Índice general

Capítulo 1

Ecuación paramétrica y ecuación polar de una curva en el plano

1.1. Curvas en forma paramétrica en el plano

En el estudio de este tema nos situamos en el plano $\mathbb{R}^2$, provisto de un sistema ortonormado de referencia $\{\mathbf{0}, \mathtt{i}, \mathtt{j}\}$. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo.

Una función $f\colon I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva de clase C^1 o clase C^2, $\Gamma = f(I)$ la trayectoria. Para $t \in I$, se escribe $\mathtt{r}(t) = f(t) = (x(t), y(t))$ la coordenada de $\mathtt{r}(t)$ en el sistema $\{\mathtt{i}, \mathtt{j}\}$, es decir $\mathtt{r}(t) = (x(t), y(t)) = x(t)\mathtt{i} + y(t)\mathtt{j}$.

1.2. Estudio en un vecindario del punto (x_0, y_0)

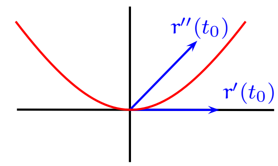
Sea $\mathtt{r}(t) = (x(t), y(t))$ la representación paramétrica a la curva Γ. Se demuestra que la fórmula de Taylor-Young se extiende al caso de funciones vectoriales. Con la fórmula se puede estudiar la existencia de una tangente en el punto (x_0, y_0) y la posición de la curva respecto a la tangente en dicho punto.

– Si la derivada $(x'(t_0), y'(t_0)) = \mathtt{r}'(t_0) \neq (0, 0)$, la curva tiene una tangente, que es la recta definida por el punto (x_0, y_0) y el vector $(x_0'(t), y_0'(t)) = \mathtt{r}'(t_0)$.

$$\mathtt{r}(t) - \mathtt{r}(t_0) = (t - t_0)\mathtt{r}'(t_0) + \mathtt{o}((t - t_0)),$$

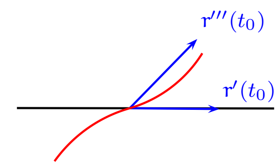
donde $\mathtt{o}((t - t_0)) = (o_1(t - t_0), o_2(t - t_0))$ es la $\mathtt{o}$ de Landau bidimensional, que tiene la propiedad $o_i(t - t_0) \longrightarrow 0$, si $t \to t_0$, $i = 1, 2$.

i) Si se dejan las condiciones y si $(x''(t_0), y''(t_0)) = \mathrm{r}''(t_0)$ no es colineal con $(x'(t), y'(t)) = \mathrm{r}'(t_0)$, la curva se sitúa en el semiplano definido por la tangente y que contiene al vector $(x''(t_0), y''(t_0)) = \mathrm{r}''(t_0)$.



$$\mathrm{r}(t) - \mathrm{r}(t_0) = (t - t_0)\mathrm{r}'(t_0) + \frac{1}{2}(t - t_0)^2\mathrm{r}''(t_0) + \mathrm{o}((t - t_0)^2).$$

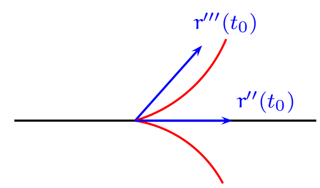
ii) Si $\mathrm{r}''(t_0)$ es colineal a $\mathrm{r}'(t_0)$ ($\mathrm{r}''(t_0) = a\mathrm{r}'(t_0)$) y si $\mathrm{r}'''(t_0)$ no es colineal a $\mathrm{r}'(t_0)$, la curva atraviesa la tangente. Se dice que (x_0, y_0) es un punto de inflexión.



$$\mathrm{r}(t) - \mathrm{r}(t_0) = (t - t_0)(1 + \frac{1}{2}(t - t_0)a)\mathrm{r}'(t_0) + \frac{1}{3!}(t - t_0)^3\mathrm{r}'''(t_0) + \mathrm{o}((t - t_0)^3).$$

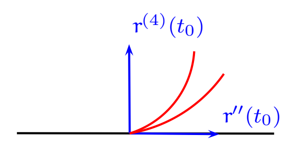
– Si la derivada $(x'(t_0), y'(t_0)) = \mathrm{r}'(t_0) = (0, 0)$ y si $\mathrm{r}''(t_0) \neq (0, 0)$, la curva tiene una tangente, que es la recta definida por el punto (x_0, y_0) y el vector $(x_0''(t), y_0''(t)) = \mathrm{r}''(t_0)$.

iii) Si $\mathrm{r}'''(t_0)$ no es colineal a $\mathrm{r}''(t_0)$ la curva tiene una parte a cada lado de la tangente. Se dice que (x_0, y_0) es un punto de retroceso de primera especie.



$$\mathrm{r}(t) - \mathrm{r}(t_0) = \frac{1}{2}(t - t_0)^2\mathrm{r}''(t_0) + \frac{1}{3!}(t - t_0)^3\mathrm{r}'''(t_0) + \mathrm{o}((t - t_0)^3).$$

iv) Si $\mathrm{r}'''(t_0)$ es colineal a $\mathrm{r}''(t_0)$ ($\mathrm{r}'''(t_0) = a\mathrm{r}''(t_0)$) y si $\mathrm{r}^{(4)}(t_0)$ no es colineal con $\mathrm{r}''(t_0)$, la curva está del mismo lado que en la tangente. Se dice que (x_0, y_0) es un punto retroceso de la segunda especie.



$$\mathrm{r}(t) - \mathrm{r}(t_0) = \frac{1}{2}(t - t_0)^2(1 + \frac{1}{3}(t - t_0)a)\mathrm{r}''(t_0) + \frac{1}{4!}(t - t_0)^4\mathrm{r}^{(4)}(t_0) + \mathrm{o}((t - t_0)^4).$$

1.2.1. Ramas infinitas

El estudio de ramas infinitas se basa en el estudio de y como función de x.

i) Si $x \longrightarrow x_0$ y si $y \longrightarrow +\infty$ o si $y \longrightarrow -\infty$, cuando $t \to t_0$, la recta $x = x_0$ es una asíntota de la curva.

– Similarmente si $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$ y si $y \to y_0$, cuando $t \to t_0$, la recta $y = y_0$ es una asíntota de la curva.

ii) Si $x \to \pm\infty$, $y \to \pm\infty$, cuando $t \to t_0$, se estudia que el límite de y/x para saber si la curva tiene una dirección asintótica.

– Si $y/x \longrightarrow +\infty$ o si $y/x \longrightarrow -\infty$ la curva tiene una rama parabólica en la dirección del eje y.

– Si $y/x \longrightarrow 0$ la curva tiene una dirección asintótica del eje x.

iii) Si $y/x \longrightarrow a \neq 0$ se busca si $y - ax$ tienen el mismo límite b finito, en cuyo caso la recta $y = ax + b$ es asintótica a la curva. Efectuando un desarrollo limitado de $y - ax - b$ en el punto t_0, se puede determinar la posición de la curva respecto a la asíntota.

iv) Todo lo anterior vale cuando $t \to +\infty$ o cuando $t \to -\infty$. Para estudiar la posición de la curva con respecto a la asíntota, se efectúa un desarrollo limitado de $y - ax - b$ en función de $1/t$.

Ejemplo Estudiar las ramas infinitas de la curva parametizada: $x = \dfrac{1}{t-1}$, $y = \dfrac{t^2+1}{t-1}$.

Es claro que x y y tienden a infinito cuando t tiende a 1, por lo tanto $\dfrac{y}{x} = t^2 + 1 \longrightarrow 2$ y $y - 2x = \dfrac{t^2+1}{t-1} - \dfrac{2}{t-1} = t + 1 \longrightarrow 2$.

La curva tiene como asíntota la recta $y = 2x + 2$.

Por otro lado, cuando $t \longrightarrow \pm\infty$, $x \longrightarrow 0$ y $y \longrightarrow \pm\infty$, la curva tiene por asíntota el eje y.

1.2.2. Puntos dobles

Se dice que un punto $(x_0, y_0) = \mathtt{r}(t_0)$ de la curva parametizada $\mathtt{r}(t)$ es doble, si existen $t_1 \neq t_0$ tal que $\mathtt{r}(t_0) = \mathtt{r}(t_1)$, es decir $x(t_0) = x(t_1)$, $y(t_0) = y(t_1)$.

– Cuando x y y son fracciones racionales se empieza por simplificar $t_1 - t_0$. Luego se considera $s = t_1 + t_0$ y $p = t_1 t_0$; se calcula s y p y se deduce t_1 y t_0, $x = x(t_1) = x(t_0)$, $y = y(t_1) = y(t_0)$.

Un ejemplo muy frecuente es el siguiente.

Supongamos que $x(t) = \dfrac{a_1 t^2 + b_1 t + c_1}{\alpha_1 t^2 + \beta_1 t + \gamma_1}$, $y(t) = \dfrac{a_2 t^2 + b_2 t + c_2}{\alpha_2 t^2 + \beta_2 t + \gamma_2}$. Para que (x, y) sean las coordenadas de un punto doble, es necesario y suficiente que las ecuaciones de 2^o grado

$$x(\alpha_1 X^2 + \beta_1 X + \gamma_1) - (a_1 X^2 + b_1 X + c_1) = 0$$
$$y(\alpha_2 X^2 + \beta_2 X + \gamma_2) - (a_2 X^2 + b_2 X + c_2) = 0,$$

tengan dos raíces comunes, o bien que los coeficientes son proporcionales:

$$\frac{x\alpha_1 - a_1}{y\alpha_1 - a_2} = \frac{x\beta_1 - b_1}{y\beta_2 - b_2} = \frac{x\gamma_1 - c_1}{y\gamma_2 - c_2}\,.$$

Ejemplo 1 Determinar los puntos dobles de la curva $x = 2t + t^2$, $y = 2t - \dfrac{1}{t^2}$.

Escribiendo $2t_0 + t_0^2 = 2t_1 + t_1^2$, $2t_0 - \dfrac{1}{t_0^2} = 2t_1 - \dfrac{1}{t_1^2}$ y simplificado por $t_0 - t_1$, se tiene $2 + t_0 + t_1 = 0$. Sea $s = -2$ y sea $s/p^2 = -2$, entonces $s = -2$, $p^2 = 1$.

– Si $p = 1 \Longrightarrow t_0, t_1$ son raíces de la ecuación $t^2 + 2t + 1 = 0$.

Así que $t_0 = t_1 = -1$ que no puede ser $t_0 \neq t_1$.

– Si $p = -1$, t_0, t_1 son raíces de $t^2+2t-1 = 0 \Longrightarrow t_0 = -1+\sqrt{2}$, $t_1 = -1-\sqrt{2} \Longrightarrow x = 1$, $y = -5$.

Ejemplo 2 Determinar los puntos dobles de la curva $x = \dfrac{t^2 + 3t - 2}{t^2 - t + 2}$, $y = \dfrac{t - 1}{t^2 + t + 1}$.

– Si se usa el primer método, debemos tener que:

$$\frac{t_0^2 + 3t_0 - 2}{t_0^2 - t_0 + 2} = \frac{t_1^2 + 3t_1 - 2}{t_1^2 - t_1 + 2}\,, \quad \frac{t_0 - 1}{t_0^2 + t_0 + 1} = \frac{t_1 - 1}{t_1^2 + t_1 + 1}\,.$$

La primera relación conduce a que $-4(t_0 - t_1)(t_0 t_1 - 1 - (t_1 + t_0)) = 0$, o sea $s - p = -1$ y la segunda a que $(t_1 - t_0)(t_1 t_0 - 2 - (t_1 - t_0)) = 0$, es decir $s - p = -2$, que es imposible.

– El segundo método se aplica aquí y equivale a decir que los coeficientes de los polinomios $(x - 1)X^2 - (x + 3)X + 2x + 2$ y $X^2 + (y - 1)X + y + 1$ son proporcionales, es decir $\dfrac{x - 1}{y} = \dfrac{x + 3}{1 - y} = \dfrac{2x + 2}{y + 1} \Longrightarrow x = 1, y = 0$.

El primer método no funciona, pues $(1, 0)$ se tiene cuando $t \to 1$ y cuando $t \to \pm\infty$.

1.2.3. Estudio del intervalo

- Cuando $x(t)$ y $y(t)$ tienen el mismo período T, el intervalo de variación de t es un intervalo de tamaño T.

- Si $x(t)$ y $y(t)$ son impares, la curva es simétrica con respecto al origen. Se toma el intervalo $[\,0, +\infty\,[$ o en el caso de un período T, el intervalo $[\,0, T/2\,]$.

– Si $x(t)$ es impar y $y(t)$ par, la curva es simétrica con respecto al eje y.

– Si $x(t)$ es par y $y(t)$ impar, la curva es simétrica con respecto al eje x.

El intervalo se deduce como anteriormente.

– Si $x(t)$ es par y $y(t)$ es par, la curva se recorre dos veces cuando x varía de $-\infty$ a $+\infty$. Es suficiente limitarse al intervalo $[\,0, +\infty\,[$.

Ejemplo La curva $x = a\cos t$, $y = b\,\mathrm{sen}\,t$ tiene período 2π. Dado que $x(t)$ es par y $y(t)$ es impar, el gráfico es simétrico con respecto al eje x; pero al cambio de variable t por $t - \pi$ transforma x en $-x$, conservando a y, entonces el gráfico es simétrico con respecto al eje y y el intervalo $[\,0, \frac{1}{2}\pi\,]$ es suficiente de analizar.

Nota En algunos casos el gráfico hace aparecer una simetría que no es evidente en las expresiones de $x(t)$ y de $y(t)$. Se tratará entonces de determinar el cambio a efectuar sobre t, para obtener esta simetría.

1.3. Trazado de una curva parametrizada

1.3.1. Reglas

1. Estudiar la periodicidad y simetría para determinar el intervalo de estudio.

2. Calcular las derivadas $x'(t)$, $y'(t)$; se busca determinar el signo y los puntos donde se anulan.

3. Hacer un cuadro de variación con seis líneas t, x, x', y', $\dfrac{dy}{dx}$ aportando los valores de x, y significativos y los de $x'(t)$ y $y'(t)$. Indicar la variación de $x(t)$ y $y(t)$.

4. Estudiar las ramas infinitas.

5. Estudiar los puntos singulares.

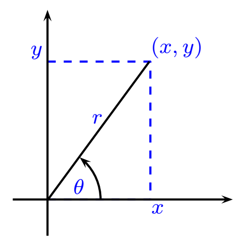
6. Construir la curva. Sobre cada intervalo en que $x(t)$ y $y(t)$ son monótonos todo sucede como si y es función de x.

7. Verificar que $\dfrac{dy}{dx}$ corresponda con la forma de la curva.

8. Buscar las coordenadas de los puntos dobles.

1.4. Curvas en coordenadas polares

Al describir un punto en el plano cartesiano, se recurre a dos ejes perpendiculares y los valores sobre los ejes son los que caracterizan el punto (x, y). Sin embargo, hay otras maneras de representar este punto, con ayuda del ángulo formado por el segmento que une el punto del origen y el eje x, por ejemplo.



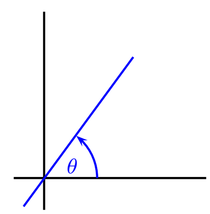
Así tenemos que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = r\cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\theta$. El punto descrito por el par (r, θ) se denomina coordenadas polares. Al origen se le llama también polo.

Ejemplo La ecuación $r = \operatorname{sen}\theta$ se puede expresar en coordenadas rectangulares, dado que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, pues $r^2 = r\operatorname{sen}\theta \Longrightarrow x^2 + y^2 = y \Longrightarrow x^2 + (y^2 - y + \frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$, es decir $x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ i.e. es el círculo del radio $\frac{1}{2}$, con centro $(0, \frac{1}{2})$.

Ejemplo

a) Recta que pasa por el origen.

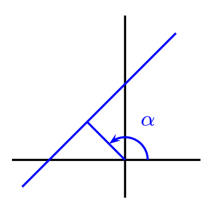
Este caso es muy simple: $\theta = \theta_0$.

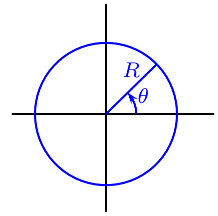


b) Recta que no pasa por el origen.

La ecuación general de una recta que no pasa por el origen es $ax + by + c = 0$, $c \neq 0$, por lo que $ar\cos\theta + br\operatorname{sen}\theta + c = 0 \Longrightarrow r = \dfrac{1}{A\cos\theta + B\operatorname{sen}\theta}$, con $A = -a/c$, $B = -b/c$.

Si se escribe $p = \dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, considerando α el ángulo dado por $\cos\alpha = Ap$, $\operatorname{sen}\alpha = Bp$, entonces $r = \dfrac{p}{\cos\theta\cos\alpha + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{p}{\cos(\theta - \alpha)}$.

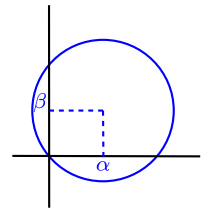




c) Ecuación del círculo de centro $(0,0)$ y radio R

La ecuación es simple $r = R$.

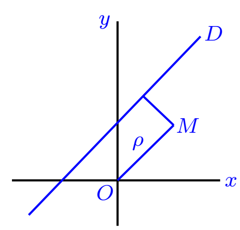
d) Ecuación el círculo pasando por $(0,0)$.
La ecuación cartesiana de un círculo que pasa por el origen es $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0$, por lo que $r^2 - 2\alpha r\cos\theta - 2\beta r\,\mathrm{sen}\,\theta = 0$. Suponiendo que $r \neq 0$, $r = 2\alpha\cos\theta + 2\beta\,\mathrm{sen}\,\theta$.



e) Cónicas con un foco en el origen.

La ecuación general de una cónica en polares no tiene interés. Examinaremos el caso en que un foco está el origen.

Sea D la directriz asociada de la ecuación cartesiana $x\cos\alpha + y\,\mathrm{sen}\,\alpha - q = 0$. La cónica es el conjunto de puntos M tales que $\|MO\| = e\|MH\|$, donde e es la excentricidad y H la proyección ortogonal de M sobre D, entonces $\|MO\| = p$, $\|HM\| = |\rho\cos\theta\cos\alpha + \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\alpha - q|$. Así $|\rho| = e|\rho\cos(\theta-\alpha) - q|$, es decir $\rho = e\rho\cos(\theta-\alpha) + eq$ o $\rho = -e\rho\cos(\theta-\alpha) + eq$, por lo que $\rho_1 = -\dfrac{eq}{1 - e\cos(\theta-\alpha)}$ o $\rho_2 = \dfrac{eq}{1 + e\cos(\theta-\alpha)}$.



De esta forma, las dos ecuaciones representan el mismo conjunto de puntos, pues $\rho_1(\theta+\pi) = -\rho_2(\theta)$. El valor $p = eq$ se llama parámetro de la cónica.

La ecuación se escribe finalmente $\rho = \dfrac{p}{1 + e\cos(\theta-\alpha)}$.

Inversamente remontando los cálculos se ve que, todo punto verificando la ecuación $\rho = \dfrac{p}{1 + e\cos(\theta-\alpha)}$ es tal que $\|OM\| = e\|MH\|$, donde H es la proyección de M sobre la recta D de ecuación $x\cos\alpha + y\,\mathrm{sen}\,\alpha - q = 0$.

– La recta Δ de ecuación $\theta = \alpha$ es el eje de simetría.

– Cuando $e = 1$, se tiene una parábola y Δ es el eje de la parábola con vértice $(\frac{p}{2}, \alpha)$.

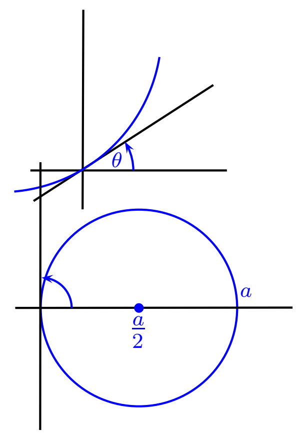
– Cuando $e \neq 1$, Δ es el eje focal de la cónica. Se obtienen los vértices reemplazando θ por α

y por $\alpha+\pi$. La distancia entre vértices es $2a = |\rho(\alpha)+\rho(\alpha+\pi)| = |\dfrac{\rho}{1+e}+\dfrac{\rho}{1-e}|$, por lo que $a = |\dfrac{\rho}{1-e^2}|$, $c = ea = e\left|\dfrac{\rho}{1-e^2}\right|$, $b^2 = |a^2-c^2| = a^2|1-e^2| = a|p|$.

1.5. Estudio de curvas en coordenadas polares

1.5.1. Tangente en un punto

a) Tangente en el origen



Analicemos el caso en que la curva pasa por el origen, es decir se anula para cierto valor de θ_0. Es claro que si la curva pasa dos veces por el polo, hay dos tangentes y el polo es un punto doble.

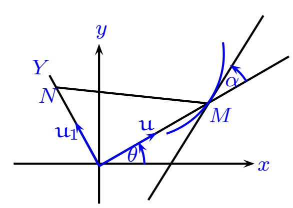
Ejemplo

i) Consideramos la curva de la ecuación polar $\rho = a\cos\theta$; $\rho = 0$, si $\theta = \frac{\pi}{2}$, la tangente en O es el eje y.

ii) La curva $\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}$, se anula en $\theta = \pm\frac{\pi}{4}$ y la curva es tangente a las bisectrices de los ejes.

b) Tangente a un punto distinto al polo

Sea $\mathfrak{u}$ el vector unitario haciendo ángulo θ con el eje x. Por definición $OM = \rho\mathfrak{u}$, por lo que $\dfrac{dOM}{d\theta} = \dfrac{d\rho}{d\theta}\mathfrak{u} + \rho\dfrac{d\mathfrak{u}}{d\theta} = \rho'\mathfrak{u}+\rho\mathfrak{u}_1$, donde $\mathfrak{u}_1$ es el vector unitario haciendo un ángulo $\theta+\frac{\pi}{2}$ con el eje x.



El ángulo α de la tangente OM es pues $\tan\alpha = \rho/\rho'$. La fórmula no tiene sentido si $\rho' = 0$, pero en el caso de que $\dfrac{dOM}{d\theta} = \rho\mathfrak{u}_1$, la tangente es paralela a $\mathfrak{u}_1$ y perpendicular a OM, es decir $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

1.5.2. Estudio de la curva en un vecindario del polo

Sabemos que si $OM = \mathbf{0}$ i.e $OM = \rho\mathfrak{u} = 0$ para el valor θ_0, $\dfrac{dOM}{d\theta} = \rho'\mathfrak{u}$, $\dfrac{d^2OM}{d\theta^2} = \rho''\mathfrak{u}+2\rho'\mathfrak{u}_1$.

– Si $\rho' \neq \mathbf{0}$ el polo es un punto regular y si $\dfrac{dOM}{d\theta}$, $\dfrac{d^2OM}{d\theta^2}$ forman una base, la curva en O

tiene por tangente la recta $\theta = \theta_0$.

– Si $\rho' = 0$, $\dfrac{dOM}{d\theta} = \mathbf{0}$ y el polo es un punto singular. Además $\dfrac{d^2OM}{d\theta^2} = \rho''\mathrm{u}$, $\dfrac{d^3OM}{d\theta^3} = \rho'''\mathrm{u} + 3\rho''\mathrm{u}_1$.

– Si $\rho'' \neq 0$, $\dfrac{d^2OM}{d\theta^2}$, $\dfrac{d^3OM}{d\theta^3}$ es una base y el polo es un punto de retroceso de la primera especie.

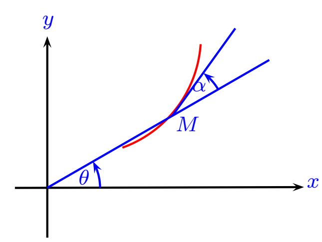
– Si $\rho'' = 0$, sea p el menor entero (si existe) tal que $\rho^{(p)} \neq 0$, entonces se tiene que $\dfrac{d^{(p)}OM}{d\theta^p} = \rho^{(p)}\mathrm{u}$, $\dfrac{d^{(p+1)}OM}{d\theta^{p+1}} = \rho^{(p+1)}\mathrm{u} + (p+1)\rho^{(p)}\mathrm{u}_1$ forman una base en el plano.

– Si ρ es par, la curva en el polo tiene un punto retroceso de primera especie.

– Si ρ es impar, la curva en el polo tiene un aspecto ordinario.

1.5.3. Estudio de la curva en un vecindario de un punto distinto al polo

Sea θ de modo que $OM = \rho\mathrm{u} \neq \mathbf{0}$, con lo cual $\dfrac{dOM}{d\theta} = \rho'\mathrm{u} + \rho\mathrm{u}_1 \neq \mathbf{0}$. El ángulo α de la tangente con OM está dado por $\tan\alpha = \rho/\rho'$.



a) Si $\dfrac{d^2OM}{d\theta^2}$ no es colineal a $\dfrac{dOM}{d\theta}$, la curva está en el semiplano delimitado por la tangente en el punto que contiene el vector $\dfrac{d^2OM}{d\theta^2}$.

b) Si $\dfrac{d^2OM}{d\theta^2}$ es colineal a $\dfrac{dOM}{d\theta}$ y no es colineal a $\dfrac{d^3OM}{d\theta^3}$, es un punto de inflexión.

1.5.4. Ramas infinitas

Se analizaran tres casos principales:

a) El radio polar ρ tiende a ∞, cuando $\theta \to \theta_0$.

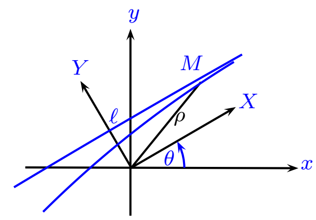
Supongamos que $\rho \longrightarrow \infty$, cuando $\theta \to 0$ (o $\theta \to k\pi$), la curva tiene una rama infinita en la dirección del eje x.

Si $y \to a$, cuando $\theta \to 0$ (o $\theta \to k\pi$), la curva tiene asíntota la recta $y = a$.

Igualmente supongamos que $\rho \longrightarrow \infty$, cuando $\theta \to \frac{\pi}{2}$ (o $\theta \to \frac{\pi}{2} + k\pi$).

Si $x = \rho\cos\theta$ tiene límite b, la curva la curva tiene por asíntota la recta $x = b$.

Para estudiar el caso general en el que $\rho \longrightarrow \infty$, cuando $\theta \to \theta_0$, se cae en el primer caso utilizando el sistema auxiliar OX, OY, con los ángulos θ_0 y $\theta_0 + \frac{\pi}{2}$, con respecto al eje x. Así tenemos que $Y = \rho \operatorname{sen}(\theta - \theta_0)$ y la curva admite una asíntota si y sólo si Y tiene un límite infinito ℓ.

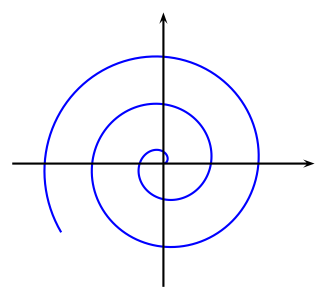


Ejemplo

1) Consideremos la curva $\rho = a\tan\theta$; $\rho \longrightarrow \infty$, si $\theta \to \frac{\pi}{2}$. La curva tiene una rama infinita en la dirección del eje y. Así $x = \rho\cos\theta = a\cos\theta\tan\theta = a\operatorname{sen}\theta$, por lo tanto $x \longrightarrow a$, cuando $\theta \to \frac{\pi}{2}$ y la curva tiene por asíntota la recta $x = a$.

2) La ecuación polar $\rho = \dfrac{a}{1 - 2\cos\theta}$ tiende a ∞, cuando $\cos\theta \longrightarrow \frac{1}{2}$, es decir $\theta \to \frac{\pi}{3}$.
Sea $Y = \rho\operatorname{sen}(\theta - \frac{\pi}{3})$, entonces $\rho = \dfrac{a}{2(\frac{1}{2} - \cos\theta)} = \dfrac{a}{2(\cos\frac{\pi}{3} - \cos\theta)} = \dfrac{a}{4\operatorname{sen}(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{6})\operatorname{sen}(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6})}$
y como $\operatorname{sen}(\theta - \frac{\pi}{3}) = 2\operatorname{sen}(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{6})\cos(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{6})$, se tiene que $Y = a\dfrac{\cos(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{6})}{2\operatorname{sen}(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6})} \longrightarrow \dfrac{a}{\sqrt{3}}$, cuando $\theta \longrightarrow \frac{\pi}{3}$, valor que se reportará sobre OY para obtener la asíntota.

3) Consideremos la curva $\rho = a\dfrac{\theta}{\theta - \frac{\pi}{3}}$, entonces $Y = \rho\operatorname{sen}(\theta - \frac{\pi}{3}) = a\theta\dfrac{\operatorname{sen}(\theta - \frac{\pi}{3})}{\theta - \frac{\pi}{3}} \longrightarrow a\frac{\pi}{3}$, cuando $\theta \to \frac{\pi}{3}$.



b) El radio $\rho \longrightarrow \infty$, cuando $\theta \to \pm\infty$.

En este caso se dice que la curva tiene una rama espiral.

Ejemplo Si $\rho = a\theta^2$, $\rho \longrightarrow \infty$, si $\theta \to \pm\infty$ y la curva tiene una rama espiral.

c) El radio $\rho \longrightarrow \rho_0$, cuando $\theta \to +\infty$ o $\theta \to -\infty$.

Se dice que la curva tiene un círculo como asíntota. Más precisamente, si $\rho \longrightarrow \rho_0$, la curva es asintótica al círculo de centro 0 y radio ρ_0.

Ejemplo

1) Cuando $\rho = a\theta(\theta - 1)$ la curva tiene por asíntota el círculo de radio a y centro 0, cuando

$\theta \longrightarrow \pm\infty$.

2) La curva $\rho = a/(1+\mathrm{e}^{\theta})$ tiene como asíntota el círculo de centro O y radio a, cuando $\theta \to -\infty$. Si $\theta \to +\infty$, tiene el punto O por asíntota, pues si $\theta \to \infty$, $\rho \longrightarrow 0$.

1.5.5. Intervalo de estudio y simetría

Si $\rho = f(\theta)$ es una función de período 2π, la curva volverá sobre ella misma cuando θ sobrepase 2π; así se tomará por intervalo de estudio de tamaño 2π.

De manera general si el período de f es $2n\pi$ se tomará un intervalo de longitud $2n\pi$.

Se estudiara seguidamente $f(\theta + n\pi)$:

a) Si n es impar y si $f(\theta + n\pi) = f(\theta)$ se tomará un intervalo de tamaño $n\pi$ y se completará la curva así obtenida con ayuda de la simetría con respecto al origen O.

b) Si n es par y si $f(\theta + n\pi) = -f(\theta)$ se tiene la misma conclusión anterior.

c) Si n es impar y $f(\theta + n\pi) = -f(\theta)$ se tiene toda la curva haciendo variar θ en un intervalo de longitud $n\pi$.

Se puede reducir el intervalo de estudio si la curva presenta simetrías.

– Si $f(\theta) = f(-\theta)$ o si $f(\pi - \theta) = -f(\theta)$, la curva es simétrica respecto al eje x.

– Si $f(\theta) = -f(\theta)$ o si $f(\pi - \theta) = f(\theta)$, la curva es simétrica respecto al eje y.

– Más generalmente, si $f(\alpha - \theta) = f(\theta)$, la curva es simétrica con respecto a la recta que pasa por O y tiene ángulo $\alpha/2$ con el eje x.

En todos estos casos se puede reducir el intervalo a la mitad y completar la curva por simetría. Es claro que si la curva tiene varias simetrías, se reducirá varias veces el intervalo de estudio.

1.5.6. Periodicidad

1) $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tal que $\rho(\theta + 2n\pi) = \rho(\theta)$.

2) $\exists n, m \in \mathbb{N}^*$, primos relativos tales que $\rho(\theta + \frac{2n}{m}\pi) = \rho(\theta)$, será suficiente analizar $[\,0, \dfrac{2n}{m}\pi\,]$ y por $m-1$ rotaciones sucesivas se construye la curva.

3) Si $\rho(\theta + q) = \rho(\theta)$ de modo que $\dfrac{q}{2\pi}$ es irracional se analizará la función en $[\,0, q\,]$ y luego por rotaciones infinitas de tamaño q se obtiene una infinidad numerable de arcos de curva cuya unión da la curva pedida.

Ejemplo

1) Para estudiar la curva $\rho = p/(1 - e\cos\theta)$, se observará que el período es 2π y que toda la curva se obtiene haciendo variar θ en un intervalo de tamaño 2π. Además, como $\rho(\theta) = \rho(-\theta)$, la curva es simétrica con respecto al eje x y es suficiente variar θ de 0 a π y completar la curva por simetría.

2) La curva $\rho = a\,\mathrm{sen}\,\theta$ tiene período 2π; como $\rho(\theta+\pi) = -\rho(\theta)$ es simétrica respecto al eje x y como $\rho(\theta-\pi) = \rho(\theta)$ la curva es simétrica respecto al eje y y es suficiente hacer variar θ en $[\,0, \frac{\pi}{2}\,]$.

1.5.7. Puntos dobles

– Para ver si el origen es un punto doble, se busca en el intervalo de estudio sin tomar en cuenta las simetrías, los valores de θ tales que $f(\theta) = 0$.

– Un punto distinto de O es un punto doble si $f(\theta + 2k\pi) = f(\theta)$ o si $f(\theta + (2k+1)\pi) = -f(\theta)$.

Se observa que la primera eventualidad no se puede presentar si f es de período 2π.

Ejemplo

1) Consideramos la curva $\rho = a(\cos\theta - \cos 2\theta)$; el período es 2π. Los puntos dobles distintos de O se determinan por la relación $f(\theta+\pi) = -f(\theta)$, es decir $-\cos\theta - \cos 2\theta = -\cos\theta + \cos 2\theta \Longrightarrow \cos 2\theta = 0 \Longrightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{4}$ y los puntos dobles son $(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{4})$, $(\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{\pi}{4})$.

2) Sea $\rho = a\dfrac{\theta}{\theta - \frac{\pi}{3}}$, la ecuación $\dfrac{\theta}{\theta - \frac{\pi}{3}} = \dfrac{\theta + 2k\pi}{\theta + 2k\pi - \frac{\pi}{3}}$ no tiene solución, pero la ecuación $\dfrac{\theta}{\theta - \frac{\pi}{3}} = \dfrac{\theta + (2k+1)\pi}{\theta + (2k+1)\pi - \frac{\pi}{3}}$ tiene una infinidad de soluciones dadas por $2\theta^2 + \big[(4k+2)\pi - \frac{2\pi}{3}\big]\theta - \frac{\pi}{3}(2k+1)\pi = 0$, ya que $b^2 - 4ac = 4((2k+1)\pi - \frac{\pi}{3})^2 + 4\frac{2}{3}\pi(2k+1)\pi = 4\,[(2k+1)^2\pi^2 + \frac{1}{9}\pi^2\,] > 0$.

1.5.8. Gráfico de una curva en coordenadas polares

En general el sentido de variación de ρ es difícil de determinar y no es interesante, por lo que no se calculará ρ'.

Es esencial conocer el signo de ρ y determinar los valores de θ para los cuales ρ se anula. En efecto, se traza la curva barriendo el plano con una recta que gira alrededor de O. Si θ varía de α a β por ejemplo, esta recta barrera un sector angular formado de dos partes simétricas con respecto a O. La curva se sitúa en una u otra parte según el signo de ρ.

1.5.9. Reglas

1. Determinar el intervalo de estudio, tomando en cuenta la periodicidad y las simetrías.
2. Determinar los valores de θ para los cuales ρ está definido.
3. Determinar el signo de ρ y los valores de θ, para los cuales ρ se anula.
4. Construir una tabla de variación con los resultados precedentes (ρ' si es necesario).
5. Estudiar las ramas infinitas.
6. Determinar los puntos dobles.

En la práctica se comienza por trazar groseramente la curva. No se buscarán los puntos dobles a menos que se hagan evidentes en trazo de la curva.

1.6. Ejercicios sobre curvas en forma paramétrica

1. Construir la gráfica de las curvas dadas en forma paramétrica:

a) $x = 3\cos t$, $y = 4\,\mathrm{sen}\,t$

b) $x = t^2 - 2t$, $y = t^2 + 2t$

c) $x = \cos t$, $y = t + 2\,\mathrm{sen}\,t$

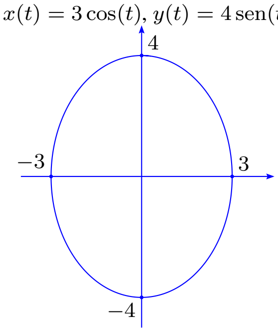
d) $x = 2^{t-1}$, $y = \frac{1}{4}(t^3 + 1)$.

Solución

a) Se tiene que $0 \leq t \leq 2\pi$, de modo que $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4\cos t}{-3\,\mathrm{sen}\,t} = -\dfrac{4}{3}\,\mathrm{ctg}\ t$. Por otro lado tenemos que el cuadro de variación se hace de $[\,0, 2\pi\,]$.

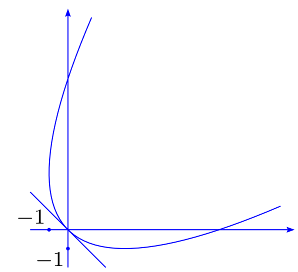
t	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
y	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	4
x	3	$\searrow$	0	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0	$\nearrow$	3
y'	4	$+$	0	$-$	-4	$-$	0	$+$	
x'	0	$-$	-3	$-$	0	$+$	3	$+$	0
$\frac{dy}{dx}$	∞	$-$	0	$+$	∞	$-$	0	$+$	∞

$x(t) = 3\cos(t)$, $y(t) = 4\,\mathrm{sen}(t)$



b) Tenemos que $t \in \mathbb{R}$, $x(t) = t^2 - 2t$, $y(t) = t^2 + 2t$, $x'(t) = 2t - 2$, $y'(t) = 2t + 2$ y $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{t+1}{t-1}$.

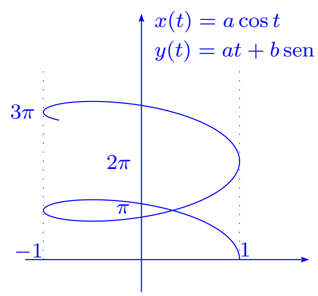
t	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
x	$-\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	3	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	3	$\nearrow$	8	$\nearrow$	$+\infty$
y'		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
x'		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{dy}{dx}$	1	$+$		$+$	0	$-$		$-$	∞	$+$		$+$	1



En $(3,-2)$ la pendiente es 0; en $(-1,3)$ la pendiente es ∞; en $(0,0)$ la pendiente es -1.

c) La gráfica se repite en el eje y y cada período de 2π y se analiza $[0, 2\pi]$. Así tenemos $x(t) = \cos t$, $y(t) = t + 2\operatorname{sen} t$, $x'(t) = -\operatorname{sen} t$, $y'(t) = 1 + 2\cos t \Longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1 + 2\cos t}{\operatorname{sen} t}$. Además $x'(t) = 0$, si $t = 0, \pi, 2\pi$, $y'(t) = 0 \Longleftrightarrow \cos t = -\frac{1}{2}$, i.e $t = \frac{2}{3}\pi$, $\frac{4}{3}\pi$.

t	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		π		$\frac{4\pi}{3}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
x	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1
y	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}+2$	$\nearrow$	$\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}$	$\searrow$	π	$\searrow$	$\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$	$\nearrow$	$\frac{3\pi}{2}-2$	$\nearrow$	2π
y'	3	$+$	1	$+$	0	$-$	-1	$-$	0	$+$	1	$+$	3
x'	0	$-$	-1	$-$	$-\frac{1}{2}$	$-$	0	$+$	$\frac{1}{2}$	$+$	1	$+$	0
$\frac{dy}{dx}$	$.\infty$	$-$	-1	$-$	0	$+$	$.\infty$	$-$	0	$+$	1	$+$	$.\infty$



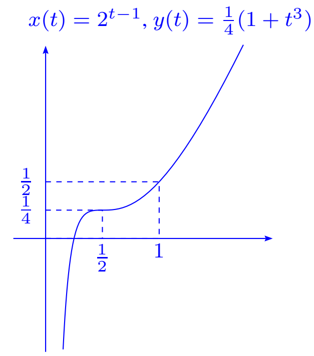
La gráfica tiene tangente nula en $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3})$ y $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3})$.

Tiene pendiente ∞ en $(1,0)$, $(-1,\pi)$ y en $(1, 2\pi)$.

Es importante evaluar $\frac{\pi}{2}+2 \approx 3{,}57$, $\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3} \approx 3{,}82$, $\frac{4\pi}{3}+\sqrt{3} \approx 2{,}45$, $\frac{3\pi}{2}-2 \approx 2{,}71{,}23$, $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}86$.

d) Los valores de t recorren todo $\mathbb{R}$ con $x(t) = 2^{t-1}$, $y(t) = \frac{1}{4}(t^3+1)$ y con derivadas $x'(t) = 2^{t-1}\ln 2$, $y'(t) = \frac{3}{4}t^2$. Se observa que $x'(t) \neq 0$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $y'(t) = 0$, si $t = 0$ y que $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{3}{4}t^2}{2^{t-1}\ln 2}$.

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$
y'		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
x'		$+$		$+$		$+$		$+$	
$\frac{dy}{dx}$		$+$		$+$		$+$		$+$	



Notemos que $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3t^2}{4\ln 22^{t-1}} \longrightarrow \infty$, si $t \to -\infty$ y $\dfrac{dy}{dx} \longrightarrow 0$, si $t \to +\infty$.

2. Graficar las curvas parametrizadas siguientes

a) $x = \dfrac{t+2}{t^2-1}$, $y = \dfrac{t-5}{t^2-4t+3}$

b) $x = \dfrac{t}{t^2-1}$, $y = \dfrac{t^2}{t-1}$

c) $x = a\cos^3 t$, $y = a \operatorname{sen}^3 t$, (astroide)

d) $x = a(\log\tan\dfrac{t}{2} + \cos t)$, $y = a\operatorname{sen} t$ (tractriz)

e) $x = at^2$, $y = at^3 (ay^2 = x^3)$

f) $x = \dfrac{3at}{1+t^3}$, $y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}$ (folio de Descartes)

g) $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1-\cos t)$

h) $x = \dfrac{t}{1+t^4}$, $y = \dfrac{t^3}{1-t^4}$

i) $x = \dfrac{t}{t^2-1}$, $y = \dfrac{1}{t^2-3t+2}$

j) $x = \dfrac{t}{t^2-1}$, $y = \dfrac{t-2}{(t-1)(t+2)}$

k) $x = t^2+2t$, $y = \dfrac{1+2t}{t^2}$

l) $x = \dfrac{(t+2)^2}{t+1}$, $y = \dfrac{(t-2)^2}{t-1}$

m) $x = \dfrac{(1+2t)^2}{(3-2t)(1-2t)}$, $y = \dfrac{(1+2t)^2}{2(3-2t)}$

n) $x = \dfrac{t(t+2)}{t^2-1}$, $y = \dfrac{t}{t+1}$

o) $x = \dfrac{t^2+2}{t^2+t+1}$, $y = \dfrac{t^2+2}{t^2-t+3}$

p) $x = \mathrm{e}^{-1/t}$, $y = te^{2/t}$

q) $x = \cos^2 t + ln(\operatorname{sen} t)$, $y = \operatorname{sen} t\cos t$

r) $x = 1/\cos t$, $y = \operatorname{sen} t$

s) $x = \tan t$, $y = 1/\operatorname{sen} t$

t) $x = \cos 2t$, $y = \operatorname{sen} 2t - \operatorname{sen} t$

u) $x = \cos 4t + 4\cos t$, $y = \operatorname{sen} 3t$

Solución

a) Las ecuaciones $x(t) = \dfrac{t+2}{t^2-1}$, $y(t) = \dfrac{t-5}{(t-3)(t-1)}$ indican que no hay una simetría clara del gráfico. Las ecuaciones indefinidas en -1, 1 y en 3.

Las derivadas son $x'(t) = \dfrac{(t^2-1)-(t+2)2t}{(t^2-1)^2} = \dfrac{-t^2-4t-1}{(t^2-1)^2}$,

$y'(t) = \dfrac{(t-3)(t-1)-(t-5)(2t-4)}{(t-3)^2(t-1)^2} = \dfrac{-t^2+10t-17}{(t-3)^2(t-1)^2}$. Además $x'(t)=0 \Longleftrightarrow$ $t^2+4t+1=0$ i.e $t=-2\pm\sqrt{3}$, $y'(t)=0 \Longleftrightarrow t^2-10t+17=0$ i.e $t=5\pm\sqrt{2}$

Sean α, β, γ, δ estos valores.

– Cuando $t \to 3^{\pm}$, $y \longrightarrow \mp\infty$, $x \longrightarrow \frac{5}{8}$.

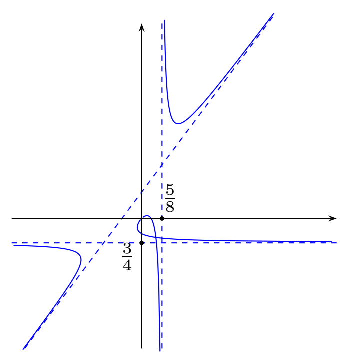
– Cuando $t \to -1^{\pm}$, $y \longrightarrow -\frac{3}{4}$, $x \longrightarrow \pm\infty$.

– Cuando $t \to 1$, $y/x = \dfrac{(t-5)(t+1)}{(t-3)(t+2)} \longrightarrow \frac{4}{3}$ y $y-\frac{4}{3}x = -\dfrac{t+9}{3(t+1)(t-3)} \longrightarrow \frac{5}{6}$ y la curva tiene por asíntota oblicua $y=\frac{4}{3}x+\frac{5}{6}$.

– El cociente $\dfrac{4}{x} \longrightarrow 1$, si $x \to \pm\infty$.

t	$-\infty$		α		-1		β		1		γ		3		δ		$+\infty$
x	0^-	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$		$\searrow$	$\frac{5}{8}$	$\searrow$		$\searrow$	0
y	0	$\searrow$		$\searrow$	$-\frac{3}{4}$	$\searrow$		$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	0
y'		$-$		$-$		$-$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
x'		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$		$-$		$-$		$-$	
$\frac{dy}{dx}$		$+$	$.\infty$	$-$		$-$	$.\infty$	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	

La tangente en el origen es $\dfrac{dy}{dx} \longrightarrow 1$, cuando $t \to \pm\infty$ y la tangente en el origen es la bisectriz.



En el gráfico aparece un punto doble que determinarlo consideramos que los polinomios $xX^2-X-2-2$ y $yX^2-(4y+1)X+3y+5$ tiene dos raíces comunes i.e. los coeficientes son proporcionales $\dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{4y+1} = -\dfrac{x+2}{3y+5} \Longrightarrow 3y+5+(x+2)(4y+1)=0$, $y-x(4y+1)=0 \Longrightarrow 12y+7=0$, $y=-\frac{7}{12}$, $x=\frac{7}{16}$.

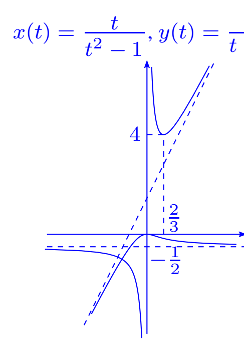
b) Sea $x(t) = \dfrac{t}{t^2-1}$, $y(t) = \dfrac{t^2}{t-1}$; las ecuaciones se indefinen en $t=1$, -1, con lo cual $\lim\limits_{x\to 1^{\pm}} x(t) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to -1^{\pm}} x(t) = \mp\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^{\pm}} y(t) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to \pm\infty} x(t) = 0$, $\lim\limits_{x\to \pm\infty} y(t) = \pm\infty$ y las rectas $x = 0$, $y = -\frac{1}{2}$ son asintótas.

Además si $t \to 1$, $\dfrac{y}{x} = t(t+1) \longrightarrow 2$ y $y - 2x = \dfrac{t(t+2)}{t+1} = \frac{3}{2}$, es decir $y = 2x + \frac{3}{2}$ es una asíntota oblicua.

Se puede determinar la posición de la curva respecto a la asíntota oblicua, haciendo un desarrollo limitado de $y - 2x$ en un vecindario de $t = 1$, es decir $y - 2x = \frac{3}{2} + [\,\dfrac{t(t+2)}{t+1} - \frac{3}{2}\,] = \frac{3}{2} + \dfrac{(t-1)(t+\frac{3}{2})}{t+1} = \frac{3}{2} + t(t-1) + o(t-1)$. Así la curva esta sobre la asíntota si $t > 1$ y bajo la asíntota $t < 1$.

Las derivadas son $x'(t) = -\dfrac{t^2+1}{(t^2-1)^2}$, $y'(t) = \dfrac{t(t-2)}{(t-1)^2}$ y tenemos el cuadro de variación:

t	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
x	0	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$\frac{2}{3}$	$\searrow$	0
y	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$
y'		$+$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
x'		$-$	$\Vert$	$-$		$-$	$\Vert$	$-$		$-$	
$\frac{dy}{dx}$		$-$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	



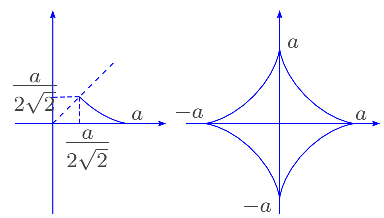
En el gráfico se tiene la existencia de un punto doble. Considerando los polinomios $xX^2 - X - x$, $X^2 - yX + y$ tienen raíces comunes, los coeficientes son proporcionales i.e. $\dfrac{x}{1} = \dfrac{1}{y} = -\dfrac{x}{y} \Longrightarrow x = y = -1$.

c) Las ecuaciones $x = a\cos^3 t$, $y = a\,\mathrm{sen}^3\, t$ indican que el período es 2π; haciendo el cambio de variable t por $-t$ y t por $\pi - t$ indican la simetría del eje x y el eje y.

Si se reemplaza t por $\frac{\pi}{2} - t$ se intercambian x y y y la curva es simétrica respecto a la bisectriz lo que permite que el estudio de $[\,0, \frac{\pi}{4}\,]$.

Las derivadas son $x'(t) = -3a\cos^2 t\,\mathrm{sen}\, t$, $y'(t) = 3a\,\mathrm{sen}^2\, t\cos t$, de modo que $x'(t) = 0 \Longleftrightarrow t = 0, t \in [\,0, \frac{\pi}{4}\,]$, $y'(t) = 0 \Longleftrightarrow t = 0, t \in [\,0, \frac{\pi}{4}\,]$ y el cuadro de variación es:

t	0		$\frac{\pi}{4}$
x	a	$\searrow$	$\frac{a}{2\sqrt{2}}$
y	0	$\nearrow$	$\frac{a}{2\sqrt{2}}$
y'	0	$+$	$\frac{3a}{2\sqrt{2}}$
x'	0	$-$	$-\frac{3a}{2\sqrt{2}}$
$\frac{dy}{dx}$	0	$-$	-1

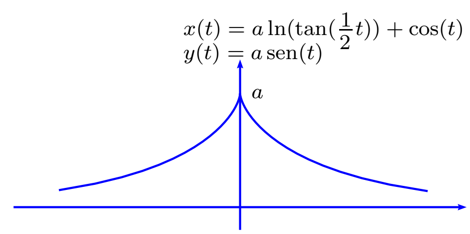


Para determinar la tangente en el punto cuando $t = 0$, debemos calcular $x''(t)$, $y''(t)$. Así, $x'' = 6a\cos t \operatorname{sen}^2 t - 3a\cos^3 t$, $x'' = -3a$, $y'' = 6a \operatorname{sen} t\cos^2 t - 3a\cos^3 t$, $y'' = -3a$, es decir la tangente es paralela al vector $(-3a, 0)$,i.e. al eje x. El punto, es un punto de retroceso de primera especie.

d) Las ecuaciones $x(t) = a(\log\tan\dfrac{t}{2} + \cos t)$, $y(t) = a\operatorname{sen} t$ están definidas para $t > 0$, tienen período 2π y está definida de $]\,0, \pi\,[$. El cambio de t en $\pi - t$ muestra que la curva es simétrica respecto al eje y, por lo que nos limitaremos al intervalo $]\,0, \pi\,]$.

Las derivadas son $x'(t) = a\big(\dfrac{1}{\operatorname{sen} t} - \operatorname{sen} t\big) = a\dfrac{\cos^2 t}{\operatorname{sen} t}$, $y'(t) = a\cos t$ y $x'(t) = 0 \iff t = \frac{\pi}{2}$, $y'(t) = 0 \iff t = \frac{\pi}{2}$. Además si $t \to 0^+$, $x(t) \longrightarrow -\infty$, con lo cual tenemos el cuadro de variación:

t	0		$\frac{\pi}{2}$
x	$-\infty$	$\nearrow$	0
y	0	$\nearrow$	a
y'	0	$+$	0
x'	$.\infty$	$+$	0
$\frac{dy}{dx}$		$+$	$+\infty$



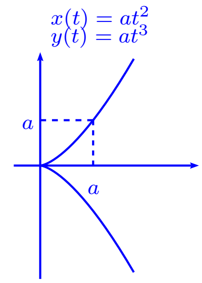
Dado que $x'(\frac{\pi}{2}) = y'(\frac{\pi}{2}) = 0$, calculamos las derivadas de orden dos, es decir $x'' = a(-2\cos t - \dfrac{\cos^3 t}{\operatorname{sen}^2 t})$, $y'' = -a\operatorname{sen} t$, $x''(\frac{\pi}{2}) = 0$, $x''(\frac{\pi}{2}) = -a$, por lo que el eje y es tangente de la curva en $(0, a)$ y este es un punto de retroceso de primera especie.

e) Las ecuaciones $x = at^2$, $y = at^3$ describen la curva $ay^2 = x^3$; como al sustituir t por $-t$ indica que la curva es simétrica respecto al eje x. Así tomamos el intervalo $[\,0, +\infty\,[$ para el estudio.

Las derivadas son $x' = 2at$, $y' = 3at^2$ y $x'(t) = y'(t) = 0 \iff t = 0$. Así $(0, 0)$ es un punto singular y la tangente en el punto $t = 0$ se determina cuando la segunda derivada $x''(t) = 2a$, $y''(t) = 6at$, es decir $x''(0) = 2a$, $y''(0) = 0$ y $(2a, 0)$ es tangente a la curva en $t = 0$. El punto es de retroceso de primera especie.

Como el cociente $\dfrac{y}{x} = t$, la curva tiene una rama parabólica en la dirección del eje y.

t	0		$+\infty$
x	0	$\nearrow$	$+\infty$
y	0	$\nearrow$	$+\infty$
y'	0	$+$	$.\infty$
x'	0	$+$	$.\infty$
$\frac{dy}{dx}$		$+$	



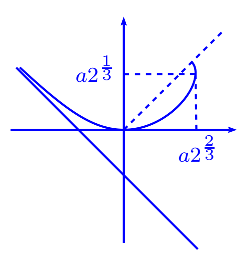
f) **Folio de Descartes** La ecuación de la curva es $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ y tomando $y = tx$ la ecuación se transforma en $x^3(1 + t^3) - 3atx^2 = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{3at}{1 + t^3}$ y sustituyendo queda $y = \dfrac{3at^2}{1 + t^3}$.

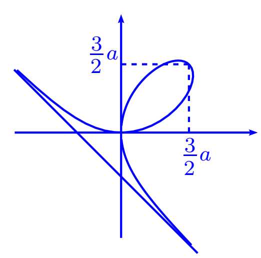
El cambio de t a $1/t$ intercambia x y y (hay una simetría respecto a la recta $x = y$) lo que permite analizar solamente el intervalo $]-1, 1]$, ya que cuando $t = -1$ se indefinen las ecuaciones.

Si $t \to -1^{\pm}$, $x(t) \longrightarrow \mp\infty$, $y(t) \longrightarrow \pm\infty$ y como $\dfrac{y}{x} = t \longrightarrow -1$ y $y + x = \dfrac{3at}{t^2 - t + 1} \longrightarrow -a$, la curva tiene por asíntota la recta $x + y + a = 0$.

