supone que $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}$ y que \mathbf{y} es un valor adherente de $(\mathbf{y}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Demostrar que (\mathbf{x}, \mathbf{y}) es un valor adherente de $((\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n))_{n \in \mathbb{N}}$ en $E \times F$.
89. Sea E un espacio vectorial normado, $(\mathbf{u}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$, para $p \in \mathbb{N}$ se denota $U_p = \{\mathbf{u}_n / n > p\}$. Demostrar que $\bigcap_{p \in \mathbb{N}} \bar{U}_p$ es el conjunto de valores adherentes de la sucesión $(\mathbf{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1.11.12 Continuidad

90. Sean E y F espacios vectoriales normados, $F \neq \{0\}$ y $X \subset E$. Probar que X es discreto sí y sólo si toda aplicación de X en F es continua.
91. Sean E y F espacios vectoriales normados, $f: E \rightarrow F$ continua, $A \subset E$, demostrar que si A es denso en E , entonces $f(A)$ es denso en $f(E)$.
92. Sean E y F espacios vectoriales normados y sea $f: E \rightarrow F$ una aplicación. Demostrar que las siguientes propiedades son equivalentes:
- f es continua.
 - $\forall A \in \mathcal{P}(E), f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.
 - $\forall B \in \mathcal{P}(F), \overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\bar{B})$.
 - $\forall B \in \mathcal{P}(F), f^{-1}(\overset{\circ}{B}) \subset \overline{f^{-1}(B)}$.
93. Sean E y F espacios vectoriales normados y sea $f: E \rightarrow F$ una aplicación continua.
- Para $A \subset E$, comparar $f(\mathfrak{I}t(A))$ y $\mathfrak{I}t(f(A))$.
 - Para $B \subset F$, comparar $f^{-1}(\mathfrak{I}t(B))$ y $\mathfrak{I}t(f^{-1}(B))$.
94. Sean E y F espacios vectoriales normados, $f: E \rightarrow F$ continua.
- Comparar para $A \subset E$, los conjuntos $f(A')$ y $f(A)'$.
 - Comparar para $B \subset F$, los conjuntos $f^{-1}(B')$ y $f^{-1}(B)'$.
95. Sean E y F espacios vectoriales normados y sea $f: E \rightarrow F$ una aplicación. Demostrar que f es continua sí y sólo si $\forall x \in E, \exists V_x$ un vecindario de x en E , tal que la restricción de f a V_x sea continua en V_x .
96. Sean E y F espacios vectoriales normados, E_1, E_2 cerrados en E tales que $E_1 \cup E_2 = E$ y sea $f: E \rightarrow F$ una aplicación. Demostrar que si las restricciones $f|_{E_1}$ y $f|_{E_2}$ son continuas, entonces f es continua.
97. Sean E y F espacios vectoriales normados y sean $f, g: E \rightarrow F$ dos funciones continuas, demostrar que $\{x \in E / f(x) = g(x)\}$ es un cerrado en E y que si $F = \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in E / f(x) \leq g(x)\}$ es un cerrado en E y $\{x \in E / f(x) < g(x)\}$ es un abierto de E .

98. Sean E y F espacios vectoriales normados; D una parte densa de E y $f, g: E \rightarrow F$ aplicaciones continuas. Demostrar que si $f|_D = g|_D$, entonces $f = g$.
99. Sean E y F espacios vectoriales normados, $\mathbf{a} \in E$, $f: E \rightarrow F$ una aplicación acotada. En un vecindario de \mathbf{a} se define la oscilación de f en \mathbf{a} como $w(f, \mathbf{a}) = \inf_{V \in V_{\mathbf{a}}} (\text{diam}(f(V)))$, donde $V_{\mathbf{a}}$ es la familia de vecindarios de \mathbf{a} . Demostrar que f es continua en \mathbf{a} si y sólo si $w(f, \mathbf{a}) = 0$.
100. Sea E un espacio vectorial normado.
- Sean $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in E$ tales que $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$, demostrar que existe una aplicación $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $f(\mathbf{a}) \neq f(\mathbf{b})$.
 - Sean F y G cerrados disjuntos no vacíos de E , demostrar que existe una aplicación $\Phi: E \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $\Phi|_F = 0$ y $\Phi|_G = 1$.
101. Sean E y F espacios vectoriales normados, $f: E \rightarrow F$ continua, $(\mathbf{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de E y \mathbf{a} un punto adherente de $(\mathbf{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Demostrar que $f(\mathbf{a})$ es un punto adherente de $(f(\mathbf{u}_n))_{n \in \mathbb{N}}$ en F .
102. Sea E un espacio vectorial normado, sea $n \in \mathbb{N}^*$ y $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in E$. Demostrar que $A = \{\mathbf{x} \in E / \prod_{i=1}^n \|\mathbf{x} - \mathbf{a}_i\| = 1\}$ es una parte cerrada y acotada de E .
103. Sea E un espacio vectorial normado y sean F, G cerrados disjuntos de E . Demostrar que existen dos abiertos U, V de E tales que $F \subset U, G \subset U, U \cap V = \emptyset$. En particular verificar que si $\mathbf{x} \in E \setminus F$, con F cerrado, existen abiertos O_1, O_2 tales que $\mathbf{x} \in O_1, F \subset O_2$ y $O_1 \cap O_2 = \emptyset$.
104. Sean E, F espacios vectoriales normados, $f: E \rightarrow F$, una aplicación f se dice que es abierta si $\forall O$ abierto de E , $f(O)$ es abierto de F . Demostrar que f es abierta si y sólo si $\forall \mathbf{x} \in E$ y todo vecindario V de \mathbf{x} en E , $f(V)$ es un vecindario de $f(\mathbf{x})$ en F .

1.11.13 Homeomorfismos

105. Sean E, F y G espacios vectoriales normados, $f: E \rightarrow F, g: F \rightarrow G$ aplicaciones continuas de modo que f es sobreyectiva y $g \circ f$ es un homeomorfismo. Probar que f y

g son homeomorfismos.

106. Demostrar que en un espacio vectorial normado $E \neq \{0\}$, todas las bolas abiertas (respectivamente cerradas) son homeomorfas.
107. Encontrar una aplicación $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uniformemente continua sobre \mathbb{R} , biyectiva tal que f^{-1} sea continua en \mathbb{R} , pero no uniformemente continua.
108. Dar un ejemplo de dos espacios vectoriales normados E y F y una aplicación $f: E \rightarrow F$ tal que f sea continua y biyectiva, pero que f^{-1} no sea continua.
109. Sean E y F espacios vectoriales normados, $X \subset E$, $Y \subset F$ y $f: X \rightarrow Y$ una aplicación.
- Se supone que f es continua, inyectiva, sea $x \in E$ tal que $f(x)$ es aislado en Y , demostrar que x es aislado en X .
 - Deducir que si f es un homeomorfismo y si $x \in X$ es aislado en X , entonces $f(x)$ es aislado en Y .
 - Demostrar que $[0, 1]$, $[0, 1] \cup \{2\}$, $[0, 1] \cup \{2, 3\}$ son dos a dos no homeomorfos.
110. Sean E y F espacios vectoriales normados y $f: E \rightarrow F$ una aplicación, demostrar que f es uniformemente continua sí y sólo si $\forall (\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}, \forall (\mathbf{y}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesiones de E tales que $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{y}_n\| \rightarrow 0$, cuando $n \rightarrow \infty$, implica que $\|f(\mathbf{x}_n) - f(\mathbf{y}_n)\| \rightarrow 0$, cuando $n \rightarrow \infty$.
111. Sean E y F espacios vectoriales normados y sea $f: E \rightarrow F$ una aplicación continua, demostrar que el gráfico de f , $G_f = \{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \in E \times F / \mathbf{x} \in E\}$ es homeomorfo a E .
112. Sea E un espacio vectorial normado y sean f y $g: E \rightarrow \mathbb{R}$ funciones uniformemente continuas sobre E , demostrar que si f y g son acotadas, entonces fg es uniformemente continua sobre E , pero es falso si f o g son no acotados.

1.11.14 Funciones Lipschitzianas

113. Sea E un espacio vectorial normado, demostrar que $d: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_E$ es 1-lipschitziana, con $E \times E$ provisto de la norma $\|(\mathbf{x}, \mathbf{y})\| = \|\mathbf{x}\|_E + \|\mathbf{y}\|_E$.
114. Sea E un espacio vectorial normado, A una parte no vacía de E , probar que la aplicación

$\mathbf{x} \longrightarrow d(\mathbf{x}, A)$ es 1-lipschitziana.

115. Sea E el espacio vectorial normado de aplicaciones lipschitzianas $f: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(0) = 0, \forall f \in E$. Se denota $N(f) = \inf\{k \in \mathbb{R}_+ / \forall x, y \in [0, 1], |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|\}$. Probar que N es una norma sobre E no equivalente a $\|\cdot\|_\infty$.
116. Sea E un espacio vectorial normado, A una parte no vacía de E , $k \in \mathbb{R}_+$, $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, k -lipschitziana, demostrar que la aplicación $g: E \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(\mathbf{x}) = \sup_{\mathbf{a} \in A} (f(\mathbf{a}) - k\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|)$, extiende a f y es k -lipschitziana. Explicitar $g(\mathbf{x})$ en el caso en que $E = \mathbb{R}$, $A = [0, 1]$, $f(a) = a^2$, $k = 2$.

1.11.15 Completitud

117. Sea E espacio vectorial normado, $(\mathbf{u}_n)_{n \geq 1}$ sucesión de Cauchy en E , $(\mathbf{v}_n)_{n \geq 1}$, definida por $\mathbf{v}_n = \frac{1}{n}(\mathbf{u}_1 + \cdots + \mathbf{u}_n)$, demostrar que $(\mathbf{v}_n)_{n \geq 1}$ es de Cauchy en E .
118. Sean E, F espacios vectoriales normados, $(\mathbf{u}_n)_n$ una sucesión de Cauchy en E , $f: E \longrightarrow F$ una aplicación uniformemente continua, demostrar que $(f(\mathbf{u}_n))_n$ es de Cauchy en F .
119. Sea E un espacio vectorial normado y sean $(\mathbf{u}_n)_n, (\mathbf{v}_n)_n$ dos sucesiones de E tales que $\|\mathbf{u}_n - \mathbf{v}_n\|_E \longrightarrow 0$, cuando $n \rightarrow \infty$. Demostrar que si una es de Cauchy la otra también es de Cauchy.
120. Sea E un espacio vectorial normado, $(\mathbf{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en E , $\varphi: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ biyectiva.
- Demostrar que $(\mathbf{u}_n)_n$ y $(\mathbf{u}_{\varphi(n)})_n$ tienen los mismos valores adherentes.
 - Demostrar que $(\mathbf{u}_n)_n$ es de Cauchy $\iff (\mathbf{u}_{\varphi(n)})_n$ es de Cauchy.
121. Sea E un espacio vectorial normado, $\alpha > 0$, $\emptyset \neq X \subset E$ tal que $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X, \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \implies \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \geq \alpha$. Demostrar que X es una parte completa de E .
122. Sea E un espacio vectorial normado tal que $\exists \rho > 0$ para el cual la bola cerrada $\bar{B}(0, \rho)$ sea completa. Demostrar que E es completo.
123. Sea E un espacio vectorial normado completo, $f: E \longrightarrow F$ una aplicación biyectiva uniformemente continua tal que $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E, \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_E \leq \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\|_F$. Demostrar que la

imagen por f de toda parte cerrada de E es una parte cerrada de F .

124. Sea E un espacio vectorial normado y sea F un espacio vectorial normado completo, $f: E \rightarrow F$ biyectiva, uniformemente continua y tal que f^{-1} es continua. Demostrar que E es completo.
125. Sea E un espacio vectorial normado, D una parte densa en E , demostrar que E es completo \iff toda sucesión de Cauchy en D es convergente en E .
126. Sea E un espacio vectorial normado, sea D una parte densa en E y sea F un espacio vectorial normado completo, $f: D \rightarrow F$ uniformemente continua. Demostrar que existe $g: E \rightarrow F$ continua única que extiende a f .
127. Demostrar que un espacio vectorial normado E es completo $\iff \forall (\mathbf{u}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ tal que $\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n+1}\| < \frac{1}{2^n}$ converge.
128. Sea E un espacio vectorial normado, demostrar que E es completo si y sólo si $\forall (F_n)_{n \geq 0}$ de cerrados acotados no vacíos de E , decrecientes y tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(F_n) = 0$, se tiene $\bigcap_{n \geq 0} F_n \neq \emptyset$.
129. Sea E un espacio vectorial normado completo y sea $f: E \rightarrow E$ una aplicación tal que $\exists \alpha \in]0, \frac{1}{2}[$, para el cual $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \leq \alpha(\|f(\mathbf{x}) - \mathbf{x}\| + \|f(\mathbf{y}) - \mathbf{y}\|)$. Demostrar que f admite un punto fijo único.
130. Sea E un espacio vectorial normado completo, $f: E \rightarrow E$ aplicación para la cual $\exists p \in \mathbb{N}^*$ tal que f^p sea una contracción. Demostrar que f admite un punto fijo único.
131. Demostrar que el espacio vectorial normado de E de aplicaciones continuas de $[0, 1]$ en \mathbb{R} , provisto de la norma $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx$ no es completo.
132. Sea (X, d) un espacio métrico completo acotado, I el conjunto de homeomorfismos de X en X . Demostrar que $\delta: I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $\delta(f, g) = \sup_{\mathbf{x} \in X} [d(f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x})) + d(f^{-1}(\mathbf{x}), g^{-1}(\mathbf{x}))]$ es una distancia sobre I y que (I, δ) es un espacio métrico completo.
133. a) Sea E un espacio vectorial normado $\neq \{0\}$ y sean $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in E$, $\rho > 0$, $\alpha > 0$, demostrar que $\bar{B}(\mathbf{a}, \rho) \subset \bar{B}(\mathbf{b}, \alpha) \iff \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| \leq \alpha - \rho$.

- b) Sea E un espacio vectorial normado completo, $(\mathbf{a}_n)_n$ una sucesión de E , $(\rho_n)_n$ una sucesión en \mathbb{R}_+^* . Se supone que la sucesión $(\bar{B}(\mathbf{a}_n, \rho_n))_n$ es decreciente y que $\rho_n \rightarrow \rho$. Demostrar que $(\mathbf{a}_n)_n$ converge y que si $\mathbf{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{a}_n$, se tiene $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bar{B}(\mathbf{a}_n, \rho_n) = \bar{B}(\mathbf{a}, \rho)$.
134. Sea $f: S \rightarrow S$, $S \subset \mathbb{R}^n$ una aplicación tal que $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| < \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, si $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$.
- a) Probar que f posee a lo sumo un punto fijo y dar un ejemplo de función de este tipo sin puntos fijos.
- b) Sea $\mathbf{x} \in S$, $\mathbf{p}_0 = \mathbf{x}$, $\mathbf{p}_{n+1} = f(\mathbf{p}_n)$, $c_n = \|\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_{n+1}\|$, $n > 0$, probar $(c_n)_n$ es una sucesión decreciente y que existe $c = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$.
- c) Supongamos que existe una sub-sucesión $(\mathbf{p}_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergiendo a $\mathbf{q} \in S$. Probar que $c = \|\mathbf{q} - f(\mathbf{q})\| = \|f(\mathbf{q}) - f(f(\mathbf{q}))\|$ y deducir que \mathbf{q} es un punto fijo de f y que $\mathbf{p}_n \rightarrow \mathbf{q}$.
- d) Si S es compacto, deducir que f siempre tiene un punto fijo único.

1.11.16 Compacidad

135. Se denota $K_0 = [0, 1]$, $K_1 = K_0 \setminus]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$, $K_2 = K_1 \setminus (]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}[\cup]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}[)$, ... y $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$. Demostrar que K es un compacto de interior vacío (K es el conjunto de Cantor¹⁰).
136. Demostrar que una parte K de un espacio vectorial normado E es compacta $\iff \forall (F_i)_{i \in I}$ familia de cerrados de K tales que $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$, $\exists N \in \mathbb{N}^*$ y $i_1, \dots, i_N \in I$ tales que $\bigcap_{k=1}^N F_{i_k} = \emptyset$.
137. Sea E un espacio vectorial normado y sea $\emptyset \neq X \subset E$, demostrar que cualesquiera dos de las tres propiedades siguientes implica la tercera:
- i) X es compacto ii) X es discreto iii) X es finito.

Solución

¹⁰**Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918)** Matemático ruso-alemán nace en San Petersburgo (Leningrado, Rusia) y fallecido en Halle, Alemania. Ya en la escuela Cantor, mostró talento por las matemáticas. Se doctoró en 1867 y obtuvo el puesto de profesor en la Universidad de Halle en 1872. Mejor conocido como el creador de la Teoría conjuntista, Cantor construyó una estructura lógica completa, en la cual se postulaba que una serie completa de números transfinitos, representaba diferentes órdenes de infinitos. También adelantó el estudio de las series trigonométricas, fue el primero en probar la no numerabilidad de los números reales e hizo contribuciones importantes a la teoría de la dimensión.

i) y ii) \implies iii) $(\{x\})_{x \in X}$ es un recubrimiento abierto de X , pues $\{x\}$ es abierto en $X \implies X$ se recubre por un número finito puntos $\{x\}$ i.e. X es finito.

i) y iii) \implies ii) En efecto iii) \implies ii).

ii) y iii) \implies i) X tiene un número finito de abiertos.

138. Demostrar que toda parte compacta K de un espacio vectorial normado E , contiene una parte densa dentro de K , a lo sumo numerable.
139. Sea E un espacio vectorial normado, U, V abiertos de E y K un compacto de E tal que $K \subset U \cup V$. Demostrar que existen compactos K_U, K_V de E tales que $K = K_U \cup K_V$, $K_U \subset U, K_V \subset V$.
140. Sean E, F espacios vectoriales normados, $K \subset E$ compacto, $L \subset F$ y A una parte cerrada de $K \times L$. Demostrar que la segunda proyección $\text{pr}_2(A)$ es cerrada.
141. Sea E un espacio vectorial normado de dimensión finita, $(u_n)_n$ una sucesión acotada en E . Probar que el conjunto de puntos adherentes de $(u_n)_n$ en E es un compacto de E .
142. Sea E un espacio vectorial normado, K una parte compacta de E , $(u_n)_n$ una sucesión en K , demostrar que si $(u_n)_n$ tiene un único punto adherente, entonces $(u_n)_n$ converge.
143. Sea E un espacio vectorial normado tal que $\bar{B}(0, 1)$ es compacta, demostrar que E es completo.
144. Sea E un espacio vectorial normado, $F \subset E$ cerrado, $K \subset E$ compacto, demostrar que $F + K$ es cerrado. ¿Es el resultado cierto si K es sólo cerrado?
145. Demostrar que toda parte A de \mathbb{R} que tiene un número finito de puntos de acumulación en \mathbb{R} , es a lo sumo numerable.
146. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $\forall x \in \mathbb{R}, \exists \epsilon_x > 0$ de modo que f es creciente en $]x - \epsilon_x, x + \epsilon_x[$, demostrar que f es creciente en \mathbb{R} .
147. Demostrar que $[0, 1]$ y \mathbb{R} no son homeomorfos.
148. Sea E un espacio vectorial normado, sea e_1, e_2, e_3 un sistema libre en E y sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

definida por $f(t) = \|t(\cos t)e_1 + t(\sin t)e_2 + (t^2 - 1)e_3\|$, probar que existe $m > 0$ tal que $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) \geq m$.

149. Sea E un espacio vectorial normado, $K, L \subset E$ compactos, demostrar que $K + L$ es compacto.
150. a) Sea E un espacio vectorial normado y sean $K, L \subset E$ compactos, demostrar que la unión de segmentos que unen un punto de K y un punto de L , es compacta.
 b) Sean E, F dos espacios vectoriales normados, K una parte compacta de E , $L \subset F$ y $f: K \rightarrow L$ continua y biyectiva, demostrar que f^{-1} es continua.
151. Sean E, F espacios vectoriales normados, $A \subset E$, $f: A \rightarrow F$ continua, $\varphi: A \rightarrow A \times F$ definida por $\varphi(\mathbf{a}) = (\mathbf{a}, f(\mathbf{a}))$ y $G = A \times f(A)$.
 a) Demostrar que φ es continua.
 b) Demostrar que G es compacto $\iff A$ es compacto.
152. Sea E un espacio vectorial normado, $A \subset E$ una parte no vacía de E , para cada $\rho > 0$ se define el conjunto $V_\rho(A) = \{\mathbf{x} \in E / d(\mathbf{x}, A) < \rho\}$.
 a) Demostrar que $V_\rho(A)$ es un abierto de E y que $\bar{A} \subset V_\rho(A)$.
 b) Demostrar que si A es compacto, $\forall U \subset E$ abierto, donde $A \subset U$, existe $\rho > 0$ tal que $V_\rho(A) \subset U$.
153. Sea E un espacio vectorial normado.
 a) Sea $(\mathbf{a}_n)_n$ una sucesión en E , que converge a un elemento $\ell \in E$, demostrar que $\{\ell\} \cup \{\mathbf{a}_n / n \in \mathbb{N}\}$ es una parte compacta de E .
 b) Sean E y F espacios vectoriales normados, $A \subset E$, $f: A \rightarrow F$ una aplicación, demostrar que si la restricción de f a todo compacto A es continua, entonces f es continua.
 c) Sean E y F espacios vectoriales normados, $A \subset E$, $f: A \rightarrow F$ una aplicación, demostrar que si f es inyectiva y si la imagen por f de todo compacto de A es un compacto de F , entonces f es continua.
154. Sea E un espacio vectorial normado de dimensión finita, $\emptyset \neq A \subset E$ acotado, demostrar

que existen $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \bar{A}$ tales que $\text{diam}(A) = \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|$.

155. Sea E un espacio vectorial normado, $K \subset E$ compacto, \hat{K} la envolvente equilibrada de K , es decir el conjunto $\{\lambda\mathbf{x}/\mathbf{x} \in K, |\lambda| \leq 1\}$. Demostrar que \hat{K} es compacto.
156. Sea E un espacio vectorial normado, F un subespacio vectorial de dimensión finita de E tal que $E \neq F$, demostrar que existe $\mathbf{x} \in E$ tal que $\|\mathbf{x}\| = 1, d(\mathbf{x}, F) = 1$.
157. Sea E un espacio vectorial normado, U abierto de E , K compacto de E tal que $K \subset U$, demostrar que existe $\rho > 0$ tal que $\forall \mathbf{x} \in K, B(\mathbf{x}, \rho) \subset U$.
158. Sea E un espacio vectorial normado, K parte compacta de E , $(U_i)_{i \in I}$ un recubrimiento abierto de E , demostrar que $\exists \rho > 0$ tal que $\forall \mathbf{x} \in K, \exists i \in I, B(\mathbf{x}, \rho) \subset U_i$.
159. Sea E espacio vectorial normado, $K \subset E$ compacto, $\rho > 0, F = \bigcup_{\mathbf{x} \in K} \bar{B}(\mathbf{x}, \rho)$, demostrar que F es cerrado.
160. Sea E un espacio vectorial normado, $K \subset E$ compacto, $(F_n)_n \downarrow$ una sucesión decreciente de cerrados no vacíos de $K, F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$.
- a) Si $f: K \rightarrow K$ es continua, probar que $f(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f(F_n)$
- b) Demostrar que la sucesión $(\text{diam}(F_n))_{n \in \mathbb{N}}$ decrece y converge a $\text{diam}(F)$.
161. Sean E un espacio vectorial normado, K una parte compacta de E y $f: K \rightarrow K$ una aplicación tal que $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in K, \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \geq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$. Demostrar que f es una isometría de K en K .
162. Sean E, F espacios vectoriales normados, $K \subset E, L \subset F$ compactos y sean $f: K \rightarrow L, g: L \rightarrow K$ aplicaciones tales que $\forall \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in K, \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}')\|_F = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|_E, \forall \mathbf{y}, \mathbf{y}' \in L, \|g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{y}')\|_E = \|\mathbf{y} - \mathbf{y}'\|_F$. Demostrar que $f(K) = L$ y $g(L) = K$.
163. Sea E un espacio vectorial normado, $K \subset E$ compacto; se define el conjunto $I = \{f: K \rightarrow K / \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in K\}$. Probar que I es un grupo con la operación composición \circ .
164. Sea E un espacio vectorial normado, F un espacio vectorial normado cerrado de E, G subespacio vectorial de dimensión finita de E , demostrar que $F + G$ es cerrado.

165. Sean E, F espacios vectoriales normados, $K \subset E$ compacto, $f: K \rightarrow F$ una aplicación tal que $\forall (x_n)_n$ sucesión de Cauchy en K , la sucesión $(f(x_n))_n$ es de Cauchy en F . Demostrar que f es uniformemente continua.
166. Sean E y F espacios vectoriales normados, $K \subset E$ compacto, $f: K \rightarrow F$ una aplicación tal que $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$, $d(A, B) = 0 \implies d'(f(A), f(B)) = 0$, donde $d(A, B) = \inf_{\substack{a \in A \\ b \in B}} \|a - b\|$ y d' se define de manera análoga en F . Demostrar que f es uniformemente continua.
167. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua, demostrar que la imagen inversa por f de un compacto de \mathbb{R} es un compacto de $\mathbb{R} \iff \lim_{x \rightarrow \pm\infty} |f(x)| = +\infty$.
168. Sea K un compacto de \mathbb{R}^2 no reducido a un punto, demostrar que $\exists! a \in \mathbb{R}^2$ y $\exists! \rho > 0$ tal que $K \subset \bar{B}(a, \rho)$ y si $b \in \mathbb{R}^2$, $\delta > 0$ de modo que $K \subset \bar{B}(b, \delta) \implies \delta \geq \rho$.
169. Sea E un e euclidiano de dimensión finita, $K \subset E$ compacto, para $\rho > 0$ se denota $B_\rho = \{x \in E / K \subset \bar{B}(x, \rho)\}$, demostrar que $I = \{\rho > 0, B_\rho \neq \emptyset\}$ es un intervalo. Si denotamos $\rho_0 = \inf I$, precisar B_{ρ_0} .
170. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua, sobreyectiva tal que $\forall y \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(\{y\})$ es un compacto de \mathbb{R} . Demostrar que f es cerrada (i.e. la imagen de un cerrado es un cerrado).
171. Sean E y F espacios vectoriales normados, $f: E \rightarrow F$ biyectiva y abierta, demostrar:
- Si $(y_n)_n \subset F$ tal que $y_n \rightarrow y$, la sucesión $(x_n)_n \subset E$ con $x_n = f^{-1}(y_n)$ convergente en E .
 - Si B es compacto en F , $A = f^{-1}(B)$ es compacto en E .
172. Sean E y F espacios vectoriales normados, $f: E \rightarrow K$ una aplicación, de modo que $K \subset F$ compacto, probar que si G_f es cerrado, f es continua.
173. Sea E un espacio vectorial normado, probar que $F \subset E$ es cerrado si y solamente si $\{x \in E / d(x, F) = 0\} \subset F$.
174. Se define en \mathbb{R} la distancia $d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$, probar que (\mathbb{R}, d) no es completo.

175. Sea E espacio vectorial normado, $F \subset E$ cerrado, $(x_n)_n \subset F$ tal que $x_n \rightarrow x$, entonces $x \in F$. Enuncie el recíproco y estudiar su veracidad.
176. Sea E un espacio vectorial normado, $F \subset E$ un cerrado, K compacto, entonces $F \cap K$ es compacto.
177. Sea E un espacio vectorial normado, demostrar que toda intersección de compactos es un compacto y que toda unión finita de compactos es compacta. ¿Toda unión de compactos es compacta?
178. Sea E un espacio vectorial normado.
- Dar un ejemplo de una sucesión de cerrados tales que $F_{n+1} \subset F_n \neq \emptyset, \forall n \in \mathbb{N}$, pero $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \emptyset$.
 - Demostrar que si $(F_n)_n$ es una sucesión de cerrados tales que $F_{n+1} \subset F_n, F_n \neq \emptyset, \forall n \in \mathbb{N}$ y $F_n \subset K$ compacto de $E \implies \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.
 - Sea $(F_n)_n$ una sucesión de cerrados de E , tales que $F_{n+1} \subset F_n, F_n \neq \emptyset, \forall n \in \mathbb{N}$.
Sea $F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ y sea O un abierto tal que $F \subset O$. Demostrar que existe $N \in \mathbb{N}$, tal que si $n \geq N \implies F_n \subset O$.
179. Sea E un espacio vectorial normado y sean F un cerrado, K compacto de E , tales que $K \cap F = \emptyset$. Demostrar que existe $\alpha > 0$ tal que $\|x - y\| \geq \alpha, \forall x \in K, \forall y \in F$, i.e. $d(K, F) \geq \alpha$.
180. a) Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto, demostrar que si $(x, y) \in U$, existen $\delta > 0, \epsilon > 0$ tales que $]x - \delta, x + \delta[\times]y - \epsilon, y + \epsilon[\subset U$.
- b) Sea $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, sea O abierto de \mathbb{R}^2 tal que $O \subset \mathbb{R} \times [a, b]$ y sea $A = \{x \in \mathbb{R} / \exists y \in [a, b], (x, y) \in O\}$. Demostrar que A es abierto en \mathbb{R} .
181. Sea E un espacio vectorial normado y sea $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $a \in E$ tal que $f(a) > 0$. Demostrar que $\exists B(a, \rho)$ tal que si $x \in B(a, \rho) \implies f(x) > 0$.
182. Sea $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{5}y^2 = 1\}$, demostrar que C es compacto.
183. Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - 2y \geq 0\}$, demostrar que A es cerrado en \mathbb{R}^2 . ¿Es A compacto?
184. ¿Es el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} / 0 \leq \frac{x^2 + 1}{x} \leq \cosh x \leq 1\}$ compacto?

1.11.17 Aplicaciones lineales

185. Sean E y F espacios vectoriales normados, $f \in \mathcal{L}(E, F)$, se supone $\forall (\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión en E tendiendo a 0 , la sucesión $(f(\mathbf{x}_n))_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada. Probar que f es continua.
186. Sean E y F espacios vectoriales normados, $(\mathbf{x}_n)_n \subset E$ sucesión tal que $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x} \in E$, $(f_n)_n \subset \mathcal{L}(E, F)$ convergiendo a $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Demostrar que $(f(\mathbf{x}_n))_n$ converge a $f(\mathbf{x})$ en F .
187. Sean E, F y G espacios vectoriales normados, $(f_n)_n \subset \mathcal{L}(E, F)$, convergiendo a $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $(g_n)_n \subset \mathcal{L}(F, G)$, convergiendo a $g \in \mathcal{L}(F, G)$, demostrar que $(g_n \circ f_n)_n$ converge a $g \circ f$ en $\mathcal{L}(E, G)$.
188. Sea E un \mathbb{R} -espacio vectorial normado y $P \in \mathbb{R}[x]$; demostrar que $\{f \in \mathcal{L}(E)/P(f) = 0\}$ es cerrado en $\mathcal{L}(E)$.
189. Sean ℓ^∞ el espacio vectorial normado de las sucesiones reales acotadas $\mathbf{x} = (x_n)_n$, provisto de la norma $\|\mathbf{x}\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$ y $\Delta: \ell^\infty \rightarrow \ell^\infty$, definida por $\Delta(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$, donde $\mathbf{y} = (y_n)_n$ es tal que $\forall n \in \mathbb{N}, y_n = x_{n+1} - x_n$. Demostrar que $\Delta \in \mathcal{L}(\ell^\infty)$ y calcular $\|\Delta\|$.
190. Sea $T: \ell^\infty \rightarrow \ell^\infty$ una aplicación definida por $T(\mathbf{x}) = T((x_n)_n) = \left(\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n x_i\right)_{n \in \mathbb{N}}$, demostrar que $T \in \mathcal{L}(\ell^\infty)$ y calcular $\|T\|$.
191. Se provee a $\mathbb{R}[x]$ con la norma $\|P\| = \sup_{n \geq 0} |a_n|$, si $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_px^p$. Estudiar la continuidad de las aplicaciones lineales $f: P \rightarrow P', g: P \rightarrow xP$ y calcular las normas de las aplicaciones, si existen.
192. Sea $n \in \mathbb{N}^*$ y sea \mathfrak{M}_n el e de matrices $n \times n$ provisto de la norma N definida por $N(A) = \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$, con $A = (a_{ij})$. Calcular $\|f\|$, si $f(A) = \text{tr}(A)$, con $f: \mathfrak{M}_n \rightarrow \mathbb{R}$.
193. Sea E el espacio vectorial normado de aplicaciones continuas de $[0, 1]$ en \mathbb{R} , provisto de la norma $\|\cdot\|_\infty$, demostrar que la aplicación $\Phi: f \mapsto e^f$ es continua sobre E , pero no es lineal.
194. Sea E el espacio vectorial normado de aplicaciones continuas de $[0, 1]$ en \mathbb{R} , provisto

de la norma $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$ y sea $T: E \rightarrow E$ definida por: $\forall f \in E, \forall x \in [0, 1]$, $T(f)(x) = \int_0^x f(t) dt$. Demostrar que $T \in L(E)$ y calcular $\|T\|$.

195. Sea E el espacio vectorial normado de aplicaciones continuas de $[0, 1]$ en \mathbb{R} , provisto de la norma $\|\cdot\|_\infty$, F el espacio vectorial normado de aplicaciones de $[0, 1]$ en \mathbb{R} de clase C^1 , provisto de la norma $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$, $T: E \rightarrow F$ aplicación definida por $T(f)(x) = \int_0^x f(t) dt$. Demostrar que $T \in L(E, F)$ y calcular $\|T\|$.

196. Sea E el espacio vectorial normado de aplicaciones continuas acotadas de \mathbb{R} en \mathbb{R} provisto de la norma $\|\cdot\|_\infty$, para $f \in E, a \in \mathbb{R}, \tau_a f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\tau_a(f)(x) = f(x+a)$.

a) ¿Para $a_0 \in \mathbb{R}, f \in E$, se tiene $\tau_a f \rightarrow \tau_{a_0} f$, cuando $a \rightarrow a_0$ dentro de E ?

b) Demostrar que $\forall a \in \mathbb{R}, \tau_a \in L(E)$ y calcular $\|\tau_a\|$.

c) ¿Para $a \in \mathbb{R}, \tau_a \rightarrow \tau_{a_0}$, cuando $a \rightarrow a_0$, dentro de $(L(E), \|\cdot\|_\infty)$?

197. Sea $n \in \mathbb{N}, \mathbb{R}_n[x]$ el espacio vectorial normado de polinomios de grado $\leq n$, provisto de la norma $\|P\| = \sup_{-1 \leq x \leq 1} |P(x)|, x_0 \in \mathbb{R}$, demostrar que existe $c > 0$ tal que $\forall P \in \mathbb{R}_n[x], |P(x_0)| \leq c\|P\|$.

198. Sea E el espacio real de aplicaciones continuas de $[0, 1]$ en \mathbb{R} , provisto de una de las tres normas $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$, definidas por $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx, \|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}, \|f\|_\infty = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$, sea $\Phi \in E, \Phi \geq 0$ y sea $T_\Phi: E \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $T_\Phi(f) = \int_0^1 f(x)\Phi(x) dx$. Demostrar que T_Φ es lineal, continua y calcular $\|T_\Phi\|$ en cada uno de los tres casos.

199. Sea E el espacio vectorial normado de aplicaciones de $[0, 1]$ en \mathbb{R} con la norma $\|\cdot\|_\infty$, sea $F: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación continua, con $\sup_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq t \leq 1}} |F(x, t)| < 1$ y sea $T: E \rightarrow E$ tal que si $\Phi \in E$, asocia $T(\Phi): [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\forall x \in [0, 1], T(\Phi)(x) = \Phi(x) + \int_0^1 F(x, t)\Phi(t) dt$. Demostrar que T es un homeomorfismo de E en E .

200. Sea E un espacio vectorial normado y sea $\Phi \in L(E, \mathbb{R}), \Phi \neq 0$, demostrar que $\forall x \in E, d(x, \ker(\Phi)) = \frac{|\Phi(x)|}{\|\Phi\|}$.

201. Sea E un espacio vectorial normado, $f: E \rightarrow F$ una aplicación acotada en $B(0, 1)$ y

aditiva, es decir $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E, f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$. Demostrar que $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

202. Sean E, F espacios vectoriales normados tales que F es de dimensión finita, $f \in \mathcal{L}(E, F)$, demostrar que f es sobreyectiva $\iff f$ es abierta (i.e. $\forall O$ abierto de $E, f(O)$ es abierto de F).

203. Sea E un espacio vectorial normado sobre \mathbb{C} , $P \in \mathbb{C}[x]$, $Z_p = \{f \in \mathcal{L}(E)/P(f) = 0\}$.

a) Demostrar que si $\text{val}(P) = 1$, $P = a_1x + \dots + a_nx^n$, $a_1 \neq 0$, entonces $\mathbf{0}$ es un punto aislado de Z_p . Recuerde que $\text{val}(P) = k$, si $P = a_kx^k + \dots + a_nx^n$, con $a_k \neq 0$, $k \leq n$.

b) Demostrar que si $\dim(E) \geq 2$ y $\text{val}(P) \geq 2$, entonces $\mathbf{0}$ no es un punto aislado de Z_p .

204. Sea $E \neq \{\mathbf{0}\}$ un espacio vectorial normado y sean $\alpha > 0$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{L}(E)$, demostrar que $\mathbf{u} \circ \mathbf{v} - \mathbf{v} \circ \mathbf{u} \neq \alpha I_E$.

205. Sea E un espacio pre-hilbertiano de dimensión infinita, $\Phi: E \rightarrow \mathbb{R}$ lineal, no continua. Probar que $\ker(\Phi)$ es denso en E y que $\ker(\Phi)^\perp = \{\mathbf{0}\}$.

1.11.18 Espacio de matrices

206. a) Sea $n \in \mathbb{N}^*$, N una norma sobre $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ e de matrices $n \times n$, demostrar que $\exists \alpha > 0$ tal que $\forall A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), N(AB) \leq \alpha N(A)N(B)$.

b) Verificar que si $\| \cdot \|$ es la norma euclídea, $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

207. Sea $n \in \mathbb{N}^*$, $A, P \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ tales que $A^k \rightarrow P$, cuando $k \rightarrow \infty$, demostrar que $AP = PA = P$ y $P^2 = P$.

208. Sea $N \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{I} = \{(A, B) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})^2 / AB = BA\}$.

a) Probar que \mathcal{I} es cerrado en $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})^2$.

b) Sea $(A, B) \in \mathcal{I}$, $P, K \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $A^k \rightarrow P, B^k \rightarrow Q$, cuando $n \rightarrow \infty$. Probar que $P^2 = P, Q^2 = Q, PQ = QP$.

209. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $t \in \mathbb{R}$, calcular e^{tA} , con $A = \begin{pmatrix} \cosh a & b \sinh a \\ \frac{1}{b} \sinh a & \cosh a \end{pmatrix}$.

210. Sea $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, demostrar que existe $\alpha > 0, \beta > 0$ tales que $\|e^{tA}\| \leq \alpha e^{\beta|t|}$.

211. Sea $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, demostrar que $\exists k_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\forall k \geq k_0$, se tiene $I + A + \cdots + \frac{A^k}{k!} \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$.
212. Sea $n \in \mathbb{N}^*$, demostrar:
- $\forall p \in \mathbb{N}$, el conjunto de matrices $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ tales que $\text{rang}(A) \leq p$, es cerrado en $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
 - El conjunto de matrices no invertibles de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ no es compacto si $n \leq 2$.
 - El conjunto de matrices diagonalizables de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ es conexo por arcos.
 - El conjunto de matrices diagonalizables de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ es denso en $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.
 - $O_n(\mathbb{R})$ y $U_n(\mathbb{C})$ son compactos (matrices ortogonales en \mathbb{R} y unitarias en \mathbb{C}).
 - $\{A \in O_n(\mathbb{R})/A^2 = I\}$ es compacto.

1.11.19 Continuidad

213. Analizar la continuidad de las siguientes funciones de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R} .
- $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{en } (0, 0). \end{cases}$
 - $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{en } (0, 0). \end{cases}$
 - $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x - y)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{en } (0, 0). \end{cases}$
214. a) Si $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L$ y si existen los límites $\lim_{x \rightarrow a} f(x, y)$, $\lim_{y \rightarrow b} f(x, y)$, demostrar que $\lim_{x \rightarrow a} (\lim_{y \rightarrow b} f(x, y)) = \lim_{y \rightarrow b} (\lim_{x \rightarrow a} f(x, y)) = L$.
- b) Verificar que el recíproco es falso.
215. Sean E y F espacios vectoriales normados y sea $f: E \rightarrow F$ una función continua en E , $O \subset E \times F$ un abierto y sea el conjunto $A = \{x \in E / (x, f(x)) \in O\}$. Demostrar que A es un abierto de E .
216. a) Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y sea $G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = f(x)\}$ el gráfico de f . Demostrar que el G_f es un cerrado de \mathbb{R}^2 .
- b) Dar un ejemplo de una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que tenga gráfico cerrado en \mathbb{R}^2 y que no sea continua.
- c) Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow K$, donde $K \subset \mathbb{R}$ es un compacto y f una aplicación tal que su gráfico G_f

es cerrado en \mathbb{R}^2 . Demostrar que f es continua en \mathbb{R} .

217. Sea E un espacio vectorial normado de dimensión finita, F un espacio vectorial normado y sea $f: E \rightarrow F$ una aplicación lineal, probar que f es continua.

218. Sean E y F espacios vectoriales normados y sea $f: E \rightarrow F$ una aplicación que para por el punto $\mathbf{a} \in E$, tiene la siguiente propiedad: $\forall (\mathbf{a}_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset E$ tal que $\mathbf{a}_k \rightarrow \mathbf{a}$, se tiene que $f(\mathbf{a}_k) \rightarrow f(\mathbf{a})$. Demostrar que f es continua en \mathbf{a} .

219. Sea E un espacio vectorial normado y sea $A \subset E$, definimos $d(\mathbf{x}, A) = \inf_{\mathbf{a} \in A} \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$, para $\mathbf{x} \in E$.

a) Demostrar que la aplicación $E \rightarrow \mathbb{R}$
 $\mathbf{x} \mapsto d(\mathbf{x}, A)$ es uniformemente continua.

b) Demostrar que $d(\mathbf{x}, A) = 0 \iff \mathbf{x} \in \bar{A}$.

Sean F_1 y F_2 dos conjuntos cerrados de E tales que $F_1 \cap F_2 = \emptyset$.

c) Demostrar que el conjunto $\{\mathbf{x} \in E / d(\mathbf{x}, F_1) < d(\mathbf{x}, F_2)\}$ es un abierto de E .

d) Deducir que existen abiertos O_1 y O_2 de E tales que $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ y $F_1 \subset O_1, F_2 \subset O_2$.

e) Demostrar que existe una aplicación $f: E \rightarrow [0, 1]$ continua en E , tal que $f(\mathbf{x}) = 1$, si $\mathbf{x} \in F_1$ y $f(\mathbf{x}) = 0$, si $\mathbf{x} \in F_2$.

220. Dar un ejemplo en \mathbb{R}^2 de dos cerrados F_1 y F_2 , no vacíos tales que $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ y $d(F_1, F_2) = 0$ y que además existen abiertos O_1 y O_2 de \mathbb{R}^2 tales que $F_1 \subset O_1, F_2 \subset O_2$ y $O_1 \cap O_2 = \emptyset$.

221. Demostrar que si $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es uniformemente continua sobre un conjunto acotado $A \subset \mathbb{R}^n$, entonces f es acotada en A (i.e. existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f(\mathbf{x})| \leq M$ para todo $\mathbf{x} \in A$).

222. Estudiar la existencia del límite en $(0, 0)$ para las funciones $f(x, y)$ siguientes:

a) $\frac{xy}{x+y}$

b) $\frac{1+x^2+y^2}{y} \sin y$

c) $\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$

d) $\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

e) $\frac{1-\cos xy}{y^2}$

f) $|x|^y$

g) $\frac{\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y}{x+y}$

h) $\frac{x^2}{|x-y|}$

i) $\frac{(x^2+y^2)^2}{x^2-y^2}$

$$\begin{array}{lll}
 \text{j)} \frac{x^3y^3 + y^2}{x^6 + y^2} & \text{k)} \frac{x^4y^4}{(x^2 + y^4)^3} & \text{l)} \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{y - x^2}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\
 \text{m)} \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{x^2 - xy + y^2}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} & \text{n)} \frac{|y|^\alpha}{x^2 + |y|}, \alpha \in \mathbb{R} & \text{o)} \frac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}{\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}} \\
 \text{p)} \frac{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 y}{\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{sh}^2 y} & \text{q)} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} y} & \text{r)} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sh} y}{\operatorname{sh} x - \operatorname{sen} y}
 \end{array}$$

223. ¿La función $f(x, y, z) = \frac{xyz}{x+y+z}$ tiene un límite en $(0, 0, 0)$?

224. ¿La función $f: (x, y, z) \mapsto \frac{x+y}{x^2 - y^2 + z^2}$ tiene un límite en $(2, -2, 0)$?

225. Sean $a, b \geq 0, c, d > 0$ y $f: \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, encontrar una condición necesaria y

$$(x, y) \mapsto \frac{x^a y^b}{x^c + y^d}$$

suficiente sobre a, b, c, d para que f admita 0 por límite en $(0^+, 0^+)$.

226. Determinar la continuidad de las siguientes funciones:

$$\text{a)} f(x, y, z) = \frac{xy + xz + yz}{x^2 + y^2 + z^2} \qquad \text{b)} f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 \sqrt{y}}{x^5 + y^{5/3}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$\text{c)} f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - xy}{x + y} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

227. Sea $f: \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación, se supone que para toda aplicación $\varphi: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ tal

que $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 0$, la función $x \mapsto f(x, \varphi(x))$ admite un límite en 0. Demostrar que f admite un límite en $(0, 0)$.

228. Sea $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ aplicación continua, estudiar la continuidad de $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \int_{x-y}^{x+y} \varphi(t) dt.$$

$$\text{229. Sea } f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ definida por } f(x, y) = \begin{cases} 2y & \text{si } x \geq y^2 \\ \frac{2x}{y} & \text{si } |x| < y^2, y \neq 0 \\ -2y & \text{si } x \leq -y^2. \end{cases}$$

a) Demostrar que f es continua en \mathbb{R}^2 .

b) Demostrar que no existe $(A, \alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, tal que

$$\forall (x, x', y) \in]-\alpha, \alpha[\times]-\alpha, \alpha[\times]-\beta, \beta[\implies |f(x, y) - f(x', y)| \leq A|x - x'|.$$

230. Encontrar todos los pares $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tales que $\exists M \in \mathbb{R}_+, x^\alpha y^\beta \leq M(x + y), \forall x, y > 0$.

231. Sea I un intervalo de \mathbb{R} de longitud >0 , $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ aplicación, $a \in I$ tal que f admite un desarrollo limitado de orden 2, ¿ $\frac{1}{xy}(f(a+x+y) - f(a+x) - f(a+y) + f(a))$ admite un límite cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, $xy \neq 0$?
232. Para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se define $f_{x,y}: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ por $f_{x,y}(t) = xt^2 + yt$ y $F(x, y) = \sup_{t \in [-1, 1]} f_{x,y}(t)$.
- Calcular $F(x, y)$.
 - Estudiar la continuidad de F en \mathbb{R}^2 .
233. Demostrar que $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ no es uniformemente continua en \mathbb{R}^2 .
- $$(x, y) \mapsto \sqrt{|x^2 - y^2|}$$
234. Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, las aplicaciones parciales $f(x_0, \cdot)$ y $f(\cdot, y_0)$ son continuas. Demostrar que existe una sucesión $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de aplicaciones continuas en \mathbb{R}^2 , convergiendo simplemente a f en \mathbb{R}^2 .
235. Estudiar la continuidad de $f(x, y) = \frac{xy}{(x-y)^2}$.
236. Demostrar que si $f(x, y) = \frac{x}{y}$, entonces $f(x, y) \rightarrow 1$, cuando $(x, y) \rightarrow (1, 1)$.
237. Estudiar la continuidad de $f(x, y, z) = \frac{1}{(x-y)^2 + z^2}$.
238. ¿La función $f(x, y) = e^{-y/(x-1)^2}$ es continua en $(1, 2)$?

Capítulo 2

Cálculo Diferencial en \mathbb{R}^n

2.1 Introducción

El concepto de diferencial es uno de los que más ha influenciado el desarrollo de la matemática. La concepción que actualmente se tiene como aceptable, es de reciente desarrollo. Entre los principales matemáticos que ayudaron al desarrollo de sus fundamentos tenemos a Fréchet¹, Hadamard², Stolz³, Young entre otros.

Cuando se trata la derivada de una función f en \mathbb{R} , se tiene que la función para ser derivable en a , debe expresarse en la forma $f(a + h) = f(a) + f'(a)h + ho(1)$, donde $o(1) \rightarrow 0$, cuando $h \rightarrow 0$. La derivada $f'(a)$ se interpreta como la pendiente de la recta tangente a la curva $(x, f(x))$, en el punto $(a, f(a))$, pero también se puede interpretar

¹**Maurice René Fréchet (1878-1973)** Nace el 2 de setiembre de 1878 en Maligny, Yonne, Bourgogne, Francia. Muere el 4 de junio de 1973 en París, Francia. Maurice Fréchet era un estudiante de Hadamard y bajo su supervisión, Fréchet escribió una disertación sobresaliente en 1906, introduciendo el concepto de un espacio métrico. El no inventó el nombre “el espacio métrico” que se debe a Hausdorff. Fréchet realizó contribuciones importantes en la topología, la teoría de espacios abstractos, estadística, probabilidad y el cálculo. En 1906, investiga el funcional en un espacio métrico y formula la noción abstracta de compacidad y en 1907 prueba un teorema de representación para funcionales independientemente de Riesz.

²**Jacques Salomon Hadamard (1865-1963)** Nace el 8 de diciembre de 1865 en Versailles, Francia. Muere el 17 de octubre de 1963 en París, Francia. Se graduó de l'Ecole Normale Supérieure en 1888 y obtuvo su doctorado de estado en 1892. Entre los temas que él consideró están la elasticidad, óptica geométrica, hidrodinámica y problemas de valor de frontera. Ayudó a la creación de las bases del análisis funcional (él introdujo la palabra funcional).

³**Otto Stolz (1842-1905)** Nace el 3 de mayo de 1842 en Hall (hoy Solbad Hall en Tirol), Austria. Muere el 25 de octubre de 1905 en Innsbruck, Austria. Otto Stolz estudió en Innsbruck, Viena y en Berlín de 1869 a 1871. Sus temas de investigación son muy variados, pero los trabajos más importantes fueron en análisis donde él escribió uno de los primeros libros en análisis estilo Weierstrass.

como una aplicación lineal de \mathbb{R} en \mathbb{R} definida por $h \mapsto f'(a)h$. En este contexto se puede dar el nombre de derivada para la primera interpretación y diferencial para la segunda. La idea de usar la diferencial como una aproximación lineal de la función en el punto de interés, revelará todo su interés cuando veamos la definición general de diferencial en un espacio vectorial normado.

2.2 Derivadas Parciales

Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ un abierto, sea $(a, b) \in U$ y sea f una función, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $(x, y) \mapsto f(x, y)$. Si el límite $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$ existe, decimos que f es parcialmente derivable respecto a x en (a, b) y que el límite anterior es la derivada parcial de f con respecto a x en (a, b) , o la primera derivada parcial con respecto a la primera variable de f en (a, b) y la denotamos por $f_x(a, b)$, o $f_1(a, b)$, o $D_1 f(a, b)$, o $D_x f(a, b)$, o $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$.

Observación Si consideramos la función de una variable real $g: I \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $x \mapsto f(x, b)$ es claro que $g'(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$, por lo que para derivar parcialmente con respecto a x , basta derivar como si se tratara de una variable asumiendo que y es una constante.

Ejemplo 2.2.1 Si $f(x, y) = x^2 y + 2y + y \ln x + x$, entonces $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy + \frac{y}{x} + 1$.

Si f es parcialmente derivable con respecto a x , en todos los puntos de un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$, entonces la función definida de U en \mathbb{R} , tal que $(x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ se llama la derivada parcial de f respecto a x o la derivada parcial con respecto a la primera variable y se denota por $\frac{\partial f}{\partial x}$, f_x , f_1 , o $D_1 f$.

Así en el ejemplo anterior $f_x(x, y) = 2xy + \frac{y}{x} + 1$. Similarmente se define

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{y \rightarrow b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h},$$

como la derivada parcial de f con respecto a la segunda variable en (a, b) o la derivada parcial de f respecto a y en (a, b) y se denota $f_y(a, b)$, o $f_2(a, b)$, o $D_2 f(a, b)$, o $D_y(a, b)$, o

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b).$$

2.2.1 Derivadas Segundas

Las derivadas segundas se definen como las derivadas de las primeras derivadas y las terceras como las derivadas de las segundas, etc.

Notación

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = f_{11} = D_{11}f = D_{xx}f$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = f_{22} = D_{22}f = D_{yy}f$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx} = f_{21} = D_{21}f = D_{yx}f$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = f_{122} = f_{xyy}, \quad \text{etc.}$$

Ejemplo 2.2.2 Si $f(x, y) = y^3x^2 + y^2 + x^2 + x^3y + 1$,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3 + 2x + 3x^2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^3 + 2 + 6xy, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = 6y^2 + 6x,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6xy^2 + 3x^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2x^2 + 2y + x^3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6y^2x + 3x^2.$$

En el ejemplo anterior se tiene que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Teorema 2.2.1 Teorema de Schwarz

Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ un abierto, sea $(x_0, y_0) \in U$ y supongamos que $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, f_1, f_2 y f_{12} existen y son continuas en una bola abierta $B((x_0, y_0), r) \subset U$, entonces $f_{21}(x_0, y_0)$ existe y $f_{12}(x_0, y_0) = f_{21}(x_0, y_0)$.

Demostración Existen $h > 0$, $k > 0$ tales que $[x_0 - h, x_0 + h] \times [y_0 - k, y_0 + k] \subset B((x_0, y_0), r) \subset U$. Consideremos:

$$\phi(x) = f(x, y_0 + k) - f(x, y_0), \quad (k, y_0 \text{ fijos}). \quad (2.1)$$

Como f es continua en (x_0, y_0) y f_1 existe, entonces la función ϕ es continua y derivable en $[x_0 - h, x_0 + h]$ y por el teorema del valor medio aplicado a ϕ en el intervalo $[x_0, x_0 + h]$:

$$\phi(x_0 + h) - \phi(x_0) = h \phi'(c), \text{ con } c \in]x_0, x_0 + h[.$$

Pero,

$$\phi'(c) = f_1(c, y_0 + k) - f_1(c, y_0). \quad (2.2)$$

Sea $\varphi(y) = f_1(c, y)$, para $y \in [y_0, y_0 + k]$, aplicando de nuevo el teorema del valor medio para φ en $[y_0, y_0 + k]$, $\varphi(y_0 + k) - \varphi(y_0) = f_1(c, y_0 + k) - f_1(c, y_0) = k\varphi'(d)$, con $d \in]y_0, y_0 + k[$.

Así, $\varphi'(d) = f_{12}(c, d)$, entonces por (2.1), $\phi(x_0 + h) - \phi(x_0) = h k f_{12}(c, d)$ y por (2.2):

$$[f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0)] - [f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)] = h k f_{12}(c, d).$$

Dividiendo por k y tomando límite cuando $k \rightarrow 0$, $f_2(x_0 + h, y_0) - f_2(x_0, y_0) = h f_{12}(c, y_0)$.

Luego dividiendo por h y tomando límite cuando $h \rightarrow 0$, resulta que $f_{21}(x_0, y_0) = f_{12}(x_0, y_0)$.

Derivadas parciales de funciones de varias variables

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, sea f una función $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ y sea $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in U$, entonces si el límite $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + h, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)}{h}$ existe, lo designamos por $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$, $f_{x_i}(\mathbf{a})$, $f_i(\mathbf{a})$, $D_i f(\mathbf{a})$, etc. y lo llamamos la derivada parcial de la i -ésima variable de f evaluada en \mathbf{a} .

Ejemplo 2.2.3 Si $f(x, y, z, t) = x^2 y^2 z^2 t^4$, entonces $\frac{\partial f}{\partial t} = 4x^2 y^2 z^2 t^3$, $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x y^2 z^2 t^4$, etc.

Generalización de la proposición 2.2.1

La proposición 2.2.1 se generaliza al caso de n variables y al caso de derivadas parciales segundas, terceras o de cualquier orden. Por ejemplo si $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$ existen y son continuas en (x_0, y_0) , entonces $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial x \partial y} = \dots$.

2.2.2 Derivadas direccionales

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto $\mathbf{a} \in U$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, la derivada direccional de f en \mathbf{a} en la dirección \mathbf{u} , denotada por el símbolo $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a})$ o $f_{\mathbf{u}}(\mathbf{a})$, se define por $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{a})}{h}$, $h \in \mathbb{R}$, si tal límite existe.

Observación Algunos autores requieren que $\|\mathbf{u}\| = 1$. Note que si $\mathbf{u} = (1, 0, \dots, 0)$, $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a})$, si $\mathbf{u} = (0, 1, \dots, 0)$, $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a})$, etc.

2.3 El diferencial

Definición 2.3.1 Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, $\mathbf{a} \in U$ y sea $f: U \rightarrow \mathbb{R}^p$, decimos que f es diferenciable en \mathbf{a} si existe una función lineal $\ell: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ tal que $f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \ell(\mathbf{h}) + \|\mathbf{h}\|\varepsilon(\mathbf{h})$, donde $\varepsilon(\mathbf{h}) \rightarrow \mathbf{0}$, cuando $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$.

La aplicación $\ell: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ se llama el diferencial de f en \mathbf{a} y se denota por $df(\mathbf{a})$ o $Df(\mathbf{a})$.

Observaciones

1) Note que aunque la función f no esté definida en todo \mathbb{R}^n , el diferencial ℓ si está definido en todo \mathbb{R}^n y además va a depender de \mathbf{a} , es decir para otro punto \mathbf{a} tendremos otra función lineal ℓ .

2) $\varepsilon: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ es una función de la cual lo único que se pide es que $\varepsilon(\mathbf{h}) \rightarrow \mathbf{0}$, cuando $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$.

Proposición 2.3.1 Si el diferencial de f en \mathbf{a} existe, es único.

Demostración Supongamos que f es diferenciable en \mathbf{a} y que existen dos diferenciales ℓ y ℓ' , entonces ℓ y ℓ' son lineales en \mathbb{R}^n y

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \ell(\mathbf{h}) + \|\mathbf{h}\|\varepsilon(\mathbf{h}) = \ell'(\mathbf{h}) + \|\mathbf{h}\|\varepsilon'(\mathbf{h}) \implies \ell(\mathbf{h}) - \ell'(\mathbf{h}) = \|\mathbf{h}\|(\varepsilon(\mathbf{h}) - \varepsilon'(\mathbf{h})),$$

y para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\ell(\lambda\mathbf{h}) - \ell'(\lambda\mathbf{h}) = \|\lambda\mathbf{h}\|(\varepsilon(\lambda\mathbf{h}) - \varepsilon'(\lambda\mathbf{h}))$, por lo que:

$$\ell(\mathbf{h}) - \ell'(\mathbf{h}) = \frac{|\lambda|}{\lambda} \|\mathbf{h}\|(\varepsilon(\lambda\mathbf{h}) - \varepsilon'(\lambda\mathbf{h})) \longrightarrow \mathbf{0} \text{ si } \lambda \rightarrow 0 \implies \ell(\mathbf{h}) = \ell'(\mathbf{h}), \forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n.$$

Proposición 2.3.2 Sea $\ell: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ una aplicación lineal, entonces ℓ es continua en \mathbb{R}^n .

Demostración Sea $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Sea $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$ la base canónica de \mathbb{R}^n . Así, $\mathbf{x} - \mathbf{y} = (x_1 - y_1)\mathbf{e}_1 + \dots + (x_n - y_n)\mathbf{e}_n$,

$$\|\ell(\mathbf{x} - \mathbf{y})\| = \|(x_1 - y_1)\ell(\mathbf{e}_1) + \dots + (x_n - y_n)\ell(\mathbf{e}_n)\|.$$

Sea $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \max_n \{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\}$, entonces:

$$\|\ell(\mathbf{x} - \mathbf{y})\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| (\|\ell(\mathbf{e}_1)\| + \dots + \|\ell(\mathbf{e}_n)\|).$$

Si $\ell = \mathbf{0}$, entonces es continua como función constante.

Si $\ell \neq \mathbf{0}$, $\|\ell(\mathbf{e}_1)\| + \dots + \|\ell(\mathbf{e}_n)\| = M > 0$, entonces $\|\ell(\mathbf{x} - \mathbf{y})\| \leq M\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ lo que incluso demuestra que ℓ es uniformemente continua en \mathbb{R}^n .

Proposición 2.3.3 Si f es diferenciable en $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $\mathbf{a} \in U$ abierto, entonces f es continua en \mathbf{a} .

Demostración Por la definición de diferencial se tiene:

$$\|f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a})\| = \|\ell(\mathbf{h}) + \|\mathbf{h}\|\varepsilon(\mathbf{h})\|, \text{ pero } \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \|f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a})\| = \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \|\ell(\mathbf{h}) + \|\mathbf{h}\|\varepsilon(\mathbf{h})\| =$$

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \|\ell(\mathbf{h}) + \|\mathbf{h}\|\varepsilon(\mathbf{h})\| = \|\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \ell(\mathbf{h}) + 0 \cdot \mathbf{0}\| = \|\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \ell(\mathbf{h})\| = \|\ell(\mathbf{0})\| = 0.$$

$$\text{Así, } \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}).$$

Proposición 2.3.4 Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, sea $\mathbf{a} \in U$ y $f: U \rightarrow \mathbb{R}$. Si f es diferenciable en \mathbf{a} , entonces $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a})$ existe para cualquier dirección $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ y $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a}) = (Df(\mathbf{a}))(\mathbf{u})$.

Demostración Puesto que f es diferenciable en \mathbf{a} , existe una aplicación lineal $\ell: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(\mathbf{a} + \lambda\mathbf{u}) = f(\mathbf{a}) + \ell(\lambda\mathbf{u}) + \|\lambda\mathbf{u}\|\varepsilon(\lambda\mathbf{u})$, para $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\frac{f(\mathbf{a} + \lambda\mathbf{u}) - f(\mathbf{a})}{\lambda} = \ell(\mathbf{u}) + \frac{|\lambda|}{\lambda} \|\mathbf{u}\|\varepsilon(\lambda\mathbf{u}).$$

Cuando $\lambda \rightarrow 0$, $\frac{|\lambda|}{\lambda}$ permanece acotado y entonces $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a}) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + \lambda\mathbf{u}) - f(\mathbf{a})}{\lambda} = \ell(\mathbf{u})$, lo que muestra que la derivada direccional existe y que su valor es igual al valor del diferencial en \mathbf{u} .

Corolario 2.3.1 Sea $U \subset \mathbb{R}^n$, abierto $\mathbf{a} \in U$ y $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, si f es diferenciable en \mathbf{a} , entonces existen todas las derivadas parciales de primer orden de f en \mathbf{a} y tenemos:

$$\ell(\mathbf{y}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a})y_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a})y_n, \quad (2.3)$$

para todo $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Además $\ell(\mathbf{e}_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$, donde $\mathbf{e}_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ es el i -ésimo elemento de la base canónica de \mathbb{R}^n .

Demostración Sea $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$ la base canónica de \mathbb{R}^n . Por la proposición 2.3.4, $D_{\mathbf{e}_1}f(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a})$ existe, al igual que $D_{\mathbf{e}_2}f(\mathbf{a}), \dots, D_{\mathbf{e}_n}f(\mathbf{a})$. Además por la misma proposición, $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) = \ell(\mathbf{e}_1), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) = \ell(\mathbf{e}_n)$, entonces:

$$\ell(\mathbf{y}) = \ell(y_1\mathbf{e}_1 + \cdots + y_n\mathbf{e}_n) = y_1\ell(\mathbf{e}_1) + \cdots + y_n\ell(\mathbf{e}_n) = y_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) + \cdots + y_n\frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}).$$

Observación Usualmente se designa por dx_i , la i -ésima proyección, es decir $dx_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de manera que si $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $y_i = dx_i(\mathbf{y})$ y la ecuación (2.3) del corolario se escribe $Df(\mathbf{a})(\mathbf{y}) = \ell(\mathbf{y}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a})dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a})dx_n \right)(\mathbf{y})$, lo que da para el diferencial, la siguiente notación:

$$df(\mathbf{a}) = Df(\mathbf{a}) = \ell = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a})dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a})dx_n,$$

o también

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n.$$

Gradiente Si f es diferenciable en $\mathbf{a} \in U \subset \mathbb{R}^n$ (U abierto), se llama el gradiente de f en \mathbf{a} y se denota por $\text{grad}f(\mathbf{a})$ o $\nabla f(\mathbf{a})$ al vector $\nabla f(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right)$. Resulta entonces, por la proposición 2.3.4 y la relación (2.3) de su corolario, que:

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a}) = \ell(\mathbf{u}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{u}.$$

2.3.1 Caso de una función diferenciable de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^p

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $\mathbf{a} \in U$ y $f: U \rightarrow \mathbb{R}^p$, $f = (f_1, \dots, f_p)$ una función diferenciable en \mathbf{a} , entonces:

- i) Cada función componente $f_i: U \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en \mathbf{a} y $df(\mathbf{a}) = (df_1(\mathbf{a}), \dots, df_n(\mathbf{a}))$.
- ii) La matriz que corresponde al diferencial $df(\mathbf{a})$ es:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix},$$

que se llama matriz Jacobiana⁴ de f evaluada en \mathbf{a} y se denota por $J_f(\mathbf{a})$.

Demostración

- i) Sea $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p)$ el diferencial de f en \mathbf{a} , es decir $\ell: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ una aplicación lineal tal que $f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \ell(\mathbf{h}) + \|\mathbf{h}\|\varepsilon(\mathbf{h})$, con $\varepsilon: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, donde $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ es tal que $\varepsilon(\mathbf{h}) \rightarrow \mathbf{0}$, cuando $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$, lo que implica $\varepsilon_i(\mathbf{h}) \rightarrow 0$, cuando $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$, $i = 1, \dots, n$. Se tiene entonces:

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f_1(\mathbf{a}) &= \ell_1(\mathbf{h}) + \|\mathbf{h}\|\varepsilon_1(\mathbf{h}) \\ &\vdots \\ f_p(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f_p(\mathbf{a}) &= \ell_p(\mathbf{h}) + \|\mathbf{h}\|\varepsilon_p(\mathbf{h}). \end{aligned}$$

Dado que $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p)$ es lineal de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^p , entonces cada componente ℓ_i de ℓ , es una forma lineal de \mathbb{R}^n en \mathbb{R} y como $\varepsilon_i(\mathbf{h}) \rightarrow 0$ cuando $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$, se tiene que cada f_i es diferenciable en \mathbf{a} y que $Df_i(\mathbf{a}) = \ell_i$.

- ii) La primera columna de la matriz que corresponde a la aplicación lineal $\ell: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, donde $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p)$, viene dada por $\ell(\mathbf{e}_1)$, con $\mathbf{e}_1 = (1, 0 \dots 0)$. Pero $\ell(\mathbf{e}_1) =$

⁴**Karl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851)** Nace el 10 de diciembre de 1804 en Potsdam, Prusia (hoy Alemania). Muere el 18 de febrero 1851 en Berlín, Alemania. Jacobi estableció con Abel la Teoría de las funciones elípticas. Demostró la solución de integrales elípticas mediante la aplicación de las funciones, series exponenciales introducidas por él mismo. Desarrolló los determinantes funcionales, llamados después jacobianos y las ecuaciones diferenciales.

El padre de Jacobi era banquero y su familia era muy próspera, fue así como él recibió una buena educación en la Universidad de Berlín. Obtuvo su Doctorado en 1825 y enseñó matemáticas en Königsberg desde 1826 hasta su muerte. Fue nominado para una cátedra en 1832. En 1834 probó que si una función uni-valuada de una variable es doblemente periódica, entonces la razón de los periodos es imaginaria. Este resultado impulsó enormemente el trabajo en esta área, en particular a Liouville y Cauchy.

Jacobi tenía la reputación de ser un excelente maestro, atraía a muchos estudiantes. Introdujo un método de seminario para enseñar a los estudiantes los últimos avances matemáticos.

$(\ell_1(\mathbf{e}_1), \dots, \ell_p(\mathbf{e}_1))$ y $\ell_1(\mathbf{e}_1) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \dots, \ell_p(\mathbf{e}_1) = \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(\mathbf{a})$ y así sucesivamente hasta $\ell(\mathbf{e}_n) = (\ell_1(\mathbf{e}_n), \dots, \ell_p(\mathbf{e}_n))$, donde $\ell_1(\mathbf{e}_n) = \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}), \dots, \ell_p(\mathbf{e}_n) = \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(\mathbf{a})$.

2.3.2 Criterio suficiente de diferenciabilidad

Hemos visto que si una función es diferenciable en un punto $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, entonces es continua, existen todas las derivadas direccionales en ese punto y en particular existen todas las derivadas parciales en ese punto. Sin embargo el recíproco no es cierto. Una función puede ser continua en un punto, incluso pueden existir todas las derivadas direccionales (y por ende todas las parciales) en ese punto y pese a esto, puede suceder que la función no sea diferenciable ahí (ver ejercicios).

¿Cómo se puede garantizar entonces, que una función es diferenciable en un punto? Daremos la siguiente condición.

Proposición 2.3.5 *Sea U un abierto de \mathbb{R}^2 , $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, si f tiene las derivadas parciales continuas en U , entonces f es diferenciable en cada punto de U .*

Demostración Sea $(a, b) \in U$, como U es abierto, existen dos números reales $h > 0$ y $k > 0$ tales que $[a - h, a + h] \times [b - k, b + k] \subset U$. Sea $\Delta f = f(a + h, b + k) - f(a, b)$

$$\Delta f = [f(a + h, b + k) - f(a + h, b)] + [f(a + h, b) - f(a, b)]. \quad (2.4)$$

Si las derivadas parciales existen en U , las funciones de una variable $x \mapsto f(x, y)$, $y \mapsto f(x, y)$ son continuas y derivables en $[a, a + h]$ y $[b, b + k]$ y por lo tanto se puede aplicar el teorema del valor medio a cada una de ellas, en esos intervalos. Así resulta de la ecuación (2.4) que:

$$\Delta f = kf_2(a + h, y_1) + hf_1(x_1, b), \quad \text{donde } y_1 \in [b, b + k[\text{ y } x_1 \in [a, a + h[.$$

Sea $\ell(h, k) = kf_2(a, b) + hf_1(a, b)$. Resulta que $\ell: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función lineal.
 $(h, k) \mapsto \ell(h, k)$

Sea $\|(h, k)\|\varepsilon(h, k) = \Delta f - \ell(h, k) = k(f_2(a + h, y_1) - f_2(a, b)) + h(f_1(x_1, b) - f_1(a, b))$. Note entonces que $f(a + h, b + k) = f(a, b) + \ell(h, k) + \|(h, k)\|\varepsilon(h, k)$ y si logramos demostrar

que $\varepsilon(h, k) \rightarrow 0$, cuando $\|(h, k)\| \rightarrow 0$, tendríamos que f es diferenciable y su diferencial en (a, b) es ℓ . En efecto:

$$\| \|(h, k)\| \varepsilon(h, k) \| \leq |k| |f_2(a+h, y_1) - f_2(a, b)| + |h| |f_1(x_1, b) - f_1(a, b)|.$$

Sea $\|(h, k)\| = \max\{|k|, |h|\}$, entonces de lo anterior se deduce que:

$$\begin{aligned} \|(h, k)\| |\varepsilon(h, k)| &\leq \|(h, k)\| (|f_2(a+h, y_1) - f_2(a, b)| + |f_1(x_1, b) - f_1(a, b)|) \\ \implies |\varepsilon(h, k)| &\leq |f_2(a+h, y_1) - f_2(a, b)| + |f_1(x_1, b) - f_1(a, b)|. \end{aligned}$$

Si $\|(h, k)\| \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0$, $k \rightarrow 0$ y entonces $y_1 \rightarrow b$, $x_1 \rightarrow a$, lo que implica que los pares ordenados $(a+h, y_1) \rightarrow (a, b)$, $(x_1, b) \rightarrow (a, b)$ y como las derivadas parciales f_2 y f_1 son continuas en (a, b) resulta que $|\varepsilon(h, k)| \rightarrow 0$, cuando $(h, k) \rightarrow (0, 0)$.

Proposición 2.3.6 Si $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ y si todas las derivadas parciales de f en U existen y son continuas, entonces f es diferenciable en cada punto de U .

Corolario 2.3.2 Sea $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $f = (f_1, \dots, f_p)$. Recordamos que f es diferenciable si cada función componente f_1, \dots, f_p es diferenciable y que a $f_i: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, se le puede aplicar la proposición anterior, es decir si las derivadas parciales $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ existen y son continuas, entonces f es diferenciable.

2.4 Regla de la cadena para varias variables

Sea $\ell: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ lineal, en la demostración de la proposición 2.3.2 vimos que existe $M > 0$ tal que $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\|\ell(\mathbf{x} - \mathbf{y})\| \leq M\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$. En particular haciendo $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, se tiene que $\|\ell(\mathbf{x})\| \leq M\|\mathbf{x}\|$, para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Proposición 2.4.1 Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^p$ diferenciable en $\mathbf{a} \in U$, sea $B \subset \mathbb{R}^p$ abierto tal que $f(U) \subset B$, sea $g: B \rightarrow \mathbb{R}^r$ diferenciable en $f(\mathbf{a})$, sea $H: U \rightarrow \mathbb{R}^r$ definida por $H = g \circ f$, entonces H es diferenciable en \mathbf{a} y $DH(\mathbf{a}) = Dg(f(\mathbf{a})) \circ Df(\mathbf{a})$, es decir el diferencial de H en \mathbf{a} , es la composición de los diferenciales de f en \mathbf{a} y de g en $f(\mathbf{a})$.

Demostración Sea $\ell' = Df(\mathbf{a})$ y sea $\ell'' = Dg(f(\mathbf{a}))$ que existen por hipótesis, entonces:

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \ell'(\mathbf{h}) + \|\mathbf{h}\|\varepsilon'(\mathbf{h}), \quad \text{con } \varepsilon'(\mathbf{h}) \longrightarrow \mathbf{0}, \quad \text{cuando } \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}.$$

Así:

$$H(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = g(f(\mathbf{a} + \mathbf{h})) = g(f(\mathbf{a}) + \underbrace{\ell'(\mathbf{h}) + \|\mathbf{h}\|\varepsilon'(\mathbf{h})}_{\mathbf{y}}). \quad (2.5)$$

Como g es diferenciable en $f(\mathbf{a})$, $g(f(\mathbf{a}) + \mathbf{y}) = g(f(\mathbf{a})) + \ell''(\mathbf{y}) + \|\mathbf{y}\|\varepsilon''(\mathbf{y})$, con $\varepsilon''(\mathbf{y}) \longrightarrow \mathbf{0}$, cuando $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{0}$, de manera que por la ecuación (2.5):

$$\begin{aligned} H(\mathbf{a} + \mathbf{h}) &= g(f(\mathbf{a})) + \ell''(\ell'(\mathbf{h}) + \|\mathbf{h}\|\varepsilon'(\mathbf{h})) + \|\ell'(\mathbf{h}) + \|\mathbf{h}\|\varepsilon'(\mathbf{h})\|\varepsilon''(\ell'(\mathbf{h}) + \|\mathbf{h}\|\varepsilon'(\mathbf{h})) \\ &= H(\mathbf{a}) + (\ell'' \circ \ell')(\mathbf{h}) + \|\mathbf{h}\|\ell''(\varepsilon'(\mathbf{h})) + \|\ell'(\mathbf{h}) + \|\mathbf{h}\|\varepsilon'(\mathbf{h})\|\varepsilon''(\ell'(\mathbf{h}) + \|\mathbf{h}\|\varepsilon'(\mathbf{h})) \end{aligned}$$

y se tiene que $\ell'' \circ \ell'$ es una aplicación lineal de $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^r$.

Sea $\varepsilon'''(\mathbf{h}) = \ell''(\varepsilon'(\mathbf{h})) + \underbrace{\frac{1}{\|\mathbf{h}\|}\|\ell'(\mathbf{h}) + \|\mathbf{h}\|\varepsilon'(\mathbf{h})\|}_{\Theta} \varepsilon''(\ell'(\mathbf{h}) + \|\mathbf{h}\|\varepsilon'(\mathbf{h}))$. Así tenemos:

$$\frac{1}{\|\mathbf{h}\|}\|\ell'(\mathbf{h}) + \|\mathbf{h}\|\varepsilon'(\mathbf{h})\| \leq \frac{1}{\|\mathbf{h}\|}\|\ell'(\mathbf{h})\| + \|\varepsilon'(\mathbf{h})\| \leq M + \|\varepsilon'(\mathbf{h})\|,$$

ya que existe $M > 0$ tal que $\|\ell'(\mathbf{h})\| \leq M\|\mathbf{h}\|$, $\forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$. Resulta que:

$$\|\Theta\| \leq (M + \|\varepsilon'(\mathbf{h})\|)\|\varepsilon''(\ell'(\mathbf{h}) + \|\mathbf{h}\|\varepsilon'(\mathbf{h}))\|,$$

pero si $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$, $\ell'(\mathbf{h}) \longrightarrow \mathbf{0}$, $\|\mathbf{h}\|\varepsilon'(\mathbf{h}) \longrightarrow \mathbf{0}$ y $\varepsilon''(\ell'(\mathbf{h}) + \|\mathbf{h}\|\varepsilon'(\mathbf{h})) = \varepsilon''(\mathbf{y}) \longrightarrow \mathbf{0}$, pues $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{0}$. Así $\|\Theta\| \longrightarrow \mathbf{0}$, cuando $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$ y como $\ell''(\varepsilon'(\mathbf{h})) \longrightarrow \ell''(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, cuando $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$, resulta que $\varepsilon'''(\mathbf{h}) \longrightarrow \mathbf{0}$, cuando $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$, es decir:

$$H(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - H(\mathbf{a}) = \ell'' \circ \ell'(\mathbf{h}) + \|\mathbf{h}\|\varepsilon'''(\mathbf{h}),$$

con $\ell'' \circ \ell'$ lineal y $\varepsilon'''(\mathbf{h}) \longrightarrow \mathbf{0}$, cuando $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$. Así, H es diferenciable y $DH(\mathbf{a}) = \ell'' \circ \ell' = Dg(f(\mathbf{a})) \circ Df(\mathbf{a})$.

Corolario 2.4.1 Con las mismas hipótesis de la proposición anterior $J_H(\mathbf{a}) = J_g(f(\mathbf{a})) J_f(\mathbf{a})$, es decir la matriz jacobiana de la composición de dos funciones es igual al producto de las matrices jacobianas de las funciones.

Este resultado es obvio, ya que a la composición de dos funciones lineales $Dg(f(\mathbf{a}))$ y $Df(\mathbf{a})$, le corresponde la multiplicación de sus matrices. (Resultado fundamental del álgebra lineal).

2.4.1 Regla de la cadena para varias variables

Proposición 2.4.2 Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^p$ diferenciable en \mathbf{a} , sea $B \subset \mathbb{R}^p$ abierto, tal que $B \supset f(U)$, $g: B \rightarrow \mathbb{R}^s$ diferenciable en $f(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$. Sabemos que $H = g \circ f$ es diferenciable en \mathbf{a} y si denotamos $f = (f_1, \dots, f_i, \dots, f_p)$, $g = (g_1, \dots, g_\ell, \dots, g_s)$ y $H = (H_1, \dots, H_s)$ entonces, H_ℓ es parcialmente derivable y se tiene:

$$D_k H_\ell(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^p (D_i g_\ell(\mathbf{b})) (D_k f_i(\mathbf{a})),$$

para $k \in \{1, \dots, n\}$, $\ell \in \{1, \dots, s\}$.

Demostración Es un resultado inmediato del corolario anterior y la regla de multiplicación de matrices.

Ejemplo 2.4.1 Sea $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f = (f_1, f_2, f_3)$; $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g = (g_1, g_2)$, la función $h = g \circ f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tiene la forma $h = (h_1, h_2)$, entonces por ejemplo:

$$\frac{\partial h_1}{\partial u} = \frac{\partial g_1}{\partial x} \frac{\partial f_1}{\partial u} + \frac{\partial g_1}{\partial y} \frac{\partial f_2}{\partial u} + \frac{\partial g_1}{\partial z} \frac{\partial f_3}{\partial u},$$

que es una forma abreviada de escribir la derivada parcial de h_1 respecto a u .

Note que $h = (h_1, h_2) = g(f_1, f_2, f_3) = (g_1(f_1, f_2, f_3), g_2(f_1, f_2, f_3))$, luego $h_1 = g_1(f_1, f_2, f_3)$, con $f_i: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$.

Si la función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es tal que $(u, v) \mapsto (u^2, uv, v^3)$ y la función $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es tal que $(x, y, z) \mapsto (xy, y^2 + z)$, la función $h = g \circ f = (h_1, h_2): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Podemos calcular, por ejemplo $D_1 h_2(1, 2) = \frac{\partial h_2}{\partial u}(1, 2)$ de varias maneras.

1. $h(u, v) = g(f(u, v)) = g(u^2, uv, v^3) = (u^3v, u^2v^2 + v^3)$ y se obtiene que $h_2(u, v) = u^2v^2 + v^3$,
 $\frac{\partial h_2}{\partial u} = 2uv^2$, $\frac{\partial h_2}{\partial u}(1, 2) = 8$.

2. Si ponemos $x = u^2 = f_1(u, v)$, $y = uv = f_2(u, v)$, $z = v^3 = f_3(u, v)$, entonces:

$$h(u, v) = (h_1(u, v), h_2(u, v)) = g(x, y, z) = (g_1(x, y, z), g_2(x, y, z)) = (xy, y^2 + z),$$

de donde $h_2(u, v) = y^2 + z = g_2(x, y, z)$, con $y = uv$, $x = u^2$, $z = v^3$ y por la regla de la

cadena $\frac{\partial h_2}{\partial u} = \frac{\partial g_2}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial g_2}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial g_2}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u}$,

con $\frac{\partial g_2}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial g_2}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial x}{\partial u} = 2u$; $\frac{\partial y}{\partial u} = v$, por lo que $\frac{\partial h_2}{\partial u} = 0 \cdot 2u + 2y \cdot v = 2uv^2$ y $\frac{\partial h_2}{\partial u}(1, 2) = 8$.

3. Empleando Jacobianos. Como $h = g \circ f$, $Dh(1, 2) = Dg(f(1, 2)) \circ Df(1, 2)$, de donde:

$$J_h(1, 2) = J_g(f(1, 2)) J_f(1, 2), \quad J_f(u, v) = \begin{pmatrix} 2u & 0 \\ v & u \\ 0 & 3v^2 \end{pmatrix},$$

$$J_f(1, 2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}, \quad J_g(x, y, z) = \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ 0 & 2y & 1 \end{pmatrix}.$$

Como $x = u^2$, $y = uv$, $z = v^3$, para $u = 1$, $v = 2$. Así $x = 1$, $y = 2$, $z = 8$,

$$J_g(f(1, 2)) = J_g(1, 2, 8) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$J_h(1, 2) = \begin{pmatrix} D_1 h_1(1, 2) & D_2 h_1(1, 2) \\ D_1 h_2(1, 2) & D_2 h_2(1, 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 8 & 16 \end{pmatrix},$$

de donde $D_1 h_1(1, 2) = 6$, $D_2 h_1(1, 2) = 1$, $D_1 h_2(1, 2) = 8$, $D_2 h_2(1, 2) = 16$.

Definición 2.4.1

- Dos vectores $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ en \mathbb{R}^n son perpendiculares (u ortogonales) si $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$.
- El conjunto $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n / (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot \boldsymbol{\eta} = 0\}$ se llama hiperplano que pasa por \mathbf{a} y es normal (perpendicular) a $\boldsymbol{\eta}$.
- Una función $f: E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se dice de clase C^r sobre E , si todas las derivadas parciales de orden $\leq r$ están definidas y son continuas en E .

Observación Si f es diferenciable, $f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + df(\mathbf{x})\mathbf{h} + \|\mathbf{h}\|\varepsilon(\mathbf{h})$, con $\varepsilon(\mathbf{h}) \rightarrow 0$, cuando $\mathbf{h} \rightarrow 0$. Podemos escribir $f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) \approx df(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}$, cuando \mathbf{h} está cerca de 0 . La función $df(\mathbf{x}_0)$ es lineal y se dice que se linealiza f en un vecindario de \mathbf{x}_0 . En la práctica los resultados obtenidos por $df(\mathbf{x}_0)$ se aplican mejor en tanto que \mathbf{h} es pequeño, o bien $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) \approx df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$, cuando \mathbf{x} está cerca de \mathbf{x}_0 .

Interpretación geométrica del diferencial $p = 1$

Consideremos una función $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, con U abierto, diferenciable en $\mathbf{x}_0 \in U$. La función $f(\mathbf{x}_0) + df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ es un hiperplano en \mathbb{R}^{n+1} , con ecuación:

$$x_{n+1} = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)(x_i - x_{0i}).$$

Tenemos que $\mathbf{b} = (\mathbf{x}_0, f(\mathbf{x}_0))$ está en el hiperplano y es normal al vector

$$\boldsymbol{\eta} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0), -1 \right),$$

pues si se define $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ satisface $(\mathbf{x} - \mathbf{b}) \cdot \boldsymbol{\eta} = 0$.

Observemos que el hiperplano $x_{n+1} = f(\mathbf{x}_0) + df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ es tangente al gráfico de f en $(\mathbf{x}_0, f(\mathbf{x}_0))$. Este plano pasa por $(\mathbf{x}_0, f(\mathbf{x}_0))$ y es normal a $\boldsymbol{\eta}$.

Así, linealizar la función f en un vecindario de \mathbf{x}_0 , es equivalente a confundir el gráfico de f con el hiperplano que le es tangente en \mathbf{x}_0 .

Corolario 2.4.2 Si $\nabla f(\mathbf{x}) \neq 0$, entonces $\nabla f(\mathbf{x})$ apunta en la dirección a lo largo de la cual f crece más rápido.

Prueba Sea $\boldsymbol{\eta}$ un vector unitario, entonces la derivada direccional en la dirección de $\boldsymbol{\eta}$ es $\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\eta} = \|\nabla f(\mathbf{x})\| \cos \theta$, donde θ es el ángulo entre $\boldsymbol{\eta}$ y $\nabla f(\mathbf{x})$. Este es máximo cuando $\theta = 0$ i.e. $\boldsymbol{\eta}$ y $\nabla f(\mathbf{x})$ son paralelos.

Corolario 2.4.3 Si $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^1 y (x_o, y_o, z_o) es un punto de la superficie de nivel S definida por $f(x, y, z) = k$, k una constante de \mathbb{R} , entonces $\nabla f(x_o, y_o, z_o)$ es normal a la superficie en el sentido siguiente: Si \mathbf{v} es un vector tangente de una trayectoria $\mathbf{r}(t)$ en $t = 0$, con $\mathbf{r}(0) = (x_o, y_o, z_o)$, entonces $\nabla f \cdot \mathbf{v} = 0$.

Prueba Consideremos la trayectoria $\mathbf{r}(t)$ en S , entonces $f(\mathbf{r}(t)) = k \implies \frac{d}{dt}f(\mathbf{r}(t))\Big|_{t=0} = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\Big|_{t=0} = \nabla f(x_o, y_o, z_o) \cdot \mathbf{v} = 0$.

Observe que en el plano, $\nabla f(x, y)$ es ortogonal a la curva $f(x, y) = k$.

Corolario 2.4.4 Si $f: U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en $(x_o, y_o, z_o) \in U$ abierto, la derivada direccional de un vector unitario $\mathbf{u} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ existe y se tiene:

$$D_{\mathbf{u}}f(x_o, y_o, z_o) = \nabla f(x_o, y_o, z_o) \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma,$$

y este vector es máximo cuando \mathbf{u} coincide con $\nabla f(x_o, y_o, z_o)$ i.e.

$$\cos \alpha = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}, \quad \cos \beta = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}.$$

Observación Recordemos que definimos la aplicación $dx_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, con $dx_i(\mathbf{h}) = h_i$. A menudo se utiliza para simplificar, dy en lugar de $df(\mathbf{x}_0)$ y escribiendo $\Delta x_i = dx_i(\Delta \mathbf{x})$ ($\mathbf{h} = \Delta \mathbf{x}$) se obtiene:

$$dy(\Delta \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) dx_i(\Delta \mathbf{x}), \quad \text{i.e.} \quad dy = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) dx_i.$$

Algunos autores en la fórmula anterior, consideran dy, dx_1, \dots, dx_n como infinitamente pequeños, interpretación que no tiene sentido. Esto hace confusa la comprensión del diferencial, que no es más que una aplicación lineal y sirve para linealizar una función en el vecindario del punto \mathbf{x}_0 . Es más natural, considerar los Δx_i todo lo pequeño que queramos, lo que se ajusta mejor a la realidad.

Recordemos que $df(\mathbf{x}_0)$ es una aplicación lineal, en la cual

$$\begin{aligned} df(\mathbf{x}_0)(1, 0, \dots, 0) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) \\ &\vdots \\ df(\mathbf{x}_0)(0, \dots, 0, 1) &= \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{aligned}$$

$$\text{i.e. } df(\mathbf{x}_0)(\Delta\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \Delta\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) \Delta x_i.$$

Así el hiperplano tangente se escribe $y - f(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$.

Interpretación geométrica del diferencial $p > 1$

Sabemos que $df(\mathbf{x}_0)$ es una aplicación lineal y se le asocia una matriz, la matriz Jacobiana:

$$J_f(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial(f_1, \dots, f_p)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}(\mathbf{x}_0).$$

En particular, si se linealiza la función f en un vecindario de \mathbf{x}_0

$$f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x}_0) + df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}_0) + J_f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

- Sean $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^n$ aplicaciones diferenciables, entonces $f \circ g$ es diferenciable y tenemos que:

$$\frac{\partial f \circ g}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_i}(g(\mathbf{x}_0)) \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0), \quad j = 1, \dots, q.$$

- Sea $f = (f_1, \dots, f_p)$, $g = (g_1, \dots, g_n)$ diferenciables, entonces $J_{f \circ g}(\mathbf{x}) = J_f(g(\mathbf{x}))J_g(\mathbf{x})$ como $f \circ g = (f_1 \circ g, \dots, f_p \circ g)$ se tiene:

$$\frac{\partial f_k \circ g}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial y_i}(g(\mathbf{x})) \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}), \quad \text{o bien} \quad (f_k \circ g)_j(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n (f_k)_i(g(\mathbf{x})) (g_i)_j(\mathbf{x}),$$

donde $(h)_k$ es la derivada parcial de h con respecto a la k -ésima componente.

2.4.2 Teorema de incrementos finitos

Teorema 2.4.1 Sea $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, una función con derivadas parciales en D abierto convexo y sean $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2) \in D$ tales que $(a_1, b_2) \in D$, entonces existen c_1 entre a_1 y b_1 , c_2 entre a_2 y b_2 tales que $f(b_1, b_2) - f(a_1, a_2) = (b_1 - a_1)f_x(c_1, b_2) + (b_2 - a_2)f_y(a_1, c_2)$.

Demostración $f(b_1, b_2) - f(a_1, a_2) = f(b_1, b_2) - f(a_1, b_2) + f(a_1, b_2) - f(a_1, a_2)$. Como $f(x, b_2)$ es derivable en x en intervalo cerrado de extremos a_1, b_1 se tiene:

$$f(b_1, b_2) - f(a_1, b_2) = (b_1 - a_1)f_x(c_1, b_2),$$

con c_1 entre a_1 y b_1 . Similarmente:

$$f(a_1, b_2) - f(a_1, a_2) = (b_2 - a_2)f_y(a_1, c_2),$$

con c_2 entre a_2 y b_2 .

Observación La hipótesis de convexidad de D , asegura la existencia en los puntos de interés de f , f_x y f_y . Si D es una bola abierta, es un convexo abierto.

El teorema anterior se puede formular con sólo suponer la continuidad de $f(x, b_2)$ en el intervalo cerrado de extremos a_1, b_1 y la existencia de la derivada de esta función en el intervalo abierto de extremos a_1, b_1 ; e igualmente para la función $f(a_1, y)$. El teorema se puede escribir:

$$f(b_1, b_2) - f(a_1, b_2) = (b_1 - a_1)f_x(a_1 + \theta_1(b_1 - a_1), b_2) + (b_2 - a_2)f_y(a_1, a_2 + \theta_2(b_2 - a_2))$$

con $\theta_i \in]0, 1[$, $i = 1, 2$.

Teorema 2.4.2 Sea $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, f con derivadas parciales en D abierto convexo y sean $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n) \in D$ tales que $(a_1, \dots, a_i, b_{i+1}, \dots, b_n) \in D$, $i = 1, \dots, n - 1$, entonces:

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)f_{x_i}(a_1, \dots, a_{i-1}, c_i, b_{i+1}, \dots, b_n)$$

con $c_i = a_i + \theta_i(b_i - a_i)$, $0 < \theta_i < 1$, $i = 1, \dots, n$.

Demostración La demostración es análoga al caso $n = 2$.

Observación Sea $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, f con derivadas parciales continuas en D abierto.

Si $x = g_1(t)$, $y = g_2(t)$, con $t \in E \subset \mathbb{R}$ abierto tal que $(g_1(t), g_2(t)) \in D$, entonces:

$$f(g_1(t), g_2(t)) - f(g_1(a), g_2(a)) = (g_1(t) - g_1(a))f_x(c_1, g_2(a)) + (g_2(t) - g_2(a))f_y(g_1(a), c_2),$$

con $c_i = g_i(a) + \theta_i(g_i(t) - g_i(a))$, $0 < \theta_i < 1$, $i = 1, 2$.

Si $F(t) = f(g_1(t), g_2(t))$ se tiene que:

$$F'(a) = (f \circ (g_1, g_2))'(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(g_1(a), g_2(a))g_1'(a) + \frac{\partial f}{\partial y}(g_1(a), g_2(a))g_2'(a).$$

Teorema 2.4.3 Sea $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, f con derivadas parciales continuas (i.e. de clase C^1) en D abierto y sean $g_i(t)$, $i = 1, \dots, n$ funciones derivables sobre un abierto $E \subset \mathbb{R}$, tales que $\mathbf{g}(t) = (g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t)) \in D$, para todo $t \in E$, entonces $F(t) = f \circ \mathbf{g}(t)$ es derivable en E y $F'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{g}(t))g'_i(t)$.