Las derivadas son $x'(t) = 3a\dfrac{1 - 2t^3}{(1 + t^3)^2}$, $y'(t) = 3a\dfrac{t(2 - t^3)}{(1 + t^3)^2}$ y se tiene $x'(t) = 0 \Longleftrightarrow t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, $y'(t) = 0 \Longleftrightarrow t = 0$, $t = \sqrt[3]{2}$ y la recta no presenta puntos singulares. El cuadro de variación es:

t	-1		0		$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$		1
x	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$a2^{2/3}$	$\searrow$	$\frac{3}{2}a$
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$a2^{1/3}$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}a$
y'		$-$	0	$+$		$+$	
x'		$+$	$3a$	$+$	0	$-$	
$\frac{dy}{dx}$		$-$	0	$-$	$+\infty$	$-$	



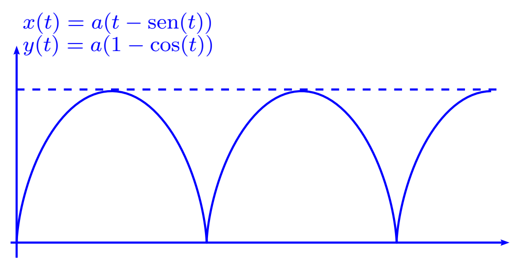


g) Las ecuaciones $x(t) = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y(t) = a(1 - \cos t)$ describen la curva conocida como cicloide, que se puede ver como el movimiento efectuado por la válvula de una rueda de una bicicleta, cuando la rueda se mueve horizontalmente sin resbalar sobre una recta.

Se observa que cada 2π unidades de t, x aumenta $2\pi a$ unidades y y retorna el mismo valor, por lo que se analizará el intervalo $[\,-\pi, \pi\,]$, dadas las traslaciones paralelas al eje x de amplitud $2\pi a$. Además $x(t)$ es impar y $y(t)$ es par, por lo que hay simetría respecto al eje y y es suficiente analizar el intervalo $[\,0, \pi\,]$.

Las derivadas son $x'(t) = a(1 - \cos t)$, $y'(t) = a \operatorname{sen} t$ y como $x'(t) = y'(t)$, $(0, 0)$ es un punto singular y es necesario analizar en $t = 0$ las derivadas $x''(t) = a \operatorname{sen} t$, $y''(t) = a \cos t$. Así, el eje y es tangente a la curva en $(0, 0)$; es un punto de retroceso de primera especie.

t	0		π
x	0	$\nearrow$	$a\pi$
y	0	$\nearrow$	$2a$
y'	0	$+$	0
x'	0	$+$	$a\pi$
$\frac{dy}{dx}$	∞	$+$	0



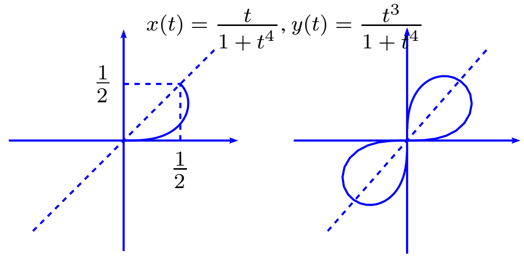
h) La curva $x(t) = \dfrac{t}{1 + t^4}$, $y(t) = \dfrac{t^3}{1 + t^4}$, es la gráfica de la lemniscata de Bernoulli.

Al sustituir t por $1/t$ es intercambiar x y y, por lo que hay simetría respecto a la primera bisectriz y como $x(t)$ y $y(t)$ son impares hay simetría con respecto al origen. Así que se analizará la curva en $[\,0, 1\,]$.

Las derivadas $x'(t) = \dfrac{1 - 3t^4}{(1 + t^4)^2}$, $y'(t) = \dfrac{3 - t^4}{(1 + t^4)^2}$ indican que $x'(t) = 0 \iff t = \pm\sqrt[4]{1/3}$, $y'(t) = 0 \iff t = 0$, $t = \pm\sqrt[4]{3}$.

El cociente $\dfrac{y}{x} = t^2$, indica que el eje x es tangente a la curva en $(0, 0)$. En el origen hay un punto doble dado por $t = 0$, $t = +\infty$.

t	0		$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$		1
x	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt[4]{2^3}}{3}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$
y	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt[4]{2}}{3}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$
y'	0	$+$		$+$	$\frac{1}{4}$
x'	1	$+$	0	$-$	$-\frac{1}{4}$
$\frac{dy}{dx}$	0	$+$	$.\infty$	$-$	-1



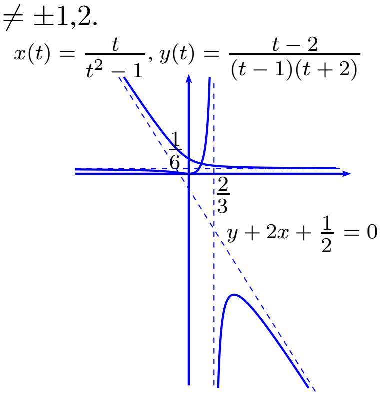
i) Las ecuaciones $x(t) = \dfrac{t}{t^2-1}, y(t) = \dfrac{1}{(t-1)(t+2)}$ se indefinen $t=1, t=-1, t=2$.

Así, cuando $t \to 1^{\pm}$, $x(t) \longrightarrow \pm\infty$, $y(t) \longrightarrow \mp\infty$, por que $\dfrac{y}{x} = \dfrac{t+1}{t(t-2)} \longrightarrow -2 \Longrightarrow$ $y+2x = \dfrac{2t-1}{t^2-t-2} \longrightarrow -\dfrac{1}{2}$, es decir tiene por asíntota oblicua la recta $y+2x+\frac{1}{2}=0$.

– Si $x \to -1^{\pm}$, $x(t) \longrightarrow \mp\infty$, $y(t) \longrightarrow \frac{1}{6}$ y la recta $y = \frac{1}{6}$ es asíntota horizontal.

– Si $x \to 2^{\pm}$, $x(t) \longrightarrow \frac{2}{3}$, $y(t) \longrightarrow \pm\infty$ y la recta $x = \frac{2}{3}$ es asíntota vertical.

Las derivadas son $x'(t) = -\dfrac{t^2+1}{(t^2-1)^2}$, $y'(t) = -\dfrac{2t-3}{(t-1)^2(t-2)^2}$, por lo que $x'(t)<0$ y $y'(t)<0$, si $t>\frac{3}{2}$, $y'(t)>0$, si $t<\frac{3}{2}$, siempre que $x \neq \pm1{,}2$.



t	$-\infty$		-1		1		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
x	0^-	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$\frac{6}{5}$	$\searrow$	$\frac{2}{3}$	$\searrow$	0
y	0^+	$\nearrow$	$\frac{1}{6}$	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	0
y'	0	$+$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	
x'	0	$-$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$-$		$-$		$-$	
$\frac{dy}{dx}$	0	$-$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$		$+$	

j) Las ecuaciones $x(t) = \dfrac{t}{t^2-1}, y(t) = \dfrac{t-2}{(t-1)(t+2)}$ se indefinen en $t = \pm1, -2$.

– Si $t \to 1^{\pm}$, $x(t) \longrightarrow \pm\infty$, $y(t) \longrightarrow \mp\infty$, con lo cual $\dfrac{y}{x} = \dfrac{(t-2)(t+1)}{t(t+2)} \longrightarrow -\dfrac{2}{3}$, $y + \frac{2}{3}x = \dfrac{5t+6}{3(t+1)(t+2)} \longrightarrow \frac{11}{18}$ y la recta $y = -\frac{2}{3}x + \frac{11}{18}$ es asíntota oblicua de la curva.

– Si $t \to -1^{\pm}$, $x(t) \longrightarrow \pm\infty$, $y(t) \longrightarrow \frac{3}{2}$ y la recta $y = \frac{3}{2}$ es asíntota vertical.

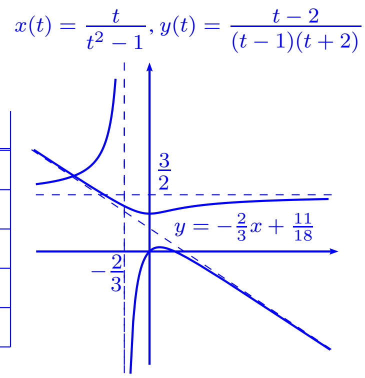
– Si $t \to -2^{\pm}$, $x(t) \longrightarrow -\frac{2}{3}$, $y(t) \longrightarrow \pm\infty$ y la recta $x = -\frac{2}{3}$ es asíntota horizontal.

– Si $t \to \pm\infty$, $x(t) \longrightarrow 0$, $y(t) \longrightarrow 0$ y $\dfrac{y}{x} = \dfrac{(t-2)(t+1)}{t(t+2)} \longrightarrow 1$, por lo que la pendiente de la tangente en el origen es 1.

Las derivadas $x'(t) = -\dfrac{t^2+1}{(t^2+2)^2}$, $y'(t) = \dfrac{t(4-t)}{(t-1)^2(t+2)^2}$ son tales que $x'(t) < 0$, $y'(t) < 0$, si $t < 0$ o $t > 4$ y $y'(t) \geq 0$, si $0 \leq t \leq 4$, siempre que $x \in \mathbb{R} \backslash \{-2, -1, 1\}$.

Cuadro de variación:

t	$-\infty$		-2		-1		0		1		4		$+\infty$
x	0	$\searrow$	$-\frac{2}{3}$	$\searrow$	$-\infty \,\Vert\, +\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty \,\Vert\, +\infty$	$\searrow$	$\frac{4}{15}$	$\searrow$	0
y	0	$\searrow$	$-\infty \,\Vert\, +\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty \,\Vert\, -\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{9}$	$\searrow$	0
y'		$-$	$\Vert$	$-$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
x'		$-$		$-$	$\Vert$	$-$		$-$	$\Vert$	$-$		$-$	
$\frac{dy}{dx}$		$+$		$+$		$+$		$-$		$-$		$+$	



k) Las ecuaciones $x(t) = t^2 + 2t$, $y(t) = \dfrac{1+2t}{t^2}$ son tales que $y(t)$ se indefine en $t = 0$.

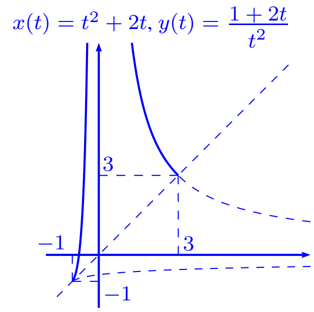
– Si $t \to 0^{\pm}$, $x(t) \longrightarrow 0^{\pm}$, $y(t) \longrightarrow +\infty$ i.e la recta $x = 0$ es asíntota vertical.

– Si $t \to \pm\infty$, $x(t) \longrightarrow +\infty$, $y(t) \longrightarrow 0^{\pm}$ i.e la recta $y = 0$ es asíntota horizontal.

Observamos que si remplazando t por $1/t$, $x(t)$ y $y(t)$ intercambian papeles y la curva es simétrica respecto a la primera bisectriz, por lo que es suficiente analizar el intervalo $[-1, 1] \backslash \{0\}$.

Las derivadas son $x'(t) = 2(t+1)$, $y'(t) = -2t(1+t)/t^4$, lo que indica que para $t = -1$, las derivadas $x'(-1) = y'(-1) = 0$, o sea $(-1, -1)$ es un punto singular. Las derivadas de orden dos $x''(t) = 2$, $y''(t) = 2(3+2t)/t^4$ i.e $x''(-1) = 2$, $y''(-1) = 2$, lo cual verificada que $(-1, -1)$ es un punto en retroceso de la primera especie con tangente, la recta $y = x$.

t	-1		0		1
x	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	3
y	-1	$\nearrow +\infty$		$+\infty \searrow$	3
y'	0	$+$		$-$	
x'	0	$+$	0	$-$	
$\frac{dy}{dx}$		$+$		$-$	



l) Las ecuaciones $x(t) = \dfrac{(t+2)^2}{t+1}$, $y(t) = \dfrac{(t-2)^2}{t-1}$ se indefinen en $t = -1, 1$ respectivamente.

– Si se reemplaza t por $-t$, x cambia a $-y$ y y cambia a $-x$ lo que demuestra que es simétrica respecto a la recta $y = -x$ (segunda bisectriz), es decir es suficiente analizar el gráfico en $[\,0, +\infty\,[$.

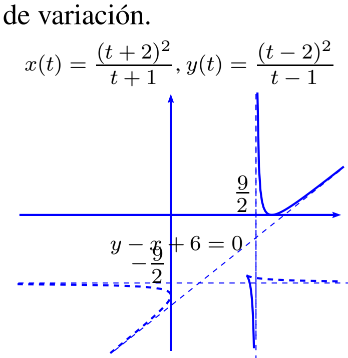
– Si $t \to 1^{\pm}$, $x(t) \longrightarrow \frac{9}{2}$, $y(t) \longrightarrow \pm\infty$ y la recta $x = \frac{9}{2}$ es asíntota vertical, (por lo que la recta $y = -\frac{9}{2}$) es asíntota horizontal).

– Si $t \to +\infty$, $x(t) \longrightarrow \pm\infty$, $y(t) \longrightarrow \pm\infty$ i.e. $\dfrac{y}{x} \longrightarrow 1$ y $y - x = -6 + \dfrac{1}{t-1} - \dfrac{1}{t+1} \longrightarrow -6$. Así la recta $y - x + 6 = 0$ es asíntota oblicua.

Las derivadas $x'(t) = \dfrac{t(t+2)}{(t+1)^2}$, $y'(t) = \dfrac{t(t-2)}{(t-2)^2}$, lo que indica que si $t = 0$, $(4, -4)$ es un punto singular. Las derivadas de orden 2 son $x''(t) = \dfrac{2}{(t+1)^3}$, $y''(t) = -\dfrac{2}{(t-1)^3}$, $x''(0) = 2$, $y''(0) = -2$ y la recta $y = -x$ es tangente a la curva $(4, -4)$. El punto $(4, -4)$ es de retroceso de primera especie.

Con la información construimos el siguiente cuadro de variación.

t	0		1		2		$+\infty$
x	4	$\nearrow$	$\frac{9}{2}$	$\nearrow$	$\frac{16}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$
y	4	$\searrow -\infty$		$+\infty \searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
y'	0	$-$		$-$	0	$+$	
x'	0	$+$		$+$		$+$	
$\frac{dy}{dx}$	-1	$-$		$-$	0	$+$	



m) Las ecuaciones $x(t) = \dfrac{(1+2t)^2}{(3-2t)(1-2t)}$, $y(t) = \dfrac{(1+2t)^2}{2(3-2t)}$ se indefinen en $t = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ y en $t = \frac{3}{2}$ respectivamente.

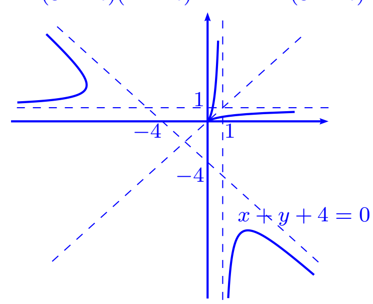
– Si $t \to \frac{1}{2}^{\pm}$, $y(t) \longrightarrow 1$, la recta $y = 1$ es asíntota horizontal.

– Si $t \to \frac{3}{2}^{\pm}$, $x(t) \longrightarrow \pm\infty$, $y(t) \longrightarrow \pm\infty$, $\dfrac{y}{x} = 1 - 2t2 \longrightarrow -1$, $y + x = \dfrac{(1+2t)^2}{2(1-2t)} \longrightarrow -4$ i.e. $x + y + 4 = 0$ es asíntota oblicua de la curva.

– Si $t \to \pm\infty$, $x(t) \longrightarrow 1$, $y(t) \longrightarrow -\infty$, la recta $x = 1$ es asíntota vertical.

Las derivadas $x'(t) = 4\dfrac{(1+2t)(5-6t)}{(3-2t)^2(1-2t)^2}$, $y'(t) = \dfrac{(1+2t)(7-2t)}{(3-2t)^2}$, nos permiten obtener en $t = -\frac{1}{2}$ un punto singular $(0,0)$ y como $\dfrac{y}{x} = \dfrac{1-2t}{2} \longrightarrow 1$, la recta $y = x$ es tangente a la curva en $(0,0)$, que es un punto de retroceso de primera especie.

t	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{5}{6}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
x	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	-8	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$\frac{8}{3}$	$\searrow$	1
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$\frac{8}{3}$	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	-8	$\searrow$	$-\infty$
y'		$-$	0	$+$		$+$		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
x'		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$		$-$	
$\frac{dy}{dx}$		$+$	1	$+$	$.\infty$	$+$		$-$		$-$	0	$+$	



Observando el gráfico, nos permite ver la existencia de una simetría sobre la recta $y = x$, entonces debemos tener $y(t) = x(u)$, $x(t) = y(u)$, para un cambio apropiado de t por u. En particular debe tenerse que $\dfrac{y}{x}$ cambie por $\dfrac{x}{y}$ al cambiar t por u, es decir $\dfrac{y}{x} = \dfrac{1-2t}{2} = \frac{1}{2} - t = \dfrac{1}{\frac{1}{2} - u} \Longrightarrow t = -\dfrac{3+2u}{2(1-2u)}$.

Así tenemos que $y(t) = \dfrac{(4u+2)^2}{2(4u-6)(2u-1)} = \dfrac{(1+2u)^2}{(3-2u)(1-2u)} = x(u)$ y que $x(t) = y(u)$, lo que verifica la simetría sobre la recta $y = x$, pero la simetría no parece como evidente en las ecuaciones originales.

n) Las ecuaciones $x(t) = \dfrac{t(t+2)}{t^2-1}$, $y(t) = \dfrac{t}{t+1}$ se indefinen en $t = \pm 1$ y en $t = -1$ respectivamente. De esta forma tenemos que:

– Si $t \to 1^{\pm}$, $x(t) \longrightarrow \pm\infty$, $y(t) \longrightarrow \frac{1}{2}$ y $y = \frac{1}{2}$ es asíntota horizontal.

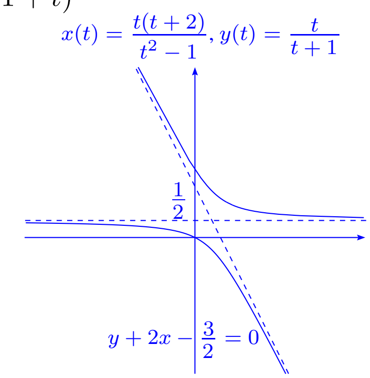
– Si $t \to -1^{\pm}$, $x(t) \longrightarrow \pm\infty$, $y(t) \longrightarrow \pm\infty$, por lo que $\dfrac{y}{x} = \dfrac{t-1}{t+2} \longrightarrow -2$ y también $y + 2x = \dfrac{3t}{t-1} \longrightarrow \frac{3}{2}$.

La recta $y + 2x - \frac{3}{2} = 0$ es asíntota oblicua.

– Si $t \to \pm\infty$, $x(t) \longrightarrow 1$, $x(t) \longrightarrow 1$, entonces $\dfrac{y-1}{x-1} = -\dfrac{t+1}{2t+1} \longrightarrow -\dfrac{1}{2}$, es decir la pendiente de la tangente en $(1, 1)$ es $-\frac{1}{2}$.

Las derivadas son $x'(t) = -2\dfrac{t^2+t+1}{(t^2-1)^2}$, $y'(t) = \dfrac{1}{(1+t)^2}$ y tenemos el gráfico siguiente:

t	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x	1	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	1
y	1	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	1
y'		$+$		$+$		$+$	
x'		$-$		$-$		$-$	
$\frac{dy}{dx}$		$-$		$-$		$-$	



La curva en realidad es una hipérbola. En efecto si se toma $t = \dfrac{y}{1-y} \Longrightarrow x = \dfrac{y^2 + 2y(1-y)}{y^2 - (1-y)^2} = \dfrac{-y^2+2y}{2y-1} \Longrightarrow y^2 + 2xy - x - 2y = 0$, que la ecuación de una hipérbola. La hipérbola se recorre totalmente.

o) Las ecuaciones $x(t) = \dfrac{t^2+2}{t^2+t+1}$, $y(t) = \dfrac{t^2+2}{t^2-t+1}$ no se indefinen en $\mathbb{R}$. Además se tiene que $\lim\limits_{t\to\pm\infty} x(t) = \lim\limits_{t\to\pm\infty} y(t) = 1$, es decir las rectas $x = 1$, $y = 1$ son asíntotas.

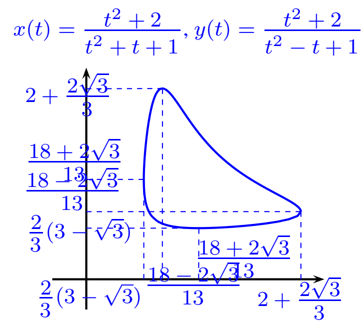
Las derivadas son $x'(t) = \dfrac{t^2-2t-2}{(t^2+t+1)^2}$, $y'(t) = \dfrac{-t^2-2t+2}{(t^2-t+1)^2}$, las cuales se anulan en los valores $t = 1 \pm \sqrt{3}$, y $t = -1 \pm \sqrt{3}$ respectivamente, es decir $t = 1 - \sqrt{3} \approx -0{,}73205$, $t = 1 + \sqrt{3} \approx 2{,}73205$ y $t = -1 - \sqrt{3} \approx -2{,}73205$, $t = -1 + \sqrt{3} \approx 0{,}73205$.

Los puntos donde las derivadas se anulan son $x(1-\sqrt{3}) = 2 + \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \approx 3{,}1547$,

$y(1-\sqrt{3}) = \dfrac{18-2\sqrt{3}}{13} \approx 1{,}1181$, $x(1+\sqrt{3}) = 2 - \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}8453$, $y(1+\sqrt{3}) = \dfrac{18+2\sqrt{3}}{13} \approx 1{,}6510$, $x(-1-\sqrt{3}) = \dfrac{18+2\sqrt{3}}{13} \approx 1{,}6510$, $y(-1-\sqrt{3}) = \dfrac{2}{3}(3-\sqrt{3}) \approx 0{,}8453$, $x(-1+\sqrt{3}) = \dfrac{18-2\sqrt{3}}{13} \approx 1{,}1181$, $y(-1+\sqrt{3}) = \dfrac{2}{3}(3+\sqrt{3}) \approx 3{,}1547$.

Además, $\dfrac{dy}{dx}(1-\sqrt{3}) = \lim\limits_{x\to 1-\sqrt{3}} \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = -(8\sqrt{3}+\frac{43}{3}) \approx -28{,}1897$, $\dfrac{dy}{dx}(1-\sqrt{3}) = -(\dfrac{43}{3} - 8\sqrt{3}) \approx -0{,}4769$.

	$-\infty$		$-1-\sqrt{3}$		$1-\sqrt{3}$		1		$-1+\sqrt{3}$		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
x	1	$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$	1	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
y	1	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	1	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
y'		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
x'		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$-$		$+$	
$\frac{dy}{dx}$		$-$	0	$+$	$+\infty \vert -\infty$	$-$		$-$	$-\infty \vert +\infty$	$+$	0	$-$	



p) Las ecuaciones $x(t) = \mathrm{e}^{-1/t}$, $y(t) = t\mathrm{e}^{2/t}$ se indefinen en $t = 0$.

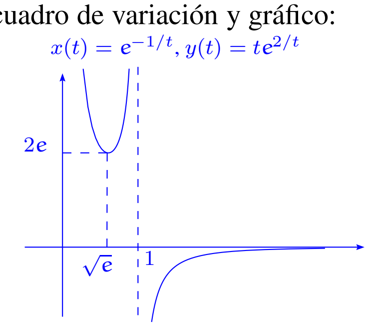
– Si $t \to 0^+$, $x(t) \longrightarrow 0$, $y(t) \longrightarrow +\infty$ y la recta $x = 0$ es asíntota.

– Si $t \to 0^-$, $x(t) \longrightarrow \infty$, $y(t) \longrightarrow 0$ y la recta $y = 0$ es asíntota.

– Si $t \to \pm\infty$, $x(t) \longrightarrow 1$, $y(t) \longrightarrow \pm\infty$ y la recta $x = 1$ es asíntota.

Las derivadas son $x'(t) = \dfrac{1}{t^2}\mathrm{e}^{-1/t}$, $y'(t) = \left(1 - \dfrac{2}{t}\right)\mathrm{e}^{2/t} \Longrightarrow y'(t) = 0$, si $t = 2$, con $x(2) = \mathrm{e}^{-1/2}$, $y(2) = 2\mathrm{e}$. Así tenemos el siguiente cuadro de variación y gráfico:

t	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x	1	$\nearrow$	$+\infty \Vert 0$	$\nearrow$	$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$	$\nearrow$	1
y	$-\infty$	$\nearrow$	$0 \Vert +\infty$	$\searrow$	$2\mathrm{e}$	$\nearrow$	$+\infty$
y'		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
x'		$+$	$\Vert$	$+$		$+$	
$\frac{dy}{dx}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	



q) Las ecuaciones $x(t) = \cos^2 t + \ln(\operatorname{sen} t)$, $y(t) = \operatorname{sen} t \cos t$ se definen en el intervalo $]\,0, \pi\,[$ simultáneamente, puesto que $\operatorname{sen} t > 0$. El período de la curva es 2π y como al sustituir t por $\pi - t$, $x(t) = x(\pi - t)$, $y(t) = -y(\pi - t)$ la curva es simétrica respecto al eje x. De esta forma se puede limitar el estudio al intervalo $]\,0, \frac{\pi}{2}\,[$.

– Si $t \to 0^+$, $x(t) \longrightarrow -\infty$, $y(t) \longrightarrow 0$; la recta $y = 0$ es asíntota.

– Si $t \to \frac{\pi}{2}$, $x(t) \longrightarrow 0$, $y(t) \longrightarrow 0$.

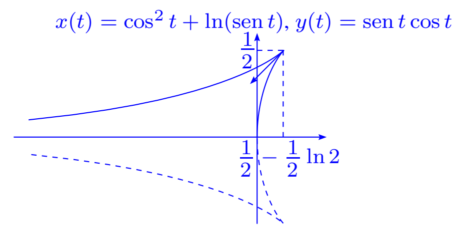
Las derivadas $x'(t) = \dfrac{\cos 2t}{\tan t}$, $y'(t) = \cos 2t$, son tales que $x'(t) = y'(t) = 0$ si $t = \frac{\pi}{4}$, con lo cual tenemos un punto singular tal que $\dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \dfrac{1}{\tan t} \longrightarrow 1$, si $t \to \frac{\pi}{4}$.

En $t \to 0^+$, $x'(t) \longrightarrow +\infty$, $y'(t) \longrightarrow 1$ i.e. $\dfrac{dy}{dx} \longrightarrow 0$.

En $t = \frac{\pi}{4}$ tenemos que $(\frac{1}{2}(1 - \ln 2), \frac{1}{2}$ es un punto singular, cuya segunda derivada nos indica que es un punto en retroceso de primera especie. En efecto:

$x''(t) = -(\csc^2 + 2)\cos^2 t + 2\,\mathrm{sen}^2\, t - 1$, $y''(t) = -2\,\mathrm{sen}\, 2t$, $x''(\frac{\pi}{4}) = -2$, $y'(\frac{\pi}{4}) = -2$.

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
x	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2}$	$\searrow$	0
y	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0
y'		$+$	0	$-$	-1
x'		$+$	0	$-$	0
$\frac{dy}{dx}$	1	$+$	1	$+$	$.\infty$

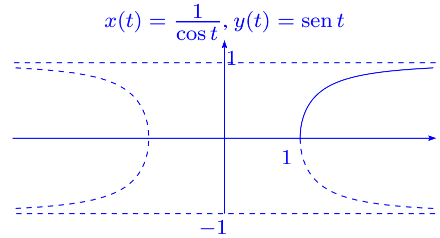


r) Las ecuaciones $x(t) = \dfrac{1}{\cos t}$, $y(t) = \mathrm{sen}\, t$ están definidas en $[\,0, 2\pi\,] \setminus]\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$ y son de período 2π. Además, dado que al sustituir t por $-t$, $x(t)$ se conserva y $y(t)$ cambia de signo, la curva es simétrica respecto al eje x. También al sustituir t por $\pi - t$, $x(t)$ cambia de signo y $y(t) = y(\pi - t)$ y es simétrica respecto al eje y. Limitaremos el estudio al intervalo $[\,0, \frac{\pi}{2}\,[$.

Si $x \to \frac{\pi}{2}^-$, $x(t) \longrightarrow +\infty$, $y(t) \longrightarrow 1$.

Las derivadas son $x'(t) = \dfrac{\mathrm{sen}\, t}{\cos^2 t}$, $y'(t) = \cos t$ i.e. $x'(t) = 0$, si $t = 0$, $y'(t) = 0$, si $x = \frac{\pi}{2}$.

t	0		$\frac{\pi}{2}$
x	1	$\nearrow$	$+\infty$
y	0	$\nearrow$	1
y'	1	$+$	
x'	0	$+$	
$\frac{dy}{dx}$	$.\infty$	$+$	



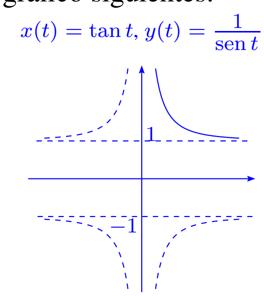
s) Las ecuaciones $x(t) = \tan t$, $y(t) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} t}$ tienen período 2π y están definidas sobre $]\,0, 2\pi\,[\,\setminus\{\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$. El cambio de t por $-t$ cambio de signo las ecuaciones por lo que es simétrica respecto al origen. El cambio de t por $\pi - t$ transforma a x por $-x$ y se conserva y. También es simétrica respecto al eje y. El intervalo de estudio es $]\,0, \frac{\pi}{2}\,[$.

– Si $t \to 0^+$, $x(t) \longrightarrow 0$, $y(t) \longrightarrow +\infty$ y el eje $x = 0$ es asíntota de la curva.

– Si $t \to \frac{\pi}{2}^-$, $x(t) \longrightarrow +\infty$, $y(t) \longrightarrow 1$ y la recta $y = 1$ es asíntota de la curva.

Las derivadas son $x'(t) = \dfrac{1}{\cos^2 t}$, $y'(t) = -\dfrac{\cos t}{\operatorname{sen}^2 t}$, con lo cual tenemos $y'(t) \neq 0$, $x'(t) \neq 0$ en $]\,0, \frac{\pi}{2}\,[$ y tenemos al cuadro de variación y gráfico siguientes:

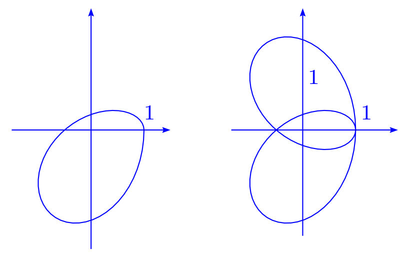
t	0		$\frac{\pi}{2}$
x	0	$\nearrow$	$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	1
y'	$+\infty$	$-$	0
x'	1	$+$	$.\infty$
$\frac{dy}{dx}$	$.\infty$	$-$	0



t) Las ecuaciones $x(t) = \cos 2t$, $y(t) = \operatorname{sen} 2t - \operatorname{sen} t$ tienen período 2π, la curva es simétrica respecto al eje x y consideramos el intervalo $[\,0, \pi\,]$ para el estudio.

Las derivadas $x'(t) = -2\operatorname{sen} 2t$, $y'(t) = 2\cos 2t - \cos t$ son tales que $x'(t) = 0$ en $t = 0$, $y'(t) = 0 \iff 4\cos^2 t - \cos t - 2 = 0$, es decir $\cos t = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8} \implies t_1 = \arccos(\frac{1+\sqrt{33}}{8}) \approx 0{,}567829$, $t_2 = \arccos(\frac{1+\sqrt{33}}{8}) \approx 2{,}20566$.

t	0		t_1		$\frac{\pi}{2}$		t_2		π
x	1	$\searrow$		$\searrow$	-1	$\nearrow$		$\nearrow$	1
y	0	$\nearrow$		$\searrow$	-1	$\searrow$		$\nearrow$	0
y'	1	$+$	0	$-$	-2	$-$	0	$+$	3
x'	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0
$\frac{dy}{dx}$	∞	$-$	0	$+$	∞	$-$	0	$+$	∞



$x(t) = \cos 2t$, $y(t) = \operatorname{sen} 2t - \operatorname{sen} t$

En el gráfico se observa que hay dos puntos dobles de valor en $y = 0$. De esta forma buscamos los valores en t para los cuales $x(t) = x(u)$ con $y(t) = y(u) = 0$. Ahora $y(t) = \operatorname{sen} 2t - \operatorname{sen} t = \operatorname{sen} t(2\cos t - 1) = 0 \Longrightarrow \operatorname{sen} t = 0$ i.e. $t = 0,\pi,2\pi$ o $\cos t = \frac{1}{2}$ i.e. $t = \frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}$. Así concluimos que los puntos dobles son $(1, 0)$ y $(-\frac{1}{2}, 0)$.

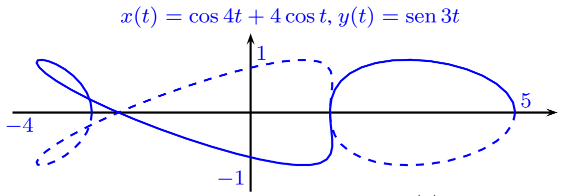
u) Las ecuaciones $x(t) = \cos 4t + 4\cos t$, $y(t) = \operatorname{sen} 3t$ indican que el período es 2π y como al sustituir t por $-t$ cambia de signo $y(t)$, es simétrica respecto al eje x, es decir que es necesario considerar el intervalo $[\,0, \pi\,]$.

Las derivadas $x'(t) = -4\operatorname{sen} 4t - 4\operatorname{sen} t$, $y'(t) = 3\cos t$ se anulan en $\operatorname{sen} 4t + \operatorname{sen} t = 4\operatorname{sen} t\cos t(2\cos^2 t - 1) + \operatorname{sen} t = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{sen} t = 0$ o $8\cos^3 t - 4\cos t + 1 = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{sen} t = 0$ o $(\cos t - \frac{1}{2})(8\cos^2 t + 4\cos t - 2) = (2\cos t - 1)(\cos t + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})(\cos t + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} = 0$, es decir $t \in \{0, \pi\} \cup \{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\} \cup \{\frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}\}$. Además, $\cos 3t = 0 \Longleftrightarrow 3t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ i.e. $t = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$.

De esta forma tenemos el cuadro de variación y el gráfico de la curva:

t	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{5}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{4\pi}{5}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
x	5	$\searrow$	$2\sqrt{3}-\frac{1}{2}$	$\searrow$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$\frac{5\sqrt{5}-5}{4}$	$\searrow$	1	$\searrow$	$\frac{-5\sqrt{5}-5}{4}$	$\nearrow$	$-2\sqrt{3}-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	-3
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\cos\frac{\pi}{10}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
y'	3	$+$	0	$-$	-1	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	3
x'	0	$-$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0
$\frac{dy}{dx}$	$.\infty$	$-$	0	$+$	$.\infty$	$-$	$.\infty$	$+$	0	$-$	$.\infty$	$+$	0	$-$	$.\infty$

Los valores que aparecen en la tabla son los siguientes: $2\sqrt{3} - \frac{1}{2} \approx 2{,}9641$; $\frac{5\sqrt{5}-5}{4} \approx 1{,}54508$; $-\frac{5\sqrt{5}+5}{4} \approx 4{,}041588$; $-2\sqrt{3}-\frac{1}{2} \approx -3{,}9641$; $-\operatorname{sen}\frac{\pi}{5} \approx -0{,}587215$, $\cos\frac{\pi}{10} \approx 0{,}951056$.



Del gráfico notamos que existen puntos dobles, cuando $y(t) = 0$ y cuatro puntos dobles en los cuales $x(t) = x(u)$, $y(t) = -y(u)$.

En el primer caso es simple determinar que los puntos son $(\frac{3}{2}, 0)$, $(-\frac{5}{2}, 0)$. En el segundo caso no es tan sencillo determinar estos valores.

3. Graficar las curvas parametrizadas descritas por las ecuaciones $x(t)$, $y(t)$ y precisar los elementos señalados:

a) $x(t) = 2t + t^2$, $y(t) = 2t - \dfrac{1}{t^2}$, puntos singulares, parábola asíntota, puntos dobles.

b) $x(t) = t^2 + \dfrac{2}{t}$, $y(t) = t + \dfrac{1}{t}$, puntos singulares, parábola asíntota, puntos de inflexión.

c) $x(t) = t^2 + t^3$, $y(t) = t^2 + t^3 - 2t^4 - 2t^5$, puntos singulares, parábola asíntota, puntos dobles.

d) $x(t) = \dfrac{t+1}{t^3}$, $y(t) = \dfrac{t-1}{t^2}$, puntos de inflexión.

e) $x(t) = \dfrac{t+1}{t(t-1)}$, $y(t) = \dfrac{t(t+1)}{t-1}$.

f) $x(t) = t\ln t$, $y(t) = \dfrac{\ln t}{t}$, simetría.

g) $x(t) = t^2 \ln t$, $y(t) = t\ln^2 t$.

h) $x(t) = \dfrac{\ln|t|}{t-1}$, $y(t) = \ln\left|t + \dfrac{1}{t}\right|$, puntos dobles.

i) $x(t) = \dfrac{1}{t} + \ln(2+t)$, $y(t) = t + \dfrac{1}{t}$.

j) $x(t) = \dfrac{t^2}{1+t-t^3}$, $y(t) = \ln(1+t^2)$, puntos singulares, puntos dobles.

k) $x(t) = \mathrm{e}^{t-1} - t$, $y(t) = t^3 - 3t$, puntos estacionarios.

l) $x(t) = t^4 + t^2$, $y(t) = \mathrm{e}^{t^3+3t^2} - t^3 + 3t^2$, puntos estacionarios.

m) $x(t) = t^{1/t}$, $y(t) = t^t$.

n) $x(t) = (1+\cos t)\cos t$, $y(t) = (1+cost)\operatorname{sen} t$, (cardioide).

o) $x(t) = \cos 3t$, $y(t) = \operatorname{sen} 2t$, puntos dobles.

p) $x(t) = \operatorname{sen} 3t$, $y(t) = \tan 4t$, puntos dobles.

Solución

a) Las ecuaciones paramétricas $x(t) = 2t + t^2$, $y(t) = 2t - \dfrac{1}{t^2}$ están definidas en $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Así cuando $t \to 0$, $x(t) \longrightarrow 0$, $y(t) \longrightarrow +\infty$, por lo que el eje y es asíntota.

Si $t \to \pm\infty$, $x(t) \longrightarrow +\infty$, $y(t) \longrightarrow \pm\infty$, por lo que $\dfrac{y}{x} = \dfrac{2t^3 - 1}{t^3(t+2)} \longrightarrow 0$, es decir debemos determinar a,b,$c \in \mathbb{R}$ tales que $x(t) - (ay^2(t) + by(t) + c) \longrightarrow 0$, si $t \to \infty$.

En efecto, $2t+t^2-a\big(2t-\frac{1}{t^2}\big)^2-b\big(2t-\frac{1}{t^2}\big)-c = t^2(1-4a)+2t(1-b)+c+4a\frac{1}{t}-\frac{b}{t^2}-\frac{a}{t^4}$ si y sólo si $a = \frac{1}{4}$, $b = 1$, $c = 0$. De esta forma la curva tiene como asíntota la parábola $x = \frac{1}{4}y^2 + y$.

Si tomamos $t \neq u$ tales que $x(t) = x(u)$, $y(t) = y(u)$, se tiene que $2t + t^2 = 2u + u^2 \Longrightarrow 2(t-u) = u^2 - t^2 = -(t-u)(t+u) \Longrightarrow t + u = -2$. Además $2t^3u^2 - u^2 = 2u^3t^2 - t^2 \Longrightarrow 2u^2t^2(t-u) = t^2 - u^2 = -(u-t)(u+t) \Longrightarrow u^2t^2 = 1$, por lo que u y t satisface la ecuación $(z-u)(z-t) = 0$, es decir $z^2 + 2z \pm 1 = 0$.

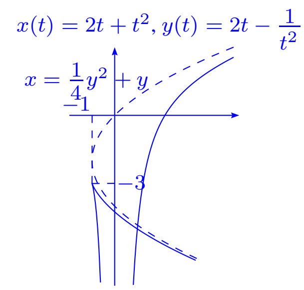
Si $ut = 1 \Longrightarrow z^2 + 2z + 1 = (z+1)^2 = 0 \Longrightarrow z = -1$ i.e. $u = t = -1$ solución que no sirve.

Si $ut = -1 \Longrightarrow z^2 + 2z - 1 = 0 \Longrightarrow z = -1 \pm \sqrt{2} \Longrightarrow t = -1 \pm \sqrt{2}$, $u = -1 - \sqrt{2}$ y sustituyendo $x(-1+\sqrt{2}) = 1$, $y(-1+\sqrt{2}) = -5$.

Las derivadas son $x'(t) = 2 + 2t$, $y'(t) = 2 + \dfrac{2}{t^3} = 2\dfrac{t^3+1}{t^3} = 2\dfrac{(t+1)(t^2+t+1)}{t^3}$ i.e. $x'(t) = 0$, si $t = -1$, $y'(t) = 0$, si $t = -1$, por lo que $(x(-1), y(-1)) = (-1, -3)$ es un punto singular.

Así tenemos que $x''(-1) = 2$, $y''(-1) = -6$, $x'''(-1) = 0$, $y'''(-1) = 24$ no son colineales y la tangente está dirigida por $(1, -3)$ en el punto de retroceso de primera especie $(-1, -3)$.

t	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
x	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	$+\infty$
y'		$+$		$-$	$\Vert$	$+$	
x'		$-$		$+$		$+$	
$\frac{dy}{dx}$		$-$		$-$		$+$	



b) las ecuaciones paramétricas $x(t) = t^2 + \frac{2}{t}$, $y(t) = t + \frac{1}{t}$ se indefinen en $t = 0$.

– Si $t \to 0^{\pm}$, $x(t) \longrightarrow \pm\infty$, $y(t) \longrightarrow \pm\infty$.

– Si $t \to \pm\infty$, $x(t) \longrightarrow \pm\infty$, $y(t) \longrightarrow \pm\infty$.

– Si consideramos $\dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{t^2+1}{t^3+2} \longrightarrow 0$, si $t \longrightarrow \pm\infty$, con lo cual debemos determinar $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $x(t) - ay(t)^2 - by(t) - c \longrightarrow 0 \Longrightarrow t^2 + \frac{2}{t} - a\big(t^2 + 2 + \frac{1}{t^2}\big) - bt - \frac{b}{t} + c = (1-a)t^2 - bt - 2a - c + (2-b)\frac{1}{t} - \frac{a}{t^2} \longrightarrow 0$ si y sólo si $a = 1$, $b = 0$, $c = 2$ i.e. $x = y^2 - 2$ es una parábola asíntota de la curva.

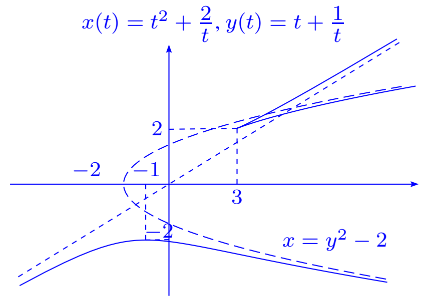
– Si consideramos $\dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{t^2+1}{t^3+2} \longrightarrow \frac{1}{2}$, si $t \to 0$ y tenemos $y - \frac{1}{2}x = t - \frac{1}{2}t^2 \longrightarrow 0$, si $t \to 0$, es decir $y = \frac{1}{2}x$ es asíntota de la curva.

Las derivadas $x'(t) = 2t - \dfrac{2}{t^2}$, $y'(t) = 1 - \dfrac{1}{t^2}$ son tales que $x'(t) = 0$, si $t = 1$, $y'(t) = 0$, si $t^2 = 1$ i.e. $t = \pm 1$. Así $(x(1), y(1)) = (3, 2)$ es un punto singular.

– Si $t \to 1$, $\dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \dfrac{t^2-1}{2(t^3-1)} = \dfrac{t+1}{2(t^2+t+1)} \longrightarrow \dfrac{1}{3}$. Además, $x''(t) = 2 + \dfrac{4}{t^3}$, $y''(t) = \dfrac{2}{t^3}$, por lo que para determinar los puntos de inflexión debemos encontrar t tal que $(x'(t), y'(t)) = \lambda(x''(t), y''(t))$, es decir que $\dfrac{x'}{x''} = \dfrac{y'}{y''}$ o bien $x'y'' - x''y' = 0$. Así tenemos $x'y'' - x''y' = -\dfrac{2(t^3 - 3t + 2)}{t^3} = \dfrac{2(t-1)^2(t+2)}{t^3} = 0 \Longrightarrow t = -2$ y el punto de inflexión es $(3, -\frac{5}{2})$.

De esta forma tenemos el cuadro de variación y el gráfico siguiente:

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\searrow$	$-\infty \,\Vert\, -\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty \,\Vert\, +\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
x'		$-$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$\frac{dy}{dx}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	$\frac{1}{3}$	$+$	



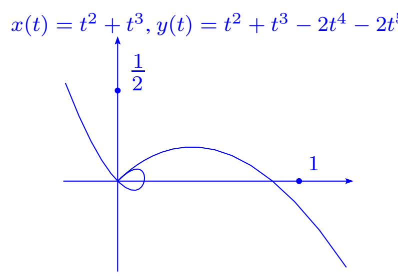
c) Las ecuaciones $x(t) = t^2 + t^3$, $y(t) = t^2 + t^3 - 2t^4 - 2t^5$ están definidas en todo $\mathbb{R}$ y son tales que $x(t) = 0$, si $t = 0$, $y(t) = 0$, si $t = 0, -1, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

– Si $t \to \pm\infty$, $x(t) \longrightarrow \pm\infty$, $y(t) \longrightarrow \mp\infty$ y como $t \to \pm\infty$, se tiene que $y = -2x^{\frac{5}{3}}$ es asíntota a la curva. – Las derivadas son $x'(t) = 2t + 3t^2$, $y'(t) = 2t + 3t^2 - 8t^3 - 10t^4$ son tales que $x'(t) = 0$, si $t = 0$; $t = -\frac{2}{3}$, $y'(t) = 0$, si $t = 0$, $\rho = -0{,}436011$, $\beta = 0{,}519308$, $\alpha = -0{,}883296$ i.e. hay un punto singular en $t = 0$, o sea el punto $(0,0)$. Además $\dfrac{y'(t)}{x'(t)} \longrightarrow 1$, si $t \to 0$.

– Si calculamos $x''(t) = 2 + 6t$, $y''(t) = 2 + 6t - 24t^2 - 40t^3$, $x''(0) = 2$, $y''(0) = 2$ y $x'''(t) = 6$, $y'''(t) = 6 - 48t - 120t^2$, con $x'''(0) = 6$, $y'''(0) = 6$, es decir son colineales. De esta forma $x^{(4)}(t) = 0$, $y^{(4)}(t) = -48 - 240t$ i.e. $x^{(4)}(0) = 0$, $y^{(4)}(0) = -48$, por lo que $(0,0)$ es un punto de retroceso de segunda especie de tangente, dirigida por $(1,1)$.

Así tenemos el cuadro de variación:

t	$-\infty$		α		$-\frac{2}{3}$		β		0		γ		$+\infty$
x	$-\infty$	$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$
y'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
x'		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{dy}{dx}$		$-$	0	$+$	∞	$-$	0	$+$	1	$+$	0	$-$	



En el gráfico que hay un sólo punto doble $(0,0)$, correspondiendo a los valores $t = 0$, $t = -1$.

d) Las ecuaciones paramétricas $x(t) = \dfrac{t+1}{t^3}$, $\dfrac{t-1}{t^2}$ se indefinen en $t = 0$.

– Si $t \to 0^{\pm}$, $x(t) = \pm\infty$, $y(t) \longrightarrow -\infty$.

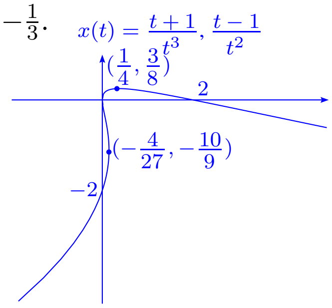
– Si $t \to \pm\infty$, $x(t) \longrightarrow 0^+$, $y(t) \longrightarrow 0^\pm$.

Las derivadas $x'(t) = -\dfrac{2t+3}{t^4}$, $y'(t) = -\dfrac{t-2}{t^3}$ se anulan en $-\frac{3}{2}$ y 2 respectivamente. También, $\dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \dfrac{t(t-2)}{2t+3} \longrightarrow \pm\infty$, si $t \to \pm\infty$, es decir la curva se prolonga en $(0,0)$ y tiene por tangente el eje y.

– Los puntos de inflexión satisfacen $x'y'' - x''y' = 0$. De esta forma $x''(t) = \dfrac{6(t+2)}{t^5}$, $y''(t) = \dfrac{2(t-3)}{t^4}$, es decir $x'y'' - x''y' = \dfrac{2(t^2+3t-3)}{t^4} = 0$, si $t = \frac{-3\pm\sqrt{21}}{2}$.

Los puntos son: $x(\frac{-3\pm\sqrt{21}}{2}) = \frac{11}{6} + \frac{7\sqrt{21}}{18}$ y $y(\frac{-3+\sqrt{21}}{2}) = -\frac{1}{3}$.

t	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		0		2		$+\infty$
x	0	$\nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\searrow$	$-\infty \parallel +\infty$	$\searrow$	$\frac{3}{8}$	$\searrow$	0
y	0	$\searrow$	$-\frac{10}{9}$	$\searrow$	$-\infty \parallel -\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0
y'		$-$		$-$	$\parallel$	$+$	0	$-$	
x'		$+$	0	$-$	$\parallel$	$-$		$-$	
$\frac{dy}{dx}$		$-$	$.\infty$	$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$	



e) Las ecuaciones paramétricas $x(t) = \dfrac{t+1}{t(t-1)}$, $y(t) = \dfrac{t(t+1)}{t-1}$ se indefinen en 0, 1 y en 1 respectivamente. Además $x(t) = 0$, si $t = -1$, $y(t) = 0$, si $t = 0, t = -1$.

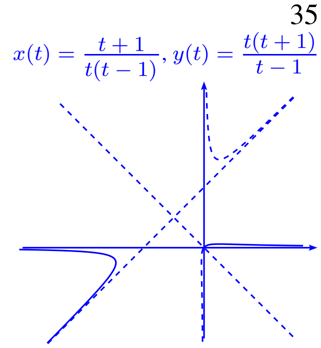
Observamos que $x\left(\frac{1}{t}\right) = -y(t)$, $y\left(\frac{1}{t}\right) = x(t)$, por lo que la curva es simétrica respecto a la recta $y = -x$ y se analizará solamente el intervalo $[-1, 1[\, \setminus \{0\}$.

– Si $y \to 1^-$, $x(t) \longrightarrow -\infty$, $y(t) \longrightarrow -\infty$, por lo que $\dfrac{y(t)}{x(t)} = t^2 \longrightarrow 1$, si $t \to 1$ i.e. $y(t) - x(t) = \dfrac{(t+1)^2}{t} \longrightarrow 4$, si $t \to 1$ y la recta $y = x + 4$, es asíntota de la curva. Además $y(t) - x(t) - 4 = \dfrac{(t-1)^2}{t} \geq 0$, si $t \to 1$ y la curva está por encima de la asíntota.

– Si $t \to 0^\pm$, $x(t) \longrightarrow \mp\infty$, $y(t) \longrightarrow 0$, es decir el eje y es asíntota, cuando $x \to \pm\infty$.

Las derivadas son $x'(t) = -\dfrac{t^2+2t-1}{t^2(t-1)^2}$, $y'(t) = \dfrac{t^2-2t-1}{(t-1)^2}$, de modo que $x'(t) = 0$, si $t = -1 \pm \sqrt{2}$ y $y'(t) = 0$, si $t = 1 \pm \sqrt{2}$. Para el análisis se conservan las raíces que estén entre -1 y 1, o sea $1 - \sqrt{2}$ y $\sqrt{2} - 1$.

t	-1		$1-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}-1$		$+1$
x	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty \mid -\infty$	$\nearrow$	$-3-2\sqrt{2}$	$\searrow$	$-\infty$
y	0	$\nearrow$	$3-2\sqrt{2}$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
x'		$+$		$+$	$\mid$	$+$	0	$-$	
$\frac{dy}{dx}$		$+$	0	$-$		$-$	$.\infty$	$+$	



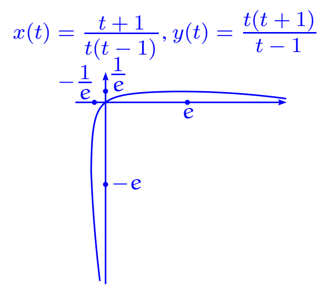
f) Las ecuaciones paramétricas $x(t) = t\ln t$, $y(t) = \dfrac{\ln t}{t}$ están definidas para $t > 0$ y como $x\big(\frac{1}{t}\big) = -y(t)$, $y\big(\frac{1}{t}\big) = -x(t)$, el gráfico es simétrica respecto a la segunda bisectriz y se analizará el gráfico solamente sobre $]\,0, 1\,]$.

– Si $t \to 0^+$, $x(t) \longrightarrow 0^-$, $y(t) \longrightarrow -\infty$ i.e. el eje x es asíntota de la curva.

– Si $t \to 1^-$, $x(t) \longrightarrow 0$, $y(t) \longrightarrow 0$.

Las derivadas $x'(t) = 1 + \ln t$, $y'(t) = \dfrac{1 - \ln t}{t^2}$ i.e. $x'(t) = 0$, si $t = \mathrm{e}^{-1}$ y $y'(t) = 0$, si $t = \mathrm{e}$. Así tenemos el cuadro de variación:

t	0		$\frac{1}{\mathrm{e}}$		1
x	0	$\searrow$	$-\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\nearrow$	0
y	$-\infty$	$\nearrow$	$-\mathrm{e}$	$\nearrow$	0
y'		$+$		$+$	
x'		$-$	0	$+$	
$\frac{dy}{dx}$	∞	$-$	∞	$+$	1



Observemos que $\dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \dfrac{1 + \ln t}{(1 + \ln t)t^2} \longrightarrow \infty$, si $t \to 0^+$ y $\dfrac{y'(t)}{x'(t)} \longrightarrow 1$, si $t \to 1^-$.

g) Las ecuaciones $x(t) = t^2 \ln t$, $y(t) = t\ln^2 t$ están definidas si $t > 0$.

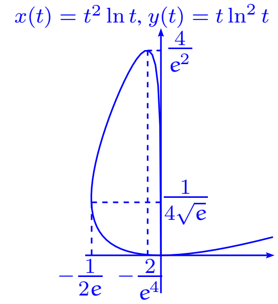
– Si $t \to 0^+$, $x(t) \longrightarrow 0^+$ y se puede prolongar la curva en $t = 0$ definidas por $(0, 0)$

– Si $t \to +\infty$, $x(t) \longrightarrow \infty$, $y(t) \longrightarrow \infty$ y $\dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{\ln t}{t} \longrightarrow 0$, por lo que la curva tiene rama parabólica de dirección asintótica x.

Las derivadas son $x'(t) = t(2\ln t + 1)$, $y'(2 + \ln t)\ln t =$ y se tiene que $x'(t) = 0$, si $t = \mathrm{e}^{-1/2}$ y $y'(t) = 0$, si $t = 1$ o si $t = \mathrm{e}^{-2}$.

Además $\dfrac{y'(t)}{x'(t)} \longrightarrow -\infty$, si $t \longrightarrow 0$ i.e. el eje y es tangente a la curva $(0, 0)$.

t	0		e^{-2}		$e^{-\frac{1}{2}}$		1		$+\infty$
x	0	↘	$-\frac{2}{e^4}$	↘	$-\frac{1}{2}e$	↗	0	↗	$+\infty$
y	0	↗	$\frac{4}{e^2}$	↘	$\frac{1}{4\sqrt{e}}$	↘	0	↗	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
x'		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{dy}{dx}$	$.\infty$	$-$	0	$+$	$.\infty$	$-$	0	$+$	



h) Las ecuaciones $x(t)=\dfrac{\ln|t|}{t-1}$, $y(t)=\ln\left|t+\frac{1}{t}\right|$ están definidas si $t\neq 0$, $t\neq 1$.

– Si $t\to 1$, $x(t)\longrightarrow 1$, $y(t)\longrightarrow \ln 2$ y se puede prolongar la función $x(t)$ en $t=1$.