Demostración Se deja de ejercicio.

Corolario 2.4.5 Sea $f(\mathbf{x})$ una función de n variables, de clase C^1 sobre un conjunto D abierto y sean $g_i(t_1, \dots, t_p)$, $i = 1, \dots, n$, con derivadas parciales sobre $E \subset \mathbb{R}^p$ tal que $g(E) \subset D$, entonces $F(\mathbf{t}) = f \circ \mathbf{g}(\mathbf{t})$ está bien definida sobre E y se tiene:

$$\frac{\partial F}{\partial t_j}(\mathbf{t}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{g}(\mathbf{t})) \frac{\partial g_i}{\partial t_j}(\mathbf{t}), \quad j = 1, \dots, p.$$

Demostración Se deja de ejercicio.

Corolario 2.4.6 Sea $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_p)$ de clase C^1 en $D \subset \mathbb{R}^n$ abierto; sea $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_n)$ de modo que las funciones g_i , $i = 1, \dots, n$ tienen derivadas parciales en $E \subset \mathbb{R}^q$ y $\mathbf{g}(E) \subset D$, entonces $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ es derivable parcialmente sobre E y se tiene:

$$\frac{\partial (f_k \circ \mathbf{g})}{\partial t_j}(\mathbf{t}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(\mathbf{g}(\mathbf{t})) \frac{\partial g_i}{\partial t_j}(\mathbf{t}), \quad k = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, q,$$

o bien

$$J_{\mathbf{f} \circ \mathbf{g}}(\mathbf{t}) = \frac{\partial (f_1 \circ \mathbf{g}, \dots, f_p \circ \mathbf{g})}{\partial (t_1, \dots, t_q)}(\mathbf{t}) = \frac{\partial (f_1, \dots, f_p)}{\partial (x_1, \dots, x_n)}(\mathbf{g}(\mathbf{t})) \frac{\partial (g_1, \dots, g_n)}{\partial (t_1, \dots, t_q)}(\mathbf{t}).$$

Corolario 2.4.7 Teorema del valor medio para funciones de varias variables

Sea $f(\mathbf{x})$ una función real de clase C^1 sobre $D \subset \mathbb{R}^n$ abierto y convexo y sean $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n) \in D$, entonces existe $0 < \theta < 1$ tal que:

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n (b_i - a_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{c}) = \nabla f(\mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}),$$

con $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \theta(\mathbf{b} - \mathbf{a})$.

Demostración Para $t \in [0, 1]$, $\mathbf{g}(t) = (g_1(t), \dots, g_n(t))$, con $g_i(t) = a_i + t(b_i - a_i)$, es un punto del segmento $\overline{\mathbf{a}\mathbf{b}}$ en \mathbb{R}^n y son puntos de D por ser convexo. Así $\mathbf{g}(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$,

la función $F(t) = f(\mathbf{g}(t))$ es derivable en $[0, 1]$ y se tiene:

$$F'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{g}(t))g'_i(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{g}(t))(b_i - a_i).$$

Ahora, $F(1) - F(0) = F'(\theta)$, para algún $0 < \theta < 1$, o sea $f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{g}(\theta))(b_i - a_i)$.

Observación En la fórmula anterior $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \theta(\mathbf{b} - \mathbf{a})$, es un punto en el segmento $\overline{\mathbf{a}\mathbf{b}}$, mientras que el teorema de incrementos finitos dice que:

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{c}_i)(b_i - a_i),$$

con $\mathbf{c}_i = (a_1, \dots, a_i + \theta_i(b_i - a_i), \dots, b_n)$.

Esta fórmula es más difícil, pero más general pues su demostración no requiere que la continuidad de las derivadas parciales de f .

2.5 Teorema de la función implícita

Teorema 2.5.1 Sea $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, U abierto. Supongamos $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua en U y que existe $(a, b) \in U$ tal que $f(a, b) = 0$ y tal que $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$, entonces existen dos intervalos I_a, I_b con $a \in I_a, b \in I_b$ tales que:

- a) La ecuación $f(x, g(x)) = 0$ y las condiciones $x \in I_a, y \in I_b$, definen una aplicación $g: I_a \rightarrow I_b$ continua y verifica $g(a) = b$, es decir para cada $x \in I_a$ la ecuación $f(x, y) = 0$ con la condición $y \in I_b$ tiene una solución única, que se denota $g(x)$. Esta solución depende de manera continua en x . Por otro lado, si para ciertos valores $x \in I_a$ la ecuación $f(x, y) = 0$ tiene varias soluciones, entonces la única solución $y = g(x)$ pertenece a I_b .
- b) Si f es parcialmente derivable en x en (a, b) , g es derivable en a y se tiene $g'(a) = -\frac{f_x(a, g(a))}{f_y(a, g(a))}$.
- c) Si f es parcialmente derivable en x sobre U , g es derivable en I_a y se tiene $g'(x) = -\frac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))}$, si $f_y(x, g(x)) \neq 0$.
- d) Si f es de clase C^k , para $k \geq 1$ sobre U , g es de clase C^k en I_a . Para $k \geq 2$ se tiene: $g''(x) = -\frac{[f_{xx} + f_{xy}g'(x)]f_y - f_x[f_{xy} + f_{yy}g'(x)]}{[f_y]^2}$, donde $f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}, f_x$ y f_y se evalúan en $(x, g(x))$.

Demostración Para simplificar denotemos $I_a = I$, $I_b = J$.

a-i) Vamos a demostrar la existencia de la función g sobre un intervalo I (a definir) tal que $a \in I$. Sabemos $f_y(a, b) \neq 0$, supongamos $f_y(a, b) > 0$, existe $\rho > 0$ tal que $B((a, b), \rho) \subset U$ y tal que $f_y(x, y) > 0$, $\forall (x, y) \in B((a, b), \rho) = B$, pues f_y es continua en (a, b) . Sea $\bar{J} = [b - \frac{1}{2}\rho, b + \frac{1}{2}\rho]$, entonces $(a, y) \in B$, $\forall y \in \bar{J}$ y $f(a, y)$ considerada como función de $y \in \bar{J}$ es estrictamente creciente. Como $f(a, b) = 0$ se tiene que $f(a, b - \frac{1}{2}\rho) < 0$ y $f(a, b + \frac{1}{2}\rho) > 0$. Por otro lado el punto $(a, b - \frac{1}{2}\rho) \in B$ y como f es continua en este punto $\exists \eta' > 0$ tal que $\forall x \in]a - \eta', a + \eta' [$ se tiene $(x, b - \frac{1}{2}\rho) \in B$ y $f(x, b - \frac{1}{2}\rho) < 0$. Igualmente $\exists \eta'' > 0$ tal que $\forall x \in]a - \eta'', a + \eta'' [$ se tiene $(x, b + \frac{1}{2}\rho) \in B$ y $f(x, b + \frac{1}{2}\rho) > 0$. Se define $\eta = \min\{\eta', \eta'', \frac{1}{2}\rho\}$, $I =]a - \eta, a + \eta [$, entonces para cada $x_0 \in I$, se tiene $(x_0, y) \in B$, $\forall y \in \bar{J}$, pues:

$$\|(x_0, y) - (a, b)\| \leq \|(x_0, y) - (x_0, b)\| + \|(x_0, b) - (a, b)\| = |y - b| + |x_0 - a| < \frac{1}{2}\rho + \eta \leq \rho.$$

La función $f(x_0, y)$ como función de y , es estrictamente creciente sobre $\bar{J} = [b - \frac{1}{2}\rho, b + \frac{1}{2}\rho]$ pues su derivada es positiva y toma un valor negativo para $y = b - \frac{1}{2}\rho$ y un valor positivo para $y = b + \frac{1}{2}\rho$. Así $f(x_0, y)$ se anula para un sólo valor $y_0 \in J =]b - \frac{1}{2}\rho, b + \frac{1}{2}\rho [$. Se puede asociar a cada valor $x_0 \in I$, un sólo valor $y_0 (\in J)$ tal que $f(x_0, y_0) = 0$, esto define la función g buscada sobre I (tal que $y_0 = g(x_0)$, $\forall x_0 \in I$) con $g(a) = b$.

a-ii) Demostraremos que g es continua en a . Sea $\epsilon > 0$, sea $\rho < 2\epsilon$ y se construye η como anteriormente, entonces para $x \in]a - \eta, a + \eta [$ la ecuación $f(x, y) = 0$ y la condición $|y - b| < \frac{1}{2}\rho$ definen como anteriormente y en función de x y por la unicidad se tiene $y = g(x)$. Se tiene así que $|x - a| < \eta \implies |g(x) - b| < \frac{1}{2}\rho < \epsilon$.

a-iii) Demostremos que g es continua en I . Sea $a' \in I$ arbitrario, pero fijo. Vamos a demostrar que g es continua en este punto. Sea $b' = g(a')$, por la construcción hecha en 1), $b' \in J$ y $(a', b') \in B$ abierto y $\exists B'$ bola de centro (a', b') tal que $B' \subset B$, entonces $f_y(x, y) > 0$, $\forall (x, y) \in B'$ y la condición $f(a', b') = 0$ se satisface. Como en 1) se encuentran dos intervalos I', J' con $a' \in I'$, $b' \in J'$, tales que la ecuación $f(x, h(x)) = 0$ y la condición $h(x) \in J'$ con $h(a') = b'$, definen sobre I' una única función $h(x)$ continua en $x = a'$. Se puede escoger I' de modo que $I' \subset I$ y $J' \subset J$. Por la unicidad de g , entonces $\forall x \in I'$,

$g(x) = h(x)$, h es continua en a' y g también.

- b) Se supone que $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ existe (condición no necesaria en a)); demostraremos que g es derivable en a . Sabemos que $f(a, b) = 0$, $g(a) = b$ y $f(x, g(x)) = 0$, $\forall x \in I$. Se tiene entonces sobre I la igualdad $f(x, g(x)) - f(x, g(a)) + f(x, g(a)) - f(a, g(a)) = 0$. Por el teorema de incrementos finitos aplicado a $f(x, y)$, considerada como función de y sobre el intervalo de extremidad $g(a)$ y $g(x)$, se tiene:

$$f(x, g(x)) - f(x, g(a)) = (g(x) - g(a))f_y(x, g(a) + \theta(g(x) - g(a))), \quad 0 < \theta < 1.$$

Por otro lado, $f(x, g(a))$ considerada como función de x es derivable en a , i.e. existe una función $\epsilon(x)$ que tiende a 0, cuando $x \rightarrow a$ y tal que:

$$f(x, g(a)) - f(a, g(a)) = (x - a)f_x(a, g(a)) + (x - a)\epsilon(x).$$

Así tenemos $(g(x) - g(a))f_y(x, g(a) + \theta(g(x) - g(a))) = -(x - a)(f_x(a, g(a)) + \epsilon(x))$. Cuando $x \rightarrow a$, $g(x) \rightarrow g(a)$ y $f_y(x, g(a) + \theta(g(x) - g(a))) \rightarrow f_y(x, g(a)) \neq 0$. Así se deduce $g'(a) = -\frac{f_x(a, g(a))}{f_y(a, g(a))}$.

- c) Se supone que $f_x(x, y)$ existe en U , sea $a' \in I$ arbitrario pero fijo. Se va a demostrar que g es derivable en a' y que $g'(a') = -\frac{f_x(a', g(a'))}{f_y(a', g(a'))}$. Tenemos evidentemente que $f(a', g(a')) = 0$ y por otro lado $f_y(a', g(a')) \neq 0$. Para x próximo a a , $g(x)$ está definida y los puntos $(x, g(x)), (x, g(a')) \in B$. Se considera la identidad $f(x, g(x)) - f(x, g(a')) + f(x, g(a')) - f(a', g(a')) = 0$ y se procede como en b).

- d) Si todas las derivadas parciales de f de orden $k \geq 1$ están definidas y son continuas en U , también están definidas en un vecindario de $(x, g(x))$, $\forall x \in I$. Por c) se tiene que para $k \geq 1$:

$$g'(x) = -\frac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))}. \quad (2.6)$$

Para $k \geq 2$, el resultado se tiene derivando $g'(x)$.

- La conclusión a) se puede expresar de la manera siguiente:

- a') Existe una única función g definida en un vecindario de a , tal que $g(a) = b$ y $f(x, g(x)) = 0$. Se dice que g es la función continua definida en un vecindario de a por la ecuación

$f(x, y) = 0$ y por la condición $g(a) = b$.

- Insistimos sobre el hecho que la función g (que es la solución del problema), en general está definida localmente. En efecto, a fin de asegurar que a un x dado sólo le corresponde un y tal que $f(x, y) = 0$ (por lo que la relación dada por g es unívoca), se está obligado a precisar no solamente el conjunto de definición de g sino también el de llegada.
- En el enunciado del teorema nos interesamos en el caso $f(x, y) = 0$, pero si $f(x, y) = c$ se define $F(x, y) = f(x, y) - c = 0$ y el resultado es válido en general.
- En la medida que se puede determinar las derivadas sucesivas de g en a , aunque no se conozca g , se puede obtener el desarrollo de Taylor de g en este punto, que da una aproximación mejor en la medida que el grado de derivabilidad de f sea elevado.
- Si se considera una función $f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ de $n + 1$ variables, se buscan las condiciones en que la ecuación $f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = 0$ permita definir sin ambigüedad, x_{n+1} en función de x_1, \dots, x_n .

Caso de $n + 1$ variables.

Sea $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} / f(x, y) = 0\}$ y sea $E \subset \mathbb{R}^n$ tal que $(x, y) \in S$ para al menos un valor y y $F \subset \mathbb{R}$ tal que $(x, y) \in S$ para al menos un $x \in \mathbb{R}^n$. Se tiene $S \subset E \times F$.

El caso más simple sucede cuando la condición $(x, y) \in S$ está enteramente determinada por $x \in E$, es decir que la componente y está en función de x . En este caso $f(x, y) = 0$ define una aplicación $g: E \rightarrow F$ tal que $\forall x \in E, f(x, y) = 0 \implies y = g(x)$.

Se dice que g está definida implícitamente por la relación $f(x, g(x)) = 0$, o que se obtiene resolviendo la ecuación $f(x, y) = 0$ con respecto a y , o bien que g se obtiene explicitando y en la relación $f(x, y) = 0$.

Pero en general para ciertos $x \in E$, existen varios $y \in F$ tales que $f(x, y) = 0$ de manera que esta ecuación no define una aplicación de E en F .

Sin embargo, si $(a, b) \in S$ (es decir, $f(a, b) = 0$) y si ciertas condiciones se satisfacen para $x \in B(a, \rho)$, corresponde un único $y \in]b - \eta, b + \eta[$ tal que $f(x, y) = 0$.

Teorema 2.5.2 Sea $f(x, y)$ una función real de $n + 1$ variables, de clase C^k , $k \geq 1$, sobre un abierto $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ y sea $(\mathbf{a}, b) \in U$ tal que $f(\mathbf{a}, b) = 0$ y tal que $f_y(\mathbf{a}, b) \neq 0$, entonces existe una bola abierta $V_{\mathbf{a}}$ de centro \mathbf{a} en \mathbb{R}^n y un intervalo I_b con $V_{\mathbf{a}} \times I_b \subset U$, tales que la ecuación $f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = 0$ y las condiciones $\mathbf{x} \in V_{\mathbf{a}}$, $g(\mathbf{x}) \in I_b$, definen la única función $g: V_{\mathbf{a}} \rightarrow I_b$, es decir para cada $\mathbf{x} \in V_{\mathbf{a}}$, la ecuación $f(\mathbf{x}, y) = 0$ con la condición $y \in I_b$ tiene una única solución, que se denota $g(\mathbf{x})$. Claramente $g(\mathbf{a}) = b$; g es de clase C^k sobre $V_{\mathbf{a}}$ y además

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = -\frac{f_{x_i}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))}{f_y(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))}. \quad (2.7)$$

Observación El camino utilizado para demostrar el teorema en \mathbb{R}^2 , se aplica al caso $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Es suficiente reemplazar la bola $B((a, b), \rho) \subset \mathbb{R}^2$ por la bola $B((\mathbf{a}, b), \rho) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ y sustituir las condiciones $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, \eta')$, $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, \eta'')$, \dots , por las condiciones $x \in]a - \eta', a + \eta' [$, $x \in]a - \eta'', a + \eta'' [\dots$. El teorema es válido si se tiene $f(\mathbf{x}, y) = c \in \mathbb{R}$.

Corolario 2.5.1 Se considera $S = \{(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^{n+1} / f(\mathbf{x}, y) = 0\}$, con las mismas hipótesis del teorema existe un abierto $W(\mathbf{a}, b) \subset U$, tal que $S \cap W(\mathbf{a}, b) = \{(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^{n+1} / \mathbf{x} \in V_{\mathbf{a}}, y = g(\mathbf{x})\}$, es decir al interior de $W(\mathbf{a}, b)$ los elementos de S son de la forma $(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))$.

Demostración Como $V_{\mathbf{a}} \times I_b$ es un abierto, se define $V_{\mathbf{a}} \times I_b = W(\mathbf{a}, b)$ y por el teorema anterior $W(\mathbf{a}, b) \subset U$. Además $(\mathbf{x}, y) \in S \cap W(\mathbf{a}, b) \iff \mathbf{x} \in V_{\mathbf{a}}, y \in I_b, f(\mathbf{x}, y) = 0 \iff \mathbf{x} \in V_{\mathbf{a}}, y = g(\mathbf{x})$.

- El conjunto S aparece, al menos localmente como una hiper-superficie representando en \mathbb{R}^{n+1} a la función g .

Cuando $n = 1$, esta hiper-superficie es una curva; el gráfico de g en $W(\mathbf{a}, b) \subset \mathbb{R}^2$.

- En los teoremas de la función implícita, la variable y juega un rol particular y f_y se ha supuesto no nula en un punto dado. Es claro que estos resultados son válidos si cualquiera de las derivadas parciales es diferente de 0 en ese punto, es decir si $\nabla f \neq 0$. Toda variable para la cual la derivada parcial no se anula, puede jugar el rol de y .

Definición 2.5.1 Sea f una función real con derivadas parciales en $\mathbf{a} \in U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, f es regular en \mathbf{a} si $\nabla f(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$. Se dice también que \mathbf{a} es un punto regular de $S = \{\mathbf{x} \in U / f(\mathbf{x}) = c\}$ donde $c = f(\mathbf{a})$.

Corolario 2.5.2 Plano tangente a la superficie de ecuación $f(\mathbf{x}) = c$ Sea f una función de clase C^k , ($k \geq 1$) sobre $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y sea $\mathbf{a} \in U$ tal que $\nabla f(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$. Se considera $f(\mathbf{a}) = c$, entonces $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n / f(\mathbf{x}) = c\}$ admite en \mathbf{a} el plano tangente de ecuación $(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot \nabla f(\mathbf{a}) = 0$.

Demostración Como $\nabla f(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$, una de las derivadas parciales de f en \mathbf{a} es no nula, que para simplificar escribimos $f_{x_n}(\mathbf{a}) \neq 0$. El teorema y el corolario anterior implican que existe un abierto $V_{\bar{\mathbf{a}}}$ tal que $\bar{\mathbf{a}} = (a_1, \dots, a_{n-1}) \in V_{\bar{\mathbf{a}}}$ y una función g de clase C^k sobre $V_{\bar{\mathbf{a}}}$ tal que S coincide en el abierto que contiene a \mathbf{a} , con la hipersuperficie de ecuación $x_n = g(x_1, \dots, x_{n-1})$, $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in V_{\bar{\mathbf{a}}}$.

La función g es diferenciable, su gráfico admite en \mathbf{a} un plano tangente (que también es tangente a S) cuya ecuación es $x_n - a_n = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial g}{\partial x_i}(\bar{\mathbf{a}})(x_i - a_i)$. Por la igualdad (2.7), esta ecuación se escribe $\nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = 0$.

Observación A menudo este resultado se expresa diciendo que $\nabla f(\mathbf{a})$ es normal en \mathbf{a} , a la superficie S de ecuación $f(\mathbf{x}) = c$, donde $c = f(\mathbf{a})$.

Ejemplo 2.5.1 Consideremos la superficie $z = f(x, y)$ y la curva de nivel Γ dada por $f(x, y) = c$. Supongamos que f es diferenciable.

- ∇f es normal a Γ ; $\nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{u} = 0$.
- $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{u} = 0 = \|\nabla f(\mathbf{a})\| \|\mathbf{u}\| \cos \theta$ a lo largo de Γ .
- Si $G(x, y, z) = z - f(x, y) = 0$, el plano tangente a $z = f(x, y)$ en (x_0, y_0, z_0) es: $z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$.
- Sea $f(x, y, z)$ diferenciable y consideremos la superficie $f(x, y, z) = c$. Sea Γ una curva representada por $\mathbf{r}(t)$ en \mathbb{R}^3 i.e. $g(t) = f(\mathbf{r}(t)) = c$, entonces $g'(t) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$,

por lo que ∇f es normal a la superficie $f(x, y, z) = c$.

Si $\nabla f(\mathbf{a}) \neq 0$, el plano tangente es $\nabla f(\mathbf{a}) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$.

2.5.1 Teorema de funciones implícitas para un sistema de ecuaciones

Teorema 2.5.3 Sean $f_j(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p)$, $j = 1, \dots, p$, funciones reales de $n+p$ variables de clase C^k ($k \geq 1$) sobre un abierto $U \subset \mathbb{R}^{n+p}$. Sea $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^p$ donde $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in U$, tales que $f_j(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$, $j = 1, \dots, p$ y tales que la matriz jacobiana $\frac{\partial(f_1, \dots, f_p)}{\partial(y_1, \dots, y_p)}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ sea invertible, entonces existe una bola abierta $V_{\mathbf{a}}$ y una bola abierta $V_{\mathbf{b}}$ con $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in V_{\mathbf{a}} \times V_{\mathbf{b}} \subset U$, tales que el sistema de ecuaciones $f_j(\mathbf{x}, g_1(\mathbf{x}), \dots, g_p(\mathbf{x})) = 0$, $j = 1, \dots, p$ y las condiciones $\mathbf{x} \in V_{\mathbf{a}}$, $(g_1(\mathbf{x}), \dots, g_p(\mathbf{x})) \in V_{\mathbf{b}}$ definen las funciones $g_j(\mathbf{x})$, $j = 1, \dots, p$ (es decir para $\mathbf{x} \in V_{\mathbf{a}}$, la ecuación $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ con la condición $\mathbf{y} \in V_{\mathbf{b}}$ tiene una única solución $\mathbf{y} = (g_1(\mathbf{x}), \dots, g_p(\mathbf{x}))$). Se tiene que $g_j(\mathbf{a}) = b_j$, $j = 1, \dots, p$, además las funciones g_j son de clase C^k sobre $V_{\mathbf{a}}$. Las derivadas parciales de g , $\frac{\partial g_j}{\partial x_i}$ están dadas por la fórmula:

$$\frac{\partial(g_1, \dots, g_p)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(\mathbf{x}) = - \left(\frac{\partial(f_1, \dots, f_p)}{\partial(y_1, \dots, y_p)}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) \right)^{-1} \frac{\partial(f_1, \dots, f_p)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})),$$

donde $g = (g_1, \dots, g_p)$.

Observación En forma condensada, este teorema se enuncia de la manera siguiente. Sea F una aplicación sobre $U \subset \mathbb{R}^{n+p}$ en \mathbb{R}^p , de clase C^k ($k \geq 1$) y sea $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in U$ tal que $F(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ y tal que la matriz $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ sea invertible ($\frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}}$ es el jacobiano de F con respecto a las últimas p variables), entonces existen bolas abiertas $V_{\mathbf{a}}$, $V_{\mathbf{b}}$ con $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in V_{\mathbf{a}} \times V_{\mathbf{b}} \subset U$ tales que la ecuación $f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = 0$ define la aplicación $g: V_{\mathbf{a}} \rightarrow V_{\mathbf{b}}$. Además $g(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$, g es de clase C^k sobre $V_{\mathbf{a}}$ y se tiene:

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = - \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})).$$

Demostración Se razona por inducción sobre p . Para $p = 1$ el teorema es cierto $\forall n \geq 1$ por el teorema anterior. Se considera $p \geq 2$ y se supone por hipótesis de inducción que el teorema se verifica para $p - 1$, $\forall n \geq 1$.

La matriz jacobiana $\frac{\partial(f_1, \dots, f_p)}{\partial(y_1, \dots, y_p)}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ es regular y se tiene al menos una submatriz de

orden $p - 1$, que se supone $\frac{\partial(f_2, \dots, f_p)}{\partial(y_2, \dots, y_p)}$ también regular. Consideremos el sistema de p ecuaciones:

$$f_j(\mathbf{x}, y_1, y_2, \dots, y_p) = 0, \quad j = 1, \dots, p. \quad (2.8)$$

Las $p - 1$ ecuaciones obtenidas considerando $j = 2, \dots, p$, forman un sistema al cual la hipótesis de recurrencia se aplica; existe una bola abierta $V_{\mathbf{a}'}$ $\subset \mathbb{R}^{n+1}$ de centro $\mathbf{a}' = (a_1, \dots, a_n, b_1)$, un abierto $V_{\mathbf{b}'}$ $\subset \mathbb{R}^{p-1}$ de $\mathbf{b}' = (b_2, \dots, b_p)$ con $V_{\mathbf{a}'} \times V_{\mathbf{b}'} \subset U$ y funciones $h_j(\mathbf{x}, y_1)$, $j = 2, \dots, p$, de clase C^k sobre $V_{\mathbf{a}'}$, tales que $\forall (\mathbf{x}, y_1) \in V_{\mathbf{a}'}$, el sistema de ecuaciones $f_j(\mathbf{x}, y_1, \dots, y_p) = 0$, $j = 2, \dots, p$, con la condición $(y_2, \dots, y_p) \in V_{\mathbf{b}'}$ tiene la solución única $y_j = h_j(\mathbf{x}, y_1)$, $j = 2, \dots, p$. Se tiene claramente que $h_j(\mathbf{a}, b_1) = b_j$. Tomando en cuenta este resultado, se ve que si (\mathbf{x}, y_1) , con $(\mathbf{x}, y_1) \in V_{\mathbf{a}'}$ y $(y_2, \dots, y_p) \in V_{\mathbf{b}'}$ es una solución de (2.8), entonces (\mathbf{x}, y_1) es una solución de la ecuación:

$$f_1(\mathbf{x}, y_1, h_2(\mathbf{x}, y_1), \dots, h_p(\mathbf{x}, y_1)) = 0.$$

Consideremos $f(\mathbf{x}, y_1) = f_1(\mathbf{x}, y_1, h_2(\mathbf{x}, y_1), \dots, h_p(\mathbf{x}, y_1))$, esta función f es de clase C^k sobre $V_{\mathbf{a}'}$, $f(\mathbf{a}, b_1) = 0$ y $f_{y_1}(\mathbf{a}, b_1) \neq 0$. En efecto:

$$f_{y_1}(\mathbf{a}, b_1) = (f_1)_{y_1}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (f_1)_{y_2}(\mathbf{a}, \mathbf{b})(h_2)_{y_1}(\mathbf{a}, b_1) + \dots + (f_1)_{y_p}(\mathbf{a}, \mathbf{b})(h_p)_{y_1}(\mathbf{a}, b_1)$$

y como $f_j(\mathbf{x}, y_1, h_2(\mathbf{x}, y_1), \dots, h_p(\mathbf{x}, y_1)) = 0$, $j = 2, \dots, p$, $\forall (\mathbf{x}, y_1) \in V_{\mathbf{a}'}$, se tiene:

$$\frac{\partial f_j}{\partial y_1}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \frac{\partial f_j}{\partial y_2}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \frac{\partial h_2}{\partial y_1}(\mathbf{a}, b_1) + \dots + \frac{\partial f_j}{\partial y_p}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \frac{\partial h_p}{\partial y_1}(\mathbf{a}, b_1) = 0, \quad j = 2, \dots, p.$$

Si $f_{y_1}(\mathbf{a}, b_1) = 0$, la igualdad anterior es válida para $j = 1$ y tendríamos $(\lambda_j = \frac{\partial h_j}{\partial y_1}(\mathbf{a}, b_1))$ $\frac{\partial f_j}{\partial y_1}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \lambda_2 \frac{\partial f_j}{\partial y_2}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \dots + \lambda_p \frac{\partial f_j}{\partial y_p}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$, $j = 1, 2, \dots, p$, lo que demuestra que las columnas de la matriz jacobiana $\frac{\partial(f_1, \dots, f_p)}{\partial(y_1, \dots, y_p)}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ son linealmente dependientes y no sería invertible. Así que si se supone que la matriz jacobiana es invertible, se tiene que $f_{y_1}(\mathbf{a}, b_1) \neq 0$.

Aplicando el teorema en el caso $p = 1$ a la ecuación $f(\mathbf{x}, y_1) = 0$, existe una bola abierta $V_{\mathbf{a}}$ de centro \mathbf{a} , un intervalo $b_1 \in I_{b_1}$ con $V_{\mathbf{a}} \times I_{b_1} \subset V_{\mathbf{a}'}$ y una función $g_1(\mathbf{x})$ de clase C^k

sobre V_a tales que $\forall \mathbf{x} \in V_a$, la ecuación $f(\mathbf{x}, y_1) = 0$ con la condición $y_1 \in I_{b_1}$ tiene una solución única $y_1 = g_1(\mathbf{x})$. Sea $V_b = I_{b_1} \times V_{b'}$ y sean $g_j(\mathbf{x}) = h_j(\mathbf{x}, g_1(\mathbf{x}))$, $j = 2, \dots, p$ que son de clase C^k sobre V_a .

Se verifica que $\forall \mathbf{x} \in V_a$ el sistema de ecuaciones $f_j(\mathbf{x}, y) = 0$, $j = 1, \dots, p$ con $y \in V_b$ tiene una solución única dada por $y_j = g_j(\mathbf{x})$, $j = 1, \dots, p$.

Consideremos $g(\mathbf{x}) = (g_1(\mathbf{x}), \dots, g_p(\mathbf{x}))$ y $F_i(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))$, entonces F_i es de clase C^k en V_a y $F_i(\mathbf{x}) = 0$, $\forall \mathbf{x} \in V_a$, lo que implica:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) + \sum_{k=1}^p \frac{\partial f_i}{\partial y_k}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) \frac{\partial g_k}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{k=1}^p \frac{\partial f_i}{\partial y_k}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) \frac{\partial g_k}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = -\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})), \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, n.$$

En forma matricial se escribe:

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_p)}{\partial(y_1, \dots, y_p)}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) \frac{\partial(g_1, \dots, g_p)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(\mathbf{x}) = -\frac{\partial(f_1, \dots, f_p)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})),$$

y como la matriz jacobiana de los f_j con respecto a y_k es regular:

$$\frac{\partial(g_1, \dots, g_p)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(\mathbf{x}) = -\left(\frac{\partial(f_1, \dots, f_p)}{\partial(y_1, \dots, y_p)}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))\right)^{-1} \frac{\partial(f_1, \dots, f_p)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})).$$

Corolario 2.5.3 *Tomando en cuenta las hipótesis del teorema anterior, consideremos el conjunto $S = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n+p} / f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0\}$, entonces existe un abierto $W_{(\mathbf{a}, \mathbf{b})} \subset U$ del punto (\mathbf{a}, \mathbf{b}) tal que $S \cap W_{(\mathbf{a}, \mathbf{b})} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n+p} / \mathbf{x} \in V_a, \mathbf{y} = g(\mathbf{x})\}$.*

Definición 2.5.2 Función regular en un punto *Se dice que f es regular en \mathbf{a} si $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{a})$ es de rango p . En este caso se dice también que \mathbf{a} es un punto regular de $S = \{\mathbf{x} \in U / f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})\}$.*

Si f es regular en \mathbf{a} , existe i_1, \dots, i_p tales que $\det \left[\frac{\partial(f_1, \dots, f_p)}{\partial(x_{i_1}, \dots, x_{i_p})}(\mathbf{a}) \right] \neq 0$ y el teorema se aplica. Las variables x_{i_1}, \dots, x_{i_p} juegan el rol de las variables y_1, \dots, y_p . Se deduce que en una bola abierta de \mathbf{a} y sobre S las variables x_{i_1}, \dots, x_{i_p} son función de las restantes $n - p$ variables.

Corolario 2.5.4 Sea $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, U abierto, f una función de clase C^k y sea \mathbf{a} un punto regular de $S = \{\mathbf{x} \in U / f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$, entonces existe un abierto $W_{\mathbf{a}}$, $\mathbf{a} \in W_{\mathbf{a}} \subset \mathbb{R}^p$, una bola $B_0 \subset \mathbb{R}^{n-p}$ centrada en el origen y una aplicación $h: B_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^k tales que $S \cap W_{\mathbf{a}} = h(B_0) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n / \mathbf{z} = h(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in B_0\}$.

Demostración El jacobiano de f en \mathbf{a} es invertible, se puede suponer que:

$$\det \left[\frac{\partial(f_1, \dots, f_p)}{\partial(x_{n-p+1}, \dots, x_n)}(\mathbf{a}) \right] \neq 0.$$

Por el corolario, existe una bola abierta $B_{\bar{\mathbf{a}}} \subset \mathbb{R}^{n-p}$ de centro $\bar{\mathbf{a}} = (a_1, \dots, a_{n-p})$, un abierto $W_{\mathbf{a}}$, $\mathbf{a} \in W_{\mathbf{a}}$ y $g: B_{\bar{\mathbf{a}}} \rightarrow \mathbb{R}^p$ de clase C^k tal que $S \cap W_{\mathbf{a}} = \{\mathbf{x}, g(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n / \mathbf{x} \in B_{\bar{\mathbf{a}}}\}$.

Se define $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$ de $B_0 = B_{\bar{\mathbf{a}}} - \bar{\mathbf{a}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-p} / \mathbf{z} - \bar{\mathbf{a}}, \mathbf{z} \in B_{\bar{\mathbf{a}}}\}$ en \mathbb{R}^n por $h_i(\mathbf{x}) = x_i + a_i$, $i = 1, \dots, n-p$, $h_{n-p+j}(\mathbf{x}) = g_j(\mathbf{x} + \bar{\mathbf{a}})$, $j = 1, \dots, p$ y se tiene que h es de clase C^k sobre B_0 y que:

$$S \cap W_{\mathbf{a}} = \{(\mathbf{x} + \mathbf{a}, g(\mathbf{x} + \mathbf{a})) \in \mathbb{R}^n / \mathbf{x} \in B_0\} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n / \mathbf{z} = h(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in B_0\}.$$

Teorema 2.5.4 Teorema de Inversión

Sea U abierto, F una aplicación $F: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, de clase C^k , $k \geq 1$ y sea $\mathbf{a} \in U$ tal que F es regular en \mathbf{a} , $\det \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{a}) \right) \neq 0$, entonces existe un abierto $U_{\mathbf{a}}$, $\mathbf{a} \in U_{\mathbf{a}} \subset U$ tal que la restricción de F a $U_{\mathbf{a}}$ sea una aplicación biyectiva (de $U_{\mathbf{a}}$) sobre una bola $V_{\mathbf{b}}$ de centro $\mathbf{b} = F(\mathbf{a})$. La aplicación $F^{-1}: V_{\mathbf{b}} \rightarrow U_{\mathbf{a}}$ es de clase C^k y se tiene $J_{F^{-1}}(F(\mathbf{x})) = (J_F(\mathbf{x}))^{-1}$, $\forall \mathbf{x} \in U_{\mathbf{a}}$.

(La matriz jacobiana de F^{-1} en $\mathbf{y} = F(\mathbf{x})$ es igual a la inversa de la matriz jacobiana de F en $\mathbf{x} = F^{-1}(\mathbf{y})$).

Demostración Consideremos $H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = F(\mathbf{x}) - \mathbf{y}$, $H: U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^k , si $\mathbf{b} = F(\mathbf{a})$, $H(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{0}$, $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x})$ por lo que $\det \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \right) \neq 0$.

Aplicando el teorema anterior, existe una bola abierta $V_{\mathbf{b}}$ en \mathbb{R}^n de centro \mathbf{b} , un abierto $V_{\mathbf{a}}$, $\mathbf{a} \in V_{\mathbf{a}}$ y una aplicación única $G: V_{\mathbf{b}} \rightarrow V_{\mathbf{a}}$ tal que $\forall \mathbf{y} \in V_{\mathbf{b}}$ la ecuación $H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$ con la condición $\mathbf{x} \in V_{\mathbf{a}}$, tiene solución única $\mathbf{x} = G(\mathbf{y})$.

En otros términos y tomando en cuenta la definición de H , $\forall \mathbf{y} \in V_{\mathbf{b}}$ existe un único $\mathbf{x} \in V_{\mathbf{a}}$ con $\mathbf{x} = G(\mathbf{y})$, tal que $F(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. Así, F es una biyección de $U_{\mathbf{a}} = V_{\mathbf{a}} \cap F^{-1}(V_{\mathbf{b}})$ (donde $F^{-1}(V_{\mathbf{b}}) = \{\mathbf{x} \in U / F(\mathbf{x}) \in V_{\mathbf{b}}\}$ es un abierto, pues $V_{\mathbf{b}}$ es abierto y F es continua) sobre $V_{\mathbf{b}}$ y G es la inversa de F . La función F^{-1} es de clase C^k (sobre $V_{\mathbf{b}}$) y se tiene $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x})$, $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -I$, por lo que $\frac{\partial G}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{y}) = \left(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x})\right)^{-1}$.

2.6 Fórmula de Taylor para funciones de varias variables

Proposición 2.6.1 Sea $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $(x, y) \mapsto f(x, y)$, con A abierto, f con derivadas parciales continuas. Sean $x = u(t)$, $y = v(t)$ funciones derivables, entonces $F(t) = f(u(t), v(t))$ tiene por derivada $F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(u(t), v(t)) u'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(u(t), v(t)) v'(t)$.

Corolario 2.6.1 Si f tiene derivadas parciales de orden dos continuas y u, v son dos veces derivables, entonces:

$$F''(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u(t), v(t)) u'(t)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(u(t), v(t)) u'(t) v'(t) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u(t), v(t)) v'(t)^2 + \frac{\partial f}{\partial x}(u(t), v(t)) u''(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(u(t), v(t)) v''(t).$$

La forma general de $F^{(p)}(t)$ es complicada. Nosotros utilizaremos un caso particular.

Proposición 2.6.2 Sea A abierto, $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ con derivadas parciales continuas hasta el orden p . Si definimos $F(t) = f(x_0 + ht, y_0 + kt)$ entonces:

$$F^{(p)}(t) = \sum_{n+m=p} \binom{p}{n} h^n k^m \frac{\partial^p f}{\partial x^n \partial y^m}(x_0 + ht, y_0 + kt) = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^p f(x_0 + ht, y_0 + kt).$$

Demostración Hacerlo por inducción.

El resultado es válido para el caso de más de dos variables. Por ejemplo si $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$ con $x = x_0 + ht$, $y = y_0 + kt$, $z = z_0 + \ell t$:

$$F^{(p)}(t) = \sum_{n+m+r=p} \frac{p!}{n!m!r!} h^n k^m \ell^r \frac{\partial^p f}{\partial x^n \partial y^m \partial z^r}(x_0 + ht, y_0 + kt, z_0 + \ell t) = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} + \ell \frac{\partial}{\partial z}\right)^p f.$$

Teorema 2.6.1 Fórmula de Taylor⁵ Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ abierto, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, con derivadas parciales continuas de orden p . Sean h, k reales tales que el segmento de extremidades (x_0, y_0) y $(x_0 + h, y_0 + k)$ está contenido en A (es decir los puntos $(x_0 + th, y_0 + tk)$ con $0 \leq t \leq 1$), entonces la fórmula de Taylor para dos variables es:

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) &= f(x_0, y_0) + h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + \\ &\frac{h k}{1! 1!} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) + \frac{k^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) + \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0, y_0) + \frac{h^2 k}{2! 1!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x_0, y_0) + \\ &\frac{h k^2}{1! 2!} \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x_0, y_0) + \frac{k^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x_0, y_0) + \cdots + \sum_{n+m=p-1} \frac{h^m k^n}{m! n!} \frac{\partial^{p-1} f}{\partial x^m \partial y^n}(x_0, y_0) + \\ &\sum_{n+m=p} \frac{h^m k^n}{m! n!} \frac{\partial^p f}{\partial x^m \partial y^n}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k), \text{ con } 0 < \theta < 1. \end{aligned}$$

Demostración Sea $F(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk)$ con $0 \leq t \leq 1$, por la fórmula de Taylor para una variable tenemos:

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2} F''(0) + \cdots + \frac{1}{(p-1)!} F^{(p-1)}(0) + \frac{1}{p!} F^{(p)}(\theta), \text{ con } 0 < \theta < 1.$$

Pero $F^{(i)}(t) = i! \sum_{n+m=i} \frac{h^m k^n}{m! n!} \frac{\partial^i f}{\partial x^m \partial y^n}(x_0 + th, y_0 + tk)$ y reemplazando se tiene el resultado.

Corolario 2.6.2 Para el caso de tres variables tenemos (bajo hipótesis similares):

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + \ell) &= \sum_{q+r+s \leq p-1} \frac{h^q k^r \ell^s}{q! r! s!} \frac{\partial^{q+r+s} f}{\partial x^q \partial y^r \partial z^s}(x_0, y_0, z_0) + \\ &\sum_{q+r+s=p} \frac{h^q k^r \ell^s}{q! r! s!} \frac{\partial^{q+r+s} f}{\partial x^q \partial y^r \partial z^s}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k, z_0 + \theta \ell), \text{ con } 0 < \theta < 1. \end{aligned}$$

⁵**Brook Taylor (1685-1731)** Nace el 18 de agosto de 1685 en Edmonton, Inglaterra. Muere el 29 de diciembre de 1731 en Londres, Inglaterra. En 1708 Taylor produjo una solución al problema del centro de oscilación, la cual desde que fue difundida hasta 1724, resultó ser la disputa principal con Johann Bernoulli. En "Los métodos de incrementos directo e inverso" Taylor (1715) agrega a las matemáticas una nueva rama llamada ahora "El cálculo de las diferencias finitas", inventa la integración por partes y descubrió la célebre fórmula conocida como la Serie de Taylor. La importancia de esta fórmula no fue reconocida hasta 1772, cuando Lagrange proclamó los principios básicos del cálculo diferencial.

Taylor también desarrolló los principios fundamentales de la perspectiva en "Perspectivas lineales" (1715), junto con "Los nuevos principios de la perspectiva lineal".

Taylor da cuenta de un experimento para descubrir las leyes de la atracción magnética (1715) y un método no probado para aproximar las raíces de una ecuación, dando un método nuevo para logaritmos computacionales (1717).

Taylor fue elegido socio de la Real Sociedad en 1712 y fue nombrado en ese año para integrar un comité para la adjudicación de las demandas de Newton y de Leibniz de haber inventado el cálculo.

Observación Volvamos al caso de dos variables. Sea $\epsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tal que $|h| + |k| \leq \eta$

$$\left| \frac{\partial^p f}{\partial x^m \partial y^n}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) - \frac{\partial^p f}{\partial x^m \partial y^n}(x_0, y_0) \right| \leq \epsilon, \forall n, m \text{ con } n + m = p \text{ y}$$

$$\left| \sum_{n+m=p} \frac{h^m k^n}{m! n!} \frac{\partial^p f}{\partial x^m \partial y^n}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) - \sum_{n+m=p} \frac{h^m k^n}{m! n!} \frac{\partial^p f}{\partial x^m \partial y^n}(x_0, y_0) \right| \leq$$

$$\sum_{n+m=p} \frac{|h|^m |k|^n}{m! n!} \epsilon = \frac{1}{p!} (|h| + |k|)^p \epsilon, \text{ o sea cuando } h, k \rightarrow 0 \text{ podemos escribir:}$$

$$\sum_{n+m=p} \frac{h^m k^n}{m! n!} \frac{\partial^p f}{\partial x^m \partial y^n}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) - \sum_{n+m=p} \frac{h^m k^n}{m! n!} \frac{\partial^p f}{\partial x^m \partial y^n}(x_0, y_0) =$$

$(|h| + |k|)^p o(1)$, donde $o(1) \rightarrow 0$, cuando $(h, k) \rightarrow (0, 0)$. Así tenemos que:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \dots +$$

$$\sum_{n+m=p} \frac{h^m k^n}{m! n!} \frac{\partial^p f}{\partial x^m \partial y^n}(x_0, y_0) + \|(h, k)\|^p o(1)$$

$$= \sum_{m+n \leq p} \frac{h^m k^n}{m! n!} \frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}(x_0, y_0) + \|(h, k)\|^p o(1).$$

Más generalmente, sea $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, A abierto, con derivadas parciales continuas hasta el orden p , sea $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ tales que el segmento de extremidades \mathbf{x}_0 , $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}$ esté contenido en A ($\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}$, $0 \leq t \leq 1$), entonces la fórmula de Taylor para n variables es:

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = \sum_{q_1 + \dots + q_n \leq p-1} \frac{h_1^{q_1} h_2^{q_2} \dots h_n^{q_n}}{q_1! q_2! \dots q_n!} \frac{\partial^{q_1 + q_2 + \dots + q_n} f}{\partial x_1^{q_1} \partial x_2^{q_2} \dots \partial x_n^{q_n}}(\mathbf{x}_0)$$

$$+ \sum_{q_1 + \dots + q_n = p} \frac{h_1^{q_1}}{q_1!} \dots \frac{h_n^{q_n}}{q_n!} \frac{\partial^{q_1 + \dots + q_n} f}{\partial x_1^{q_1} \dots \partial x_n^{q_n}}(\mathbf{x}_0 + \theta \mathbf{h}),$$

con $0 < \theta < 1$ y si $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$ entonces:

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = \sum_{q_1 + \dots + q_n \leq p} \frac{h_1^{q_1}}{q_1!} \dots \frac{h_n^{q_n}}{q_n!} \frac{\partial^{q_1 + \dots + q_n} f}{\partial x_1^{q_1} \dots \partial x_n^{q_n}}(\mathbf{x}_0) + \|\mathbf{h}\|^p o(1).$$

Ejemplo 2.6.1 Dar el desarrollo de orden dos de $f(x, y, z) = (x+1)ye^z$ en $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ y utilizar el desarrollo para aproximar $f(0.1, -0.1, 0.05)$.

$$\begin{aligned}
f_x &= ye^z & f_y &= (x+1)e^z & f_z &= (x+1)ye^z \\
f_{xx} &= 0 & f_{yy} &= 0 & f_{zz} &= (x+1)ye^z \\
f_{xy} &= e^z & f_{xz} &= ye^z & f_{yz} &= (x+1)e^z \\
f_{zzz} &= (x+1)ye^z & f_{xyz} &= e^z & f_{xyy} &= ye^z \\
f_{yzz} &= (x+1)e^z & f_{xxx} &= f_{yyy} = f_{xxz} = f_{xxy} = f_{yyx} & &= 0.
\end{aligned}$$

La fórmula de Taylor en $(0, 0, 0)$ se aproxima por $\mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3)$,

$$f(\mathbf{h}) = h_2 + \frac{1}{2}(2h_1h_2 + 2h_2h_3) + R_2(\mathbf{0}, \mathbf{h}),$$

donde:

$$R_2(\mathbf{0}, \mathbf{h}) = \frac{1}{3!}(6e^{\theta h_3}h_1h_2h_3 + 3\theta h_2e^{\theta h_3}h_1h_3^2 + 3(1+\theta h_1)e^{\theta h_3}h_2h_3^2 + (1+\theta h_1)\theta h_2e^{\theta h_3}h_3^2),$$

con $0 < \theta < 1$. Para $|h_i| < 1$ y como $e < 3$ se tiene:

$$|R_2(\mathbf{0}, \mathbf{h})| < \frac{1}{2}(6|h_1h_2h_3| + 3|h_1h_2h_3^3| + 6|h_2h_3^2| + 2|h_2h_3^2|),$$

$$f(h_1, h_2, h_3) = (-1.1)(0.1)e^{0.05} = -0.1 - 0.01 - 0.05 + R_2 = -0.115 + R_2,$$

con $|R_2| < 0.003$ i.e. $-0.118 < -0.115 + R_2 < -0.112$.