– Si $t\to 0$, $x(t)\longrightarrow +\infty$, $y(t)\longrightarrow +\infty$; además $\dfrac{y(t)}{x(t)}=\dfrac{(t-1)}{\ln|t|}(\ln(t^2+1)-\ln|t|)\longrightarrow 1$.

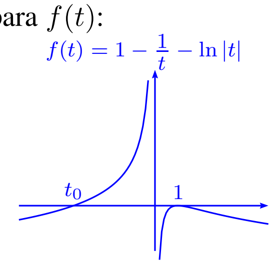
– Si $t\to 0$, $y(t)-x(t)=-\dfrac{t\ln|t|}{t-1}\longrightarrow 0^{\mp}$ y la curva tiene como asíntota la recta $y=x$.

– Si $t\to\pm\infty$, $x(t)\longrightarrow 0^{\pm}$,$y(t)\longrightarrow +\infty$, por lo que la curva tiene al eje y como asíntota.

Las derivadas son $x'(t)=\dfrac{1-\frac{1}{t}-\ln|t|}{(t-1)^2}$, $y'(t)=\dfrac{t^2-1}{t(t^2+1)}$ y se tiene que $y'(t)=0$, si $t=\pm 1$ y $x'(t)=0$, si $1-\dfrac{1}{t}-\ln|t|=0$.

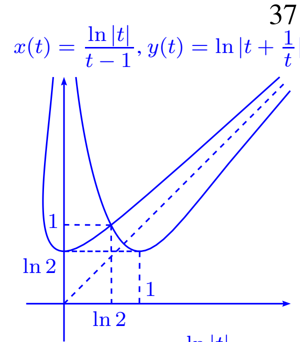
Estudiemos la función $f(t)=1-\dfrac{1}{t}-\ln|t|$, para $t\neq 0$, entonces $f'(t)=\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{1}{t}=\dfrac{1-t}{t^2}$, con lo cual tenemos el siguiente cuadro de variación para $f(t)$:

t	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f'		$+$		$+$		$-$	
f	$-\infty$	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

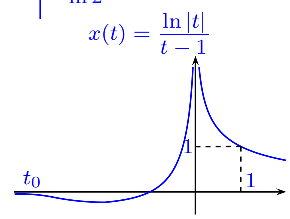


Del gráfico concluimos que existe un único $t_0<0$ tal que $f(t_0)=0$ i.e. $x'(t_0)=0$. También si $t=1$, $f(1)=0$, es decir $x'(1)=0$. El valor de t_0, se puede aproximar y se tiene $t_0\approx -3{,}591$, $x(t_0)\approx -0{,}278$, $y(t_0)\approx 1{,}353$.

El cuadro de variación para la curva es el siguiente:

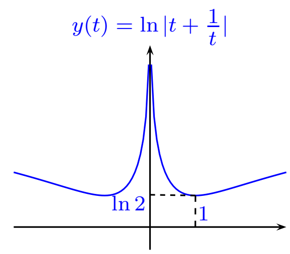


t	$-\infty$		t_0		-1		0		1		$+\infty$
x	0	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty \,\Vert\, +\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0
y	$+\infty$	$\searrow$		$\searrow$	$\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty \,\Vert\, +\infty$	$\searrow$	$\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$
y'		$-$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
x'		$-$	0	$+$		$+$	$\Vert$	$-$		$-$	
$\frac{dy}{dx}$		$+$	∞	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	



Observemos que $x'(t) \longrightarrow -\frac{1}{2}$, si $t \longrightarrow 1$. Además en el gráfico se ve que hay un punto doble, que necesitamos precisar. Para hacer esto, grafiquemos la función $x(t)$, pues nos va a a ser de gran ayuda.

En efecto, del gráfico de $x(t)$ se deduce de inmediato que no existe $t \neq u$, tal que $x(t) = x(u)$, si $t < -1$ y $\forall t \in]-1, 0[$, existe $u \in]0, +\infty[$ único, tales que $x(t) = x(u)$.



Si analizamos el gráfico de $y(t)$, observamos que hay cuatro soluciones para cada ecuación $y(t) = c$, si $c > \ln 2$.

Las soluciones son t, $-t$, $\dfrac{1}{t}$, $-\dfrac{1}{t}$. Así tenemos que la solución $u = t$ no sirve, pues $t \neq u$.

– Si $u = -t$, $x(t) = \dfrac{\ln|t|}{t-1} = \dfrac{\ln|-t|}{-t-1} \Longrightarrow t = 0$, que no es válido.

– Si $u = \frac{1}{t}$, $x(t) = \dfrac{\ln|\frac{1}{t}|}{\frac{1}{t} - 1} = t\dfrac{\ln|t|}{t-1} \Longrightarrow t = 1$, que no es válido.

– Si $u = -\frac{1}{t}$, $x(t) = \dfrac{\ln(t)}{t-1} = \dfrac{\ln|-\frac{1}{t}|}{-\frac{1}{t} - 1} = t\dfrac{\ln|t|}{t+1} \Longrightarrow t + 1 = t(t-1) \Longrightarrow$ $t^2 - 2t - 1 = 0$ i.e. $t = 1 \pm \sqrt{2}$, por lo que el punto doble es $x(1+\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2}+1)$, $y(1+\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\ln 8$.

i) Las ecuaciones $x(t) = \dfrac{1}{t + \ln(2+t)}$, $y(t) = t + \dfrac{1}{t}$ se indefinen si $t = 0$ y debemos tener $t > -2$, es decir la curva está definida para $]-2, +\infty[\setminus\{0\}$.

– Si $t \to 0^{\pm}$, $x(t) \longrightarrow \pm\infty$, $y(t) \longrightarrow \pm\infty$ y tenemos que $\dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{t^2+1}{1+\ln(2+t)} \longrightarrow 1$,

$y(t) - x(t) = t - \ln(2+t) \longrightarrow -\ln 2$, cuando $t \to$ i.e. $y = x - \ln 2$ es una asíntota de la curva.

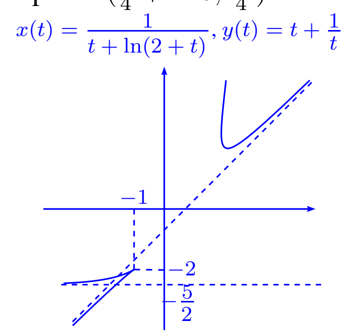
– Si $t \to +\infty$, $x(t) \longrightarrow +\infty$, $y(t) \longrightarrow \infty$.

– Si $t \to -2^+$, $x(t) \longrightarrow -\infty$, $y(t) \longrightarrow -\frac{5}{2}$, es decir la recta $y = -\frac{5}{2}$ es una asíntota de la curva.

Las derivadas son $x'(t) = -\dfrac{1}{t^2} + \dfrac{1}{2+t} = \dfrac{(t+1)(t-2)}{t^2(t+2)}$, $y'(t) = 1 - \dfrac{1}{t^2}$, con lo cual $x'(t) = 0$, si $t = -1, -2$ y $y'(t) = 0 \Longleftrightarrow t = \pm 1$. De esta forma tenemos que en $t = -1$, hay un punto singular. Las derivadas de orden dos y tres $x''(t) = \dfrac{2}{t^3} - \dfrac{1}{(2+t)^2}$, $y''(t) = \dfrac{2}{t^3}$, $x'''(t) = -\dfrac{6}{t^4} + \dfrac{2}{(2+t)^2}$, $y'''(t) = -\dfrac{-6}{t^4}$ y se tiene $x''(-1) = 4$, $y''(-1) = -6$, $x'''(-1) = -3$, $y''(-1) = -2$. Así el punto $(-1, -2)$, es un punto de retroceso de primera especie, de tangente con pendiente $\dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \dfrac{t-2}{(t+1)(t-1)} \longrightarrow \dfrac{3}{2}$.

– Los puntos de inflexión satisfacen $x'y'' - y'x'' = 0$, es decir:
$\dfrac{(t+1)(t-2)}{t^2(t+2)} \dfrac{2}{t^3} = \dfrac{(t+1)(t-1)}{t^2} \dfrac{2(2+t)^2 - t^3}{t^3(t+2)^2} \Longleftrightarrow t^4 - 3t^3 - 4t^2 = 0 \Longleftrightarrow$ $t^2(t+1)(t-4) = 0$. La solución sucede en $t = 4$, es decir en el punto $(\frac{1}{4} + \ln 6, \frac{17}{4})$.

t	-2		-1		0		1		2		$+\infty$
x	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ $+\infty$	$\searrow$	$1+\ln 3$	$\searrow$	$\frac{1}{2}+2\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$
y	$-\frac{5}{2}$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$ $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$\frac{5}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x'		$+$	0	$-$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$\frac{dy}{dx}$		$+$	$\frac{3}{2}$	$+$		$+$	0	$-$	∞	$+$	



j) Las ecuaciones paramétricas $x(t) = \dfrac{t^2}{1+t-t^3}$, $y(t) = \ln(1+t^2)$ están definidas, salvo para $1+t-t^3 = 0$, $t \in \mathbb{R}$, i.e. un sólo valor $\alpha \approx 1{,}32471$, es decir para $\mathbb{R}\backslash\{\alpha\}$.

– Si $t \to \alpha^{\pm}$, $x(t) \longrightarrow \mp\infty$, $y(t) \longrightarrow \ln(1+\alpha^2)$, o sea $y = \ln(1+\alpha^2)$ es asíntota de la curva.

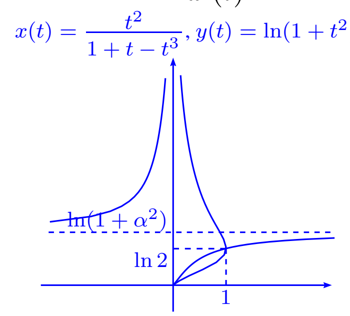
– Si $t \to \pm\infty$, $x(t) \longrightarrow 0^{\mp}$, $y(t) \longrightarrow +\infty)$ i.e. el eje y es asíntota de la curva.

Los puntos dobles deben satisfacer $y(t) = y(u) \Longleftrightarrow b = -u$, por lo que $\dfrac{t^2}{1+t-t^3} = \dfrac{t^2}{1-t+t^3} \Longrightarrow t(t^2-1) = 0 \Longrightarrow t = \pm 1$, pues $u \neq t$. Así $t = 1$, $u = -1$ y tenemos el punto doble $(1, \ln 2)$.

– Las derivadas son $x'(t) = \dfrac{t(t+1)(t^2-t+2)}{(1+t-t^3)^2}$, $y'(t) = \dfrac{2t}{1+t^2}$, por lo que en $t = 0$, es decir el punto $(0,0)$, es un punto singular.

Por otro lado, $x''(t) = \dfrac{2(t^6+3t^4+7t^3+1)}{(1+t-t^3)^3}$, $y''(t) = \dfrac{2(t-1)(t+1)}{(t^2+1)^2}$, $x''(0) = 2$, $y''(0) = 2$; $x'''(0) = -6$, $y'''(0) = 0$, con lo cual concluye que $(0,0)$ es un punto de retroceso de primera especie, con tangente dirigida por $(1,1)$, ya que $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = 1$.

t	$-\infty$		-1		0		α		$+\infty$
x	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty \mid -\infty$	$\nearrow$	0
y	$+\infty$	$\searrow$	$\ln 2$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\ln(1+\alpha^2)$	$\nearrow$	$+\infty$
y'		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x'		$+$	0	$-$	0	$+$	$\mid$	$+$	
$\frac{dy}{dx}$		$-$	∞	$+$	1	$+$		$+$	

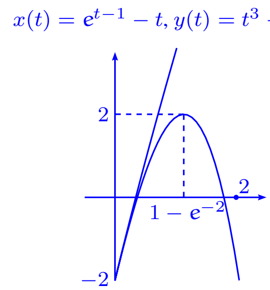


k) Las ecuaciones paramétricas $x(t) = \mathrm{e}^{t-1} - t$, $y(t) = t^3 - 3t$ están definidas en todo $\mathbb{R}$.

– Si $t \to \pm\infty$, $x(t) \longrightarrow \pm\infty$, $y(t) \longrightarrow \pm\infty$.

Las derivadas son $x'(t) = \mathrm{e}^{t-1} - 1$, $y'(t) = 3t^2 - 3$ y se tiene $x'(t) = 0$, si $t = 1$, $y'(t) = 0$, si $t = \pm 1$, lo que indica la existencia de un punto singular en $t = 1$. Así, $x''(t) = \mathrm{e}^{t-1}$, $y''(t) = 6t$, $x''(1) = 1$, $y''(1) = 6$; $x'''(t) = \mathrm{e}^{t-1}$, $y'''(t) = 6$, $x'''(1) = 1$, $y'''(1) = 6$, lo permite verificar la colinealidad de $(x''(1), y''(1))$ y de $(x'''(1), y'''(1))$. De esta forma $x^{(iv)}(1) = 1$, $y^{(iv)}(1) = 0$ y el punto $(0,-2)$, es un punto de retroceso de segunda especie, con tangente en la dirección $(1,6)$.

t	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x	$+\infty$	$\searrow$	$1-\mathrm{e}^2$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
x'		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{dy}{dx}$		$-$	0	$+$	6	$+$	

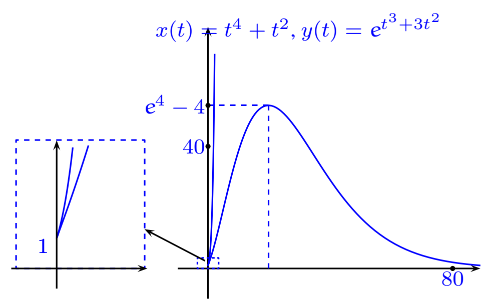


l) Las ecuaciones paramétricas $x(t) = t^4 + t^2$, $y(t) = \mathrm{e}^{t^3+3t^2}$ están definidas para todo $\mathbb{R}$.

– Si $t \to \pm\infty$, $y(t) \longrightarrow \pm\infty$, $x(t) \longrightarrow +\infty$.

Las derivadas $x'(t) = 4t^3 + 2t$, $y'(t) = \mathrm{e}^{t^3+3t^2} 3t(t+2)$, con lo cual se tiene que $x'(t) = 0$, si $t = 0$; $y'(t) = 0$, si $t = 0, -2$. Así tenemos para $t = 0$ un punto singular en $(0, 1)$; las derivadas $x''(t) = 12t^2 + 2$, $y''(t) = 3(3t^4 + 12t^3 + 12t^2 + 2t + 2)\mathrm{e}^{t^3+3t^2} - 6(t+1)$, $x''(0) = 2$, $y''(0) = 0$; $x'''(t) = 24t$, $y'''(t) = 3(9t^6 + 54t^5 + 108t^4 + 90t^3 + 54t^2 + 36t + 2)\mathrm{e}^{t^3+3t^2} - 6$, $x'''(0) = 0$, $y'''(0) = 0$,$x^{(iv)}(t) = 24$, $y^{(iv)}(0) = 108$. El punto $(0, 1)$ es el punto de retroceso de segunda especie, con tangente de pendiente 0, es decir por $(0, 1)$. Además, $\dfrac{y'(t)}{x'(t)} \longrightarrow 0$, si $t \to 0$.

t	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x	$+\infty$	$\searrow$	20	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
y	0	$\nearrow$	e^4-4	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
x'		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{dy}{dx}$		$-$	0	$+$	0	$+$	



m) Las ecuaciones $x(t) = t^{\frac{1}{t}}$, $y(t) = t^t$ están definidas en $]\,0, +\infty\,[$.

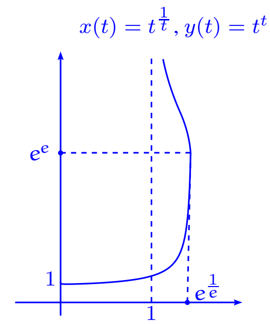
– Si $t \to +\infty$, $x(t) \longrightarrow 1^+$, $y(t) \longrightarrow +\infty$.

– Si $t \longrightarrow 0^+$, $x(t) \longrightarrow 0^+$, $y(t) \longrightarrow 1^-$.

Las derivadas son $x'(t) = \dfrac{1-\ln t}{t^2} t^1/t$, $y'(t) = (1 + \ln t)t^t$ y se tiene $x'(t) = 0 \iff t = \mathrm{e}$, $y'(t) = 0 \iff t = \frac{1}{\mathrm{e}}$. Además $\dfrac{y'(t)}{x'(t)} \longrightarrow \infty$, $\mathrm{e}^{-\mathrm{e}} \approx 0{,}065988$, $\mathrm{e}^{\mathrm{e}} \approx 15{,}1542$,

$e^{1/e} \approx 1{,}4466$, $e^{-1/e} \approx 0{,}6922$.

t	0		$\frac{1}{e}$		e		$+\infty$
x	0	$\nearrow$	e^{-e}	$\nearrow$	$e^{1/e}$	$\searrow$	1
y	1	$\searrow$	$e^{-1/e}$	$\nearrow$	e^{e}	$\nearrow$	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$		$+$	
x'		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{dy}{dx}$	∞	$-$	0	$+$	∞	$-$	

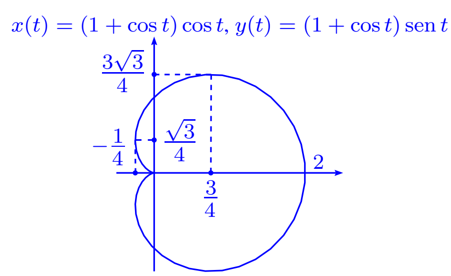


n) Las ecuaciones paramétricas $x(t) = (1 + \cos t)\cos t$, $y(t) = (1 + \cos t)\operatorname{sen} t$ tienen período 2π. Como $x(t) = x(-t)$, $y(t) = -y(-t)$, la curva es simétrica respecto al eje x y consideramos el intervalo $[\,0, \pi\,]$ para el estudio.

Las derivadas $x'(t) = -\operatorname{sen} t(2\cos t + 1)$, $y'(t) = (\cos t + 1)(2\cos t - 1)$, son tales que $x'(t) = 0$, si $t = 0$, $\frac{2\pi}{3}$, π; $y'(t) = 0$, si $t = \frac{\pi}{3}$, π, pues $t \in [\,0, \pi\,]$.

Así tenemos un punto singular en $(0, 0)$, para $t = \pi$, es decir un punto de retroceso de primera especie, de tangente dirigida por $(-1, 0)$. En efecto, $x''(t) = -(4\cos^2 t + \cos t - 2)$, $y''(t) = -\operatorname{sen} t(1 + 4\cos t)$, con $x''(\pi) = -1$, $y''(\pi) = 0$; $x'''(t) = \operatorname{sen} t(8\cos t + 1)$, $y'''(t) = -8\cos^2 t - \cos t + 4$, $y'''(\pi) = 0$, $y''(\pi) = -3$ y la tangente es de pendiente dirigida por $(x''(\pi), y''(\pi)) = (-1, 0)$.

t	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
x	2	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0
y	0	$\nearrow$	$\frac{3}{4}\sqrt{3}$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0
y'		$+$	0	$-$		$-$	0
x'	0	$-$		$-$	0	$+$	0
$\frac{dy}{dx}$	∞	$-$	0	$+$	∞	$-$	0



o) Las ecuaciones $x(t) = \cos 3t$, $y(t) = \operatorname{sen} 2t$ tienen período 2π. Como $x(t)$ es par y $y(t)$ es impar, la curva es simétrica respecto al eje x. Además, $\forall t \in [\,0, \pi\,]$, $x(\pi - t) = -x(t)$, $y(\pi - t) = -y(t)$ y la curva es simétrica respecto al eje y. El estudio se hará en el intervalo $[\,0, \frac{\pi}{2}\,]$.

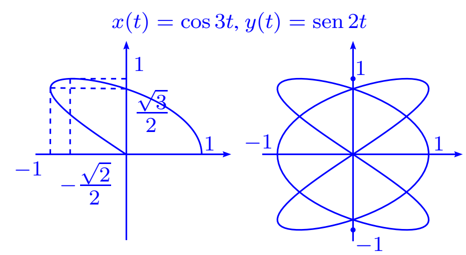
Las derivadas $x'(t) = -3\operatorname{sen} 3t$, $y'(t) = 2\cos 2t$ son tales que $x'(t) = 0$, si $t = 0$, $\frac{\pi}{3}$ y

$y'(t) = 0$, si $t = \frac{\pi}{4}$, ya que $t \in [\,0, \frac{\pi}{2}\,]$.

Para determinar los puntos dobles, se debe resolver es sistema $x(t) = x(u)$, $y(t) = y(u) \iff (u = t \mod (\frac{2\pi}{3})$ o $u = -t \mod (\frac{2\pi}{3}))$ y $(v = t \mod \pi$ o $v = \frac{\pi}{2} - t \mod \pi)$, considerando $u, t \in \,]-\pi, \pi\,]$.

Para la restricción que estudiamos debemos tener que $t, u \in [\,0, \frac{\pi}{2}\,]$ i.e. tenemos dos puntos que se determinan resolviendo $-\frac{\pi}{2} - t = t + \frac{2\pi}{3}$ y $-\frac{2\pi}{3} - t = -\pi + t \Longrightarrow t = -\frac{7\pi}{12}$, o bien $t = \frac{\pi}{12}$, pues $t \in [\,0, \frac{\pi}{2}\,]$. También se tiene $t = 0$ y $t = \frac{\pi}{6}$. El cuadro de variación es el siguiente:

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
x	1	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0
y'		$+$	0	$-$		$-$	0
x'	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{dy}{dx}$	∞	$-$	0	$+$	∞	$-$	0



p) Las ecuaciones paramétricas $x(t) = \operatorname{sen} 3t$, $y(t) = \tan 4t$, tienen período 2π y como ambas son impares hay simetría respecto al origen. Además, $\forall t \in [\,0, \pi\,]$, $x(\pi - t) = x(t)$, $y(\pi - t) = -y(t)$, siempre que exista $y(t)$, lo que indica la simetría respecto al eje y.

Si $x \to \pm\frac{\pi}{8}$, $x(t) \longrightarrow \operatorname{sen}\frac{3\pi}{8} \approx 0{,}923879$, $y(t) \longrightarrow \pm\infty$ i.e. $x = \operatorname{sen}\frac{3\pi}{8}$ es asíntotica de la curva. Similarmente, $x = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{8} \approx -0{,}382683$, es asíntota de la curva.

Las derivadas son $x'(t) = 3\cos 3t$, $y'(t) = 4(1 + \tan^2 4t)$ i.e. $x'(t) = 0$, si $t = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$.

Para determinar los puntos dobles, debemos tener para $x(t)$, $t = u \mod (\frac{2\pi}{3})$ o $t = \frac{\pi}{3} - u \mod (\frac{2\pi}{3})$ y para $y(t)$, $t = u \mod (\frac{\pi}{4})$ o $t = \frac{\pi}{4} - u \mod \frac{\pi}{4})$.

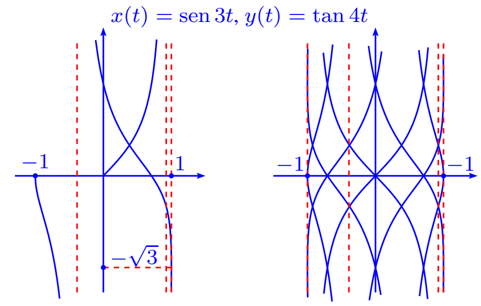
Si nos restringimos al primer cuadrante $x > 0$, $y > 0$, se tienen tres puntos. Esto se hace por razones de simetría del gráfico, pues simplifica el análisis.

Así tenemos que $u = -t + \frac{2\pi}{3}k \Longrightarrow t = -t + k\frac{2\pi}{3} + k'\frac{\pi}{4} \Longrightarrow t = k\frac{\pi}{3} + k'\frac{\pi}{8}$, con $k \in \mathbb{Z}$, $k' \in \mathbb{Z}$.

Las soluciones se tienen para $k = 1$, $k' = -2$, $t = \frac{\pi}{12}$; $k = 2$, $k' = -3$, $t = \frac{7\pi}{24}$; $k = 2$, $k' = 1$, $t = \frac{19\pi}{24}$, es decir son los valores para los cuales $x > 0$, $y > 0$.

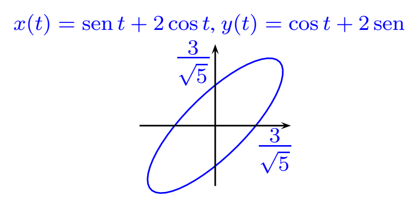
Dada la simetría con respecto al origen y respecto al eje y, se tiene:

t	0		$\frac{\pi}{8}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{8}$		$\frac{\pi}{2}$
x	0	$\nearrow$	$\operatorname{sen}\frac{3\pi}{8}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\operatorname{sen}\frac{\pi}{8}$	$\searrow$	-1
y	0	$\nearrow$	$+\infty \mid -\infty$	$\nearrow$	$-\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty \mid -\infty$	$\nearrow$	0
y'		$+$	$\mid$	$+$		$+$	$\mid$	$+$	
x'	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0
$\frac{dy}{dx}$	∞	$+$	∞	$+$	∞	$-$		$-$	

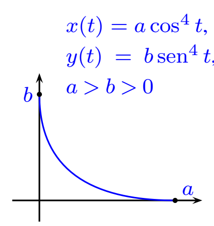


4. Reconocer las curvas parametrizadas siguientes:
   a) $x(t) = \operatorname{sen} t + 2\cos t$, $y(t) = \cos t + 2\operatorname{sen} t$
   b) $x(t) = a\cos^4 t$, $y(t) = b\operatorname{sen}^4 t$, $a, b > 0$
   c) $x(t) = t + \sqrt{t^2 - 3t + 2}$, $y(t) = t - \sqrt{t^2 - 3t + 2}$
   d) $x(t) = \dfrac{1 - 2t - t^2}{1 - t}$, $y(t) = \dfrac{2 - 3t - t^2}{1 - t}$
   e) $x(t) = \dfrac{2t^2 + 2t + 7}{t^2 + t + 2}$, $y(t) = \dfrac{t^2 + t + 1}{t^2 + t + 4}$.

Solución



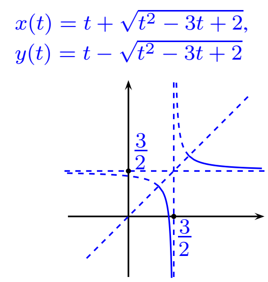
a) Observemos que $-x + 2y = 3\operatorname{sen} t$, $2x - y = 3\cos t \Longrightarrow (2y - x)^2 + (2x - y)^2 = 9$, por lo que tenemos una elipse de ecuación $5x^2 - 8xy + 5y^2 - 9 = 0$, que se puede escribir $\left(\dfrac{1}{3}\dfrac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\dfrac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$.



b) Como $x(t) \geq 0$, $y(t) \geq 0$, se tiene $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1 = \sqrt{\dfrac{x}{a}} + \sqrt{\dfrac{y}{b}}$, con $x \geq 0$, $y \geq 0$. Así tenemos que $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + 2\,\dfrac{x}{a}\,\dfrac{y}{b} \Longrightarrow 4\,\dfrac{x}{a}\,\dfrac{y}{a} = (1 - \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{a})^2 = 1 + \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{2x}{a} - 2\,\dfrac{4}{b} + 2\,\dfrac{x}{a}\,\dfrac{y}{b} \Longrightarrow \dfrac{x^2}{a^2} - 2\,\dfrac{x}{a}\,\dfrac{y}{b} + \dfrac{y^2}{b^2} - 2(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}) + 1 = 0$, es decir

$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) + 1 = 0$, si $x \geq 0$, $y \geq 0$, con lo cual tenemos el arco de la parábola situado entre $(a, 0)$ y $(0, b)$.

c) Tenemos que $xy = 3t - 2$, $x + y = 2t \Longrightarrow 2xy - 3(x + y) + 4 = 0$, con $x - y = \sqrt{t^2 - 3t + 2} \geq 0$, es decir que la curva formada por dos pedazos de la hipérbola con $x - y \geq 0$, pues $t^2 - 3t + 2 \geq 0$ i.e. $t \in \,]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$.

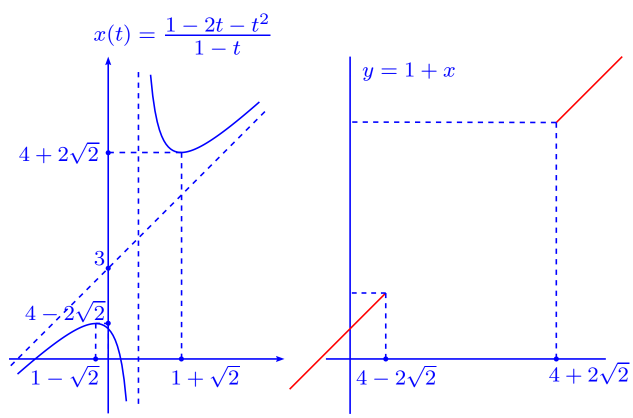


d) Tenemos que $y = \dfrac{1 - t + 1 - 2t - t^2}{1 - t} = 1 + x$, donde x varía en un subconjunto de $\mathbb{R}$, dado por $x(t) = \dfrac{1 - 2t - t^2}{1 - t}$, con $t \in \mathbb{R}$.

Debemos graficar $x(t) = \dfrac{1 - 2t - t^2}{1 - t} = \dfrac{t^2 + 2t - 1}{t - 1} = \dfrac{(t + 1)^2 - 2}{t - 1}$.

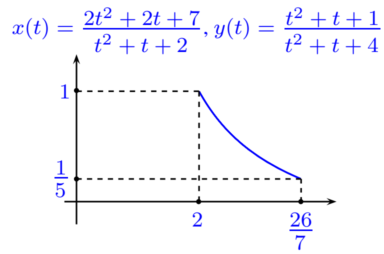
– Si $t \to 1^{\pm}$, $x(t) \longrightarrow \pm\infty$ y si $t \to \pm\infty$, $x(t) \longrightarrow \pm\infty$. La derivada $x'(t) = \dfrac{t^2 - 2t - 1}{(t - 1)^2}$ i.e. $x'(t) = 0$, si $t = 1 \pm \sqrt{2}$. Además $x(t) = 0 \Longleftrightarrow t = -1 \pm \sqrt{2}$.

t	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		$1-\sqrt{2}$		$-1+\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
x'		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
x	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$4-2\sqrt{2}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	$4+2\sqrt{2}$	$\nearrow$	



Así tenemos que la ecuación $y = 1 + x$, para $x \in \,]-\infty, 4 - 2\sqrt{2}] \cup [4 + 2\sqrt{2}, +\infty[$.

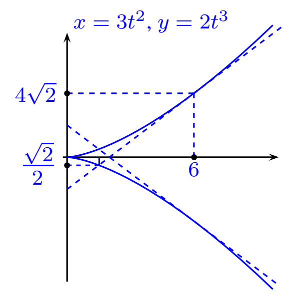
e) En este caso $x = 2 + \dfrac{3}{t^2+t+2}$, $y = 1 - \dfrac{3}{t^2+t+4} \Longrightarrow t^2+t+2 = \dfrac{3}{x-2} = \dfrac{-3}{y-1} = -2 \Longrightarrow \dfrac{-2y+1}{y-1} = \dfrac{3}{x-2} \Longrightarrow y = \dfrac{5-x}{2x-1}$. Además al analizar la variación de x, se tiene que $t^2+t+2 = \dfrac{3}{x-2}$ i.e. t^2+t+2 alcanza el mínimo en $t = -\frac{1}{2}$ y cuando $t \to +\infty$, $x \longrightarrow 2^+$, es decir $2 < x \le \frac{26}{7}$.



5. Determinar las rectas que son a la vez normales y tangentes a la curva $x = 3t^2$, $y = 2t^3$.

Solución La ecuación de la tangente está dada por $y = tx+b$, o sea en $x = 3t^2$, $y = 2t^3$ se tiene que $b = -t^3$, es decir $y - tx + t^3 = 0$.

Similarmente la normal es $y = -\frac{1}{u}x + b \Longrightarrow b = 2u^3 + 3u$, con lo cual se tiene que $uy + x - (2u^4 + 3u^2) = 0$. Las rectas coinciden si y sólo si $\dfrac{1}{t} = -u = \dfrac{3u^2+2u^4}{t^3}$, $u \neq 0$, $t \neq 0 \Longrightarrow t^2 = 3u^2 + 2u^4 = \dfrac{1}{u^2} \Longrightarrow 2u^6 + 3u^4 - 1 = 0$.



Definamos $z = u^2$, entonces $2z^3 + 3z^2 - 1 = 0$ tiene solución $z = -1$, es decir que $2z^3+3z^2-1 = (z+1)(2z^2+3z-1) = (z+1)^2(2z-1) = 0$ y sólo sirve la solución $z = \frac{1}{2} = u^2$, es decir $u = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ y $t = \pm\sqrt{2}$.

Las rectas son $y = \sqrt{2}x+2\sqrt{2}$, $y = -\sqrt{2}x-2\sqrt{2}$ y pasan por los puntos $(6, 4\sqrt{2})$, $(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ la primera y $(6, -4\sqrt{2})$, $(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ la segunda.

6. Trazar la curva $x(t) = t\cos t - \operatorname{sen} t$, $y(t) = 2\cos t$ y verificar que las tangentes de los puntos singulares pasan todos por el origen.

Solución La función $x(t)$ es impar y $y(t)$ es par, por lo que hay simetría respecto al eje y y es suficiente analizar el gráfico en $[0, +\infty[$. Además, no existe $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x(t)$, ni $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y(t)$, por lo que no tenemos asíntotas.

Las derivadas $x'(t) = -t\operatorname{sen} t$, $y'(t) = -2\operatorname{sen} t$ y tenemos que $x'(t) = 0 = y'(t)$ si y sólo si $t = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. La tangente en estos puntos es $\lim\limits_{t\to k\pi} \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \dfrac{2}{k\pi}$, si $k \neq 0$ y

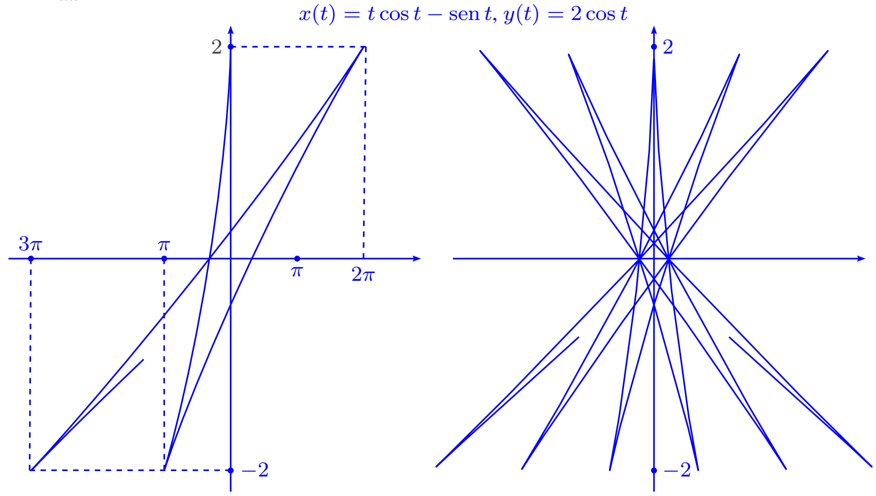
$\lim\limits_{t\to 0^{\mp}} \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \pm\infty.$

Así tenemos que los puntos singulares suceden cuando $t = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Las derivadas de orden dos y tres son: $x''(t) = -\operatorname{sen} t - t\cos t$, $y''(t) = -2\cos t$, $x'''(t) = -2\cos t + t\operatorname{sen} t$, $y'''(t) = 2\operatorname{sen} t$ y evaluados en los puntos $x''(k\pi) = -k\pi(-1)^k$, $y''(k\pi) = -2(-1)^k$, $y'''(k\pi) = 0$. Se concluye de los puntos son de retroceso de primera especie.

t	0		π		2π		3π	$\cdots$	$(2k-1)\pi$		$2k\pi$		$(2k+1)\pi$	$\cdots$
x	0	$\searrow$	$-\pi$	$\nearrow$	2π	$\searrow$	-3π	$\cdots$	$-(2k-1)\pi$	$\nearrow$	$2k\pi$	$\searrow$	$-(2k+1)\pi$	$\cdots$
y	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\cdots$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\cdots$
y'	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$\cdots$	0	$+$	0	$-$	0	$\cdots$
x'	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$\cdots$	0	$+$	0	$-$	0	$\cdots$
$\frac{dy}{dx}$	∞	$+$	$\frac{2}{\pi}$	$+$	$\frac{1}{\pi}$	$+$	$\frac{2}{3\pi}$	$\cdots$	$\frac{2}{2(k-1)\pi}$	$+$	$\frac{1}{k\pi}$	$+$	$\frac{2}{(2k+1)\pi}$	$\cdots$

$x(t) = t\cos t - \operatorname{sen} t,\ y(t) = 2\cos t$



La ecuación de la tangente en los puntos singulares satisface $y = \dfrac{2}{k\pi}x + b$ y pasa por el punto $(k\pi(-1)^k, 2(-1)^k)$, lo que implica que $b = 0$, es decir que pasa por el origen con ecuación $y = \dfrac{2}{k\pi}x$.

7. Determinar el valor de $a \in \mathbb{R}$, para que la curva $x(t) = 2t + \dfrac{1}{t^3}$, $y(t) = t^2 + \dfrac{2a^3}{t}$, tenga al menos un punto doble.

   Solución Se tiene que si existe un punto doble, existen t, $u \in \mathbb{R}$, $t \neq u$, tales que

$2t + \dfrac{1}{t^3} = 2u + \dfrac{1}{u^3}$, $t^2 + \dfrac{2a^3}{t} = u^2 + \dfrac{2a^3}{u}$. Si definimos $s = t + u$, $p = tu$ se obtiene $2(t-u) = \dfrac{t^3 - u^3}{(tu)^3} = \dfrac{(t-u)(u^2+ut+u^2)}{(tu)^3} \Longrightarrow 2p^3 = t^2 + 2ut + u^2 - ut = (t+u)^2 - ut = s^2 - p \Longrightarrow 2p^3 + p = s^2$. Además, $t^2 - u^2 = (t+u)(t-u) = 2a^3 \dfrac{t-u}{ut} \Longrightarrow sp = 2a^3$.

De esta forma $2p^3 + p = \left(\dfrac{2a^3}{p}\right)^2 \Longrightarrow 2p^5 + p^3 - 4a^6 = 0$, $s = \dfrac{2a^3}{p}$. La condición $u \neq t \Longrightarrow (u-t)^2 > 0 \Longrightarrow u^2 + 2ut + t^2 > 4ut \Longrightarrow (u+t)^2 = s^2 > 4p \Longrightarrow \dfrac{4a^6}{p^2} > 4p \Longrightarrow p^3 < a^6 \Longrightarrow p < a^2$.

La ecuación de grado 5, $f(p) = 2p^5 + p^3 - 4a^6$ debe anularse antes de $p = a^2$, para que la ecuación $f(p) = 0$ tenga solución.

Al analizar $f(p) = 2p^5 + p^3 - 4a^6$ se tiene que $f'(p) = 10p^4 + 3p^2 > 0$, $\forall p \neq 0$. Así la función es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$, por lo que debemos tener que $\forall p < a^2$, $f(p) < f(a^2) = a^6(2a^4 - 3)$, es decir para que exista solución $f(a^2) > 0 \Longrightarrow |a| > (\frac{3}{2})^{\frac{1}{4}}$.

8. Determinar el lugar de los puntos singulares de la curva parametrizada $x(t) = \cos^3 t + \lambda \operatorname{sen} t$, $y(t) = \operatorname{sen}^3 t + \lambda \cos t$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

   Solución Los puntos singulares satisfacen $x'(t) = -3\cos^2 t \operatorname{sen} t + \lambda \cos t = 0$, $y'(t) = 3\operatorname{sen}^2 t \cos t - \lambda \operatorname{sen} t = 0 \Longrightarrow (3 \operatorname{sen} t \cos t - \lambda) \operatorname{sen} t = 0$, $(3 \operatorname{sen} t \cos t - \lambda)\cos t = 0 \Longrightarrow 3 \operatorname{sen} t \cos t = \lambda$, ya que $\operatorname{sen} t$ y $\cos t$ nunca valen 0 simultáneamente.

   Así, sustituyendo λ se tienen las ecuaciones paramétricas de la curva que describe los puntos singulares, es decir:

$$x(t) = \cos^3 t + 3\operatorname{sen}^2 t \cos t = \cos t(1 + 2\operatorname{sen}^2 t) = 2\cos t(1 - \cos 2t),$$
$$y(t) = \operatorname{sen}^3 t + 3 \operatorname{sen} t \cos^2 t = \operatorname{sen} t(1 + 2\cos^2 t) = 2\operatorname{sen} t(1 + \cos 2t).$$

9. Determinar los puntos de retroceso de las curvas parametrizadas $x(t) = 2t + \dfrac{a}{t^2}$, $y(t) = t^2 + \dfrac{2b}{t}$, cuando $a, b \in \mathbb{R}$.

   Solución Para determinar los puntos de retroceso, debemos anular las derivadas, es decir $x'(t) = 2 - 2\dfrac{a}{t^3} = 0$, $y'(t) = 2t - 2\dfrac{b}{t^2}$ i.e. $t^3 = a = b \Longrightarrow t = a^{\frac{1}{3}}$.

   Además, $x''(t) = \dfrac{6a}{t^4}$, $y''(t) = 2 + \dfrac{4a}{t^3}$, $x'''(-24\dfrac{a}{t^5}) =$, $y'''(t) = -12\dfrac{a}{t^4}$, por lo que

evaluados en $t = a^{\frac{1}{3}}$ tenemos los vectores $6(a^{-\frac{1}{3}}, 1)$, $-12a^{-\frac{1}{3}}(2a^{-\frac{1}{3}}, 1)$ que son linealmente independientes, si $a = b \neq 0$. Así, los puntos de retroceso son de primera especie. Las ecuaciones de los puntos de retroceso satisfacen:
$x = 2a^{\frac{1}{3}} + \dfrac{a}{a^{\frac{2}{3}}} = 3a^{\frac{1}{3}}$, $y = a^{\frac{2}{3}} + 2\dfrac{a}{a^{\frac{1}{3}}} = 3a^{\frac{2}{3}} \Longrightarrow \dfrac{y}{x} = a^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}x$, o sea $y = \frac{1}{3}x^2$.

1.7. Curvas en coordenadas polares

a) Construir la gráfica de las siguientes curvas en coordenadas polares:

a) $\rho = a \operatorname{sen} 2\theta$

b) $\rho = \dfrac{a}{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}\theta)}$

c) $\rho = \dfrac{a}{1 - 2\cos^2\theta}$

d) $\rho = a(1 + \cos\theta)$ (cardiode)

e) $\rho = a\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta}$ (cisoide)

f) $\rho = a\dfrac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$ (estrofoide)

g) $\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}$ (lemniscata)

h) $\rho = a\theta$ (espiral de Arquímedes)

i) $\rho = a/\theta$ (espiral hiperbólica)

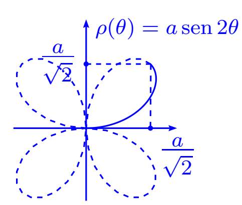
j) $\rho = a\mathrm{e}^{m\theta}$ (espiral logarítmica).

Solución

a) Es claro que $\rho = a \operatorname{sen} 2\theta$ tiene período π, lo que demuestra que la curva es simétrica respecto a 0. Además, $\rho(-\theta) = -\rho(\theta)$ y la curva es simétrica respecto al eje y, y se puede tomar por intervalo de estudio $[\,0, \frac{\pi}{2}\,]$. Por otro lado, $\rho(\frac{\pi}{2} - \theta) = a \operatorname{sen}(\pi - 2\theta) = a \operatorname{sen} 2\theta = \rho(\theta)$ y la curva es simétrica respecto a la primera bisectriz, lo que permite reducir el intervalo de estudio a $[\,0, \frac{\pi}{4}\,]$.

El sentido de variación de ρ es claro y no es necesario calcular ρ'. La curva tiene la forma de rosa de cuatro pétalos.

θ	0		$\frac{\pi}{4}$
ρ	0	$\nearrow$	a

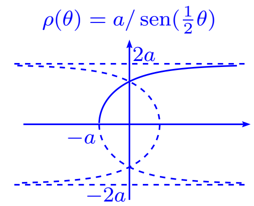


b) El período de $\rho = a/\operatorname{sen}(\frac{1}{2}\theta)$ es 4π; además, $\rho(\theta + 2\pi) = -\rho(\theta)$ y es simétrica respecto a 0. Como $\rho(-\theta) = -\rho(\theta)$, la curva es simétrica respecto al eje y, lo que implica que es simétrica respecto al eje x. Finalmente es necesario variar θ en $[\,0, \pi\,]$.

– Cuando $\theta \to 0$, $\rho \longrightarrow \infty$, por lo que $y = \rho \operatorname{sen}\theta = \dfrac{a \operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}\theta)} = 2a\cos(\frac{1}{2}\theta) \longrightarrow 2a$ y la curva tiene por asíntota horizontal $y = 2a$.

El sentido de variación de ρ es claro y tomando en cuenta las dos simetrías tenemos el gráfico siguiente:

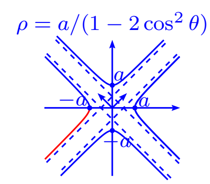
θ	0		π
ρ	$+\infty$	$\searrow$	a



c) La curva $\rho = \dfrac{a}{1 - 2\cos^2\theta} = \dfrac{a}{\cos 2\theta}$, es de período π la curva es simétrica respecto al origen 0. Además ρ es función par de θ y $\rho(\frac{\pi}{2} - \theta) = \rho(\theta)$, lo que indica simetría respecto al eje x, respecto a la primera bisectriz y respecto al eje y. Se estudiará la curva solamente en $[\,0, \frac{\pi}{4}\,[$, pues el valor $\theta = \frac{\pi}{4}$ se excluye, pues ρ si se indefine.

Para el estudio de ramas infinitas consideremos $y = \rho\operatorname{sen}(\theta - \frac{\pi}{4}) = \rho\frac{\sqrt{2}}{2}(\operatorname{sen}\theta - \cos\theta)$ y como $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$, se tiene $Y = \rho\frac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{a}{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta} \longrightarrow \dfrac{a}{2}$, si $\theta \to \frac{\pi}{4}$.

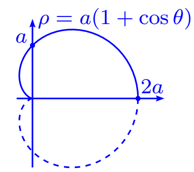
θ	0		$\frac{\pi}{4}$
ρ	$-a$	$\searrow$	$-\infty$



d) La curva $\rho = a(1 + \cos\theta)$ tiene período 2π y como es par es simétrica respecto al eje x.

El estudio se hará en $[\,0, \pi\,]$. La derivada $\rho' = -a\operatorname{sen}\theta$, se anula en π y $\rho'' = -a\cos\theta$, lo que indica que el origen es un punto de retroceso de primera especie.

θ	0		π
ρ	$2a$	$\searrow$	0

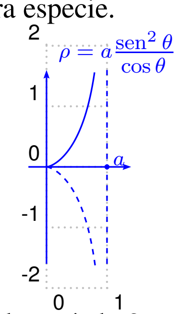


e) **Cisoide** La curva $\rho = a\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta}$ tiene período 2π, es simétrica respecto al eje x, pues $\rho(\theta) = \rho(-\theta)$ y como $\rho(\pi+\theta) = -\rho(\theta)$, se obtiene toda la curva en $[\,0, \pi\,]$. El estudio se hará en $[\,0, \frac{\pi}{2}\,[$.

Si consideramos $X = \rho\cos\theta = a\operatorname{sen}^2\theta \longrightarrow a$, cuando $\theta \to \frac{\pi}{2}$ y la curva tiene por asíntota la recta $x = a$.

La derivada $\rho'(\theta) = a\dfrac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos t}$ se anula en $0 \in [\,0, \frac{\pi}{2}\,[$, $\rho''(\theta) = a\dfrac{\operatorname{sen}^3(t)}{\cos^2(t)} + 2a\operatorname{sen}(t)$ se anula en $0 \in [\,0, \frac{\pi}{2}\,[$, $\rho'''(\theta) = 2a\cos t + \dfrac{3a\operatorname{sen}^2 t}{\cos t} + 2a\dfrac{\operatorname{sen}^4 t}{\cos^3 t}$ y como $\rho = 3$, la curva tiene en el polo un punto de retroceso de primera especie.

θ	0		$\frac{\pi}{2}$
ρ	0	$\nearrow$	$+\infty$

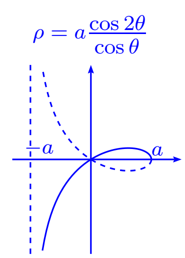


f) **Estrofoide** La curva de la ecuación $\rho = a\dfrac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$ es de período 2π, par (simétrica con respecto al eje x) y como $\rho(\pi+\theta) = -\rho(\theta)$ se obtiene toda la curva con $[\,0, \pi\,]$, por lo que el intervalo de estudio será $[\,0, \frac{\pi}{2}\,[$ ya que $\rho \longrightarrow -\infty$, si $\theta \to \frac{\pi}{2}^-$.

La función $\rho(\theta) = 0 \Longrightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2}$ y $\theta = \frac{\pi}{4} \in [\,0, \frac{\pi}{2}\,[$.

Si $\theta \longrightarrow \frac{\pi}{2}$, $X = \rho\cos\theta = a\cos 2\theta \longrightarrow -a$, por lo que $X = -a$ es asíntota de la curva.

θ	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
ρ	a	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$



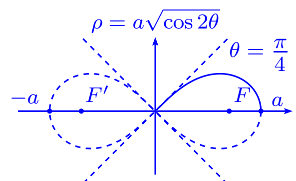
En el origen tiene un punto doble que debemos verificar. En efecto $\rho(\theta) = 0 \iff \theta = \pm\frac{\pi}{4}$.

g) **Lemniscata de Bernoulli** La lemniscata es el lugar geométrico de los puntos cuyo producto de las distancias a dos puntos fijos F y F' es igual al cuadrado de la semi–distancia de estos puntos.

Consideramos como el eje de las coordenadas la recta que une F y F' y la mediatriz del segmento $[\,F, F'\,]$. Los puntos F y F' están colocados en $(c, 0)$, $(-c, 0)$. La condición dada se escribe $\|MF\|\cdot\|MF'\| = c^2$, es decir $((x-c)^2+y^2)((x+c)^2+y^2) = c^4$ y en coordenadas polares $(\rho^2 + c^2 - 2c\rho\cos\theta)(\rho^2 + c^2 + 2c\rho\cos\theta) = c^4 \Longrightarrow (\rho^2 + c^2) - 4c^2\rho^2\cos^2\theta = c^4 \Longrightarrow \rho^2 = 2c^2\cos 2\theta$.

Si escribimos $a = \sqrt{2}c$, se obtiene toda la curva escribiendo $\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}$, siempre que $\cos 2\theta \geq 0$. Además, como $\rho(\theta) = \rho(-\theta)$ y $\rho(\pi+\theta) = \rho(\theta)$, los ejes coordenados son ejes de simetría y se tomará por intervalo $[\,0, \frac{\pi}{4}\,]$, ya que el período de la curva es π.

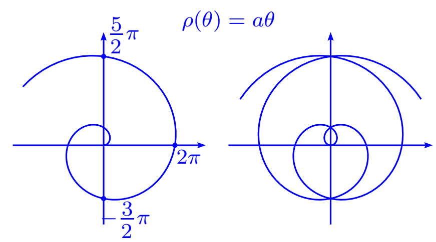
θ	0		$\frac{\pi}{4}$
ρ	a	$\searrow$	0



La curva tiene un punto doble en el origen, pues $\rho(\theta) = 0 \iff \cos 2\theta = 0 \iff \theta = \pm\frac{\pi}{4}$ y las tangentes en el origen son ortogonales.

h) **Espiral de Arquímedes** La curva $\rho = a\theta$ no tiene período, es simétrica respecto al eje y, pues $\rho(\theta) = -\rho(\theta)$ y se analizará el intervalo $[\,0, +\infty\,[$ y la curva tiene por tangente en 0 el eje x.

θ	0		$+\infty$
ρ	0	$\nearrow$	$+\infty$

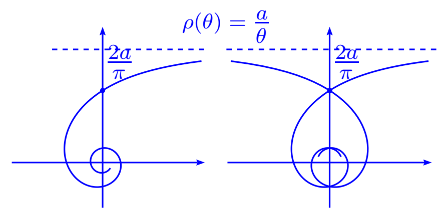


i) **Espiral hiperbólica** La curva $\rho = a/\theta$ es simétrica respecto al eje y, no es periódica y se analizará el intervalo $]\,0, +\infty\,[$.

– Si $\theta \to \pm\infty$, $\rho \longrightarrow 0$ y el origen es un punto asíntota de la curva.

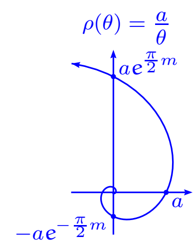
– Si $\theta \to 0^{\pm}$, $\rho \longrightarrow \pm\infty$ y como $y = \rho \operatorname{sen}\theta = a\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} \longrightarrow a$, la recta $y = a$ es una asíntota.

θ	0		$+\infty$
ρ	$+\infty$	$\searrow$	0



j) **Espiral logarítmica** La curva $\rho = ae^{m\theta}$, $a > 0$, $m > 0$ no tiene simetrías ni es periódica. El origen es un punto asíntota.

θ	$-\infty$		$+\infty$
ρ	0	$\nearrow$	$+\infty$



b) Construir el gráfico de las siguientes funciones en coordenadas polares:

a) $\rho = a\cos\theta + b$, $a > 0$, $b > 0$

b) $\rho = \dfrac{\theta}{\theta - 1}$

c) $\rho = \operatorname{sen} 3\theta$

d) $\rho = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{2\cos\theta - 1}$.

Solución

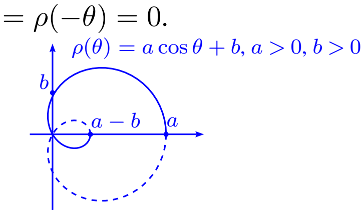
a) Es claro que si $a = b$, tenemos un cardioide (ver ejercicio 9*a*d). Analicemos los casos $a > b$, $b > a$. El período de $\rho = a\cos\theta + b$ es 2π y es simétrica respecto al eje x. El estudio se hará en $[\,0, \pi\,]$.

Si $b > a$, la ecuación $\rho(\theta) = 0$ no tiene solución y no pasa por el origen.

Si $a > b$, la ecuación $\rho(\theta) = 0$ tiene solución, es decir $\theta = \arccos\left(-\frac{b}{a}\right)$ anula el radio y se tiene un punto doble en el origen, pues $\rho(\theta_0) = \rho(-\theta) = 0$.

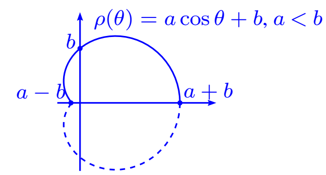
$(a > b)$

θ	0		θ_0		π
ρ	$a+b$	$\searrow$	0	$\searrow$	$b-a$



$(a < b)$

θ	0		π
ρ	$a+b$	$\searrow$	$b-a$



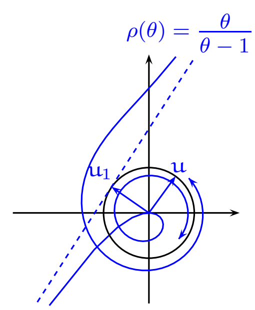
b) La curva $\rho = \dfrac{\theta}{\theta - 1}$ no tiene simetrías, ni período y se indefine en $\theta = 1$. Además, $\rho = 1 \iff \theta = 0$.

– Si $\theta \to \pm\infty$, $\rho \longrightarrow 1$, por lo que se tiene el círculo de centro $(0,0)$ y de radio 1, como asíntota de la curva. Así, cuando $\theta \to -\infty$, $\rho \longrightarrow 1^-$ y tiene al círculo de radio 1, en el interior $|\rho| < 1$.

Cuando $\theta \to +\infty$, $\rho \longrightarrow 1^+$ y tiende al radio 1 exteriormente.

– Si $\theta \to 1\pm$, $|\rho| \longrightarrow \infty$ y se tiene dos ramas infinitas. Sea $Y = \rho \operatorname{sen}(\theta - 1)$, entonces $Y = \theta\dfrac{\operatorname{sen}(\theta-1)}{\theta - 1} \longrightarrow 1$, si $\theta \to 1$ y la curva tiene por asíntota la recta $y = 1$, en el sistema $\{\mathfrak{u}, \mathfrak{u}_1\}$, es decir en la base $\mathfrak{u} = (\cos 1, \operatorname{sen} 1)$, $\mathfrak{u}_1 = (-\operatorname{sen} 1, \cos 1)$.