Ejemplo 2.6.2 Sea $f(x, y) = y \ln(x + y)$, dar un valor aproximado de $f(0.02, 0.99)$, utilizando un desarrollo de orden tres en $(0, 1)$.

$$\begin{aligned}
f_x &= \frac{y}{(x+y)} & f_y &= \ln(x+y) + \frac{y}{(x+y)} \\
f_{xx} &= -\frac{y}{(x+y)^2} & f_{yy} &= \frac{2}{(x+y)} - \frac{y}{(x+y)^2} \\
f_{xy} &= \frac{1}{(x+y)} - \frac{y}{(x+y)^2} & f_{xxx} &= \frac{2y}{(x+y)^2} \\
f_{xxy} &= -\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{2y}{(x+y)^3} & f_{xyy} &= -\frac{2}{(x+y)^2} + \frac{2y}{(x+y)^3} \\
f_{yyy} &= -3(x+y)^{-2} + \frac{2y}{(x+y)^3}
\end{aligned}$$

Así, $f(h, 1+k) = h+k + \frac{(-h^2+k^2)}{2} + \frac{(2h^3+3h^2k-k^3)}{6} + \epsilon(h, k)\|(h, k)\|$ y tenemos:

$$f(0.02, 0.99) = 0.00985033 + \dots + \epsilon(0.02, -0.01)(0.005)^{\frac{3}{2}},$$

con $(0.005)^{\frac{3}{2}} = 0.00001118\dots$. Esperando que el resto $\epsilon(0.02, -0.01)(0.0005)^{\frac{3}{2}}$ no influya en los decimales de orden 7, tenemos $f(0.02, 0.99) \approx 0.0098508$.

2.7 Diferenciabilidad en espacios de Banach

La definición de diferencial se puede ampliar al caso general de un espacio vectorial normado completo E . Al igual que en el caso de dimensión finita, la diferencial en espacios de Banach utiliza la aproximación por una función lineal.

Definición 2.7.1 Sean E y F espacios de Banach y sea $U \subset E$ un abierto no vacío, la aplicación $f: U \rightarrow F$ es diferenciable en $\mathbf{a} \in U$, si existe $g \in L(E, F)$ tal que $f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + g(\mathbf{h}) + \|\mathbf{h}\|\epsilon(\mathbf{h})$, donde $\epsilon(\mathbf{h}) \rightarrow 0$, cuando $\mathbf{h} \rightarrow 0$.

La aplicación $g: E \rightarrow F$ se llama el diferencial de f en \mathbf{a} y se denota por $g = df(\mathbf{a})$ o $Df(\mathbf{a})$. La continuidad de $df(\mathbf{a})$ implica la continuidad de f en \mathbf{a} .

Definición 2.7.2 Se dice que f es diferenciable en $U \subset E$, si f es diferenciable en todo punto de U .

Es claro que la aplicación lineal $g = df(\mathbf{a})$ depende de $\mathbf{a} \in U$, lo que permite definir la aplicación $\mathbf{a} \mapsto df(\mathbf{a})$, que denotaremos df i.e. $df: U \rightarrow L(E, F)$.

Definición 2.7.3 Se dirá que $f: U \rightarrow F$ es continuamente diferenciable o de clase C^1 , si f es diferenciable en U y la aplicación $df: U \rightarrow L(E, F)$ es continua.

Al igual que en el caso de \mathbb{R}^n , la diferencial no depende de la norma que se utilice.

Proposición 2.7.1 Sean E, F y G espacios de Banach y sea $U \subset E$ abierto, $f: U \rightarrow F$ diferenciable en $\mathbf{a} \in U$, sea $B \subset F$ abierto tal que $f(U) \subset B$, sea $g: B \rightarrow G$ diferenciable en $f(\mathbf{a})$, sea $h: U \rightarrow G$ definida por $h = g \circ f$, entonces h es diferenciable en \mathbf{a} y $Dh(\mathbf{a}) = Dg(f(\mathbf{a})) \circ Df(\mathbf{a})$, es decir el diferencial de h en \mathbf{a} , es la composición de los diferenciales de f en \mathbf{a} y de g en $f(\mathbf{a})$.

La prueba es similar al caso de \mathbb{R}^n .

Se verifica sin dificultad que si $f \in L(E, F)$, $df(\mathbf{x}) = f, \forall \mathbf{x} \in U$.

Teorema 2.7.1 Sean E_1, E_2 y F espacios de Banach, si $f: E_1 \times E_2 \rightarrow F$ es bilineal continua, f es diferenciable y su diferencial en $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ está definida por:

$$df(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2) = f(\mathbf{h}_1, \mathbf{a}_2) + f(\mathbf{a}_1, \mathbf{h}_2).$$

Demostración Sabemos que

$$f(\mathbf{a}_1 + \mathbf{h}_1, \mathbf{a}_2 + \mathbf{h}_2) - f(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = f(\mathbf{h}_1, \mathbf{a}_2) + f(\mathbf{a}_1, \mathbf{h}_2) + f(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2).$$

Probemos que $\|f(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2)\| \in(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2) = f(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2)$, con $\in(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2) \rightarrow 0$, si $(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2) \rightarrow (\mathbf{0}, \mathbf{0})$, donde $\|(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2)\| = \|\mathbf{h}_1\| + \|\mathbf{h}_2\|$.

En efecto, $\frac{\|f(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2)\|}{\|(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2)\|} \leq \frac{\|f\| \|\mathbf{h}_1\| \|\mathbf{h}_2\|}{\|\mathbf{h}_1\| + \|\mathbf{h}_2\|} \leq \|f\| (\|\mathbf{h}_1\| + \|\mathbf{h}_2\|) \rightarrow 0$, si $(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2) \rightarrow (\mathbf{0}, \mathbf{0})$.

Generalización Sean E_1, \dots, E_n, F espacios de Banach, si $f: E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$ es multilineal continua, donde $\|(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)\| = \sum_{i=1}^n \|\mathbf{x}_i\|$, entonces f es diferenciable y

$$df(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)(\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_n) = f(\mathbf{h}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) + \dots + f(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{h}_n).$$

Ejemplo 2.7.1 En el teorema 1.9.8 se ha definido una aplicación continua $\varphi: \mathbf{u} \mapsto \mathbf{u}^{-1}$ de $\text{Isom}(E, F)$ (abierto en el espacio de Banach $L(E, F)$) en $\text{Isom}(E, F)$ y nos preguntamos si φ es diferenciable. Su diferencial sería entonces un elemento de $L(L(E, F), L(E, F))$.

Teorema 2.7.2 Con las condiciones anteriores, la aplicación φ es de clase C^1 en el abierto $\text{Isom}(E, F) \subset L(E, F)$ y su diferencial viene dado por:

$$d\varphi(\mathbf{u})(\mathbf{h}) = -\mathbf{u}^{-1}\mathbf{h}\mathbf{u}^{-1}, \quad \text{para } \mathbf{h} \in L(E, F).$$

Demostración Consideremos:

$$\varphi(\mathbf{u} + \mathbf{h}) - \varphi(\mathbf{u}) = (\mathbf{u} + \mathbf{h})^{-1} - \mathbf{u}^{-1} = (\mathbf{u} + \mathbf{h})^{-1}(\mathbf{u} - (\mathbf{u} + \mathbf{h}))\mathbf{u}^{-1} = -(\mathbf{u} + \mathbf{h})^{-1}\mathbf{h}\mathbf{u}^{-1}.$$

Fijando $\mathbf{u} \in \text{Isom}(E, F)$, probemos que $\varphi(\mathbf{u} + \mathbf{h}) - \varphi(\mathbf{u}) = -\mathbf{u}^{-1}\mathbf{h}\mathbf{u}^{-1} + \|\mathbf{h}\|\in(\mathbf{h})$, con $\in(\mathbf{h}) \rightarrow 0$, si $\mathbf{h} \rightarrow 0$. En efecto:

$$\|(\mathbf{u} + \mathbf{h})^{-1}\mathbf{h}\mathbf{u}^{-1} - \mathbf{u}^{-1}\mathbf{h}\mathbf{u}^{-1}\| = \|((\mathbf{u} + \mathbf{h})^{-1} - \mathbf{u}^{-1})\mathbf{h}\mathbf{u}^{-1}\| \leq \|(\mathbf{u} + \mathbf{h})^{-1} - \mathbf{u}^{-1}\| \|\mathbf{u}^{-1}\| \|\mathbf{h}\|$$

y es suficiente probar que $\|(\mathbf{u} + \mathbf{h})^{-1} - \mathbf{u}^{-1}\| \rightarrow \mathbf{0}$, cuando $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$, resultado que se tiene, pues la aplicación $\varphi(\mathbf{u}) = \mathbf{u}^{-1}$ es continua.

Falta por verificar que φ es de clase C^1 , es decir $d\varphi: \text{Isom}(E, F) \rightarrow \text{L}(\text{L}(E, F), \text{L}(E, F))$ es continua. Para esto veamos la aplicación lineal $\psi(\mathbf{v}, \mathbf{w})$, con $\psi(\mathbf{v}, \mathbf{w})(\mathbf{h}) = -\mathbf{v}\mathbf{h}\mathbf{w}$ de $\text{L}(E, F)$ en $\text{L}(F, E)$, con $\mathbf{v} \in \text{L}(F, E)$, $\mathbf{w} \in \text{L}(E, F)$.

Así la aplicación continua $\psi: \text{L}(F, E) \times \text{L}(F, E) \rightarrow \text{L}(\text{L}(E, F), \text{L}(E, F))$, con $\psi(\mathbf{v}, \mathbf{w})(\mathbf{h}) = -\mathbf{v}\mathbf{h}\mathbf{w}$ es bilineal y continua, ya que $\|\psi(\mathbf{v}, \mathbf{w})(\mathbf{h})\| = \|\mathbf{v}\mathbf{h}\mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{h}\| \|\mathbf{w}\|$, lo que implica $\|\psi(\mathbf{v}, \mathbf{w})\| = \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|$, es decir que la aplicación $\mathbf{u} \mapsto d\varphi(\mathbf{u}) = \psi(\mathbf{u}^{-1}, \mathbf{u}^{-1})$ es la composición de la función continua $\mathbf{u} \mapsto (\mathbf{u}^{-1}, \mathbf{u}^{-1})$ de $\text{Isom}(E, F)$ en $\text{L}(F, E) \times \text{L}(F, E)$ y la aplicación continua $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto \psi(\mathbf{v}, \mathbf{w})$.

2.7.1 Convergencia de una sucesión de funciones diferenciables

Teorema 2.7.3 *Sea U un abierto convexo de E espacio vectorial normado completo y sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones diferenciables, $f_n: U \rightarrow F$, F espacio vectorial normado completo, tal que:*

- i) $\exists \mathbf{a} \in U$ tal que $f_n(\mathbf{a}) \in F$ tiene límite
- ii) la sucesión de aplicaciones $df_n: U \rightarrow \text{L}(E, F)$ converge uniformemente en U a una función $g: U \rightarrow \text{L}(E, F)$, entonces $\forall \mathbf{x} \in U$, la sucesión de las $(f_n(\mathbf{x}))_n \subset F$ tiene un límite representado por $f(\mathbf{x})$. La convergencia de la sucesión $(f_n)_n$ a f es uniforme en cada parte acotada de U y la función f es diferenciable y su diferencial es g .

Demostración Observemos que $\|df(\mathbf{x})\| \leq k$, $\forall \mathbf{x} \in U$, entonces si $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in U$, $\|f(\mathbf{x}_2) - f(\mathbf{x}_1)\| \leq k\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|$, por lo que $\|f_p(\mathbf{x}) - f_p(\mathbf{a}) - (f_q(\mathbf{x}) - f_q(\mathbf{a}))\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \sup_{\mathbf{y} \in U} \|df_p(\mathbf{y}) - df_q(\mathbf{y})\|$. Por la hipótesis ii), el segundo miembro tiende a $\mathbf{0}$, cuando p y q aumentan indefinidamente, entonces el primer miembro tiende a $\mathbf{0}$, cuando $p, q \rightarrow \infty$, siempre que \mathbf{x} esté en una parte acotada de U .

Por i) $f_p(\mathbf{a}) - f_q(\mathbf{a})$ tiende a $\mathbf{0}$, por lo que $\|f_p(\mathbf{x}) - f_q(\mathbf{x})\|$ tiende a cero uniformemente en una parte acotada de U .

Sea $f(\mathbf{x})$ el límite; cada punto de U posee un entorno acotado en el cual f es el límite uniforme de la sucesión de funciones continuas, luego f es continua en el entorno de todo punto de U i.e. f es continua en U .

Falta probar que f es diferenciable y que $df(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$.

Sea $\mathbf{x}_o \in U$, basta probar que $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_o) = g(\mathbf{x}_o)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_o\|\epsilon(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o)$.

Sea $\rho > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $n, p \geq N_1 \implies \|f_p(\mathbf{x}) - f_p(\mathbf{x}_o) - (f_n(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x}_o))\| \leq \rho \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_o\|}{3}$
y si $p \rightarrow \infty$, $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_o) - f_n(\mathbf{x}) + f_n(\mathbf{x}_o)\| \leq \rho \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_o\|}{3}$, si $n \geq N_1$.

Por otro lado, $\|df_n(\mathbf{x}_o) - g(\mathbf{x}_o)\| \leq \frac{1}{2}\rho$, si $n \geq N_2$, por lo que:

$$\|df_n(\mathbf{x}_o)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) - g(\mathbf{x}_o)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o)\| \leq \rho \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_o\|}{3}.$$

Además si $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_o\| \leq \eta$, se tiene:

$$\|f_n(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x}_o) - df_n(\mathbf{x}_o)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o)\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_o\| \|\epsilon'(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o)\| \leq \rho \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_o\|}{3},$$

pues f_n es diferenciable en \mathbf{x}_o y $\epsilon'(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \rightarrow 0$, cuando $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_o$. Así tenemos:

$$\begin{aligned} \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_o) - g(\mathbf{x}_o)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o)\| &\leq \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_o) - f_n(\mathbf{x}) + f_n(\mathbf{x}_o)\| + \\ &\|f_n(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x}_o) - df_n(\mathbf{x})(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o)\| + \\ &\|df_n(\mathbf{x})(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) - g(\mathbf{x}_o)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o)\| \leq \rho \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_o\|, \end{aligned}$$

siempre que $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_o\| < \eta$.

Definición 2.7.4 Sean E, F espacios vectoriales normados completos, $V \subset E$ abierto, $W \subset F$ abierto, se dice que $f: V \rightarrow W$ es un difeomorfismo de clase C^1 , si f es biyectiva de clase C^1 y si la inversa $f^{-1}: W \rightarrow V$ es de clase C^1 .

2.7.2 Diferenciales de orden superior

Sean E, F espacios vectoriales normados completos, $V \subset E$ abierto y $f: V \rightarrow F$ una aplicación diferenciable en V , se tiene entonces una aplicación diferencial $df: U \rightarrow L(E, F)$ y nos preguntamos si df es a su vez una aplicación diferenciable.

Definición 2.7.5 Se dice que f es dos veces diferenciable en el punto $\mathbf{a} \in U$, si la aplicación df es diferenciable en \mathbf{a} y la designamos $d^2f(\mathbf{a})$, donde $d^2f(\mathbf{a}) \in L(E, L(E, F))$, es decir $d^2f: U \rightarrow L(E, L(E, F))$.

Definición 2.7.6 Se dice que f es dos veces diferenciable en U , si es dos veces diferenciable en todo punto de U .

Definición 2.7.7 Se dice que f es de clase C^2 en U , si f es dos veces diferenciable en U y la aplicación d^2f es continua en U .

Recordemos la isometría canónica entre $L(E, L(E, F)) \cong L(E, E, F)$. Mediante esta biyección $d^2f(\mathbf{a})$ define un elemento de $L(E, E, F)$, es decir una aplicación bilineal continua de $E \times E$ en F . Abusando de la notación se considera $d^2f(\mathbf{a}) \in L(E, E, F)$ de modo que $(\mathbf{h}, \mathbf{k}) \mapsto d^2f(\mathbf{a})(\mathbf{h}, \mathbf{k}) = (d^2f(\mathbf{a})(\mathbf{h}))(\mathbf{k})$.

Teorema 2.7.4 Si $f: U \rightarrow F$ es dos veces diferenciable en el punto \mathbf{a} , la segunda diferencial $d^2f(\mathbf{a}) \in L(E, E, F)$ es una aplicación bilineal simétrica, o sea $d^2f(\mathbf{a})(\mathbf{h}, \mathbf{k}) = d^2f(\mathbf{a})(\mathbf{k}, \mathbf{h})$, $\forall \mathbf{h}, \mathbf{k} \in E$.

Demostración Consideremos la función simétrica:

$$A(\mathbf{h}, \mathbf{k}) = f(\mathbf{a} + \mathbf{h} + \mathbf{k}) - f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a} + \mathbf{k}) + f(\mathbf{a})$$

y probemos que $A(\mathbf{h}, \mathbf{k}) - d^2f(\mathbf{a})(\mathbf{h}, \mathbf{k}) = (\|\mathbf{h}\| + \|\mathbf{k}\|)^2 \epsilon(\mathbf{h}, \mathbf{k})$, donde $\epsilon(\mathbf{h}, \mathbf{k}) \rightarrow \mathbf{0}$, cuando $(\mathbf{h}, \mathbf{k}) \rightarrow (\mathbf{0}, \mathbf{0})$. En efecto:

$$\begin{aligned} \|A(\mathbf{h}, \mathbf{k}) - d^2f(\mathbf{a})(\mathbf{h}, \mathbf{k})\| &\leq \|A(\mathbf{h}, \mathbf{k}) - df(\mathbf{a} + \mathbf{k})(\mathbf{h}) + df(\mathbf{a})(\mathbf{h})\| \\ &\quad + \|df(\mathbf{a} + \mathbf{k})(\mathbf{h}) - df(\mathbf{a})(\mathbf{h}) - d^2f(\mathbf{a})(\mathbf{h}, \mathbf{k})\|. \end{aligned}$$

Dado que:

$$\|df(\mathbf{a} + \mathbf{k})(\mathbf{h}) - df(\mathbf{a})(\mathbf{h}) - (d^2f(\mathbf{a})(\mathbf{k}))(\mathbf{h})\| \leq \|\mathbf{h}\| \|df(\mathbf{a} + \mathbf{k}) - df(\mathbf{a}) - d^2f(\mathbf{a})(\mathbf{k})\|,$$

y como $df(\mathbf{a} + \mathbf{k}) - df(\mathbf{a}) - d^2f(\mathbf{a})(\mathbf{k}) = \|\mathbf{k}\|\epsilon_1(\mathbf{k})$, donde $\epsilon_1(\mathbf{k}) \rightarrow \mathbf{0}$, cuando $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{0}$, se tiene que $\|\mathbf{h}\|\|df(\mathbf{a} + \mathbf{k}) - df(\mathbf{a}) - d^2f(\mathbf{a})(\mathbf{k})\| = \|\mathbf{h}\|\|\mathbf{k}\|\|\epsilon_1(\mathbf{k})\| \leq (\|\mathbf{h}\| + \|\mathbf{k}\|)^2\|\epsilon_1(\mathbf{k})\|$.

Para la otra expresión $\|A(\mathbf{h}, \mathbf{k}) - df(\mathbf{a} + \mathbf{k})(\mathbf{h}) + df(\mathbf{a})(\mathbf{h})\|$, consideremos la función:

$$B(\mathbf{h}) = f(\mathbf{a} + \mathbf{h} + \mathbf{k}) - f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - df(\mathbf{a} + \mathbf{k})(\mathbf{h}) + df(\mathbf{a})(\mathbf{h})$$

y notemos que $B(\mathbf{h}) - B(\mathbf{0}) = A(\mathbf{h}, \mathbf{k}) - df(\mathbf{a} + \mathbf{k})(\mathbf{h}) + df(\mathbf{a})(\mathbf{h})$, por lo que $\|B(\mathbf{h}) - B(\mathbf{0})\| \leq \|\mathbf{h}\| \sup_{0 \leq t \leq 1} \|dB(t\mathbf{h})\|$, donde $dB(\mathbf{h}) = df(\mathbf{a} + \mathbf{k} + \mathbf{h}) - df(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - df(\mathbf{a} + \mathbf{k}) + df(\mathbf{a})$.

Pero:

$$df(\mathbf{a} + \mathbf{k} + t\mathbf{h}) = df(\mathbf{a}) + d^2f(\mathbf{a})(\mathbf{k} + t\mathbf{h}) + \|\mathbf{k} + t\mathbf{h}\|\epsilon_2(\mathbf{k} + t\mathbf{h})$$

$$df(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) = df(\mathbf{a}) + d^2f(\mathbf{a})(t\mathbf{h}) + \|t\mathbf{h}\|\epsilon_3(t\mathbf{h})$$

$$df(\mathbf{a} + \mathbf{k}) = df(\mathbf{a}) + d^2f(\mathbf{a})(\mathbf{k}) + \|\mathbf{k}\|\epsilon_4(\mathbf{k})$$

lo que implica que:

$$\begin{aligned} & \|df(\mathbf{a} + \mathbf{k} + \mathbf{h}) - df(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - df(\mathbf{a} + \mathbf{k}) + df(\mathbf{a})\| = \\ & \|\|\mathbf{k} + t\mathbf{h}\|\epsilon_2(\mathbf{k} + t\mathbf{h}) + \|t\mathbf{h}\|\epsilon_3(t\mathbf{h}) + \|\mathbf{k}\|\epsilon_4(\mathbf{k})\| \leq \\ & (\|\mathbf{k}\| + \|\mathbf{h}\|)\|\epsilon_2(\mathbf{k} + t\mathbf{h})\| + \|\mathbf{h}\|\|\epsilon_3(t\mathbf{h})\| + \|\mathbf{k}\|\|\epsilon_4(\mathbf{k})\| \leq \\ & (\|\mathbf{k}\| + \|\mathbf{h}\|)\|\epsilon_5(\mathbf{h}, \mathbf{k})\|, \end{aligned}$$

donde $\epsilon_5(\mathbf{h}, \mathbf{k}) \rightarrow \mathbf{0}$, cuando $(\mathbf{h}, \mathbf{k}) \rightarrow (\mathbf{0}, \mathbf{0})$. De esta manera tenemos:

$$\|B(\mathbf{h}) - B(\mathbf{0})\| \leq \|\mathbf{h}\| \sup_{0 \leq t \leq 1} \|dB(t\mathbf{h})\| \leq (\|\mathbf{h}\| + \|\mathbf{k}\|)^2\|\epsilon_5(\mathbf{h}, \mathbf{k})\|.$$

Así, $\|A(\mathbf{h}, \mathbf{k}) - d^2f(\mathbf{a})(\mathbf{h}, \mathbf{k})\| \leq (\|\mathbf{h}\| + \|\mathbf{k}\|)^2(\|\epsilon_1(\mathbf{k})\| + \|\epsilon_5(\mathbf{h}, \mathbf{k})\|)$ y concluimos que:

$$\|A(\mathbf{h}, \mathbf{k}) - d^2f(\mathbf{a})(\mathbf{h}, \mathbf{k})\| = (\|\mathbf{h}\| + \|\mathbf{k}\|)^2\|\epsilon'(\mathbf{h}, \mathbf{k})\|,$$

donde $\epsilon'(\mathbf{h}, \mathbf{k}) \rightarrow \mathbf{0}$, cuando $(\mathbf{h}, \mathbf{k}) \rightarrow (\mathbf{0}, \mathbf{0})$. Tenemos una expresión similar para $\|A(\mathbf{h}, \mathbf{k}) - d^2f(\mathbf{a})(\mathbf{k}, \mathbf{h})\| = (\|\mathbf{h}\| + \|\mathbf{k}\|)^2\|\epsilon''(\mathbf{h}, \mathbf{k})\|$ y se tiene que:

$$\|d^2f(\mathbf{a})(\mathbf{h}, \mathbf{k}) - d^2f(\mathbf{a})(\mathbf{k}, \mathbf{h})\| = (\|\mathbf{h}\| + \|\mathbf{k}\|)^2\|\epsilon(\mathbf{h}, \mathbf{k})\|.$$

Sea $\rho > 0$, $\exists \eta > 0$ tal que si $\|\mathbf{h}\| + \|\mathbf{k}\| < \eta$ se tiene $\|\epsilon(\mathbf{h}, \mathbf{k})\| < \rho$ lo que implica:

$$\|d^2f(\mathbf{a})(\mathbf{h}, \mathbf{k}) - d^2f(\mathbf{a})(\mathbf{k}, \mathbf{h})\| \leq \rho(\|\mathbf{h}\| + \|\mathbf{k}\|)^2.$$

Sean ahora \mathbf{h} y \mathbf{k} arbitrarios no ambos $\mathbf{0}$ y sea $\rho > 0$, entonces existe un $\lambda \neq 0$ tal que $\|\lambda\mathbf{h}\| + \|\lambda\mathbf{k}\| < \eta$, por lo que:

$$\|d^2f(\mathbf{a})(\lambda\mathbf{h}, \lambda\mathbf{k}) - d^2f(\mathbf{a})(\lambda\mathbf{k}, \lambda\mathbf{h})\| = |\lambda|^2 \|d^2f(\mathbf{a})(\mathbf{h}, \mathbf{k}) - d^2f(\mathbf{a})(\mathbf{k}, \mathbf{h})\| =$$

$$(\|\lambda\mathbf{h}\| + \|\lambda\mathbf{k}\|)^2 \|\epsilon(\lambda\mathbf{h}, \lambda\mathbf{k})\| \leq |\lambda|^2 (\|\mathbf{h}\| + \|\mathbf{k}\|)^2 \rho,$$

o sea ha probado que $\forall \mathbf{h}, \mathbf{k} \in E$:

$$\|d^2f(\mathbf{a})(\mathbf{h}, \mathbf{k}) - d^2f(\mathbf{a})(\mathbf{k}, \mathbf{h})\| \leq \rho(\|\mathbf{h}\| + \|\mathbf{k}\|)^2,$$

y como ρ es arbitrario, $d^2f(\mathbf{a})(\mathbf{h}, \mathbf{k}) = d^2f(\mathbf{a})(\mathbf{k}, \mathbf{h})$.

Caso en que $E = E_1 \times \cdots \times E_n$

Sea $\mathbf{a} \in U \subset E$, con U abierto de E , sea $f: U \rightarrow F$ una aplicación continua, para cada $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in U$, consideremos la inyección $\lambda_i: E_i \rightarrow E$ definida por:

$$\lambda_i(x_i) = (a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

La composición $f \circ \lambda_i$ está definida sobre el abierto $\lambda_i^{-1}(U) \subset E_i$, de modo que $a_i \in \lambda_i^{-1}(U)$.

La llamamos la i -ésima aplicación parcial en el punto \mathbf{a} .

Teorema 2.7.5 *Con las notaciones precedentes, si f es diferenciable en el punto \mathbf{a} , entonces la aplicación parcial $f \circ \lambda_i$ es diferenciable en a_i , $i = 1, \dots, n$. Denotamos su diferencial $d(f \circ \lambda_i)(a_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \in L(E_i, F)$, que la llamamos derivada parcial de f respecto a x_i . Además:*

$$df(\mathbf{a})(\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})(h_i), \quad h_i \in E_i, \quad i = 1, \dots, n$$

Demostración Sea $u_i: E_i \rightarrow E$ la inyección canónica $u_i(x_i) = (0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0)$, entonces u_i es lineal y continua. Se tiene que $\lambda_i(x_i) = \mathbf{a} + u_i(x_i - a_i)$, $\lambda_i(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$ y por lo

tanto $d\lambda_i(x_i) = u_i, \forall x_i \in E_i$.

Si f es diferenciable en el punto \mathbf{a} , $f \circ \lambda_i$ es diferenciable en el punto a_i y $d(f \circ \lambda_i) = df(\mathbf{a}) \circ u_i$, es decir $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$ existe y es igual a $df(\mathbf{a}) \circ u_i$.

Observemos que $\sum_{i=1}^n u_i \circ p_i = I_E$, donde p_i es la proyección canónica $p_i: E \rightarrow E_i$, por lo que:

$$df(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n (df(\mathbf{a}) \circ u_i) \circ p_i,$$

o sea

$$(df(\mathbf{a}))(\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^n (df(\mathbf{a}) \circ u_i) \circ p_i(\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})(h_i).$$

Corolario 2.7.1 *Sea f diferenciable sobre U , una condición necesaria y suficiente para que f sea de clase C^1 es que las aplicaciones $\frac{\partial f}{\partial x_i}: U \rightarrow L(E_i, F)$ sean aplicaciones continuas.*

Aplicando el mismo razonamiento a df se tiene:

$$(d^2 f(\mathbf{a}))(\mathbf{k}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial (df)}{\partial x_i}(\mathbf{a})(k_i),$$

lo que permite escribir:

$$(d^2 f(\mathbf{a}))(\mathbf{k})(\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial (df)}{\partial x_i}(\mathbf{a})(k_i) \right) (\mathbf{h}).$$

Recordemos que $\frac{\partial (df)}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \in L(E_i, L(E, F))$, que $\frac{\partial (df)}{\partial x_i}(\mathbf{a})(k_i) \in L(E, F)$ y que su valor sobre \mathbf{h} es un elemento de F . Así, tenemos:

$$\left(\frac{\partial (df)}{\partial x_i}(\mathbf{a})(k_i) \right) (\mathbf{h}) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) (\mathbf{a})(k_i) \right) (h_j).$$

Si denotamos $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a})$ la expresión $\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)$ en el punto \mathbf{a} , que es un elemento de $L(E_i, L(E_j, F)) \cong L(E_i, E_j; F)$, obtenemos:

$$(d^2 f(\mathbf{a}))(\mathbf{k})(\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a})(k_i) \right) (h_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a})(h_i) \right) (k_j).$$

Corolario 2.7.2 *Si $f: U \rightarrow F$ es dos veces diferenciable de n variables reales, se tiene:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}) \in F.$$

Es el clásico teorema de Schwarz.

Sea $f: U \rightarrow F$ una función dos veces diferenciable, se tiene que $d^2f: U \rightarrow L_2(E, F) = L(E, E; F)$ de aplicaciones bilineales continuas de $E \times E \rightarrow F$. En general se denota $L_n(E, F)$ el espacio de aplicaciones multilineales continuas de $E \times \cdots \times E \rightarrow F$.

Si la aplicación d^2f es diferenciable, se escribirá d^3f su diferencial, que es un elemento de $L(E, L_2(E; F)) \cong L_3(E, F)$. Por recurrencia sobre n se tiene que si f es n veces diferenciable, tenemos que $d^n f(\mathbf{a}) \in L_n(E, F)$. De esta manera tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.7.6 *Si f es n veces diferenciable en el punto \mathbf{a} , el diferencial $d^n f(\mathbf{a}) \in L_n(E, F)$ es una aplicación multilineal simétrica de $E \times \cdots \times E \rightarrow F$, es decir que si $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_n$ son n vectores de E y σ es una permutación cualquiera de $\{1, \dots, n\}$, se tiene:*

$$d^n f(\mathbf{a})(\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_n) = d^n f(\mathbf{a})(\mathbf{h}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{h}_{\sigma(n)}).$$

2.8 Ejercicios

2.8.1 Diferenciabilidad

1. Graficar la función $f(x, y) = ax + by + c$.
2. Considerar la función $f(x, y) = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$.
 - a) Dibujar en el plano xy las curvas de nivel a las alturas $h = 0, \pm 1, \pm 4$.
 - b) Sea G la superficie representativa de f , $G = \{(x, y, z) / z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}\}$. Dibujar en el plano xz los cortes de G , para los planos verticales $y = 0, \pm b, \pm 2b$.
 - c) Dibujar en el plano yz los cortes de G por los planos verticales $x = 0, \pm a, \pm 2a$.
 - d) Dibujar la figura de la superficie G .
3. Dibujar $f(x, y) = \frac{2xy}{a^2}$. Efectúe el cambio de variable $x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}$.
4. Sea $f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, dibujar las curvas de nivel para $h = 1, 2, 4$ y el gráfico de f .

5. Graficar la función $f(x, y) = dx^ay^b$, $a, b, d > 0$.
6. Linealizar la función $f(x, y, z) = (\sqrt{xyz}, x^2 - 2yz)$ en un vecindario de $\mathbf{x}_0 = (1, 2, 1)$.
7. Demostrar que si las derivadas parciales de f existen en una bola abierta $B(\mathbf{a}, \rho)$, $\rho > 0$ y son acotadas, entonces f es continua en \mathbf{a} .
8. Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ y $f(0, 0) = 0$. Calcular las derivadas parciales de primero y segundo orden, cuando existan.

9. Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Demostrar que $D_{\mathbf{u}}f(0, 0)$ existe para todo $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$, $\|\mathbf{u}\| = 1$, pero que f no es continua en $(0, 0)$.

10. Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

Demostrar que $D_{12}f(0, 0) \neq D_{21}f(0, 0)$.

11. Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \begin{cases} x & \text{si } y = 0 \\ y & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

a) Demostrar que $D_1f(0, 0)$ y $D_2f(0, 0)$ existen y determinarlos.

b) Sea $\mathbf{u} = (a_1, a_2)$, con $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$. Demostrar que $D_{\mathbf{u}}f(0, 0)$ no existe.

12. Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } x = y = 0. \end{cases}$

Demostrar que f no es continua en $(0, 0)$, pero $D_1f(0, 0)$ y $D_2f(0, 0)$ existen y determinarlas.

13. Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \begin{cases} x^2 \arctan \frac{y}{x} - y^2 \arctan \frac{x}{y} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0. \end{cases}$

Demostrar que $D_{12}f(0, 0) \neq D_{21}f(0, 0)$.

14. Sea $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 + x_3 + 1 \neq 0\}$. Sea $f: A \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f = (f_1, f_2, f_3)$, con

$f_k(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_k}{x_1 + x_2 + x_3 + 1}$, $k = 1, 2, 3$. Demostrar que f es inyectiva, calcular f^{-1} y verificar que $|J_f(x_1, x_2, x_3)| = (x_1 + x_2 + x_3 + 1)^{-4}$.

15. Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x + 2y + z^2, xy)$, $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(u, v) = (u^2 + 3, uv)$, sea $h = g \circ f$ y sea $\mathbf{a} = (1, 0, 1)$. Calcular $J_f(\mathbf{a})$, $J_g(f(\mathbf{a}))$ y $J_h(\mathbf{a})$. Comprobar que $J_h(\mathbf{a}) = J_g(f(\mathbf{a})) \circ J_f(\mathbf{a})$.
16. Dar un ejemplo de aplicaciones $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tales que f admite derivadas parciales primeras en $(0, 0)$ y g admite derivadas parciales primeras en $(0, 0)$, $f(0, 0) = (0, 0)$, $g \circ f$ no admite derivadas parciales primeras en $(0, 0)$.
17. Una aplicación $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 sobre U abierto de \mathbb{R}^2 (resp. \mathbb{R}^3) se dice armónica sii $\Delta f = 0$, donde $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ (resp. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$) es el Laplaciano de f .
- a) Para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, sea $z = x + iy \in \mathbb{C}$ y $f(x, y) = \ln |e^{ze^{-z}}|$, probar que f es armónica en \mathbb{R}^2 .
- b) Demostrar que si f es armónica y de clase C^3 , entonces $\frac{\partial f}{\partial x}$, $y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y}$ son armónicas.
- c) Verificar que $f(x, y, z) = \arctan \frac{y}{x} + \arctan \frac{z}{y} + \arctan \frac{x}{z}$ es armónica en \mathbb{R}^{*3} .
18. Sean $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y) = f(y, x)$, $\ell: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\ell(x) = f(x, x)$. Calcular las derivadas parciales primeras de g y ℓ en función de las de f , suponiendo que f es de clase C^1 en \mathbb{R}^2 .
19. Sean $D = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\})$, $\Delta =]-\pi, \pi[\times \mathbb{R}_+^*$, $\Phi: \Delta \rightarrow D$ la aplicación tal que $\Phi(\theta, \rho) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 , $F = f \circ \Phi$, $U: D \rightarrow \mathbb{R}$, $U(x, y) = y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$, $V = U \circ \Phi$. Calcular $V(\theta, \rho)$ en función de las primeras y segundas derivadas parciales de F y de θ, ρ .
20. Estudiar la continuidad de $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, la existencia y continuidad de las derivadas parciales de orden 1.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \operatorname{sen} \frac{1}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} & \text{b) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\ \text{c) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \operatorname{sen} y - y \operatorname{sen} x}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} & \text{d) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{array}$$

$$\text{e) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} xy}{|x| + |y|} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\text{g) } f(x, y) = \begin{cases} y^2 \operatorname{sen} \frac{x}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

$$\text{i) } f(x, y) = \operatorname{sen} |xy|$$

$$\text{k) } f(x, y) = \begin{cases} x^2 & \text{si } |x| > y \\ y^2 & \text{si } |x| \leq y. \end{cases}$$

$$\text{f) } f(x, y) = \begin{cases} e^{1/(x^2+y^2-1)} & \text{si } x^2 + y^2 < 1 \\ 0 & \text{si } x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{h) } f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)^x & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\text{j) } f(x, y) = \begin{cases} 1 - x^2 - y^2 & \text{si } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{si } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

21. Se considera la función $(x, y) \mapsto f(x, y)$ definida por $f(x, y) = xy \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} \frac{x+y}{x-y} \right)$ si $x \neq y$, $f(x, y) = 0$, si $x = y$. Calcular $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.

22. A partir de la definición, calcular el diferencial de las funciones siguientes en el punto indicado.

a) Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, si $f(x, y) = xy$, Calcular $Df(1, 1)$, $Df(x, y)$.

b) Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, si $f(x, y) = \frac{1}{x} + y$, Calcular $Df(1, 0)$, $Df(2, 1)$, $Df(x, y)$.

23. a) Si $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, calcular $Df(1, 1)$, $Df(u, v)$ y escribir el resultado en forma de matriz.
 $(u, v) \mapsto (u^2, v)$

b) Si $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, calcular $Df(2, 1)$, $Df(u, v)$ y escribir el resultado en forma de matriz.
 $(u, v) \mapsto (uv, u^2, v)$

24. Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, demostrar que si f es diferenciable en (a_1, a_2) , entonces $f^2(x, y) = [f(x, y)]^2$ es también diferenciable en (a_1, a_2) y calcular su diferencial.

25. a) Calcular el diferencial de f en $(0, 0)$, si $f(x, y) = |xy|$.

b) Sea $g(x, y) = \sqrt{|xy|}$, ¿existen $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$ en $(0, 0)$?

c) ¿Existe $dg(0, 0)$?

d) Estudiar el diferencial de g en $\mathbb{R} \times \{0\}$ y en $\{0\}$.

26. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en a_1 , $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en a_2 , demostrar que la aplicación $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en (a_1, a_2) .

$$(x, y) \mapsto f(x)g(y)$$

27. Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

Demostrar que f no es diferenciable en $(0, 0)$.

28. Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \operatorname{sen} \frac{1}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

Demostrar que f es diferenciable en $(0, 0)$ y calcular $df(0, 0)$.

29. Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } x = y = 0. \end{cases}$

Demostrar que f no es diferenciable en $(0, 0)$.

30. Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^4 - y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } x = y = 0. \end{cases}$

Demostrar que f no es diferenciable en $(0, 0)$.

31. Sea N una norma en \mathbb{R}^n , $n \geq 1$; demostrar que N no es diferenciable en 0 .

32. Demostrar que el diferencial es independiente de la norma equivalente que se utilice.

33. Sean f_1, \dots, f_n funciones de una variable real, diferenciables en $[a, b]$. Se define sobre $[a, b]^n \subset \mathbb{R}^n$, la función $f: [a, b]^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i)$. Demostrar que es diferenciable en el cubo $[a, b]^n$.

34. Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

a) Demuestre que f es diferenciable, salvo tal vez en $(0, 0)$.

b) ¿Qué sucede en $(0, 0)$? En caso de existir el diferencial, determinarlo.

35. Sean f_1, \dots, f_n aplicaciones definidas sobre $E \subset \mathbb{R}^n$ abierto, con valores en \mathbb{R} y se supone $\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{f_i(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f_i(\mathbf{x})}{h_i} = A_i$. Demostrar que $f = \sum_{i=1}^n f_i$ es diferenciable sobre

E .

36. Sea $\alpha > 0$, demostrar que la función $(x, y) \mapsto |xy|^\alpha$ es diferenciable en $(0, 0)$ sii $\alpha > \frac{1}{2}$.
37. Sea $f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ y sea $g: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \mathbf{x} \times \mathbf{y}$, demostrar que f y g son diferenciables y calcular su diferencial (\times denota el producto vectorial).
38. Sea $f \in L(\mathbb{R}^3)$ y $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} \times f(\mathbf{x})$, demostrar que F es diferenciable y calcular el diferencial.
39. Sea $n \in \mathbb{N}^*$, $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $f(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2}$, donde $\|\mathbf{x}\|$ es la norma euclídea clásica. Demostrar que f es diferenciable y calcular su diferencial.
40. Demostrar que la aplicación $f: \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ definida por $f(X) = X^2$ es diferenciable y calcular su diferencial.
41. Demostrar que la aplicación $f: \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ definida por $f(X) = X^3$ es diferenciable y calcular su diferencial.
42. Sea considera $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ con la norma usual y sea $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\|(x_1, \dots, x_n)\|} \sum_{i=1}^n x_i x_{n+1-i}$.
- a) Demostrar que f es extendible por continuidad en 0 .
- b) ¿La aplicación extendida es diferenciable en 0 ?
43. Estudiar la diferenciabilidad de $f: \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(X) = \sqrt{\text{tr}(I + X'X)}$.
44. Sea $n \in \mathbb{N}^*$.
- a) Demostrar que $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ es abierto en $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
- b) Demostrar que la aplicación $f: \text{GL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dada por $f(X) = X^{-1}$ es diferenciable y calcular su diferencial.
45. Sea $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua, $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \int_0^x \int_0^y \varphi(u, v) dv du$. Estudiar la diferenciabilidad de f .
46. Sea E el espacio vectorial de aplicaciones continuas y acotadas de \mathbb{R} en \mathbb{R} , provisto de

la norma $\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$, $\Phi: E \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\Phi(f) = \int_0^{f(0)} f(t) dt$. Estudiar el diferencial de Φ .

47. Sea E el espacio vectorial de aplicaciones continuas de $[0, 1]$ en \mathbb{R} , provisto de la norma $\|f\| = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$, sea $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 y sea $\Phi: E \rightarrow E$ definida por $\Phi(f) = \varphi \circ f$. Demostrar que Φ es diferenciable y calcular su diferencial.

48. Sea $f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{si } x, y \text{ son racionales} \\ 0 & \text{si } x, y \text{ no son ambos racionales.} \end{cases}$

Probar que f es continua en un sólo punto. ¿Es diferenciable en un punto?

2.8.2 Regla de la cadena

49. Sean $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 , $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x, y) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{si } x = y. \end{cases}$

Demostrar que g es de clase C^1 en \mathbb{R}^2 .

50. Encontrar una aplicación $P: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (P(x, y), 2xy)$ tenga por diferencial en todo punto una similitud i.e. si su matriz relativa a la base canónica es de la forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$.

51. Sean $f, \varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos aplicaciones de clase C^2 y sea $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x, y) = f(x + \varphi(y))$, verificar que $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial F}{\partial x} = 0$.

52. Determinar todas las aplicaciones $\varphi: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 , tales que la aplicación $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \varphi(x + y)$, verifique $\forall (x, y) \in U$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2 \frac{f(x, y)}{(x + y)^2}$, donde $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y \neq 0\}$.

53. Encontrar las aplicaciones $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 tales que la aplicación $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \varphi(\frac{y}{x})$, verifique $\forall (x, y) \in U$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{y}{x^3}$, donde $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq 0\}$.

54. Encontrar las aplicaciones $\varphi: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^3 tales que $f: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = \varphi(x^2 + y^2 + z^2)$, verifique $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$.

55. Transformar las ecuaciones en las derivadas parciales siguientes, utilizando el cambio de variables en la función indicada (f es desconocida de dos variables reales).

a) $2\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, $u = x + y$, $v = x + 2y$.

b) $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2}$ en polares sobre $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

c) $x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ en polares sobre $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

d) $2xy\frac{\partial f}{\partial x} + (1 + y^2)\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, $x = \frac{u^2 + v^2}{2}$, $y = \frac{u}{v}$, $x > 0$.

e) $(x + y)\frac{\partial f}{\partial x} + (x - y)\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, $u = x^2 - y^2 - 2xy$, $v = y$, $x \neq y$.

f) $\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} + 3(x - y)f = 0$, $u = xy$, $v = x + y$, $x > y$.

g) $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} - 2f + 2 = 0$, $u = xy$, $v = \frac{y}{x}$, $x > 0$.

h) $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, $x = u$, $y = uv$, $x > 0$.

i) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2\frac{\partial f}{\partial y} - f = 0$, $g = fe^y$, $u = x + y$, $r = x - y$.

j) $2(y^2 - x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2y\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - (y^2 - x) = 0$, $x = u^2 + v^2$, $y = u + v$, $x > \frac{y^2}{2}$.

k) $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, $u = xy$, $v = \frac{x}{y}$, $x > 0$, $y > 0$.

56. Sean $A, B, C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, (E) la ecuación en derivadas parciales $A\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, donde $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función desconocida, de clase C^2 . Efectuar el cambio de variable $u = x + \alpha y$, $v = x + \beta y$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq \beta$, $f(x, y) = F(x + \alpha y, x + \beta y)$, demostrar que se pueden escoger α, β para llevar el sistema (E) a una de las tres ecuaciones:

$$(1) \frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v} = 0 \quad (2) \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = 0 \quad (3) \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = 0.$$

57. Sea $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, $u(t) = e^{-t}$, $v(t) = e^t$. Dar el dominio de la función y la derivada de $F(t) = f(u(t), v(t))$.

58. Sea $f(x, y)$ de clase C^2 , $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ i.e. $\varphi(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$. Determinar $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r\partial\theta}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r\partial\theta}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}$, en función de $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$.

59. La sustitución $t = g(x, y)$ de clase C^1 convierte a $F(t)$ en una función $f(x, y)$ de clase C^1 , siendo $f(x, y) = F(g(x, y))$.

- a) Determinar $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$.
- b) Sea $F(t) = e^{\sen t}$, $g(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$, calcular $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$.
60. Sea $f(x, y)$, una función, de clase C^2 , $x = x(s, t)$, $y = y(s, t)$ y sea $F(s, t) = f(x(s, t), y(s, t))$.
Determinar $\frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial s \partial t}$.
61. Sea $f(x, y) = z$, con $y = F(x)$, calcular $\frac{dz}{dx}$, si f, F son de clase C^1 .
62. Sea $f(x, y) = \sqrt{xy}$, $u(x) = x$, $v(x) = \sen x$. Demostrar que $F(x) = f(u(x), v(x))$ está definida y es derivable en $]0, \pi[$ y determinar $F'(x)$ usando la regla de la cadena para varias variables.
63. Sea $f(x, y) = x^2 + 2xy + 4y^2$, con $y(x) = e^{-2x}$. Dar la derivada de $F(x) = f(x, y(x))$, usando la regla de la cadena para varias variables.
64. Sea $f(x, y) = x^2 + y^2$, $v(s, t) = e^s \sen t$, $v(s, t) = e^{-s} \cos t$, dar las derivadas parciales de $F(s, t) = f(u(s, t), v(s, t))$.
65. Si $f(x, y, z) = x^2z + y^2x + z^2y$, probar que $f_x + f_y + f_z = (x + y + z)^2$.
66. Determinar la expresión $\frac{1}{x^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{y^2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$ en las nuevas variables $u = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, $v = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$.
67. Determinar la ecuación $y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ en función de la variable r de modo que $z = f(r)$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y f es dos veces derivable.
68. Sea $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$, con f de clase C^1 , demostrar que $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$.

2.8.3 Aplicaciones

69. Determinar la razón espacial de cambio de $f(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 - z^2$ en la dirección hacia afuera de la normal a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 14$, en el punto $(-3, 2, 1)$.
70. Determinar la derivada direccional de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ en $(3, 4, 5)$, a lo largo de la curva de intersección de las superficies $2x^2 + 2y^2 - z^2 = 25$ y $x^2 + y^2 = z^2$.
71. Demostrar que la curva $x = t^2$, $y = 3t$, $z = 2\sqrt{t}$ interseca la superficie $2x^2 + y^2 + 2z = 15$ en un ángulo recto, en el punto $(1, 3, 2)$.

72. Sea $f(x, y) = x^2 + xy - y^2$, determinar el incremento y el diferencial de f .
73. Si h es la altura de un cono de 30cm y el radio r de la base es de 10cm, determinar la variación del volumen, si h aumenta 3mm y r disminuye 1mm.
74. Calcular aproximadamente $1.02^{3.01}$.
75. Usando diferenciales, calcular aproximadamente el valor:
- i) $\sqrt{26} \sqrt[3]{28} \sqrt[4]{17}$ ii) $(\sqrt{15} + \sqrt{99})^2$.
76. Determinar el plano tangente y la normal a la superficie $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 3$, en el punto $(2, 3, 4)$.
77. Hallar un vector normal a la superficie $x^2 + y^2 - z = 1$, en el punto $(1, 1, 1)$.
78. Hallar el ángulo de intersección en $(-1, 2, 1)$ entre las superficies $x^2y + z = 3$, $x \ln z - y^2 = -4$.
79. Encontrar la ecuación del plano tangente a la superficie dada en el punto indicado:
- i) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $(3, 4, 25)$ ii) $f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$, $(4, -3, 0)$.
80. Sea $\mathbf{r}(x, y, z) = (x, y, z)$, $r(x, y, z) = \|\mathbf{r}(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
- i) Demostrar que $\nabla r(x, y, z)$ es un vector unitario en la dirección de $\mathbf{r}(x, y, z)$.
- ii) Demostrar que $\nabla r^n = nr^{n-2}\mathbf{r}$, si $n \in \mathbb{Z}$.
- iii) Encontrar un campo escalar f tal que $\nabla f = \mathbf{r}$.
81. La intersección de las dos superficies dada por las ecuaciones $2x^2 + 3y^2 - z^2 = 25$ y $x^2 + y^2 = z^2$, contiene una curva Γ que pasa por el punto $(\sqrt{7}, 3, 4)$.
- i) Determinar un vector tangente unitario \mathbf{t} a Γ en el punto $(\sqrt{7}, 3, 4)$, sin usar la representación paramétrica canónica de la curva.
- ii) Verificar el resultado usando como parámetro a z , para la representación paramétrica de la curva Γ .
82. Las tres ecuaciones $F(u, v) = 0$, $u = xy$, $v = \sqrt{x^2 + z^2}$, donde F es de clase C^1 , definen una superficie en \mathbb{R}^3 . Determinar un vector normal a esta superficie en el punto $x = 1$,

$y = 1, z = \sqrt{3}$, si se sabe que $\frac{\partial F}{\partial u}(1, 1) = 1, \frac{\partial F}{\partial v}(1, 1) = 2$.

83. Calcule las derivadas direccionales de $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ en $(1, 1, 0)$, en la dirección $(1, -1, 2)$ y de $f(x, y, z) = \left(\frac{x}{y}\right)^z$ en $(1, 1, 1)$, en la dirección $(2, 1, -1)$.
84. Determinar la ecuación del plano tangente a la superficie $z = x\sqrt{y}$ en el punto $(2, 0, 0)$.
85. Determinar la ecuación del plano tangente a la superficie $z^3 + (x + y)z^2 + x^2 + y^2 = 13$ en el punto $(2, 2, 1)$.
86. Sea $\mathbf{x}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^p$, probar que:
- Si $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}, A \in M_{p \times n}$, entonces $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = A$.
 - Si $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}'\mathbf{x}$, entonces $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{a}'$.
 - Si $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'A\mathbf{x}$, con A matriz simétrica, entonces $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = 2A\mathbf{x}$.
 - Si $f(X) = \mathbf{a}'X\mathbf{b}$, con $X \in M_{n,p}$, matriz $n \times p$, entonces $\frac{\partial f}{\partial X} = \mathbf{a}\mathbf{b}'$.
 - Si $f(X) = \mathbf{a}'X\mathbf{a}$, con $X \in M_{n,n}$, (matriz simétrica $n \times n$), entonces $\frac{\partial f}{\partial X} = 2\mathbf{a}\mathbf{a}' - D(\mathbf{a}\mathbf{a}')$, donde $D(\mathbf{a}\mathbf{a}')$ es una matriz diagonal, cuyos elementos son los elementos de la diagonal de $\mathbf{a}\mathbf{a}'$.
87. Sea $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, U$ abierto, una función con derivadas de orden 3 continuas en U .
- Probar que $\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_j \partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_j^2 \partial x_i}$, sobre U .
 - Demostrar que $\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}$ es la misma sobre U , si se permuta (i, j, k) .

2.8.4 Función implícita

88. Demostrar que la relación propuesta define implícitamente y en función de x , en un vecindario del par (a, b) indicado y dar el desarrollo de orden 3 en un vecindario de a , de la función $y = \varphi(x)$.
- $e^{x+y} + y - 1 = 0, \quad (0, 0)$
 - $xy^2 - \text{sen}(x + y) + y = 0, \quad (1, -1)$
 - $xy - \text{sen } y + x = 0, \quad (0, 0)$
 - $1 - ye^x + xe^y = 0, \quad (0, 1)$
 - $x^3 + y^3 - 3xy - 1 = 0, \quad (0, 1)$
 - $2e^{x+y-1} + \ln(x - y) - 2x + y^3 = 0, \quad (1, 0)$.

101. Determinar $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, si $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.
102. Si $f(x, y, z) = 0$, con f de clase C^1 , demostrar que $\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1$, siempre que $f_x \neq 0$, $f_y \neq 0$, $f_z \neq 0$.
103. Sea $z = \varphi(x, y)$, donde y está en función de x , determinada por la ecuación $\psi(x, y) = 0$. Determinar $\frac{dz}{dx}$, siempre que $\psi_y \neq 0$.
104. Sea z en función de (x, y) dada por la ecuación $f(x, y, z) = 2x^2 + xy^2 + z^2 - 8xz - z + 8 = 0$. Determinar dz y d^2z en $(2, 0, 1)$, dando claramente las condiciones de existencia.
105. Determinar dz , d^2z , si $\ln z = x + y + z - 1$. Dar las condiciones de existencia de z en función de (x, y) .
106. Sea z la función determinada por la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = \varphi(ax + by + cz)$, donde φ es diferenciable y a, b, c son constantes. Demostrar que $(cy - bz)\frac{\partial z}{\partial x} + (az - cx)\frac{\partial z}{\partial y} = bx$. Dar las condiciones de existencia de z en función de (x, y) .
107. Demostrar que la función z , determinada por la ecuación $f(x - az, y - bz) = 0$, con f diferenciable, satisface $a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 1$. Dar las condiciones de existencia de z en función de (x, y) .
108. Sea $F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$, demostrar que $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$, si F es de clase C^1 . Dar las condiciones de existencia de z en función de (x, y) .
109. Demostrar que la función z determinada por $y = x\varphi(z) + \psi(z)$, satisface la ecuación $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = 0$, donde φ, ψ de clase C^2 . Especificar las condiciones de existencia de z en función de (x, y) .
110. Las funciones $y(x), z(x)$ se dan por el sistema $x^2 + y^2 - z^2 = 0, x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4$. Determine y', z', y'', z'' , para $x = 1, y = 0, z = 1$. Dar las condiciones de existencia de z en función de (x, y) .
111. Las funciones u, v de las variables x, y se dan por el sistema de ecuaciones implícitas $x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v)$, con φ, ψ de clase C^1 . Determinar $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$.

112. Sea $z = F(r, \theta)$, donde r y θ son funciones de las variables x, y , determinadas por el sistema de ecuaciones $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$. Determinar $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.
113. Considerando z como función de (x, y) , determinar $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, si $x = a \cos \varphi \cos \psi, y = b \sin \varphi \cos \psi, z = c \sin \psi$.
114. Sea $f(x, y) = x^2 + y^2$, demostrar que los resultados están acordes con el teorema de la función implícita en el punto $(0, 1)$.
115. Estudiar el conjunto de soluciones de la ecuación $f(x, y) = y^3 - x^2y = 0$.
116. Sea $f(x, y) = y^3 - xy^2 + x^3$, demostrar que la ecuación $f(x, y) = 1$ y la condición $g(1) = 1$ definen una función de clase C^∞ en $x = 1$. ¿La ecuación $f(x, y) = 1$ define otra función en un abierto de $x = 1$? En otras palabras se puede encontrar b para que la ecuación y la condición $h(1) = b$ definiendo una función continua h en un abierto de 1 .
117. Demostrar que la ecuación $e^x - e^y + xy = 0$, define y como función de x en un abierto de $x = 0$. Dar el desarrollo de Taylor hasta el orden 5.
118. Sea $f(x, y) = x - y + 2 \ln(x + y)$, demostrar que la ecuación $f(x, g(x)) = 0$ y la condición $g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, definen una función g derivable en un abierto de $\frac{1}{2}$. Dar el desarrollo de g hasta el orden 2.
119. Sea $f(x, y, z) = z^3 + 3xz + 2x^3 + xy^2 - y^3$, probar que la ecuación $f(x, y, g(x, y)) = 0$ y la condición $g(1, -2) = -2$ definen una función $g(x, y)$ continua con derivadas parciales en un abierto de $(1, -2)$. Calcular $g_x(1, -2)$ y $g_y(1, -2)$.
120. Encontrar la ecuación de la tangente a un círculo y la ecuación del plano tangente a una esfera.
121. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación de clase C^1 tal que existe $k \in]0, 1[$ que cumple $\forall t \in \mathbb{R}, |f'(t)| \leq k$. Sea $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $g(x, y) = (x + f(y), y + f(x))$, demostrar que g es biyectiva.
122. Si $e^{x+y} = y^x$, con $y > 0$, determinar $\frac{\partial y}{\partial x}$.

123. Sea f una función de clase C^1 , determinar las condiciones para que la ecuación $e^x \sin z = f(e^y \cos z)$ defina z implícitamente en función de (x, y) y calcular $\frac{\partial z}{\partial y} \sin^2 z - \frac{\partial z}{\partial x} \cos^2 z$.
124. Sea f una función de clase C^1 sobre \mathbb{R}^2 , determinar las condiciones para que la ecuación $f(\ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \arctan \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}) = 0$, defina z implícitamente en términos de (x, y) y calcular $x \frac{\partial z}{\partial y} - y \frac{\partial z}{\partial x}$.
125. Dado el sistema de ecuaciones $x^2 + y^2 + u^2 - v^2 = 0$, $xy + uv = 0$, determinar $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$.
126. En el sistema de ecuaciones $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$, $ax + y + z = 0$, donde $a \neq 1$, determinar $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{dz}{dx}$.
127. Dadas las ecuaciones $9xy + v^2 = 0$, $xv - 3u^2 = 0$, determinar $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$.

Solución Sea $F: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y, u, v) = \begin{pmatrix} 9xy + v^2 \\ xv - 3u^2 \end{pmatrix}$, entonces F es de

clase C^∞ y $\frac{\partial F}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} 0 & 2v \\ -6u & x \end{pmatrix}$ es invertible, si $uv \neq 0$. Así, existe $g(x, y) = (u, v)$ de clase C^∞ tal que $F(x, y, g(x, y)) = 0$ y se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} &= - \left(\frac{\partial F}{\partial(u, v)} \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial(x, y)} = - \frac{1}{12uv} \begin{pmatrix} x & -2v \\ 6u & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9y & 9x \\ v & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-9xy + 2v^2}{12uv} & \frac{-3x^2}{4uv} \\ \frac{-9y}{2v} & \frac{-9x}{2v} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

128. Sea $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 y sea $z = g(x, y)$ una función definida por la ecuación $z = F(x + y, yz)$. Determinar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ en función de las derivadas parciales de F .

2.8.5 Formas diferenciales

129. Estudiar las formas diferenciales ω siguientes, en dos variables. ¿Es ω cerrada? ¿ ω es exacta? En caso afirmativo, calcular las primitivas de ω ; si ω no es cerrada, buscar una función $\varphi(x, y) \neq 0$ en el que la forma diferencial $\omega_1(x, y) = \varphi(x, y)\omega(x, y)$ sea cerrada (φ

es el factor integrante de ω) ¿Es ω_1 exacta? En caso afirmativo calcular las primitivas de ω_1 :

a) $(2x + 2y + e^{x+y})(dx + dy)$

b) $\frac{xdy - ydx}{(x - y)^2}$

c) $\frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} - ydy$

d) $((1 + 2xy)dx + 2y^2dy) \cos(x^2 + y^2) + ((1 - 2xy)dy - 2x^2dx) \operatorname{sen}(x^2 + y^2)$

e) $\frac{y^2dx + x^2dy}{(x + y)^2}$

f) $\frac{(x - y)dx + (x + y)dy}{x^2 + y^2}$

g) $(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}}((1 + x^2)dy + (xy - 2x^2 - 1)dx)$

h) $\frac{1}{(1 - x^2)^2 + y^4}(2xy^2dx + 2(1 - x^2)ydy)$

i) $\frac{(ax + by)(xdy - ydx)}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$, $a, b \in \mathbb{R}$

j) $\frac{1}{x^2y}dx - \frac{1}{xy^2}dy$, $\varphi(x, y)$ depende sólo de $x^2 + y^2$

k) $(x^2 + y^2 - 1)dx - 2ydy$, $\varphi(x, y)$ depende sólo de x

l) $y^2dx + x^2dy$, $\varphi(x, y)$ depende sólo de $x + y$

m) $\frac{ydx - xdy}{xy - 1}$, $\varphi(x, y)$ depende sólo de xy

n) $2x(y - 1)dx - (x^2 - 1)dy$, $\varphi(x, y)$ depende sólo de x

o) $(x^2 + y^2 - 1)dx - 2xydy$, $\varphi(x, y)$ depende sólo de $x^2 - y^2$

p) $y(1 + x)e^{-y}dx + x(1 - y)e^{-y}dy$, $\varphi(x, y)$ depende sólo de x

q) $(1 + (x + y)y)dx + (1 + (x + y)x)dy$, $\varphi(x, y)$ depende sólo de xy .

130. La misma pregunta anterior, para el caso de formas diferenciales en tres variables.

a) $3(x^2 + 2xy + 2xz)dx + 3(x^2 + y^2)dy + 3(x^2 + z^2)dz$

b) $\left(\frac{1}{y} - \frac{z}{x^2}\right)dx + \left(\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}\right)dy + \left(\frac{1}{x} - \frac{y}{z^2}\right)dz$

c) $2xzdxdx - 2yzdy + (z^2 - x^2 + y^2)dz$, $\varphi(x, y, z)$ depende sólo de z

d) $(y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$, $\varphi(x, y, z)$ depende sólo de $y - z$

e) $yz(y + z)dx + zx(z + x)dy + xy(x + y)dz$, $\varphi(x, y, z)$ depende sólo de $x + y + z$.

131. Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 y ω la forma diferencial definida por:

$$\omega(x, y) = \frac{(x^2 + y^2 + f(x, y))(ydx - xdy)}{x^2 + y^2}.$$

¿Cómo escoger f para que ω sea exacta en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$?

132. Determinar $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 para que la forma diferencial ω definida por

$\omega(x, y, z) = 2xzdx + f(y)g(z)dy + (x^2 + \frac{1}{2}y^2)dz$ sea cerrada en \mathbb{R}^3 . Calcular las primitivas.

133. A cada aplicación $\varphi: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 se asocia la forma diferencial ω_φ

definida sobre $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, por $\omega_\varphi(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} [(x - y\varphi(x, y))dx + (x\varphi(x, y) + y)dy]$.

a) Demostrar que ω_φ es cerrada sii φ verifica una ecuación en derivadas parciales (E).

b) Demostrar que $\varphi_0(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$ es solución de (E).

c) ¿La forma diferencial ω_{φ_0} es exacta en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$?

Capítulo 3

Máximos y mínimos de funciones en varias variables

3.1 Matrices simétricas y formas cuadráticas

Recordemos que si A es una matriz $n \times n$ simétrica se tiene que $A = A'$ y que:

- Los valores propios de A son reales.
- $\exists P$ matriz ortogonal ($P' = P^{-1}$) tal que $D = P'AP$, donde D es la matriz diagonal de los vectores propios de A .

Definición 3.1.1 Sea A una matriz simétrica $n \times n$.

1. Si todos los valores propios de A son positivos, se dice que A es definida positiva.
2. Si todos los valores propios de A son negativos, se dice que A es definida negativa.
3. Si los valores propios son positivos o nulos, se dice que A es semidefinida positiva.
4. Si los valores propios son negativos o nulos, se dice que A es semidefinida negativa.
5. Si existen valores propios positivos y negativos, se dice que A es indefinida.

Teorema 3.1.1 Sea A una matriz simétrica, entonces:

1. A es definida positiva si $a_{11} > 0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, \det A > 0$, (semidefinida positiva si algún determinante es igual a 0).

2. A es definida negativa si $a_{11} < 0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, (-1)^n \det A > 0$, (semidefinida negativa si algún determinante es igual a 0).

3.1.1 Formas cuadráticas

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz $n \times n$, $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{x} \mapsto Q(\mathbf{x})$ se denomina forma cuadrática si $Q(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = \mathbf{x}' A \mathbf{x}$. La matriz A es una matriz asociada a la forma cuadrática.

Proposición 3.1.1 Una forma cuadrática tiene una única matriz simétrica asociada.

Demostración Sea $Q(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, B\mathbf{x} \rangle$ y sea A definida por $a_{ij} = \frac{b_{ij} + b_{ji}}{2}$, A es simétrica y

$$Q(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, B\mathbf{x} \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j.$$

Observación A es única pues no depende de B . Así cuando hablamos de la matriz de una forma cuadrática, siempre nos referimos a la matriz simétrica asociada.

Signo de una forma cuadrática

Sea $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática.

1. Q se dice definida positiva si y sólo si $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $Q(\mathbf{x}) > 0$ (semidefinida positiva si $\exists \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ tal que $Q(\mathbf{x}) = 0$).
2. Q se dice definida negativa si y sólo si $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $Q(\mathbf{x}) < 0$ (semidefinida negativa si $\exists \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ tal que $Q(\mathbf{x}) = 0$).
3. Q se dice indefinida si $\exists \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ tales que $Q(\mathbf{x}_1) > 0$ y $Q(\mathbf{x}_2) < 0$.

Proposición 3.1.2 Sea $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática $Q(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle$, con A matriz simétrica asociada a Q , entonces $Q(\mathbf{x}) > 0, \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ sii A es definida positiva.

Demostración

(\Leftarrow) Sea A definida positiva y sean $\lambda_i > 0, i = 1, \dots, n$ sus valores propios, $\exists P$ ortogonal

tal que $P'AP = D_\lambda$. Sea $\mathbf{u} = P'\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, entonces $Q(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle = \mathbf{x}'A\mathbf{x} = \mathbf{u}'P'AP\mathbf{u} = \mathbf{u}'D_\lambda\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i^2 > 0$.

(\implies) Sea $Q(\mathbf{x}) > 0$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ y sea $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ base canónica de \mathbb{R}^n , $\mathbf{x} = P\mathbf{e}_i$, $i = 1, \dots, n$,

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_i'P'AP\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i'D_\lambda\mathbf{e}_i = \lambda_i > 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

3.2 Máximos y mínimos de funciones de varias variables

Definición 3.2.1 Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f: U \longrightarrow \mathbb{R}$, se dice que f alcanza un máximo (resp. mínimo) en un punto $\mathbf{x}_0 \in U$, si existe una bola abierta $B(\mathbf{x}_0, \rho) \subset U$ de modo que $f(\mathbf{x}_0) \geq f(\mathbf{x})$ (resp. $f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x})$), para todo $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \rho)$.

Se dice que la función f tiene un extremo en \mathbf{x}_0 , si ahí alcanza un máximo o un mínimo.

Proposición 3.2.1 Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, $f: U \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en $\mathbf{x}_0 \in U$. Si f alcanza (tiene) un extremo en \mathbf{x}_0 , entonces $D_k f(\mathbf{x}_0) = 0$, para $k = 1, \dots, n$, es decir en un extremo todas las derivadas parciales se anulan.

Demostración Puesto que f es diferenciable en \mathbf{x}_0 , existen $D_k f(\mathbf{x}_0)$ para $k = 1, \dots, n$. Supongamos que f alcanza un máximo en el punto \mathbf{x}_0 , entonces existe una bola $B(\mathbf{x}_0, \rho)$ tal que $f(\mathbf{x}_0) \geq f(\mathbf{x})$, $\forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \rho)$ y resulta que $f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{e}_k) \leq f(\mathbf{x}_0)$ para $|h| < \rho$. Así, si $h > 0$:

$$\frac{f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{e}_k) - f(\mathbf{x}_0)}{h} \leq 0 \implies \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{e}_k) - f(\mathbf{x}_0)}{h} = D_k f(\mathbf{x}_0) \leq 0.$$

Si $h < 0$:

$$\frac{f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{e}_k) - f(\mathbf{x}_0)}{h} \geq 0 \implies \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{e}_k) - f(\mathbf{x}_0)}{h} = D_k f(\mathbf{x}_0) \geq 0,$$

y como f es diferenciable en \mathbf{x}_0 , el límite del cociente anterior debe existir y ser igual a $D_k f(\mathbf{x}_0)$, lo cual implica $D_k f(\mathbf{x}_0) = 0$.

La demostración es análoga para el caso de un mínimo.

Definición 3.2.2 Sea $B \subset \mathbb{R}^n$, $f: B \longrightarrow \mathbb{R}$, se dice que f alcanza un máximo absoluto (resp. un mínimo absoluto) en $\mathbf{x}_0 \in B$ si $f(\mathbf{x}_0) \geq f(\mathbf{x})$ (resp. $f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x})$), $\forall \mathbf{x} \in B$.

Observación La proposición 3.2.1 se usa para calcular los puntos extremos de una función. Sin embargo hay que tener presente lo siguiente.

- a) Si f no es diferenciable en \mathbf{x}_0 , no se puede asegurar la existencia de las derivadas parciales y sin embargo f puede tener un extremo en \mathbf{x}_0 .
- b) Las derivadas parciales pueden anularse todas en un punto \mathbf{x}_0 y sin embargo la función puede no tener un extremo ahí.
- c) f puede alcanzar un máximo absoluto en $\mathbf{x}_0 \in B$, si B no es abierto (o un mínimo absoluto en $\mathbf{x}_0 \in B$) y sin embargo no es necesario que todas las derivadas parciales se anulen en \mathbf{x}_0 .

Podemos decir que si

1. $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, con U abierto.
2. f es diferenciable en U , entonces los extremos de f en U se encuentran entre los puntos $\mathbf{x} \in U$ tales que $D_k f(\mathbf{x}) = 0, \forall k = 1, \dots, n$. En otras palabras los puntos donde las $D_k f(\mathbf{x})$ ($k = 1, \dots, n$) se anulan, se les llama puntos críticos de f o candidatos a extremos de f .

¿Cómo se puede discriminar, entre un máximo, un mínimo, de otro punto que anula todos las derivadas parciales (punto estacionario)? Necesitamos el segundo diferencial.

Recordemos que si df es el diferencial de f , definimos el segundo diferencial como $d^2 f = d(df)$.

Ejemplo 3.2.1 Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, si f es de clase C^2 , $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$ y el segundo diferencial es:

$$\begin{aligned} d^2 f &= d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy\right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy\right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy\right) dy \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2. \end{aligned}$$

Si $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^2 , $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$ y el segundo diferencial es:

$$\begin{aligned} d^2 f &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \right) dy + \\ &\quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \right) dz \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} dz^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} dx dz + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} dz dy. \end{aligned}$$

Definición 3.2.3 Sea $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{x}_0 \in U$ abierto, f de clase C^2 , la matriz $H_f(\mathbf{x}_0) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) \right)$ se llama hessiano¹ de f en \mathbf{x}_0 . Así tenemos que:

$$d^2 f(\mathbf{x}_0) = (dx_1, \dots, dx_n) H_f(\mathbf{x}_0) \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}.$$

Fórmula de Taylor de segundo orden

Bajo las hipótesis anteriores, tenemos $f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = Df(\mathbf{a})(\mathbf{h}) + \frac{1}{2} \mathbf{h}' H_f(\mathbf{a} + c\mathbf{h}) \mathbf{h}$, con $0 < c < 1$, o bien $f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = Df(\mathbf{a})(\mathbf{h}) + \frac{1}{2} \mathbf{h}' H_f(\mathbf{a}) \mathbf{h} + \|\mathbf{h}\|^2 \varepsilon_2(\mathbf{a}, \mathbf{h})$, donde $\varepsilon_2(\mathbf{a}, \mathbf{h}) \rightarrow \mathbf{0}$, cuando $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$.

Proposición 3.2.2 Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ con derivadas de segundo orden continuas en $\mathbf{x}_0 \in U$. Si $df(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ (i.e. $D_k f(\mathbf{x}_0) = 0$, $k = 1, \dots, n$), entonces:

Si $d^2 f(\mathbf{x}_0) < 0$ se tiene un máximo en \mathbf{x}_0 .

Si $d^2 f(\mathbf{x}_0) > 0$ se tiene un mínimo en \mathbf{x}_0 .

Si $d^2 f(\mathbf{x}_0)$ cambia de signo, \mathbf{x}_0 es un punto de ensilladura y $f(\mathbf{x}_0)$ no es ni máximo ni mínimo.

¹**Ludwig Otto Hesse (1811-1874)** Nace el 22 de abril de 1811 en Königsberg, Alemania (hoy Kaliningrado, Rusia). Muere el 4 de agosto de 1874 en München, Alemania. Otto Hesse estudia bajo la supervisión de Jacobi en Königsberg y fue maestro de física y de química antes de graduarse en Königsberg en 1840. Hesse llega a ser un conferenciante en Königsberg y publicó durante 16 años *Journal de Crelle*. En 1856 fue designado en Heidelberg y permanecido allí hasta que 1868, cuando se trasladó a Munich. Su trabajo principal se relaciona con teoría las funciones algebraicas y la teoría de invariantes. El introdujo el determinante hessiano en un artículo en 1842, en el estudio de curvas cúbicas y cuadráticas. Su trabajo fue influenciado por Steiner, particularmente en la interpretación geométrica de transformaciones algebraicas. Hesse trabaja en algunos temas que Cayley trabaja también y ambos producen una teoría de formas homogéneas que publicaron al mismo tiempo.

Si $d^2f(\mathbf{x}_0) = 0$, no hay criterio.

Demostración Sabemos que $f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2}\mathbf{h}'H_f(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} + \|\mathbf{h}\|^2\varepsilon_2(\mathbf{h})$. Ahora:

$$\frac{f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{h}\|^2} = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{h}'}{\|\mathbf{h}\|} H_f(\mathbf{x}_0) \frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} + \varepsilon_2(\mathbf{h}).$$

Sea $\mathbf{h} = \lambda\mathbf{u}$, con $\|\mathbf{u}\| = 1$, entonces $\frac{f(\mathbf{x}_0 + \lambda\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{\lambda^2} = \frac{1}{2}\mathbf{u}'H_f(\mathbf{x}_0)\mathbf{u} + \varepsilon_2(\lambda\mathbf{u})$ y si $\lambda \rightarrow 0$, $\varepsilon_2(\lambda\mathbf{u}) \rightarrow 0$, por lo que $f(\mathbf{x}_0 + \lambda\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)$ tiene el mismo signo que $\mathbf{u}'H_f(\mathbf{x}_0)\mathbf{u}$. Así:

- si $\mathbf{u}'H_f(\mathbf{x}_0)\mathbf{u}$ es definida positiva, $f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) > f(\mathbf{x}_0)$ y en \mathbf{x}_0 se tiene un mínimo.
- si $\mathbf{u}'H_f(\mathbf{x}_0)\mathbf{u}$ es definida negativa, $f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) < f(\mathbf{x}_0)$ y en \mathbf{x}_0 hay un máximo.
- si $\mathbf{u}'H_f(\mathbf{x}_0)\mathbf{u}$ es indefinida, $f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)$ cambia de signo y se tiene que no es máximo ni mínimo.
- si $\mathbf{u}'H_f(\mathbf{x}_0)\mathbf{u}$ se anula y la forma cuadrática es semidefinida positiva (resp. negativa) no hay criterio. No se puede decidir sin un estudio suplementario si \mathbf{x}_0 es un extremo o no. Se puede decir únicamente que si \mathbf{x}_0 es un extremo, es un mínimo (resp. máximo).

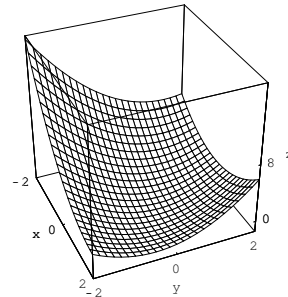
Ejemplo 3.2.2 Investigue los extremos de $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$ en \mathbb{R}^2 .

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y - 2 = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y - 1 = 0$, tiene como soluciones $x = 1$, $y = 0$. Analicemos lo que sucede en $(1, 0)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 0) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 0) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1, 0) = 1,$$

$$(d^2f)(1, 0) = 2dx^2 + 2dxdy + 2dy^2 = 2(dx^2 + dxdy + dy^2).$$

Hay que investigar el signo de $dx^2 + dxdy + dy^2$ para todos los valores de dx y dy , para eso la podemos considerar como una cuádrlica en dx ; su discriminante es $dy^2 - 4dy^2 = -3dy^2 < 0$, es decir el discriminante de la cuádrlica es negativo, esto quiere decir que la cuádrlica tiene signo constante, haciendo $dx = 0$, la cuádrlica se



reduce a $dy^2 > 0$, luego $d^2f(1, 0) = 2(dx^2 + dxdy + dy^2) > 0$ y f tiene un mínimo en $(1, 0)$.

Si analizamos el hessiano $H_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, se tiene $2 > 0$, $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} > 0$; $(1, 0)$ es un mínimo.

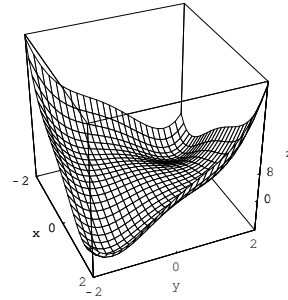
Ejemplo 3.2.3 Investigue los extremos de $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4x + 4y = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 + 4x - 4y = 0 \implies x^3 = -y^3 \implies x = -y \implies x^3 - 2x = 0 \implies x = 0, x = \pm\sqrt{2}, y = 0, y = \mp\sqrt{2}.$$

Hay que analizar los puntos $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4(3x^2 - 1), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4(1) = 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4(3y^2 - 1).$$

En $(0, 0)$, el segundo diferencial $d^2f(0, 0) = -4dx^2 + 8dxdy - 4dy^2 = -4(dx^2 - 2dxdy + dy^2) = -4(dx - dy)^2 \leq 0$, lo que significa que en $(0, 0)$ hay un máximo.



En $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $d^2f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 4(5dx^2 + dxdy + 5dy^2) = d^2f(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. El discriminante de $5dx^2 + dxdy + 5dy^2$ (tomando la cuádrica en dx) es $dy^2 - 100dy^2 < 0$ y como para $dx = 0$, la cuádrica vale $5dy^2 > 0$ y resulta que $d^2f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = d^2f(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ siempre es positiva y entonces alcanza mínimo en $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ y $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Observe que el hessiano $H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$ es singular y el criterio no se puede aplicar. Es necesario hacer el estudio suplementario que se hizo anteriormente en $(0, 0)$.

En $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ el hessiano es $\begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$ y por lo tanto se verifica que son mínimos.

Ejemplo 3.2.4 Investigue los extremos de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y + 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - x, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z - 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0. \text{ Así, } 2x - y + 1 = 0, 2y - x = 0, z - 1 = 0 \implies x = -\frac{2}{3}, y = -\frac{1}{3},$$

$z = 1$ y el segundo diferencial $d^2f(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1) = 2dx^2 + 2dy^2 + 2dz^2 - dx dz$. Para estudiar el signo completamos cuadrados; $d^2f(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1) = 2[(dx^2 - \frac{1}{2}dxdy + dy^2) + dz^2] = 2[(dx - \frac{1}{4}dy)^2 + \frac{7}{8}dy^2 + dz^2]$, que siempre es positiva por ser la suma de tres cuadrados, $d^2f(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1) > 0$ si $dx^2 + dy^2 + dz^2 \neq 0$ y f alcanza un mínimo en $(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1)$.

En este caso el hessiano $H_f(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $2 > 0$, $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$,

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 > 0$ y se tiene que $(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1)$ es un mínimo.

3.3 Extremos de una función de varias variables con restricciones

3.3.1 Multiplicadores de Lagrange

Sea $f(\mathbf{x})$ una función real de n variables, con p restricciones de la forma $g_j(\mathbf{x}) = 0$, $j = 1, \dots, p$. Para precisar la situación, se supone que las funciones f, g_j , ($j = 1, \dots, p$) están definidas en un conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ y se considera $S \subset U$ definido por $S = \{\mathbf{x} \in U / g_j(\mathbf{x}) = 0, j = 1, \dots, p\}$. Es un conjunto del tipo que intervienen en el estudio de las funciones implícitas. Se supone $S \neq \emptyset$. Nos interesamos en los valores que toma $f(\mathbf{x})$ sobre el conjunto S , es decir la restricción de f a S y en particular en los valores extremos que llamaremos extremos con restricciones.

En general, para establecer ciertas condiciones sobre la función f con restricciones, haremos uso del teorema de la función implícita. Consideremos el caso $n = 2$ y una función $f(x, y)$ bajo la restricción $g(x, y) = 0$; aplicando el teorema en (a, b) permite decir que existe una función φ de clase C^1 en un abierto de a , V_a tal que $\varphi(a) = b$ y tal que $\forall x \in V_a$ la restricción $g(x, y) = 0$ implica que $y = \varphi(x)$, siempre que $g_y(a, b) \neq 0$. Además $\varphi'(a) = -\frac{g_x(a, b)}{g_y(a, b)}$.

Si (a, b) es un extremo de f bajo la restricción $g(x, y) = 0$, entonces a es un extremo de la función $F(x) = f(x, \varphi(x))$. La condición necesaria $F'(a) = 0$ debe satisfacerse, es decir la condición se traduce a $f_x(a, \varphi(a)) + f_y(a, \varphi(a))\varphi'(a) = 0$, o sea $f_x(a, b) - f_y(a, b)\frac{g_x(a, b)}{g_y(a, b)} = 0$. En el caso en que $f_y(a, b) \neq 0$ se tiene $\frac{f_x(a, b)}{f_y(a, b)} = \frac{g_x(a, b)}{g_y(a, b)}$. El miembro de la izquierda de la igualdad, da la pendiente de la tangente a la curva de nivel de f que pasa por (a, b) (módulo el signo) y el miembro de la derecha (módulo el signo), da la pendiente de la tangente en (a, b) a la curva $g(x, y) = 0$, por lo que esas curvas son tangentes en (a, b) .

Por otro lado, si se define $\lambda = -\frac{f_y(a, b)}{g_y(a, b)}$ tenemos que:

$$f_x(a, b) + \lambda g_x(a, b) = 0, \quad f_y(a, b) + \lambda g_y(a, b) = 0. \quad (3.1)$$

En resumen, vemos que si (a, b) es un extremo de f con la restricción $g = 0$ (y si f y g son de clase C^k , $k \geq 1$ en un abierto de (a, b) con $g_y(a, b) \neq 0$), existe λ verificando las ecuaciones (3.1).

Teorema 3.3.1 Teorema de multiplicadores de Lagrange²

Consideremos $f(\mathbf{x})$, $g_j(\mathbf{x})$, $j = 1, \dots, p$, funciones reales de n variables ($n > p$) con derivadas parciales continuas en $\mathbf{a} \in U$ abierto, $U \subset \mathbb{R}^n$, tales que $g_j(\mathbf{a}) = 0$, $j = 1, \dots, p$ y tales que la matriz jacobiana de los g_j sea de rango p en \mathbf{a} , entonces si f tiene un extremo

²**Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)** Nace el 25 de Enero de 1736 en Turín, Sardinia-Piedmont (hoy Italia). Muere el 10 de Abril de 1813 en París, Francia. Lagrange, procedía de una ilustre familia parisiense, que tenía profundo arraigo en Cerdeña y algún rastro de noble linaje italiano. Pasó sus primeros años en Turín, su activa madurez en Berlín y sus últimos años en París, donde logró su mayor fama. En la escuela, sus intereses infantiles eran Homero y Virgilio y cuando una memoria de Halley le cayó en las manos, se alumbró la chispa matemática. A los dieciséis años de edad, fue nombrado profesor de matemáticas en la Escuela Real de Artillería de Turín. A los diecinueve años de edad, obtuvo fama resolviendo el así llamado problema isoperimétrico, que había desconcertado al mundo matemático durante medio siglo. En realidad Lagrange no sólo había resuelto un problema, también había inventado un nuevo método, el cálculo de variaciones, que sería el tema central de la obra de su vida. Este cálculo pertenece a la historia del mínimo esfuerzo, que comenzó en los espejos reflectores de Heron y continuó cuando Descartes reflexionó sobre la curiosa forma de sus lentes ovales. Lagrange podía demostrar que los postulados newtonianos de materia y movimiento, un tanto modificados, se adaptaban al amplio principio de economía de la naturaleza. El principio ha conducido a los resultados aún más fructíferos de Hamilton, Maxwell, en la obra de Einstein y en las últimas fases de la mecánica ondulatoria.

en \mathbf{a} con las restricciones $g_j(\mathbf{x}) = 0$, $j = 1, \dots, p$, existen $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tales que:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) + \sum_{j=1}^p \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.2)$$

Los números λ_j se llaman *multiplicadores de Lagrange* y la función $L(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^p \lambda_j g_j(\mathbf{x})$ es llamada *función de Lagrange* o *lagrangiano*. Con esta notación escribimos $\frac{\partial L}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = 0$, $i = 1, \dots, n$ o $\nabla L(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$. Los puntos \mathbf{a} que satisfacen esta condición, son puntos críticos bajo restricciones.

Demostración Consideramos que las funciones $f, g_j, j = 1, \dots, p$, de n variables ($n > p$) de clase C^1 en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} \in U$ y suponemos que $\frac{\partial(g_1, \dots, g_p)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(\mathbf{a})$ es de rango p y que f tiene un extremo en \mathbf{a} bajo las restricciones $g_j(\mathbf{x}) = 0$.

Sea $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n / g_j(\mathbf{x}) = 0, j = 1, \dots, p\}$. Por hipótesis $\mathbf{a} \in S$ y existe un abierto $V_{\mathbf{a}} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} \in V_{\mathbf{a}}$ tal que $\mathbf{x} \in S \cap V_{\mathbf{a}} \implies f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$ (se supone un máximo para fijar las ideas). Como la matriz jacobiana $\frac{\partial(g_1, \dots, g_p)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(\mathbf{a})$ es de rango p , se puede suponer que $\frac{\partial(g_1, \dots, g_p)}{\partial(x_1, \dots, x_p)}(\mathbf{a})$ es de rango p .

Por el teorema de la función implícita, existe un abierto $W_{\mathbf{a}}, \mathbf{a} \in W_{\mathbf{a}} \subset \mathbb{R}^n$, un abierto $V_{\bar{\mathbf{a}}}, \bar{\mathbf{a}} \in V_{\bar{\mathbf{a}}} \subset \mathbb{R}^{n-p}$, $\bar{\mathbf{a}} = (a_{p+1}, \dots, a_n)$ y funciones $\varphi_j(x_{p+1}, \dots, x_n)$ de clase C^1 sobre $V_{\bar{\mathbf{a}}}$ satisfaciendo $\varphi_j(\bar{\mathbf{a}}) = a_j, j = 1, \dots, p$, tales que:

$$S \cap W_{\mathbf{a}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n / x_j = \varphi_j(x_{p+1}, \dots, x_n), j = 1, \dots, p \text{ y } (x_{p+1}, \dots, x_n) \in V_{\bar{\mathbf{a}}}\}.$$

Además, sabemos que se puede escoger $W_{\mathbf{a}} \subset V_{\bar{\mathbf{a}}}$. Se define la función de clase C^1 :

$$h(x_{p+1}, \dots, x_n) = f(\varphi_1(x_{p+1}, \dots, x_n), \dots, \varphi_p(x_{p+1}, \dots, x_n), x_{p+1}, \dots, x_n),$$

sobre $V_{\bar{\mathbf{a}}}$ y $\forall \bar{\mathbf{x}} = (x_{p+1}, \dots, x_n) \in V_{\bar{\mathbf{a}}}$ se tiene que $\mathbf{x} = (\varphi_1(\bar{\mathbf{x}}), \dots, \varphi_p(\bar{\mathbf{x}}), \bar{\mathbf{x}}) \in V_{\mathbf{a}}$, por lo que $h(\bar{\mathbf{x}}) - h(\bar{\mathbf{a}}) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) \leq 0$. Así, la función h tiene un máximo (sin restricciones) y se tiene:

$$\frac{\partial h}{\partial x_k}(a_{p+1}, \dots, a_n) = 0, \quad k = p+1, \dots, n$$

y tomando en cuenta la definición de h obtenemos:

$$\frac{\partial h}{\partial x_k}(\bar{\mathbf{a}}) = \sum_{j=1}^p \frac{\partial f}{\partial y_j}(\mathbf{a}) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}(\bar{\mathbf{a}}) + \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a}) = 0, \quad k = p+1, \dots, n$$

dado que $\varphi_j(\bar{\mathbf{a}}) = a_j$, $j = 1, \dots, p$, lo que hace que las derivadas parciales de f se evalúen en \mathbf{a} . Estas ecuaciones se escriben en forma matricial:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_{p+1}}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right) = - \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(\mathbf{a}) \right) \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_p)}{\partial(x_{p+1}, \dots, x_n)}(\bar{\mathbf{a}}). \quad (3.3)$$

Por el teorema de la función implícita tenemos:

$$\frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_p)}{\partial(x_{p+1}, \dots, x_n)}(\bar{\mathbf{a}}) = - \left(\frac{\partial(g_1, \dots, g_p)}{\partial(x_1, \dots, x_p)}(\mathbf{a}) \right)^{-1} \frac{\partial(g_1, \dots, g_p)}{\partial(x_{p+1}, \dots, x_n)}(\mathbf{a})$$

y la ecuación (3.3) se escribe:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_{p+1}}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(\mathbf{a}) \right) \left(\frac{\partial(g_1, \dots, g_p)}{\partial(x_1, \dots, x_p)}(\mathbf{a}) \right)^{-1} \frac{\partial(g_1, \dots, g_p)}{\partial(x_{p+1}, \dots, x_n)}(\mathbf{a}).$$

Definiendo $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) = - \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(\mathbf{a}) \right) \left(\frac{\partial(g_1, \dots, g_p)}{\partial(x_1, \dots, x_p)}(\mathbf{a}) \right)^{-1}$, obtenemos:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_{p+1}}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right) = -(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \frac{\partial(g_1, \dots, g_p)}{\partial(x_{p+1}, \dots, x_n)}(\mathbf{a}).$$

Así, $\frac{\partial f}{\partial x_{p+i}}(\mathbf{a}) + \sum_{j=1}^p \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_{p+i}}(\mathbf{a}) = 0$, $i = 1, \dots, n-p$. Por otro lado, dada la definición de los λ_j , $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(\mathbf{a}) \right) = -(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \frac{\partial(g_1, \dots, g_p)}{\partial(x_1, \dots, x_p)}(\mathbf{a})$, se tiene el resultado, es decir

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) + \sum_{j=1}^p \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Observación

- Es necesario observar que los λ_j son números asociados al punto \mathbf{a} considerado. La matriz jacobiana de los g_j es de rango p , por lo que los valores λ_j se determinan de manera única.
- Si el rango de la matriz jacobiana de los g_j es inferior a p en \mathbf{a} , es decir si \mathbf{a} no es un punto regular de S , la existencia de los λ_j en (3.2), no es una condición necesaria para que \mathbf{a} sea un extremo bajo las restricciones $g_j(\mathbf{x}) = 0$.

Ejemplo 3.3.1 Sea la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ y las restricciones $g_1(x, y, z) = x + y + z - 3 = 0$ y $g_2(x, y, z) = z - 1 = 0$. La búsqueda de los puntos críticos se hace resolviendo el sistema:

$$\begin{aligned} g_1 = 0 & \iff x + y + z - 3 = 0 \\ g_2 = 0 & \iff z - 1 = 0 \\ f_x + \lambda_1(g_1)_x + \lambda_2(g_2)_x = 0 & \iff 2x + \lambda_1 = 0 \\ f_y + \lambda_1(g_1)_y + \lambda_2(g_2)_y = 0 & \iff 2y + \lambda_1 = 0 \\ f_z + \lambda_1(g_1)_z + \lambda_2(g_2)_z = 0 & \iff 2z + \lambda_1 + \lambda_2 = 0. \end{aligned}$$

La única solución es $x = y = z = 1$, $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 =$

0. Se verifica que la matriz jacobiana satisface

las hipótesis, pues $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es de rango 2. Una

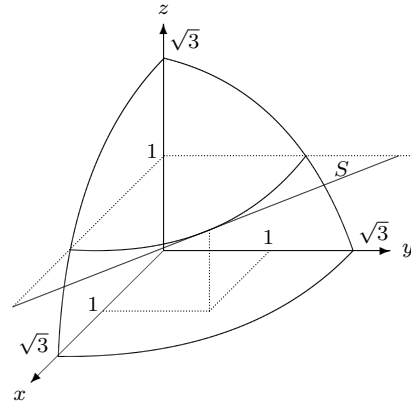
interpretación geométrica permite ver que $(1, 1, 1)$

es un mínimo, ya que $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ mide

la distancia el punto (x, y, z) al origen y $(1, 1, 1)$ es

el punto más cercano al origen, de la recta $(x, 2 -$

$x, 1)$.