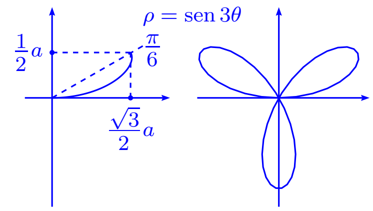
Los puntos dobles satisfacen $\rho(\theta) = \rho(\theta + 2n\pi)$, que no tiene solución o $\rho(\theta + \pi + 2u\pi) = -\rho(\theta)$ que tiene soluciones $\theta = \theta' = \frac{1}{2}(-(\pi + 2n\pi - 1) \pm \sqrt{(\pi + 2n\pi)^2 + 1})$, $n \in \mathbb{Z}$.



θ	$-\infty$		0		1			$+\infty$
ρ	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	1

c) La curva $\rho = \operatorname{sen} 3\theta$ tiene período $\frac{2\pi}{3}$ y como $\rho(\theta + \frac{\pi}{3}) = -\rho(\theta)$, es simétrica respecto a la recta que pasa por el origen, con ángulo $\frac{\pi}{6}$ con el eje x. También hay simetría respecto al eje y, pues $\rho(-\theta) = -\rho(\theta)$, por lo que se analizará la curva en $[\,0, \frac{\pi}{6}\,]$. Sobre este intervalo, se consideraran las simetrías para completar la curva, una rosa de 3 pétalos.

θ	0		$\frac{\pi}{6}$
ρ	0	$\nearrow$	1

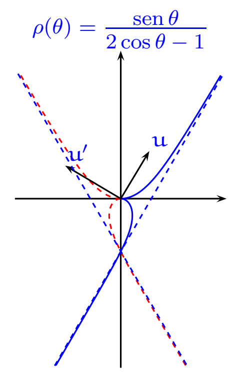


d) La curva $\rho = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{2\cos\theta - 1}$ tiene período 2π y se indefine para $\cos\theta = \frac{1}{2}$, es decir $\theta = -\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$.

Como $\rho(-\theta) = -\rho(\theta)$, hay simetría respecto al eje y, por lo que se analizará el intervalo $[\,0, \pi\,] \setminus \{\frac{\pi}{3}\}$.

La derivada $\rho(\theta) = \dfrac{2 - \cos\theta}{(2\cos\theta - 1)^2} > 0$ y ρ siempre crece.

Si consideramos $\mathfrak{u} = (\cos\frac{\pi}{3}, \operatorname{sen}\frac{\pi}{3})$, $\mathfrak{u}_1 = (-\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}, \cos\frac{\pi}{3})$ como sistema, entonces $Y = \rho\operatorname{sen}(\theta - \frac{\pi}{3})\dfrac{\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}(\theta - \frac{\pi}{3})}{2(\cos\theta - \cos\frac{\pi}{3})} = \dfrac{\operatorname{sen}\theta\, 2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\theta - \frac{\pi}{3})\cos\frac{1}{2}(\theta - \frac{\pi}{3})}{4\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\theta + \frac{\pi}{3})\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\theta - \frac{\pi}{3})} = -\dfrac{\operatorname{sen}\theta\cos\frac{1}{2}(\theta - \frac{\pi}{3})}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\theta + \frac{\pi}{3})} \longrightarrow -\frac{1}{2}$, si $\theta \to \frac{\pi}{3}$, es decir $Y = -\frac{1}{2}$ en el sistema $\{\mathfrak{u}, \mathfrak{u}_1\}$ es una asíntota de la curva.



θ	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		π
ρ'		$+$	||	$+$	2	$+$	
ρ	0	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	0

c) Construir las curvas siguientes definidas en coordenadas polares.

a) $\rho = \dfrac{1 - \cos\theta}{2 + \cos^2\theta}$ b) $\rho = \tan\theta$ c) $\rho = \dfrac{\cos\theta}{1 - \cos\theta}$

d) $\rho = \dfrac{\sqrt{1 - 2\cos\theta}}{\operatorname{sen}\theta}$ e) $\rho = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1 + \cos\theta\cos 2\theta}$ f) $\dfrac{2\cos^2\theta}{2\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}$

g) $\rho = \dfrac{2\cos\theta + 1}{2\operatorname{sen}\theta + 1}$ h) $\rho = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\tan 2\theta}$ c) $\rho = \dfrac{1}{\cos\theta - \cos 2\theta}$

j) $\rho = \dfrac{\tan\theta}{\cos 2\theta}$ k) $\rho = \dfrac{\operatorname{sen} 2\theta}{2\cos\theta - 1}$ e) $\rho = \dfrac{1}{4 + \cos 3\theta}$

m) $\rho = \tan(\frac{1}{2}\theta)$ n) $\rho = \tan(\frac{1}{2}\theta) - 1$ o) $\rho = \tan(\frac{2}{3}\theta)$

p) $\rho = 1 + \tan(\frac{1}{4}\theta)$ q) $\rho = \dfrac{\theta}{\theta^2 - 1}$.

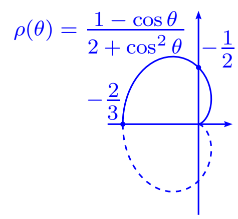
Solución

a) La curva $\rho = \dfrac{1-\cos\theta}{2+\cos^2\theta}$ es de periodo 2π, par (simétrica respecto al eje x) y el análisis se hará en $[\,0,\pi\,]$. Además $\rho = 0$, si $\theta = 0$.

Por otro lado $\rho' = \dfrac{\operatorname{sen}\theta(2+2\cos\theta-\cos^2\theta)}{(2+\cos^2\theta)^2}$, por lo que la tangente es perpendicular al radio en $\theta = \arccos(1-\sqrt{3}) \approx 2{,}39212$ y $\rho(\theta) = \dfrac{\sqrt{3}+1}{4} \approx 0{,}683012$.

En efecto $\rho' = 0$, si $\theta = 0$, π o $\cos\theta = 1 \pm \sqrt{3}$ y se elimina la solución $1+\sqrt{3} > 1$. Además, tenemos que $\theta = 0$ y el polo es un punto singular de la curva con $\rho''(0) = \frac{1}{3}$, por lo que la curva tiene un punto de retroceso de primera especie, en el origen y el eje x es tangente.

θ	0		$\arccos(1-\sqrt{3})$		π
ρ'		$+$	0	$-$	
ρ	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}+1}{4}$	$\searrow$	$\frac{2}{3}$

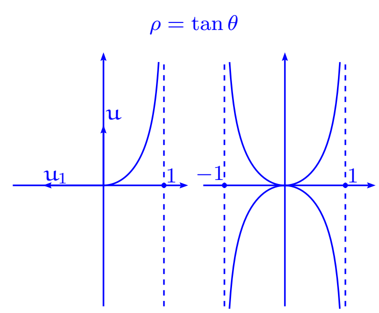


b) La curva $\rho = \tan\theta$ tiene período π, es impar, (simetría respecto al eje y), $\rho(\theta+\pi) = \rho(\theta)$ hay simetría respecto al origen y se hará el análisis en $[\,0,\frac{\pi}{2}\,[$.

Cuando $\theta \to \frac{\pi}{2}^-$, $Y = \rho(\theta)\operatorname{sen}(\theta-\frac{\pi}{2}) = -\operatorname{sen}\theta \longrightarrow -1^+$, por lo que tiene por asíntota la recta $Y = -1$, en el sistema $\mathfrak{u} = (\cos\frac{\pi}{2}, \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}) = (0,1)$, $\mathfrak{u}_1 = (-\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}, \cos\frac{\pi}{2}) = (-1,0)$.

La derivada $\rho' = 1+\tan^2\theta > 0$ y siempre crece, por lo que tenemos el cuadro de variación siguiente:

θ	0		$\frac{\pi}{2}$
ρ'		$+$	
ρ	0	$\nearrow$	$+\infty$



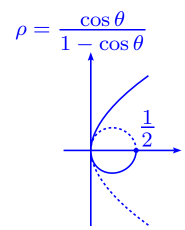
Observemos que hay un punto doble en el origen y $\rho\cos\theta = \operatorname{sen}\theta \Longrightarrow \rho\rho\cos\theta = \rho\operatorname{sen}\theta \Longrightarrow \sqrt{x^2+y^2}x = y$, es decir $x^2(x^2+y^2) - y^2 = 0$.

c) La curva $\rho = \dfrac{\cos\theta}{1-\cos\theta}$ tiene período 2π, es par (simetría del eje x) y como se indefine en $\theta = 0$, se estudiará la curva en $]\,0,\pi\,]$.

– Cuando $\theta \to 0^+$, $Y = \rho\operatorname{sen}\theta = \dfrac{\cos\theta 2\operatorname{sen}\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta}{2\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\theta} = \dfrac{\cos\theta\cos\frac{1}{2}\theta}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\theta} \longrightarrow +\infty$.

La derivada $\rho'(\theta) = -\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{(-1+\cos\theta)^2} \leq 0$ en $]\,0,\pi\,]$ y se anula en π. Por otro lado, $\rho''(\theta) = \dfrac{-\cos\theta + \operatorname{sen}^2\theta + 1}{(\cos\theta-1)^3}$, $\rho''(\pi) = \frac{1}{4}$, $\rho'''(\pi) = 0$, $\rho^{(iv)}(\pi) = \frac{1}{2}$ y tenemos un punto ordinario de pendiente infinita.

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π
ρ'	$-$	$-$	
ρ	$+\infty \searrow$	$0 \searrow$	$-\frac{1}{2}$



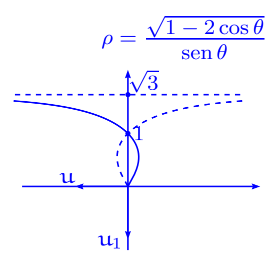
El polo es un punto doble, pues $\rho(\frac{\pi}{2}) = \rho(-\frac{\pi}{2}) = 0$.

d) La curva $\rho = \dfrac{\sqrt{1-2\cos\theta}}{\operatorname{sen}\theta}$ es de período 2π, impar y está definida si $1-2\cos\theta \geq 0$. La fórmula está definida en $]\,0,\pi\,[\,\cap\,]\,\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\,[\, = [\,\frac{\pi}{3},\pi\,[$ y por simetría del eje y, se completa el gráfico.

Si $\theta \to \pi^-$, $Y = \rho\operatorname{sen}(\theta-\pi) = -\sqrt{1-2\cos\theta} \longrightarrow -\sqrt{3}$, es decir admite como asíntota la recta $y = -\sqrt{3}$, en el sistema $\mathfrak{u} = (-1,0)$, $\mathfrak{u}_1 = (0,-1)$.

La derivada $\rho' = \dfrac{1-\cos\theta+\cos^2\theta}{\sqrt{1-2\operatorname{sen}\theta}\operatorname{sen}^2\theta} > 0$, en $[\,\frac{\pi}{3},\pi\,[$ y tenemos el cuadro de variación:

θ	$\frac{\pi}{3}$	π
ρ'	$+$	
ρ	$0 \nearrow$	$+\infty$



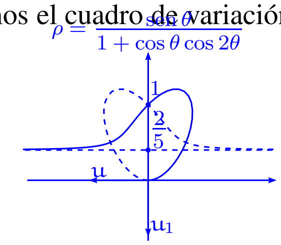
e) La curva $\rho = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta\cos 2\theta}$ es de período 2π, impar (simetría con el eje y), por lo que el estudio se restringe a $[\,0,\pi\,]$, salvo los puntos que anulan el denominador, es decir $\cos\theta\cos 2\theta = -1 \Longrightarrow (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta = -1 \Longrightarrow$ $2\cos^3\theta - \cos\theta + 1 = (\cos\theta + 1)(2\cos^2\theta - 2\cos\theta + 1) = 0 \Longrightarrow \cos\theta = -1$, o sea $\theta = \pi$. Finalmente el intervalo de estudio será $[\,0, \pi\,[$.

Cuando $\theta \to \pi^-$, $Y = \rho\,\mathrm{sen}(\theta - \pi) = -\dfrac{\mathrm{sen}^2\theta}{1 + \cos\theta\cos 2\theta} = -\dfrac{4\,\mathrm{sen}^2\frac{1}{2}\theta\cos^2\frac{1}{2}\theta}{(1 + \cos\theta)(2\cos^2\theta - 2\cos\theta + 1)} = \dfrac{-4\,\mathrm{sen}^2\frac{1}{2}\theta\cos^2\frac{1}{2}\theta}{2\cos^2\frac{1}{2}\theta(2\cos^2\theta - 2\cos\theta + 1)} \longrightarrow -\frac{2}{5}$, por lo que la recta $Y = -\frac{2}{5}$ es asíntota de la curva en el sistema ortogonal $\mathfrak{u} = (-1, 0)$ $\mathfrak{u}_1 = (0, -1)$.

Además, cuando $\theta \to \pi^-$, $\rho = \dfrac{2\,\mathrm{sen}\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta}{2\cos^2\frac{1}{2}\theta(2\cos^2\theta - 2\cos\theta + 1)} \longrightarrow +\infty$.

Es claro que $\forall\theta \in\,]\,0, \pi\,[$, $\rho > 0$, por lo que tenemos el cuadro de variación:

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
ρ	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$



En el gráfico aparecen tres puntos dobles los cuales verifican:

$$\rho(\theta + \pi) = -\rho(\theta) \Longleftrightarrow \frac{\mathrm{sen}(\theta + \pi)}{1 + \cos(\theta + \pi)\cos(2\theta + 2\pi)} = \frac{-\,\mathrm{sen}\,\theta}{1 - \cos\theta\cos 2\theta} = \frac{-\,\mathrm{sen}\,\theta}{1 + \cos\theta\cos 2\theta},$$

$\theta \neq 0 \Longleftrightarrow \cos\theta\cos 2\theta = 0$, es decir $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$.

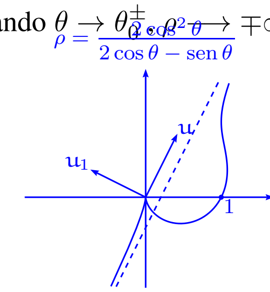
f) La curva $\rho = \dfrac{2\cos^2\theta}{2\cos\theta - \mathrm{sen}\,\theta}$ es de período 2π y como $\rho(\pi + \theta) = -\rho(\theta)$, se obtiene la curva entera variando θ en $[\,0, \pi\,]$, salvo eventualmente el valor θ_0, que anula el denominador i.e. $\theta_0 = \arctan 2$. El estudio de la curva se hará en $[\,0, \pi\,] \setminus \{\theta_0\}$.

Cuando $\theta \to \theta_0$, $Y = \rho\,\mathrm{sen}(\theta - \theta_0) = \dfrac{2\cos\theta}{2 - \tan\theta}\mathrm{sen}(\theta - \theta_0) = \dfrac{2\cos\theta}{\dfrac{\mathrm{sen}\,\theta_0}{\cos\theta_0} - \dfrac{\mathrm{sen}\,\theta}{\cos\theta}}(\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta_0 - \mathrm{sen}\,\theta_0\cos\theta) = -2\cos^2\theta\cos\theta_0 \longrightarrow -2\cos^3\theta_0 = -\frac{2}{(\sqrt{5})^3} = -\frac{2\sqrt{5}}{25}$, es decir la curva tiene por asíntota la recta $Y = -\frac{2\sqrt{5}}{25}$ en el sistema $\mathfrak{u} = (\cos\theta_0, \mathrm{sen}\,\theta_0) = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)$, $\mathfrak{u}_1 = (-\,\mathrm{sen}\,\theta_0, \cos\theta_0) = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1)$.

La derivada $\rho' = \dfrac{\cos\theta(3 - \cos 2\theta - 2\,\mathrm{sen}\,2\theta)}{(2\cos\theta - \mathrm{sen}\,\theta)^2}$, por lo que ρ' en $]\,0, \pi\,[\, \setminus \{\theta_0\}$ tiene el signo de $\cos\theta$.

Por otro lado $\rho' = 0$, si $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\rho''(\frac{\pi}{2}) = -4$, $\rho'''(\frac{\pi}{2}) = 24$ y tenemos que el polo es un punto de retroceso de primera especie. Además, cuando $\theta \to \theta_0^{\pm}$, $\rho \longrightarrow \mp\infty$.

θ	0		θ_0		$\frac{\pi}{2}$		π
ρ'		$+$	‖	$+$	0	$-$	
ρ	1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1



g) La curva $\rho = \dfrac{2\cos\theta + 1}{2\operatorname{sen}\theta + 1}$ tiene período 2π y no tiene simetrías. Se considerará el intervalo $[\,-\pi, \pi\,]$ para graficar la curva, salvo los puntos que anulan el denominador, es decir cuando $\operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{2}$ i.e. $\theta = -\frac{\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}$.

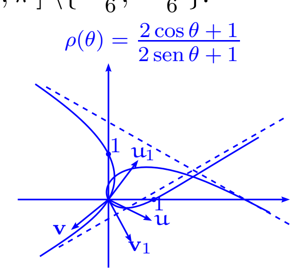
– Cuando $\theta \to -\frac{\pi}{6}$, $Y = \rho\operatorname{sen}(\theta + \frac{\pi}{6}) = \dfrac{2\cos\theta + 1}{2(\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\frac{\pi}{6})}\operatorname{sen}(\theta + \frac{\pi}{6}) =$
$\dfrac{(2\cos\theta + 1)2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\theta + \frac{\pi}{6})\cos\frac{1}{2}(\theta + \frac{\pi}{6})}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\theta + \frac{\pi}{6})}\cos\frac{1}{2}(\theta - \frac{\pi}{6}) = \dfrac{(2\cos\theta + 1)\cos\frac{1}{2}(\theta + \frac{\pi}{6})}{2\cos\frac{1}{2}(\theta + \frac{\pi}{6})} \longrightarrow$
$\dfrac{2\frac{\sqrt{3}}{2} + 1}{2\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}$ y la recta $Y = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}$ es asíntota de la curva en el sistema $\mathfrak{u} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$, $\mathfrak{u}_1 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

– Cuando $\theta \to -\frac{5\pi}{6}$, $Y = \rho\operatorname{sen}(\theta + \frac{5\pi}{6}) \longrightarrow \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$ en el sistema $\mathbf{v} = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$, $\mathbf{v}_1 = (\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.

La función $\rho = 0 \iff \cos\theta = -\frac{1}{2}$ i.e. $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$ y tenemos un punto doble en el polo.

La derivada $\rho'(\theta) = \dfrac{-2(2 + \cos\theta + \operatorname{sen}\theta)}{(2\operatorname{sen}\theta + 1)^2} < 0$, en $[\,-\pi, \pi\,] \setminus \{-\frac{\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}\}$.

θ	$-\pi$		$-\frac{5\pi}{6}$		$-\frac{\pi}{3}$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$		π
ρ'		$-$	‖	$-$		$-$	‖	$-$		$-$	
ρ	-1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1



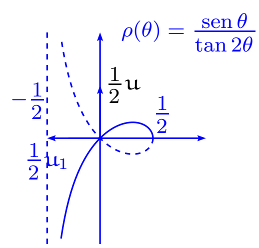
Los puntos dobles que faltan se determinan por la solución a la ecuación $\rho(\theta - \pi) = -\rho(\theta)$, con $\theta \in [-\pi, 0]$. Así tenemos: $\dfrac{2\cos(\theta+\pi)+1}{2\operatorname{sen}(\theta)+1} = \dfrac{-2\cos\theta+1}{-2\operatorname{sen}\theta+1} = -\dfrac{2\cos\theta+1}{2\operatorname{sen}\theta+1} \Longleftrightarrow \operatorname{sen}\theta\cos\theta = -\frac{1}{4} \Longleftrightarrow \operatorname{sen}2\theta = -\frac{1}{2} \Longleftrightarrow \theta = -\frac{11\pi}{12}, -\frac{7\pi}{12}$.

h) La curva $\rho = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\tan 2\theta}$ tiene período 2π, es par (simetría respecto al eje x) de modo que $\rho(\theta+\pi) = -\rho(\theta)$, lo que permite considerar toda la curva en $[0,\pi]$. Así se considerará el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$, eliminando los puntos que anulan el denominador i.e. $\tan 2\theta = 0 \Longrightarrow \operatorname{sen}2\theta = 0$, es decir $\theta = 0, \frac{\pi}{2}$ y $\cos 2\theta = 0$, es decir $\theta = \frac{\pi}{4}$. Sin embargo, cuando $\theta \to \frac{\pi}{4}$, $\rho = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}2\theta}\cos 2\theta \longrightarrow 0$ y el límite existe, pudiéndose redefinir la curva en $\frac{\pi}{4}$ como 0. Observemos que el polo es un punto doble (por la simetría). Además $\lim\limits_{\theta\to 0}\left[\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\tan 2\theta} = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}2\theta}\cos 2\theta\right] = \dfrac{1}{2}$.

Si $\theta \to \frac{\pi}{2}^-$, $Y = \rho\operatorname{sen}(\theta - \frac{\pi}{2}) = -\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}2\theta}\cos 2\theta\cos\theta = -\frac{1}{2}\cos 2\theta \longrightarrow \frac{1}{2}$ y la curva tiene como asíntota la recta $Y = \frac{1}{2}$, en el sistema $\mathfrak{u} = (0,1)$, $\mathfrak{u}_1 = (-1,0)$.

La derivada $\rho' = \dfrac{2\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}^2 2\theta}(\cos^2\theta\cos 2\theta - 1) = \dfrac{2\operatorname{sen}\theta(\cos^2\theta-1)(2\cos^2\theta+1)}{\operatorname{sen}^2 2\theta} < 0$, en $]\,0, \frac{\pi}{2}\,[- \{\frac{\pi}{4}\}$.

θ	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
ρ'		$-$		$-$	
ρ	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$0 \mid 0$	$\searrow$	$-\infty$



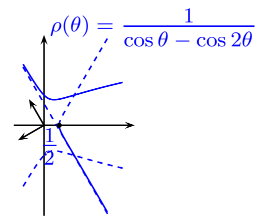
i) La curva $\rho = \dfrac{1}{\cos\theta - \cos 2\theta}$ tiene período 2π, es par (simetría respecto al eje x) y se analizará en el intervalo $[0,\pi]$, sin los puntos que anulan $\cos\theta - \cos 2\theta$, o sea $2\cos^2\theta - \cos\theta - 1 = 0 \Longrightarrow \cos\theta = 1$, $\cos\theta = -\frac{1}{2} \Longrightarrow \theta = 0, \frac{2\pi}{3}$.

– Si $\theta \to 0^+$, $Y = \rho\operatorname{sen}\theta = -\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{(2\cos\theta+1)(\cos\theta-1)} = -\dfrac{2\operatorname{sen}(\frac{1}{2}\theta)\cos(\frac{1}{2}\theta)}{-(2\cos\theta+1)2\operatorname{sen}^2(\frac{1}{2}\theta)} = \dfrac{\cos(\frac{1}{2}\theta)}{(2\cos\theta+1)\operatorname{sen}(\frac{1}{2}\theta)} \longrightarrow +\infty$ y no tiene una recta como asíntota.

– Si $\theta \to \frac{2\pi}{3}$, $Y = \rho \operatorname{sen}(\theta - \frac{2\pi}{3}) = -\dfrac{\operatorname{sen}(\theta - \frac{2\pi}{3})}{2(\cos\theta - \cos\frac{2\pi}{3})(\cos\theta - 1)} =$
$\dfrac{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\theta - \frac{2\pi}{3})\cos\frac{1}{2}(\theta - \frac{2\pi}{3})}{4\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\theta + \frac{2\pi}{3})\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\theta - \frac{2\pi}{3})(\cos\theta - 1)} \longrightarrow \dfrac{1}{2\frac{\sqrt{3}}{2}(-\frac{3}{2})} = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$, es decir la curva tiene como asíntota $Y = \frac{-2\sqrt{3}}{9}$ en el sistema $\mathfrak{u} = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $\mathfrak{u}_1 = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$.

La derivada $\rho' = \dfrac{\operatorname{sen}\theta - 2\operatorname{sen}2\theta}{(\cos\theta - \cos 2\theta)^2} = \dfrac{\operatorname{sen}\theta(1 - 4\cos\theta)}{(\cos\theta - \cos 2\theta)^2}$, de modo que $\rho' = 0$, si $\theta = \operatorname{arc}\cos\frac{1}{4}$.

θ	0		$\operatorname{arc}\cos\frac{1}{4}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
ρ'		$-$	0	$+$		$+$	
ρ	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	$\frac{8}{9}$	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{1}{2}$



En el gráfico aparecen puntos dobles que se determinan resolviendo la ecuación $\rho(\theta+\pi) = -\rho(\theta)$, con $\theta \in [-\pi, 0] \setminus \{0, \frac{2\pi}{3}\}$, es decir $\dfrac{1}{\cos\theta - \cos 2\theta} = \dfrac{1}{\cos\theta + \cos 2\theta} \Longrightarrow \cos 2\theta = 0 \Longrightarrow$ $\theta = -\frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}$.

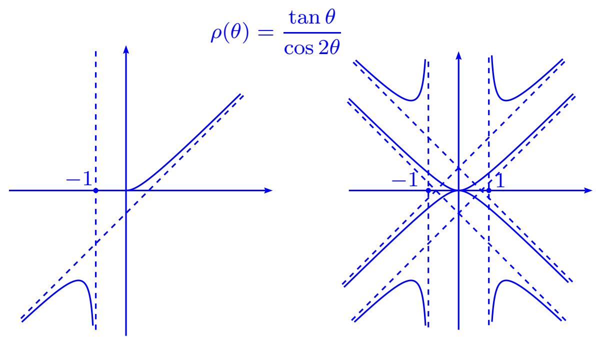
j) La curva $\rho = \dfrac{\tan\theta}{\cos 2\theta} = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta\cos 2\theta}$ es de período π (por la periodicidad de la tangente), impar (simetría respecto al eje y) y como $\rho(\pi - \theta) = -\rho(\theta)$, hay simetría con el eje x. Se analizará el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}] \setminus \{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\}$, ya que $\cos\theta\cos 2\theta = 0$, si $\theta = \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}$.

– Cuando $\theta \to \frac{\pi}{4}$, $Y = \rho\operatorname{sen}(\theta - \frac{\pi}{4}) = -\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)}\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\operatorname{sen}\theta - \cos\theta) =$
$\dfrac{-\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)} \longrightarrow -\frac{1}{2}$ y en el sistema $\mathfrak{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,1)$, $\mathfrak{u}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1,1)$ tiene la recta $Y = -\frac{1}{2}$ como asíntota.

– Cuando $\theta \to \frac{\pi}{2}$, $Y = \rho\operatorname{sen}(\theta - \frac{\pi}{2}) = -\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos 2\theta} \longrightarrow 1$ y la recta $Y = 1$ es asíntota de la curva con el sistema $\mathbf{v} = (0,1)$, $\mathbf{v}_1 = (-1, 0)$.

La derivada $\rho' = \dfrac{1 + \cos 2\theta - \cos^2\theta}{\cos^2\theta\cos^2 2\theta}$, se anula en $\cos 2\theta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ i.e. $\frac{1}{2}\operatorname{arc}\cos\frac{1-\sqrt{5}}{2} = \theta_0$, con lo cual tenemos $\rho(\theta_0) = -\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)\sqrt{2+\sqrt{5}} \approx -3{,}33019$.

θ	0		$\frac{\pi}{4}$		θ_0		$\frac{\pi}{2}$
ρ'		$+$	$\|$	$+$	0	$-$	
ρ	0	$\nearrow$	$+\infty \| -\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$



Claramente en el origen hay un punto doble que corresponde a $\theta = 0, \pi$.

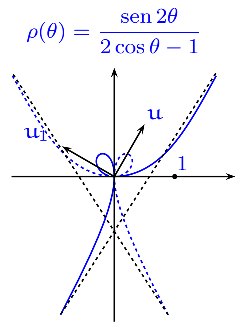
k) La curva $\rho = \dfrac{\operatorname{sen} 2\theta}{2\cos\theta - 1}$, tiene período 2π, es impar (simetría respecto al eje y) y se indefine en $\theta = \frac{\pi}{3}$, si se considera el intervalo $[\,0, \pi\,]$. Así la curva se analizará en $[\,0, \pi\,] \setminus \{\frac{\pi}{3}\}$ y se completará por la simetría del eje y.

– Cuando $\theta \to \frac{\pi}{3}$, $Y = \rho \operatorname{sen}(\theta - \frac{\pi}{3}) = \dfrac{\operatorname{sen} 2\theta\, 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\theta - \frac{\pi}{3}) \cos \frac{1}{2}(\theta - \frac{\pi}{3})}{-2(\cos\theta - \cos\frac{\pi}{3})} =$

$-\dfrac{\operatorname{sen} 2\theta \cos \frac{1}{2}(\theta - \frac{\pi}{3})}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\theta + \frac{\pi}{3})} \longrightarrow -\frac{1}{2}$ y la recta $Y = -\frac{1}{2}$ es asíntota de la curva en el sistema ortogonal $\mathfrak{u} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $\mathfrak{u}_1 = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$.

Es importante conocer el signo de ρ en $[\,0, \pi\,] \setminus \{\frac{\pi}{3}\}$, para la construcción del gráfico.

θ	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos\theta$	1	$+$		$+$	0	$-$	-1
$\operatorname{sen}\theta$	0	$+$		$+$	1	$+$	0
$2\cos\theta - 1$	1	$+$	0	$-$	-1	$-$	-3
ρ	0	$+$	$+\infty \| -\infty$	$-$	0	$+$	0

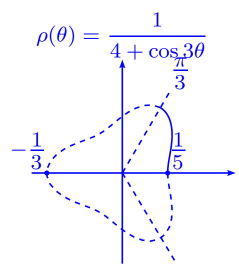


Se observa que en el origen un punto múltiple, solución de la ecuación $\rho = 0$, es decir $\operatorname{sen} 2\theta = 0$, o bien $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$.

l) La curva $\rho = \dfrac{1}{4 + \cos 3\theta}$ tiene período $\frac{3\pi}{2}$ es par (simetría del eje x) y se hará el estudio en el intervalo $[\,0, \frac{\pi}{3}\,]$, se efectuará la simetría respecto al eje x y con dos rotaciones de $\frac{2\pi}{3}$, alrededor del origen se obtendrá la curva.

La derivada $\rho' = \dfrac{3\operatorname{sen} 3\theta}{(4 + \cos\theta)^2} > 0$, en $]\,0, \frac{\pi}{3}\,[$, por lo que tenemos el siguiente cuadro de variación:

θ	0		$\frac{\pi}{3}$
ρ'	0	$+$	0
ρ	$\frac{1}{5}$	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$



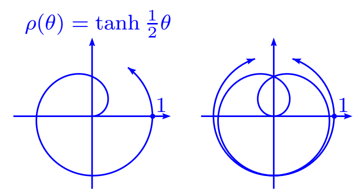
m) La curva $\rho = \tanh(\frac{1}{2}\theta)$ es impar (simetría respecto al eje y) y se analizará la curva en $[\,0, +\infty\,[$.

– Como $\theta \to \infty$, si $\rho \longrightarrow 1$, la curva tiene como asíntota el círculo de centro 0 y radio 1.

La derivada $\rho' = 2\sec^2(\frac{1}{2}\theta)$, en $[\,0, +\infty\,[$ y ρ es creciente en $[\,0, +\infty\,[$.

Para determinar los puntos dobles debemos considerar la ecuación $\rho(\theta + (2n + 1)\pi) = -\rho(\theta) \Longleftrightarrow \theta + (2n + 1)\pi = -\theta \Longrightarrow \theta = m\pi + \frac{1}{2}\pi, m \in \mathbb{Z}$.

θ	0		$+\infty$
ρ'		$+$	
ρ	0	$\nearrow$	1



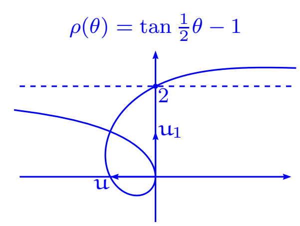
n) La curva $\rho = \tan(\frac{1}{2}\theta) - 1$ tiene período 2π y se considerará el intervalo $[\,0, \pi\,] \setminus \{\pi\}$, ya que ρ se indefine en π.

– Cuando $\theta \to \pi$, $Y = \rho\,\mathrm{sen}(\theta - \pi) = -\dfrac{\mathrm{sen}\,\theta(\mathrm{sen}(\frac{1}{2}\theta) - \cos(\frac{1}{2}\theta))}{\cos(\frac{1}{2}\theta)} =$ $-2(\mathrm{sen}(\frac{1}{2}\theta) - \cos(\frac{1}{2}\theta))\,\mathrm{sen}(\frac{1}{2}\theta) \longrightarrow -2$, por lo que la recta $Y = -2$ es asíntota de la curva en el sistema $\mathfrak{u} = (-1, 0)$, $\mathfrak{u}_1 = (0, 1)$.

La función $\rho = 0$, si $\frac{1}{2}\theta = \frac{\pi}{4} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ y para determinar los puntos dobles debemos resolver $\rho(\theta+\pi) = -\rho(\theta), \theta \in [\,0, \pi\,] \Longrightarrow \tan(\frac{1}{2}\theta + \frac{\pi}{2}) - 1 = \mathrm{cotan}\,(\frac{1}{2}\theta) - 1 =$ $-\tan(\frac{1}{2}\theta) + 1 \Longrightarrow \dfrac{\cos^2(\frac{1}{2}\theta) - \mathrm{sen}^2(\frac{1}{2}\theta)}{\mathrm{sen}(\frac{1}{2}\theta)\cos(\frac{1}{2}\theta)} = -2 \Longrightarrow \cos\theta = \mathrm{sen}\,\theta \Longrightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}$ i.e. $\rho(\frac{3\pi}{4}) = \sqrt{2}$.

Además, cuando $\theta \to \pi^{\pm}$, $\rho \longrightarrow \pm\infty$. La derivada $\rho' = \frac{1}{2}(1 + \tan^2(\frac{1}{2}\theta)) > 0$, con lo cual tenemos:

θ	0		$\frac{\pi}{2}$		π		2π
ρ'		$+$		$+$		$+$	
ρ	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty \,\|\, -\infty$	$\nearrow$	-1



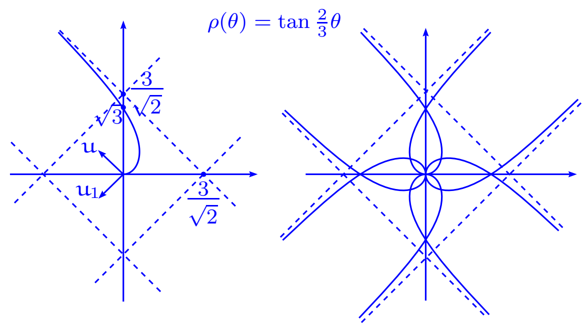
o) La curva $\rho = \tan(\frac{2}{3}\theta)$ es de período $\frac{3\pi}{2}$, impar (simétrica respecto al eje y) y se hará el estudio en $[\,0, \frac{3\pi}{4}\,[$ (ya que ρ se indefine en $\frac{3\pi}{4}$), luego se utilizará la simetría respecto al eje y y se completará la curva con tres rotaciones de $\frac{3\pi}{2}$, alrededor del polo 0. Recuerde que si el período se escribe de la forma $\frac{2n}{m}\pi$, se deben efectuar $m - 1$ rotaciones para completar la curva.

– Cuando $\theta \to \frac{3\pi}{4}$, $Y = \rho\,\mathrm{sen}(\theta - \frac{3\pi}{4}) = -\dfrac{\mathrm{sen}(\theta - \frac{3\pi}{4})}{\tan\frac{2}{3}(\theta - \frac{3\pi}{4})} = -\dfrac{\mathrm{sen}\,\alpha}{\tan\frac{2}{3}\alpha} =$

$-\dfrac{3}{2}\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\dfrac{\frac{2}{3}\alpha}{\tan\frac{2}{3}\alpha} \longrightarrow -\frac{3}{2}$, con $\alpha = \theta - \frac{3\pi}{4} \longrightarrow 0$. Así, la recta $Y = -\frac{3}{2}$ es asíntota de la curva en el sistema $\mathfrak{u} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $\mathfrak{u}_1 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

La derivada $\rho' = \frac{2}{3}(1 + \tan^2(\frac{2}{3}\theta)) > 0$, en $[\,0, \frac{3\pi}{4}\,[$ y ρ es estrictamente creciente en el intervalo.

θ	0		$\frac{3\pi}{4}$
ρ'		$+$	
ρ	0	$\nearrow$	$+\infty$

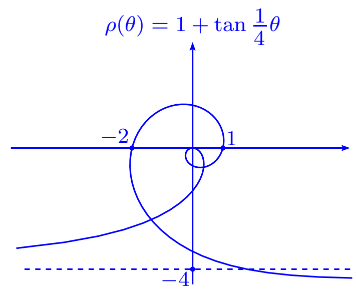


p) La curva $\rho = 1 + \tan(\frac{1}{4}\theta)$ tiene período 4π y se indefine en 2π. Su estudio se hará en $[\,0, 4\pi\,] \setminus \{2\pi\}$.

– Si $\theta \to 2\pi$, $Y = \rho\operatorname{sen}(\theta - 2\pi) = \dfrac{\cos(\frac{1}{4}\theta) + \operatorname{sen}(\frac{1}{4}\theta)}{\cos(\frac{1}{4}\theta)}\operatorname{sen}\theta =$ $\dfrac{4\operatorname{sen}(\frac{1}{4}\theta)\cos(\frac{1}{4}\theta)\cos(\frac{1}{2}\theta)}{\cos(\frac{1}{4}\theta)}(\cos(\frac{1}{4}\theta) + \operatorname{sen}(\frac{1}{4}\theta)) = 4\operatorname{sen}(\frac{1}{4}\theta)\cos(\frac{1}{2}\theta)(\cos(\frac{1}{4}\theta) + \operatorname{sen}(\frac{1}{4}\theta)) \longrightarrow -4$ y la recta $y = -4$ es asíntota, ya que para el ángulo 2π, el sistema de referencia coincide con el sistema usual.

Para obtener los puntos dobles, se considera el sistema $\rho(\theta + 2\pi) = \rho(\theta)$, si $\theta \in [\,0, 2\pi\,]$ o el sistema $\rho(\theta + \pi) = -\rho(\theta)$, si $\theta \in [\,0, 3\pi\,]$. La primera ecuación no tiene solución, pero la segunda nos da que: $-(1 + \tan(\frac{1}{4}\theta)) = (1 + \tan(\frac{1}{4}(\theta + \pi)) = 1 + \dfrac{\tan(\frac{1}{4}\theta) + 1}{1 - \tan(\frac{1}{4}\theta)} = \dfrac{2}{1 - \tan(\frac{1}{4}\theta)} \Longrightarrow \tan^2(\frac{1}{4}\theta) = 3$ i.e. $\tan(\frac{1}{4}\theta) = \pm\sqrt{3}$, es decir $\frac{1}{4}\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \Longrightarrow \theta = \frac{4\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}$. La derivada $\rho' = \frac{1}{4}(1 + \tan^2(\frac{1}{4}\theta)) > 0$.

θ	0		2π		3π		4π
ρ'		$+$		$+$		$+$	
ρ	1	$\nearrow$	$+\infty \mid -\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1



q) La curva $\rho = \dfrac{\theta}{\theta^2 - 1}$ es impar (simetría con el eje y) y el análisis se hará en el intervalo $[\,0, +\infty\,[\,\setminus\{1\}$.

– Cuando $\theta \to 1$, $Y = \rho \operatorname{sen}(\theta - 1) = \dfrac{\theta}{\theta + 1}\dfrac{\operatorname{sen}(\theta - 1)}{\theta - 1} \longrightarrow \frac{1}{2}$ y la recta $Y = \frac{1}{2}$ es asíntota en el sistema $\mathfrak{u} = (\cos 1, \operatorname{sen} 1)$, $\mathfrak{u}_1 = (-\operatorname{sen} 1, \cos 1)$ i.e. $\cos 1 \approx 0{,}5403$, $\operatorname{sen} 1 \approx 0{,}84147$.

– Cuando $\theta \to +\infty$, el origen es asintótico a la curva.

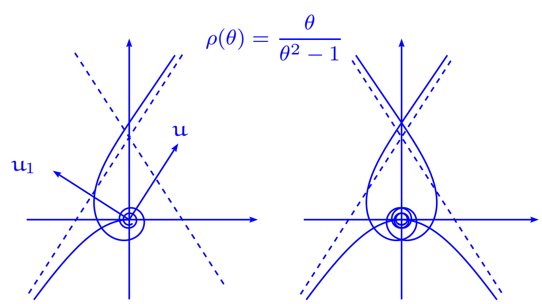
– Para determinar los puntos dobles, resolvemos $\rho(\theta + a) = \rho(\theta)$, con $a = 2n\pi$ y $\rho(\theta + a) = -\rho(\theta)$, $a = (2n + 1)\pi$.

El primer sistema es equivalente a resolver $\dfrac{a(\theta^2 + a\theta + 1)}{(\theta^2 - 1)((\theta + a)^2 - 1)} = 0 \Longrightarrow \theta = \dfrac{1}{2}(-a \pm \sqrt{a^2 - 4}) = -n\pi \pm \sqrt{n^2\pi^2 - 1}$, $n \in \mathbb{Z}^*$.

El segundo sistema equivale a resolver $\dfrac{(2\theta + a)(\theta^2 + a\theta - 1)}{(\theta^2 - 1)((\theta + 1)^2 - 1)} = 0 \Longrightarrow \theta = -\dfrac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}(-a \pm \sqrt{a^2 + 4})$, o sea $\theta = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $\frac{1}{2}(-(\pi + 2n\pi) \pm \sqrt{(\pi + 2n\pi)^2 + 4})$, $n \in \mathbb{Z}$.

La derivada $\rho' = -\dfrac{\theta^2 + 1}{(\theta - 1)^2} < 0$.

θ	0		1		$+\infty$
ρ'		$-$		$-$	
ρ	0	$\searrow$	$-\infty \mid +\infty$	$\searrow$	0



d) Transformar las ecuaciones siguientes en coordenadas cartesianas:

a) $\rho = \dfrac{a}{\cos(\frac{1}{2}\theta)(\cos(\frac{1}{2}\theta) + \operatorname{sen}(\frac{1}{2}\theta)) - \operatorname{sen}^2(\frac{1}{2}\theta)}$

b) $\rho = a\dfrac{\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}$

c) $\rho = \dfrac{a}{\cos(\frac{1}{2}\theta)(2\operatorname{sen}(\frac{1}{2}\theta) - 5\cos(\frac{1}{2}\theta)) + \frac{5}{2}}$

d) $\rho = a\dfrac{\tan\theta}{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta}$

e) $\rho = a\dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}$

f) $\rho = a\tan(\frac{1}{2}\theta)$

g) $\rho = \dfrac{1}{\cos\theta} + \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}$

h) $\rho = \dfrac{1}{2\operatorname{sen}^2(\frac{1}{2}\theta)}$

i) $\rho = \dfrac{\operatorname{sen}2\theta}{\cos 3\theta}$

j) $\rho = \dfrac{2}{\sqrt{1+\cos 2\theta} + \sqrt{1 - \operatorname{sen}2\theta}}$

k) $\rho = \dfrac{1}{\sqrt{1+\cos 2\theta} + \sqrt{1+\operatorname{sen}2\theta}}$.

Solución

a) La ecuación $\rho = \dfrac{a}{\cos\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta} \Longrightarrow \rho\cos\theta + \frac{1}{2}\rho\operatorname{sen}\theta = x + \frac{1}{2}y = a$ i.e. es la ecuación de una recta.

b) La ecuación se escribe $\rho^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta = a(\rho\cos\theta - \rho\operatorname{sen}\theta) \Longrightarrow xy = a(x - y) \Longrightarrow$
$y = \dfrac{ax}{a+x}$, ecuación de una hipérbola equilátera.

c) La ecuación $\rho = \dfrac{a}{\operatorname{sen}\theta - 5\cos^2(\frac{1}{2}\theta) + \frac{5}{2}} = \dfrac{a}{\operatorname{sen}\theta - \frac{5}{2}\cos\theta} \Longrightarrow$
$\rho\operatorname{sen}\theta - \frac{5}{2}\rho\cos\theta = y - \frac{5}{2}x = a$, que es la ecuación de una recta.

d) La ecuación $\rho\operatorname{sen}\theta + \rho\cos\theta = a\dfrac{\rho\cos\theta}{\rho\operatorname{sen}\theta} \Longrightarrow x+y = a\dfrac{y}{x} \Longrightarrow x(x+y) - ay = 0$, ecuación de una hipérbola.

e) En este caso $\rho\operatorname{sen}\theta = a\dfrac{\rho\cos\theta}{\rho\operatorname{sen}\theta} \Longrightarrow y = a\dfrac{x}{y} \Longrightarrow y^2 = ax$, parábola con vértice en el origen, con eje, el eje x.

f) La ecuación $\rho = a\dfrac{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}\theta)}{\cos(\frac{1}{2}\theta)} = \dfrac{a2\operatorname{sen}(\frac{1}{2}\theta)\cos(\frac{1}{2}\theta)}{2\cos^2(\frac{1}{2}\theta)} = \dfrac{a\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta} \Longrightarrow \rho + \rho\cos\theta =$
$a\operatorname{sen}\theta \Longrightarrow \sqrt{x^2+y^2} + x = a\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \Longrightarrow x^2 + y^2 + x\sqrt{x^2+y^2} = ay.$

g) La ecuación $\rho\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \operatorname{sen}\theta + \cos\theta \Longrightarrow \rho^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \rho\operatorname{sen}\theta + \rho\cos\theta \Longrightarrow$
$xy = x + y \Longrightarrow y = \dfrac{x}{x-1}$, que es una hipérbola.

h) Se tiene que $\rho = \dfrac{1}{2\operatorname{sen}^2(\frac{1}{2}\theta)} = \dfrac{1}{\cos\theta} \Longrightarrow \rho - \rho\cos\theta = 1 \Longrightarrow \rho^2 =$

$1+\rho\cos\theta \Longrightarrow \sqrt{x^2+y^2}=1+x \Longrightarrow x^2+y^2=1+2x+x^2$ i.e. $y^2=1+2x$, que es una parábola.

i) La ecuación se escribe $\rho=\dfrac{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{4\cos^3\theta-3\cos\theta}=\dfrac{2\operatorname{sen}\theta}{4\cos^2\theta-3}\Longrightarrow 4\rho^2\cos^2\theta-3\rho^2=2\rho\operatorname{sen}\theta\Longrightarrow 4x^2-3x^2-3y^2=2y$ i.e. $x^2-3y^2-2y=0$, que es una hipérbola.

j) La ecuación $\rho=\dfrac{2}{\sqrt{1+\operatorname{sen}2\theta}+\sqrt{1-\operatorname{sen}2\theta}}$ se transforma en

$\rho=\dfrac{\sqrt{2}}{|\cos(\frac{\pi}{4})-\theta|+|\cos(\frac{\pi}{4})+\theta|}$.

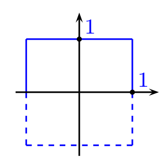
En efecto, $1+\operatorname{sen}2\theta=\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}+\operatorname{sen}2\theta=2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}+2\theta)\cos(\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}-2\theta))=2\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}+\theta)\cos(\frac{\pi}{4}-\theta)=2\cos^2(\frac{\pi}{4}-\theta)$, ya que $\operatorname{sen}\alpha=\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)$.

De manera similar, $1-\operatorname{sen}2\theta=2\cos^2(\frac{\pi}{4}+\theta)$ y se verifica el resultado.

La curva tiene período 2π y se analizará de $[\,0,\pi\,]$, puesto que dada la relación $\rho(\theta+\pi)=\rho(\theta)=\rho(\theta+\frac{2\cdot 1}{2}\pi)$, se analiza de $[\,0,\pi\,]$ y por una rotación adicional de π se construye la curva.

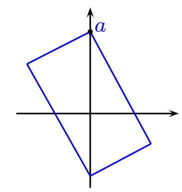
– Si $0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$, $\rho=\dfrac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\theta}=\dfrac{1}{\cos\theta}\Longrightarrow$ $\rho\cos\theta=x=1$.

– Si $\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{3\pi}{4}$, $\rho=\dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}\Longrightarrow\rho\operatorname{sen}\theta=y=1$.



– Si $\frac{3\pi}{4}\le\theta\le\pi$, $\rho=-\dfrac{1}{\cos\theta}\Longrightarrow\rho\cos\theta=x=-1$ i.e. la curva es un cuadrado con vértices $(1,1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$, $(1,-1)$.

k) La curva $\rho=\dfrac{1}{\sqrt{1+\cos2\theta}+\sqrt{1+\operatorname{sen}2\theta}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}|\cos\theta|+\sqrt{2}|\cos(\theta-\frac{\pi}{4})|}$ (ver ejercicio 9dj), con período 2π y se analizará el intervalo $[\,-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\,]$, por la relación $\rho(\theta+\pi)=\rho(\theta)=\rho(\theta+\frac{2{,}1}{2}\pi)$. La curva se completa con una rotación π de la curva $[\,-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\,]$.



– Si $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $\rho = \dfrac{1}{2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}\cos(\theta - \frac{\pi}{8})} =$
$\dfrac{1}{2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}(\cos\theta\cos\frac{\pi}{8} + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\frac{\pi}{8})} = \dfrac{1}{\alpha\cos\theta + \beta\operatorname{sen}\theta}$
i.e. $\alpha x + \beta y = 1$.
– Si $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$, $\rho = \dfrac{1}{2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}\cos(\theta - \frac{\pi}{8})} = \dfrac{1}{\alpha'\operatorname{sen}\theta - \beta'\cos\theta}$ i.e. $\alpha' x - \beta' y = 1$. Finalmente, se tiene el gráfico de un rectángulo.

e) Integrar la ecuación diferencial $x(y')^3 - 3y(y')^2 - 3xy' + y = 0$, usando coordenadas polares.

Solución Sea α al ángulo que forma la tangente a la curva con el eje x, entonces $\tan\alpha = y'$. Además $\dfrac{y}{x} = \dfrac{3y' - (y')^3}{1 - 3(y')^2} = \tan 3\alpha$, por lo que $\tan\alpha = \dfrac{y}{x} = \tan 3\alpha$, es decir $\theta = 3\alpha + n\pi$ y como $\alpha = \theta + v + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, $\tan v = \dfrac{\rho}{\rho'}$, se tiene $2\theta + 3v = n\pi$. Así, $v = \frac{1}{3}(n\pi - 2\theta) \Longrightarrow \tan v = \dfrac{\rho}{\rho'} = \tan(\frac{1}{3}(n\pi - 2\theta)) \Longrightarrow$ $\rho\operatorname{cotan}(\frac{1}{3}(n\pi - 2\theta)) = \dfrac{d\rho}{d\theta} \Longrightarrow \dfrac{d\rho}{\rho} = \operatorname{cotan}(\frac{1}{3}(n\pi - 2\theta))d\theta \Longrightarrow \dfrac{d\rho}{\rho} = -\dfrac{3\cos(\frac{1}{3}(n\pi - 2\theta))d\theta(-\frac{2}{3})}{2\operatorname{sen}(\frac{1}{3}(n\pi - 2\theta)} \Longrightarrow \ln\rho = -\frac{3}{2}\ln|\operatorname{sen}(\frac{1}{3}(n\pi - 2\theta))| + C \Longrightarrow \rho = k|\operatorname{sen}(\frac{1}{3}(n\pi - 2\theta))|^{-\frac{3}{2}}$.

f) a) Trazar la curva $\rho = \cos^3\theta - \operatorname{sen}^3\theta$.

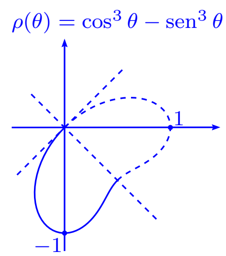
b) Determinar los puntos de la curva en que la tangente tiene pendiente 1.

Solución

a) La curva $\rho = \cos^3\theta - \operatorname{sen}^3\theta$ tiene período 2π y como $\rho(-\frac{\pi}{2} - \theta) = \rho(\theta)$, la curva es simétrica respecto a la segunda bisectriz ($\alpha = -\frac{\pi}{4}$). Se analizará la curva en $[\,-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\,]$ y se completa la curva por la simetría planteada. La ecuación $\rho = 0 \Longrightarrow \cos\theta = \operatorname{sen}\theta$ i.e. $\theta = \frac{\pi}{4}$.

La derivada $\rho' = -3\operatorname{sen}\theta\cos\theta(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta) > 0$, si $\theta \in \,]\,\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\,[$ y $\rho' < 0$, si $\theta \in \,]\,\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\,[$.

θ	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$
ρ'		$-$	0	$+$	0
ρ	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$



b) Sabemos que $x(\theta) = \rho\cos\theta$, $y(\theta) = \rho\operatorname{sen}\theta$ y para que la pendiente sea 1, debemos tener que $x'(\theta) = y'(\theta)$, es decir $\rho'\operatorname{sen}\theta + \rho\cos\theta = \rho'\cos\theta - \rho\operatorname{sen}\theta \Longrightarrow (\cos^3\theta - \operatorname{sen}^3\theta)(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta) = -3\operatorname{sen}\theta\cos\theta(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta) \Longrightarrow (\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)(1 + 2\operatorname{sen}2\theta) = 0 \Longrightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{4}$, $2\theta = -\frac{\pi}{3}, -\frac{5\pi}{3}$, es decir $\theta = -\frac{5\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$.

Capítulo 2

Curvas en el plano

2.1. Propiedades métricas de las curvas en el plano

En el estudio de este tema nos situamos en el plano $\mathbb{R}^2$, provisto de un sistema ortonormado de referencia $\{\mathbf{0}, \mathtt{i}, \mathtt{j}\}$. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo.

Se denotará por C^k el conjunto de funciones f definidas de I en $\mathbb{R}^2$ tales que f tiene sus derivadas son continuas hasta el orden k i.e. $f^{(i)}$ es continua en I, $i = 1, \ldots, k$.

Una función $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva de clase C^1 o clase C^2, $\Gamma = f(I)$ la trayectoria. Para $t \in I$, se escribe $\mathtt{r}(t) = f(t) = (x(t), y(t))$ las coordenadas de $\mathtt{r}(t)$ en el sistema $\{\mathtt{i}, \mathtt{j}\}$, es decir $\mathtt{r}(t) = (x(t), y(t)) = x(t)\mathtt{i} + y(t)\mathtt{j}$.

Definición 2.1.1 *Una función $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ se dice regular si es de clase C^1.*

Se dice que f es bi-regular si es de clase C^2.

2.1.1. Propiedades de primer orden

Definición 2.1.2 *Se denomina abscisa curvilínea sobre Γ toda aplicación $s\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 sobre I tal que $\forall t \in I$, $s'(t) = \|f'(t)\|$.*

Dado que la aplicación $\begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \|f'(t)\| \end{array}$ es continua sobre I, una aplicación $s\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ es una abscisa curvilínea sobre Γ si y sólo si existe $t_0 \in I$ tal que $\forall t \in I$, $s(t) =$

$\displaystyle\int_{t_0}^{t} \|f'(u)\|\,du.$

Así Γ admite una infinidad de abscisas curvilíneas que se diferencian por una constante.

El cálculo de s se llama la rectificación de Γ. Cuando se escoge un elemento $t_0 \in I$, para que se defina una abscisa curvilínea $s\colon t \longmapsto \displaystyle\int_{t_0}^{t} \|f'(u)\|\,du$ se dice que $f(t_0)$ es el origen de la abscisa curvilínea sobre Γ.

El estudio se puede extender al caso en que $f \in C^1$ a trozos en I.

Sea $J \subset \mathbb{R}$ un intervalo y sea $\varphi\colon\ J \longrightarrow I$ un cambio de parámetro de f, es decir φ es de clase C^1 sobre J, biyectiva, φ^{-1} es de clase C^1 en I. De esta forma tenemos que $\varphi' > 0$ o $\varphi' < 0$.

Sea $s\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ una abscisa curvilínea en Γ, sea $\sigma = s \circ \varphi$ de clase C^1 en J, entonces $\forall\, u \in I$, $\sigma'(u) = s'(\varphi(u))\varphi'(u) = \|f'(\varphi(u))\|\varphi'(u)$.

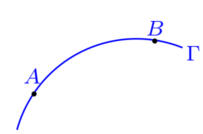
Si $\varphi' > 0$, $\forall\, u \in J$, $\sigma'(u) = \|\varphi'(u) f'(\varphi(u))\| = \|(f \circ g)'(u)\|$.

Si $\varphi' < 0$, $\forall\, u \in J$, $\sigma'(u) = -\|f'(\varphi(u))\varphi'(u))\| = -\|(f \circ g)'(u)\| \Longrightarrow -\sigma$ es una abscisa curvilínea.

De esta manera la noción de abscisa curvilínea no depende del parametraje, depende solamente de la curva orientada Γ. Esta es la razón del porqué se define la noción de abscisa curvilínea de Γ en vez de f. Usando la notación de la definición, $\forall\, t \in I$, $s'^2(t) = \|f'(t)\|^2 = x'^2(t) + y'^2(t)$.

Definición 2.1.3 *Sean s una abscisa curvilínea sobre Γ, a, $b \in I$, $A = f(a)$, $B = f(b)$, se llama:*

– longitud (algebraica) de arco $\overset{\frown}{AB}$ sobre Γ y se denota $\ell(\overset{\frown}{AB})$, el número real $s(b) - s(a) = \ell(\overset{\frown}{AB}) = \displaystyle\int_a^b \|f'(t)\|\,dt$.

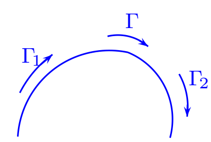


– longitud de arco $\overset{\frown}{AB}$ de Γ, el valor absoluto de la longitud algebraica de $\overset{\frown}{AB}$ sobre Γ.

El contexto indica si la longitud de arco es algebraica (orientada) o aritmética (positiva o nula).

Proposición 2.1.1 (Aditividad de la longitud de arco) *Sean Γ_1, Γ_2 dos curvas de clase C^1 tales que el extremo de Γ_1 es el origen de Γ_2, entonces la longitud de la curva Γ obtenida por la sucesión de Γ_1 y Γ_2 es la suma de las longitudes de Γ_1 y Γ_2.*

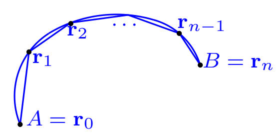
Prueba La curva Γ admite por representación paramétrica f de clase C^1 a trozos sobre un intervalo $I = I_1 \cup I_2$, tal que el extremo de I_1, es el origen de I_2.



Los intervalos I_1 e I_2 son intervalos tales que $f_{|I_1}$, $f_{|I_2}$ son representaciones paramétricas de Γ_1 y Γ_2. Así tenemos que $\ell(\Gamma) = \displaystyle\int_{I_1 \cup I_2} \|f'(t)\|\, dt = \int_{I_1} \|f'_{|I_1}(t)\|\, dt + \int_{I_2} \|f'_{|I_2}(t)\|\, dt = \ell(\Gamma_1) + \ell(\Gamma_2)$.

2.2. Líneas poligonales inscritas en una curva del plano

Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$, $a, b \in I$, tales que $A = f(a)$, $B = f(b)$ y sea $\mathrm{S} = \{P/P$ es una partición de $[a, b]\}$ i.e. $P \in \mathrm{S}$, $P = (t_i)_{0 \leq i \leq n}$ tales que $n \geq 1$, $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$. Se denota la norma de $\|P\| = \sup_{0 \leq i \leq n-1} |t_i - t_{i+1}|$.



Para todo $P \in \mathrm{S}$, sea $\ell(P) = \sum_{i=0}^{n-1} |\mathrm{r}_i \bar{\mathrm{r}}_{i+1}|$ la longitud poligonal $\mathrm{r}_0 \mathrm{r}_1 \cdots \mathrm{r}_n$ inscrita en Γ, $\mathrm{r}_i = \mathrm{r}(t_i)$, $i = 1, \ldots, n$.

Así $\ell(\overparen{\mathrm{r}_i \mathrm{r}_{i+1}}) = \displaystyle\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f'(t)\|\, dt \geq \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} f'(t) dt \right\| = \|f(t_{i+1}) - f(t_i)\| = |\mathrm{r}_i \bar{\mathrm{r}}_{i+1}|$.

Por otro lado, $\ell(\overparen{\mathrm{r}_i \mathrm{r}_{i+1}}) = \displaystyle\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f'(t)\|\, dt \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f'(t_i)\|\, dt + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f'(t) - f'(t_i)\|\, dt$.

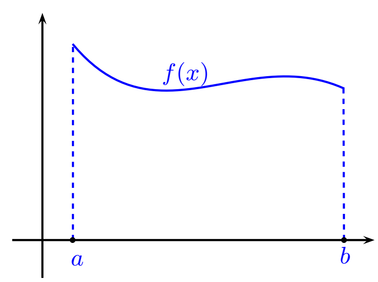
Dado que:

$$
\begin{aligned}
\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f'(t_i)\|\, dt = (t_{i+1} - t_i)\|f'(t_i)\| = \|(t_{i+1} - t_i) f'(t_i)\| &= \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} f'(t_i)\, dt \right\| \\
&\leq \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} f'(t)\, dt \right\| + \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} (f'(t_i) - f'(t))\, dt \right\| \\
&\leq \|f(t_{i+1}) - f(t_i)\| + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f'(t) - f'(t_i)\|\, dt
\end{aligned}
$$

y que
$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} (\|f'(t)\| - \|f'(t_i)\|)\,dt \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f'(t) - f'(t_i)\|\,dt,$$
se obtiene:
$$\ell(\widehat{\mathrm{r}_i\mathrm{r}_{i+1}}) \leq |\mathrm{r}_i\bar{\mathrm{r}}_{i+1}| + 2\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f'(t) - f'(t_i)\|\,dt.$$
Sea $\epsilon > 0$ fijo, como f' es continua en $[a,b]$, f' es uniformemente continua y $\exists\eta > 0$ tal que $\forall\, u, v \in [a,b]$, si $|u-v| < \eta \Longrightarrow \|f'(u) - f'(v)\| < \epsilon$. Así $\forall P = (t_i)_{0\leq i\leq n} \in \mathrm{S}$ tal que $\|P\| = \text{máx}_{0\leq i\leq n-1} |t_{i+1} - t_i| \leq \eta$ se tiene:
$$\begin{aligned}
\ell(\widehat{AB}) &= \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} \ell(\widehat{\mathrm{r}_i\mathrm{r}_{i+1}}) \geq \sum_{i=0}^{n-1} |\mathrm{r}_i\bar{\mathrm{r}}_{i+1}| = \ell(P),\\
\ell(\widehat{AB}) &\leq \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} \left(|\mathrm{r}_i\bar{\mathrm{r}}_{i+1}| + 2\displaystyle\int_{t_i}^{t_i+1} \|f'(t) - f(t_i)\|\,dt\right)\\
&\leq \ell(P) + 2\epsilon \textstyle\sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1} - t_i) = \ell(P) + 2\epsilon(b-a).
\end{aligned}$$
Finalmente, $\forall P \in \mathrm{S}$, $\|P\| \leq \eta \Longrightarrow 0 \leq \ell(\widehat{AB}) - \ell(P) \leq 2(b-a)\epsilon$, es decir $\ell(P) \longrightarrow \ell(\widehat{AB})$, si $\|P\| \longrightarrow 0$.

Ejemplos

1) Si una curva plana está representada por la ecuación $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, donde f tiene derivada continua en $[a,b]$, la longitud de arco se expresa por la fórmula:
$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx,$$
la cual se tiene si se toma $t = x$, $y = f(t)$.

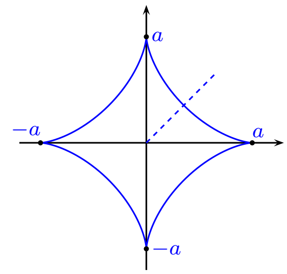


2) Longitud de la cicloide Consideremos el curva $x = t - \operatorname{sen} t$, $y = 1 - \cos t$, para $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, la longitud de arco está dada por $s = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2 + \operatorname{sen}^2 t}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t} = 2\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1-\cos t}{2}}\,dt = 2\int_0^{2\pi} |\operatorname{sen}\frac{t}{2}|\,dt = 8.$

3) Longitud del astroide Γ La imagen de una trayectoria de clase C^1 no necesariamente es regular. En efecto pueden tener dobleces, cúspides o cambios bruscos de dirección. Por ejemplo el cicloide tiene picos en los puntos del eje x, cuando $t = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Otro ejemplo es el hipocicloide de cuatro picos o astroide $x = a\cos^3 t$, $y = a\,\mathrm{sen}^3\, t$, $a > 0$. Por razones se simetría, $\ell(\Gamma) = 8\ell(\Gamma_1)$, donde Γ_1 es el arco variando en $[\,0, \frac{\pi}{4}\,]$.

Así tenemos $x'(t) = -3a\cos^2 t\,\mathrm{sen}\, t$, $y'(t) = 3a\,\mathrm{sen}^2\, t\cos t$, $s'(t) = \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{9a^2\,\mathrm{sen}^2\, t\cos^2 t} = 3a|\,\mathrm{sen}\, t\cos t|$ en $[\,0, \frac{\pi}{4}\,]$, por lo tanto:

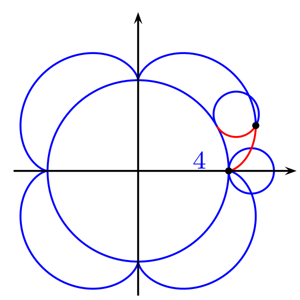
$\ell(\Gamma_1) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3}{2}a\,\mathrm{sen}\, 2t\,dt = \frac{3}{4}a$ i.e. $\ell(\Gamma) = 8\ell(\Gamma_1) = 6a$.



Note que se ha considerado que la curva Γ es la unión de cuatro curvas regulares.

4) Longitud de la epicicloide Un círculo de radio 1 rueda sobre un círculo de radio 4. La trayectoria de un punto del borde del círculo menor viene dada por $x = 5\cos t - \cos 5t$, $y = 5\,\mathrm{sen}\, t - \mathrm{sen}\, 5t$,

$0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, llamado epicicloide. Calcular la distancia recorrida por dicho punto en el transcurso de una vuelta alrededor del círculo mayor.



$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-5\,\mathrm{sen}\, t + 5\,\mathrm{sen}\, 5t)^2 + (5\cos t - 5\cos 5t)^2}\,dt =$$

$$5\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\,\mathrm{sen}\, t\,\mathrm{sen}\, 5t - 2\cos t\cos 5t}\,dt = 5\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos 4t}\,dt = 10\int_0^{2\pi} |\,\mathrm{sen}\, 2t|\,dt =$$

$$40\int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}\, 2t\,dt = 40.$$

5) Rectificación de la parábola $y = 2px$.

Calculemos la abscisa curvilínea en todo punto de la parábola Γ, $(y^2 = 2px)$, tomando el origen de abscisas curvilíneas sobre el punto O.

Una representación paramétrica de Γ es $x = \dfrac{t^2}{2p}$, $y = t$ i.e. $x' = \dfrac{t}{p}$, $y' = 1 \Longrightarrow s' =$

$\sqrt{\dfrac{t^2}{p^2}+1}$ y se tiene $s(t) = \displaystyle\int_0^t \sqrt{\frac{u^2}{p^2}+1}\,du = \frac{1}{p}\int_0^t \sqrt{u^2+p^2}\,du = \frac{u\sqrt{u^2+p^2}}{2p} + \frac{p}{2}\ln(u+\sqrt{u^2+p^2})\Big|_0^t = \frac{t}{2p}\sqrt{t^2+p^2} + \frac{p}{2}\ln(t+\sqrt{t^2+p^2}) - \frac{p}{2}\ln p.$

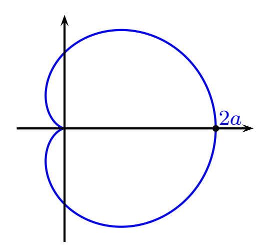
Proposición 2.2.1 *Sea* Γ *una curva de ecuación polar* $\rho = \rho(\theta)$*, donde* $\rho\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ *es de clase* C^1*, entonces denotando* s *una abscisa curvilínea sobre* Γ *se tiene* $\forall\theta \in I$*,* $s'(\theta) = (\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta))^{\frac{1}{2}}$.

Prueba Sea $\mathfrak{u} = \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \operatorname{sen}\theta\end{pmatrix}$, $\mathfrak{u}' = \begin{pmatrix}-\operatorname{sen}\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$; una representación paramétrica de Γ es $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(\theta) = \rho(\theta)\mathfrak{u}(\theta), \forall\theta\in I \Longrightarrow f'(\theta) = \rho'(\theta)\mathfrak{u}(\theta)+\rho(\theta)\mathfrak{u}'(\theta)$. Recordemos que $\{\mathfrak{u},\mathfrak{u}'\}$ es un sistema ortonormado, por lo que $\|f'(\theta)\|^2 = \rho'(\theta)^2 + \rho(\theta)^2$.

Ejemplos

a) La cardioide Γ de ecuación polar $\rho = a(1+\cos\theta)$, $a>0$ tiene longitud:

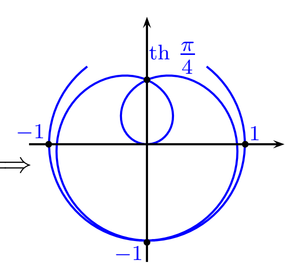
$\ell(\Gamma) = 2\displaystyle\int_0^\pi (\rho^2+\rho'^2)^{\frac{1}{2}}\,d\theta = 2a\int_0^\pi [\,2(1+\cos\theta)\,]^{\frac{1}{2}}\,d\theta = 4a\int_0^\pi \cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = 8a.$



b) Rectificación de la curva de ecuación polar $\rho = \operatorname{th}\dfrac{\theta}{2}$.

Tenemos que $\rho' = \frac{1}{2}(1-\operatorname{th}^2\dfrac{\theta}{2})$,

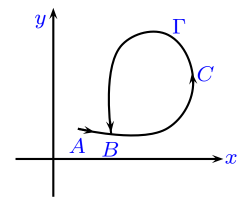
$\rho^2+\rho'^2 = \operatorname{th}^2\dfrac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\big(1-2\operatorname{th}^2\dfrac{\theta}{2}+\operatorname{th}^4\dfrac{\theta}{2}\big) = \frac{1}{4}\big(1+\operatorname{th}^2\dfrac{\theta}{2}\big)^2 \Longrightarrow$
$s' = \frac{1}{2}(1+\operatorname{th}^2\dfrac{\theta}{2})$.



Escogiendo como origen de abscisas curvilíneas sobre Γ, el punto de Γ correspondiente a $\theta=0$, o sea O, $\forall\theta\in\mathbb{R}$, $s(\theta) = \displaystyle\int_0^\theta \tfrac{1}{2}\big(1+\operatorname{th}^2\frac{t}{2}\big)\,dt = \int_0^\theta \big(1-\tfrac{1}{2}\big(1-\operatorname{th}^2\frac{t}{2}\big)\big)\,dt = \theta - \operatorname{th}\frac{\theta}{2}$.

Es posible definir dos funciones $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, continuas en un intervalo [0,1], tales que cuando el parámetro varía de $t = 0$ a $t = 1$, el punto variable $(\phi(t), \psi(t))$ que sale de $(0,0)$ en $t = 0$, recorre todos los puntos del cuadrado $[\,0,1\,] \times [\,0,1\,]$ y llega a la esquina derecha superior $(1,1)$ para $t = 1$. Esta curva conocida como curva de Peano literalmente pasa por cada punto del cuadrado $0 \leq x, y \leq 1$.

En la siguiente figura tenemos la curva Γ que se representa por funciones continuamente diferenciables $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, $\phi'^2 + \psi'^2 > 0$, $0 < t < 1$. Cuando t crece continuamente en el intervalo $]\,0,1\,[$, el punto (x,y) se mueve a lo largo de Γ desde A pasando por B y C hasta llegar a B, cuando $t \to 1$.



Se observa que en el punto B la curva Γ tiene una singularidad en el sentido que la parte de Γ dentro de un rectángulo de centro B, no puede proyectarse uno a uno sobre cualquiera de los ejes de coordenados.

Si una curva Γ es no deficiente en este sentido, es decir que cada punto puede ser cubierto con un rectángulo Δ con lados paralelos a los ejes tales que $\Gamma \cap \Delta$, se proyecta uno a uno sobre alguno de los ejes coordenados, Γ se llama una variedad diferenciable 1-dimensional.

2.2.1. Resumen

La diferencial de arco s de una curva plana dada por una ecuación en coordenadas cartesianas (x,y) se expresa por la fórmula $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

Si la ecuación de la curva tiene la forma:

a) $y = f(x)$, $ds = \sqrt{1 + [\,f'(x)\,]^2}\,dx$.

b) $x = \varphi(y)$, $ds = \sqrt{1 + [\,\varphi'(y)\,]^2}\,dy$.

c) $x = x(t)$, $y = y(t)$, $ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$.

d) $F(x,y) = 0$, $ds = \dfrac{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}}{|F_y|}\,|dx| = \dfrac{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}}{|F_x|}\,|dy|$.

Llamando α al ángulo que forma la dirección positiva de la tangente (es decir, dirigido en el sentido de crecimiento del arco de la curva s) con la dirección positiva del eje x, tenemos:

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}\,, \qquad \operatorname{sen}\alpha = \frac{dy}{ds}\,.$$

En coordenadas polares, $ds = \sqrt{(d\rho)^2 + (\rho\, d\theta)^2} = \sqrt{\rho^2 + (\frac{d\rho}{d\theta})^2}\, d\theta$.

Llamando β al ángulo formado por el radio polar de un punto de la curva y la tangente a la curva en este mismo punto tenemos:

$$\cos\beta = \frac{d\rho}{ds}\,, \qquad \operatorname{sen}\beta = \rho\,\frac{d\theta}{ds}\,.$$

2.3. Representación paramétrica en función de la abscisa curvilínea

Definición 2.3.1 *Se llama parametraje normal de f, todo parametraje admisible $g\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $\forall\, u \in J$, $\|g'(u)\| = 1$.*

Proposición 2.3.1 *Si f es regular, entonces:*

i) para toda abscisa curvilínea s sobre Γ, $f \circ s^{-1}$ es un parametraje normal de f.

ii) para todo parametraje normal g de f, existe una abscisa curvilínea s sobre Γ tal que $g = f \circ s^{-1}$ o $g = f \circ (-s)^{-1}$.

(Se dice que s y $-s$ son parametrajes normales de Γ).

Prueba

i) Supongamos que f es regular, es decir que $\forall\, t \in I$, $f'(t) \neq \mathbf{0}$. Sea $s\colon I \longrightarrow s(I) \subset \mathbb{R}$ una abscisa curvilínea, la aplicación s es de clase C^1 sobre I, $J = s(I)$ es un intervalo de $\mathbb{R}$ y $\forall\, t \in I$, $s'(t) = \|f'(t)\| > 0$.

Así tenemos que $s\colon I \longrightarrow J$ es biyectiva, $s^{-1}\colon J \longrightarrow I$ es de clase C^1 sobre J y $f \circ s^{-1}$ es un parametraje admisible de f. Además, si $g = f \circ s^{-1}$ tenemos:

$$\forall\, u \in J, \quad \|g'(u)\| = \Big\| \frac{1}{s'(s^{-1}(u))}\, f'(s^{-1}(u)) \Big\| = \frac{1}{s'(s^{-1}(u))}\, \|f'(s^{-1}(u))\| = 1,$$

es decir g es un reparametraje normal de f.

ii) Inversamente, sea $g\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un parametraje normal de f; puesto que g es un parametraje normal admisible de f, existe $\varphi\colon J \longrightarrow I$ tal que φ es de clase C^1 sobre J, φ biyectiva, φ^{-1} es de clase de C^1 sobre I, $g = f \circ \varphi$.

La aplicación $\psi = \varphi^{-1}\colon I \longrightarrow J$ es de clase C^1 sobre I y $\forall t \in I$, $\|f'(t)\| = \|(g \circ \psi)'(t)\| = \|g'(\psi(t))\psi'(t)\| = |\psi'(t)|$.

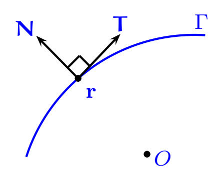
Puesto que $\psi'(t) > 0$ o $\psi'(t) < 0$ en I, se tiene $\psi'(t) = \pm\|f'(t)\|$, lo que demuestra que ψ o $-\psi$ es una abscisa curvilínea sobre Γ.

Definición 2.3.2 *Se llama vector tangente unitario (orientado) de Γ en $\mathtt{r}(s)$, el vector* $\mathsf{T} = \dfrac{d\mathtt{r}}{ds} = \mathtt{r}'(s) = \dfrac{\mathtt{r}'(t)}{\|\mathtt{r}'(t)\|}$.

Se llama vector normal N al vector unitario ortogonal a T (por rotación $\frac{\pi}{2}$); $\mathsf{N} =$ $\operatorname{rot}(\mathsf{T}, \frac{\pi}{2})$.

El sistema $\{\mathtt{r}, \mathsf{T}, \mathsf{N}\}$ se llama sistema de Frenet de Γ.

Efectuando un parametraje admisible directo (resp. indirecto) s, T, N se conservan (resp. cambian a sus opuestos).



Proposición 2.3.2 *Sea $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un parametraje normal de clase C^k, $k \geq 2$ de Γ, entonces existe una aplicación $\varphi\colon J \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^k tal que $\forall s \in J$, $\mathsf{T}(s) =$* $\cos\varphi(s)\mathtt{i} + \operatorname{sen}\varphi(s)\mathtt{j}$.

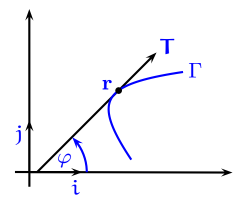
Prueba Identificando $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$, la aplicación $\mathsf{T}\colon s \longrightarrow \mathsf{T}(s)$ es de clase C^{k-1}, $k-1 \geq 1$ sobre el intervalo J con valores en el círculo unitario $\mathbb{U}$, entonces existe $\varphi\colon J \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^{k-1}, tal que $\forall s \in J$, $\mathsf{T}(s) = \cos\varphi(s)\mathtt{i} + \operatorname{sen}\varphi(s)\mathtt{j}$.

Además si $\varphi_1, \varphi_2\colon J \longrightarrow \mathbb{R}$, son dos aplicaciones, entonces $\varphi_1 - \varphi_2$ es constante y múltiplo de 2π.

Observaciones

— Con las hipótesis y notaciones de la proposición anterior tenemos $\varphi = \sphericalangle(\mathfrak{i}, \mathbf{T})$ módulo 2π, que denotamos $\varphi = \sphericalangle(\mathfrak{i}, \mathbf{T})$ $[\,2\pi\,]$, $\cos\varphi = \dfrac{dx}{ds}$, $\operatorname{sen}\varphi = \dfrac{dy}{ds}$, $\tan\varphi = \dfrac{dy}{dx}$ en todo punto en que $x' \neq 0$.

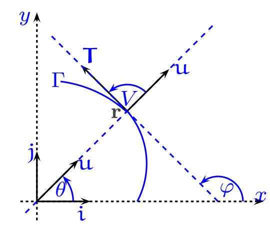
— Con un cambio de parámetro admisible directo (resp. indirecto), φ se conserva (resp. cambia de signo).



2.3.1. Caso de coordenadas polares

Sea Γ una curva admitiendo una ecuación polar $\rho = \rho(\theta)$, donde $\rho\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^2, donde se denota $\mathbf{T} = \dfrac{d\mathfrak{r}}{ds}$, $\varphi = \sphericalangle(\mathfrak{i}, \mathbf{T})$ $[\,2\pi\,]$, $\mathfrak{u} = \cos\theta\mathfrak{i} + \operatorname{sen}\theta\mathfrak{j}$.

Si se define $V = \varphi - \theta$ se tiene $V = \sphericalangle(\mathfrak{u}, \mathbf{T})$ $[\,2\pi\,]$, $\varphi = \theta + V$. Además si $\rho \neq 0$, $\tan V = \dfrac{\rho}{\rho'}$.



En efecto, $\tan V = \dfrac{\tan\varphi - \tan\theta}{1 + \tan\varphi\tan\theta} = \dfrac{\dfrac{y'(\theta)}{x'(\theta)} - \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}{1 + \dfrac{y'(\theta)}{x'(\theta)}\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}$, donde el vector $\mathfrak{r} = (x(\theta), y(\theta)) = (\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\operatorname{sen}\theta)$.

Así, $\tan V = \dfrac{y'\cos\theta - x'\operatorname{sen}\theta}{x'\cos\theta + y'\operatorname{sen}\theta} = \dfrac{\rho'\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \rho\operatorname{sen}^2\theta - \rho'\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \rho\operatorname{sen}^2\theta}{\rho'\operatorname{sen}^2\theta - \rho\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \rho'\operatorname{sen}^2\theta + \rho\operatorname{sen}\theta\cos\theta} = \dfrac{\rho}{\rho'}$.

2.4. Propiedades de segundo orden

2.4.1. Radio de curvatura

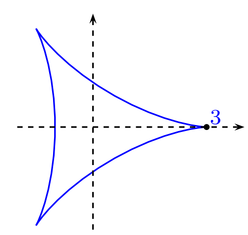
La función $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ designa una curva regular de clase C^2, $\Gamma = f(I)$ su trayectoria, s una abscisa curvilínea y recordemos que Γ admite a s por parametraje normal.

Se denota $\mathbf{T} = \dfrac{d\mathfrak{r}}{ds}$, $\mathbf{N} = \operatorname{rot}(\mathbf{T}, \frac{\pi}{2})$, $\varphi = \sphericalangle(\mathfrak{i}, \mathbf{T})$ $[\,2\pi\,]$.

Definición 2.4.1 *Se llama radio de curvatura en un punto* $\mathfrak{r}(s)$ *de* Γ *el número real* R *definido por* $R = \dfrac{ds}{d\varphi}$.

Se llama curvatura en $\mathrm{r}(s)$ *de* Γ *el mismo real* $K = \dfrac{1}{R} = \dfrac{d\varphi}{ds}$.

Consideremos el parametraje normal de Γ en función de una abscisa curvilínea s:
$\forall\, s \in J$, $f(s) = (x(s), y(s))$ y se tiene $\forall\, s \in J$, $\cos\varphi(s) = x'(s)$, $\operatorname{sen}\varphi(s) = y'(s) \Longrightarrow$
$\forall\, s \in J$, $x''(s) = -\varphi'(s)\operatorname{sen}\varphi(s)$, $y''(s) = \varphi'(s)\cos\varphi(s) \Longrightarrow$
$\forall\, s \in J$, $\varphi'(s) = \cos\varphi(s)y''(s) - \operatorname{sen}\varphi(s)x''(s) = x'(s)y''(s) - y'(s)x''(s)$.
De esta forma $\{\mathrm{r}'(s), \mathrm{r}''(s)\}$ es un sistema libre y $\varphi'(s) \neq 0$, $R(s)$ es un real bien definido y $R(s) = \dfrac{1}{\varphi'(s)} = \dfrac{s'(t)}{\varphi'(t)}$.
Se observa que con un cambio de parámetro admisible directo (resp. indirecto) R y K se conservan (resp. cambian de signo).
Ejemplo Calcular el radio de curvatura en todo punto del arco del deltoide Γ dado por $x = 2\cos t + \cos 2t$, $y = 2\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t$, $t \in \,]\,0, \frac{2\pi}{3}\,[$.



Se tiene que $x' = -2\operatorname{sen} t(1 + 2\cos t)$, $y' = 2(1 - \cos t)(1 + 2\cos t)$
$x'^2 + y'^2 = 4(\operatorname{sen}^2 t + (1 - \cos t)^2)(1 + 2\cos t)^2) =$
$16\operatorname{sen}^2 \dfrac{t}{2}(1 + 2\cos t)^2$,

$\dfrac{ds}{dt} = 4\operatorname{sen}\dfrac{t}{2}\,(1{+}2\cos t)$, $\tan\varphi = \dfrac{y'}{x'}\,\dfrac{1-\cos t}{\operatorname{sen} t} = -\tan\dfrac{t}{2} = \tan(-\dfrac{t}{2}) \Longrightarrow \varphi = -\dfrac{t}{2}$
$[\,\pi\,]$, $\varphi' = -\frac{1}{2} \Longrightarrow R = \dfrac{s'}{\varphi'} = -8\operatorname{sen}\dfrac{t}{2}(1 + 2\cos t)$.

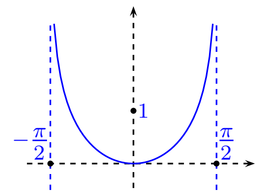
2.4.2. Cálculo del radio de curvatura

Supongamos que Γ está definida por un parametraje regular de clase C^2, $x = x(t)$, $y = y(t)$ entonces $s' = \sqrt{x'^2 + y'^2}$, $x' = s'\cos\varphi$, $y' = s'\operatorname{sen}\varphi \Longrightarrow x'' = s''\cos\varphi - s'\operatorname{sen}\varphi\varphi'$,
$y'' = s''\operatorname{sen}\varphi + s'\cos\varphi\varphi' \Longrightarrow x'y'' - x''y' = s'^2\varphi'$ i.e. $\varphi' = \dfrac{x'y'' - x''y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \Longrightarrow R =$
$\dfrac{s'}{\varphi'} = \dfrac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - x''y}$.

Curva Γ de la forma $y = f(x)$, f de clase C^2, entonces se parametriza Γ por $x = x$, $y = f(x)$. En todo punto donde $f'' \neq 0$, $R = \dfrac{(1 + f'^2(x))^{\frac{3}{2}}}{f''(x)} = \dfrac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$.

Ejemplo Calcular el radio de curvatura en todo punto de la curva $y = -\ln|\cos x|$, $x \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

Se tiene que $y' = \tan x$, $y'' = \dfrac{1}{\cos^2 x} \Longrightarrow R = \dfrac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \cos^2 x(1 + \tan^2 x)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\cos x}$.



Curva tangente en O al eje x

Supongamos que Γ es tangente en O y denotemos R_o el radio de curvatura en O. La curva Γ admite representación paramétrica $x = x(t)$, $y = y(t)$ y el punto O de Γ correspondiente un cierto valor t_o de t. Supongamos que Γ es regular en O, es decir $(x'(t_o), y'(t_o)) \neq (0, 0)$ y como Γ es tangente en O al eje x se tiene $y'(t_o) = 0$, $x'(t_o) = 0$.

En un vecindario de t_o se puede parametrizar localmente Γ de modo que $y = f(x)$, donde f es de clase C^2 en un vecindario de O con $f(0) = f'(0) = 0$.

Supongamos que $f''(0) \neq 0$, entonces $R_o = \dfrac{(1 + f'^2(0))^{\frac{3}{2}}}{f''(0)} = \dfrac{1}{f''(0)}$.

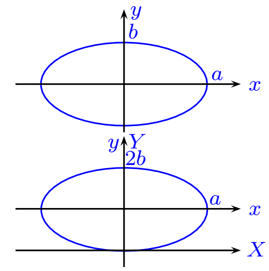
Por otro lado, por el teorema de Taylor-Young en un vecindario de O:

$f(x) = f(0) + xf'(0) + \dfrac{x^2}{2} f''(0) + o(x^2)$, por lo que $\dfrac{x^2}{2f(x)} \longrightarrow \dfrac{1}{f''(0)} = R_o$, cuando $x \to 0$. Así tenemos $R_o = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{2y}$.

Ejemplo Calcular el radio de curvatura en los extremos de una elipse.

Consideremos la elipse Γ de ecuación cartesiana $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $0 < b < a$, de representación paramétrica $x = a\cos t$, $y = b \operatorname{sen} t$, $t \in [\,0, 2\pi\,]$.

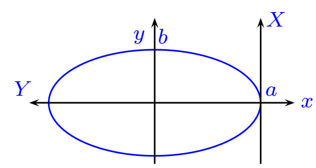
Los extremos corresponden a los puntos $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$. Para calcular el radio de curvatura R de Γ en $(0, -b)$ efectuamos el cambio de sistema de referencia por traslación del origen a $(0, -b)$.



La fórmula de cambio de sistema son $x = X$, $y = X - b$, por lo que la representación paramétrica de Γ en un nuevo sistema $X = a\cos t$, $Y = b(1 + \operatorname{sen} t)$.

Dado que Γ es tangente en $(0, -b)$ al eje X se tiene $R = \lim\limits_{t \to -\frac{\pi}{2}} \dfrac{X^2}{2Y}$. Por el cambio de variable $u = t + \frac{\pi}{2}$, $\dfrac{X^2}{2Y} = \dfrac{a^2\cos^2 t}{2b(1 + \operatorname{sen} t)} = \dfrac{a^2 \operatorname{sen}^2 u}{2b(1 - \cos u)} \sim \dfrac{a^2u^2}{bu^2} = \dfrac{a^2}{b}$, cuando $u \to 0$. Así tenemos que $R = \dfrac{a^2}{b}$.

Para calcular el radio de curvatura de Γ en $(a, 0)$ cambiamos el origen a $(a, 0)$ con el cambio de variable $x = a - Y$, $y = X$, por lo que una representación paramétrica de Γ en este nuevo sistema es $X = b\operatorname{sen} t$, $Y = a(1 - \cos t) \Longrightarrow \dfrac{X^2}{2Y} = \dfrac{b^2\operatorname{sen}^2 t}{2a(1 - \cos t)} \sim \dfrac{b^2}{a}$ i.e. $R = \dfrac{b^2}{a}$.



2.4.3. Cálculo del radio de curvatura en polares

Sea Γ una curva con ecuación polar $\rho = \rho(\theta)$, donde ρ es de clase C^2, entonces: $s' = (\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{1}{2}}$, $\tan V = \dfrac{\rho}{\rho'} \Longrightarrow (1 + \tan^2 V)V' = \dfrac{\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho'^2} \Longrightarrow V' = \dfrac{dV}{d\theta} = \dfrac{\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho^2 + \rho'^2}$.

Así tenemos que $R = \dfrac{ds}{d\varphi} = \dfrac{s'}{1 + V'} = \dfrac{(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}$.

En particular, si Γ pasa por O para un valor θ_o, entonces $R_o = \dfrac{(\rho'^2(\theta_o))^{\frac{3}{2}}}{2\rho'^2(\theta_o)} = \dfrac{|\rho'(\theta_o)|}{2}$.

Ejemplo Calcular el radio de curvatura de la ecuación polar $\rho = a(1 + \cos\theta)$, $a > 0$.

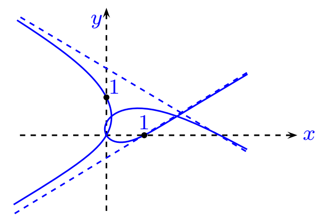
Para $\theta\in[\,-\pi,\pi\,]$, tenemos que $s' = \sqrt{\rho^2+\rho'^2} = a\sqrt{(1+\cos\theta)^2+\operatorname{sen}^2\theta)} = a\sqrt{2(1+\cos\theta)} = 2a\big|\cos\dfrac{\theta}{2}\big|$, $\tan V = \dfrac{\rho}{\rho'} = -\dfrac{1+\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = -\operatorname{ctg}\dfrac{\theta}{2} = \tan\big(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\pi}{2}\big) \Longrightarrow V = \frac{\pi}{2}+\dfrac{\theta}{2} \Longrightarrow$ $V' = \frac{1}{2} \Longrightarrow R = \dfrac{ds}{d\varphi} = \dfrac{4a}{3}\cos\dfrac{\theta}{2}$.

Ejemplo Calcular los radios de curvatura en O de la curva Γ de ecuación polar $\rho = \dfrac{2\cos\theta+1}{2\operatorname{sen}\theta+1}$.

La curva se obtiene haciendo variar θ en $[\,-\pi,\pi\,]$ y el origen O corresponde a dos valores $-\frac{2\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$.

Además $\rho'(\theta) = \dfrac{2(2+\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)}{(2\operatorname{sen}\theta+1)^2}$, por lo que:

$R(-\frac{2\pi}{3}) = \frac{1}{2}|\rho'(-\frac{2\pi}{3})| = \frac{3+\sqrt{3}}{4}$, $R(\frac{2\pi}{3}) = \frac{1}{2}|\rho'(\frac{2\pi}{3})| = \frac{3-\sqrt{3}}{4}$.

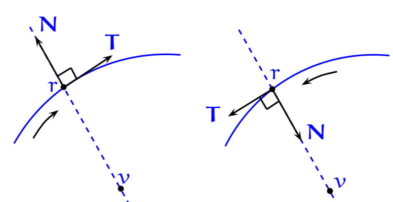


Proposición 2.4.1 Fórmula de Frenet $\dfrac{d\mathbf{T}}{ds} = \dfrac{1}{R}\mathbf{N}$, $\dfrac{d\mathbf{N}}{ds} = -\dfrac{1}{R}\mathbf{T}$.

Prueba Dado que $\mathbf{T} = (\cos\varphi, \operatorname{sen}\varphi) \Longrightarrow \dfrac{d\mathbf{T}}{ds} = (-\operatorname{sen}\varphi, \cos\varphi)\dfrac{d\varphi}{ds} = \dfrac{1}{R}\mathbf{N}$,
$\dfrac{d\mathbf{N}}{ds} = (-\cos\varphi, -\operatorname{sen}\varphi)\dfrac{d\varphi}{ds} = -\dfrac{1}{R}\mathbf{T}$.

2.4.4. Centro de curvatura

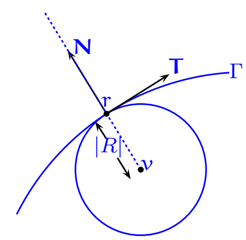
Definición 2.4.2 *Se llama centro de curvatura en* $\mathfrak{r}$ *de* Γ *el punto* $\mathfrak{v}$ *definido por* $\mathfrak{v} = \mathfrak{r} + R\mathbf{N}$. *Cuando un cambio de parametraje admisible se realiza,* R *y* $\mathbf{N}$ *se conserva simultáneamente o cambian de signo y el centro de curvatura se conserva.*



Proposición 2.4.2 *El centro de curvatura* $\mathfrak{v}$ *en* $\mathfrak{r}$*, está situada en la concavidad local en* $\mathfrak{r}$ *de* Γ.

Prueba La curva Γ admite un parametraje normal $f\colon J \longrightarrow \mathbb{R}^2$ por abscisa curvilínea. La concavidad local en $\mathfrak{r}$ de Γ es el semi-plano limitado por la tangente de Γ en $\mathfrak{r}$, contenjendo $\mathrm{r}''(s)$. Pero aquí $\mathrm{r}'(s) = \mathbf{T}$, $\mathrm{r}''(s) = \dfrac{d\mathbf{T}}{ds} = \dfrac{1}{R}\mathbf{N} \Longrightarrow \nu - \mathrm{r}$ y r'' son colineales de mismo signo. Se concluye que r está en este semiplano.

Definición 2.4.3 *Se llama círculo de curvatura en r de Γ, el círculo de centro ν (centro de curvatura en r de Γ) y de radio $|R|$, donde R es el radio de curvatura de Γ en r.*



El círculo de curvatura de Γ en r es tangente a Γ en r, puesto que está centrado sobre la normal en r de Γ.

Ejemplo Determinar el círculo de curvatura en r, correspondiendo a $t = \frac{1}{3}$, al curva Γ de representación paramétrica $x = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4}t^4$, $y = \frac{2}{3}t^3$.

Se tiene que $x' = t - t^3$, $y' = 2t^2$, $s' = \sqrt{t^2(1-t^2)^2 + 4t^4} = \sqrt{t^2(1+t^2)^2} = |t|(1+t^2)$,

$\mathbf{T} = \dfrac{d\mathrm{r}}{ds} = \left(\dfrac{x'}{s'}, \dfrac{y'}{s'}\right) = \left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \dfrac{2t}{1+t^2}\right)$, $\mathbf{N} = \mathrm{rot}\,\left(\mathbf{T}, \frac{\pi}{2}\right) = \left(-\dfrac{2t}{1+t^2}, \dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)$,

$x'' = 1 - 3t^2$, $y'' = 4t$, $x'y'' - x''y' = 2t^2(2 - (1-t^2) - (1-3t^2)) = 2t^2(1+t^2)$,

$R = \dfrac{s'^3}{x'y'' - x'y'} = \frac{1}{2}t(1+t^2)^2$, $\nu = \mathrm{r} + R\mathbf{N} = (X, Y)$, donde

$X = \dfrac{t^2}{2} - \dfrac{t^4}{4} + \dfrac{t}{2}(1+t^2)^2\dfrac{-2t}{1+t^2} = -\frac{1}{2}t^2 - \frac{5}{4}t^4$;

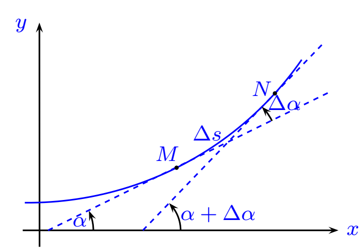
$Y = \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t(1+t^2)^2\dfrac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1}{2}t + \frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^5$.

Cuando $t = \frac{1}{3}$, $x = \frac{17}{234}$, $y = \frac{2}{81}$, $x' = \frac{8}{27}$, $y' = \frac{2}{9}$, $R = \frac{50}{243}$, $X = -\frac{23}{324}$, $y = \frac{46}{243}$.

2.4.5. Resumen

Curvatura de una curva

Se llama curvatura K de una curva en el punto M, al límite de la razón del ángulo que forman las direcciones positivas de las tangentes del arco $\widehat{MN} = \Delta s$, cuando $N \to M$, es decir $K = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \dfrac{d\varphi}{ds}$, donde φ es el ángulo entre la dirección positiva de la tangente en el punto M y el eje x.



Radio de curvatura

Se denomina radio de curvatura R, el inverso del valor absoluto de la curvatura $R = \dfrac{1}{|K|}$.

Las circunferencias son curvas de curvatura constante $\dfrac{1}{a} = K$, donde a es el radio de la circunferencia.

Una línea recta tiene curvatura nula $K = 0$.

Para calcular la curvatura tenemos (módulo el signo):

i) Si la curva está dada por la ecuación explícita $y = f(x)$, $K = \dfrac{y''}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}$.

ii) Si la curva está dada por la ecuación implícita $F(x,y) = 0$, $K = \dfrac{\begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{xy} & F_{yy} & F_y \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix}}{(F_x^2 + F_y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

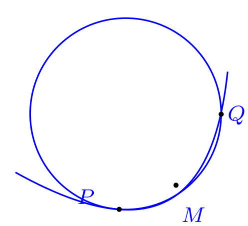
iii) Si la curva está dada en ecuaciones paramétricas $x = x(t), y = y(t), K = \dfrac{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}{(x'^2 + y''^2)^{\frac{3}{2}}}$.

En coordenadas polares, si la curva es $\rho = f(\theta)$, $K = \dfrac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Sea Γ una curva tangente en O al eje x, existe un vecindario de O en el cual Γ puede parametrizarse con ayuda de x y se tiene $K = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2y}{x^2}$.

2.5. Circunferencia osculatriz (Círculo osculador)

Se denomina círculo osculador de una curva en un punto M de la misma, a la posición límite de la circunferencia que pasa por dicho punto M y por otros dos puntos P y Q de la misma curva, cuando $P \longrightarrow M$ y $Q \longrightarrow M$.



El radio del círculo osculador es igual al radio de curvatura y su centro (centro de curvatura) se encuentra en la normal a la curva, trazada en el punto M hacia el lado de su concavidad.

Las coordenadas X y Y del centro de curvatura se calculan con las fórmulas:

Si $y = f(x)$, $X = x - \dfrac{y'(1+y'^2)}{y''}$, $Y = y + \dfrac{1+y'^2}{y''}$.

Si $x = x(t)$, $y = y(t) \Longrightarrow X = x - \dfrac{y'(x'^2+y'^2)}{x'y''-x''y'}$, $Y = y + \dfrac{x'(x'^2+y'^2)}{x'y''-x''y'}$.

En el caso $\rho = f(\theta)$ se usa $x = f(\theta)\cos\theta$, $y = f(\theta)\operatorname{sen}\theta$ en la fórmula anterior.

2.6. Evoluta de una curva del plano

Definición 2.6.1 *Se llama evoluta de una curva Γ del plano, el conjunto de los centro de curvatura $\mathfrak{v}$ de Γ en $\mathfrak{r}$, cuando $\mathfrak{r}$ recorre Γ.*

Ejemplo Determinar la evoluta de la elipse Γ con representación paramétrica $x = a\cos t$, $y = b\operatorname{sen} t$, $a, b > 0$, $t \in \mathbb{R}$.

Se tiene que $x' = -a\operatorname{sen} t$, $y' = b\cos t$, $s' = \sqrt{a^2\operatorname{sen}^2 t + b^2\cos^2 t}$, $\tan\varphi = \dfrac{y'}{x'} = \dfrac{b}{a} = \cot t$, $\dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{ab}{a^2\operatorname{sen}^2 t + b^2\cos^2 t}$, $R = \dfrac{ds}{d\varphi} = \dfrac{(a^2\operatorname{sen}^2 t + b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}{ab}$,

$\mathbf{T} = \dfrac{d\mathfrak{r}}{ds} = \big(\dfrac{x'}{s'}, \dfrac{y'}{s'}\big) = (a^2\operatorname{sen}^2 t + b^2\cos^2 t)^{-\frac{1}{2}}(-a\operatorname{sen} t, b\cos t)$,

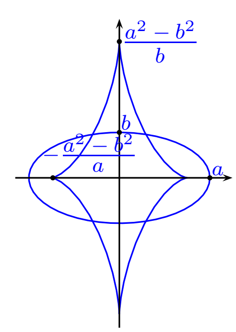
$\mathbf{N} = (a^2\operatorname{sen}^2 t + b^2\operatorname{sen}^2 t)^{\frac{1}{2}}(-b\cos t, -a\operatorname{sen} t)$, $\mathfrak{v} = \mathfrak{r} + R\mathbf{N} = (X, Y)$, donde

$X = a\cos t + \dfrac{(a^2\operatorname{sen}^2 t + b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}{ab}\,\dfrac{-b\cos t}{(a^2\operatorname{sen}^2 t + b^2\cos^2 t)^{\frac{1}{2}}} =$

$a\cos t - \cos t(a\operatorname{sen}^2 t + \dfrac{b^2}{a}\cos^2 t) = \dfrac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t$,

$Y = b\operatorname{sen} t + \dfrac{(a^2\operatorname{sen}^2 t + b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}{ab}\,\dfrac{-a\operatorname{sen} t}{(a^2\operatorname{sen}^2 t + b^2\cos^2 t)^{\frac{1}{2}}} =$

$b\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} t\big(\dfrac{a^2}{b}\operatorname{sen}^2 t + b\cos^2 t\big) = -\dfrac{a^2-b^2}{b}\operatorname{sen}^3 t$.

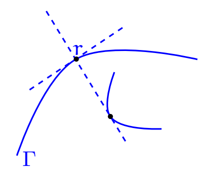


La evoluta $\mathfrak{v}$ de Γ admite representación paramétrica

$X = \dfrac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t$, $Y = -\dfrac{a^2-b^2}{b}\operatorname{sen}^3 t$.

Teorema 2.6.1 *La evoluta de una curva Γ es también la envolvente*[1] *a las normales de Γ.*

Demostración Parametricemos Γ por la abscisa curvilínea $\mathrm{r}\colon J \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathrm{r}(s) = (x(s), y(s))$ y sea $\mathbf{N}(s)$ la normal a Γ en $\mathrm{r}(s)$.



Una ecuación cartesiana de $\mathbf{N}(s)$ es (con coordenada denotadas X, Y para que no se confundan con x, y del punto $\mathrm{r}(s)$ de Γ):

$x'(s)(X-x(s))+y'(s)(Y-y(s)) = 0 \Longleftrightarrow x'(s)X+y'(s)Y = x'(s)x(s)+y'(s)-y(s).$

Derivando tenemos $x''(s)X + y''(s)Y = x''(s)x(s) + y''(s)y(s) + x'^2(s) + y'^2(s)$.

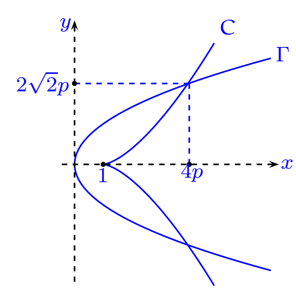
Si $\forall\, s \in J$, $x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s) \neq 0$ se tiene que:

$$X = x - \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}\,, \quad Y = y + \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}\,x'.$$

Dado que $R = \dfrac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - x''y'}$, $\mathbf{N} = \dfrac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}(-y', x')$ obtenemos $(X, Y) = \mathrm{r} + R\mathbf{N}$, o sea la envolvente de las normales a Γ es la evoluta de Γ.

Ejemplo Determinar la evoluta de la parábola.

La parábola de ecuación cartesiana $y^2 = 2px$ admite por representación paramétrica $x = \dfrac{t^2}{2p}$, $y = t$. Un vector tangente en $\mathrm{r}(t)$ a Γ es $\mathrm{r}'(t) = (\frac{t}{p}, 1)$, por lo que la ecuación de la normal $\mathbf{N}(t)$ en $\mathrm{r}(t)$ a Γ es $\dfrac{t}{p}\left(x - \dfrac{t^2}{2p}\right) + (y - t) = 0 \Longrightarrow \dfrac{t}{p}\,x + y = \dfrac{t^3}{2p^2} + ty$ y derivando nuevamente $\dfrac{1}{p}\,x = \dfrac{3t^2}{2p^2} + 1 \Longrightarrow x = \dfrac{3t^2}{2p} + p$, $y = -\dfrac{t^3}{p^2} \Longrightarrow py^2 = \frac{8}{27}(x-p)^3$.



2.6.1. Resumen: La evoluta de una curva

La evoluta de una curva es el lugar geométrico de los centros de curvatura de dicha curva.

[1] Ver sección 2.11, página 96

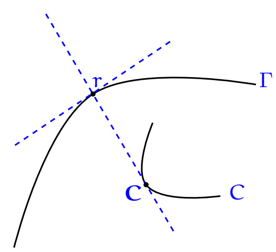
Si en las fórmulas para la determinación de las coordenadas del centro de curvatura se consideran X y Y como coordenadas de los puntos de la evoluta, estas fórmulas nos darán las ecuaciones paramétricas de dicha evoluta con parámetro x o y (o t si la propia curva viene dada en forma paramétrica).

Ejemplo Determinar la ecuación de la evoluta de la parábola $y = x^2$.

Se tiene que $X = x - \dfrac{2x(1+4x^2)}{2} = -4x^3$, $Y = x^2 + \dfrac{1+4x^2}{2} = \frac{1}{2} + 3x^2$. Eliminando el parámetro x tenemos que $Y = \dfrac{1}{2} + 3\big(\dfrac{X}{4}\big)^{\frac{2}{3}}$.

2.7. Evolvente de una curva plana

Definición 2.7.1 *Sean Γ y C dos curvas de clase C^2 del plano, se dice que Γ es una evolvente de C si y sólo si C es la evoluta de Γ.*



Sea C una curva de clase C^2 del plano, sea s una abscisa curvilínea sobre C, $\mathbf{C}(s)$ el punto de C, $\mathbf{T}(s) = \dfrac{d\mathbf{C}}{ds}$ el vector unitario tangente en $\mathbf{C}(s)$ de C.

Sea Γ una evolvente de C (si existe) que admite una representación paramétrica $s \in J \longmapsto \mathtt{r}(s)$ de clase C^2 y $\forall\, s \in J$, existe $\lambda(s) \in \mathbb{R}$ tal que $\mathtt{r}(s) = \mathbf{C}(s) + \lambda(s)\mathbf{T}(s)$.

Dado que $\mathtt{r}, \mathbf{C}, \mathbf{T}$ son de clase C^1 y que $\mathbf{T}$ es unitario, λ es de clase C^1 sobre J, se tiene $\forall\, s \in J$, $\mathtt{r}'(s) = \mathbf{C}'(s) + \lambda'(s)\mathbf{T}(s) + \lambda(s)\dfrac{d\mathbf{T}}{ds} = (1+\lambda'(s))\mathbf{T}(s) + \dfrac{\lambda(s)}{R(s)}\mathbf{N}(s)$, donde $R(s)$ es el radio de curvatura en $\mathbf{C}(s)$ de C y $\mathbf{N}(s) = \mathrm{rot}\,(\mathbf{T}(s), \frac{\pi}{2})$.

Por otro lado, $\forall\, s \in J$, $\mathtt{r}'(s) \perp \mathbf{T}(s)$ y se tiene $\lambda'(s) + 1 = 0 \Longrightarrow \forall\, s \in J$, $\lambda(s) = -s + s_o \Longrightarrow \mathtt{r}(s) = \mathbf{C}(s) + (s_o - s)\mathbf{T}(s)$.

Inversamente, sea $s_o \in \mathbb{R}$ y Γ la curva con representación parametrica $\mathtt{r}(s) = \mathbf{C}(s) + (s_o - s)\mathbf{T}(s)$. Claramente, si Γ es de clase C^1 y si C es de clase C^3, entonces Γ es de clase C^2 y se tiene $\forall\, s \in J$, $\mathtt{r}'(s) = \mathbf{C}(s) - \mathbf{T}(s) + (s_o - s)\dfrac{d\mathbf{T}}{ds}(s) = \dfrac{s_o - s}{R(s)}\mathbf{N}(s)$, lo que demuestra que la normal en $\mathtt{r}(s)$ a Γ está dirigida por $\mathbf{T}(s)$.

Así, la normal en $\mathtt{r}(s)$ a Γ es la tangente en $\mathbf{C}(s)$ a C y C es la envolvente de la normal a Γ. Finalmente Γ es una evolvente de C.

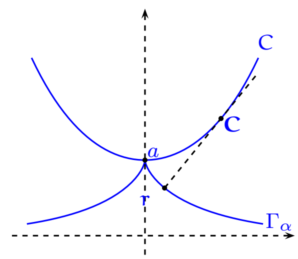
Teorema 2.7.1 *Sea C una curva de clase C^3 del plano, sea s una abscisa curvilínea sobre*

C, *$\mathbf{C}(s)$ en punto de* C, $\mathbf{T}(s) = \dfrac{d\mathbf{C}}{ds}(s)$ *el vector tangente unitario en* $\mathbf{C}(s)$ *a* C, *entonces las evolventes de* C *son las curvas definidas por los parametrajes* $\mathtt{r}(s) + (s_o - s)\mathbf{T}(s)$, $s_o \in \mathbb{R}$.

Ejemplo Determinar las evolventes de la curva $y = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$, $a > 0$.

Se tiene $s' = \sqrt{x'^2 + y'^2} = (1 + \mathrm{sh}^2\,\frac{x}{a})^{\frac{1}{2}} = \mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$:

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{C}}{ds} = \frac{d\mathbf{C}}{dx}\cdot\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}}\left(1, \mathrm{sh}\,\frac{x}{a}\right).$$

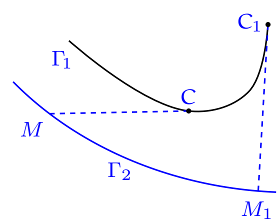


Escogiendo el origen de las abscisas curvilíneas sobre C, el punto $(0, a)$ tenemos que $s = a\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{a}$.

Las evolventes de C son las curvas Γ_λ, $(\lambda\in\mathbb{R})$, definidas por las representaciones paramétricas:
$X = x+(\lambda-s)\dfrac{1}{\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}} = x(\lambda-a\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{a})\dfrac{1}{\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}}$, $Y = y+(\lambda-s)\,\mathrm{th}\,\frac{x}{a} = y+(\lambda-a\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{a})\,\mathrm{th}\,\frac{x}{a}$.
En particular, Γ_o tiene representación paramétrica $X = x - a\,\mathrm{th}\,\frac{x}{a}$, $Y = \dfrac{a}{\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}}$.

2.7.1. Resumen: Evolvente de la curva

Se denomina evolvente de una curva, la curva tal que con relación a ella la curva dada es la evoluta.
La normal MA a la evolvente C es tangente a la evoluta Γ: la longitud del arco $\overset{\frown}{AB}$ de la evoluta es igual al incremento correspondiente del radio de curvatura $\overset{\frown}{AB} = |M_1B - MA|$, por cuya razón, la evolvente C recibe también el nombre de desarrollo de la curva Γ, que se obtiene desarrollando un hilo tenso enrollado a la evoluta Γ.