Sea $L(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^p \lambda_j g_j(\mathbf{x})$, es interesante considerar los λ_j como variables:

$$L(\mathbf{x}, \Lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^p \lambda_j g_j(\mathbf{x})$$

y $\frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = g_j$, lo que permite escribir las condiciones $\nabla L(\mathbf{a}, \Lambda) = \mathbf{0}$. Sin embargo, puede

sucedir que \mathbf{a} al cual se le asocia Λ , sea un extremo sin que (\mathbf{a}, Λ) sea un extremo de L ,

a pesar de verificar $\nabla L(\mathbf{a}, \Lambda) = \mathbf{0}$.

El ejemplo 3.3.1 muestra que $(\mathbf{a}, \Lambda) = (1, 1, 1, -2, 0)$ no es un extremo de L . En efecto,

$$L(1 + \Delta x, 1, 1, -2 + \Delta \lambda_1, 0) - L(1, 1, 1, -2, 0) = (\Delta x)^2 + \Delta x \Delta \lambda_1$$

y esta expresión permite tanto valor positivos como negativos.

Ejemplo 3.3.2 Consideremos $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ y las restricciones $g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy - 4x - 4y + 2 = 0$, $g_2(x, y, z) = z - 1 = 0$. La restricción $g_1(x, y, z) = 0$ se escribe $\left(\frac{x+y-2}{\sqrt{2}}\right)^2 + z^2 = 1$, es la ecuación de un cilindro de radio 1, cuyo eje pasa por $(2, 0, 0)$ y $(0, 2, 0)$. La intersección de las superficies es el conjunto de puntos para los cuales $z = 1$, $x + y - 2 = 0$. Es la recta que pasa por los puntos $(2, 0, 1)$ y $(0, 2, 1)$.

Así el conjunto S que corresponde a esta situación es la misma del ejemplo 3.3.1. La función f tiene un sólo extremo bajo las restricciones $g_j(x, y, z) = 0$, $j = 1, 2$ hay un mínimo en $(1, 1, 1)$. Y sin embargo no existen λ_1, λ_2 tales que satisfagan (3.2) en $(1, 1, 1)$.

En efecto:

$$\nabla f(1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_1(1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_2(1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(x, y, z)}(1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

pero esta matriz es de rango 1. Esto demuestra que si el rango de la matriz jacobiana de los g_j no es maximal, (3.2) no es necesaria para tener un extremo con restricciones. En otras palabras, si el rango de la matriz jacobiana de los g_j no es maximal en a , puede ser que f tenga un extremo en a sin que la condición (3.2) se satisfaga.

Para la búsqueda de los extremos se procede en dos etapas.

1. Se buscan todos los puntos que pueden ser extremos:

- a) resolviendo la desigualdad $\text{rang} \frac{\partial(g_1, \dots, g_p)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(\mathbf{x}) < p$, con $x \in U$ y $g_j(\mathbf{x}) = 0$, $j = 1, \dots, p$.
- b) resolviendo las ecuaciones $\text{rang} \frac{\partial(g_1, \dots, g_p)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(\mathbf{x}) = p$, con el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} g_j(\mathbf{x}) = 0, & j = 1, \dots, p \\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_i}(\mathbf{x}) + \dots + \lambda_n \frac{\partial g_p}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = 0, & i = 1, \dots, n, \end{cases} \quad (3.4)$$

con $\mathbf{x} \in U$.

Este sistema tiene $n+p$ variables y $n+p$ ecuaciones y a cada solución $(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_p)$ tal que la matriz jacobiana de los g_j sea de rango p , corresponde un punto crítico $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$.

2. Se examina cada uno de estos puntos críticos para determinar si es un extremo o no. En caso afirmativo, se precisa si es un máximo o un mínimo.

La búsqueda de los puntos que satisfacen 1.a) o 1.b) se puede realizar de una sola vez, resolviendo el sistema:

$$g_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = 1, \dots, p,$$

$$\lambda_0 \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_i}(\mathbf{x}) + \dots + \lambda_p \frac{\partial g_p}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad \mathbf{x} \in U.$$

En efecto, si este sistema se satisface con $\lambda_0 = 0$, entonces las p líneas de $\frac{\partial(g_1, \dots, g_p)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(\mathbf{x})$ son linealmente dependientes (si unos de los λ_j al menos es no nulo) y se está en el caso 1.a).

Si $\lambda_0 \neq 0$, se puede considerar $\lambda_0 = 1$ y se satisface el sistema (3.4), es decir se está en el caso 1.b).

Teorema 3.3.2 Sean $f, h_j, j = 1, \dots, p$ funciones reales de clase C^1 sobre $D \subset \mathbb{R}^{n+m}$ abierto y sean $t_j, j = 1, \dots, p, x_i, i = 1, \dots, n$, funciones definidas sobre un abierto $E \subset \mathbb{R}^m$, las funciones x_i se suponen derivables. Si las condiciones siguientes se satisfacen para $\mathbf{y} \in E$:

- i) $(\mathbf{x}(\mathbf{y}), \mathbf{y}) \in D$
- ii) $h_j(\mathbf{x}(\mathbf{y}), \mathbf{y}) = 0, \quad j = 1, \dots, p$
- iii) $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}(\mathbf{y}), \mathbf{y}) + \sum_{j=1}^p t_j(\mathbf{y}) \frac{\partial h_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}(\mathbf{y}), \mathbf{y}) = 0, \quad i = 1, \dots, n,$

la función Φ definida sobre E por $\Phi(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}(\mathbf{y}), \mathbf{y})$ es diferenciable y se tiene que:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_k}(\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^p t_j(\mathbf{y}) \frac{\partial h_j}{\partial y_k}(\mathbf{x}(\mathbf{y}), \mathbf{y}) + \frac{\partial f}{\partial y_k}(\mathbf{x}(\mathbf{y}), \mathbf{y}), \quad k = 1, \dots, m, \quad \mathbf{y} \in E. \quad (3.5)$$

Demostración Considerando las hipótesis sobre f y sobre x , la función Φ es diferenciable sobre E . Aplicando la regla de la cadena a $f(\mathbf{x}(\mathbf{y}), \mathbf{y})$ se tiene:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_k}(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}(\mathbf{y}), \mathbf{y}) \frac{\partial x_i}{\partial y_k}(\mathbf{y}) + \frac{\partial f}{\partial y_k}(\mathbf{x}(\mathbf{y}), \mathbf{y}), \quad k = 1, \dots, m.$$

Tomando en cuenta iii) se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial y_k}(\mathbf{y}) &= - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p t_j(\mathbf{y}) \frac{\partial h_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}(\mathbf{y}), \mathbf{y}) \frac{\partial x_i}{\partial y_k}(\mathbf{y}) + \frac{\partial f}{\partial y_k}(\mathbf{x}(\mathbf{y}), \mathbf{y}) \\ &= - \sum_{j=1}^p t_j(\mathbf{y}) \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial h_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}(\mathbf{y}), \mathbf{y}) \frac{\partial x_i}{\partial y_k}(\mathbf{y}) \right) + \frac{\partial f}{\partial y_k}(\mathbf{x}(\mathbf{y}), \mathbf{y}), \quad k = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Si se deriva ii) con respecto a y_k se obtiene $\sum_{i=1}^n \frac{\partial h_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}(\mathbf{y}), \mathbf{y}) \frac{\partial x_i}{\partial y_k}(\mathbf{y}) = -\frac{\partial h_j}{\partial y_k}(\mathbf{x}(\mathbf{y}), \mathbf{y})$ y reemplazando la fórmula anterior en la ecuación de $\frac{\partial \Phi}{\partial y_k}$, se tiene la relación buscada en el teorema.

Nota En el caso en que $h_k(\mathbf{x}(\mathbf{y}), \mathbf{y})$ es de la forma $y_k - g_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ y donde los parámetros y_k no aparecen explícitamente en las fórmulas de f , g_k y h_j , $j \neq k$, se tiene $\frac{\partial f}{\partial y_k} = 0$, $\frac{\partial h_j}{\partial y_k} = \delta_{jk}$ y además $\frac{\partial \Phi}{\partial y_k}(\mathbf{y}) = t_k(\mathbf{y})$.

Corolario 3.3.1 Sean $f, h_j, j = 1, \dots, p$ funciones de clase C^1 en un abierto $D \subset \mathbb{R}^{n+m}$ y sean $t_j, j = 1, \dots, p, x_i, i = 1, \dots, n$, funciones definidas sobre un abierto $E \subset \mathbb{R}^m$, las funciones x_i se suponen derivables en E , entonces si las condiciones i), ii), iii) del teorema se verifican y si para un índice k se tiene $h_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = y_k - g_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ y si las funciones $f, g_k, h_j, j \neq k$ no dependen de y_k (es decir si $\frac{\partial f}{\partial y_k} = \frac{\partial g_k}{\partial y_k} = \frac{\partial h_j}{\partial y_k} = 0, j \neq k$), entonces $\frac{\partial \Phi}{\partial y_k}(\mathbf{y}) = t_k(\mathbf{y})$.

Teorema 3.3.3 Sean $f, h_j, j = 1, \dots, p$, funciones de clase C^2 sobre $D \subset \mathbb{R}^{n+p}$ abierto, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in D, \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tales que:

$$\begin{aligned} h_j(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= 0, & j &= 1, \dots, p, \\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \sum_{j=1}^p \lambda_j \frac{\partial h_j}{\partial x_i}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= 0, & i &= 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Sea $L = f + \lambda_1 h_1 + \dots + \lambda_p h_p$ el lagrangiano considerado como función de $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in D$ y supongamos que el determinante $H(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ es no nulo, donde la matriz H está definida por

($p \leq n$):

$$H = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial h_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_p}{\partial x_n} \\ \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial h_p}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_n \partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial h_p}{\partial x_n} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_n^2} \end{pmatrix},$$

entonces existe un vecindario $W_{\mathbf{b}}$ de \mathbf{b} y funciones únicas t_j , $j = 1, \dots, p$, x_i , $i = 1, \dots, n$ de clase C^1 en $W_{\mathbf{b}}$ tales que, para todo $\mathbf{y} \in W_{\mathbf{b}}$ se tiene:

- i) $(\mathbf{x}(\mathbf{y}), \mathbf{y}) \in D$
- ii) $h_j(\mathbf{x}(\mathbf{y}), \mathbf{y}) = 0$, $j = 1, \dots, p$
- iii) $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}(\mathbf{y}), \mathbf{y}) + \sum_{j=1}^p t_j(\mathbf{y}) \frac{\partial h_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}(\mathbf{y}), \mathbf{y}) = 0$, $i = 1, \dots, n$

y tales que el rango de la matriz jacobiana de las funciones h_j en $(\mathbf{x}(\mathbf{y}), \mathbf{y})$ es igual a p .

Demostración Notemos que la condición $\det H(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \neq 0$ implica que las p primeras filas de $H(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ son linealmente independientes y en consecuencia si se toma en cuenta las hipótesis (3.6) con $p < n$, el punto \mathbf{a} es un punto crítico de la función $f(\mathbf{x}, \mathbf{b})$ bajo las restricciones $h_j(\mathbf{x}, \mathbf{b}) = 0$, $j = 1, \dots, p$, donde \mathbf{b} es un vector de parámetros fijos.

La demostración del teorema sale inmediatamente aplicando el Teorema de la función implícita a las funciones u_j , $j = 1, \dots, n + p$ definidas por:

$$u_j(\mathbf{t}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = h_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad j = 1, \dots, p,$$

$$u_{p+i}(\mathbf{t}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \sum_{j=1}^p t_j \frac{\partial h_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad i = 1, \dots, n.$$

Las condiciones (3.6) se escriben $u_j(\lambda, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$, $j = 1, \dots, n + p$ y se verifica fácilmente que la matriz $\frac{\partial(u_1, \dots, u_{n+p})}{\partial(t_1, \dots, t_p, x_1, \dots, x_n)} = H$ es regular en $(\lambda, \mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Como las funciones u_j son de clase C^1 en un vecindario de $(\lambda, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ se tiene por el Teorema de la función implícita que existe una bola abierta $W_{\mathbf{b}}$ de centro \mathbf{b} , así como

funciones t_j , $j = 1, \dots, p$, de clase C^1 definidas de manera única, tomando valores en un vecindario de λ , así como funciones x_i de clase C^1 sobre $W_{\mathbf{b}}$ definidas de manera única y tomando valor en un vecindario de \mathbf{a} , tales que $(\mathbf{t}(\mathbf{y}), \mathbf{x}(\mathbf{y}), \mathbf{y}) \in D$ y que $u_j(\mathbf{t}(\mathbf{y}), \mathbf{x}(\mathbf{y}), \mathbf{y}) = 0$, $j = 1, \dots, n + p$, $\forall \mathbf{y} \in W_{\mathbf{b}}$.

Tomando en cuenta la manera en que los u_j se han definido, se concluye que las condiciones i), ii) y iii) son satisfechas por las funciones t_j y x_i . Como las funciones en la matriz H son continuas por hipótesis, se puede escoger $W_{\mathbf{b}}$ de modo que el rango de H sea igual a p , $\forall(\mathbf{x}(\mathbf{y}))$, con $\mathbf{y} \in W_{\mathbf{b}}$.

Observaciones

- La fórmula (3.5) del Teorema 3.3.2 es válida para todo $\mathbf{y} \in W_{\mathbf{b}}$ y si $p < n$ el punto $\mathbf{x}(\mathbf{y})$ es un punto crítico de la función $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ bajo las restricciones $h_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$, $j = 1, \dots, p$, donde los parámetros que componen \mathbf{y} son fijos (en $W_{\mathbf{b}}$).
- Si \mathbf{a} es un punto crítico para $\mathbf{y} = \mathbf{b}$, y si H es regular en (\mathbf{a}, \mathbf{b}) el Teorema 3.3.3 demuestra que si se hace variar ligeramente los parámetros del modelo a partir de \mathbf{b} , entonces el punto crítico se desplaza sobre un camino continuo y derivable, verificando las condiciones i), ii) y iii) del Teorema 3.3.3.
- En las condiciones ii) y iii) de los Teoremas 3.3.2 y 3.3.3, utilizamos la notación $t_j(\mathbf{y})$ para designar los multiplicadores de Lagrange en tanto que funciones de los parámetros \mathbf{y} , dando la notación tradicional λ_j para los valores tomados por esta función en \mathbf{b} (i.e. $\lambda_j = t_j(\mathbf{b})$, \mathbf{a} es un punto crítico).
- En las próximas secciones se enunciarán las condiciones clásicas de segundo orden que son suficientes para que el punto crítico \mathbf{a} de $f(\mathbf{x}, \mathbf{b})$ bajo las restricciones $h_j(\mathbf{x}, \mathbf{b}) = 0$, $j = 1, \dots, p$, sea un máximo (o un mínimo) y que implican que $\det H(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \neq 0$. Se ve fácilmente, por continuidad, que si estas condiciones se satisfacen en (\mathbf{a}, \mathbf{b}) , también se satisfacen en un vecindario de ese punto. Así, si el punto \mathbf{a} satisface las condiciones necesarias de primer orden del Teorema 3.3.1 (es decir, si \mathbf{a} es un candidato a ser un

extremo de $f(\mathbf{x}, \mathbf{b})$ bajo las restricciones $h_j(\mathbf{x}, \mathbf{b})$, $j = 1, \dots, p$ y si las condiciones suficientes de segundo orden se verifican, entonces no solamente \mathbf{a} es un máximo (o un mínimo) de f bajo las restricciones $g_j(\mathbf{x}) = g_j(\mathbf{a})$, sino que para todo \mathbf{y} próximo a \mathbf{b} , la función f tiene un máximo (o un mínimo) en $\mathbf{x}(\mathbf{y})$ bajo las restricciones $h_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$, $j = 1, \dots, p$. El gráfico de la función $\mathbf{x}(\mathbf{y})$, que es de clase C^1 es el camino de crestas (o el fondo del valle).

- La relación (3.5) del Teorema 3.3.2 es llamada por los economistas por Teorema de la envolvente, bajo reserva que se aplique a puntos que son efectivamente extremos. La envolvente corresponde al camino de crestas (o el fondo del valle).

Observemos que en el caso en que las variables \mathbf{x} no están sometidas a restricciones, la relación se escribe $\frac{\partial \Phi}{\partial y_k}(\mathbf{y}) = \frac{\partial f}{\partial y_k}(\mathbf{x}(\mathbf{y}), \mathbf{y})$, $k = 1, \dots, n$.

- La matriz H , que tiene un bloque de ceros y cuyas primeras filas son iguales a las primeras columnas, sale de la familia de matrices hessianas orladas que aparecen en el estudio de las condiciones de segundo orden.

3.3.2 Condiciones de segundo orden

Teorema 3.3.4 Sean f, g_j , $j = 1, \dots, p$, aplicaciones de U ($\subset \mathbb{R}^n$ abierto) en \mathbb{R} , $\mathbf{a} \in U$, $p < n$, de clase C^2 en una bola abierta $B_{\mathbf{a}} \subset U$ tal que $g_j(\mathbf{a}) = 0$, $j = 1, \dots, p$. Suponemos que:

- el rango de la matriz jacobiana de los g_j en \mathbf{a} es igual a p
- existen $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tales que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) + \sum_{j=1}^p \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = 0$, $i = 1, \dots, n$.

Sea $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n / g_j(\mathbf{x}) = 0, j = 1, \dots, p\}$ y sea $L(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^p \lambda_j g_j(\mathbf{x})$; así para todo $\mathbf{x} \in S$, se tiene $L(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ y en particular \mathbf{a} es un extremo de f bajo las restricciones $g_j(\mathbf{x}) = 0$ si y sólo si es un extremo de L bajo las mismas restricciones.

Demostración Vamos a razonar sobre $L(\mathbf{x})$ en vez de $f(\mathbf{x})$, pues si \mathbf{a} es un extremo bajo las restricciones $g_j(\mathbf{x}) = 0$, se tiene de ii) que $\nabla L(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$, (en tanto que en general

$\nabla f(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$ lo que facilita el estudio del signo de $L(\mathbf{x}) - L(\mathbf{a})$. Vamos a estudiar el signo de $L(\mathbf{x}) - L(\mathbf{a})$ utilizando el desarrollo de Taylor de orden 2 de $L(\mathbf{x})$ en una bola abierta de \mathbf{a} . Tomando en cuenta la condición de primer orden:

$$L(\mathbf{x}) - L(\mathbf{a}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial x_k \partial x_r}(\mathbf{a})(x_k - a_k)(x_r - a_r) + \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2 \varepsilon'(\mathbf{x} - \mathbf{a}), \quad (3.7)$$

con $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \varepsilon'(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = 0$. Vamos a estudiar el miembro de la derecha de esta igualdad tomando en cuenta el hecho que $\mathbf{x} \in S$. Dadas las hipótesis, se puede aplicar el teorema de la función implícita en un abierto de \mathbf{a} . Para simplificar la escritura, se precisa la hipótesis suponiendo que $\text{rang} \frac{\partial(g_1, \dots, g_p)}{\partial(x_1, \dots, x_p)}(\mathbf{a}) = p$. El teorema se enuncia así.

Existe un abierto $V_{\mathbf{a}} \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} \in V_{\mathbf{a}}$, un abierto $V_{\bar{\mathbf{a}}}$ de $\bar{\mathbf{a}} = (a_{p+1}, \dots, a_n) \in V_{\bar{\mathbf{a}}} \subset \mathbb{R}^{n-p}$ y funciones únicas $\varphi_i(x_{p+1}, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, p$ con derivadas parciales en $V_{\bar{\mathbf{a}}}$ tales que

$$V_{\mathbf{a}} \cap S = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) / (x_{p+1}, \dots, x_n) \in V_{\bar{\mathbf{a}}}, \varphi_i(x_{p+1}, \dots, x_n) = x_i, \quad i = 1, \dots, p\}.$$

Si se escribe $\bar{\mathbf{x}} = (x_{p+1}, \dots, x_n)$, se tiene entonces $\forall \mathbf{x} \in V_{\mathbf{a}} \cap S$, $\bar{\mathbf{x}} \in V_{\bar{\mathbf{a}}}$ y

$$x_i - a_i = \varphi_i(\bar{\mathbf{x}}) - \varphi_i(\bar{\mathbf{a}}) = \sum_{r=p+1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_r}(\bar{\mathbf{a}})(x_r - a_r) + \|\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{a}}\| \varepsilon_i(\bar{\mathbf{x}}), \quad (3.8)$$

con $\lim_{\bar{\mathbf{x}} \rightarrow \bar{\mathbf{a}}} \varepsilon_i(\bar{\mathbf{x}}) = 0$, $i = 1, \dots, p$, pues φ_i es diferenciable en $\bar{\mathbf{a}}$. Se define:

$$h_i = x_i - a_i, \quad i = p+1, \dots, n, \quad (3.9)$$

$$h_i = \sum_{r=p+1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_r}(\bar{\mathbf{a}}) h_r, \quad i = 1, \dots, p.$$

Estas relaciones se escriben respectivamente:

$$\bar{\mathbf{h}} = \bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{a}}, \quad (3.10)$$

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{pmatrix} = \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_p)}{\partial(x_{p+1}, \dots, x_n)}(\bar{\mathbf{a}}) \begin{pmatrix} h_{p+1} \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}.$$

Por el teorema de la función implícita, la relación (3.10) se escribe:

$$\frac{\partial(g_1, \dots, g_p)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(\mathbf{a}) \mathbf{h} = \mathbf{0}. \quad (3.11)$$

En efecto, como $\frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_p)}{\partial(x_{p+1}, \dots, x_n)}(\bar{\mathbf{a}}) = - \left(\frac{\partial(g_1, \dots, g_p)}{\partial(x_1, \dots, x_p)}(\mathbf{a}) \right)^{-1} \frac{\partial(g_1, \dots, g_p)}{\partial(x_{p+1}, \dots, x_n)}(\mathbf{a})$ se tiene entonces:

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{pmatrix} = \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_p)}{\partial(x_{p+1}, \dots, x_n)}(\bar{\mathbf{a}}) \begin{pmatrix} h_{p+1} \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = - \left(\frac{\partial(g_1, \dots, g_p)}{\partial(x_1, \dots, x_p)}(\mathbf{a}) \right)^{-1} \frac{\partial(g_1, \dots, g_p)}{\partial(x_{p+1}, \dots, x_n)}(\mathbf{a}) \begin{pmatrix} h_{p+1} \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix},$$

por lo que $\frac{\partial(g_1, \dots, g_p)}{\partial(x_1, \dots, x_p)}(\mathbf{a}) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{pmatrix} + \frac{\partial(g_1, \dots, g_p)}{\partial(x_{p+1}, \dots, x_n)}(\mathbf{a}) \begin{pmatrix} h_{p+1} \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = 0$ y se escribe bajo la

forma:

$$\frac{\partial(g_1, \dots, g_p)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(\mathbf{a}) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Así, por las relaciones (3.9) se hace corresponder a todo $\mathbf{x} \in V_{\mathbf{a}} \cap S$ un elemento $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ único, que satisface (3.11) y para el cual $\bar{\mathbf{h}} + \bar{\mathbf{a}} \in V_{\bar{\mathbf{a}}}$. Además, todo $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ que satisface (3.11) y para el cual $\bar{\mathbf{h}} + \bar{\mathbf{a}} \in V_{\bar{\mathbf{a}}}$, le corresponde por las relaciones (3.9) un elemento $\mathbf{x} \in V_{\mathbf{a}} \cap S$; este elemento está definido por $\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{h}} + \bar{\mathbf{a}}$ y $x_i = \varphi_i(\bar{\mathbf{h}} + \bar{\mathbf{a}})$, $i = 1, \dots, p$.

Para \mathbf{h} correspondiente a \mathbf{x} , se tiene evidentemente $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \mathbf{h} = \mathbf{0}$ y la relación (3.8) se escribe, sirviéndose de (3.9):

$$x_i - a_i = h_i + \|\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{a}}\| \varepsilon_i(\bar{\mathbf{x}}), \quad i = 1, \dots, p, \quad \text{con} \quad \lim_{\bar{\mathbf{x}} \rightarrow \bar{\mathbf{a}}} \varepsilon_i(\bar{\mathbf{x}}) = 0. \quad (3.12)$$

Para $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$ (en este caso $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$), definamos $\rho_i(\mathbf{x}) = \varepsilon_i(\bar{\mathbf{x}}) \frac{\|\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{a}}\|}{\|\mathbf{h}\|}$, $i = 1, \dots, p$ y para $\mathbf{x} = \mathbf{a}$, definamos $\rho_i(\mathbf{a}) = 0$, entonces $\varepsilon_i(\bar{\mathbf{x}}) \|\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{a}}\| = \rho_i(\mathbf{x}) \|\mathbf{h}\|$.

Como $\|\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{a}}\| = \|\bar{\mathbf{h}}\| \leq \|\mathbf{h}\|$, se tiene $|\rho_i(\mathbf{x})| < |\varepsilon_i(\bar{\mathbf{x}})|$ y como $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{a}}$, se deduce $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \rho_i(\mathbf{x}) = 0$. La igualdad (3.12), se escribe entonces (para $\mathbf{x} \in V_{\mathbf{a}} \cap S$):

$$x_i - a_i = h_i + \|\mathbf{h}\| \rho_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, \dots, p. \quad (3.13)$$

Definamos además $\rho_i(\mathbf{x}) = 0$, $i = p+1, \dots, n$ y $\rho(\mathbf{x}) = (\rho_1(\mathbf{x}), \dots, \rho_n(\mathbf{x}))$; se tiene entonces tomando en cuenta la igualdad (3.9) (es decir de $x_i - a_i = h_i$, $i = p+1, \dots, n$), $\mathbf{x} - \mathbf{a} = \mathbf{h} + \rho(\mathbf{x})\|\mathbf{h}\|$, de donde $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leq \|\mathbf{h}\| [1 + \|\rho(\mathbf{x})\|]$, $\forall \mathbf{x} \in V_{\mathbf{a}} \cap S$, con $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \rho(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Ahora utilizando las ecuaciones (3.13) que son válidas también para $i = p+1, \dots, n$, con $\rho_i(\mathbf{x}) = 0$, se obtiene:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{L}}{\partial x_k \partial x_r}(\mathbf{a})(x_k - a_k)(x_r - a_r) = \\ & \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{L}}{\partial x_k \partial x_r}(\mathbf{a})(h_k + \rho_k(\mathbf{x})\|\mathbf{h}\|)(h_r + \rho_r(\mathbf{x})\|\mathbf{h}\|) = \\ & \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{L}}{\partial x_k \partial x_r}(\mathbf{a})h_k h_r + \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{L}}{\partial x_k \partial x_r}(\mathbf{a})h_k \rho_r(\mathbf{x})\|\mathbf{h}\| + \\ & \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{L}}{\partial x_k \partial x_r}(\mathbf{a})\rho_k(\mathbf{x})h_r\|\mathbf{h}\| + \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{L}}{\partial x_k \partial x_r}(\mathbf{a})\rho_k(\mathbf{x})\rho_r(\mathbf{x})\|\mathbf{h}\|^2. \end{aligned}$$

Se puede escribir $\sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{L}}{\partial x_k \partial x_r}(\mathbf{a})\rho_k(\mathbf{x})\rho_r(\mathbf{x})\|\mathbf{h}\|^2 = \alpha(\mathbf{x})\|\mathbf{h}\|^2$, con $\alpha(\mathbf{x}) \rightarrow 0$, cuando $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$. Se tiene además:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{L}}{\partial x_k \partial x_r}(\mathbf{a})h_k \rho_k(\mathbf{x})\|\mathbf{h}\| + \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{L}}{\partial x_k \partial x_r}(\mathbf{a})\rho_k(\mathbf{x})h_r\|\mathbf{h}\| = \\ & 2\|\mathbf{h}\| \sum_{k=1}^n \left(\sum_{r=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{L}}{\partial x_k \partial x_r}(\mathbf{a})\rho_r(\mathbf{x}) \right) h_k = \|\mathbf{h}\| \sum_{k=1}^n \beta_k(\mathbf{x})h_k, \end{aligned}$$

donde $\beta_k(\mathbf{x}) = 2 \sum_{r=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{L}}{\partial x_k \partial x_r}(\mathbf{a})\rho_r(\mathbf{x}) \rightarrow 0$, cuando $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$. Se tiene por la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$\left(\sum_{k=1}^n \beta_k(\mathbf{x})h_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n \beta_k^2(\mathbf{x}) \right) \sum_{k=1}^n h_k^2,$$

con $\sum_{k=1}^n \beta_k(\mathbf{x})h_k \rightarrow 0$, cuando $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$. Esto permite escribir $\sum_{k=1}^n \beta_k(\mathbf{x})h_k = \Gamma(\mathbf{x})\|\mathbf{h}\|$,

con $\Gamma(\mathbf{x}) \rightarrow 0$, cuando $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$, de donde $2\|\mathbf{h}\| \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{L}}{\partial x_k \partial x_r}(\mathbf{a})\rho_r(\mathbf{x})h_k = \|\mathbf{h}\|^2 \Gamma(\mathbf{x})$.

Tomando en cuenta estos diversos desarrollos, se tiene:

$$\sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{L}}{\partial x_k \partial x_r}(\mathbf{a})(x_k - a_k)(x_r - a_r) = \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{L}}{\partial x_k \partial x_r}(\mathbf{a})h_k h_r + \Gamma(\mathbf{x})\|\mathbf{h}\|^2 + \alpha(\mathbf{x})\|\mathbf{h}\|^2.$$

Se define $\Psi(\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{x}) + \Gamma(\mathbf{x})$ y tenemos:

$$\sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{L}}{\partial x_k \partial x_r}(\mathbf{a})(x_k - a_k)(x_r - a_r) = \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{L}}{\partial x_k \partial x_r}(\mathbf{a})h_k h_r + \|\mathbf{h}\|^2 \Psi(\mathbf{x}).$$

Así podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema 3.3.5 Sean $f, g_j, j = 1, \dots, p$ aplicaciones de $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto sobre \mathbb{R} , $\mathbf{a} \in U$, $p < n$, de clase C^2 en una bola abierta $B_{\mathbf{a}} \subset U$ tal que $g_j(\mathbf{a}) = 0, j = 1, \dots, p$ y tales que las condiciones siguientes se verifican:

- i) $\text{rang} \frac{\partial(g_1, \dots, g_p)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(\mathbf{a}) = p$,
- ii) existen $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tales que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) + \sum_{j=1}^p \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = 0, i = 1, \dots, n$.

Sea $L(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^p \lambda_j g_j(\mathbf{x})$, entonces se tiene:

- a) Si f tiene un máximo bajo las restricciones $g_j(\mathbf{x}) = 0, j = 1, \dots, p$, se satisface:

$$\sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial x_k \partial x_r}(\mathbf{a}) h_k h_r \leq 0, \quad \forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n, \quad (3.14)$$

con la condición $\frac{\partial(g_1, \dots, g_p)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(\mathbf{a}) \mathbf{h} = \mathbf{0}$.

- b) Si la condición siguiente se satisface:

$$\sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial x_k \partial x_r}(\mathbf{a}) h_k h_r < 0, \quad \forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{h} \neq \mathbf{0} \quad (3.15)$$

\mathbf{h} satisfaciendo la condición (3.11), entonces \mathbf{a} es un máximo local estricto de la función f con las restricciones $g_j(\mathbf{x}) = 0, j = 1, \dots, p$.

Estos resultados son válidos, con las desigualdades invertidas en el caso de un mínimo.

Demostración

- a) Si $f(\mathbf{x})$ tiene un máximo en \mathbf{a} bajo las restricciones $g_j(\mathbf{x}) = 0$, existe un abierto $W_{\mathbf{a}}$, $\mathbf{a} \in W_{\mathbf{a}}$ tal que si $\mathbf{x} \in W_{\mathbf{a}} \cap S \implies f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) \leq 0$.

Se puede suponer $W_{\mathbf{a}} = V_{\mathbf{a}}$, donde $V_{\mathbf{a}}$ es el abierto cuya existencia se mostró anteriormente gracias al teorema de la función implícita (si $W_{\mathbf{a}} \neq V_{\mathbf{a}}$, se reemplaza $W_{\mathbf{a}}$ y $V_{\mathbf{a}}$, con $W_{\mathbf{a}} \cap V_{\mathbf{a}}$).

Sea $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ que satisface (3.11), se puede encontrar $v > 0$ tal que $\bar{\mathbf{a}} + t\bar{\mathbf{h}} \in V_{\bar{\mathbf{a}}}, 0 < t < v$. Como $t\bar{\mathbf{h}}$ satisface la condición (3.11), le corresponde un elemento $\mathbf{x}(t) \in V_{\bar{\mathbf{a}}} \cap S$ único, con

$\bar{\mathbf{x}}(t) = \bar{\mathbf{a}} + t\bar{\mathbf{h}}$ y $x_i(t) = \varphi_i(\bar{\mathbf{a}} + t\bar{\mathbf{h}})$, $i = 1, \dots, p$. Se tiene entonces que $\lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{x}(t) = \mathbf{a}$ y

$$f(\mathbf{x}(t)) - f(\mathbf{a}) = L(\mathbf{x}(t)) - L(\mathbf{a}) \leq 0, \quad t \in]0, v[.$$

La fórmula (3.7) permite escribir:

$$\sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial x_k \partial x_r}(\mathbf{a})(x_k(t) - a_k)(x_r(t) - a_r) + 2\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{a}\|^2 \varepsilon(\mathbf{x}(t) - \mathbf{a}) \leq 0, \quad (3.16)$$

con $0 < t < v$, $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(\mathbf{x}(t) - \mathbf{a}) = 0$. Además:

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{a}\| \leq \left[1 + \|\rho(\mathbf{x}(t))\|\right] \|t\mathbf{h}\|, \quad \text{con} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \rho(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{0}.$$

Se deduce que:

$$2|\varepsilon(\mathbf{x}(t) - \mathbf{a})| \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{a}\|^2 \leq 2|\varepsilon(\mathbf{x}(t) - \mathbf{a})| \left(1 + \|\rho(\mathbf{x}(t))\|\right)^2 t^2 \|\mathbf{h}\|^2$$

y como $\lim_{t \rightarrow 0} 2\varepsilon(\mathbf{x}(t) - \mathbf{a}) \left(1 + \|\rho(\mathbf{x}(t))\|\right) = 0$, se puede escribir:

$$\left[2\varepsilon(\mathbf{x}(t) - \mathbf{a})\right] \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{a}\|^2 = \gamma(t)t^2 \|\mathbf{h}\|^2, \quad \text{con} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \gamma(t) = 0.$$

Ahora, para $0 < t < v$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial x_k \partial x_r}(\mathbf{a})(x_k(t) - a_k)(x_r(t) - a_r) &= \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial x_k \partial x_r}(\mathbf{a})t^2 h_k h_r + \Psi(\mathbf{x}(t)) \|t\mathbf{h}\|^2 = \\ t^2 \left(\sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial x_k \partial x_r}(\mathbf{a})h_k h_r + \Psi(\mathbf{x}(t)) \|\mathbf{h}\|^2 \right) \end{aligned}$$

y tomando en cuenta (3.16) se tiene:

$$t^2 \left(\sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial x_k \partial x_r}(\mathbf{a})h_k h_r + (\Psi(\mathbf{x}(t)) + \gamma(t)) \|\mathbf{h}\|^2 \right) \leq 0.$$

Como esta desigualdad es válida $\forall t \in]0, v[$ y como $\lim_{t \rightarrow 0} (\Psi(\mathbf{x}(t)) + \gamma(t)) = 0$, se deduce que:

$$\sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial x_k \partial x_r}(\mathbf{a})h_k h_r \leq 0$$

y como \mathbf{h} es arbitrario, satisfaciendo (3.11), se tiene el resultado.

- b) Vamos a demostrar que si la condición (3.15) se satisface, existe un abierto $U_{\mathbf{a}}$, $\mathbf{a} \in U_{\mathbf{a}}$ tal que si $\mathbf{x} \in U_{\mathbf{a}} \cap S$ y $\mathbf{x} \neq \mathbf{a} \implies L(\mathbf{x}) < L(\mathbf{a})$.

Sea $\mathbf{x} \in V_{\mathbf{a}} \cap S$, $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ satisfaciendo (3.11), correspondiendo a \mathbf{x} por las relaciones (3.9).

Para esto se considera $\mathbf{x} \in V_{\mathbf{a}} \cap S$ y la fórmula (3.7) que es válida:

$$L(\mathbf{x}) - L(\mathbf{a}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial x_k \partial x_r}(\mathbf{a})(x_k - a_k)(x_r - a_r) + \varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2,$$

donde $\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{a})$ está definida en $V_{\mathbf{a}} \cap S$, con $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = 0$.

Sea $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ satisfaciendo (3.11) y sea \mathbf{x} el vector que le corresponde por las relaciones (3.9). Como vimos en la parte a) del teorema, $\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2 = \eta(\mathbf{x}) \|\mathbf{h}\|^2$, donde η está definida sobre $V_{\mathbf{a}} \cap S$ tal que $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \eta(\mathbf{x}) = 0$. Así tenemos:

$$L(\mathbf{x}) - L(\mathbf{a}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial x_k \partial x_r}(\mathbf{a}) h_k h_r + (\eta(\mathbf{x}) + \Psi(\mathbf{x})) \|\mathbf{h}\|^2.$$

Por otro lado, como el conjunto de los $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ satisfaciendo (3.11) y tales que $\|\mathbf{h}\| = 1$ es cerrado y acotado, la forma cuadrática $Q(\mathbf{h}) = \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial x_k \partial x_r}(\mathbf{a}) h_k h_r$ que es continua, tiene un valor mínimo en este conjunto. Sea q este valor; la condición (3.15) indica que $q < 0$. Para todo $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$, satisfaciendo (3.11), $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ se tiene $Q(\mathbf{h}) = \|\mathbf{h}\|^2 Q\left(\frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|}\right) \leq q \|\mathbf{h}\|^2$, puesto que $\frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|}$ tiene norma 1 y $\frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|}$ satisface (3.11). Para todo $\mathbf{x} \in V_{\mathbf{a}} \cap S$, se tiene entonces:

$$L(\mathbf{x}) - L(\mathbf{a}) \leq \frac{1}{2} q \|\mathbf{h}\|^2 + (\eta(\mathbf{x}) + \Psi(\mathbf{x})) \|\mathbf{h}\|^2.$$

Como η y Ψ están definidas sobre $V_{\mathbf{a}} \cap S$ y son tales que $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} (\eta(\mathbf{x}) + \Psi(\mathbf{x})) = 0$, existe un abierto $U_{\mathbf{a}}$, $\mathbf{a} \in U_{\mathbf{a}} \subset V_{\mathbf{a}}$ tal que $\mathbf{x} \in U_{\mathbf{a}} \cap S \implies 2|\eta(\mathbf{x}) + \Psi(\mathbf{x})| < |q|$, entonces para $\mathbf{x} \in U_{\mathbf{a}} \cap S$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$, se tiene $L(\mathbf{x}) - L(\mathbf{a}) < 0$. Así f tiene un máximo local en \mathbf{a} sobre S .

- Cuando tenemos funciones $f, g_j, j = 1, \dots, p$ verificando las hipótesis del teorema anterior y un punto \mathbf{a} verificando la condición necesaria para ser un extremo $\nabla L(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$, si se quiere estudiar la naturaleza de \mathbf{a} , es necesario estudiar el signo de la forma cuadrática $Q(\mathbf{h})$, donde \mathbf{h} satisface las restricciones lineales (3.11).
- Como por hipótesis i) la matriz de este sistema es de rango p , se pueden expresar p variables h_i en función de las otras $n - p$ restantes, esto nos lleva a estudiar el signo de una forma cuadrática con $n - p$ variables.

Otro método elegante a menudo utilizado, consiste en pasar por la matriz hessiana orlada de L en \mathbf{a} :

$$H_L(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} L_{x_1x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & L_{x_nx_1}(\mathbf{a}) & (g_1)_{x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & (g_p)_{x_1}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{x_1x_n}(\mathbf{a}) & \cdots & L_{x_nx_n}(\mathbf{a}) & (g_1)_{x_n}(\mathbf{a}) & \cdots & (g_p)_{x_n}(\mathbf{a}) \\ (g_1)_{x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & (g_1)_{x_n}(\mathbf{a}) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (g_p)_{x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & (g_p)_{x_n}(\mathbf{a}) & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L''(\mathbf{a}) & J'_g(\mathbf{a}) \\ J_g(\mathbf{a}) & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

y los menores principales orlados $\det H_i(\mathbf{a})$, donde

$$H_i(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} L_{x_1x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & L_{x_ix_1}(\mathbf{a}) & (g_1)_{x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & (g_p)_{x_1}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{x_1x_i}(\mathbf{a}) & \cdots & L_{x_ix_i}(\mathbf{a}) & (g_1)_{x_i}(\mathbf{a}) & \cdots & (g_p)_{x_i}(\mathbf{a}) \\ (g_1)_{x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & (g_1)_{x_i}(\mathbf{a}) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (g_p)_{x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & (g_p)_{x_i}(\mathbf{a}) & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad i = p + 1, \dots, n.$$

Teorema 3.3.6 Con las hipótesis del teorema anterior tenemos:

a) Condiciones suficientes

- Si $(-1)^p \det H_i(\mathbf{a}) > 0$, $i = p + 1, \dots, n$, es decir si los determinantes de los $H_i(\mathbf{a})$ son todos del mismo signo que $(-1)^p$, entonces f tiene un mínimo estricto en \mathbf{a} bajo las restricciones $g_j(\mathbf{x}) = 0$.
- Si $(-1)^i \det H_i(\mathbf{a}) > 0$, $i = p + 1, \dots, n$, es decir si los determinantes de los $H_i(\mathbf{a})$ son de signo alternado del mismo signo que $(-1)^i$, entonces f tiene un máximo estricto en \mathbf{a} bajo las restricciones $g_j(\mathbf{x}) = 0$.

b) Condiciones necesarias

- Si f tiene un mínimo en el punto \mathbf{a} con las restricciones $g_j(\mathbf{x}) = 0$, entonces se tiene que $(-1)^p \det H_i(\mathbf{a}) \geq 0$, $i = p + 1, \dots, n$.

- Si f tiene un máximo en el punto \mathbf{a} con las restricciones $g_j(\mathbf{x}) = 0$, entonces se tiene que $(-1)^i \det H_i(\mathbf{a}) \geq 0$, $i = p + 1, \dots, n$.

Ejemplo 3.3.3 Consideremos una caja rectangular contenida exactamente dentro del elipsoide $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 18$, con aristas paralelas a los ejes. Encontrar el volumen máximo.

Sea $L = 8xyz + \lambda(2x^2 + 3y^2 + z^2 - 18)$, $\frac{\partial L}{\partial x} = 8yz + 4\lambda x = 0$, $\frac{\partial L}{\partial y} = 8xz + 6\lambda y = 0$, $\frac{\partial L}{\partial z} = 8xy + 2\lambda z = 0$, entonces $\lambda(4x^2 - 6y^2) = \lambda(6y^2 - 2z^2) \implies z^2 = 6y^2 = 2x^2 \implies z^2 = 6 \implies x = \sqrt{3}, y = \sqrt{2}, z = \sqrt{6}, V = 8xyz = 48 \implies \lambda = -4$. Llamemos $\mathbf{a} = (\sqrt{3}, \sqrt{2}, \sqrt{6})$.

El hessiano orlado está dado por $H_3(x, y, z) = \begin{pmatrix} 4\lambda & 8z & 8y & 4x \\ 6z & 6\lambda & 8x & 6y \\ 8y & 8x & 2\lambda & 6z \\ 4x & 6y & 2z & 0 \end{pmatrix}$,

$$H_3(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} -16 & 8\sqrt{6} & 8\sqrt{2} & 4\sqrt{3} \\ 8\sqrt{6} & -24 & 2\sqrt{3} & 6\sqrt{2} \\ 8\sqrt{2} & 2\sqrt{3} & -8 & 2\sqrt{6} \\ 4\sqrt{3} & 6\sqrt{2} & 2\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}, \det H_3(\mathbf{a}) = -77760, H_2(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} -16 & 8\sqrt{6} & 4\sqrt{3} \\ 8\sqrt{6} & -24 & 6\sqrt{2} \\ 4\sqrt{3} & 6\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix},$$

$\det H_2(\mathbf{a}) = 4608$.

Como $(-1)^2 \det H_2(\mathbf{a}) > 0$, $(-1)^3 \det H_3(\mathbf{a}) > 0$, tenemos que $\mathbf{a} = (\sqrt{3}, \sqrt{2}, \sqrt{6})$ es un máximo.

Ejemplo 3.3.4 Encontrar la distancia más corta desde el origen hasta la recta de intersección de los planos $ax + by + cz = p$, $a'x + b'y + c'z = p'$, donde $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, $(a')^2 + (b')^2 + (c')^2 = 1$.

Tomemos $L = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1(ax + by + cz - p) + \lambda_2(a'x + b'y + c'z - p')$, entonces $L_x = 2x + \lambda_1 a + \lambda_2 a' = 0$, $L_y = 2y + \lambda_1 b + \lambda_2 b' = 0$, $L_z = 2z + \lambda_1 c + \lambda_2 c' = 0$, donde $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Multiplicando respectivamente por x, y, z las ecuaciones anteriores se tiene $2r^2 + \lambda_1 p + \lambda_2 p' = 0$. Multiplicando respectivamente por a, b, c las mismas ecuaciones

anteriores se tiene $2p + \lambda_1 + \lambda_2 k = 0$, con $k = aa' + bb' + cc'$. Similarmente multiplicando

por a', b', c' tenemos $2p' + \lambda_1 k + \lambda_2 = 0$. El sistema se escribe

$$\begin{vmatrix} 2r^2 & p & p' \\ 2p & 1 & k \\ 2p' & k & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ por lo}$$

que $r^2(1 - k^2) + p(p - kp') + p'(pk - p') = 0$, es decir $r = ([p^2 + (p')^2 - 2kpp'] / (1 - k^2))^{1/2}$.

3.4 Extremos bajo restricciones en forma de desigualdades (Kuhn–Tucker)

El estudio del caso en que las variables que intervienen se presentan en forma de desigualdades, es el caso más general que se puede considerar.

Sean $f, g_j, j = 1, \dots, m$, funciones definidas sobre $U \subset \mathbb{R}^n$ y sea:

$$S = \{\mathbf{x} \in U / g_j(\mathbf{x}) \geq 0, j = 1, \dots, m\},$$

(m puede ser mayor que n). Se supone que $S \neq \emptyset$ y nos interesamos en los valores que toma f cuando $\mathbf{x} \in S$ y en particular en sus valores extremos.