A cada evoluta le corresponde una infinidad de evolventes, que responden a las diversas longitudes iniciales que puede tener el hilo.

2.8. Vértices de una curva

Se denomina vértice de una curva al punto de la misma en que la curvatura tiene máximo o mínimo. Para determinar los vértices de una curva se forma la expresión de la curvatura K y se determinan sus puntos extremos.

En lugar de la curvatura K se puede tomar el radio de curvatura $R = \dfrac{1}{|K|}$ y se busca su punto extremo, si es que en ese caso es más sencillo el cálculo.

Ejemplo Calcular el vértice de la catenaria $y = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$, $a > 0$.

Dado que $y' = \mathrm{sh}\,\frac{x}{a}$, $y'' = \frac{1}{a}\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$, tenemos que $K = \dfrac{1}{a\,\mathrm{ch}^2\,\frac{x}{a}}$ y en consecuencia $R = a\,\mathrm{ch}^2\,\frac{x}{a}$. De esta forma $R' = \mathrm{sh}\,\frac{2x}{a} = 0 \Longrightarrow x = 0$. Además, $R''(0) = \frac{2}{a}\,\mathrm{ch}\,\frac{2x}{a}\Big|_{x=0} = \frac{2}{a} > 0$ y $x = 0$ es un mínimo del radio de curvatura o el máximo de la curvatura de la catenaria.

El vértice de la catenaria $y = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$ es el punto $(0, a)$.

2.9. Puntos singulares de las curvas planas

Definición 2.9.1 *Sea f de clase C^1, un punto (x_o, y_o) de una curva plana $f(x, y) = 0$ se llama punto singular, si sus coordenadas satisfacen simultáneamente las ecuaciones $f(x_o, y_o) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o) = 0$.*

2.9.1. Clasificación de puntos singulares

Supongamos que f es de clase C^2, que en el punto singular (x_o, y_o), las derivadas de segundo orden $A = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_o, y_o)$, $B = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_o, y_o)$, $C = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_o, y_o)$ no son todas iguales a cero y sea $\Delta = AC - B^2$, entonces:

a) Si $\Delta > 0$, (x_o, y_o) es un punto aislado (figura 1).

b) Si $\Delta < 0$, (x_o, y_o) es un punto crunodal (punto doble) (figura 2).

c) Si $\Delta = 0$, (x_o, y_o) puede ser un punto de retroceso de primera especie (figura 3), o de segunda especie (figura 4), o un punto aislado, o un punto doble con tangentes coincidentes o tacnodo (figura 5).

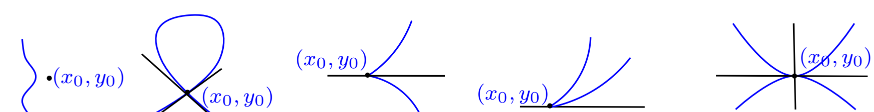


fig. 1 fig. 2 fig. 3 fig. 4 fig. 5

Dado que f es de clase C^2 tenemos que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y' + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y')^2 + \dfrac{\partial f}{\partial y} y'' = 0$ y como $f_y = 0$, se establece es la ecuación de grado 2:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,(y')^2 = 0,$$

por lo que ecuación tiene dos soluciones y' reales y distintas (punto doble) si $\Delta < 0$.

Si $\Delta > 0$ no hay solución en $\mathbb{R}$ de la ecuación, es decir no tiene tangentes en (x_o, y_o), con $f(x_o, y_o) = 0$ y es un punto aislado.

Si $\Delta = 0$ un estudio completo presenta serias dificultades, dependiendo de las condiciones sobre $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$. Observemos que en estas condiciones puede suceder que no hay solución (punto asilado), o que haya una tangente (la única solución), por lo que el punto (x_o, y_o) puede ser un punto de retroceso o un tacnodo.

En el caso $\Delta = 0$, un estudio de la función particular nos dirá el tipo de punto singular que se está tratando.

Ejemplo Demostrar que la curva $y^2 = ax^2 + x^3$ tiene un punto crunodal si $a > 0$, un punto aislado si $a < 0$ y un punto de retroceso de primera especie si $a = 0$.

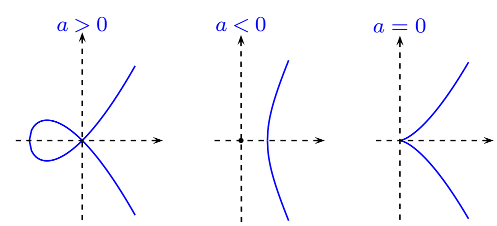
Sea $f(x, y) = ax^2 + x^3 - y^2$, las derivadas parciales igualadas a cero son $f_x = 2ax + 3x^2 = 0$, $f_y = -2y = 0$ i.e. los puntos críticos son $(0, 0)$, $(-\frac{3}{2}a, 0)$, pero el punto $(-\frac{3}{2}a, 0)$ no está en la curva $f(x, y) = 0$. Así solamente existe un punto singular $(0, 0)$.

Las derivadas de segundo orden $f_{xx}(x, y) = 2a + 6x$, $f_{xx}(0, 0) = 2a$, $f_{yy}(x, y) = -2$, $f_{yy}(0, 0) = -2$, $f_{xy}(x, y) = 0$, $f_{xy}(0, 0) = 0$. De esta manera tenemos que $\Delta = AC - B^2 = -4a$. Por consiguiente:

a) Si $a > 0$, $\Delta < 0$ y $(0, 0)$ es un punto crunodal.

b) Si $a < 0$, $\Delta > 0$ y $(0, 0)$ es un punto aislado.

c) Si $a = 0$, $\Delta = 0$. La ecuación de la curva es $x^3 = y^2$ i.e. $y = \pm\sqrt{x^3}$, con $a \geq 0$.



La curva es simétrica respecto al eje x, que es tangente a la curva. El punto $(0, 0)$ es un punto de retroceso de primera especie.

2.10. Envolvente de una familia de rectas del plano

Sea $(D_i)_{i \in I}$ una familia de rectas del plano, indexada por un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, I no vacío ni reducido a un punto. Se supone que existen aplicaciones a, b, c: $I \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 sobre I tales que $\forall\, t \in I$, D_t admite ecuación $a(t)x + b(t)y + c(t) = 0$.

1) Supongamos que existe un arco parametrado Γ, $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in I$ tal que x, y son

de clase C^1 sobre I y tal que $\forall\, t \in I$, la tangente $\mathrm{r}(t) = (x(t), y(t))$ a Γ sea la recta D_t.

Se tiene que $\forall\, t \in I$, $a(t)x(t) + b(t)y(t) + c(t) = 0$, $a(t)x'(t) + b(t)y'(t) = 0$.

Derivando la primera ecuación y restando la segunda se tiene:

$\forall t \in I$, $a(t)x(t) + b(t)y(t) + c(t) = 0$, $a'(t)x(t) + b'(t)y(t) + c'(t) = 0$.

Supongamos que $\forall\, t \in I$, $\begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ a'(t) & b'(t) \end{vmatrix} \neq 0$, entonces el sistema se resuelve con ayuda de la regla de Cramer.

2) Recíprocamente, supongamos que $\forall\, t \in I$, $\begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ a'(t) & b'(t) \end{vmatrix} \neq 0$ y consideremos el arco parametrado Γ representado por $x = x(t)$, $y = y(t)$, donde $(x(t), y(t))$ es la solución en $\mathbb{R}^2$ del sistema de ecuaciones, $\begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ a'(t) & b'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c(t) \\ c'(t) \end{pmatrix} = 0$, entonces la fórmula de Cramer nos da:

$$x(t) = \frac{\begin{vmatrix} -c(t) & b(t) \\ -c'(t) & b'(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ a'(t) & b'(t) \end{vmatrix}}, \qquad y(t) = \frac{\begin{vmatrix} a(t) & -c(t) \\ a'(t) & -c'(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ a'(t) & b'(t) \end{vmatrix}}.$$

Supongamos que a, b, c son de clase C^2, entonces x, y son de clase C^1. Derivando y restando que $\forall\, t \in I$, $a(t)x'(t) + b(t)y'(t) = 0$. Así, si $(x'(t), y'(t)) \neq (0, 0)$, la tangente en $\mathrm{r}(t)$ a Γ tiene ecuación $a(t)x + b(t)y + c(t) = 0$ i.e. es D_t.

En resumen tenemos una definición y un teorema.

Definición 2.10.1 *Sea $(D_t)_{t\in I}$ una familia de rectas en el plano de ecuación $a(t)x + b(t)y + c(t) = 0$, donde a, b, c: $I \longrightarrow \mathbb{R}$ son de clase C^1 y $\forall\, t \in I$, $\begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ a'(t) & b'(t) \end{vmatrix} \neq 0$.*

– Se llama envolvente de $(D_t)_{t\in I}$ toda curva Γ del plano tal que cada D_t es tangente a Γ.

– Γ admite en cada punto una tangente y ésta es una recta de la familia $(D_t)_{t\in I}$.

Teorema 2.10.1 *Sea $(D_t)_{t\in I}$ una familia de rectas del plano de ecuación $a(t)x + b(t)y + c(t) = 0$, donde a, b, c: $I \longrightarrow \mathbb{R}$ son de clase C^2 y $\forall\, t \in I$, $\begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ a'(t) & b'(t) \end{vmatrix} \neq 0$, entonces $(D_t)_{t\in I}$*

admite una envolvente Γ *y* Γ *es la curva parametrizada* $x = x(t)$*,* $y = y(t)$*, donde* $\forall\, t \in I$*,* $(x(t), y(t))$ *es la solución del sistema de ecuaciones de incógnitas* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$*:*

$$\begin{aligned} a(t)x + b(t)y + c(t) &= 0 \\ a'(t)x + b'(t)y + c'(t) &= 0. \end{aligned}$$

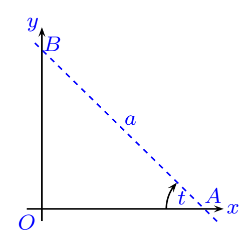
Se supone que $\forall\, t \in I$*, el punto* $(x'(t), y'(t)) \neq (0, 0)$.

Para cada $t \in I$*, el punto* $(x(t), y(t))$ *solución del sistema de ecuaciones presentes se llama el punto característico de* D_t *(o de* Γ*).*

La recta de ecuación $a'(t)x+b'(t)y+c'(t) = 0$ *a menudo denotado* D_t' *se llama recta derivada de* D_t.

Ejemplos

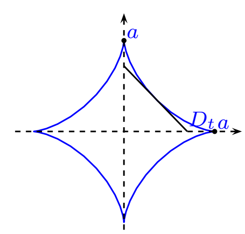
1. Determinar la envolvente del segmento $\bar{AB}$, $|\bar{AB}| = a > 0$, fijo. Sean $A = (a\cos t, 0)$, $B = (0, a \operatorname{sen} t)$, entonces la recta $\overleftrightarrow{AB}$ tiene ecuación, (denotada D_t) $x \operatorname{sen} t + y \cos t = a \cos t \operatorname{sen} t$. Derivando se obtenemos $x \cos t - y \operatorname{sen} t = a(\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t)$, por lo que resolviendo el sistema tenemos:



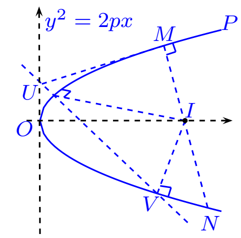
$$\begin{aligned} x &= a\cos t \operatorname{sen}^2 t + a\cos t(\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t) = a\cos^3 t \\ y &= a\cos^2 t \operatorname{sen} t - a \operatorname{sen} t(\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t) = a \operatorname{sen}^3 t. \end{aligned}$$

   Así la envolvente Γ de $\bar{AB}$ es el astroide de representación paramétrica $x = a\cos^3 t$, $y = a \operatorname{sen}^3 t$.

   El punto característico de D_t de coordenadas $(a\cos^3 t, a \operatorname{sen}^3 t)$ es el punto en el cual D_t es tangente a Γ.



2. Sea P la parábola de ecuación $y^2 = 2px$, ($p > 0$ fijo). Un punto M recorre P, la normal en M a P corta la parábola P en un punto N. Del punto medio I de MN se sacan las normales a P (distintas de M) que cortan P en dos puntos U, V. Determinar la envolvente de UV.

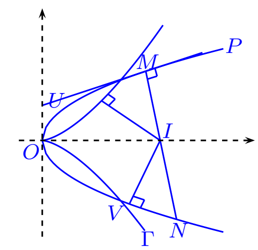


Paramétricamente $\mathrm{r} = M = \big(\frac{t^2}{2p}, t\big)$, $t \in \mathbb{R}$; un vector tangente en M a P está dado por $\mathrm{r}'(t) = \big(\frac{t}{p}, 1\big)$, o bien por (t, p). Así la ecuación normal N_t en M a P es $t\big(x - \dfrac{t^2}{2p}\big) + p(y - t) = 0$.
Estudiemos la intersección de la recta N_t con P, o sea:

$$(x,y)\in N_t \cap P \iff \begin{cases} y^2 = 2px \\ t(x - \dfrac{t^2}{2p}) + p(y-t) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{y^2}{2p} \\ (y-t)(\dfrac{t}{2p}(y+t) + p) = 0, \end{cases}$$

de donde tenemos las coordenadas de N: $y_N = -\dfrac{2p^2}{t} - t$, $x_N = \dfrac{y_N^2}{2p} = \dfrac{2p^3}{t^2} + 2p + \dfrac{t^2}{2p}$ y las coordenadas del punto medio MN: $x_I = \frac{1}{2}(x_M + x_N) = \dfrac{p^3}{t^2} + p + \dfrac{t^2}{2p}$, $y_I = \frac{1}{2}(y_M + y_N) = -\dfrac{p^2}{t}$.
Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y sea $w = \big(\frac{\lambda^2}{2p}, \lambda\big)$ un punto de P, una ecuación de la normal N_λ en W a P es $\lambda\Big(x - \dfrac{\lambda^2}{2p}\Big) + p(y - \lambda) = 0$, por lo que $I \in N_\lambda \iff \lambda\Big(\dfrac{p^3}{t^2} + p + \dfrac{t^2}{2p} - \dfrac{\lambda^2}{2p}\Big) + p\Big(-\dfrac{p^2}{t} - \lambda\Big) = 0 \iff \dfrac{p^3}{t^2}(\lambda - t) + \dfrac{\lambda}{28}(t^2 - \lambda^2) = 0 \iff -2p^4 + \lambda t^2(t + \lambda) = 0$, si $t \neq \lambda$.
Esto demuestra que las coordenadas u, v de los puntos U, V son las soluciones de la ecuación de segundo grado $t^2\lambda^2 + t^3\lambda - 2p^4 = 0$, de incógnita $\lambda \in \mathbb{R}$. El discriminante $\Delta = t^6 + 8p^4t^2 \geqslant 0$ y se tiene $u + v = -t$, $uv = -\dfrac{2p^4}{t^2}$.
Una ecuación de la recta U, V es (pues $u \neq v$):
$\begin{vmatrix} x - \dfrac{u^2}{2p} & \dfrac{r^2}{2p} - \dfrac{v^2}{2p} \\ y - v & v - u \end{vmatrix} = 0 \iff x - \dfrac{u^2}{2p} - \dfrac{u+v}{2p}(y - u) = 0 \iff 2px - (u+v)y + uv = 0 \iff 2px + ty - \dfrac{2p^4}{t^2} = 0.$
Se obtiene una representación paramétrica de la envolvente Γ de UV resolviendo el sistema:

$$2py + ty - \frac{2p^4}{t^2} = 0 \qquad D_t$$
$$y + \frac{4p^4}{t^3} = 0 \qquad D'_t,$$



por lo que la curva Γ es $x = \frac{1}{2p}\left(\frac{2p^4}{t^2} + \frac{4p^2}{t^2}\right) = \frac{3p^3}{t^2}$, $y = -\frac{4p^4}{t^3}$. Se obtiene una ecuación cartesiana de Γ eliminando t, o sea $27py^2 = 16x^3$.

2.11. Envolvente

Se denomina envolvente de una familia de curvas planas, la curva (o conjunto de curvas) tangentes a todas las curvas de dicha familia.

2.11.1. Ecuación de la envolvente

Si una familia de curvas dependientes de un parámetro variable α, $f(x, y, \alpha) = 0$ tiene envolvente, las ecuaciones paramétricas de esta se determinan por medio del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} f(x, y, \alpha) = 0 \\ f_\alpha(x, y, \alpha) = 0. \end{cases}$$

Eliminando el parámetro α del sistema, obtenemos una ecuación de la forma $D(x, y) = 0$. Es importante destacar que la curva obtenida de esta manera, llamada curva discriminante, además de la envolvente, si esta existe, puede contener lugares geométricos de puntos singulares de la familia dada, que no forman parte de la envolvente.

2.11.2. Derivación formal de las ecuaciones

Consideremos la familia de curvas $f(x, y, \alpha) = 0$ y supongamos que esta familia tiene una envolvente, cuya ecuación se escribe de la forma $y = \varphi(x)$, que suponemos derivable. Sea (x, y) un punto de la envolvente, i.e. este punto pertenece a una cierta curva de la familia $f(x, y, \alpha) = 0$, entonces a esta curva le corresponde un cierto valor α de modo que $\alpha = \alpha(x, y)$, por lo que se tiene $f(x, y, \alpha(x, y)) = 0$.

Se supone que $\alpha(x, y)$ es derivable, no constante en un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$.

Si consideramos el coeficiente angular de la tangente a la envolvente en (x, y), podemos derivar con respecto a x, considerando y en función de x, de modo que tenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x}+[\,\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial y}\,]\,y'=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'+\frac{\partial f}{\partial \alpha}(\frac{\partial \alpha}{\partial x}+\frac{\partial \alpha}{\partial y}y')=0$$

y el coeficiente angular de la tangente a la curva de la familia en el punto (x, y) se deduce de la ecuación $\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial y}y'=0$, pues en la curva dada α es constante.

Suponiendo que $\dfrac{\partial f}{\partial y}\neq 0$ (en caso contrario tomamos x como función de y), el coeficiente angular k de la envolvente es igual al de la curva de la familia, con lo cual tenemos: $\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}\,[\,\dfrac{\partial \alpha}{\partial x}+\dfrac{\partial \alpha}{\partial y}y'\,]=0$.

Por otro lado, $\alpha(x, y)$ no es constante en la envolvente, por lo que $\dfrac{\partial \alpha}{\partial x}+\dfrac{\partial \alpha}{\partial y}y'\neq 0$ y se tiene que $\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}(x, y, \alpha)=0$. De este modo, para determinar la envolvente se debe eliminar α de las ecuaciones:

$$\begin{cases} f(x, y, \alpha)=0 \\ f_\alpha(x, y, \alpha)=0. \end{cases} \tag{1}$$

Inversamente, si eliminando α en estas ecuaciones obtenemos $y=\varphi(x)$, donde φ es una función derivable y no constante sobre la curva, entonces $y=\varphi(x)$ es la ecuación de la envolvente.

Observemos que si una función $y=\varphi(x)$ es la ecuación del lugar geométrico de los puntos singulares de la familia $f(x, y, \alpha)=0$, es decir los puntos en que $f_x=0$, $f_y=0$, entonces las coordenadas de estos puntos también satisfacen (1).

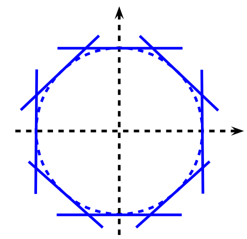
En efecto, las coordenadas de los puntos singulares se pueden expresar en función del parámetro α: $x=\beta(\alpha)$, $y=\gamma(\alpha)$, por lo que se tiene $f(\beta(\alpha), \gamma(\alpha), \alpha)=0$.

Derivando respecto a α se tiene $f_x\dfrac{\partial \beta}{\partial \alpha}+f_y\dfrac{\partial \gamma}{\partial \alpha}+f_\alpha=0$, pero como en los puntos singulares $f_x=f_y=0$, entonces $f_\alpha=0$, es decir que los puntos singulares también satisfacen (1).

Ejemplo Determinar la envolvente de la familia de rectas $x\cos\alpha+y\,\mathrm{sen}\,\alpha-p=0$, donde p es un constante, $p>0$.

La familia de rectas dependen del parámetro α, entonces tenemos el sistema:

$$x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha - p = 0 \qquad -x\operatorname{sen}\alpha + y\cos\alpha = 0.$$



Resolviendo el sistema tenemos $y = \operatorname{sen}\alpha \dfrac{x}{\cos\alpha} \Longrightarrow x\cos\alpha + \dfrac{x\operatorname{sen} x}{\cos x}\operatorname{sen}\alpha = p \Longrightarrow \dfrac{x(\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha)}{\cos\alpha} = p \Longrightarrow x = p\cos\alpha$.

Similarmente se tiene que $y = p\operatorname{sen}\alpha$, o bien $x^2 + y^2 = p^2$.

2.12. Ejercicios

2.12.1. Longitud de arco, curvatura, evoluta

1. Determinar la diferencial del arco, el coseno y el seno del ángulo que forma la tangente, con la dirección positiva del eje x, de cada una de las siguientes curvas:

   a) $x^2 + y^2 = a^2$

   b) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$

   c) $y^2 = 2px$

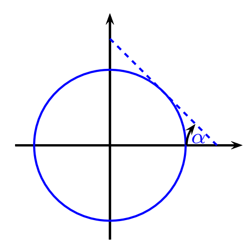
   d) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

   e) $y = a \operatorname{ch} \dfrac{x}{a}$

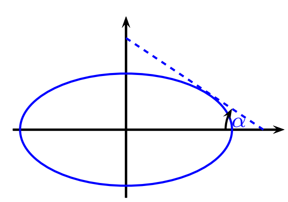
   f) $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$

   g) $x = a\cos^3 t$, $y = a\operatorname{sen}^3 t$.

   Solución

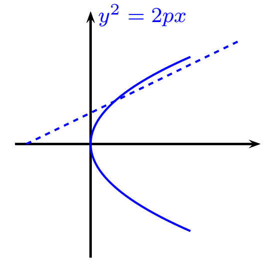
   

   a) $ds = \dfrac{\sqrt{(2x)^2 + (2y^2)}}{2y}dx = \dfrac{a}{y}dx = -\dfrac{a}{x}dy$; además $\cos\alpha = \dfrac{dx}{ds} = \dfrac{y}{a}$, $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{dy}{ds} = -\dfrac{x}{a}$.

   b) $ds = \dfrac{\sqrt{\left(\frac{2x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{2y}{b^2}\right)^2}}{\frac{2y}{b^2}}dx = \dfrac{\sqrt{x^2b^4 + y^2a^4}}{ya^2}dx = \dfrac{\sqrt{x^2b^4 + b^2a^4 - a^2b^2x^2}}{ab\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \dfrac{\sqrt{a^4 - c^2x^2}}{a\sqrt{a^2 - x^2}}dx = -\dfrac{\sqrt{b^4 + c^2y^2}}{b\sqrt{b^2 - y^2}}dy$, con $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, si $a > b$.

Por otro lado, $\cos\alpha = \dfrac{dx}{ds} = \dfrac{a\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^4-c^2x^2}}$, $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{dy}{ds} = \dfrac{-bx}{\sqrt{a^4-c^2x^2}}$.



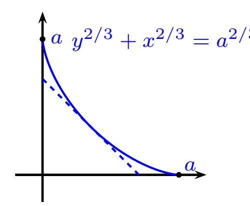
c) En este caso tenemos $\phi(y) = x = \dfrac{1}{2p}y^2$, $\phi'(y) = \dfrac{1}{p}y$,

$ds = \sqrt{1+\dfrac{1}{p^2}y^2}dy = \dfrac{1}{p}\sqrt{p^2+y^2}dy.$

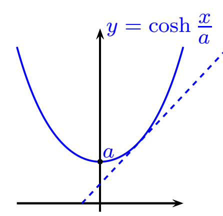
$y = \sqrt{2px}$, $y' = \sqrt{\dfrac{p}{2x}}$, $ds = \sqrt{\dfrac{2x+p}{2x}}dx.$

Además, $\cos\alpha = \dfrac{dx}{ds} = \sqrt{\dfrac{2x}{2x+p}}$, $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{dy}{ds} = \dfrac{p}{\sqrt{p^2+y^2}} = \dfrac{p}{\sqrt{p^2+2px}}$.

d) $ds = \dfrac{\sqrt{x^{-\frac{2}{3}}+y^{-\frac{2}{3}}}}{y^{-\frac{1}{3}}}dx = \sqrt{\dfrac{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}}}y^{\frac{1}{3}}dx = \dfrac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}dx =$ $-\dfrac{a^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{1}{3}}}dy$;



$\cos\alpha = \dfrac{dx}{ds} = \sqrt[3]{\dfrac{x}{a}}$, $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{dy}{ds} = -\sqrt[3]{\dfrac{y}{a}} = -\sqrt[2]{\dfrac{a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}}}$.



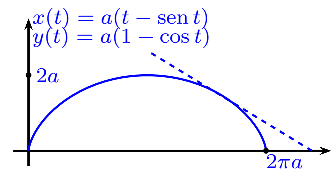
e) Tomando $y - a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a} = 0$ tenemos $ds = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2\dfrac{x}{a}}dx =$ $\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}dx$, $ds = \dfrac{\operatorname{ch}\frac{x}{a}}{\operatorname{sh}\frac{x}{a}}dy = \coth\dfrac{x}{a}dy$, por lo que $\cos\alpha = \dfrac{dx}{ds} =$ $\operatorname{sech}\dfrac{x}{a}$, $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{dy}{ds} = \tanh\dfrac{x}{a}$.

f) $ds = \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2 \operatorname{sen}^2 t}dt = a\sqrt{2-2\cos t}dt =$

$a\sqrt{4\operatorname{sen}^2 \frac{t}{2}}dt = 2a \operatorname{sen} \frac{t}{2}\, dt,$

$\cos\alpha = \dfrac{dx}{ds} = \dfrac{a(1-\cos t)}{2a|\operatorname{sen}\frac{t}{2}|} = \dfrac{\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}}{\operatorname{sen}\frac{t}{2}} = \operatorname{sen}\dfrac{t}{2},$

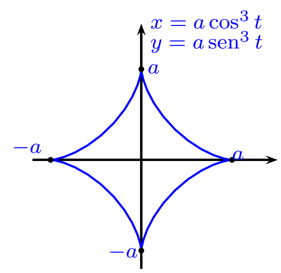
$\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{a\operatorname{sen} t}{2a\operatorname{sen}\frac{t}{2}} = \cos\dfrac{t}{2}.$



g) $ds = \sqrt{(-3a\cos^2 t \operatorname{sen} t)^2 + (3a\operatorname{sen}^2 t\cos t)^2}dt =$
$3a\operatorname{sen} t\cos t dt,$

$\cos\alpha = \dfrac{dx}{ds} = \dfrac{-3a\cos^2 t\operatorname{sen} t}{3a\operatorname{sen} t\cos t} = -\cos t,$

$\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{dy}{ds} = \dfrac{3a\operatorname{sen}^2 t\cos t}{3a\operatorname{sen} t\cos t} = \operatorname{sen} t.$



2. Calcular la curvatura de las curvas siguientes en los puntos que se indican:

a) $y = x^4 - 4x^3 - 18x^2$ en el origen

b) $x^2 + xy + y^2 = 3$ en el punto $(1, 1)$

c) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ en los vértices $(a, 0)$, $(0, b)$

d) $x = t^2$, $y = t^3$ en el punto $(1, 1)$

e) $\rho^2 = 2a^2\cos 2\theta$ en los vértices cuyos ángulos polares son $\theta = 0$ y $\theta = \pi$.

Solución

a) En este caso $y' = 4x^3 - 12x^2 - 36x$, $y'' = 12x^2 - 24x - 36$, en el origen la función tiene curvatura $K = \dfrac{|y''|}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{36}{(1+0^2)^{\frac{3}{2}}} = 36.$

b) Consideremos $F(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$, $F_x = 2x + y$, $F_y = 2y + x$, $F_{xx} = 2$, $F_{yy} = 2$, $F_{xy} = 1$.

En $(1,1)$ la curvatura es $K = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{(3^2+3^2)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{|2(-9)+9+3(-3)|}{(3\sqrt{2})^3} = \dfrac{18}{27{\cdot}2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{3\sqrt{2}}$.

c) Sea $F(x,y) = \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1 = 0$, $F_x = \dfrac{2x}{a^2}$, $F_y = \dfrac{2y}{b^2}$, $F_{xx} = \dfrac{2}{a^2}$, $F_{yy} = \dfrac{2}{b^2}$, $F_{xy} = 0$.

La curvatura $K = \dfrac{\begin{vmatrix} \frac{2}{a^2} & 0 & \frac{2x}{a^2} \\ 0 & \frac{2}{b^2} & \frac{2y}{b^2} \\ \frac{2x}{a^2} & \frac{2y}{b^2} & 0 \end{vmatrix}}{\left(\frac{4x^2}{a^4}+\frac{4y^2}{b^4}\right)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{\left|\frac{-8y^2}{a^2b^4}-\frac{8x^2}{a^4b^2}\right|}{8\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{\frac{1}{a^2b^2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}{\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{1}{a^2b^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right)^{\frac{3}{2}}}$.

En $(a,0)$, $K = \dfrac{1}{a^2b^2\left(\frac{1}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{a}{b^2}$ y en $(0,b)$, $K = \dfrac{1}{a^2b^2\left(\frac{1}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{b}{a^2}$.

d) Aquí, $x' = 2t$, $x'' = 2$, $y' = 3t^2$, $y'' = 6t$. Además en $(1,1)$ tenemos $t^2 = 1$ y $t^3 = 1 \iff t = 1$.

Así la curvatura $K = \dfrac{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}{((x')^2+(y')^2)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}}{(4+9)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{12-6}{13^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{6}{13\sqrt{13}}$.

e) Se tiene que $\rho = \sqrt{2}a\sqrt{\cos 2\theta}$, $\rho' = \dfrac{-\sqrt{2}a \operatorname{sen} 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$, $\rho'' = -\sqrt{2}a\sqrt{\cos 2\theta} - \dfrac{\sqrt{2}a}{(\cos 2\theta)^{\frac{3}{2}}}$,

entonces $K = \dfrac{\rho^2+2(\rho')^2-\rho\rho''}{(\rho^2+(\rho')^2)^{\frac{3}{2}}} =$

$$\frac{2a^2\cos 2\theta + \dfrac{4a^2\operatorname{sen}^2 2\theta}{\cos 2\theta} - \sqrt{2}a\sqrt{\cos 2\theta}(-\sqrt{2}a\sqrt{\cos 2\theta} - \dfrac{\sqrt{2}a}{(\cos 2\theta)^{\frac{3}{2}}})}{(2a^2\cos 2\theta + \dfrac{2a^2\operatorname{sen}^2 2\theta}{\cos 2\theta})^{\frac{3}{2}}} =$$

$$\frac{3\sqrt{2}(\cos 2\theta)^{\frac{5}{2}} + 3\sqrt{2}\operatorname{sen}^2 2\theta\sqrt{\cos 2\theta}}{2a}.$$

De esta manera en $\theta = 0$, $K = \dfrac{3\sqrt{2}}{2a} = \dfrac{3}{\sqrt{2}a}$ y en π, $K = \dfrac{3}{\sqrt{2}a}$.

3. Determinar el diferencial del arco, el seno y el coseno del ángulo que forma el radio polar, con la tangente a cada una de las curvas siguientes:

a) $\rho = a\theta$ (espiral de Arquímedes)

b) $\rho = \dfrac{a}{\theta}$ (espiral hiperbólica)

c) $\rho = a\sec^2\dfrac{\theta}{2}$ (parábola)

d) $\rho = a\cos^2\dfrac{\theta}{2}$ (cardioide)

e) $\rho = a^\theta$ (espiral logarítmica)

f) $\rho^2 = a^2\cos 2\theta$ (lemniscata).

Solución

a) Se tiene que $ds = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}d\theta = \sqrt{a^2\theta^2 + a^2}\,\theta = a\sqrt{\theta^2+1}\,\theta$,

$\cos\beta = \dfrac{d\rho}{ds} = \dfrac{a}{a\sqrt{\theta^2+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{\theta^2+1}}$; $\operatorname{sen}\beta = \rho\dfrac{\theta}{ds} = \dfrac{a\theta}{a\sqrt{\theta^2+1}} = \dfrac{\theta}{\sqrt{\theta^2+1}}$.

b) $ds = \sqrt{\dfrac{a^2}{\theta^2} + \dfrac{a^2}{\theta^4}}\,\theta = \dfrac{a}{\theta^2}\sqrt{\theta^2+1}\,\theta$, $\cos\beta = \dfrac{d\rho}{ds} = \dfrac{-\dfrac{a}{\theta^2}}{\dfrac{a}{\theta^2}\sqrt{\theta^2+1}} = -\dfrac{1}{\sqrt{\theta^2+1}}$,

$\operatorname{sen}\beta = \dfrac{a}{\theta}\dfrac{1}{\dfrac{a}{\theta^2}\sqrt{\theta^2+1}} = \dfrac{\theta}{\sqrt{\theta^2+1}}$.

c) Se sabe que $\rho = a\sec^2\dfrac{\theta}{2}$, $\rho' = a\sec^2\dfrac{\theta}{2}\tan\dfrac{\theta}{2}$,

$ds = \sqrt{a^2\sec^4\dfrac{\theta}{2} + a^2\sec^4\dfrac{\theta}{2}\tan^2\dfrac{\theta}{2}}\,\theta = a\sec^2\dfrac{\theta}{2}\sqrt{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}}\,\theta = a\sec^3\dfrac{\theta}{2}\,\theta$,

$\cos\beta = \dfrac{d\rho}{ds} = \dfrac{a\sec^2\dfrac{\theta}{2}\tan\dfrac{\theta}{2}}{a\sec^3\dfrac{\theta}{2}} = \cos\dfrac{\theta}{2}\tan\dfrac{\theta}{2} = \operatorname{sen}\dfrac{\theta}{2}$;

$$\operatorname{sen}\beta = \rho\frac{\theta}{ds} = a\sec^2\frac{\theta}{2}\frac{1}{a\sec^3\frac{\theta}{2}} = \cos\frac{\theta}{2}.$$

d) Como $\rho = a\cos^2\frac{\theta}{2}$, $\rho' = -a\cos\frac{\theta}{2}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$;

$$ds = \sqrt{a^2\cos^4\frac{\theta}{2} + a^2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}\,\theta = a\cos\frac{\theta}{2}\sqrt{\cos^2\frac{\theta}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}\,\theta = a\cos\frac{\theta}{2}\,\theta,$$

$$\operatorname{sen}\beta = \rho\frac{\theta}{ds} = a\cos^2\frac{\theta}{2}\frac{1}{a\cos\frac{\theta}{2}} = \cos\frac{\theta}{2},\ \cos\beta = \frac{d\rho}{ds} = \frac{-a\cos\frac{\theta}{2}\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}{a\cos\frac{\theta}{2}} = -\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}.$$

e) $\rho = a^\theta = \mathrm{e}^{\theta\ln a}$, $\rho' = a^\theta\ln a$, $ds = \sqrt{a^{2\theta} + a^{2\theta}\ln^2 a}\,\theta = a^\theta\sqrt{1+\ln^2 a}\,\theta$,

$$\cos\beta = \frac{d\rho}{ds} = \frac{a^\theta\ln a}{a^\theta\sqrt{1+\ln^2 a}} = \frac{\ln a}{\sqrt{1+\ln^2 a}};\ \operatorname{sen}\beta = \rho\frac{\theta}{ds} = a^\theta\frac{1}{a^\theta\sqrt{1+\ln^2 a}} = \frac{1}{\sqrt{1+\ln^2 a}}.$$

f) $\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}$, $\rho' = \dfrac{-a\operatorname{sen}2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$,

$$ds = \sqrt{a^2\cos 2\theta + a^2\frac{\operatorname{sen}^2 2\theta}{\cos 2\theta}}\,\theta = a\sqrt{\frac{\cos^2 2\theta + \operatorname{sen}^2 2\theta}{\cos 2\theta}}\,\theta = \frac{a\,\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} = \frac{a^2}{\rho}\theta;$$

$$\cos\beta = \frac{d\rho}{ds} = \frac{-\frac{a\operatorname{sen}2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}}{\frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}} = -\operatorname{sen}2\theta,\ \operatorname{sen}\beta = \rho\frac{\theta}{ds} = \frac{\rho^2}{a^2} = \cos 2\theta.$$

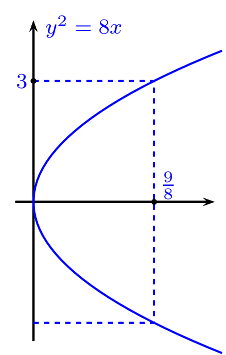
4. Determinar los puntos de la parábola $y^2 = 8x$, en que su curvatura es $0{,}128$.

Solución Dada la simetría de la curva $y = \pm\sqrt{8x}$, analizaremos la rama positiva $y = \sqrt{8x}$. Así tenemos que $y' = \sqrt{\frac{2}{x}}$ y también

$$y'' = -\frac{\sqrt{2}}{x^{\frac{3}{2}}}.\ \text{Además } K = \frac{\left|\frac{\sqrt{2}}{x^{\frac{3}{2}}}\right|}{\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2(x+2)^{\frac{3}{2}}} = 0{,}128 =$$

$$\frac{2^7}{5^3{\cdot}2^3} = \frac{2^4}{5^3} \iff \frac{1}{2(x+2)^3} = \frac{2^8}{5^6} \iff (x+2)^3 = \frac{5^6}{2^9} \iff$$

$$x+2 = \frac{5^2}{2^3} \iff x = \frac{25-16}{8} = \frac{9}{8} \Longrightarrow y^2 = 8x \Longrightarrow y = \pm 3.$$



Finalmente tenemos los puntos $(\frac{9}{8}, \pm 3)$.

5. Determinar el vértice de la curva $y = e^x$.

   Solución Recordemos que el vértice de una curva es el punto en que la curvatura tiene un extremo. Así que tenemos que $y' = e^x$, $y'' = e^x$ y $K = \dfrac{e^x}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}}$. Derivando tenemos $K' = \dfrac{e^x(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(1+e^{2x})^{\frac{1}{2}}e^{2x}e^x 2}{(1+e^{2x})^3} = 0 \iff 1 + e^{2x} = 3e^{2x} \iff e^{2x} = \frac{1}{2} \iff x = -\frac{1}{2}\ln 2 \Longrightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ corresponde a un máximo.

6. Determinar los radios de curvatura de las siguientes curvas:

   a) $y = x^3$

   b) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

   c) $x = \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{\ln y}{2}$

   d) $x = a\cos^3 t$, $y = a\operatorname{sen}^3 t$

   e) $x = a(\cos t + t\operatorname{sen} t)$, $y = a(\operatorname{sen} t - t\cos t)$

   f) $\rho = ae^{k\theta}$

   g) $\rho = a(1+\cos\theta)$.

   Solución

   a) Tenemos que $y' = 3x^2$, $y'' = 6$, entonces $K = \dfrac{6}{(1+(3x)^2)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{6}{(1+9x^4)^{\frac{3}{2}}}$ i.e. el radio de la curvatura $R = \dfrac{1}{K} = \dfrac{(1+9x^4)^{\frac{3}{2}}}{6}$.

   b) Del ejercicio 2c) tenemos que $K = \dfrac{1}{a^2b^2\big(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\big)^{\frac{3}{2}}} \Longrightarrow$

   $$R = a^2b^2\Big(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\Big)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{a^4b^4(b^4x^2 + a^4y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

   c) Consideremos la función $F(x,y) = x - \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{2}\ln y = 0$, $F_x = 1$, $F_{xx} = 0$, $F_{xy} = 0$, $F_y = -\dfrac{1}{2}y^2 + \dfrac{1}{2y}$, $F_{yy} = -y - \dfrac{1}{2y^2}$. La curvatura es:

   $$K = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -y - \frac{1}{2y^2} & -\frac{1}{2y^2} + \frac{1}{2y} \\ 1 & -\frac{1}{2y^2} + \frac{1}{2y} & 0 \end{vmatrix}}{\Big(1 + \big(-\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2y}\big)^2\Big)^{\frac{3}{2}}} = \frac{y + \frac{1}{2y^2}}{(1 + \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{4y^2})^{\frac{3}{2}}} = \frac{4y}{(y^2+1)^2} \Longrightarrow$$

$R = \dfrac{(y^2+1)^2}{4y}$.

d) En este caso tenemos $x = a\cos^3 t$, $y = a\,\mathrm{sen}^3\, t$, $x' = -3a\cos^2 t\,\mathrm{sen}\, t$, $x'' = a\cos t(6 - 9\cos^2 t)$, $y' = 3a\,\mathrm{sen}^2\, t\cos t$, $y'' = a\,\mathrm{sen}\, t(6 - 9\,\mathrm{sen}^2\, t)$ y la curvatura es:

$$K = \frac{\begin{vmatrix} -3a\cos^2 t\,\mathrm{sen}\, t & 3a\,\mathrm{sen}^2\, t\cos t \\ a\cos t(6-9\cos^2 t) & a\,\mathrm{sen}\, t(6-9sen^2 t)\end{vmatrix}}{a^3(9\cos^2 t\,\mathrm{sen}^2\, t + 9\,\mathrm{sen}^4\, t\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$\frac{-3a^2\,\mathrm{sen}^2\, t\cos^2 t(12-9)}{a^3(9\cos^2 t\,\mathrm{sen}^2\, t(\mathrm{sen}^2\, t + \cos^2 t))^{\frac{3}{2}}} = \frac{-9\,\mathrm{sen}^2\, t\cos^2 t}{a^3 3^3|\,\mathrm{sen}^3\, t||\cos^3 t|} \Longrightarrow$$

$R = \dfrac{1}{|K|} = 3a|\,\mathrm{sen}\, t||\cos t| = \frac{3}{2}a|\,\mathrm{sen}\, 2t|$.

e) Se tiene que $x = a(\cos t + t\,\mathrm{sen}\, t)$, $y = a(\mathrm{sen}\, t - t\cos t)$, $x' = at\cos t$, $y' = at\,\mathrm{sen}\, t$, $x'' = a(\cos t - t\,\mathrm{sen}\, t)$, $y'' = a(\mathrm{sen}\, t + t\cos t)$. Así la curvatura es:

$$K = \frac{\begin{vmatrix} at\cos t & at\,\mathrm{sen}\, t \\ a(\cos t - t\,\mathrm{sen}\, t) & a(\mathrm{sen}\, t + t\cos t)\end{vmatrix}}{(a^2t^2\cos^2 t + a^2t^2\,\mathrm{sen}^2\, t)^{\frac{3}{2}}} =$$

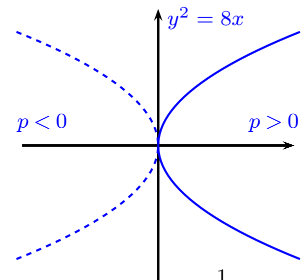
$\dfrac{a^2\cos t(\mathrm{sen}\, t + t\cos t) - a^2 t\,\mathrm{sen}\, t(\cos t - t\,\mathrm{sen}\, t)}{(at)^3} = \dfrac{a^2t^2}{a^3t^3} = \dfrac{1}{at}$, i.e. el radio es $R = \dfrac{1}{|K|} = a|t|$.

f) La curva es $\rho = a\mathrm{e}^{k\theta}$, $\rho' = ak\mathrm{e}^{k\theta}$, $\rho'' = ak^2\mathrm{e}^{k\theta}$, entonces la curvatura
$K = \dfrac{a^2\mathrm{e}^{2k\theta} + 2a^2k^2\mathrm{e}^{2k\theta} - a^2k^2\mathrm{e}^{2k\theta}}{(a^2\mathrm{e}^{2k\theta} + a^2k^2\mathrm{e}^{2k\theta})^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{1+k^2}{a\mathrm{e}^{k\theta}(1+k^2)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{1}{a\mathrm{e}^{k\theta}(1+k^2)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{\rho\sqrt{1+k^2}}$
y el radio de curvatura $R = \rho\sqrt{1+k^2}$.

g) El cardioide $\rho = a(1+\cos\theta)$, $\rho' = -a\,\mathrm{sen}\,\theta$, $\rho'' = -a\cos\theta$, la curvatura es:
$K = \dfrac{a^2(1+2\cos\theta+\cos^2\theta) + 2a^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta + a^2\cos\theta + a^2\cos^2\theta}{(a^2(1+2\cos\theta+\cos^2\theta) + a^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{a^2(1+3\cos\theta+2)}{a^3(2+2\cos\theta)^{\frac{3}{2}}} =$
$\dfrac{3(1+\cos\theta)}{a2^{\frac{3}{2}}(1+\cos\theta)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{3}{2a(2+2\cos\theta)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{3}{2a(4\cos^2\frac{\theta}{2})^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{3}{4a|\cos\frac{\theta}{2}|}$, ya que $\dfrac{1+\cos\theta}{2} =$

$\cos^2\dfrac{\theta}{2}$. Finalmente $R = \frac{3}{4}a\left|\cos\dfrac{\theta}{2}\right|$.

7. Determinar el valor mínimo del radio de curvatura de la parábola $y^2 = 2px$.



Solución Tomamos la rama positiva $y = \sqrt{2px}$, entonces $y' = \dfrac{p}{\sqrt{2px}}$, $y'' = \dfrac{p^2}{(2px)^{\frac{3}{2}}}$ y la curvatura es:

$K = \dfrac{p^2}{(2px)^{\frac{3}{2}}}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{p^2}{2px}\right)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{p^2}{(p^2+2px)^{\frac{3}{2}}}$.

El radio de curvatura es $R = \dfrac{(p^2+2px)^{\frac{3}{2}}}{p^2}$ y su derivada $R' = \dfrac{3}{2}\dfrac{(p^2+2px)^{\frac{1}{2}}}{p^2}(2p) =$

$\dfrac{3}{p}(p^2+2px)^{\frac{1}{2}} = 0 \Longleftrightarrow p^2 = -2px \Longleftrightarrow x = -\dfrac{p}{2}$.

Observemos que si $p > 0$, $x \geq 0$ y la solución no vale en el dominio de definición de la variable x. Así $R' > 0$ por lo que el mínimo lo alcanza en $x = 0$, i.e. $R(0) = p$.

Si $p < 0$, $x \leq 0$ y la solución no vale. Como $R' < 0$ el mínimo se alcanza en $x = 0$.

Finalmente $R(0) = \dfrac{|p|^3}{p^2} = |p|$.

8. Determinar las coordenadas del centro de curvatura de las siguientes curvas, en los puntos indicados:

a) $xy = 1$ en $(1,1)$ b) $ay^2 = x^3$ en (a,a), $a > 0$.

Solución

a) La curva es $y = \dfrac{1}{x}$, $y' = -\dfrac{1}{x^2}$, $y'' = \dfrac{2}{x^3}$, entonces:

$$X = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} = x - \frac{-\frac{1}{x^2}\left(1+\frac{1}{x^4}\right)}{\frac{2}{x^3}} = x + \frac{1+x^4}{2x^3} = \frac{1}{2x^3} + \frac{3}{2}x,$$

$$Y = y + \frac{(1+y'^2)}{y''} = \frac{1}{x} + \frac{\left(1+\frac{1}{x^4}\right)}{\frac{2}{x^3}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x} + \tfrac{1}{2}x^3 = \frac{3}{2x} + \frac{1}{2x^3}.$$

Así en el punto $(1,1)$ el centro de curvatura es $(X,Y)=(2,2)$.

b) Tenemos que $y=\dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}}$, $x\geq 0$, con derivadas $y'=\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{x}{a}}$, $y''=\dfrac{3}{4\sqrt{ax}}$, entonces:

$$X=x-\frac{\frac{3}{2}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a}}\left(1+\frac{9x}{4a}\right)}{\frac{3}{4\sqrt{ax}}}=x-\frac{3}{2}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a}}\frac{4a+9x}{4a}\frac{4\sqrt{ax}}{3}=x-\frac{x(4a+9x)}{2a},$$

$$Y=y-\frac{1+\frac{9x}{4a}}{\frac{3}{4\sqrt{ax}}}=y+\frac{4a+9x}{4a}\frac{4\sqrt{ax}}{3}=y+\frac{1}{3a}(4a+9x)\sqrt{ax}.$$

En (a,a) el centro de curvatura $(X,Y)=(-\frac{11}{2}a,\frac{16}{3}a)$.

9. Determinar las ecuaciones de la circunferencia osculatriz de las siguientes curvas, en los puntos indicados:

a) $y=x^2-6x+10$ en $(3,1)$ b) $y=\mathrm{e}^x$ en $(0,1)$.

Solución

a) Se tiene que $y'=2x-6$, $y''=2$, entonces la curvatura $K=\dfrac{2}{(1+(2x-6)^2)^{\frac{3}{2}}}$ y si $x=3$, $K=2$ i.e. $R=\dfrac{1}{K}=\dfrac{1}{2}$. Además:

$X=x-(2x-6)\dfrac{(1+(2x-6)^2)}{2}$, $Y=y+\dfrac{1+(2x-6)^2}{2}$ y en $(3,1)$, $X=3$, $Y=\frac{3}{2}$.

El círculo osculatriz es $(X-3)^2+(Y-\frac{3}{2})^2=\frac{1}{4}$.

b) Como $y=\mathrm{e}^x$, $X=x-\dfrac{\mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^{2x})}{\mathrm{e}^x}=x-1-\mathrm{e}^{2x}$, $Y=y+\dfrac{1+\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x}$, en $(0,1)$ tenemos que $X=-2$, $Y=3$.

Por otro lado, la curvatura $K=\dfrac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^{2x})^{\frac{3}{2}}}$ en $(0,1)$ es $K=\dfrac{1}{2^{\frac{3}{2}}}$ i.e. $R=2^{\frac{3}{2}}$.

El círculo osculatriz es $(X+2)^2+(Y-3)^2=8$.

10. Determinar la evoluta de las curvas:

a) $y^2=2px$ b) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Solución

a) Recordemos que $y' = \sqrt{\dfrac{p}{2x}}$, $y'' = -\dfrac{\sqrt{p}}{(2x)^{\frac{3}{2}}}$ (ejercicio 7). Así tenemos que:

$$X = x - \frac{\sqrt{\frac{p}{2x}}\big(1 + \frac{p}{2x}\big)}{-\sqrt{p}}(2x)^{\frac{3}{2}} = x + \frac{1}{\sqrt{2x}}\frac{2x+p}{2x}(2x)^{\frac{3}{2}} = 3x + p,$$

$$Y = \sqrt{2px} + \frac{\big(1 + \frac{p}{2x}\big)}{-\sqrt{p}}(2x)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2px} - \frac{2x+p}{p}\sqrt{2px} = \sqrt{2px}\big(1 - \frac{2x}{p} - 1\big) =$$
$$-\frac{(2x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p}} = -\frac{\big(\frac{2}{3}(X-p)\big)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p}} \Longrightarrow pY^2 = \frac{8}{27}(X-p)^3.$$

b) Escribimos $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $y' = -\dfrac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}}$, $y'' = -\dfrac{ab}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$, entonces:

$$X = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} = x - \frac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}}\Big(1 + \frac{b^2x^2}{a^2(a^2-x^2)}\Big)\frac{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{ab} = x - \frac{x}{a^4}(a^4 - (a^2-b^2)x^2) =$$
$$\frac{x^3}{a^4}(a^2-b^2),$$

$$Y = y - \big(1 + \frac{b^2x^2}{a^2(a^2-x^2)}\big)\frac{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{ab} = -\frac{(a^2-b^2)}{a^3b}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}},$$ por lo que se tiene:

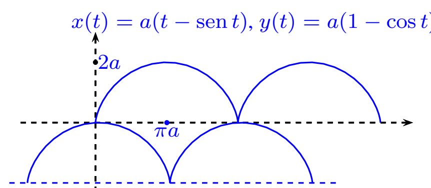
$$(aX)^{\frac{2}{3}} + (bY)^{\frac{2}{3}} = \frac{(a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}}{a^2}x^2 + \frac{(a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}}{a^2}(a^2-x^2) = (a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}.$$

11. Demostrar que la evoluta de la cicloide $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$ es una cicloide desplazada.

Solución

Recordemos que $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'}{x'}$ y que $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{x'y''-x''y'}{(x')^3}$; así tenemos:

$$X = a(t-\operatorname{sen} t) - \frac{\frac{\operatorname{sen} t}{1-\cos t}\left(1+\frac{\operatorname{sen}^2 t}{(1-\cos t)^2}\right)}{\frac{-a}{a(1-\cos t)^2}} = a(t-\operatorname{sen} t) + \frac{a \operatorname{sen} t(2-2\cos t)}{1-\cos t} = a(t-\operatorname{sen} t),$$



$Y = a(1-\cos t) - \dfrac{a(1-2\cos t+\cos^2 t+\operatorname{sen}^2 t)}{(1-\cos t)^2}(1-\cos t)^2 = a(1-\cos t) - a(2-2\cos t) = -a(1-\cos t)$.

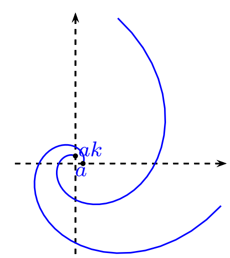
Así, la evoluta es la cicloide con nuevo centro $(\pi a, -2a)$, con nuevo parámetro $u = \pi - t$.

12. Demostrar que la evoluta de la espiral logarítmica $\rho = ae^{k\theta}$ también es una espiral logarítmica con el mismo polo.

Solución Dado que $\rho = ae^{k\theta}$, $x = \rho(\theta)\cos\theta$, $y = \rho(\theta)\operatorname{sen}\theta$,

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'(\theta)}{x'(\theta)} = \dfrac{\cos(\theta)+k\operatorname{sen}\theta}{k\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}$,

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{x'(\theta)y''(\theta)-x''(\theta)y'(\theta)}{(x'(\theta))^3} = \dfrac{(k^2+1)e^{-k\theta}}{a(k\cos\theta-\operatorname{sen}\theta)^3}$.



Finalmente $X = -ak\operatorname{sen}\theta e^{k\theta} = ake^{-k\frac{\pi}{2}}e^{k(\theta+\frac{\pi}{2})}\cos(\theta+\frac{\pi}{2})$,

$Y = ak\cos\theta e^{k\theta} = ake^{-k\frac{\pi}{2}}e^{k(\theta+\frac{\pi}{2})}\operatorname{sen}(\theta+\frac{\pi}{2})$ i.e. es una espiral logarítmica rotada $\frac{\pi}{2}$.

13. Demostrar que la curva (desarrollo de la circunferencia) $x = a(\cos t + t\operatorname{sen} t)$, $y = a(\operatorname{sen} t - t\cos t)$ es la evolvente de la circunferencia $x = a\cos t$, $y = a\operatorname{sen} t$.

Solución Consideramos la curva $x = a(\cos t + t\operatorname{sen} t)$, $y = a(\operatorname{sen} t - t\cos t)$, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'}{x'} = \tan t$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{x'y''-x''y'}{(x')^3} = \dfrac{1}{at\cos^3 t}$, por lo que:

$X = a(\cos t + t\operatorname{sen} t) - \tan t(1+\tan^2 t)at\cos^3 t = a\cos t$,

$Y = a(\operatorname{sen} t - t\cos t) + (1+\tan^2 t)at\cos^3 t = a\operatorname{sen} t$.

2.12.2. Puntos singulares, envolvente

14. Determinar los puntos singulares de las curvas siguientes:

a) $y^2 = -x^2 + x^4$	b) $(y - x^2)^2 = x^5$
c) $a^4y^2 = a^2x^4 - x^6$	d) $x^2y^2 - x^2 - y^2 = 0$
e) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ (folio de Descartes)	f) $y^2(a - x) = x^3$ (cisoide)
g) $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ (lemniscata)	h) $(a + x)y^2 = (a - x)x^2$ (estrofoide)

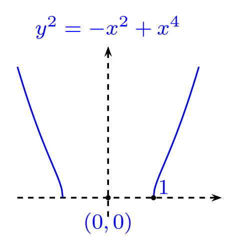
i) $(x^2 + y^2)(x - a)^2 = b^2x^2$, $a > 0$, $b > 0$ (concoide).

Analizar los casos $a = b$, $a > b$, $a < b$.

Solución

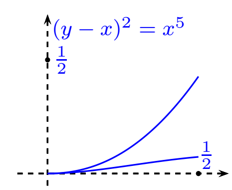
a) Sea $f(x, y) = y^2 + x^2 - x^4 = 0$, $f_x = 2x - 4x^3 = 0 \Longrightarrow x = 0$, $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, $f_y = 2y = 0 \Longrightarrow y = 0$.

Solamente hay un punto singular pues $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ no está en la curva. Las derivadas de orden dos son $f_{xx}(x, y) = 2 - 12x$, $f_{yy}(x, y) = 2$, $f_{xy}(x, y) = 0$ i.e. $f_{xx}(0, 0) = 2$, $f_{yy}(0, 0) = 2$, $f_{xy}(0, 0) = 0$ por lo que $\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 4 > 0$, es decir $(0, 0)$ es un punto aislado.

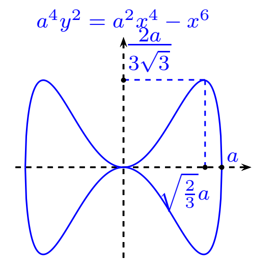


b) Sea $f(x, y) = (y - x^2)^2 - x^5$, $f_x = 2(y - x^2)2x - 5x^4 = x(4y - 4x^2 - 5x^3) = 0$, $f_y = 2(y - x^2) = 0 \Longrightarrow y = x^2$ i.e. $x = 0$, $y = 0$ es el único punto singular.

Las derivadas de orden dos son $f_{xx} = 4y - 6x^2 - 20x^3$, $f_{xy} = -4x$, $f_{yy} = 2$ por lo que $\Delta = 0$. Es claro que debemos analizar la curva en $(0, 0)$. Despejando y se tiene $y = \pm\sqrt{x^5} + x^2$, por lo que $(0, 0)$ es un punto de segunda especie.



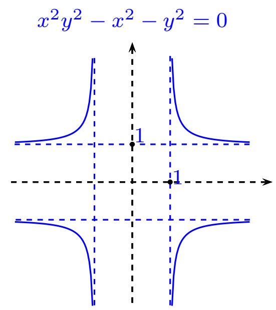
c) Consideremos $f(x,y) = a^4y^2 - a^2x^4 + x^6 = 0$, $f_x = -4a^2x^3 + 6x^5 = 0$, $f_y = 2a^4y = 0 \Longrightarrow x = 0$, $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}a$, $y = 0$, pero $(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}a, 0)$ no está en la curva y el único punto singular es $(0,0)$.



Las derivadas de orden dos son $f_{xx} = -12a^2x^2 + 30x^4$, $f_{yy} = 2a^4$, $f_{xy} = 0$, por lo que $\Delta = 0$. De esta forma se debe analizar la curva en $(0,0)$.

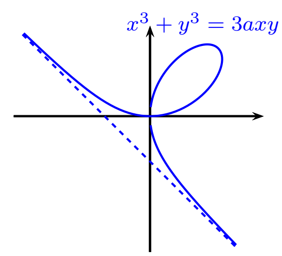
La curva se escribe $y^2 = \dfrac{x^4(a^2 - x^2)}{a^4}$, $y = \pm\dfrac{x^2}{a^2}\sqrt{a^2 - x^2}$, por lo que $(0,0)$ es un punto doble.

d) Sea $f(x,y) = x^2y^2 - x^2 - y^2 = 0$, $f_x = 2xy^2 - 2x = 2x(y^2 - 1) = 0 \Longrightarrow x = 0, y = \pm 1$, $f_y = 2x^2y - 2y = 2y(x^2 - 1) = 0 \Longrightarrow y = 0$, $x = \pm 1$. De esta forma tenemos que sólo el punto $(0,0)$ es singular.



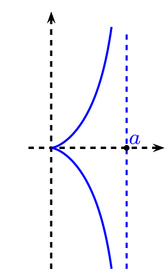
Las derivadas de segundo orden $f_{xx} = 2y^2 - 2$, $f_{yy} = 2x^2 - 2$, $f_{xy} = 4xy$, por lo que en $(0,0)$, $\Delta = 4 - 0 > 0$ y tenemos en $(0,0)$ un punto aislado. Se puede representar la curva por $y^2 = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$ i.e. $y = \dfrac{\pm x}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

e) Sea $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy = 0$, entonces $f_x = 3x^2 - 3ay = 0 \Longrightarrow x^2 = ay$, $f_y = 3y^2 - 3ax = 0 \Longrightarrow y^2 = ax \Longrightarrow x^2 = a\sqrt{ax}$ i.e. $x = a$, $x = 0 \Longrightarrow (0,0)$ es el único punto singular pues $x = y = a$ no está en la curva.



Las derivadas de orden dos son $f_{xx} = x$, $f_{yy} = y$, $f_{xy} = -3a$, por lo que $\Delta = -9a^2 < 0$ i.e. $(0,0)$ es un punto doble.

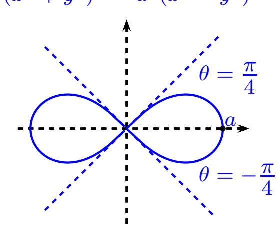
f) Sea $f(x,y) = y^2(a-x)-x^3 = 0$, entonces $f_x = -3x^2-y^2 = 0$, $f_y = 2y(a-x) \Longrightarrow y = 0$ o $x = a$ i.e. $x = 0$, $y^2 = -3a^2$ solución que no tiene sentido. Finalmente, el único punto singular es $(0,0)$.



Las derivadas parciales de orden dos son $f_{xx} = -6x^2$, $f_{yy} = 2a$, $f_{xy} = -2y$, por lo que $\Delta = 0$ en $(0,0)$ y se hace necesario un análisis de la curva en $(0,0)$.

La curva se puede escribir $y = \pm\sqrt{\dfrac{x^3}{a-x}}$, lo que evidencia que $(0,0)$ es un punto de retroceso de primera especie.

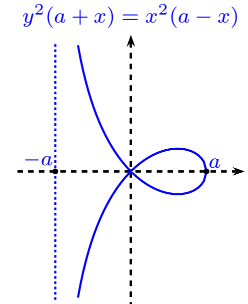
g) Sea $f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - a^2(x^2-y^2) = 0$, $f_x = 2(x^2+y^2)2x - 2a^2x = x(2(x^2+y^2)-a^2) = 0$, $f_y = 2(x^2+y^2)2y + 2a^2y = y(2(x^2+y^2)+a^2) = 0 \Longrightarrow (0,0)$ es el único punto singular.



Las derivadas de orden dos son $f_{xx} = 12x^2 + 4y^2 - 2a^2$, $f_{xy} = 8xy$, $f_{yy} = 12y^2 - 4x^2 + 2a^2$, por lo que en $(0,0)$, $\Delta = (-2a^2)(2a^2) - 0 = -4a^4 < 0$ es un punto doble.

h) Sea $f(x,y) = (a+x)y^2 - (a-x)x^2 = 0$, $f_x = y^2 - 2ax + 3x^2 = 0$, $f_y = 2(a+x)y = 0 \Longrightarrow x = -a$, $y = 0$.

Si $y = 0$, $3x^2 - 2ax = x(3x-2a) = 0 \Longrightarrow x = 0$, $x = \frac{3}{2}a$, pero el punto $(\frac{3}{2}a, 0)$ no satisface la ecuación de la curva.



Si $x = -a$, se tiene que $(a-a)y^2 - (a+a)a^2 = -2a^2 = 0$ que no puede ser. El único punto singular es $(0,0)$.

Las derivadas de orden dos son $f_{xx} = -2a + ax$, $f_{yy} = 2(a+x)$, $f_{xy} = 2y$ y tenemos $\Delta = (-2a)(2a) - 0 = -4a^2 < 0$, es decir $(0,0)$ es un punto doble.

i) Consideremos $f(x,y) = (x^2+y^2)(x-a)^2 - b^2x^2 = 0$, las derivadas parciales igualadas a cero son $f_x = 4x^3 - 6ax^2 - 2x(y^2+a^2-b^2) - 2ay^2 = 0$, $f_y = 2y(x-a)^2 =$

$0 \Longrightarrow y = 0$ o $x = a$.

Si $x = a$, $f_x = -2ab^2 \neq 0$ y no sirve como solución.

Si $y = 0 \Longrightarrow 2x(2x^2 - 3ax + a^2 - b^2) = 0 \Longrightarrow x = 0$, $x = -\dfrac{\sqrt{a^2+8b^2} - 3a}{4}$, $x = \dfrac{\sqrt{a^2+8b^2} + 3a}{4}$.

Las soluciones $(\dfrac{3a \pm \sqrt{a^2+8b^2}}{4}, 0)$ deben ser soluciones de la ecuación $f(x,y) = 0$. En efecto, $f(x,0) = x^2(x-a)^2 - b^2x^2 = x^2((x-a)^2 - b^2) = 0 \Longleftrightarrow x = 0, x = a+b$, $x = a-b \Longrightarrow \dfrac{3a \pm \sqrt{a^2+8b^2}}{4} = a \pm b \Longrightarrow \pm\sqrt{a^2+8b^2} = 4(a \pm b) - 3a = a \pm 4b \Longrightarrow$ $a^2 + 8b^2 = (a \pm 4b)^2 \Longrightarrow 8b(b \pm a) = 0 \Longrightarrow b = 0$, $a \pm b$.

Si $a = \pm b$, $x = \frac{3}{2}a$, $x = 0$, pero $(\frac{3}{2}a, 0)$ no satisface $f(x,y) = 0$. Finalmente la única solución posible (punto singular) es $(0,0)$.

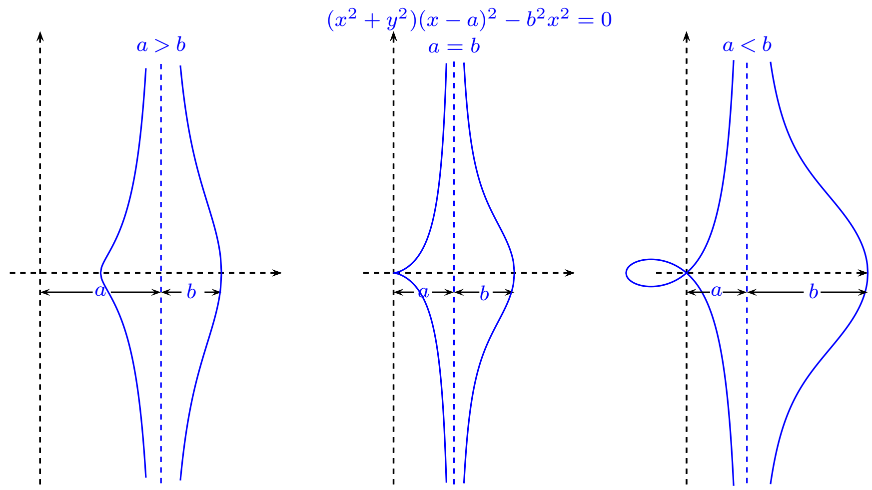
Las derivadas de orden dos son $f_{xx} = 12x^2 - 12ax + 2a^2 + 2y^2 - 2ay^2 - 2b^2$, $f_{xy} = 4y(x-a)$, $f_{yy} = 2(x-a)^2$, por lo tanto en $(0,0)$, $\Delta = 4a^2(a^2 - b^2)$.

Si $a > b$, $(0,0)$ es un punto aislado.

Si $a < b$, $(0,0)$ es un punto doble.

Si $a = b$, $\Delta = 0$ y debemos analizar la función en $(0,0)$. En este caso:

$f(x,y) = (x^2+y^2)(x-a)^2 - a^2x^2 \Longrightarrow y^2 = -x^2 + \dfrac{a^2x^2}{(x-a)^2} = x^2\dfrac{a^2 - a^2 + 2ax - x^2}{(x-a)^2} = \dfrac{x^2}{(x-a)^2}(2ax - x^2) \sim \dfrac{2x^3}{a^2}$, si $x \to 0$, por lo que $(0,0)$ es un punto de retroceso de primera especie.



15. Determinar cómo varía el punto singular de la curva $y^2 = (x-a)(x-b)(x-c)$ en función de los valores a, b, $c \in \mathbb{R}$, $a \leq b \leq c$.

Solución Sea $f(x,y) = y^2 - (x-a)(x-b)(x-c) = 0$, las derivadas parciales son:

$f_x = -3x^2 + 2(a+b+c)x + bc + ac + ab$,

$f_y = 2y = 0 \Longrightarrow x_1 = -\dfrac{\sqrt{a^2-ab-ac+b^2-bc+c^2}-a-b-c}{3}$,

$x_2 = \dfrac{\sqrt{a^2-ab-ac+b^2-bc+c^2}+a+b+c}{3}$, $y=0$.

Si $a \neq b \neq c$, los puntos $(x_1,0)$, $(x_2,0)$ no satisfacen la ecuación $y^2 = (x-a)(x-b)(x-c)$.

Si $a=b$, $x_1=a$, $x_2=\dfrac{a+2c}{3}$ y el punto $(\dfrac{a+2c}{3},0)$ no está en la curva $f(x,y)=0$.

Si $b=c$, $x_1=\dfrac{2a+c}{3}$, $x_2=c$, pero el punto $(\dfrac{2a+c}{3},0)$ no está en la curva $f(x,y)=0$.

Si $a=b=c$, $x_1=x_2=a$.

Finalmente, tenemos el único punto singular $(a,0)$ si $a=b<c$; el único punto singular $(c,0)$ si $a<b=c$ y si $a=b=c$ tenemos el punto $(a,0)$ como único punto singular.

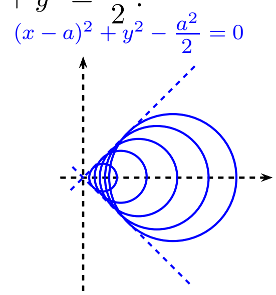
Las derivadas de orden dos son $f_{xx}=-6x+2(a+b+c)$, $f_{yy}=2$, $f_{xy}=0$, por lo que en $(\alpha,0)$, $\Delta = 2(-6\alpha+2(a+b+c))$.

Si $a=b<c$, $(a,0)$ es un punto aislado pues $\Delta=-2(a-c)>0$.

Si $a<b=c$, $(c,0)$ es un punto doble pues $\Delta = 2(a-c)<0$.

Si $a = b = c$, $\Delta = 0$, pero tenemos $y^2 = (x-a)^3$ y cuando $x \to a^+$ es claro que $(a, 0)$ es un punto de retroceso de primera especie.

16. Determinar la envolvente de la familia de circunferencias $(x-a)^2 + y^2 = \dfrac{a^2}{2}$.



Solución Considerando el sistema de ecuaciones

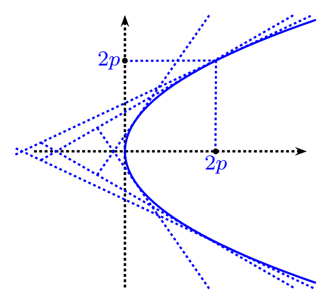
$$f(x, y, a) = (x-a)^2 + y^2 - \frac{a^2}{2} = 0,$$

$f_a(x, y, a) = -2(x-a) - a = 0$ y se tiene que $x = \dfrac{a}{2} \Longrightarrow a = 2x$, por lo que $x^2 + y^2 - \dfrac{4x^2}{2} = 0 \Longrightarrow y = \pm x$.

17. Determinar la envolvente de la familia de rectas $y = kx + \dfrac{p}{2k}$, ($p =$ constante, k parámetro).

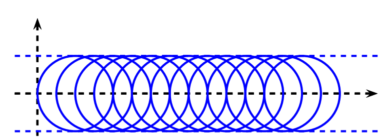
Solución Tenemos que

$$\begin{aligned} f(x, y, k) &= y - kx - \frac{p}{2k} = 0, \\ f_k(x, y, k) &= -x + \frac{p}{2k^2} = 0 \Longrightarrow \\ & kx = \frac{p}{2k} \Longrightarrow y - \frac{p}{2k} - \frac{p}{2k} = y - \frac{p}{k} = 0 \\ & \Longrightarrow y = \frac{p}{k} = p\sqrt{\frac{2x}{p}} \Longrightarrow y^2 = 2px. \end{aligned}$$



18. Determinar la envolvente de la familia de circunferencias de radios iguales a R, cuyos centros se encuentran en el eje x.

Solución Sea $f(x, y, a) = (x-a)^2 + y^2 - R^2 = 0$, $f_a(x, y, a) = 2(x-a) = 0 \Longrightarrow x = a \Longrightarrow y = \pm R$.

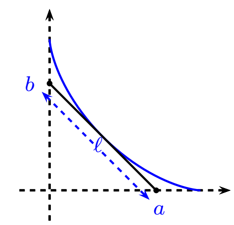


19. Determinar la curva que envuelve a un segmento de longitud ℓ, cuando sus extremos resbalan por los ejes coordenados.

Solución La ecuación de una recta de esta familia se escribe

$y = mx + b = -\frac{b}{a}x + b = -b\big(\frac{x}{a} - 1\big) = -\frac{b}{a}(x-a)$

$= -\frac{\sqrt{\ell^2 - a^2}}{a}(x-a).$



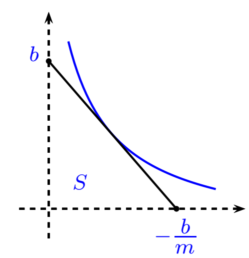
Sea $f(x,y,a) = y + \frac{\sqrt{\ell^2-a^2}}{a}(x-a)$

$= y + \frac{\sqrt{\ell^2-a^2}}{a}x - \sqrt{\ell^2-a^2} = 0,$

$f_a(x,y,a) = \frac{-\ell^2 x + a^3}{\sqrt{\ell^2-a^2}\,a^2} = 0 \Longrightarrow a = x^{\frac{1}{3}}\ell^{\frac{2}{3}}$, entonces $y + \frac{\big(\ell^2 - x^{\frac{2}{3}}\ell^{\frac{4}{3}}\big)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}\ell^{\frac{2}{3}}}(x - x^{\frac{1}{3}}\ell^{\frac{2}{3}}) = y + \frac{\ell^{\frac{2}{3}}(\ell^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}\ell^{\frac{2}{3}}}x^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{2}{3}} - \ell^{\frac{2}{3}}) = y - (\ell^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} = 0 \Longrightarrow y^{\frac{2}{3}} = \ell^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}$ i.e. $y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}} = \ell^{\frac{2}{3}}$.

20. Determinar la envolvente de la familia de rectas que forman con los ejes coordenados, triángulos de área constante S.

Solución Sea $y = mx + b$ la ecuación de una recta de la familia, entonces $S = \frac{1}{2}\big(-\frac{b^2}{m}\big) \Longrightarrow m = -\frac{b^2}{2S}$.



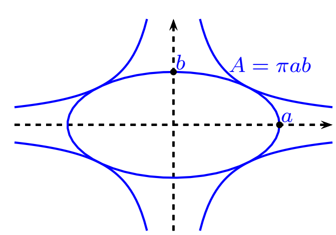
Sea $f(x,y,b) = y + \frac{1}{2S}b^2 x - b = 0,$

$f_b(x,y,b) = \frac{b}{S}x + 1 = 0 \Longrightarrow b = \frac{S}{x}$, i.e. $y + \frac{1}{2}S(\frac{1}{Sx})^2 x - \frac{S}{x} = 0 \Longrightarrow y = \frac{S}{2x}$ i.e. $xy = \frac{1}{2}S$.

21. Determinar la envolvente de las elipses de área constante A, cuyos ejes de simetría coinciden.

Solución Se tiene que la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, tiene por área $\pi ab \Longrightarrow b = \frac{A}{\pi a}$.

Sea $f(x,y,a) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2\pi^2a^2}{A^2} - 1 = 0$, $f_a(x,y,a) = -\frac{2x^2}{a^3} + \frac{2y^2\pi^2 a}{A^2} = 0 \Longrightarrow \frac{x^2A^2}{y^2\pi^2} = a^4 \Longrightarrow a^2 = \frac{xA}{y\pi}$, entonces $f(x,y,a) = \frac{x^2}{xA}y\pi + \frac{y^2\pi^2 xA}{A^2 y\pi} - 1 = xy\frac{\pi}{A} + xy\frac{\pi}{A} - 1 = 0 \Longrightarrow 2xy\frac{\pi}{A} = 1 \Longrightarrow xy = \frac{A}{2\pi}$.



Observemos que se ha considerado el caso en que $xy>0$. Si consideramos el caso $xy<0$, tenemos que $a^2 = -\frac{x}{y}\frac{A}{\pi} \Longrightarrow f(x,y,a) = -\frac{x^2}{xA}y\pi - \frac{y^2\pi^2a^2}{A^2} - 1 = 0 \Longrightarrow xy = -\frac{A}{2\pi}$.

Finalmente la envolvente es $xy = \pm\frac{A}{2\pi}$.

22. Determinar el carácter de las curvas discriminantes de las familias de curvas siguientes (c es el parámetro):

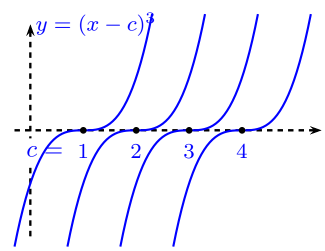
a) $y = (x-c)^3$ (parábolas cúbicas)

b) $y^2 = (x-c)^3$ (parábolas semicúbicas)

c) $y^3 = (x-c)^2$ (parábolas de Neil)

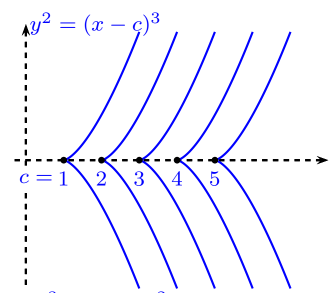
d) $(a+x)(y-c)^2 = x^2(a-x)$ (estrofoides).

Solución

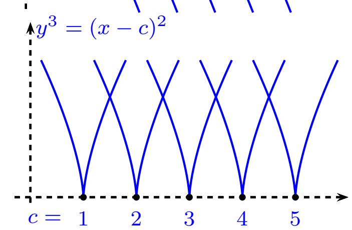


a) Sea $f(x,y,c) = y - (x-c)^3 = 0$, $f_c(x,y,c) = 3(x-c)^2 = 0 \Longrightarrow x = c$ i.e. $y = 0$.

Se observa que la recta $y = 0$ es el lugar geométrico de los puntos de inflexión y también la envolvente de la familia.



b) Sea $f(x,y,c) = y^2 - (x-c)^3 = 0$, $f_c(x,y,c) = 3(x-c)^2 = 0 \Longrightarrow x = 0$ i.e. $y^2 = 0$, es decir la curva discriminante $y = 0$ es el lugar geométrico de los puntos cuspidales y la envolvente de la familia.

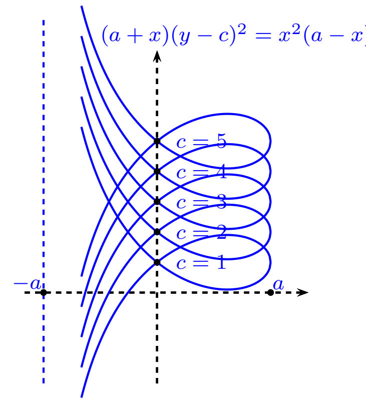


c) Sea $f(x,y,c) = y^3 - (x-c)^2 = 0$, $f_c(x,y,c) = 2(x-c) = 0 \Longrightarrow x = c$ i.e. $y^3 = 0$, o sea la curva discriminante $y = 0$ es el lugar geométrico de los puntos cuspidales, pero no es la envolvente.

d) Consideremos la función

$$f(x,y,c) = (a+x)(y-c)^2 - x^2(a-x) = 0,$$

$f_c(x,y,c) = -2(a+x)(y-c) = 0 \Longrightarrow y = c$, por lo que $f(x,y,c) = x^2(a-x) = 0 \Longrightarrow x = 0, x = a$.
Si $x = -a \Longrightarrow x = 0$ que es imposible. De esta forma tenemos que la curva $x = 0$ es el lugar geométrico de los puntos crunodales y $x = a$ es la envolvente.

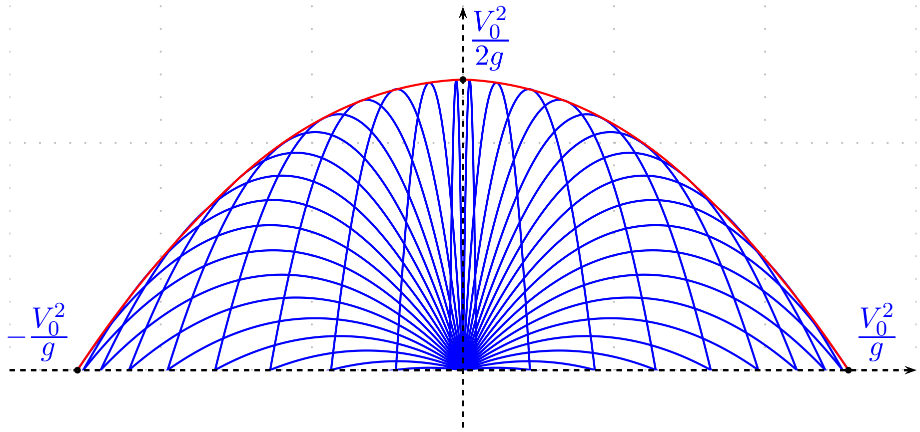


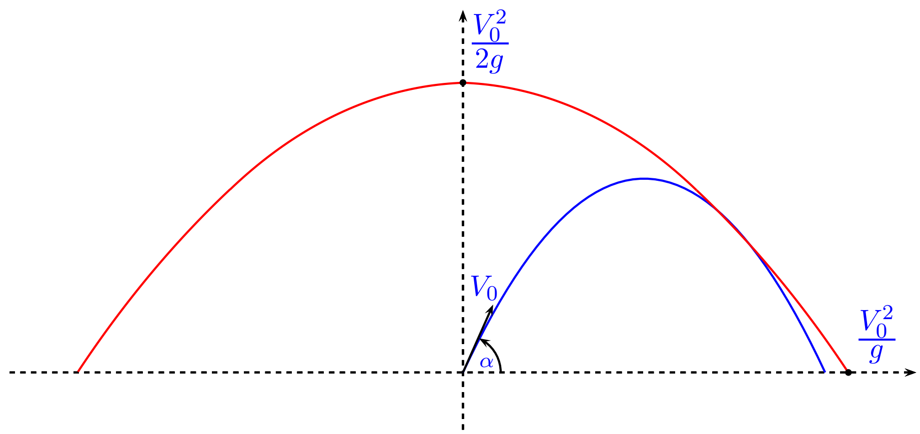
23. La ecuación de la trayectoria que sigue un proyectil lanzado desde el punto O, con velocidad inicial V_o y formando un ángulo α con el horizonte (no se considera la resistencia del aire) es $y = x\tan\alpha - \dfrac{gx^2}{2V_o^2\cos^2\alpha}$. Tomando el ángulo α como parámetro, determinar la envolvente de todas las trayectorias del proyectil situadas en un mismo plano (parábola de seguridad).

Solución Tomamos $f(x,y,\alpha) = y - x\tan\alpha + g\dfrac{x^2}{2V_o^2\cos^2\alpha} = 0$,

$f_\alpha(x,y,\alpha) = -x\sec^2\alpha + (-2\cos^{-3}\alpha)\dfrac{x^2}{2V_o^2}(-\operatorname{sen}\alpha) = \dfrac{-x}{\cos^2\alpha} + \dfrac{x^2 g\operatorname{sen}\alpha}{V_o^2\cos^3\alpha} = 0 \Longrightarrow$
$x = \dfrac{x^2 g}{V_o^2}\tan\alpha$ i.e. $\tan\alpha = \dfrac{V_o^2}{gx} \Longrightarrow 1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha = 1 + \dfrac{V_o^4}{g^2x^2} \Longrightarrow$
$y = \dfrac{xV_o^2}{gx} - \dfrac{gx^2}{2V_o^2}(1 + \dfrac{V_o^4}{g^2x^2}) = \dfrac{V_o^2}{g} - \dfrac{gx^2}{2V_o^2}\dfrac{g^2x^2+V_o^4}{g^2x^2} = \dfrac{V_o^2}{g} - \dfrac{g^2x^2+V_o^4}{2V_o^2 g} =$
$\dfrac{V_o^2}{g} - \dfrac{gx^2}{2V_o^2} - \dfrac{V_o^2}{2g} \Longrightarrow y = \dfrac{V_o^2}{2g} - \dfrac{gx^2}{2V_o^2}$ es la envolvente de la familia de trayectorias.

$$f(x, y, \alpha) = y - x \tan\alpha + g\,\frac{x^2}{2V_o^2 \cos^2\alpha} = 0$$





Capítulo 3

Curvas en el espacio y superficies

En el estudio en el espacio de dimensión 3 se provee al espacio de un sistema de referencia ortonormado $\mathsf{R} = \{\mathbf{0}, \mathsf{i}, \mathsf{j}, \mathsf{k}\}$, el producto escalar $\langle\ ,\ \rangle$ o la norma asociada $\|\quad\|$ y la distancia de puntos a, $\mathsf{b} \in \mathbb{R}^3$ denotada $d(\mathsf{a}, \mathsf{b})$ o $\|\mathsf{a} - \mathsf{b}\| = \|\mathsf{b} - \mathsf{a}\|$.

3.1. Curvas en el espacio

I designa un intervalo de $\mathbb{R}$ no vacío ni reducido a un punto, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$.

Definición 3.1.1 *Se llama arco parametrado de clase C^k, la aplicación $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^k.*

Definición 3.1.2 *Sea $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un arco parametrizado, se llama trayectoria de f la parte $f(I) = \{f(t)/t \in I\} \subset \mathbb{R}^3$.*

Se dice también que $f(I)$ es una curva (del espacio) admitiendo a f por representación paramétrica.

Definición 3.1.3 *Sea $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un arco parametrizado de clase C^k.*

a) Se llama cambio de parámetro (de clase C^k) de f, toda aplicación $\varphi\colon J \longrightarrow I$, donde J es un intervalo de $\mathbb{R}$ tal que φ es de clase C^k en J, φ es biyectiva y φ^{-1} es de clase C^k en I.

b) Se llama parametraje admisible (de clase C^k) de f, toda aplicación $g\colon J \longrightarrow \mathbb{R}^3$, con J intervalo de $\mathbb{R}$ de modo que existe un cambio de parámetro (de clase C^k) φ tal que $g = f \circ \varphi$.

Una curva del espacio se puede definir por un sistema de ecuaciones cartesianas $F(x, y, z) =$

0 *o* $G(x, y, z) = 0$. *En la práctica se pasa de una representación paramétrica de una curva* Γ *del espacio, a un sistema de ecuaciones eliminando el parámetro* t.

Ejemplo Una representación cartesiana de la curva parametrizada $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ es $y = x^2$, $z = x^3$.

Recordemos el teorema de la función implícita, en el caso que nos interesa.

Teorema 3.1.1 *Sea* $U \subset \mathbb{R}^3$ *un abierto,* $\mathrm{u} = (a, b, c) \in U \subset \mathbb{R}^3$ *y* F*,* $G\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ *dos aplicaciones tales que* $F(\mathrm{u}) = G(\mathrm{u}) = 0$*,* F*,* G *son de clase* C^1 *en* U*, de modo que* $\begin{vmatrix} F_y(\mathrm{u}) & F_y(\mathrm{u}) \\ G_y(\mathrm{u}) & G_y(\mathrm{u}) \end{vmatrix} \neq 0$*, entonces existe un intervalo abierto* $V_a \subset \mathbb{R}$ *de centro* a *e intervalos abiertos* W_b*,* $W_c \subset \mathbb{R}$ *de centro* b *y* c*, respectivamente tales que:*

a) $V_a \times W_b \times W_c \subset U$*,*

b) existe un único par de aplicaciones $\varphi\colon V_a \longrightarrow W_b$*,* $\psi\colon V_a \longrightarrow W_c$ *tales que:*

$$\forall\, x \in V_a, \quad F(x, \varphi(x), \psi(x)) = 0, \quad G(x, \varphi(x), \psi(x)) = 0, \quad \textit{con } \varphi, \psi \textit{ clase } C^1 \textit{ en } U.$$

Además si F*,* G*, son de clase* C^k*,* $(k \geq 1)$ *en* U*, entonces* φ*,* ψ *son de clase* C^k *sobre* V_a*.*

3.2. Proyección de una curva en el espacio sobre los planos coordenados

Sea Γ la curva en el espacio de representación paramétrica $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in I$.

Es claro que la proyección Γ_z de Γ sobre el plano $z = 0$, admite por representación paramétrica $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = 0$.

Los resultados son análogos para las otras dos proyecciones.

Ejemplo Determinar y trazar las proyecciones ortogonales sobre los tres planos de coordenadas de la curva de representación paramétrica $x = \cos^2 t$, $y = \cos t \operatorname{sen} t$, $z = \operatorname{sen} t$, $t \in \mathbb{R}$, llamada ventana de Viviani.

1. La proyección Γ_z de Γ sobre el plano xy tiene representación paramétrica $x = \cos^2 t$, $y = \cos t \operatorname{sen} t$, $z = 0$ o bien $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t$, $y = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t$, $z = 0$, es decir Γ_z en el círculo (en $z = 0$) de centro $\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ y de radio $\frac{1}{2}$.

2. La proyección Γ_y y de Γ sobre el plano xz tiene representación paramétrica $x = \cos^2 t$, $y = 0$, $z = \operatorname{sen} t$. Eliminando t se obtiene la representación cartesiana $x = 1 - z^2$, $y = 0$, $0 \leq z \leq 1$, es decir Γ_y es una parábola.

3. La proyección Γ_x de Γ sobre el plano xz tiene representación paramétrica $x = 0$, $y = \cos t \operatorname{sen} t$, $z = \operatorname{sen} t$, o bien representación cartesiana $x = 0$, $y^2 = z^2(1 - z^2)$.

3.3. Tangente en un punto

Definición 3.3.1 *Sea $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathtt{r}(t) = f(t)$ un arco parametrado de clase C^1, $\Gamma = f(I)$ su trayectoria, $\mathtt{r}(t) \in \Gamma$, se dice que $\mathtt{r}(t)$ es un punto regular de Γ si y sólo si $\mathtt{r}'(t) \neq \mathbf{0}$.*

Si f es de clase C^2 se dice que $\mathtt{r}(t)$ es un punto bi-regular si $\{\mathtt{r}'(t), \mathtt{r}''(t)\}$ es libre.

Un punto no regular de Γ se dice estacionario.

Definición 3.3.2 *Sea $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathtt{r}(t) = f(t)$ un arco parametrizado de clase C^1, Γ la trayectoria de f, $t_0 \in I$, $\mathtt{r}_0 = \mathtt{r}(t_0)$.*

a) Se dice que Γ admite una única tangente en $\mathtt{r}(t_o^+)$ (resp. $\mathtt{r}(t_o^-)$) si y sólo si el vector unitario $\dfrac{\mathtt{r}(t) - \mathtt{r}(t_0)}{\|\mathtt{r}(t) - \mathtt{r}(t_0)\|}$, (resp. $\dfrac{\mathtt{r}(t) - \mathtt{r}(t_0)}{\|\mathtt{r}(t) - \mathtt{r}(t_0)\|}$ si existe) tiene un límite cuando $t \to t_0^+$ (resp. $t \to t_0^-$). En este caso se llama semi-tangente en $t \longrightarrow t_0^+$ (resp. $t \to t_0^-$) a Γ, la semirrecta de origen $\mathtt{r}_0$ y dirigida por este límite.

b) Se dice que Γ admite una tangencia en $\mathtt{r}(t_0)$ si y sólo si Γ admite dos semi-tangentes iguales u opuestas en $\mathtt{r}(t_0^+)$ y $\mathtt{r}(t_0^-)$. En este caso se llama tangente en $\mathtt{r}(t_0)$ a Γ, la recta que pasa por $\mathtt{r}_0$ y dirigida por $\mathtt{r}'(t_0)$.

Teorema 3.3.1 *Sea $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un arco paramétrico de clase C^1, Γ su trayectoria. En todo punto regular $\mathtt{r}(t)$, P admite una tangencia dirigida por $\mathtt{r}'(t)$.*

Definición 3.3.3 *Sea $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un arco parametrizado de clase C^1, Γ su trayectoria, $\mathtt{r}(t)$ un punto regular de Γ, $\mathsf{T}(t)$ la tangente en $\mathtt{r}(t)$, se llama:*

a) Plano normal en $\mathtt{r}(t)$ a Γ, el plano que pasa por $\mathtt{r}(t)$ perpendicular a $\mathsf{T}(t)$.

b) Plano tangente en $\mathtt{r}(t)$ a Γ, todo plano conteniendo $\mathsf{T}(t)$.

De esta forma Γ admite en $\mathtt{r}(t)$ un plano normal único y una infinidad de planos tangentes (que forman la red lineal de planos definida por $\mathsf{T}(t)$).

Definición 3.3.4 *Sean $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un arco parametrizado de clase C^1, Γ su trayectoria, $\mathsf{r}(t)$ un punto regular de Γ. Se llama vector tangente unitario (orientado) a Γ en $\mathsf{r}(t)$, el vector denotado $\mathsf{T}(t)$ definido por $\dfrac{\mathsf{r}'(t)}{\|\mathsf{r}'(t)\|}$.*

Definición 3.3.5 *Se llama hélice toda curva Γ del espacio, de clase C^1 regular, tal que existe un vector unitario fijo ν donde el ángulo $(\nu, \mathsf{T}(t))$ es de medida constante (módulo 2π).*

Ejemplo

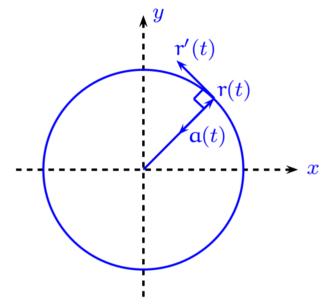
1. Hélice circular a paso constante Sea $\rho > 0$, $h \neq 0$ y Γ la curva $x = \rho\cos t$, $y = \rho \operatorname{sen} t$, $z = ht$, $t \in \mathbb{R}$, entonces $\mathsf{r}' = (-\rho \operatorname{sen} t, \rho\cos t, h) \Longrightarrow \dfrac{\mathsf{k}\cdot\mathsf{T}}{\|\mathsf{k}\|\|\mathsf{T}\|} = \dfrac{h}{\sqrt{p^2+h^2}}$, por lo que el ángulo (k, T) es constante, Γ es una hélice circular a paso constante.

2. Similarmente, la curva Γ, $x = \mathrm{e}^{-t}\cos t$, $y = \mathrm{e}^{-t}\operatorname{sen} t$, $z = \mathrm{e}^{-t}$, $t \in \mathbb{R}$, es una hélice trazada por el cono de ecuación cartesiana $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

3. Las leyes de Newton muestran que un planeta moviéndose alrededor del sol con una trayectoria $\mathsf{r}(t)$, obedece la ley $m\mathsf{r}''(t) = -\dfrac{GmM}{\|\mathsf{r}(t)\|^3}\mathsf{r}(t)$ i.e. $m\mathsf{r}'' = -\dfrac{GmM}{r^3}\mathsf{r}$, donde M es la masa del sol, m la masa del planeta, $r = \|\mathsf{r}\|$ y G es la constante gravitacional. La relación usada para determinar la fuerza de atracción $F = -GmM\mathsf{r}/r^3$ se llama ley de gravitación de Newton.

   Si consideramos que el cuerpo de masa m se mueve con rapidez constante s en una trayectoria circular de radio r_0, podemos suponer que se mueve en el plano xy, $z = 0$, $\mathsf{r}(t) = (r_0\cos\dfrac{ts}{r_0}, r_0 \operatorname{sen}\dfrac{ts}{r_0}, 0)$. Además $\mathbf{a}(t) = \mathsf{r}''(t) = (-\dfrac{s^2}{r_0}\cos\dfrac{ts}{r_0}, -\dfrac{s^2}{r_0}\operatorname{sen}\dfrac{ts}{r_0}, 0) = -\dfrac{s^2}{r_0}\mathsf{r}(t)$.

Así la aceleración va en dirección contraria a $\mathfrak{r}(t)$, es decir se dirige hacia el centro del círculo. Esta aceleración multiplicada por m se llama fuerza centrípeta, por lo que:



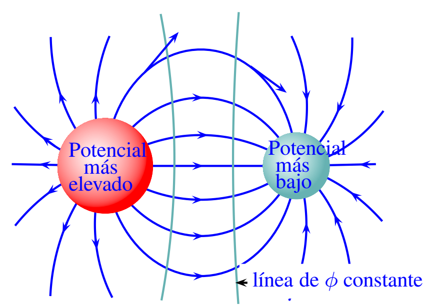
$$-\frac{s^2 m}{r_0^2}\,\mathfrak{r}(t) = -\frac{GmM}{r_0^3}\,\mathfrak{r}(t).$$

Si T es el periodo de una revolución, entonces $2\pi r_0/T = s$ y obtenemos

$$T^2 = r_0^3\,\frac{(2\pi)^2}{GM}\,,$$

es decir, el cuadrado del periodo es proporcional al cubo del radio. Esta ley es una de las tres famosas leyes de Kepler, que dedujo de los datos astronómicos experimentales recogidos por Tycho Brahe durante 30 años.

4. Al considerar dos conductores, uno con carga positiva y otro con carga negativa en el que se instala un potencial eléctrico, $\phi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, el campo eléctrico está dado por $E = \nabla\phi$. Sabemos que E es perpendicular a las superficies de nivel de ϕ. Estas superficies de nivel se llaman superficies equipotenciales, pues en ellas el potencial es constante.



Las superficies equipotenciales son ortogonales al campo de fuerza eléctrico E.

5. En electrostática, la fuerza F de atracción entre dos partículas de cargas opuestas está dado por $F = k\dfrac{\mathfrak{r}}{\|\mathfrak{r}\|^3}$ (ley de Coulomb), donde k es una constante y $\mathfrak{r} = (x, y, z)$; F es el gradiente de $-k/\|\mathfrak{r}\|$.

3.4. Abscisa curvilínea

Sea $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva de clase C^1, $\Gamma = f(I)$ su trayectoria; para $t \in I$ se denota $\mathfrak{r}(t) = f(t) = (x(t), y(t), z(t))$ las coordenadas de $\mathfrak{r}(t)$ en R.

Definición 3.4.1 *Se llama abscisa curvilínea sobre* Γ*, toda aplicación* $s\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ *de clase* C^1 *sobre* I *tal que* $\forall\, t \in I$, $s'(t) = \|\mathfrak{r}'(t)\|$.

Definición 3.4.2 *Sea s una abscisa curvilínea sobre Γ, a, $b \in I$, $A = f(a)$, $B = f(b)$, se llama:*

a) longitud (algebraica) de arco $\overset{\frown}{AB}$ de Γ, denotado $\ell(\overset{\frown}{AB})$ el real $s(b) - s(a)$, es decir

$$\ell(\overset{\frown}{AB}) = \int_a^b \|f'(t)\|\, dt.$$

b) longitud del arco $\overset{\frown}{AB}$ de Γ, el valor absoluto de la longitud (algebraica) de $\overset{\frown}{AB}$ en Γ.

Ejemplo Calcular la longitud L de la curva del espacio $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = -\ln \cos t$, $t \in [\,0, \frac{\pi}{4}\,]$.

Se tiene que $x' = -\operatorname{sen} t$, $y' = \cos t$, $z' = \tan t$, de donde $s'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1 + \tan^2 t = \sec^2 t$ i.e. $s' = \sec t \Longrightarrow L = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} s'(t)\, dt \underset{v=\operatorname{sen} t}{=} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{dv}{1-v^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+v}{1-v}\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \ln(\sqrt{2}+1)$.

Definición 3.4.3 *Se llama parametrización normal de f, toda parametrización admisible $g\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^1 de f, tal que $\forall\, u \in I$, $\|g'(v)\| = 1$.*

Proposición 3.4.1 *Si f es regular entonces:*

a) para toda abscisa curvilínea s sobre Γ, $f \circ s^{-1}$ es una parametrización normal de f.

b) para toda parametrización normal g de f, existe una abscisa curvilínea s sobre Γ tal que $g = f \circ s^{-1}$ o $g = f \circ (-s)^{-1}$.

Se dice simplemente que s y $-s$ son parametrizaciones de f.

c) Observemos que si f es regular y si s es una abscisa curvilínea sobre Γ, entonces en todo punto $\mathrm{r}(s)$ de Γ, el vector tangente unitario $\mathsf{T}(s) = \mathrm{r}'(s)$.

La diferencial de arco de una curva en el espacio en coordenadas cartesianas rectangulares es $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, donde x, y, z son las coordenadas del punto de la curva.

Si $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ son las ecuaciones paramétricas de la curva en el espacio, la longitud del arco en el intervalo $[\,a, b\,]$ de t es:

$$\ell = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt.$$

3.5. El producto vectorial

Definición 3.5.1 *En* $\mathbb{R}^3$*, Se define el producto vectorial de dos vectores,* $\mathrm{r} = (r_1, r_2, r_3)$*,* $\mathrm{u} = (u_1, u_2, u_3)$ *por:*

$$\mathrm{r} \times \mathrm{u} = (r_2u_3 - r_3u_2, r_3u_1 - r_1u_3, r_1u_2 - r_2u_1).$$

Si $\mathrm{r}(t)$ y $\mathrm{u}(t)$ son funciones vectoriales:

$$(\mathrm{r}\cdot\mathrm{u})' = \mathrm{r}\cdot\mathrm{u}' + \mathrm{r}'\cdot\mathrm{u} \qquad (\mathrm{r} \times \mathrm{u})' = \mathrm{r} \times \mathrm{u}' + \mathrm{r}' \times \mathrm{u},$$

Proposición 3.5.1 *Sean* r*,* $\mathrm{u} \in \mathbb{R}^3$*, entonces:*

1) $\mathrm{r} \times \mathrm{u} = -\mathrm{u} \times \mathrm{r}$

2) $\mathrm{r} \times (\mathrm{u} + \mathrm{v}) = \mathrm{r} \times \mathrm{u} + \mathrm{r} \times \mathrm{v}$

3) $\alpha\mathrm{r} \times \mathrm{u} = (\alpha\mathrm{r}) \times \mathrm{u} = \mathrm{r} \times (\alpha\mathrm{u})$, $\alpha \in \mathbb{R}$

4) $\mathrm{r} \times \mathrm{r} = \mathbf{0}$

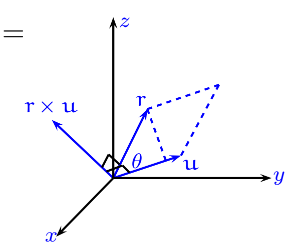
5) $\mathrm{r}\cdot(\mathrm{r} \times \mathrm{u}) = \mathrm{u}\cdot(\mathrm{r} \times \mathrm{u}) = 0$

6) $\|\mathrm{r} \times \mathrm{u}\| = \|\mathrm{r}\|\|\mathrm{u}\| \operatorname{sen}\theta$*, donde* θ *es el ángulo entre* r *y* u*.*

Prueba
$$\begin{aligned}\|\mathrm{r} \times \mathrm{u}\|^2 &= (r_2u_3 - r_3u_2)^2 + (r_3u_1 - r_1u_3)^2 + (r_1u_2 - r_2u_1)^2\\ &= r_2^2u_3^2 - 2r_2u_3r_3u_2 + r_3^2u_2^2 + r_3^2u_1^2 - 2r_3u_1r_1u_3\\ &\quad + r_1^2u_3^2 + r_1^2u_2^2 - 2r_1u_2r_2u_1 + r_2^2u_1^2.\end{aligned}$$

Por otro lado,

$\|\mathrm{r}\|^2\|\mathrm{u}\|^2 \operatorname{sen}^2\theta = \|\mathrm{r}\|^2\|\mathrm{u}\|^2(1 - \cos^2\theta) = \|\mathrm{r}\|^2\|\mathrm{u}\|^2 - (\mathrm{r}\cdot\mathrm{u})^2 =$
$(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) - (r_1u_1 + r_2u_2 + r_3u_3)^2$



y desarrollando esta expresión se tiene el resultado.
Se observa que $\|\mathrm{r} \times \mathrm{u}\|$ *es el área del paralelogramo con lados* r *y* u*.*

7) $\mathrm{r}\cdot(\mathrm{u} \times \mathrm{v}) = \begin{vmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}$

8) $\mathrm{r}\cdot(\mathrm{u}\times\mathrm{v}) = \mathrm{u}\cdot(\mathrm{v}\times\mathrm{r}) = \mathrm{v}(\mathrm{r}\times\mathrm{u})$*, cualquier permutación entre* r*,* u *y* v *es invariante*

9) El intercambio del producto escalar y vectorial deja invariante el producto triple:

$$\mathrm{r}\cdot(\mathrm{u}\times\mathrm{v}) = (\mathrm{r}\times\mathrm{u})\cdot\mathrm{v}.$$

El triple producto $\mathrm{r}\times\mathrm{u}\cdot\mathrm{v}$ *es igual a* $\pm$ *el volumen del paralelepípedo con arista* r*,* u *y* v

10) $\mathrm{r}\times(\mathrm{u}\times\mathrm{v}) \neq (\mathrm{r}\times\mathrm{u})\times\mathrm{v}$

11) $\mathrm{r}\times(\mathrm{u}\times\mathrm{v}) = (\mathrm{r}\cdot\mathrm{v})\mathrm{u} - (\mathrm{r}\cdot\mathrm{u})\mathrm{v}$

$(\mathrm{r}\times\mathrm{u})\times\mathrm{v} = (\mathrm{r}\cdot\mathrm{v})\mathrm{u} - (\mathrm{u}\cdot\mathrm{v})\mathrm{r}$

12) $2\mathrm{r}\cdot\mathrm{u} = \|\mathrm{r}+\mathrm{u}\|^2 - \|\mathrm{r}\|^2 - \|\mathrm{u}\|^2$

$4\mathrm{r}\cdot\mathrm{u} = \|\mathrm{r}+\mathrm{u}\|^2 - \|\mathrm{r}-\mathrm{u}\|^2.$

13) $\mathrm{r}\cdot\mathrm{u}$ *es la norma de la proyección de* r *sobre* u *e inversamente* $w_1 = \dfrac{\mathrm{r}\cdot\mathrm{u}}{\|\mathrm{u}\|^2}\mathrm{u}$ *es la proyección de* r *sobre* u*,* $w_2 = \mathrm{r} - \dfrac{\mathrm{r}\cdot\mathrm{u}}{\|\mathrm{u}\|^2}\mathrm{u}$ *es la componente de* r *ortogonal a* u*.*

14) $\|\mathrm{r}\times\mathrm{u}\|^2 = \|\mathrm{r}\|^2\|\mathrm{u}\|^2 - (\mathrm{r}\cdot\mathrm{u})^2$ *(Identidad de Lagrange)*

15) $\|\mathrm{r}+\mathrm{u}\|^2 + \|\mathrm{r}-\mathrm{u}\|^2 = 2\|\mathrm{r}\|^2 + 2\|\mathrm{u}\|^2$

16) $(\mathrm{r}\times\mathrm{u})\cdot(\mathrm{v}\times w) = \begin{vmatrix} \mathrm{r}\cdot\mathrm{v} & \mathrm{u}\cdot\mathrm{v} \\ \mathrm{r}\cdot w & \mathrm{u}\cdot w \end{vmatrix}.$

3.6. Noción de plano osculador en un punto bi-regular

Definición 3.6.1 *Sea* $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *un arco parametrizado de clase* C^2*,* Γ *su trayectoria* $\mathrm{r}(t)$ *un punto bi-regular de* Γ*, se llama plano osculador a* Γ*, en* $\mathrm{r}(t)$ *el plano pasando por* $\mathrm{r}(t)$ *y dirigido por* $\{\mathrm{r}'(t), \mathrm{r}''(t)\}$*.*

El plano osculador en $\mathrm{r}(t)$ a Γ es tangente en $\mathrm{r}(t)$ a Γ.

Ejemplo Dar la ecuación cartesiana del plano osculador en todo punto $\mathrm{r}(t)$ a la curva Γ de su puntuación paramétrica $x = \mathrm{ch}\ t$, $y = \mathrm{sh}\ t$, $z = t$, $t \in \mathbb{R}$.

Claramente Γ es de clase C^∞ en todo punto $t\in\mathbb{R}$ y $\mathsf{r}'(t) = (\text{sh }t, \text{ch }t, 1)$, $\mathsf{r}''(t) = (\text{ch }t, \text{sh }t, 0)$, o sea $\mathsf{r}(t)$ es bi-regular. Además $\mathsf{r}' \times \mathsf{r}''$ es perpendicular al plano osculador, es decir:

$$[(X,Y,Z)-(\text{ch }t, \text{sh }t, t)]\cdot\mathsf{r}'\times\mathsf{r}'' = \begin{vmatrix} X-\text{ch }t & Y-\text{sh }t & Z-t \\ \text{sh }t & \text{ch }t & 1 \\ \text{ch }t & \text{sh }t & 0 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow X\text{ sh }t - Y\text{ ch }t + Z - t = 0.$$

3.7. Estudio de una curva en el espacio

En esta sección consideremos siempre que $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es un arco parametrizado de clase C^2, $\Gamma = f(I)$ su trayectoria, es una abscisa curvilínea sobre Γ.

Se supone que Γ está parametrizada por $s(\in J)$ y se considera un punto bi-regular $\mathsf{r}(s)$ de Γ, por lo que todo punto de Γ vecino de $\mathsf{r}(s)$ es también bi-regular.

Se denota $\mathsf{T}(s)$ el vector unitario (orientado) en $\mathsf{r}(s)$ a Γ, definido por $\mathsf{T}(s) = \mathsf{r}'(s) = \dfrac{d\mathsf{r}}{ds}$.

Definición 3.7.1 *Se denomina curvatura de Γ en $\mathsf{r}(s)$ y se denota $K(s)$ el real definido por $K(s) = \left\|\dfrac{d\mathsf{T}(s)}{ds}\right\|$.*

Recuerde que $\mathsf{r}(s)$ es bi-regular y se tiene $\dfrac{d\mathsf{T}(s)}{ds} \neq \mathbf{0}$ i.e. $K(s) > 0$.

Definición 3.7.2 *Se llama radio de curvatura de Γ en $\mathsf{r}(s)$ y se denota $R(s)$ el número real $R(s) = \dfrac{1}{K(s)}$.*

Se llama vector normal principal a Γ en $\mathsf{r}(s)$ y se denota $\mathsf{N}(s)$ el vector definido por $\mathsf{N}(s) = R(s)\dfrac{d\mathsf{T}}{ds} = \dfrac{\dfrac{d\mathsf{T}(s)}{ds}}{\left\|\dfrac{d\mathsf{T}(s)}{ds}\right\|}$. Se tiene que $\mathsf{T}'(s) = \dfrac{1}{R(s)}\mathsf{N}(s)$, $\|\mathsf{N}(s)\| = 1$, $R(s) > 0$.

Se observa que el plano osculador en $\mathsf{r}(s)$ a Γ está dirigido por $\{\mathsf{r}'(s), \mathsf{r}''(s)\}$ y también por $\{\mathsf{T}(s), \mathsf{N}(s)\}$. Además, $\forall\, s \in I$, $\|\mathsf{T}(s)\|^2 = 1 \Longrightarrow \forall\, s \in J$, $\mathsf{T}(s)\cdot\dfrac{d\mathsf{T}(s)}{ds} = 0$, es decir que $\mathsf{T}(s)\cdot\mathsf{N}(s) = 0$.

Definición 3.7.3 *Se llama vector binormal a Γ en $\mathsf{r}(s)$ y se denota $\mathsf{B}(s)$, el vector definido por $\mathsf{B}(s) = \mathsf{T}(s) \times \mathsf{N}(s)$.*

El sistema de referencia ortonormado $\{\mathrm{r}(s), \mathsf{T}(s), \mathsf{N}(s), \mathrm{B}(s)\}$ se llama sistema de Frenét de Γ en $\mathrm{r}(s)$.

Definición 3.7.4 *Se supone además que f es de clase C^3 y que $\mathrm{r}(s)$ es un punto tri-regular de Γ, es decir que $\{\mathrm{r}'(t), \mathrm{r}''(t), \mathrm{r}'''(t)\}$ es libre.*
Se llama torsión de Γ en $\mathrm{r}(s)$ y se denota $T(s)$, el número definido por $T(s) = \mathrm{B}(s)\cdot\dfrac{d\mathsf{N}(s)}{ds}$.
Si $T(s) \neq 0$, se denomina radio de torsión de Γ en $\mathrm{r}(s)$ y se denota $\rho(s)$ el número definido $\rho(s) = \dfrac{1}{T(s)}$.