Ejemplo 3.4.1 Sea $f(x, y) = x^2 + 2y^2$, $g_1(x, y) = 1 - x^2 - y^2$, $g_2(x, y) = 1 + x - 2y$, $g_3(x, y) = 1 - x - 2y$. Sabemos que $f(0, 0) = 0$ y $f(x, y) > 0, \forall (x, y) \neq (0, 0)$, i.e. $(0, 0)$ es un mínimo de f bajo las restricciones $g_j = 0, j = 1, 2, 3$ (es un mínimo absoluto). Por otro lado se constata que si nos situamos en el círculo $x^2 + y^2 = r^2, r < 1$, $f(x, y) = r^2 + y^2$ lo que demuestra que $f(x, y)$ sobre el círculo de radio r tiene un máximo en $(0, \pm r)$, de valor $2r^2$.

Si hacemos variar r de 0 a 1, tenemos que $(0, \frac{1}{2})$ es un máximo local y $(0, -1)$ es un máximo absoluto de f bajo las restricciones $g_j(x) \geq 0, j = 1, 2, 3$. Así $f(0, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, $f(0, -1) = 2$.

Se observa en este ejemplo que de manera general, las restricciones en forma de desigualdades no está limitado por el número de variables.

El punto $(0, 0)$ es un mínimo libre, $(0, -1)$

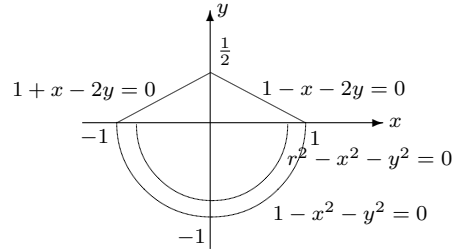
es un máximo bajo la restricción $g_1(x, y) =$

$1 - x^2 - y^2 = 0$. Sin embargo, no podemos

decir que $(0, \frac{1}{2})$ sea un máximo con restricciones $g_2(x, y) = 0$, $g_3(x, y) = 0$, pues

$T = \{(x, y) / g_j(x, y) = 0, j = 2, 3\}$ se reduce

a un punto $(0, \frac{1}{2})$. Para comparar $f(0, \frac{1}{2})$ con $f(x, y)$ es necesario tomar valores fuera de T .



Condiciones de Kuhn-Tucker³

Para buscar extremos de f con restricciones en forma de desigualdades, se utiliza el artificio siguiente: Se considera $g_j(\mathbf{x}) - z_j^2$, donde z_j^2 es una variable o parámetro suplementario llamada variable cuadrática de nivel. Así, cuando $\mathbf{x} \in U$ se tiene $g_j(\mathbf{x}) \geq 0 \iff \exists z_j \in \mathbb{R}$ tal que $g_j(\mathbf{x}) - z_j^2 = 0$. En particular $g_j(\mathbf{x}) = 0 \iff z_j = 0$. Se define $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_m)$, $h_j(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = g_j(\mathbf{x}) - z_j^2$. El conjunto $S' = \{(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in U \times \mathbb{R}^m / h_j(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = 0, j = 1, \dots, m\}$ tiene la propiedad siguiente:

$$\mathbf{x} \in S \iff \exists \mathbf{z} \in \mathbb{R}^m \text{ tal que } (\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in S'.$$

Se considera entonces la función F de $n + m$ variables, definidas sobre $U \times \mathbb{R}^m$ por:

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = f(\mathbf{x}), \forall (\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in U \times \mathbb{R}^m.$$

³**Teorema de Kuhn-Tucker** Es lanzado en la teoría de programación no lineal en 1950. Este teorema da las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una solución óptima a un problema de programación no lineal. El teorema se probó en un artículo "Nonlinear Programming" escrito colectivamente por dos matemáticos de Princeton: Albert W. Tucker y de Harold W. Kuhn. Pero resultó que este teorema ya se había probado, dos veces: anteriormente, primero en 1939 en una tesis de William Karush de la Universidad de Chicago. Este resultado nunca se publicó. El segundo por Fritz John en un artículo rechazado por el Duke Mathematics Journal, pero luego publicado en una colección de ensayos para el volumen de Aniversario del Courant en 1948. Es curioso el impacto que ha tenido este teorema en el mundo de la historia de la matemática, pues representa un caso de un redescubrimiento múltiple. Teorema también se conoce con el nombre de Karush-John-Kuhn y Tucker.

Si f es de clase C^k sobre U (abierto de \mathbb{R}^n), entonces F es de clase C^k sobre $U \times \mathbb{R}^m$ y se tiene:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}), \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z_j}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = 0, \quad j = 1, \dots, m,$$

entonces si $\mathbf{x} \in S$ y si $(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in S'$ (i.e. $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_m)$ es tal que $z_j^2 = g_j(\mathbf{x})$, $j = 1, \dots, m$) se tiene evidentemente $F(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = f(\mathbf{x})$ y que $\mathbf{a} \in S$ es un mínimo global de f en S si y sólo si (\mathbf{a}, \mathbf{b}) con $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)$, $b_j^2 = g_j(\mathbf{a})$, es un mínimo global de F sobre S' . Si \mathbf{a} es un mínimo, (\mathbf{a}, \mathbf{b}) también lo es y si (\mathbf{a}, \mathbf{b}) es estricto, \mathbf{a} también lo es. Sin embargo puede suceder que \mathbf{a} sea estricto y (\mathbf{a}, \mathbf{b}) sea no estricto.

Por otro lado, $\mathbf{a} \in S$ es un mínimo local (resp. estricto) de f en $S \iff (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ es un mínimo local (resp. estricto) de F en S' . En efecto:

a) Demostremos que si \mathbf{a} es un mínimo de f sobre S , (\mathbf{a}, \mathbf{b}) es un mínimo de F en S' .

Sea $(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in S'$, $F(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a}) = F(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in S'$. Observemos que si $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ (es decir la restricción $g_j(\mathbf{a}) > 0$ para algún j), F no tiene un mínimo estricto en (\mathbf{a}, \mathbf{b}) aunque f en \mathbf{a} sea estricto, pues $F(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = F(\mathbf{a}, -\mathbf{b})$ con $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \neq (\mathbf{a}, -\mathbf{b})$.

Sin embargo, si \mathbf{a} es estricto y si $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, entonces (\mathbf{a}, \mathbf{b}) es estricto.

b) Demostremos que si (\mathbf{a}, \mathbf{b}) es un mínimo estricto de F en S' , entonces \mathbf{a} es un mínimo estricto de f en S .

Sea $\mathbf{x} \in S$, existe $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ tal que $(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in S'$ y se tiene $f(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}, \mathbf{z}) < F(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = f(\mathbf{a})$.

Notemos que (\mathbf{a}, \mathbf{b}) es estricto solamente si $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

c) Demostremos que si \mathbf{a} es un mínimo local estricto de f en S , entonces (\mathbf{a}, \mathbf{b}) también lo es de F en S' .

Por hipótesis, existe un abierto V de \mathbf{a} tal que $\mathbf{x} \in S \cap V$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{a} \implies f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{a})$. Para cada j , se escoge un intervalo abierto I_j de modo que:

- si $b_j = 0 = g_j(\mathbf{a})$ se escoge $I_j = \mathbb{R}$,

- si $b_j \neq 0$ se escoge I_j de modo que $b_j \in I_j$ y $-b_j \notin I_j$.

Se considera $W = V \times I_1 \times \cdots \times I_m$ es un abierto de (\mathbf{a}, \mathbf{b}) que satisface:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{z}) \in W \cap S' \implies \mathbf{z} = \mathbf{b}. \quad (3.17)$$

En efecto, $(\mathbf{a}, \mathbf{z}) \in S' \implies g_j(\mathbf{a}) - z_j^2 = 0$, es decir $z_j^2 = g_j(\mathbf{a}) = b_j^2$, o sea $z_j = \pm b_j$. Por

otro lado $(\mathbf{a}, \mathbf{z}) \in W \implies z_j \in I_j$. Como $-b_j \notin I_j$, salvo si $b_j = 0$, se deduce que $z_j = b_j$.

Tomando esta propiedad y \mathbf{a} se tiene que $(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in W \cap S'$, $(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \neq (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ implica:

$$\mathbf{x} \in V \cap S, \mathbf{x} \neq \mathbf{a} \implies f(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}, \mathbf{z}) > f(\mathbf{a}) = F(\mathbf{a}, \mathbf{b}),$$

es decir F tiene un mínimo local estricto en (\mathbf{a}, \mathbf{b}) . Observemos que si \mathbf{a} es un mínimo local no estricto de f en S , entonces (\mathbf{a}, \mathbf{b}) también es un mínimo local de F en S' .

d) Demostremos que si (\mathbf{a}, \mathbf{b}) es un mínimo local estricto de F en S' , entonces \mathbf{a} también lo es de f en S . Por hipótesis, existe W abierto de (\mathbf{a}, \mathbf{b}) tal que $(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in W \cap S'$, $(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \neq (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ lo que implica $F(\mathbf{x}, \mathbf{z}) > F(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Sea $V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n / (\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in W, \text{ para algún } \mathbf{z} \in \mathbb{R}^m\}$ es un abierto de $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, entonces $\mathbf{x} \in V \cap S, \mathbf{x} \neq \mathbf{a} \implies \exists \mathbf{z}$ tal que:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in W \cap S', (\mathbf{x}, \mathbf{z}) \neq (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \implies F(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = f(\mathbf{x}) > F(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = f(\mathbf{a}).$$

Se verifica similarmente que si (\mathbf{a}, \mathbf{b}) es un mínimo local de F en S' , \mathbf{a} también lo es de f en S . De manera general, estos resultados son válidos también para los máximos. Así, gracias al artificio de las variables cuadráticas de nivel, nos lleva a buscar los extremos de una función con restricciones en forma de igualdad.

Definición 3.4.1 Restricciones saturadas Sea $\mathbf{a} \in S$, $g_j(\mathbf{a}) \geq 0$, $j = 1, \dots, m$, se dice que la restricción g_k es saturada en \mathbf{a} , si $g_k(\mathbf{a}) = 0$.

Definición 3.4.2 Restricciones regulares Sean g_j , $j = 1, \dots, m$, funciones diferenciables en \mathbf{a} tales que $g_j(\mathbf{a}) \geq 0$. Se dice que las restricciones $g_j(\mathbf{x}) \geq 0$ son regulares en \mathbf{a} , si ninguna de ellas es saturada en \mathbf{a} (es decir $g_j(\mathbf{a}) > 0$, $j = 1, \dots, m$) o si el rango de la

matriz jacobiana de las restricciones saturadas en \mathbf{a} , es igual al número de restricciones.

En otros términos, si $g_j(\mathbf{a}) = 0$ para $j \in J = \{j_1, \dots, j_p\}$ y si $g_j(\mathbf{a}) > 0$, $j \notin J$, las restricciones $g_j(\mathbf{x}) \geq 0$, $j = 1, \dots, m$ se dicen regulares si la matriz jacobiana de los g_{j_1}, \dots, g_{j_p} es de rango p en \mathbf{a} .

Teorema 3.4.1 Kuhn–Tucker Sean $f(\mathbf{x})$, $g_j(\mathbf{x})$, $j = 1, \dots, m$ funciones con derivadas parciales continuas en un abierto de $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, tales que $g_j(\mathbf{a}) \geq 0$ y tales que las restricciones $g_j(\mathbf{x})$ son regulares en \mathbf{a} , entonces si \mathbf{a} es un extremo local de f con las m restricciones, existen λ_j , $j = 1, \dots, m$ tales que:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.18)$$

$$\lambda_j g_j(\mathbf{a}) = 0, \quad j = 1, \dots, m \quad (3.19)$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, m, \text{ si } \mathbf{a} \text{ es un máximo} \quad (3.20)$$

$$\lambda_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, m, \text{ si } \mathbf{a} \text{ es un mínimo.} \quad (3.21)$$

Estas condiciones son llamadas condiciones de Kuhn–Tucker. La condición (3.19) se llama relación de exclusión.

Demostración Sea \mathbf{a} un extremo local de f sobre S y sea \mathbf{b} tal que $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in S'$. La discusión precedente demuestra que (\mathbf{a}, \mathbf{b}) es un extremo de f bajo la restricción $h_j(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = g_j(\mathbf{x}) - z_j^2 = 0$, $j = 1, \dots, m$. Las hipótesis hechas sobre funciones g_j demuestran que las funciones h_j son derivables, con derivadas parciales continuas en un vecindario de (\mathbf{a}, \mathbf{b}) . Además la hipótesis de regularidad de las restricciones $g_j(\mathbf{x}) \geq 0$, permite demostrar que el rango de la matriz jacobiana en (\mathbf{a}, \mathbf{b}) en los h_j ($j = 1, \dots, m$) es m .

En efecto, la matriz jacobiana de los h_j está dada por:

$$\frac{\partial(h_1, \dots, h_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} & \frac{\partial h_1}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial z_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial x_n} & \frac{\partial h_m}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial z_m} \end{pmatrix}.$$

Por la definición de h_j se tiene que $\frac{\partial h_j}{\partial x_i} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i}$, $j = 1, \dots, m$, $i = 1, \dots, n$, $\frac{\partial h_j}{\partial z_j} = -2z_j$, $j = 1, \dots, m$, $\frac{\partial h_j}{\partial z_k} = 0$, si $j \neq k$.

Sea q el número de restricciones no saturadas en \mathbf{a} , las $m - q$ restantes son saturadas. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que las q primeras son no saturadas, es decir $b_j^2 = g_j(\mathbf{a}) \neq 0$, para $j = 1, \dots, q$ y $b_j = 0$, $j = q + 1, \dots, m$. Así, tenemos:

$$\frac{\partial(h_1, \dots, h_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m)}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) & -2b_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_q}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial g_q}{\partial x_n}(\mathbf{a}) & 0 & \cdots & -2b_q & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\partial g_{q+1}}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial g_{q+1}}{\partial x_n}(\mathbf{a}) & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(\mathbf{a}) & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

entonces si las restricciones $g_j(\mathbf{x}) \geq 0$ son regulares en \mathbf{a} , el rango de $\frac{\partial(g_{q+1}, \dots, g_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(\mathbf{a})$ es $m - q$; por lo tanto las $m - q$ últimas filas de la matriz jacobiana de los h_j son linealmente independientes entre ellas y también relativamente a las q primeras, por la condición $-2b_j \neq 0$, $j = 1, \dots, q$. En conclusión se tiene que las m filas de la matriz jacobiana son linealmente independientes y su rango es m .

Por el teorema de multiplicadores de Lagrange existen $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ tales que:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial h_j}{\partial x_i}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z_k}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial h_j}{\partial z_k}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0, \quad k = 1, \dots, m. \quad (3.23)$$

Teniendo en cuenta que $\frac{\partial h_j}{\partial x_i}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\mathbf{a})$, $\frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$, las n condiciones dadas por (3.22) se escriben bajo la forma (3.18) del teorema.

Por otro lado, tomando en cuenta que $\frac{\partial F}{\partial z_k}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$, $\frac{\partial h_j}{\partial z_j}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -2b_j$, $j = 1, \dots, m$, $\frac{\partial h_j}{\partial z_k}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$, $j \neq k$, las m condiciones de (3.23) se escriben $\lambda_j b_j = 0$ para $j = 1, \dots, m$, es decir se tienen las condiciones (3.19) del teorema pues $b_j^2 = g_j(\mathbf{a})$.

Para terminar la prueba, demostraremos que las condiciones (3.20) son necesarias si \mathbf{a} es un máximo (la condición (3.21) se prueba de manera parecida).

Se va aplicar el corolario del teorema 3.3.2, considerando las restricciones $h_j(\mathbf{x}, \mathbf{z}) - y_j = 0, j = 1, \dots, m$. Observemos que las variables están dadas aquí por (\mathbf{x}, \mathbf{z}) , los parámetros \mathbf{y} intervienen al nivel de restricciones como lo necesita el corolario. Pero este hecho evidencia la necesidad de otras condiciones enunciadas en el teorema 3.3.3. Así las condiciones (3.22), (3.23) y $h_j(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0, j = 1, \dots, m$, implican las condiciones (3.6) del teorema 3.3.3 para $(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}), \mathbf{y} = \mathbf{0}, \mathbf{t}(\mathbf{0}) = \lambda$.

Para poder aplicar el teorema 3.3.3, hagamos las hipótesis suplementarias de que las funciones f y $g_j, j = 1, \dots, n$ son de clase C^2 en un vecindario de \mathbf{a} (i.e. F y h_j son de clase C^2 en un vecindario de (\mathbf{a}, \mathbf{b})) y que el hessiano orlado de $L(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = F(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j h_j(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ es regular en (\mathbf{a}, \mathbf{b}) , entonces existen funciones únicas $x_i(\mathbf{y}), z_j(\mathbf{y}), t_j(\mathbf{y}), (i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m)$ definidas y de clase C^1 en un vecindario V de $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, tales que $h_j(\mathbf{x}(\mathbf{y}), \mathbf{z}(\mathbf{y})) - y_j = 0, \forall \mathbf{y} \in V$ y tales que $\mathbf{x}(\mathbf{0}) = \mathbf{a}, \mathbf{z}(\mathbf{0}) = \mathbf{b}, \mathbf{t}(\mathbf{0}) = \lambda$ (i.e. tales que las condiciones (3.22) y (3.23) se satisfagan, si se reemplaza $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \lambda)$ por $(\mathbf{x}(\mathbf{y}), \mathbf{z}(\mathbf{y}), \mathbf{t}(\mathbf{y}))$).

Las funciones \mathbf{x}, \mathbf{z} son continuas, se puede escoger V suficientemente pequeño para que $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ esté definido $\forall \mathbf{y} \in V$ y considerar $\Phi(\mathbf{y}) = F(\mathbf{x}(\mathbf{y}), \mathbf{z}(\mathbf{y})) = f(\mathbf{x}(\mathbf{y}))$. Por el teorema 3.3.2 módulo el signo $\frac{\partial \Phi}{\partial y_j}(\mathbf{y}) = -t_j(\mathbf{y}), \mathbf{y} \in V, j = 1, \dots, m$, y en particular $\frac{\partial \Phi}{\partial y_j}(\mathbf{0}) = -\lambda_j$. Consideremos j fijo tal que $g_j(\mathbf{a}) = 0$ y el vector de parámetros \mathbf{y}^j cuyas entradas son nulas salvo la j -ésima que es igual a y_j ; sea $u > 0$ de modo que $-u < y_j < u, \mathbf{y}^j \in V$.

Sea $y_j \in [0, u]$ las funciones $\mathbf{x}(\mathbf{y}), \mathbf{z}(\mathbf{y})$ verifican las restricciones $h_j(\mathbf{x}(\mathbf{y}), \mathbf{z}(\mathbf{y})) - y_j = 0$ se debe tener para $\mathbf{y} = \mathbf{y}^j$ y por la definición de $h_k; g_k(\mathbf{x}(\mathbf{y}^j)) - (z_k(\mathbf{y}^j))^2 - y_k = 0, k = 1, \dots, m$.

Dada la forma de \mathbf{y}^j , se tiene $y_k = 0$, si $k \neq j$ y $y_i \geq 0$ se tiene $g_k(\mathbf{x}(\mathbf{y}^j)) \geq 0$, i.e. $\mathbf{x}(\mathbf{y}^j) \in S$. Como la función $\mathbf{x}(\mathbf{y})$ es continua en $\mathbf{0}$ y como $\mathbf{x}(\mathbf{0}) = \mathbf{a}$ es un máximo (local) de f en S , se

puede encontrar u' tal que $0 < u' \leq u$ tal que $y_j \in [0, u' [\implies f(\mathbf{x}(\mathbf{y}^j)) - f(\mathbf{a}) \leq 0$. Así, por la definición de la función Φ : $f(\mathbf{x}(\mathbf{y}^j)) - f(\mathbf{a}) = \Phi(\mathbf{y}^j) - \Phi(\mathbf{0}) = \Phi(0, \dots, y_j, \dots, 0) - \Phi(0, \dots, 0)$ y como Φ es derivable en $\mathbf{0}$, se tiene que $\frac{\partial \Phi}{\partial y_j}(\mathbf{0}) \leq 0$. Se deduce que $\lambda_j \geq 0$ pues $\frac{\partial \Phi}{\partial y_j}(\mathbf{0}) = -\lambda_j$. Si $g_k(\mathbf{a}) > 0$ se tiene $\lambda_k = 0$.

Observaciones

– Se han demostrado las condiciones sobre los signos de los λ_j , haciendo hipótesis suplementarias sobre las funciones $f, g_j, j = 1, \dots, m$, suponiendo que el hessiano orlado de L es regular en (\mathbf{a}, \mathbf{b}) . Estas hipótesis suplementarias no son necesarias y hemos simplemente utilizado el teorema 3.3.3 para simplificar la demostración.

Sin embargo, veremos más adelante, en el estudio de las condiciones de segundo orden que estas hipótesis forman parte de un conjunto de hipótesis suficientes para que \mathbf{a} sea un extremo.

– Se observa como el teorema 3.3.1, que los valores de los λ_j asociados al extremo \mathbf{a} se determinan de manera única.

– Se demostró que las condiciones Kuhn–Tucker son necesarias para que \mathbf{a} sea un extremo de f bajo las restricciones $g_j(\mathbf{x}) \geq 0$, si estas restricciones son regulares en el punto \mathbf{a} . Sin embargo, si las restricciones no son regulares en \mathbf{a} , puede suceder que el punto sea un extremo y que las condiciones de Kuhn–Tucker no se verifiquen. (Ver el ejemplo 3.4.4).

– De manera general se dice que las restricciones satisfacen una condición de calificación (restricción de calificación) en un punto \mathbf{a} , si las condiciones de Kuhn–Tucker son necesarias para que \mathbf{a} sea un extremo. Se dirá simplemente que las restricciones califican en \mathbf{a} . Así, si las restricciones son regulares en \mathbf{a} , califican en ese punto.

Una condición de clasificación clásica es que para que todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$ satisfaga las condiciones $(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot \nabla g_j(\mathbf{a}) \geq 0$, donde los índices j son los de las restricciones saturadas ($g_j(\mathbf{a}) = 0$), existe una aplicación $\bar{\mathbf{x}}(t)$ de $[0, 1]$ en S , con $\bar{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{a}$ y tal que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t}(\bar{\mathbf{x}}(t) -$

$\mathbf{a} = \rho(\mathbf{x} - \mathbf{a})$, donde $\rho > 0$. Esta condición se expresa geoméricamente porque para todo punto \mathbf{x} del cono definido por las condiciones $(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot \nabla g_j(\mathbf{a}) \geq 0$, j tal que $g_j(\mathbf{a}) = 0$, existe un arco de curva en S en el cual uno de los extremos es \mathbf{a} y es tangente a $\mathbf{x} - \mathbf{a}$.

Observemos que en este caso de calificaciones por arcos, los valores de los λ_j no se determinan de manera única para el extremo \mathbf{a} (ver ejemplo 3.4.5).

– El teorema se aplica en la búsqueda de extremos locales de una función $f(\mathbf{x})$ bajo las restricciones $g_j(\mathbf{x}) \geq 0$, $j = 1, \dots, m$, cuando las funciones $f, g_j, j = 1, \dots, m$ son derivables con derivadas continuas en un abierto U .

Se procede en 2 etapas:

1. Se buscan los puntos de U para los cuales una de las condiciones siguientes se satisface:
 - a) las restricciones no son regulares (ni calificadas).
 - b) las restricciones son regulares (o calificables) y existen λ_j (todos positivos, todos negativos) tales que las condiciones de Kuhn–Tucker se satisfacen.

Se encuentran así los puntos susceptibles de ser extremos.

2. Se examinan cada uno de los puntos encontrados en 1, para saber si se trata efectivamente de máximo o un mínimo. Este estudio puede realizarse directamente considerando los valores de la función en un vecindario del punto estudiado o bien utilizando los criterios de segundo orden que veremos más adelante.

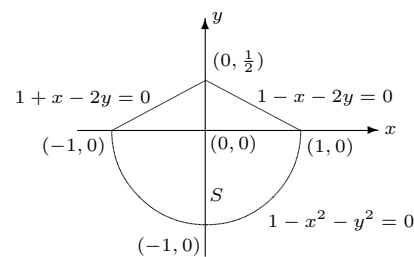
Ejemplo 3.4.2 Determinar los extremos de la

función $f(x, y) = x^2 + 2y^2$, que satisfacen las res-

tricciones $g_1(x, y) = 1 - x^2 - y^2 \geq 0$, $g_2(x, y) =$

$1 + x - 2y \geq 0$ y $g_3(x, y) = 1 - x - 2y \geq 0$.

Sea $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / g_j(x, y) \geq 0, j = 1, 2, 3\}$



Sea $L(x, y) = x^2 + 2y^2 + \lambda_1(1 - x^2 - y^2) + \lambda_2(1 + x - 2y) + \lambda_3(1 - x - 2y)$,

$$L_x = 2x - 2\lambda_1x + \lambda_2 - \lambda_3 = 0, \quad L_y = 4y - 2\lambda_1y - 2\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0,$$

$$\lambda_1(1 - x^2 - y^2) = 0, \quad \lambda_2(1 + x - 2y) = 0, \quad \lambda_3(1 - x - 2y) = 0.$$

– Supongamos que una solución de este sistema de ecuaciones sea tal que las restricciones no son saturadas. En este caso, se debe tener por las relaciones de exclusión $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ i.e. $x = 0, y = 0$, puede ser un máximo o un mínimo de f (todos los λ_j son del mismo signo). Pero $f(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \in S$, i.e. $(0, 0)$ es un mínimo.

– Supongamos que la 1ª y la 2ª restricciones no se saturan. Este caso $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, como se supone que la 3ª restricción se satura, $1 - x = 2y$ y se obtiene $x = \frac{1}{3}, y = \frac{1}{3}, \lambda_3 = \frac{2}{3}$. Así el punto $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ cumple las condiciones necesarias para ser un máximo, pues $\lambda_j \geq 0, j = 1, 2, 3$. Sin embargo, esta conclusión es falsa. En efecto, si se verifica la 3ª restricción $1 - x - 2y = 0$, el punto de la forma $(x, \frac{1}{2}(1-x))$ toma el valor $f(x, \frac{1}{2}(1-x)) = \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$. La derivada se anula en $x = \frac{1}{3}$ y como su derivada segunda es $3 > 0$, $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ es un mínimo en el caso en que $g_3(x, y) = 1 - x - 2y = 0$ ((x, y) recorre la frontera de la restricción $g_3(x, y) = 0$). Por lo tanto, $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ no puede ser un máximo, aunque las condiciones $\lambda_j \geq 0$ se verifiquen.

– Si se supone que la 1ª y la 3ª restricciones no se saturan (i.e. $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$) y la segunda se satura, se tiene $x = -\frac{1}{3}, y = \frac{1}{3}, \lambda_2 = \frac{2}{3}$ y el punto $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ cumple las condiciones necesarias ($\lambda_j \geq 0$) para ser un máximo.

Pero un razonamiento idéntico al caso anterior (si se recorre la frontera de la segunda restricción se ve $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ es un mínimo) demuestra que $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ no es un extremo.

– Si se supone que la 2ª y la 3ª restricciones no se saturan (i.e. $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$) y la primera se satura, se tiene $2x(1 - \lambda_1) = 0, 2y(2 - \lambda_1) = 0$. No se puede tener $x = y = 0$ pues la primera restricción $1 - x^2 - y^2 = 0$ no se da, como lo habíamos supuesto.

Si $y = 0, x \neq 0$ y se tiene que $x = \pm 1, \lambda_1 = 1$, pero $(1, 0)$ satura la tercera restricción mientras que $(-1, 0)$ satura la segunda. Estos casos no cumplen las condiciones, es de-

cir no son extremos.

Veamos que efectivamente no son extremos:

$f(1+h, k) - f(1, 0) = h(2+h) + k^2$. Observemos que solo podemos tomar valores de $h < 0$ para hacer que $(1+h, k) \in S$, por lo que puede tomar valores positivos y negativos.

Un estudio similar permite verificar también que $(-1, 0)$ no es un extremo.

Si $x = 0$, $y = \pm 1$, $\lambda_1 = 2$ y el punto $(0, 1)$ se elimina pues no está en S .

El punto $(0, -1)$ verifica las condiciones necesarias de Kuhn–Tucker para ser un máximo.

Un estudio local del punto muestra que es un máximo y que es un máximo absoluto de f bajo las restricciones dadas.

En efecto, $f(h, -1+k) - f(0, -1) = h^2 + 2(-1+k)^2 - 2$. Como $k \geq 0$ para que $(h, -1+k) \in S$, debe tenerse que $h^2 + (-1+k)^2 \leq 1$, por lo que $f(h, -1+k) - f(0, -1) = h^2 + (-1+k)^2 + (1-k)^2 - 2 \leq 1 + (1-k)^2 - 2 = k(-2+k) \leq 0$, es decir $(0, -1)$ es un máximo. Luego se verá que un máximo absoluto.

– Si se supone que solamente la primera restricción no se satura (i.e. $\lambda_1 = 0$), se tiene que $1+x-2y=0$, $1-x-2y=0$, o sea $x=0$, $y=\frac{1}{2}$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{2}$. Así el punto $(0, \frac{1}{2})$ cumple las condiciones necesarias para que sea un máximo. Un estudio local del punto permite ver que es un máximo.

En efecto, $f(h, \frac{1}{2}+k) - f(0, \frac{1}{2}) = h^2 + k(2+k)$, pero $k \leq 0$ para que $(h, \frac{1}{2}+k) \in S$. Así:

$$\text{Si } h \leq 0 \implies 1+h-2(\frac{1}{2}+k) \geq 0 \implies h \geq 2k \implies 0 \leq -h \leq -2k.$$

$$\text{Si } h \geq 0 \implies 1-h-2(\frac{1}{2}+k) \geq 0 \implies -h \geq 2k \implies 0 \leq h \leq -2k.$$

Se concluye que $|h| \leq -2k$, entonces $f(h, \frac{1}{2}+k) - f(0, \frac{1}{2}) = h^2 + k(2+k) \leq 4k^2 + 2k + k^2 = 5k^2 + 2k = k(2+5k) \leq 0$ y se tiene un máximo en $(0, \frac{1}{2})$.

– Si se supone que solamente la segunda restricción no se satura ($\lambda_2 = 0$), se tiene $1-x^2-y^2=0$, $1-x-2y=0$ i.e. $x=1$, $x=-\frac{3}{5}$. Se elimina $x=-\frac{3}{5}$ pues se tiene que $y=\frac{4}{5}$ y $(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}) \notin S$.

Si $x = 1$, $y = 0$, $\lambda_3 = 0$, $\lambda_1 = 1$. El punto $(1, 0)$ cumple las condiciones necesarias para ser un máximo, pero un estudio local del punto muestra que no es nada; es suficiente alejarse de este punto recorriendo el círculo $x^2 + y^2 = 1$ hacia abajo, es decir en el sentido que y^2 crezca para que $f(x, y)$ aumente y $(1, 0)$ no puede ser un extremo.

Observemos que el punto $(1, 0)$ presenta la particularidad de ser tal que se tiene a la vez la tercera restricción saturada $g_3(1, 0) = 0$ y $\lambda_3 = 0$.

– Si se supone que solamente la tercera restricción no se satura ($\lambda_3 = 0$), se obtienen los puntos $(-1, 0)$ y $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}) \notin S$.

Así para $(-1, 0)$, los $\lambda_j \geq 0$, pero no es un máximo por un argumento similar al anterior. En este caso se tiene $g_2(-1, 0) = 0$, $\lambda_2 = 0$.

Así se han considerado todos los casos posibles, lo que nos permite ver que hay siete puntos verificando las condiciones de Kuhn–Tucker. Este ejemplo simple nos muestra lo pesado del método de Kuhn–Tucker, la cual es inevitable y también el interés del estudio gráfico cuando sea posible.

Observación Las condiciones de Kuhn–Tucker son necesarias si las restricciones son regulares en el punto considerado. La matriz jacobiana de los g_j es
$$\begin{pmatrix} -2x & -2y \\ 1 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Así, en todos los puntos en que una o dos restricciones son saturadas, la submatriz de las restricciones saturadas es regular. En consecuencia estamos seguros de no haber errado un extremo.

Ejemplo 3.4.3 Determinar los extremos de la función $f(x, y, z) = 40x + 16y + 10z$, bajo las restricciones sobre las variables $x + y + z \geq 100$, $4x + y \geq 200$, $x \leq y$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

Observamos que los extremos solo pueden ser mínimos. En efecto, los puntos de la frontera $(0, y, 0)$ toman valores $f(0, y, 0) = 16y$ y que pueden ser todo lo grande que se quiera.

El lagrangiano $L(x, y, z) = 40x + 16y + 10z + \lambda_1(x + y + z - 100) + \lambda_2(4x + y - 200) + \lambda_3(y - x) + \lambda_4x + \lambda_5y + \lambda_6z$ es tal que:

$$\begin{aligned} L_x &= 40 + \lambda_1 + 4\lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 = 0, & \lambda_1(x + y + z - 100) &= 0, & \lambda_4x &= 0, \\ L_y &= 16 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_5 = 0, & \lambda_2(4x + y - 200) &= 0, & \lambda_5y &= 0, \\ L_z &= 10 + \lambda_1 + \lambda_6 = 0, & \lambda_3(y - x) &= 0, & \lambda_6z &= 0. \end{aligned}$$

La solución del sistema está lejos de ser inmediata. Nos vamos a enfocar sobre todo en las tres primeras restricciones.

– Si las tres primeras restricciones se saturan, la solución es $x = y = 40, z = 20$. Como $x, y, z > 0$ se deduce que $\lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0$ y así $\lambda_1 = -10, \lambda_2 = -\frac{36}{5}, \lambda_3 = \frac{6}{5}$.

Los λ_j no verifican las condiciones de Kuhn–Tucker y $(40, 40, 20)$ no es el extremo buscado.

– Si sólo la segunda y tercera restricciones se saturan, $\lambda_1 = 0, x = y, 4x + y = 200$, o sea $x = y = 40, \lambda_4 = 0, \lambda_5 = 0, \lambda_6 = -10$ (pues $\lambda_1 = 0$) i.e. $z = 0$. Pero el punto $(40, 40, 0)$ no verifica la restricción $x + y + z \geq 100$ y no es el extremo buscado.

– Si sólo la primera y la tercera restricciones se saturan, $\lambda_2 = 0, y = x, x = 50 - \frac{1}{2}z$. Como x es no negativo, debe tenerse $0 \leq z \leq 100$.

a) Si $z = 0$, entonces $x = 50, \lambda_4 = 0$ y como $y = x > 0, \lambda_5 = 0, \lambda_1 = -28, \lambda_2 = 12$. Los λ_j no son del mismo signo y $(50, 50, 0)$ no es el extremo buscado.

b) Si $0 < z < 100$ se tendrá $\lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0, \lambda_1 = -10, \lambda_2 = \frac{6}{5}$ y los λ_j no tienen el mismo signo y no tienen el extremo buscado.

c) $z = 100, x = 0, y = 0$ y la segunda restricción no se da.

– Si sólo las dos primeras restricciones se saturan, $\lambda_3 = 0, z = 3x - 100, y = 200 - 4x$.

Para tener una solución no negativa, se necesita $\frac{100}{3} \leq x \leq 50$.

a) Si $\frac{100}{3} < x < 50$, entonces $x > 0, y > 0, z > 0$ i.e. $\lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0, \lambda_1 = -10, \lambda_2 = -6, \lambda_3 = 7.5$ no hay un extremo.

- b) Si $x = \frac{100}{3}$, $z = 0$, $y = \frac{200}{3}$, $\lambda_4 = 0 = \lambda_5$, así $\lambda_2 = -8$, $\lambda_1 = -8$, $\lambda_6 = -2$, es decir los λ_j son no positivos y $(\frac{100}{3}, \frac{200}{3}, 0)$ es el mínimo buscado.

Este punto, es el único posible (para estar seguro, se debe continuar analizando los casos en que sólo una de las restricciones se cumple).

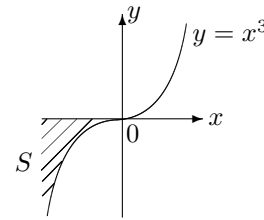
Ejemplo 3.4.4 Determinar los extremos de la función $f(x, y) = x + y$ con $y \leq 0$, $y \geq x^3$.

Las restricciones son $g_1(x, y) = -y \geq 0$, $g_2(x, y) = y -$

$x^3 \geq 0$. El lagrangiano es $L(x, y) = x + y + \lambda_1(-y) +$

$\lambda_2(y - x^3)$ con lo que:

$$\begin{aligned} L_x &= 1 - 3\lambda_2 x^2 = 0, & \lambda_1(-y) &= 0, \\ L_y &= 1 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0, & \lambda_2(y - x^3) &= 0. \end{aligned}$$



Por la ecuación $L_x = 1 - 3\lambda_2 x^2 = 0$, se deduce que $\lambda_2 \neq 0$ y $x \neq 0$. Así, $y = x^3$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, $x^2 = -1$ y tenemos que no hay punto que verifique Kuhn–Tucker, pero como se debe tener $x \leq 0$, $y \leq 0$, se ve que $(0, 0)$ en estas condiciones es un máximo. Pero este punto no verifica las condiciones de Kuhn–Tucker.

Esto demuestra que las restricciones no son calificadas en este punto. Si lo fueran, las condiciones de Kuhn–Tucker se verificarían en este máximo.

Se constata directamente que las restricciones no son regulares en $(0, 0)$ pues:

$$\frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(x, y)}(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, las restricciones no son calificadas por arcos. En efecto, las condiciones $\mathbf{x} \cdot \nabla g_j(0) \geq 0$, $j = 1, 2$ se escriben (con $\mathbf{x} = (x, y)$) $-y \geq 0$, $y \geq 0$, por lo que los puntos que satisfacen estas condiciones son los puntos $(x, 0)$ con $x \in \mathbb{R}$.

Por otro lado, existe una función $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$ definida para $t \in [0, 1]$ tal que $\mathbf{x}(0) = (0, 0)$ y tal que $\mathbf{x}(t) \in S$, $x(t) \leq 0$. Por lo tanto, si $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \mathbf{x}(t)$ existe es ≤ 0 .

Se deduce que si $\mathbf{x} = (x, 0)$ con $x > 0$ (\mathbf{x} satisface las condiciones $\mathbf{x} \cdot \nabla g_j(\mathbf{0}) \geq 0$, $j = 1, 2$)

es imposible encontrar $\mathbf{x}(t)$ y $\gamma > 0$ tales que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \mathbf{x}(t) = \gamma \mathbf{x}$, puesto que esta igualdad implica $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} x(t) = \gamma x > 0$.

Ejemplo 3.4.5 *Encontrar los extremos de la función $f(x, y) = y - x^2$, bajo las restricciones $x^2 + y^2 \geq 1$, $y \leq 1$.*

Las restricciones se escriben $g_1(x, y) = x^2 + y^2 - 1 \geq 0$, $g_2(x, y) = 1 - y \geq 0$. Busquemos los puntos para los cuales las restricciones son calificadas.

Los gradientes $\nabla g_1(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$, $\nabla g_2(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. El único punto donde $\nabla g_1 = (0, 0)$, es en $(0, 0)$ y como g_1 no es nulo, se deduce que todo punto en que g_1 es nulo pero g_2 no, las restricciones son regulares. Por otro lado, $\nabla g_2 \neq 0$, las restricciones son regulares en todo punto donde g_2 es nulo pero no g_1 .

El único punto en donde las restricciones son saturadas es el punto $\mathbf{a} = (0, 1)$; en este punto la matriz jacobiana de las restricciones es $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y las restricciones no son regulares.

Observemos sin embargo, que en el punto $\mathbf{a} = (0, 1)$ las restricciones satisfacen las condiciones clásicas de calificación. En efecto, el conjunto de \mathbf{x} tales que $(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot \nabla g_1(\mathbf{a}) \geq 0$, $(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot \nabla g_2(\mathbf{a}) \geq 0$, es la recta de la ecuación $y = 1$, pues si $\mathbf{x} = (x, y)$ se tiene que la primera de estas desigualdades es $2(y - 1) \geq 0$ y la segunda $-(y - 1) \geq 0$.

Todo punto de esta recta es $\mathbf{x} = (x, 1)$ y para $x \neq 0$, ($\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$) se considera $\mathbf{x}(t) = (tx, 1)$, $t \in [0, 1]$. Se tiene entonces $\mathbf{x}(0) = \mathbf{a}$, $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} (\mathbf{x}(t) - \mathbf{a}) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} (tx, 0) = \mathbf{x} - \mathbf{a}$. La condición de calificación se satisface para $\rho = 1$.

Las restricciones son por tanto calificadas en todo punto de \mathbb{R}^2 y se encuentran los extremos resolviendo las condiciones de Kuhn–Tucker.

El lagrangiano es $L(x, y) = y - x^2 + \lambda_1(x^2 + y^2 - 1) + \lambda_2(1 - y)$ y las condiciones de

Kuhn–Tucker son:

$$\begin{aligned} L_x(x, y) &= -2x + 2\lambda_1 x = 2x(\lambda_1 - 1) = 0, & \lambda_1(x^2 + y^2 - 1) &= 0, \\ L_y(x, y) &= 1 + 2\lambda_1 y - \lambda_2 = 0, & \lambda_2(1 - y) &= 0. \end{aligned}$$

Si $x \neq 0$, $\lambda_1 = 1$ y como $y^2 = 1 - x^2$ se tiene $y < 1$ (pues $x \neq 0$). Así, $\lambda_2 = 0$ y la segunda ecuación es $1 + 2y = 0$ i.e. $y = -\frac{1}{2}$, $x^2 = \frac{3}{4}$. Así tenemos dos candidatos tales que $x \neq 0$:

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right), \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right), \quad \text{con } \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0.$$

Las condiciones $g_1(x, y) \geq 0$, $g_2(x, y) \geq 0$ se satisfacen en estos puntos y por los signos de los λ_i son candidatos a ser máximos.

Consideremos el caso $x = 0$. Aquí la condición $g_1(x, y) \geq 0$ se escribe $y^2 - 1 \geq 0$, o sea $|y| \leq 1$. Como se tiene $g_2(x, y) = 1 - y \geq 0$, se debe tener $y = 1$ o $y \leq -1$.

Para el punto $(0, 1)$ vimos que las restricciones no son regulares, pero son calificadas por arcos. Las condiciones de Kuhn–Tucker se reducen en este punto a la única ecuación $1 + 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0$, la cual tiene una infinidad de soluciones (λ_1, λ_2) , por ejemplo, $(-\frac{1}{2}, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 3)$, $(-1, -1)$,... Las condiciones de Kuhn–Tucker se satisfacen en **a**, pero no permiten preveer, en el caso en que **a** sea efectivamente un extremo (si se trata de un máximo o de un mínimo), pues se satisfacen igualmente con los λ_j negativos $(-11, -1)$, que con los positivos $(1, 3)$.

El estudio directo de la función $f(x) = y - x^2$ demuestra que tiene un máximo global estricto en **a**. En efecto, $\forall \mathbf{x} = (x, y)$ satisfaciendo $g_1(x, y) \geq 0$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$, se tiene $x \neq 0$, $y \leq 1$ o $x = 0$, $y \leq -1$ y se deduce $f(x, y) = y - x^2 < 1 = f(0, 1)$.

Consideremos ahora los puntos $(0, y)$, $y \leq -1$ y veamos para cuales puntos se puede encontrar λ_1 y λ_2 tales que las condiciones de Kuhn–Tucker se satisfacen.

Como $x = 0$, la primera ecuación se satisface y como $y \leq -1$, i.e. $y \neq 1$, la cuarta ecuación implica $\lambda_2 = 0$ y la segunda se escribe $1 + 2\lambda_1 y = 0$. Se deduce $-\frac{1}{2y} = \lambda_1 \neq 0$ y dado que por la tercera ecuación $y^2 - 1 = 0$, se deduce $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_1 = \frac{1}{2}$. Así, entre los puntos de la forma $(0, y)$ con $y \leq -1$, sólo el punto $(0, -1)$ es un candidato y si es un

extremo es un máximo por el signo de los λ_j .

El teorema de Kuhn–Tucker da las condiciones necesarias para que f tenga un extremo en \mathbf{a} , bajo las restricciones $g_j(\mathbf{x}) \geq 0$, cuando las condiciones son regulares en \mathbf{a} . El siguiente teorema da criterios para precisar la naturaleza de los puntos candidatos.

Teorema 3.4.2 Criterio del hessiano orlado

Sean $f(\mathbf{x})$, $g_j(\mathbf{x})$, $j = 1, \dots, m$ funciones de clase C^2 en un vecindario de \mathbf{a} tales que $g_j(\mathbf{a}) \geq 0$, $j = 1, \dots, m$ y tales que las restricciones $g_j(\mathbf{x}) \geq 0$ sean regulares en \mathbf{a} . Supongamos que las condiciones de Kuhn–Tucker se satisfacen en \mathbf{a} , es decir existen $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ tales que:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.18)$$

$$\lambda_j g_j(\mathbf{a}) = 0, \quad j = 1, \dots, m. \quad (3.19)$$

Para facilitar la escritura se supone que las restricciones se numeran de modo que $g_j(\mathbf{a}) > 0$, $j = 1, \dots, q$, y que $g_j(\mathbf{a}) = 0$, $j = q + 1, \dots, m$ (por lo que $\lambda_j = 0$, $j = 1, \dots, q$) y las restricciones son por hipótesis regulares en \mathbf{a} , la matriz jacobiana $\frac{\partial(g_{q+1}, \dots, g_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(\mathbf{a})$ es de rango $m - q \leq n$. Se supone además que las variables x_i se numeran de modo que la matriz cuadrada $\frac{\partial(g_{q+1}, \dots, g_m)}{\partial(x_1, \dots, x_{m-q})}(\mathbf{a})$ sea regular.

Condiciones suficientes

Para que \mathbf{a} sea un mínimo de f bajo las restricciones $g_j(\mathbf{x}) \geq 0$, $j = 1, \dots, m$ es suficiente que:

$$\lambda_j < 0, \quad j = q + 1, \dots, m, \quad (3.24)$$

$$(-1)^{m-q} \det H_k(\mathbf{a}) > 0, \quad k = m - q + 1, \dots, n, \quad (3.25)$$

y para que \mathbf{a} sea un máximo de f bajo las restricciones $g_j(\mathbf{x}) \geq 0$, $j = 1, \dots, m$ es suficiente que:

$$\lambda_j > 0, \quad j = q + 1, \dots, m, \quad (3.26)$$

$$(-1)^k \det H_k(\mathbf{a}) > 0, \quad k = m - q + 1, \dots, n, \quad (3.27)$$

donde los $\det H_k(\mathbf{a})$ son los menores principales orlados de la matriz hessiana orlada H en \mathbf{a} , del lagrangiano $L(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(\mathbf{x})$:

$$H(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} L''(\mathbf{a}) & \left(\frac{\partial g^*}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{a}) \right)' \\ \frac{\partial g^*}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{a}) & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

y donde $\frac{\partial g^*}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{a}) = \frac{\partial(g_{q+1}, \dots, g_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(\mathbf{a})$. Además este mínimo (respectivamente máximo) es estricto.

Condiciones necesarias

Si f tiene un mínimo en \mathbf{a} bajo las restricciones $g_j(\mathbf{x}) \geq 0$, $j = 1, \dots, m$ se tiene:

$$\lambda_j \leq 0, \quad j = q + 1, \dots, m, \quad (3.24')$$

$$(-1)^{m-q} \det H_k(\mathbf{a}) \geq 0, \quad k = m - q + 1, \dots, n. \quad (3.25')$$

Si f tiene un máximo en \mathbf{a} bajo las restricciones $g_j(\mathbf{x}) \geq 0$, $j = 1, \dots, m$ se tiene:

$$\lambda_j \geq 0, \quad j = q + 1, \dots, m, \quad (3.26')$$

$$(-1)^k \det H_k(\mathbf{a}) \geq 0, \quad k = m - q + 1, \dots, n. \quad (3.27')$$

Observación Este teorema es similar al caso de restricciones con igualdades (el cual se utiliza para demostrarlo, utilizando las variables cuadráticas z_j usadas en el teorema de Kuhn–Tucker, pues fuera de la condición de signo de los λ_j se trabaja como si se tomara en cuenta las restricciones saturadas (pero que queda bien claro, que las condiciones de signo (3.24) y (3.26) y el número de restricciones m , juega un papel importante, como se verá en los ejemplos 3.4.6 y 3.4.7).

En el caso en que ninguna de las restricciones es saturada en el punto candidato \mathbf{a} , ($m = q$), la matriz $H(\mathbf{a})$ se reduce a $L''(\mathbf{a}) = F''(\mathbf{a})$, pues $\lambda_j = 0$, $j = 1, \dots, m$. Así somos llevados al caso en que el candidato puede ser un extremo (sin restricciones).

Demostración Se considera como en la demostración del teorema de Kuhn–Tucker, las

funciones $h_j(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = g_j(\mathbf{x}) - z_j^2$, $j = 1, \dots, m$ ($\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_m)$) y un punto $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)$ tal que $b_j^2 = g_j(\mathbf{a})$.

Se sabe que \mathbf{a} es un mínimo de f bajo las restricciones de $g_j(\mathbf{x}) \geq 0$, $j = 1, \dots, m$ si y sólo si (\mathbf{a}, \mathbf{b}) es un mínimo de $F(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = f(\mathbf{x})$ bajo las restricciones $h_j(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = 0$, $j = 1, \dots, m$.

La regularidad de restricciones $g_j(\mathbf{x}) \geq 0$ en \mathbf{a} implica la igualdad:

$$\text{rang} \frac{\partial(h_1, \dots, h_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m)}(\mathbf{a}) = m$$

y las condiciones (3.18) y (3.19) son las condiciones necesarias para que \mathbf{a} sea un extremo de f bajo las restricciones $g_j(\mathbf{x}) \geq 0$ (y que (\mathbf{a}, \mathbf{b}) sea un extremo de F bajo las restricciones $h_j(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = 0$).

Todas estas condiciones se satisfacen, el teorema 3.3.6 se aplica y para demostrar que (\mathbf{a}, \mathbf{b}) es un mínimo de F bajo las restricciones $h_j = 0$, es suficiente demostrar que la condición suficiente se satisface si las condiciones (3.24) y (3.25) se dan.

Para esto, se considera $L_0(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = F(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j h_j(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ y el hessiano orlado en (\mathbf{a}, \mathbf{b}) , $M(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ de $L_0(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ bajo las restricciones $h_j(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = 0$:

$$H(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \frac{\partial h}{\partial(\mathbf{x}, \mathbf{z})}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ \left(\frac{\partial h}{\partial(\mathbf{x}, \mathbf{z})}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \right)' & L_0''(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \end{pmatrix},$$

con $\frac{\partial h}{\partial(\mathbf{x}, \mathbf{z})}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{\partial(h_1, \dots, h_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m)}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Se ha tomado la matriz hessiana orlada con el bloque de ceros en alto a la izquierda, pues esto facilita la escritura, pero no cambia en nada los resultados. Como se tiene:

$$\frac{\partial h_j}{\partial z_k}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ -2z_j & \text{si } j = k, \end{cases}$$

y como $b_j^2 = g_j(\mathbf{a})$,

$$\frac{\partial h_j}{\partial z_j}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -2b_j = -2\sqrt{g_j(\mathbf{a})} \begin{cases} \neq 0 & \text{si } j = 1, \dots, q \\ = 0 & \text{si } j = q + 1, \dots, m. \end{cases}$$

Vamos ahora a tomar las variables que intervienen en la matriz jacobiana de los h_j en el orden siguiente: $z_1, \dots, z_q, x_1, \dots, x_n, z_{q+1}, \dots, z_m$ de manera que esta matriz jacobiana se escriba de la forma siguiente (con las $m - q$ últimas columnas formadas de ceros):

$$\frac{\partial(h_1, \dots, h_m)}{\partial(z_1, \dots, z_q, x_1, \dots, x_n, z_{q+1}, \dots, z_m)}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} -2b_1 \cdots 0 & \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) \cdots \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) & 0 \cdots 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots -2b_q & \frac{\partial g_q}{\partial x_1}(\mathbf{a}) \cdots \frac{\partial g_q}{\partial x_n}(\mathbf{a}) & 0 \cdots 0 \\ 0 & \cdots 0 & \frac{\partial g_{q+1}}{\partial x_1}(\mathbf{a}) \cdots \frac{\partial g_{q+1}}{\partial x_n}(\mathbf{a}) & 0 \cdots 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots 0 & \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(\mathbf{a}) \cdots \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(\mathbf{a}) & 0 \cdots 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_0}{\partial x_i} &= \frac{\partial F}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i}, & i &= 1, \dots, n, \\ \frac{\partial L_0}{\partial z_j} &= -2\lambda_j z_j, & j &= 1, \dots, m, \end{aligned}$$

$$\text{de donde } \frac{\partial^2 L_0}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial^2 g_j}{\partial x_i \partial x_k}, \quad \frac{\partial^2 L_0}{\partial x_i \partial z_j} = 0, \quad \frac{\partial^2 L_0}{\partial z_j \partial z_r} = \begin{cases} 0 & \text{si } r \neq j \\ -2\lambda_j & \text{si } r = j. \end{cases}$$

Como tenemos $n + m$ variables (\mathbf{x}, \mathbf{z}) y m restricciones $h_j(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = 0$, para aplicar el teorema 3.3.6 es necesario utilizar los $n + m - m = n$ menores principales de $M(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ obtenidos suprimiendo las s últimas filas y columnas de $M(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, con $s = 0, 1, \dots, n - 1$.

Si se escribe $L(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(\mathbf{x})$, entonces $\frac{\partial^2 L_0}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_k}$, pues $F(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = f(\mathbf{x})$,

$\forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ y se tiene:

$$\text{i) } \det M_s(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (-1)^q 2^{2q} \left(\prod_{i=1}^q b_i \right)^2 \det N_s(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \quad s = 0, 1, \dots, n-1,$$

donde $N_s(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ es la matriz menor primaria principal, obtenida suprimiendo las últimas s líneas y las últimas s columnas de la matriz $N(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ definida por:

$$N(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} & & \frac{\partial g_{q+1}}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial g_{q+1}}{\partial x_n}(\mathbf{a}) & & \\ & \mathbf{0} & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(\mathbf{a}) & & \\ \frac{\partial g_{q+1}}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 \mathbb{L}}{\partial x_1^2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 \mathbb{L}}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{a}) & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \mathbf{0} \\ \frac{\partial g_{q+1}}{\partial x_n}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 \mathbb{L}}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 \mathbb{L}}{\partial x_n^2}(\mathbf{a}) & \\ & & & & & -2\lambda_{q+1} & \cdots & 0 \\ & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & & & 0 & \cdots & -2\lambda_m \end{pmatrix}.$$

Se tiene que:

$$N(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} H(\mathbf{a}) & & \mathbf{0} & \\ & -2\lambda_{q+1} & \cdots & 0 \\ \mathbf{0} & \vdots & \ddots & \vdots \\ & 0 & \cdots & -2\lambda_m \end{pmatrix},$$

donde $H(\mathbf{a})$ es el hessiano orlado (en realidad no es exactamente la misma matriz porque el bloque de ceros se encuentra en alto a la izquierda en lugar de abajo a la derecha, pero esto es equivalente).

Observemos que para $s = 0, 1, \dots, m - q - 1$ se tiene:

$$\text{ii) } \det N_s(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \det H(\mathbf{a}) \prod_{j=q+1}^{m-s} (-2\lambda_j).$$

Dada la condición (3.24) se tiene $\lambda_j < 0$ y en consecuencia $\det N_s(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ tienen el mismo signo que $\det H(\mathbf{a})$, para $s = 0, \dots, m - q - 1$.

Para $s = m - q, \dots, n - 1$, se tiene:

$$\text{iii) } \det N_s(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \det H_{s-(m-q)}(\mathbf{a}).$$

Así por la condición (3.25) se tiene $(-1)^{m-q} \det H_{s-(m-q)}(\mathbf{a}) > 0$, para $s = m - q, \dots, n - 1$, por lo que:

$$(-1)^{m-q} \det N_s(\mathbf{a}, \mathbf{b}) > 0, \quad s = 0, \dots, n - 1$$

y utilizando las relaciones i) se obtiene:

$$\text{iv) } (-1)^m \det M_s(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (-1)^{m-q} 2^{2q} \left(\prod_{i=1}^q b_i \right)^2 \det N_s(\mathbf{a}, \mathbf{b}) > 0, \quad s = 0, \dots, n - 1.$$

Estas n desigualdades iv) permite concluir, aplicando el teorema 3.3.6, que (\mathbf{a}, \mathbf{b}) es un mínimo de F bajo las restricciones $h_j = 0, j = 1, \dots, m$, por lo que \mathbf{a} es un mínimo de f bajo las restricciones $g_j(\mathbf{x}) \geq 0, j = 1, \dots, m$.

Se demuestra de igual manera que si las condiciones (3.26) y (3.27) se verifican, entonces \mathbf{a} es un máximo de f bajo las m restricciones $g_j(\mathbf{x}) \geq 0$. Las condiciones (3.27) permiten afirmar que los menores principales $\det M_s(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ son de signo alternado para $s = m - q, \dots, n - 1$, (por la relación iii)). Las condiciones (3.26) permiten afirmar que los menores principales $\det M_s(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ son igualmente de signo alternado para $s = 0, \dots, m - q - 1$ (por la relación ii).

Las condiciones necesarias se deducen fácilmente del teorema, utilizando las relaciones i), ii), iii) y iv) con las desigualdades no estrictas, en vez de las estrictas.

Ejemplo 3.4.6 ¿Los puntos $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ y $(0, -1)$ son extremos de la función $f(x, y) = x^2 + 2y^2$, si x y y están bajo las restricciones $1 - x^2 - y^2 \geq 0, 1 + x - 2y \geq 0, 1 - x - 2y \geq 0$?

Se estudió este caso en ejemplo 3.4.2, donde se encontró que siete puntos verifican las condiciones de Kuhn–Tucker y se estudiaron gráficamente su naturaleza. Vamos a verificar estos resultados en los candidatos $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ y $(0, -1)$.

Punto $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}), \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = \frac{2}{3}$.

El lagrangiano asociado a este punto (solo se tiene las restricciones saturadas) en $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ es:

$$L(x, y) = x^2 + 2y^2 + \frac{2}{3}(1 - x - 2y),$$

por lo que el hessiano orlado en $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ es:

$$H\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \\ \hline -1 & -2 & 0 \end{array} \right).$$

Como se tienen dos restricciones no saturadas $q = 2$, $m = 3$, $n = 2$ y un solo valor posible de $k = 3 - 2 + 1 = 2$. Así tenemos que buscar el signo del menor principal correspondiente, que es el $\det H = -12$.

Se tiene que $(-1)^{3-2}(-12) = 12 > 0$, por lo que $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ debe ser un mínimo, pero $\lambda_3 > 0$, entonces se concluye que $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ no es un extremo.

Se llega al mismo resultado si se considera el candidato $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Punto $(0, -1)$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

El lagrangiano asociado a este punto es $L = x^2 + y^2 + 2(1 - x^2 - y^2)$ y el hessiano orlado es:

$$H_2(0, -1) = \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 2 & 0 \end{array} \right), \quad \det H_2 = 8.$$

Como $\lambda_1 > 0$ (en la única restricción saturada) y $(-1)^2 \det H_2 > 0$ (se tiene un sólo menor principal orlado puesto que $m = 3$, $q = 2$) se concluye que $(0, -1)$ es un máximo.

Notemos que el teorema del hessiano orlado para Kuhn–Tucker, no se puede aplicar a los puntos candidatos tales como $(0, \frac{1}{2})$, porque la condición $m - q < n$ no se verifica en este punto, ya que $m = 3$, $q = 1$, $n = 2$.

Ejemplo 3.4.7 Determinar los extremos de la función $f(x, y, z, t) = xy + zt$, bajo las restricciones $g_1(x, y, z, t) = 2 - x^2 - y^2 \geq 0$, $g_2(x, y, z, t) = 8 - z^2 - t^2 \geq 0$.

Las funciones f , g_1 y g_2 son de clase C^∞ y podemos aplicar el teorema de Kuhn–Tucker.

– Se buscan los puntos en \mathbb{R}^4 que satisfacen $g_j(x) \geq 0$, $j = 1, 2$ y para los cuales existen λ_1 y λ_2 tales que las condiciones de Kuhn–Tucker se verifiquen:

i) Anulen las derivadas parciales del lagrangiano $L = xy + zt + \lambda_1(2 - x^2 - y^2) + \lambda_2(8 - z^2 - t^2)$.

ii) $\lambda_j g_j(x, y, z, t) = 0$, $j = 1, 2$.

Las condiciones se escriben:

$$2 - x^2 - y^2 \geq 0, y - 2\lambda_1 x = 0, x - 2\lambda_1 y = 0, \lambda_1(2 - x^2 - y^2) = 0, 8 - z^2 - t^2 \geq 0, t - \lambda_2 z = 0, z - 2\lambda_2 t = 0, \lambda_2(8 - z^2 - t^2) = 0.$$

– Para $\lambda_1 = 0$ tenemos $y = 0$, $x = 0$.

– Para $\lambda_1 \neq 0$ tenemos $2 - x^2 - y^2 = 0$ y no se puede tener $x = 0$, $y = 0$. Se concluye que ambos valores son distintos de cero i.e. $2\lambda_1 = \frac{y}{x} = \frac{x}{y} \implies x^2 = y^2$ i.e. $x^2 = 1$. Además $y = 2\lambda_1 x = 4\lambda_1^2 y \implies \lambda_1 = \pm \frac{1}{2}$, por lo que si $x = y$, $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ y si $y = -x$, $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$. De esta manera tenemos:

x	0	1	-1	1	-1
y	0	1	-1	-1	1
λ_1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

De forma similar se obtiene:

z	0	2	-2	2	-2
t	0	2	-2	-2	2
λ_2	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

con lo cual se tienen 25 soluciones (x, y, z, t) , λ_1, λ_2 distintas.

Análisis de $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $t = 0$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$.

Es un candidato libre (no satura ninguna restricción). Se debe considerar únicamente el signo de los menores principales del Hessiano de f en $(0, 0, 0, 0)$:

$$H(0, 0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Los menores parciales de esta matriz son 0, -1, 0, 1 y la matriz es ni semidefinida, ni definida en $(0, 0, 0, 0)$ y no es un extremo.

Es claro que la función alrededor de $(0, 0, 0, 0)$ puede tener valores positivos y negativos.

Análisis del caso $(0, 0, \pm 2, \pm 2)$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \pm \frac{1}{2}$.

Para estos puntos $g_1 > 0$, $g_2 = 0$ y el Jacobiano $\frac{\partial g_2}{\partial(x, y, z, t)} = (0, 0, -2z, -2t)$ es de rango 1.

Para aplicar el criterio del hessiano orlado para Kuhn-Tucker, tomemos el orden z, t, x, y de manera que el primer término del jacobiano $\frac{\partial g_2}{\partial(z, t, x, y)}$ sea diferente de 0. Así el hessiano orlado (con $L = f + \lambda_2 g_2$) es:

$$H = \left(\begin{array}{cccc|c} L_{zz} & L_{zt} & L_{zx} & L_{zy} & (g_2)_z \\ L_{tz} & L_{tt} & L_{tx} & L_{ty} & (g_2)_t \\ L_{xz} & L_{xt} & L_{xx} & L_{xy} & (g_2)_x \\ L_{yz} & L_{yt} & L_{yx} & L_{yy} & (g_2)_y \\ \hline (g_2)_z & (g_2)_t & (g_2)_x & (g_2)_y & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc|c} -2\lambda_2 & 1 & 0 & 0 & -2z \\ 1 & -2\lambda_2 & 0 & 0 & -2t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline -2z & -2t & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Aquí, $n = 4$, $m = 2$, $q = 1$ (una restricción saturada), por lo que se consideran $n - (m - q) = 4 - 1 = 3$ menores orlados principales de H :

$$\det H_2 = \begin{pmatrix} -2\lambda_2 & 1 & -2z \\ 1 & -2\lambda_2 & -2t \\ -2z & -2t & 0 \end{pmatrix} = 8(\lambda_2(z^2 + t^2) + zt) = \begin{cases} 4(z+t)^2, & \text{si } \lambda_2 = \frac{1}{2} \\ -4(z-t)^2, & \text{si } \lambda_2 = -\frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$\det H_3 = \begin{pmatrix} -2\lambda_2 & 1 & 0 & -2z \\ 1 & -2\lambda_2 & 0 & -2t \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2z & -2t & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0, \quad \det H_4 = \det H = -\det H_2.$$

Así, las condiciones del Teorema no se satisfacen, ni para un máximo, ni para un mínimo.

Se verifica de manera similar que los cuatro candidatos para los cuales $\lambda_1 = \pm \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = 0$

no son extremos.

– Se consideran ahora los 16 candidatos para los cuales $\lambda_1 = \pm\frac{1}{2}$, $\lambda_2 = \pm\frac{1}{2}$.

Así tenemos que $g_1 = g_2 = 0$ y el rango de $\frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(x, y, z, t)} = \begin{pmatrix} -2x & -2y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2z & -2z \end{pmatrix}$ es 2.

Es claro que las condiciones $\lambda_j \leq 0$ ó $\lambda_j \geq 0$, $j = q+1, \dots, m$ i.e. $j = 1, 2$, son necesarias para ver que los ocho puntos que toman los valores de $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ ó $\lambda = -\frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{1}{2}$ no pueden ser extremos.

Finalmente, restan para estudio los ocho puntos para los cuales $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$ ó $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{2}$.

Tomando el orden (x, z, y, t) para que las 2 primeras columnas del Jacobiano sea de rango 2 i.e. $\frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(x, z, y, t)} = \begin{pmatrix} -2x & 0 & -2y & 0 \\ 0 & -2z & 0 & -2t \end{pmatrix}$, por lo que el hessiano orlado es:

$$H = \left(\begin{array}{cccc|cc} -2\lambda_1 & 0 & 1 & 0 & -2x & 0 \\ 0 & -2\lambda_2 & 0 & 1 & 0 & -2z \\ 1 & 0 & -2\lambda_1 & 0 & -2y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2\lambda_2 & 0 & -2t \\ \hline -2x & 0 & -2y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2z & 0 & -2t & 0 & 0 \end{array} \right),$$

donde $n = 4$, $m = 2$, $q = 0$ y $n - (m - q) = 2$ menores orlados principales deben calcularse:

$$\det H_3 = \begin{vmatrix} -2\lambda_1 & 0 & 1 & -2x & 0 \\ 0 & -2\lambda_2 & 0 & 0 & -2z \\ 1 & 0 & -2\lambda_1 & -2y & 0 \\ -2x & 0 & -2y & 0 & 0 \\ 0 & -2z & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 32z^2(-\lambda_1(x^2 + y^2) - xy)$$

$$= \begin{cases} -16z^2(x+y)^2 & \text{si } \lambda_1 = \frac{1}{2} \\ 16z^2(x-y)^2 & \text{si } \lambda_1 = -\frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$\det H_4 = \det H = 64(\lambda_1(x^2 + y^2) + xy)(\lambda_2(z^2 + t^2) + zt)$$

$$= \begin{cases} 16(x+y)^2(z+t)^2 & \text{si } \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2} \\ 16(x-y)^2(z-t)^2 & \text{si } \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Así, tenemos la siguiente tabla de los 8 candidatos a extremos:

x	y	z	t	λ_1	λ_2	$\det H_3$	$\det H_4$	f	tipo
1	1	2	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-	+	5	máximo
-1	-1	2	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-	+	5	máximo
1	1	-2	-2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-	+	5	máximo
-1	-1	-2	-2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-	+	5	máximo
1	-1	2	-2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	+	+	-5	mínimo
1	-1	-2	2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	+	+	-5	mínimo
-1	1	2	-2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	+	+	-5	mínimo
-1	1	-2	2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	+	+	-5	mínimo

Observe que para los primeros 4 candidatos de la tabla se tiene:

$$(-1)^3 \det H_3 = (-1)(-256) = 256 > 0,$$

$$(-1)^4 \det H_4 = 1024 > 0,$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2} > 0, \text{ i.e. son máximos.}$$

Para los cuatro últimos candidatos de la tabla se tiene:

$$(-1)^{m-q} \det H_3 = (-1)^2 256 > 0,$$

$$(-1)^{m-q} \det H_4 = (-1)^2 1024 > 0,$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{2} < 0, \text{ i.e. son mínimos.}$$

3.5 Ejercicios

3.5.1 Extremos sin restricciones

1. Determinar los extremos locales de las funciones siguientes:

a) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$

b) $f(x, y) = x^3 + y^3$

c) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$

d) $f(x, y) = (x - y)^2 + (x + y)^3$

e) $f(x, y) = x^3 + x^2 + y^2$

f) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ en \mathbb{R}_+^{*2}

g) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$

h) $f(x, y) = x^2y^3(1 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y)$

i) $f(x, y) = x^2y + \ln(1 + y^2)$

j) $f(x, y) = x((\ln x)^2 + y^2)$ en $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$

k) $f(x, y) = e^{x \operatorname{sen} y}$

l) $f(x, y) = (3x + 4y)e^{-(x^2+y^2)}$

m) $f(x, y) = xe^y + ye^x$

n) $f(x, y) = (x - y)e^{xy}$

o) $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \cos(x + y)$ en $]0, \pi[^2$

p) $f(x, y) = x^2 + y^2 + \cos(x^2 + y^2)$ en $] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[^2$

q) $f(x, y) = \frac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$ en \mathbb{R}_+^{*2}

r) $f(x, y, z) = (x + z^2)e^{x(y^2+z^2+1)}$

s) $f(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 + xyz + y - z$

t) $f(x, y, z) = xe^y + ye^z + ze^x$

u) $f(x, y, z) = xye^z + yze^x + zxe^y$

v) $f(x, y, z) = xyz(4 - x - y - z)$

w) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$

2. Sea $a > 0$, encontrar el mínimo de $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \sqrt{x^2 + (y - a)^2} + \sqrt{y^2 + (x - a)^2}$.

3. Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = (x^2 - y)(3x^2 - y)$.

a) Probar que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $g_\lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g_\lambda(x) = f(x, \lambda x)$ tiene un mínimo en 0.

b) ¿ f admite un mínimo local en $(0, 0)$?

4. Se considera el modelo $y = ax + b$, se dispone de n observaciones de x y de y denotadas

(x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$ y se requiere estimar gracias a ellas los parámetros desconocidos a y

b . Para esto se minimiza la suma de los cuadrados de los errores o residuos $y_i - ax_i - b$.

La función $f(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2$ debe minimizarse, es decir se deben determinar los valores de a y de b para los cuales f es mínima.

5. Encontrar los extremos de la función $f(x, y, z) = x^3z + y^3 - 3x^2y - 2z^2$.
6. Se consideran p puntos $m_i \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, \dots, p$, encontrar el punto $m \in \mathbb{R}^3$ tal que la suma de los cuadrados de las distancia de m a m_i , $i = 1, \dots, p$, sea mínima.
7. Determinar los extremos de las siguientes funciones:
- | | |
|---|---|
| a) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ | b) $f(x, y) = xy(a - x - y)$ |
| c) $f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$ | d) $f(x, y) = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$ |
| e) $f(x, y) = (2ax - x^2)(2by - y^2)$ | f) $f(x, y) = \text{sen } x + \text{sen } y + \cos(x + y)$ |
| | $0 \leq x, y \leq \frac{1}{4}\pi$ |
| g) $f(x, y) = \frac{a + bx + cy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$ | h) $f(x, y) = y\sqrt{1+x} + x\sqrt{1+y}$ |
| i) $f(x, y, z) = \ln(x^3y^2z^5(22 - x - y - z))$ | j) $f(x, y) = 4(x - y) + x^2 - y^2$ |
| k) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$ | l) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{y}$ |
| m) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 4xy - 2y^2$ | n) $f(x, y) = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$ |
| o) $f(x, y) = x^3y^2(12 - x - y)$ | p) $f(x, y) = 2x^2 - 4xy + y^2 - x + 2y$ |
| q) $f(x, y) = (x^2 + (y + 1)^2)(x^2 + (y - 1)^2)$ | r) $f(x, y) = x^2y + y^2x$ |
| s) $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2$ | t) $f(x, y) = \log(x^2 + y^2 + 1)$ |
| u) $f(x, y) = x^5y + xy^5 + xy$ | v) $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz$ |
8. La gráfica de la función $g(x, y) = \frac{1}{xy}$ es una superficie en \mathbb{R}^3 . Determinar los puntos de la superficie más próximos al origen $(0, 0, 0)$.
9. Determinar los valores máximos y mínimos de la función $f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$ en $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$.
10. Sea $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación definida por $f(x, y) = \frac{xy}{1 + 3x^2 + y^2}$, sobre el conjunto $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. Determinar los extremos de la función f .
11. Sea $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$, sobre le conjunto

$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -2 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 1\}$. Determinar los extremos de f .

12. Sea $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$, donde $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - y^2 = 25\}$.

Determinar el mínimo de f .

13. Sea $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9, 0 \leq x \leq y\}$, determinar los extremos de la función $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = \frac{y^2}{x+y}$.

14. Sea $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$, encontrar los extremos de $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \frac{x+y}{1+x^2+y^2}$.

15. Sea $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 4\}$ y sea $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} (\cos tx + y \operatorname{sen} tx)^{1/t}$.

a) Probar que $\forall (x, y) \in E, f(x, y) = e^{xy}$.

b) Determinar los extremos de la función f .

16. Determinar la menor distancia entre dos rectas d_1 y d_2 definidas por $d_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 2 - t, y = 3 + t, z = 1 - 2t, t \in \mathbb{R}\}$, $d_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 1 - s, y = 2 - s, z = 3 + s, s \in \mathbb{R}\}$.

17. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, demostrar que la función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - \frac{1}{(1 + \alpha^2 x^2 + y^2)^2}$ tiene un mínimo local en $(0, 0)$.

18. Sea $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy \neq 0\}$, encontrar el punto estacionario de la función $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $f(x, y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ y estudiar su naturaleza.

19. Determinar los puntos estacionarios de la función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^3 - 3x + xy^2$ y estudiar su naturaleza.

20. a) Determinar los puntos críticos de la función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = 12xy - x^2y - xy^2$ y estudiar su naturaleza.

b) ¿El máximo obtenido en a) es un máximo global?

21. Determinar los puntos críticos de $f(x, y) = x^2 + x \operatorname{sen} y + \frac{1}{4} \cos y + 5$ definida sobre \mathbb{R} y estudiar su naturaleza.

22. a) Determinar los puntos estacionarios de la función $f(x, y) = y^2 + y \cos x - \sin x - 2$ definida sobre \mathbb{R} y estudiar su naturaleza.
- b) Demostrar que $\min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y) = -3$.
23. Determinar los puntos críticos de la función $f(x, y) = \cos(x + y) + \sin y$, sobre \mathbb{R}^2 y estudiar su naturaleza.
24. Estudiar los puntos críticos de la función $f(x, y) = (x + y) + \sin(x + y) + \cos(x + y)$, en \mathbb{R}^2 .
25. Determinar los extremos de la función $f(x, y) = xy - \ln(x^2 + y^2)$.
26. Determinar los extremos de la función de $f(x, y) = a + (x - y)^4 + (y - 1)^4$.
27. Determinar si $x = y = z = 0$ es un extremo de $f(x, y, z) = ax^2e^y + y^2e^z + z^2e^x$.
28. Determine los extremos de las funciones $f(x, y)$ en la región indicada.
- a) $f(x, y) = x^2 - y^2$ sobre $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.
- b) $f(x, y) = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ sobre $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$.
- c) $f(x, y) = x^2y(4 - x - y)$ sobre $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq x + y \leq 6\}$.
- d) $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}(2x^2 + 3y^2)$ sobre $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.
- e) $f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ sobre $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x, y \leq \frac{\pi}{2}\}$.
- f) $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 - 2x + 2y$ sobre $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x, y \leq 2\}$.
- g) $f(x, y) = \sin x \sin y \sin(x + y)$ sobre $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x, y \leq \pi\}$.

3.5.2 Extremos con restricciones

29. Determinar los extremos de $f(x, y) = x^2 + y$ bajo la restricción $g(x, y) = x^3 + y = 0$.
30. Determinar los extremos de $f(x, y) = 6 - 4x - 3y$ bajo la restricción $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$.
31. Determinar los extremos de $f(x, y) = x^2 + y^2$ sujeto a $g(x, y) = x^4 + y^4 - 1 = 0$.
32. Determine los valores extremos de $f(x, y) = xy$ con la condición $x + y = 1$.
33. Determinar las distancias mínimas y máximas del origen a la curva $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$.
34. Determinar los ejes de la elipse de ecuación $2x^2 + xy + 2y^2 - 1 = 0$.

35. Determinar la menor distancia del origen a la hipérbola $x^2 + 8xy + 7y^2 - 225 = 0$.
36. Determinar entre los triángulos rectángulos que tienen área A , el triángulo de menor hipotenusa.
37. Sea $f(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 18y$ sujeta a la restricción $g(x, y) = 3x^2y - y^3 - 6x = 0$, demostrar que f alcanza dos extremos en los puntos $x = y = \pm\sqrt{3}$.
38. Encontrar la distancia más corta del punto $(1, 0)$ a la parábola $y^2 = 4x$.
39. Determinar los puntos (x, y) y las direcciones para las cuales la derivada direccional de $f(x, y) = 3x^2 + y^2$, tiene valor máximo, si $f(x, y)$ está en el círculo $x^2 + y^2 = 1$.
40. Determine si las funciones f con las restricciones g que se dan a continuación tienen extremos:
- $f(x, y) = x^m + y^m$, $g(x, y) = x + y - 2 = 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $m > 1$.
 - $f(x, y) = xy$, $g(x, y) = x^2 + y^2 - 2a^2 = 0$.
 - $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, $g(x, y) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{a^2}$, $a > 0$.
 - $f(x, y) = a \cos^2 x + b \cos^2 y$, $g(x, y) = y - x - \frac{\pi}{4} = 0$.
 - $f(x, y, z) = x + y + z$, $g(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.
 - $f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2$, $a, b, c > 0$, $g(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0$.
 - $f(x, y, z) = y^2 + 4z^2 - 4yz - 2xz - 2xy$, $g(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + 6z^2 - 1 = 0$.
 - $f(x, y, z) = x + z$, $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.
 - $f(x, y, z) = xyz$, $g(x, y, z) = xy + xz + yz - 5 = 0$.
41. Determinar los ejes de la elipse dada por la intersección del cilindro $x^2 + y^2 - 4 = 0$ y el plano $x + y + 2z - 2 = 0$.
42. Determinar entre los triángulos de perímetro $2p$, los que tienen área máxima.
43. Encontrar los extremos de la función $f(x, y, z) = z$, bajo las restricciones $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2 = 0$, $h(x, y, z) = x + y + z = 0$.
44. Determinar los extremos de $f(x, y, z) = xy + xz + yz$ bajo la restricción $xyz = 125$.

45. Determinar los extremos de $f(x, y, z) = xyz$ bajo las restricciones $x + y + z = 5$, $xy + yz + xz = 8$.
46. Determinar los extremos de $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$ en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
47. Determinar los puntos de la curva que es la intersección de las dos superficies $g_1(x, y, z) = x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1$ y $g_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, que están más próximos al origen.
48. Representar el número positivo a de manera que el producto de cuatro factores positivos sea de suma mínima.
49. Descomponer un número positivo en tres sumandos positivos de modo que el producto sea máximo.
50. Determinar el punto del plano $2x - 3y + z = 1$ más próximo al punto $(3, -2, 1)$.
51. Determinar el volumen máximo de una caja de base rectangular inscrita en una semiesfera de radio R .
52. Determine el volumen máximo de una caja de base rectangular inscrita en el elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.
53. Determinar los puntos del elipsoide $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} + \frac{z^2}{4} = 1$, cuya distancia al plano $x + y + z - 10 = 0$ es máxima y mínima.
54. Determinar el elipsoide de volumen mínimo con ejes en los ejes coordenados que pasa por $(2, -3, 5)$.
55. Un paraboloides elíptico de ecuación $\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z$, se corta por el plano $z = a$. Determinar el volumen del mayor paralelepípedo recto rectangular que se puede inscribir en esta figura.
56. Por el punto $(1, 1, 2)$ pasa el plano que forma con los tres planos coordenados un tetraedro. Determinar las ecuaciones del plano, cuando el volumen del tetraedro formado es mínimo.

57. Determinar los extremos de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ bajo la restricción $g(x, y, z) = 5x^2 + 9y^2 + 6z^2 + 4yz - 1 = 0$.
58. Determinar los extremos de la función $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, bajo las restricciones $g(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0$, $h(x, y, z) = xy - 1 = 0$.
59. Determinar los extremos de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sobre \mathbb{R}^3 , bajo las restricciones $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 4 = 0$, $h(x, y, z) = xyz - 1 = 0$.
60. Determinar los extremos de la función $f(x, y, z) = x + y + z$ sobre \mathbb{R} , bajo las restricciones $g(x, y, z) = (x - 4) + 2(y - 2) + 3(z - 3) = 0$, $h(x, y, z) = (x - 4)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 - 1 = 0$.
61. Determinar los extremos de $f(x, y, z) = xyz$ sobre \mathbb{R}^3 , bajo las restricciones $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 < 1$ y $h(x, y, z) = 1 - 2\sin(x^2 + y^2 + z^2) = 0$.
62. Determinar los puntos extremos de la función $f(x, y, z) = xy + xz + yz$ bajo la restricción $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$.
63. Determinar los extremos de $f(x, y, z) = xy + xz + yz$ bajo la restricción $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.
64. Determinar en el interior de un triángulo dado de área A , el punto cuyo producto de las distancias a los tres lados sea máxima.
65. Determine los extremos de la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, bajo la restricciones $g_1(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0$, $g_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$.
66. Determinar el pie de la perpendicular de $(6, 2, 3)$ al plano $z = 5x - y + 2$ que minimiza la distancia al punto (x, y, z) en el plano.
67. Determinar la distancia mínima de un punto (x_0, y_0, z_0) al plano $ax + by + cz + d = 0$.
68. Consideremos la función $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 4$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) < 0$, $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 1$. Determinar en $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + z^2 \leq 1, 0 \leq y \leq 3\}$, los máximos y mínimos de la función.
69. Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado y sea $f: \bar{E} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua que es

constante en la frontera de E y que es de clase C^1 sobre E . Probar que f tiene al menos un punto estacionario.

70. Sea $E \subset \mathbb{R}^n$, una bola abierta y sea $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, una función de clase C^1 tal que $\forall \mathbf{x} \in E$, $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) = 0$. Probar que f es constante.

71. Sea $n \in \mathbb{N}^*$, determinar el máximo de la función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n x_k^2$, bajo la restricción $\|\mathbf{x}\| = 1$, con $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Deducir que $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\prod_{k=1}^n y_k \leq \left(\frac{\|\mathbf{y}\|}{\sqrt{n}} \right)^n$.

72. Sea $n \in \mathbb{N}^*$ y $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, donde no todos los α_i son nulos. Determinar el mínimo de la función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x_1, \dots, x_n) = \|\mathbf{x}\|^2$, bajo la restricción $\alpha \cdot \mathbf{x} - 1 = 0$.

73. Demostrar que $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^2$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Bibliografía

- [1] Archinard Gabriel, Guerrien Bernard 1988 *Analyse mathématique pour économistes*, 3^a édition, Editorial Economica, Paris.
- [2] Apostol Tom 1977 *Análisis Matemático*, Editorial Reverté, Barcelona.
- [3] Apostol Tom, 1967 *Calculus*, Volumen II, Blaisdell Publishing Company, Massachusetts.
- [4] Attali P., Guillard J., Tissier A. 1995 *Analyse 2: Collection exercices et problèmes*, Editions Breal, Rosny.
- [5] Attali P., Guillard J., Tissier A. 1993 *Géométrie 1: Collection exercices et problèmes*, Editions Breal, Rosny.
- [6] Attali P., Guillard J., Tissier A. 1992 *Géométrie 2: Collection exercices et problèmes*, Editions Breal, Rosny.
- [7] Bass J. 1970 *Curso de matemáticas*, Tomo I, Editorial Toray–Masson, Barcelona
- [8] Berman G.N. 1983 *Problemas y ejercicios de análisis matemático*, 2^a edición, Editorial MIR, Moscú.
- [9] Bronshtein I., Semendiaev K. 1982 *Manual de matemáticas para ingenieros y estudiantes*, 4^a edición, Editorial MIR, Moscú.
- [10] Cartan Henri 1997 *Cours de Calcul différentiel*, Editorial Hermann, Paris.
- [11] Churchill R.V., Brown G.H. 1992 *Variable compleja y aplicaciones*, 5^a edición, McGraw-Hill, Madrid

- [12] De Castro Korgi, Rodrigo 2003 *El universo L^AT_EX*, Editorial Panamericana, Bogotá, Colombia.
- [13] Del Castillo F. 1980 *Análisis matemático*, Vol.2, Editorial Alhambra, Madrid.
- [14] Demidovich Boris P. 1976 *5000 Problemas de Análisis Matemático* Editorial Paraninfo, Madrid.
- [15] Demidovich Boris P. 1973 *Problemas y ejercicios de análisis matemático*, 4^a edición, Editorial MIR, Moscú.
- [16] Dixmier J. 1976 *Cours de Mathématiques*, Editorial Dunod, Paris
- [17] Douchet Jacques, Zwahlen Bruno 1983 *Calcul différentiel et intégral. Fonctions réelles d'une variable réelle*, Vol.1, Editorial Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, Suisse.
- [18] Douchet Jacques, Zwahlen Bruno 1987 *Calcul différentiel et intégral. Fonctions réelles d'une variable réelle, Exercices résolus*, Vol.3, Editorial Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, Suisse.
- [19] Douchet Jacques, Zwahlen Bruno 1986 *Calcul différentiel et intégral. Fonctions réelles de plusieurs variables réelles*, Vol.2, Editorial Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, Suisse.
- [20] Douchet Jacques, Zwahlen Bruno 1989 *Calcul différentiel et intégral. Fonctions réelles de plusieurs variables réelles, Exercices résolus*, Vol.4, Editorial Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, Suisse.
- [21] Doneddu A. 1981 *Fonctions vectorielles. Séries. Equations différentielles*, Tome 5, 2^a édition, Vuibert, Paris.
- [22] Doneddu A. 1981 *Géométrie différentielle. Intégrales multiples*, Tome 6, 2^a édition, Vuibert, Paris.
- [23] Efimov A., Demidovich Boris 1983 *Problemas de las matemáticas superiores*, Vol.1, Editorial MIR, Moscú.

- [24] Edwards Jr., C.H. 1973 *Advanced calculus of several variables*, Dover, New York.
- [25] Efimov A., Demidovich Boris 1983 *Problemas de las matemáticas superiores*, Vol.2, Editorial MIR, Moscú.
- [26] Fogiel M. 1994 *Handbook of Mathematical, Scientific and Engineering*, New Jersey.
- [27] Goossens Michel, Mittelbach Frank, Samarin Alexander 1994, *The L^AT_EX Companion*, Addison Wesley Publishing Company.
- [28] Goossens Michel, Rahtz Sebastian 1999, *The L^AT_EX Web Companion*, Addison Wesley Publishing Company.
- [29] Hobby John 1997, *The MetaPost System*.
- [30] Hobby John 1997, *Drawing Graphs with MetaPost*.
- [31] Hobby John 1998, *A User's Manual for MetaPost*.
- [32] Knuth, Donald 1986, *The METAFONTbook*, Addison Wesley Publishing Company.
- [33] Knuth, Donald 1995, *The T_EXbook*, Addison Wesley Publishing Company.
- [34] Krée P. 1969 *Introduction aux mathématiques et a leurs applications fondamentales*, Editorial Dunod, Paris.
- [35] Kreysig Erwin 1993 *Matemáticas avanzadas para ingeniería*, Vol 1, Limusa, México.
- [36] Lamport, Leslie 1994 *L^AT_EX: A document preparation system*, Addison Wesley Publishing Company, 2^a Edition.
- [37] Lang Serge 1990 *Introducción al Análisis Matemático*, Addison–Wesley Iberoamericana, Delaware.
- [38] Lang Serge 1994 *Calculus of several variables*, Sringer–Verlag.
- [39] Lelong–Ferrand Jaqueline 1963 *Géométrie différentielle*, Masson, Paris.
- [40] Liret F., Zisman M. 1984 *Maths*, Tome 2, Editorial Dunod, Paris
- [41] Liret F., Zisman M. 1987 *Maths*, Tome 3, Editorial Dunod, Paris

- [42] Marsden J, Tromba A. 1991 *Cálculo vectorial*, 3ª edición, Addison Wesley Iberoamericana, Delaware.
- [43] Nikolsky S.M. 1977 *A course of Mathematical Analysis*, Vol.1, Editorial MIR, Moscú.
- [44] Nikolsky S.M. 1977 *A course of Mathematical Analysis*, Vol.2, Editorial MIR, Moscú.
- [45] Monier J.M. 1990 *Analyse: Exercices résolus*, Tome 1, Dunod, Paris.
- [46] Monier J.M. 1990 *Analyse: Exercices résolus*, Tome 2, Dunod, Paris.
- [47] Monier J.M. 1993 *Géométrie: Exercices résolus*, Dunod, Paris.
- [48] Monier J.M. 1997 *Analyse*, Tome 4, Dunod, Paris.
- [49] Monier J.M. 1997 *Géométrie*, Tome 7, Dunod, Paris.
- [50] Ohl Thorsten 1997, *EMP: Encapsulated METAPOST for L^AT_EX*.
- [51] Piskunov N. 1978 *Cálculo diferencial e integral*, Vol I, Editorial MIR,
- [52] Piskunov N. 1978 *Cálculo diferencial e integral*, Vol II, Editorial MIR, Moscú.
- [53] Quinet J. 1978 *Cours élémentaire de mathématiques supérieures, Géométrie, Tomo 5*, 6ª edición, Dunod, Paris.
- [54] Quinet J. 1996 *Cours élémentaire de mathématiques supérieures, Calcul intégral et séries, Tomo 3*, 6ª edición, Dunod, Paris.
- [55] Restrepo G. 1997 *Análisis en \mathbb{R}^n* , Editorial Universidad del Valle, Cali.
- [56] Reckdahl Keith *Using Imported Graphics un L^AT_EX2e*.
- [57] Ríbnikov K. 1987 *Historia de las matemáticas*, Editorial MIR, Moscú.
- [58] Ruskeepää, Heikki 1999, *Mathematica Navigator*, Academic Press.
- [59] Spiegel M.R. 1992 *Manual de fórmulas y tablas matemáticas*, Editorial McGraw-Hill, México.
- [60] Taylor A., Mann W. Robert 1989 *Fundamentos de cálculo avanzado*, Editorial Limusa, Mexico.

- [61] Tauvel, Patrice 1999 *Analyse complexe*, Dunod, Paris.

Índice

- abierto, 8
- adherencia, 10
- aplicación
 - bilineal continua, 36
 - lineal, 25
 - lineal continua, 26
 - lineal continua invertible, 26
 - multilineal continua, 34
- bola
 - abierta, 7
 - cerrada, 7
- cerrado, 9
- compacto, 15
- composición
 - de aplicaciones lineales continuas, 31
 - de funciones continuas, 22
- condiciones
 - de Kuhn–Tucker, 154, 157
- condiciones de segundo orden, 144
- condiciones necesarias
 - para Kuhn–Tucker, 170
 - para tener extremos con restricciones en forma de igualdad, 151
- condiciones suficientes
 - para Kuhn–Tucker, 169
 - para tener extremos con restricciones en forma de igualdad, 151
- conjunto
 - abierto, 8
 - acotado, 14
 - cerrado, 9
 - compacto, 15
 - convexo, 12
 - denso, 11
 - interior, 9
 - separable, 11
- convexo, 84
- criterio
 - del hessiano orlado para Huhn–Tucker, 169
 - suficiente de diferenciabilidad, 77
- derivada
 - direccional, 73

- parcial, 70, 72
- parcial de orden superior, 72
- diámetro
 - de un conjunto, 14
- diferencial, 73, 75
 - de una función bilineal, 101
 - en espacios de Banach, 101
- distancia, 14
 - de un punto a un conjunto, 14
 - entre conjuntos, 14
- ejercicios
 - aplicaciones, 117
 - aplicaciones lineales, 61
 - compacidad, 55
 - completitud, 53
 - continuidad, 50, 64
 - convexidad, 47
 - diferenciabilidad, 109
 - distancia, 47
 - espacio de matrices, 63
 - extremos con restricciones en forma
 - de igualdad, 184
 - extremos sin restricciones, 181
 - formas diferenciales, 123
 - frontera, 44
 - función implícita, 119
 - funciones lipschitzianas, 53
 - generalidades, 37
 - homeomorfismos, 52
 - normas, 39
 - parte densa, 45
 - puntos aislados, 46
 - puntos de acumulación, 46
 - regla de la cadena, 115
 - sucesiones, 49
 - topología, 40
 - topología inducida, 49
- espacio
 - de Banach, 13
 - de Hilbert, 13
 - de operadores, 28
 - métrico, 14
 - pre-hilbertiano, 6
 - topológico, 10
 - vectorial, 3
 - vectorial de dimensión finita, 32
 - vectorial normado, 3
- extremo
 - de una función, 129
 - de una función bajo restricciones en
 - forma de igualdad, 144
 - de una función con restricciones en
 - forma de desigualdades, 154
- fórmula

- de Taylor para funciones de varias variables, 97
- familia
 - de abiertos, 10
 - de conjuntos, 1
- forma
 - cuadrática, 128
 - cuadrática definida negativa, 128
 - cuadrática definida positiva, 128
 - cuadrática indefinida, 128
- frontera, 12
- función
 - n veces diferenciable en espacios de Banach, 109
 - bilineal simétrica, 105
 - componente, 23
 - continua, 20
 - continuamente diferenciable, 101
 - contractiva, 25
 - de clase C^r , 81
 - de Lagrange, 136
 - diferenciable, 73, 75
 - dos veces diferenciable, 104
 - lipchitziana, 25
 - proyección, 22
 - regular en un punto, 95
 - uniformemente continua, 24
 - gradiente, 75
 - hessiano, 131
 - orlado, 151
 - hiperplano, 81, 82
 - homeomorfismo, 28
 - interpretación
 - geométrica del diferencial, 84
 - isometría, 31
 - isomorfismo, 31
 - límite
 - de una sucesión, 12
 - lagrangiano, 136
 - mínimo
 - absoluto de una función, 130
 - de una función, 129, 131
 - máximo
 - absoluto de una función, 130
 - de una función, 129, 131
 - matriz, 29
 - definida negativa, 127
 - definida positiva, 127
 - hessiana, 131
 - hessiana orlada, 151
 - indefinida, 127
 - Jacobiana, 76

ortogonales, 81