Debemos estar alerta para no confundir el real $T(s)$ y el vector $\mathsf{T}(s)$.

Observación

Puesto que $\mathsf{T}(s)\cdot\mathsf{N}(s) = 0$, derivando se obtiene $\dfrac{d\mathsf{T}(s)}{ds}\cdot\mathsf{N}(s) + \mathsf{T}(s)\cdot\dfrac{d\mathsf{N}(s)}{ds} = 0$ y como $\dfrac{d\mathsf{T}(s)}{ds} = \dfrac{1}{R(s)}\mathsf{N}(s)$ se deduce que $\mathsf{T}(s)\cdot\dfrac{d\mathsf{N}(s)}{ds} = -\dfrac{1}{R(s)}$.

Por otro lado, $\mathsf{N}(s)\cdot\mathsf{N}(s) = 1 \Longrightarrow \mathsf{N}(s)\cdot\dfrac{d\mathsf{N}(s)}{ds} = 0$ y como $\{\mathsf{T}(s), \mathsf{N}(s), \mathrm{B}(s)\}$ es una base ortonormada, se tiene entonces:

$$\frac{d\mathsf{N}(s)}{ds} = \big(\mathsf{T}(s)\cdot\frac{d\mathsf{N}(s)}{ds}\big)\mathsf{T}(s) + \big(\mathsf{N}(s)\cdot\frac{d\mathsf{N}(s)}{ds}\big)\mathsf{N}(s) + \big(\mathrm{B}(s)\cdot\frac{d\mathsf{N}(s)}{ds}\big)\mathrm{B}(s) = -\frac{1}{R(s)}\mathsf{T}(s) + \frac{1}{\rho(s)}\mathrm{B}(s).$$

Finalmente derivando el producto vectorial $\mathrm{B}(s) = \mathsf{T}(s) \times \mathsf{N}(s)$ tenemos que:

$$\frac{d\mathrm{B}(s)}{ds} = \frac{d\mathsf{T}(s)}{ds} \times \mathsf{N}(s) + \mathsf{T}(s) \times \frac{d\mathsf{N}(s)}{ds} = \frac{1}{\rho(s)}\mathsf{T}(s) \times \mathrm{B}(s) = -\frac{1}{\rho(s)}\mathsf{N}(s).$$

Así tenemos las fórmulas de Frenét:

$$\boxed{\frac{d\mathsf{T}(s)}{ds} = \frac{1}{R(s)}\mathsf{N}(s); \qquad \frac{d\mathsf{N}(s)}{ds} = -\frac{1}{R(s)}\mathsf{T}(s) + \frac{1}{\rho(s)}\mathrm{B}; \qquad \frac{d\mathrm{B}(s)}{ds} = -\frac{1}{\rho(s)}\mathsf{N}(s).}$$

Ejemplo Hacer el estudio métrico de la curva Γ: $x = \mathrm{sh}\ 2t - 2t$, $y = \mathrm{ch}\ 2t - 1$, $z = 4\,\mathrm{ch}\ t$, $t \geq 0$.

Se tiene que $x' = 2\,\mathrm{ch}\ 2t - 2$, $y' = 2\,\mathrm{sh}\ 2t$, $z' = 4\,\mathrm{sh}\ t$, $s'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = 4(\mathrm{ch}\ 2t - 1)^2 + 4\,\mathrm{sh}^2\,2t + 16\,\mathrm{sh}^2\,t = 8\,\mathrm{ch}^2\,2t - 8\,\mathrm{ch}\ 2t + 8(\mathrm{ch}\ 2t - 1) = 8\,\mathrm{sh}^2\,2t \Longrightarrow s' = 2\sqrt{2}\,\mathrm{sh}\ 2t$.

$\mathsf{T}(s) = \dfrac{d\mathsf{r}}{ds} = \dfrac{d\mathsf{r}}{dt}\dfrac{dt}{ds} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}\,\mathrm{sh}\ 2t}(2\,\mathrm{ch}\ 2t - 2, 2\,\mathrm{sh}\ 2t, 4\,\mathrm{sh}\ t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{th}\ 2t, 1, \dfrac{1}{\mathrm{ch}\ t}),$

$\dfrac{d\mathsf{T}(s)}{ds} = \dfrac{dt}{ds}\,\dfrac{d\mathsf{T}}{dt} = \dfrac{1}{4\,\mathrm{sh}\ 2t}\left(\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 t}, 0, \dfrac{\mathrm{sh}\ t}{\mathrm{ch}^2 t}\right) = \dfrac{1}{4\,\mathrm{sh}\ 2t\,\mathrm{ch}^2 t}\,(1, 0, \mathrm{sh}\ t),$

$\dfrac{1}{R(s)} = \left\|\dfrac{d\mathsf{T}(s)}{ds}\right\| = \dfrac{\sqrt{1+\mathrm{sh}^2 t}}{4\,\mathrm{sh}\ 2t\,\mathrm{ch}^2 t} = \dfrac{1}{4\,\mathrm{sh}\ 2t\,\mathrm{ch}\ t} \Longrightarrow R(s) = 8\,\mathrm{sh}\ t\,\mathrm{ch}^2 t,$

$\mathsf{N}(s) = R(s)\dfrac{d\mathsf{T}(s)}{ds} = \Big(\dfrac{1}{\mathrm{ch}\ t}, 0, -\,\mathrm{th}\ t\Big), \quad \mathsf{B}(s) = \mathsf{T}(s)\times\mathsf{N}(s) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\Big(-\,\mathrm{th}\ t, 1, -\dfrac{1}{\mathrm{ch}\ t}\Big),$

$\dfrac{d\mathsf{B}(s)}{ds} = \dfrac{dt}{ds}\,\dfrac{d\mathsf{B}(s)}{dt} = \dfrac{1}{4\,\mathrm{sh}\ 2t}\left(-\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 t}, 0, \dfrac{\mathrm{sh}\ t}{\mathrm{ch}\ t}\right), -\dfrac{1}{\rho(s)}\mathsf{N}(s) = -\dfrac{1}{\rho}\Big(\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 t}, 0, -\,\mathrm{th}\ t\Big)$ y como $\dfrac{d\mathsf{B}(s)}{ds} = -\dfrac{1}{\rho(s)}\,\mathsf{N}(s) \Longrightarrow \dfrac{1}{\rho(s)} = \dfrac{1}{4\,\mathrm{sh}\ 2t\,\mathrm{ch}\ t} \Longrightarrow \rho = 8\,\mathrm{sh}\ t\,\mathrm{ch}^2 t.$

3.7.1. Cálculo teórico de $R(s)$ y $\rho(s)$

Proposición 3.7.1 *Sea $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación de clase C^3, $\Gamma = f(I)$, $\mathsf{r}(t)$ es un punto tri-regular, entonces: $R(s) = \dfrac{\|\mathsf{r}'(t)\|^3}{\|\mathsf{r}'(t)\times\mathsf{r}''(t)\|}$, $\rho(s) = \dfrac{\|\mathsf{r}'(t)\times\mathsf{r}''(t)\|^2}{\mathsf{r}'(t)\times\mathsf{r}''(t)\cdot\mathsf{r}'''(t)}$.*

Demostración Se tiene que:

$$\mathsf{r}'(t) = \frac{ds}{dt}\,\frac{d\mathsf{r}}{ds} = s'\mathsf{T}(s) \Longrightarrow \mathsf{r}''(t) = s''\mathsf{T} + s'^2\,\frac{d\mathsf{T}(s)}{ds} = s''\mathsf{T}(s) + \frac{s'^2}{R(s)}\,\mathsf{N}(s)$$

y

$$\begin{aligned}\mathsf{r}'''(t) &= s'''\mathsf{T}(s) + s''\frac{ds}{dt}\frac{d\mathsf{T}(s)}{ds} + \frac{2s's''R(s) - R'(s)s'^2}{R^2(s)}\mathsf{N}(s) + \frac{s'^2}{R(s)}\frac{ds}{dt}\Big(-\frac{1}{R(s)}\mathsf{T}(s) + \frac{1}{\rho(s)}\mathsf{B}(s)\Big)\\ &= s'''\mathsf{T}(s) + \Big(\frac{3s''s'}{R}(s) - \frac{R'(s)s'^2}{R^2(s)}\Big)\mathsf{N}(s) - \frac{s'^3}{R^2(s)}\mathsf{T}(s) + \frac{s'^3}{R(s)\rho(s)}\mathsf{B}(s)\\ &= \big(s''' - \frac{s'^3}{R^2(s)}\big)\mathsf{T}(s) + \big(\frac{3s''s'}{R}(s) - \frac{s'^2R'(s)}{R^2(s)}\Big)\mathsf{N}(s) + \frac{s'^3}{R(s)\rho(s)}\mathsf{B}(s).\end{aligned}$$

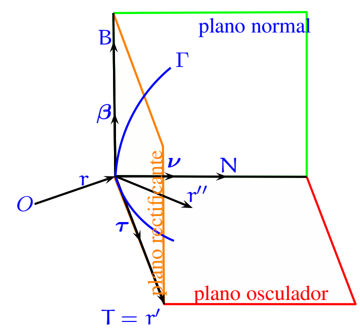
Así tenemos que $\mathsf{r}'\times\mathsf{r}'' = \dfrac{s'^3}{R(s)}\mathsf{T}(s)\times\mathsf{N}(s) = \dfrac{s'^3}{R(s)}\mathsf{B}(s) \Longrightarrow R(s) = \dfrac{s'^3}{\|\mathsf{r}'\times\mathsf{r}''\|} = \dfrac{\|\mathsf{r}'\|^3}{\|\mathsf{r}'\times\mathsf{r}''\|}.$

Además, $\mathsf{r}'\times\mathsf{r}'' = \begin{vmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{N} & \mathbf{B}\\ s' & 0 & 0\\ s'' & \dfrac{s'^2}{R(s)} & 0\end{vmatrix} = \dfrac{s'^3}{R(s)}\mathbf{B}(s)$ y se tiene $\mathsf{r}'\times\mathsf{r}''\cdot\mathsf{r}''' = \dfrac{s'^6}{R^2(s)\rho(s)} \Longrightarrow$

$\rho(s) = \dfrac{\|\mathrm{r}' \times \mathrm{r}''\|^2}{\mathrm{r}' \times \mathrm{r}'' \cdot \mathrm{r}'''}$.

3.8. Resumen: Triedro intrínseco de una curva en el espacio

Observemos que en las fórmulas desarrolladas, el parámetro de trabajo es s y no t, como es el caso en general cuando se expresa r. Por esto es conveniente tener versiones de T, N y B no en función de s, sino en función de t. Se debe distinguir entre $\mathrm{T}(s)$ y $\mathrm{T}(t)$, entre $\mathrm{N}(s)$ y $\mathrm{N}(t)$ y entre $\mathrm{B}(s)$ y $\mathrm{B}(t)$.



En todo punto $\mathrm{r}(t)$ que no sea singular se puede construir un triedro intrínseco formado por tres planos perpendiculares entre sí:

1) un plano osculador en donde están los vectores $\mathrm{r}'(t)$ y $\mathrm{r}''(t)$.

2) un plano normal perpendicular a $\mathrm{r}'(t)$.

3) un plano rectificante perpendicular a los primeros planos.

La intersección de los planos forman tres rectas dirigidas por los vectores:
tangente $\mathbf{T}(t)$, normal principal $\mathbf{N}(t)$ y binormal $\mathbf{B}(t)$ que se determinan por las relaciones:
$\mathbf{T}(t) = \mathrm{r}'(t)$ vector tangente, $\mathbf{B}(t) = \mathrm{r}'(t) \times \mathrm{r}''(t)$ vector binormal, $\mathbf{N}(t) = \mathbf{B}(t) \times \mathbf{T}(t)$ (vector normal principal).

Los correspondientes vectores unitarios son $\boldsymbol{\tau}(t) = \dfrac{\mathbf{T}(t)}{\|\mathbf{T}(t)\|}$, $\boldsymbol{\beta}(t) = \dfrac{\mathbf{B}(t)}{\|\mathbf{B}(t)\|}$, $\boldsymbol{\nu}(t) = \dfrac{\mathbf{N}(t)}{\|\mathbf{N}(t)\|}$, se pueden calcular por las fórmulas $\boldsymbol{\tau}(s) = \dfrac{d\mathrm{r}(s)}{ds}$, $\boldsymbol{\nu}(s) = \dfrac{\frac{d\boldsymbol{\tau}(s)}{ds}}{\|\frac{d\boldsymbol{\tau}(s)}{ds}\|}$, $\boldsymbol{\beta}(s) = \boldsymbol{\tau}(s) \times \boldsymbol{\nu}(s)$.

Observemos que $\boldsymbol{\tau}(s) = \mathbf{T}(s)$, $\boldsymbol{\beta}(s) = \mathbf{B}(s)$ y $\boldsymbol{\nu}(s) = \mathbf{N}(s)$.

– Si X, Y, Z son las coordenadas variables del punto de tangencia, las ecuaciones de la recta tangente en el punto (x, y, z) tiene la forma $\dfrac{X - x}{T_x} = \dfrac{Y - y}{T_y} = \dfrac{Z - z}{Y_z}$, donde $\mathbf{T}(t) = (T_x, T_y, T_z)$.

La ecuación del plano normal es $T_x(X - x) + T_y(Y - y) + T_z(Z - z) = 0$.

De manera similar obtenemos las ecuaciones de las rectas binormal y normal y de los planos osculador y rectificante.

Ejemplo Determinar los vectores unitarios principales $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$ y $\boldsymbol{\beta}$ de la curva $\mathrm{r} = (t, t^2, t^3)$ en $t = 1$. Escribir las ecuaciones tangentes, normal principal y binormal en este punto.

Solución Se tiene que $\mathrm{r}' = (1, 2t, 3t^2)$, $\mathrm{r}'' = (0, 2, 6t)$, es decir en $t = 1$:

$\mathbf{T} = (1,2,3)$, $\mathbf{B} = \mathrm{r}' \times \mathrm{r}'' = \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = (6, -6, 2)$, $\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T} = \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ 6 & -6 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$ $(-22, -16, 18)$, por consiguiente $\boldsymbol{\tau} = \dfrac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3)$, $\boldsymbol{\beta} = \dfrac{1}{\sqrt{19}}(3,-3,1)$, $\boldsymbol{\nu} = \dfrac{1}{\sqrt{266}}(-11,-8,9)$.

Para $t = 1$, $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$, entonces la ecuación de la recta tangente es $(1,1,1) + t(1,2,3)$, la recta binormal es $(1,1,1)+t(3,-3,1)$ y la norma principal $(1,1,1)+t(-11,-8,9)$.

Caso en que la curva es la intersección de dos superficies

Si la curva en el espacio se da como intersección de dos superficies $F(x,y,z) = 0$, $G(x,y,z) = 0$, de modo que $\operatorname{rang}\begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{pmatrix} = 2$, permutando los papeles de x, y, z se puede suponer que $\begin{pmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{pmatrix}$ es de rango 2. Por el Teorema de la función implícita existen funciones φ, ψ de clase C^1 tales que $F(x, \varphi(x), \psi(x)) = 0$, $G(x, \varphi(x), \psi(x)) = 0$, es decir que la curva admite una representación paramétrica $x = x$, $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$.

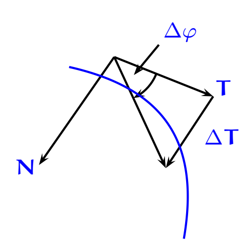
Es claro que derivando $F_x + F_y\varphi' + F_z\psi' = 0$, $G_x + G_y\varphi' + G_z\psi' = 0$, o bien el vector $(1, \varphi', \psi')$ es tangente a ambas superficies y por lo tanto a la curva.

Se puede escribir que $\mathbf{T} = \mathrm{r}' = (1, \varphi', \psi')$, por lo que tenemos $\mathrm{r} = (t, \varphi, \psi)$ así como $\mathrm{r}'' = (0, \varphi'', \psi'')$ i.e. $\mathbf{B} = \mathrm{r}' \times \mathrm{r}''$, $\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T}$.

Significado de la curvatura

Se denomina curvatura de una curva en un punto r, la expresión $K = \dfrac{1}{R} = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \left|\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|$, donde φ es el ángulo de giro de la tangente (ángulo de contingencia) y Δs la longitud de arco i.e. $K = \left|\dfrac{d\varphi}{ds}\right|$.

R se llama radio de curvatura.



En efecto, sabemos que $K(s) = \left\langle \frac{d\mathbf{T}}{ds}(s), \mathbf{N}(s) \right\rangle$ y consideremos $\Delta\varphi$ el ángulo que gira la tangente cuando se pasa de $\mathbf{T}(s)$ a $\mathbf{T}(s+\Delta s)$. Así $\left\langle \frac{\Delta\mathbf{T}}{\Delta s}(s), \mathbf{N}(s) \right\rangle \approx \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$, es decir $K = \lim\limits_{\Delta s\to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \varphi'(s)$. Así la curvatura mide el cambio del ángulo de la tangente con respecto al cambio de la longitud del arco.

Si la curva se da por la ecuación $\mathrm{r} = \mathrm{r}(s)$ se tiene que $K = \frac{1}{R} = \|\frac{d^2\mathrm{r}}{ds^2}\|$.

Si la curva se da en forma paramétrica $\mathrm{r} = \mathrm{r}(t)$ tenemos $\frac{1}{K} = \frac{\|\mathrm{r}'(t)\times\mathrm{r}''(t)\|}{\|\mathrm{r}'(t)\|^3}$.

Significado de la torsión

Se llama torsión de una curva en el punto $\mathrm{r}(s)$, la expresión $T(s) = \frac{1}{\rho(s)} = -\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\psi}{\Delta s}$, donde ψ es el ángulo de giro de la binormal o el plano osculador (ángulo de contingencia de 2^o grado). La magnitud $\rho(s)$ se llama radio de torsión.

En efecto, $T(s) = -\left\langle \mathbf{N}(s), \frac{d\mathbf{B}}{ds}(s)\right\rangle$ y si $\Delta\psi$ es el ángulo que gira la binormal cuando pasa de $\mathbf{B}(s)$ a $\mathbf{B}(s+\Delta s)$ obtenemos $T(s) = -\frac{d\psi}{ds}$.

Si $\mathrm{r} = \mathrm{r}(s)$ se tiene que $\frac{1}{\rho(s)} = \pm\|\frac{d\boldsymbol{\beta}(s)}{ds}\| = \frac{\frac{d\mathrm{r}}{ds}\times\frac{d^2\mathrm{r}}{ds^2}\cdot\frac{d^3\mathrm{r}}{ds^3}}{\|\frac{d\mathrm{r}}{ds}\|^2}$, donde el signo menos se toma cuando los vectores $\frac{d\boldsymbol{\beta}(s)}{ds}$ y $\boldsymbol{\nu}(s)$ tienen la misma dirección y el signo más en el caso contrario.

Si $\mathrm{r} = \mathrm{r}(t)$ se tiene $\frac{1}{\rho(s)} = \frac{\mathrm{r}'(t)\times\mathrm{r}''(t)\cdot\mathrm{r}'''(t)}{\|\mathrm{r}'(t)\times\mathrm{r}''(t)\|^2}$.

Si designamos por (x,y,z) las coordenadas de $\mathrm{r}(s)$ en la base canónica, tenemos que las componentes de $\mathbf{T}$ son $x'(s) = \frac{dx}{ds}$, $y'(s) = \frac{dy}{ds}$, $z'(s) = \frac{dz}{ds}$, con $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$.

La normal principal $\mathbf{N}(s) = R(s)\frac{d\mathbf{T}}{ds}(s)$ tiene como cosenos directores $x''(s)R(s), y''(s)R(s), z''(s)R(s)$. Como $\mathbf{N}(s)$ es unitario $R^2(s)(x''^2(s) + y''^2(s) + z''^2(s)) = 1$, o sea:

$$R(s) = \frac{1}{\sqrt{x''^2(s) + y''^2(s) + z''^2(s)}}.$$

Por otro lado, $\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s) = R(s)\mathbf{T}(s) \times \dfrac{d\mathbf{T}}{ds}(s)$, lo que implica

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{B}}{ds}(s) = -\frac{1}{T(s)}\mathbf{N}(s) &= \left(\frac{dR(s)}{ds}\mathbf{T}(s) + R(s)\frac{d\mathbf{T}}{ds}(s)\right) \times \frac{d\mathbf{T}}{ds}(s) + R(s)\mathbf{T}(s) \times \frac{d^2\mathbf{T}}{ds^2}(s)\\ &= \frac{1}{R(s)}\frac{dR(s)}{ds}\mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s) + R(s)\mathbf{T}(s) \times \frac{d^2\mathbf{T}}{ds^2}(s).\end{aligned}$$

Así el producto escalar con $\mathbf{N}$ es $\dfrac{1}{T(s)} = -R^2(s)\left\langle \dfrac{d\mathbf{T}}{ds}(s), \mathbf{T}(s) \times \dfrac{d^2\mathbf{T}}{ds^2(s)}\right\rangle = R^2(s)D(s)$, donde:

$$D(s) = \begin{vmatrix} x'(s) & y'(s) & z'(s) \\ x''(s) & y''(s) & z''(s) \\ x'''(s) & y'''(s) & z'''(s) \end{vmatrix}.$$

Observamos que la curvatura hace intervenir las derivadas de orden dos y es positiva en tanto que la torsión hace intervenir las derivadas de orden tres y tiene un signo que se interpretará más adelante.

Ejemplo Probar que el vector aceleración $\mathrm{r}''(t)$ está en el plano de $\mathbf{T}(s)$ y $\mathbf{N}(s)$, y que la componente de $\mathrm{r}(s)$ en la dirección $\mathbf{N}(s)$ no es negativa.

En efecto, $\mathbf{T}(s) = \dfrac{d\mathrm{r}}{dt}\dfrac{dt}{ds} = \dfrac{\mathrm{r}'(t)}{(s'(t)} \Longrightarrow \mathrm{r}'(t) = s'(t)\mathbf{T}(s) \Longrightarrow \mathrm{r}''(t) = \dfrac{d}{dt}(s'(t)\mathbf{T}(s)) = s''\mathbf{T}(s) + s'\dfrac{dT(s)}{dt} = s''\mathbf{T}(s) + s'\dfrac{dT(s)}{ds}\dfrac{ds}{dt}$, es decir

$$\mathrm{a}(t) = \mathrm{r}''(t) = s''\mathbf{T}(s) + \frac{s'^2}{R(s)}\mathbf{N}(s),$$

como se quería demostrar.

Ejemplo La hélice circular Γ dada por las fórmulas $x = a\cos t$, $y = a\,\mathrm{sen}\,t$, $z = ht$, a, $t > 0$, tiene longitud de arco s con derivada $\dfrac{ds}{dt} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} = \sqrt{a^2 + h^2}$.

El vector unitario $\mathbf{T}$ de la tangente de Γ tiene como coordenadas: $\dfrac{dx}{ds} = \dfrac{\frac{dx}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = -\dfrac{a\,\mathrm{sen}\,t}{\sqrt{a^2+h^2}}$, $\dfrac{dy}{ds} = \dfrac{a\cos t}{\sqrt{a^2+h^2}}$, $\dfrac{dz}{ds} = \dfrac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}$. Además: $\dfrac{d^2x}{ds^2} = -\dfrac{a\cos t}{a^2+h^2}$, $\dfrac{d^2y}{ds^2} = -\dfrac{a\,\mathrm{sen}\,t}{a^2+h^2}$, $\dfrac{d^2z}{ds^2} = 0$, $1/R(s) = \|\mathrm{r}''\| = \dfrac{a}{a^2+h^2}$, $\mathbf{N} = \dfrac{\mathrm{r}''}{\|\mathrm{r}''\|} = (-\cos t, -\mathrm{sen}\,t, 0)$, lo que prueba que la normal principal de Γ es paralela al plano xy. Finalmente: $\mathbf{B} = (h \operatorname{sen} t, -h\cos t, a)/(a^2+h^2)$, $\dfrac{d\mathbf{B}}{ds} = (h\cos t, h \operatorname{sen} t, 0)/(a^2+h^2)$, $T(s) = -\dfrac{d\mathbf{B}(s)}{ds}\cdot\mathbf{N}(s) = -\dfrac{h}{a^2+h^2}$.

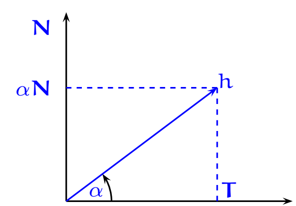
Fórmulas de Frenét

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{\boldsymbol{\nu}(s)}{R(s)}, \quad \frac{d\boldsymbol{\nu}}{ds} = -\frac{\boldsymbol{\tau}(s)}{R(s)} + \frac{\boldsymbol{\beta}(s)}{\rho(s)}, \quad \frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} = -\frac{\boldsymbol{\nu}(s)}{\rho(s)}.$$

Proposición 3.8.1 *Para que una curva Γ sea una hélice es necesario y suficiente que su curvatura sea proporcional a su torsión.*

Prueba

($\Longleftarrow$) Supongamos que $T(s) = \alpha K(s)$, entonces podemos integrar parcialmente el sistema de Frenét. En efecto la primera y la tercera ecuación nos proporcionan $\dfrac{d\mathbf{T}}{ds} + \alpha\dfrac{d\mathbf{B}}{ds} = \mathbf{0}$, $\mathbf{T} + \alpha\mathbf{B} = \mathfrak{h}$, donde $\mathfrak{h}$ es una constante. Así $\langle \mathbf{T}, \mathfrak{h}\rangle = 1$ y como los vectores $\mathbf{T}$ y $\mathfrak{h}$ tienen normas constantes, el ángulo que forman es constante; resultando que $\mathbf{T}$ forma un ángulo constante con una dirección fija.



($\Longrightarrow$) Supongamos que existe un vector fijo $\mathfrak{h}$ con el cual $\mathbf{T}$ forma un ángulo constante; $\mathfrak{h} = h_1\mathbf{T} + h_2\mathbf{N} + h_3\mathbf{B}$ y se tiene:

$$\frac{d\mathfrak{h}}{ds} = h_1\frac{d\mathbf{T}}{ds} + h_2\frac{d\mathbf{N}}{ds} + h_3\frac{d\mathbf{B}}{ds} + \frac{dh_2}{ds}\mathbf{N} + \frac{dh_3}{ds}\mathbf{B} = \mathbf{0},$$

pues h_1 es constante, con lo que:

$$-\frac{h_2}{R}\mathbf{T} + \Big(\frac{h_1}{R} - \frac{h_3}{\rho} + h_2'\Big)\mathbf{N} + \Big(\frac{h_2}{\rho} + h_3'\Big)\mathbf{B} = \mathbf{0}.$$

Si $K(s) = 0$ se tiene $\dfrac{d\mathbf{T}}{ds} = \mathbf{0}$, $\mathbf{T}$ es fijo y Γ es una recta, o bien si $h_2 = 0$ i.e. $\dfrac{h_1}{R} - \dfrac{h_3}{\rho} = 0$, $h_3' = 0$, por lo que h_3 es constante y $\dfrac{R}{\rho} = \dfrac{h_1}{h_3} =$ constante.

Definición 3.8.1 *Una hélice que tiene curvatura y torsión constante se denomina hélice circular*

En el caso de hélices circulares el sistema de Frenét es un sistema lineal con coeficientes constantes que podemos integrar, de modo que:

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \frac{1}{T}\mathbf{a}_1 - \frac{1}{R}(\mathbf{a}_2\cos\omega s - \mathbf{a}_3\operatorname{sen}\omega s)\\ \mathbf{N} &= \qquad \omega(\mathbf{a}_2\operatorname{sen}\omega s - \mathbf{a}_3\cos\omega s)\\ \mathbf{B} &= \frac{1}{R}\mathbf{a}_1 + \frac{1}{T}(\mathbf{a}_2\cos\omega s - \mathbf{a}_3\operatorname{sen}\omega s) \qquad \omega^2 = \frac{1}{R^2}+\frac{1}{T^2},\end{aligned}$$

es decir $r(s) = r_0 + \frac{1}{T}\mathbf{a}_1 s + \frac{1}{\omega R}(\mathbf{a}_2\operatorname{sen}\omega s + \mathbf{a}_3\cos\omega s)$.

Vamos ahora a interpretar las constantes. Sabemos que $\frac{1}{T}\mathbf{T} + \frac{1}{R}\mathbf{B} = \omega^2\mathbf{a}_1$ y como $\omega^2 = \frac{1}{T^2} + \frac{1}{R^2}$, $\omega\mathbf{a}_1$ es unitario. Además $\langle\omega\mathbf{a}_1, \mathbf{T}\rangle = \frac{1}{\omega T}$, por lo que $\mathbf{T}$ forma con $\mathbf{a}_1$ un ángulo constante θ, de modo que $\cos\theta = \frac{1}{\omega T}$ y cuya tangente es igual a $\frac{T}{R}$.

Situémonos en $s = 0$, así $\mathbf{T} = \frac{1}{T}\mathbf{a}_1 - \frac{1}{R}\mathbf{a}_2$, $\mathbf{N} = \omega\mathbf{a}_3$, $\mathbf{B} = \frac{1}{R}\mathbf{a}_1 + \frac{1}{T}\mathbf{a}_2$, o bien $\omega\mathbf{a}_1 = \frac{1}{\omega}\big(\frac{1}{T}\mathbf{T} + \frac{1}{R}\mathbf{B}\big)$, $\omega\mathbf{a}_2 = \frac{1}{\omega}\big(-\frac{1}{R}\mathbf{T} + \frac{1}{T}\mathbf{B}\big)$, $\omega\mathbf{a}_3 = \mathbf{N}$, que forma un triedro ortonormal. Tomemos como vectores de la base $\mathfrak{e}_1 = \omega\mathbf{a}_3$, $\mathfrak{e}_2 = \omega\mathbf{a}_2$, $\mathfrak{e}_3 = \omega\mathbf{a}_1$, entonces $\mathfrak{r}(s) = \frac{1}{\omega^2 T}(\mathfrak{e}_1\cos\omega s + \mathfrak{e}_2\operatorname{sen}\omega s) + \frac{s}{\omega T}\mathfrak{e}_3$ y la curva esta trazada sobre un cilindro de revolución de radio $\frac{1}{\omega^2 R}$. Para un giro completo $\mathfrak{r}$ se desplazada paralelamente al eje del cilindro. La longitud $\frac{2\pi}{\omega^2 T}$ se llama paso de la hélice.

Ejemplo Hallar la curvatura y la torsión de la hélice circular $\mathfrak{r}(t) = (\cos t, a\operatorname{sen} t, bt)$, $a > 0$.

Solución Se tiene que $\mathfrak{r}' = (-a\operatorname{sen} t, a\cos t, 0)$, $\mathfrak{r}'' = (-a\cos t, -a\operatorname{sen} t, 0)$,

$$\mathfrak{r}''' = (a\operatorname{sen} t, -a\cos t, 0) \Longrightarrow \mathfrak{r}'\times\mathfrak{r}'' = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k}\\ -a\operatorname{sen} t & a\cos t & b\\ -a\cos t & -a\operatorname{sen} t & 0\end{vmatrix} = (ab\operatorname{sen} t, -ab\cos t, a^2),$$

$$\mathfrak{r}'\times\mathfrak{r}''\cdot\mathfrak{r}''' = \begin{vmatrix} -a\operatorname{sen} & a\cos t & b\\ -a\cos t & -a\operatorname{sen} t & 0\\ a\operatorname{sen} t & -a\cos t & 0\end{vmatrix} = a^2 b \Longrightarrow \frac{1}{R} = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a}{a^2+b^2},\ \frac{1}{\rho} = \frac{a^2 b}{a^2(a^2+b^2)} = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

Ejemplo Determinar la curvatura y la torsión de la curva dada por la relación $\mathfrak{r} = (\operatorname{sh} 2t -$

$2t, \mathrm{ch}\ 2t-1, 4\,\mathrm{ch}\ t), t \geq 0$.

Solución Se tiene que $\mathrm{r}' = (2\,\mathrm{ch}\ 2t-2, 2\,\mathrm{sh}\ 2t, 4\,\mathrm{sh}\ t)$, $s'^2 = x'^2+y'^2+z'^2 =$ $4(\mathrm{ch}\ 2t-1)^2+4\,\mathrm{sh}^2 2t+16\,\mathrm{sh}^2 t = 8\,\mathrm{ch}^2 2t-8\,\mathrm{ch}\ 2t+8(\mathrm{ch}\ 2t-1) = 8\,\mathrm{sh}^2 2t \Longrightarrow s' =$ $2\sqrt{2}\,\mathrm{sh}\ 2t$.

$\boldsymbol{\tau} = \dfrac{d\mathrm{r}}{ds} = \dfrac{d\mathrm{r}}{dt}\dfrac{dt}{ds} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}\,\mathrm{sh}\ 2t}(2\,\mathrm{ch}\ 2t-2, 2\,\mathrm{sh}\ 2t, 4\,\mathrm{sh}\ t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{th}\ t, 1, \mathrm{sech}\ t)$,

$\dfrac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \dfrac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}\,\dfrac{dt}{ds} = \dfrac{1}{4\,\mathrm{sh}\ 2t}\,(\mathrm{sech}^2 t, 0, -\dfrac{\mathrm{sh}\ t}{\mathrm{ch}^2 t}) = \dfrac{1}{4\,\mathrm{sh}\ 2t\,\mathrm{ch}^2 t}\,(1, 0, -\,\mathrm{sh}\ t)$,

$\dfrac{1}{R} = \|\,\dfrac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\,\| = \dfrac{\sqrt{1+\mathrm{sh}^2 t}}{4\,\mathrm{sh}\ 2t\,\mathrm{ch}^2 t} = \dfrac{1}{4\,\mathrm{sh}\ 2t\,\mathrm{ch}\ t}$, $R = 8\,\mathrm{sh}\ t\,\mathrm{ch}^2 t$, $\boldsymbol{\nu} = R\dfrac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = (\dfrac{1}{\mathrm{ch}\ t}, 0, -\,\mathrm{th}\ t)$,

$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{\nu} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ \mathrm{th}\ t & 1 & -\,\mathrm{sh}\ t \\ \dfrac{1}{\mathrm{ch}\ t} & 0 & -\,\mathrm{th}\ t \end{vmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\big(-\,\mathrm{th}\ t, 1, -\dfrac{1}{\mathrm{ch}\ t}\big)$,

$\dfrac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} = \dfrac{d\boldsymbol{\beta}}{dt}\,\dfrac{dt}{ds} = \dfrac{1}{4\,\mathrm{sh}\ 2t}\big(-\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 t}, 0, -\dfrac{\mathrm{sh}\ t}{\mathrm{ch}^2 t}\big) = -\dfrac{\boldsymbol{\nu}}{\rho} \Longrightarrow \dfrac{1}{\rho} = \dfrac{1}{4\,\mathrm{sh}\ 2t\,\mathrm{ch}^2 t}$ i.e. $\rho = 8\,\mathrm{sh}\ t\,\mathrm{ch}^2 t$.

3.8.1. Resolución aproximada de las fórmulas de Frenét

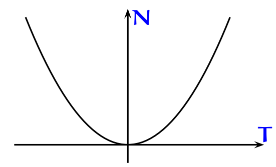
Si se supone que $\mathrm{r}(s)$ tiene derivadas de orden 3 de un vecindario de s_o:

$$\mathrm{r}-\mathrm{r}_o = (s-s_o)\mathrm{r}'_o + \frac{1}{2!}(s-s_o)^2\mathrm{r}''_o + \frac{1}{3!}(s-s_o)^3\mathrm{r}'''_o + o((s-s_o)^3).$$

Además como $\mathbf{T} = \mathrm{r}'_o$, $\mathbf{N} = \dfrac{\mathrm{r}''_o}{\|\mathrm{r}''_o\|}$, $\mathbf{B} = \mathbf{T}\times\mathbf{N}$, $(\mathrm{r}''_o \neq 0)$ son mutuamente ortogonales, tenemos $\mathrm{r}(s)-\mathrm{r}(s_o) = \alpha(s)\mathbf{T}+\beta(s)\mathbf{N}+\gamma(s)\mathbf{B}$, donde $\alpha(s) = \langle \mathrm{r}-\mathrm{r}_o, \mathbf{T}\rangle$, $\beta(s) = \langle \mathrm{r}-\mathrm{r}_o, \mathbf{N}\rangle$, $\gamma(s) = \langle \mathrm{r}-\mathrm{r}_o, \mathbf{B}\rangle$, $\alpha'(s_o) = \dfrac{d}{ds}\langle \mathrm{r}-\mathrm{r}_o, \mathbf{T}\rangle\big|_{s=s_o} = \langle \mathrm{r}'_o, \mathbf{T}\rangle = 1$, $\beta'(s_o) = \langle \mathrm{r}'_o, \mathbf{N}\rangle = 0$, $\beta''(s_o) = \langle \mathrm{r}''_o, \mathbf{N}\rangle \neq 0$, $\gamma'(s_o) = \gamma''(s_o) = 0$, $\gamma'''(s_o) = \langle \mathrm{r}''_o, \mathbf{N}\rangle \neq 0$.

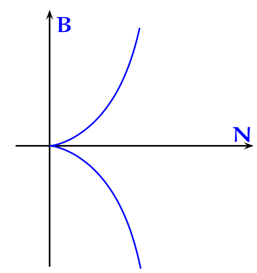
La condición $\gamma'''(s_o) \neq 0$ se introduce adicionalmente. El caso $\gamma'''(s_o) = 0$ es excepcional.

Si consideramos la curva Γ en dirección de la binormal, la proyección $\Gamma_{\mathbf{B}}$ de Γ sobre el plano de los vectores $\mathbf{T}$ y $\mathbf{N}$ (plano osculador), es decir $(r - r_o)_{\mathbf{B}} = \alpha(s)\mathbf{T} + \beta(s)\mathbf{N}$, la curva $\Gamma_{\mathbf{B}}$ no atraviesa la tangente $\mathbf{T}$ en r_o pues $r'(s) = \alpha'(s)\mathbf{T} + \beta'(s)\mathbf{N}$ i.e. $r'(s_o) = r'_o = \mathbf{T}$ y así $\alpha(s) = (s - s_o) + o(s - s_o)^3$, $\beta(s) = \beta'(s_o)^2(s - s_o)^2 + o(s - s_o)^3$.



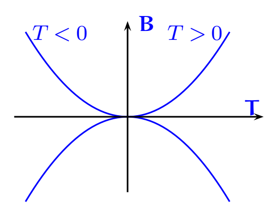
Si se observa Γ en la dirección de la tangente la proyección $\Gamma_{\mathbf{T}}$ sobre el plano de los vectores $\mathbf{N}$ y $\mathbf{B}$ (plano normal de Γ en r_o), $(r - r_o)_{\alpha} = \beta(s)\mathbf{N} + \gamma(s)\mathbf{B}$. La curva $\Gamma_{\mathbf{T}}$ está determinada por las ecuaciones $X = \beta(s)$, $Y = \gamma(s)$, donde (X, Y) es un sistema ortonormado con vectores $\mathbf{N}$ y $\mathbf{B}$. Así se tiene $X = \frac{1}{2}(s - s_o)^2\beta''(s) + o((s - s_o)^3)$, $Y = \frac{1}{3!}(s - s_o)^3\gamma'''(s) + o((s - s_o)^3)$.

Además: $\left(\dfrac{dY}{dX}\right)(s_o) = \lim\limits_{s \to s_o} \dfrac{\gamma'(s)}{\beta'(s)} = \lim\limits_{s \to s_o} \dfrac{\gamma''(s)}{\beta''(s)} = \dfrac{\gamma''(s_o)}{\beta''(s_o)} = 0$, y el signo de $Y = \gamma(s)$ varía con el signo de $s - s_o$. La curva tiene un punto de retroceso de 1^a especie en el origen del sistema de coordenadas (X, Y).



Finalmente si se observa Γ a lo largo de la normal principal, vemos la proyección $\Gamma_{\mathbf{N}}$ sobre el plano de los vectores $\mathbf{T}$ y $\mathbf{B}$ (plano rectificante de Γ en r_o), tenemos $(r - r_o)_{\mathbf{N}} = \alpha(s)\mathbf{T} + \gamma(s)\mathbf{B}$. La curva $X = \alpha(s), Y = \gamma(s)$ tiene las propiedades $\left(\dfrac{dY}{dX}\right)(s_o) = \dfrac{\gamma'(s_o)}{\beta'(s_o)} = 0$, $\left(\dfrac{d^2Y}{dX^2}\right)(s_o) = \dfrac{\alpha'(s_o)\gamma''(s_o) - \alpha''(s_o)\gamma'(s_o)}{\alpha'(s_o)^2} = 0$, $\left(\dfrac{d^3Y}{dX^3}\right)(s_o) = \gamma'''(s_o) \neq 0$.

Así, la curva $\Gamma_{\mathbf{N}}$ tiene punto de inflexión en r_o y la forma depende de la torsión T.



Dos curvas con igual curvatura y torsiones opuestas tienen la propiedad que una es la imagen de la otra en un espejo y plano.

3.9. Superficies

En esta sección U designa un abierto de $\mathbb{R}^2$, k es un entero ≥ 1 o bien ∞.

Definición 3.9.1 *Se llama superficie parametrizada de clase C^k, toda aplicación $\Phi\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^k sobre U.*

Se dice también que $\Phi(U)$ es una superficie admitiendo Φ por representación paramétrica.

Si S es una superficie admitiendo $\Phi\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ como representación paramétrica (de clase C^k), entonces $(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ son las coordenadas de $\Phi(u,v)$ en $\mathbb{R}^3$. Se obtiene una ecuación cartesiana de S, eliminando (u,v) en el sistema de ecuaciones $x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v)$.

Ejemplos

1. La superficie de representación paramétrica $x = u\cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, $z = u^4$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, admite por ecuación paramétrica $(x^2+y^2)^2 - z = 0$.

2. La superficie de representación paramétrica $x = u+v$, $y = u^2+v^2$, $z = u^3+v^3$, puede expresarse:

$$\begin{cases} x = u+v \\ y = u^2+v^2 = (u+v)^2 - 2uv \\ z = u^3+v^3 = (u+v)^3 - 3(u+v)uv \end{cases} \iff \begin{cases} x = u+v \\ y = x^2 - 2uv \\ z = x^3 - 3xuv \end{cases} \iff$$
$$\begin{cases} u+v = x \\ uv = \frac{1}{2}(x^2-y) \\ z = x^3 - \frac{3}{2}x(x^2-y). \end{cases}$$

Puesto que u, v están determinados por la suma σ y el producto π, que son los ceros del polinomio $x^2 - \sigma x + \pi$, se tiene que $\exists (u,v) \in \mathbb{R}^2$ tales que $u+v = x$, $uv = \dfrac{x^2-y}{2} \iff x^2 - 4\dfrac{x^2-y}{2} \geq 0 \iff 2y - x^2 \geq 0$. De esta manera una ecuación cartesiana de S es $x^3 - 3xy + 2z = 0$, $y \geq \dfrac{x^2}{2}$, es decir que S es la superficie de ecuación cartesiana $x^3 - 3xy + 2z = 0$, limitada por la condición $y \geq \frac{1}{2}x^2$.

En general la determinación de una representación paramétrica de una superficie de ecuación cartesiana $F(x,y,z)$ es a menudo delicada. Recordemos el teorema de la función implícita en el caso que nos interesa.

Teorema 3.9.1 *Sea V un abierto de $\mathbb{R}^3$, $(a,b,c) \in V \subset \mathbb{R}^3$, $F\colon V \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación; se supone que $F(a,b,c) = 0$, F es de clase C^1 en V, $F_z(a,b,c) \neq 0$, entonces existe un abierto $U_{(a,b)}$ centrado en (a,b) y un intervalo abierto $W \subset \mathbb{R}$ centrado en c de modo que:*

a) $U_{(a,b)} \times W \subset V$,

b) $\exists!\ \varphi\colon U_{(a,b)} \longrightarrow W$ *tal que* $\forall\,(x,y) \in U_{(a,b)}$ *se tiene* $F(x,y,\varphi(x,y)) = 0$,

c) φ *es de clase* C^1 *en* $U_{(a,b)}$.

Además, si f *es de clase* C^k*,* $(k \geq 1)$ *en* V*, entonces* φ *es de clase* C^k *sobre* $U_{(a,b)}$.

Observaciones

La intersección de dos superficies es en general una curva. Por ejemplo, la intersección de una esfera de centro **0** y de radio $R(>0)$ y de un plano situado a una distancia menor que R de **0** es un círculo.

Toda curva puede ser considerada (de una infinidad de maneras) como la intersección de dos superficies. Por ejemplo la curva $x = t^3$, $y = t^4$, $z = t^5$ es la intersección de dos superficies $y^3 = x^4$, $y^5 = z^4$.

3.9.1. Plano tangente a una superficie

Plano tangente en una superficie definida por una representación paramétrica

Definición 3.9.2 *Sea* $\Phi\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathtt{r}(u,v) = \Phi(u,v)$ *una superficie parametrizada de clase* C^1*,* $S = \Phi(U)$*,* $\mathtt{r}(u,v)$ *un punto de* S*.*

Se dice que $\mathtt{r}(u,v)$ *es un punto regular de* Φ *(o de* S*) si y sólo si* $\{\Phi_u(u,v), \Phi_v(u,v)\}$ *es libre.*

Se dice que Φ *es una superficie regular (o que* S *es una superficie regular) si y sólo si* $\forall (u,v) \in U$*,* $\mathtt{r}(u,v)$ *es punto regular de* S*.*

Definiendo una noción de cambio de parámetro admisible (usando la noción de C^k difeomorfismo de un abierto de $\mathbb{R}^2$ sobre el abierto U de $\mathbb{R}^2$) se puede demostrar que la noción de punto regular es invariante por cambio de parámetro admisible, lo que justifica la definición de punto regular de S, en lugar de Φ.

Definición 3.9.3 *Sea* $\Phi\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathtt{r}(u,v) = \Phi(u,v)$ *una superficie parametrizada de clase* C^1*,* $S = \Phi(U)$*,* $\mathtt{r}(u,v)$ *un punto regular de* S*, se denomina plano tangente en* $\mathtt{r}(u,v)$ *de* S*, el plano que pasa por* $\mathtt{r}(u,v)$ *dirigido por* $\{\Phi_u(u,v), \Phi_v(u,v)\}$*.*

Se puede demostrar que el plano tangente en un punto regular de S no cambia con un cambio de parámetro admisible.

Ejemplo Demostrar que el punto $(2,2,1)$ de parámetro $(u,v)=(1,1)$ de la superficie S, de representación paramétrica $x=u+v^2$, $y=u^2+v$, $z=uv$, es un punto regular de S y determinar una ecuación cartesiana del plano tangente a S en $(2,2,1)$.

La aplicación $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\Phi(u,v)=(u+v^2,u^2+v,uv)$ es de clase C^∞, de modo que $\dfrac{\partial\Phi}{\partial v}=(1,2u,v)$, $\dfrac{\partial\Phi}{\partial v}=(2v,1,u)$ y en el punto $(u,v)=(1,1)$; $\dfrac{\partial\Phi}{\partial v}=(1,2,1)$, $\dfrac{\partial\Phi}{\partial v}=(2,1,1)$, es decir $\{\dfrac{\partial\Phi}{\partial v}(1,1),\dfrac{\partial\Phi}{\partial v}(1,1)\}$ es libre y $(2,2,1)$ es un punto regular de S.

La ecuación del plano tangente satisface:

$$(x-2,y-2,z-1)\cdot\Phi_u\times\Phi_v=\begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z-1\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=0 \Longleftrightarrow x+y-3z-1=0.$$

Definición 3.9.4 *Sea $\Phi\colon U\longrightarrow\mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada de clase C^1, $S=\Phi(U)$ y sea (u,v) un punto regular de S, se llama:*

– (recta) normal en $\mathtt{r}(u,v)$ a S, la recta ortogonal en $\mathtt{r}(u,v)$ al plano tangente en $\mathtt{r}(u,v)$ en S

– (recta) tangente en $\mathtt{r}(u,v)$ a S, toda recta que pasa por $\mathtt{r}(u,v)$ incluida en el plano tangente en $\mathtt{r}(u,v)$ a S.

Nota Observemos que S admite en $\mathtt{r}(u,v)$:

– una normal y sólo una,

– una infinidad de tangentes (cuya unión es el plano tangente en $\mathtt{r}(u,v)$ a S).

3.9.2. Plano tangente en una superficie por una ecuación cartesiana

Sea $V\subset\mathbb{R}^3$ un abierto, $F\colon V\longrightarrow\mathbb{R}$ de clase C^1 sobre V, S la superficie de ecuación cartesiana $F(x,y,z)=0$, $(a,b,c)\in S$. Supongamos que $F_z(a,b,c)\neq 0$, por el Teorema de la función implícita existe un abierto $V_{(a,b)}$, $\mathbb{R}^2$ centrado en (a,b) y un intervalo W de $\mathbb{R}$ centrado en c, tales que:

$V_{(a,b)}\times W\subset V$

$\exists!\ \varphi\colon V_{(a,b)}\longrightarrow W$ tal que $\forall(x,y)\in V_{(a,b)}$, $F(x,y,\varphi(x,y))=0$

φ es de clase C^1 en $V_{(a,b)}$.

La superficie S admite en un vecindario de (a,b,c) la representación paramétrica:

$$\Phi\colon V_{(a,b)} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Phi(x,y) = (x,y,\varphi(x,y)),$$

por lo que $\Phi_x(x,y) = (1,0,\varphi_x(x,y))$ y $\Phi_y(x,y) = (0,1,\varphi_y(x,y))$.

Además tenemos que $\{\Phi_x(a,b), \Phi_y(a,b)\}$ es libre y por lo tanto S tiene en (a,b,c) un plano tangente que tiene por ecuación cartesiana:

$$\begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ 1 & 0 & \varphi_x(a,b) \\ 0 & 1 & \varphi_y(a,b) \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow -\varphi_x(a,b)(x-a) - \varphi_y(a,b)(y-b) + (z-c) = 0.$$

Por otro lado, $\forall (x,y) \in V_{(a,b)}$, $F(x,y,\varphi(x,y)) = 0$, entonces derivando tenemos:

$$\begin{aligned} \forall (x,y) \in V_{(a,b)}, \qquad & F_x(x,y,\varphi(x,y)) + F_z(x,y,\varphi(x,y))\varphi_x(x,y) = 0 \\ & F_y(x,y,\varphi(x,y)) + F_z(x,y,\varphi(x,y))\varphi_y(x,y) = 0. \end{aligned}$$

Puesto que $F_z(a,b,c) \neq 0$ y que $(x,y) \longmapsto F_z(x,y,\varphi(x,y))$ es continua en (a,b), se tiene en un vecindario de (a,b), $F_z(x,y,\varphi(x,y)) \neq 0$.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $F_z(x,y,\varphi(x,y)) \neq 0, \forall\,(x,y) \in V_{(a,b)}$ (basta restringir $V_{(a,b)}$ a la condición deseada), por lo que tenemos:

$$\varphi_x(x,y) = -\frac{F_x(x,y,\varphi(x,y))}{F_z(x,y,\varphi(x,y))}, \qquad \varphi_y(x,y) = -\frac{F_y(x,y,\varphi(x,y))}{F_z(x,y,\varphi(x,y))}.$$

En particular $\varphi_x(a,b) = -\dfrac{F_x(a,b,c)}{F_z(a,b,c)}$, $\varphi_y(a,b) = -\dfrac{F_y(a,b,c)}{F_z(a,b,c)}$, por lo que al sustituir en la ecuación cartesiana del plano tangente nos queda:

$$F_x(a,b,c)(x-a) + F_y(a,b,c)(y-b) + F_z(a,b,c)(z-c) = 0.$$

Permutando los roles de las variables, este resultado sigue siendo válido si $F_x(a,b,c) \neq 0$ o si $F_y(a,b,c) \neq 0$.

Recordemos que se llama gradiente de F en $\mathfrak{a} \in V \subset \mathbb{R}^3$ la aplicación $\nabla F\colon V \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathfrak{a} \longmapsto (F_x(\mathfrak{a}), F_y(\mathfrak{a}), F_z(\mathfrak{a}))$.

Teorema 3.9.2 Determinación del plano tangente a una superficie definida por ecuaciones cartesianas *Sea $V \subset \mathbb{R}^3$ un abierto, $F\colon V \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación de clase C^1 sobre V, S la superficie de ecuación cartesiana $F(x,y,z)=0$, $(a,b,c) \in S$.*

Si $\nabla F(a,b,c) \neq (0,0,0)$, entonces (a,b,c) es un punto regular de S, el plano tangente en (a,b,c) a la superficie S es normal a $\nabla F(a,b,c)$ y tiene por ecuación cartesiana:

$$(x-a)F_x(a,b,c) + (y-b)F_y(a,b,c) + (z-c)F_z(a,b,c) = 0.$$

Ejemplo Dar una ecuación cartesiana del plano tangente en $(1,1,-1)$ a la superficie S de ecuación cartesiana $x^2y^3 + y^2z^3 + z^2x^3 - 1 = 0$.

Observemos que $F\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x,y,z) = x^2y^3 + y^2z^3 + z^2x^3 - 1$ es de clase C^∞ y que $F(1,1,-1)=0$, $F_x(x,y,z) = 2xy^3 + 3x^2z^2$, $F_y(x,y,z) = 3x^2y^2 + 2yz^3$, $F_z(x,y,z) = 3y^2z^2 + 2zx^3$, por lo que $F_x(1,1,-1) = 5$, $F_y(1,1,-1) = 1$, $F_z(1,1,-1) = 1$, es decir $\nabla F(1,1,-1) \neq (0,0,0)$ y S tiene en $(1,1,-1)$ un plano tangente de ecuación cartesiana $5(x-1) + (y-1) + (z+1) = 0$, o bien $5x + y + z - 5 = 0$.

3.9.3. Posición de una superficie con respecto a un plano tangente

Sea S una superficie de ecuación cartesiana $z = \varphi(x,y)$, donde $\varphi\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^1 sobre el abierto $U \subset \mathbb{R}^2$. Sea $(a,b) \in U$, $c = \varphi(a,b)$ y sea Π el plano tangente a S, en (a,b,c), dirigido por $(1,0,p)$ y $(0,1,q)$, donde $p = \varphi_x(a,b)$, $q = \varphi_y(a,b)$. Vamos a estudiar la posición de S con respecto a Π en un vecindario de (a,b,c).

Sea $(x,y) \in U$, $h = x-a$, $k = y-b$ y consideremos el punto (x,y,z_M) de S y el punto (x,y,z_p) de Π, entonces $z_M = \varphi(x,y) = \varphi(a+h,b+k)$ y además $\begin{vmatrix} h & k & z_p - c \\ 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \end{vmatrix} = 0$, o bien $z_p = c + ph + qk$.

La posición relativa de S y Π está dada por el signo de $z_M - z_p$. Suponiendo que φ es de clase C^2 sobre U, denotemos $r = \varphi_{xx}(a,b)$, $s = \varphi_{xy}(a,b)$, $t = \varphi_{yy}(a,b)$, entonces considerando un desarrollo limitado de orden 2 en un vecindario de (a,b) se tiene:

$$\varphi(a+h,b+k) = \varphi(a,b) + ph + qk + \frac{1}{2}(rh^2 + 2shk + tk^2) + o(\|(h,k)\|^2),$$

por lo que $z_M - z_p = \frac{1}{2}(rh^2 + 2shk + tk^2) + o(\|(h,k)\|^2)$. De esta manera se tiene lo siguiente:

Si $s^2 - rt < 0$, $r > 0$ entonces la superficie S se sitúa, en un vecindario de (a, b, c), encima del plano tangente Π a S en (a, b, c).

Si $s^2 - rt < 0$, $r < 0$ entonces la superficie S se sitúa, en un vecindario de (a, b, c), debajo del plano tangente Π a S en (a, b, c).

Si $s^2 - rt > 0$ entonces la superficie S atraviesa el plano tangente Π en (a, b, c).

3.9.4. Resumen: Plano tangente y normal a una superficie

Caso en que la superficie se da explícitamente $z = f(x, y)$

Se denomina plano tangente a la superficie en el punto (x_o, y_o, z_o) (punto de contacto), el plano que contiene todas las tangentes en el punto (x_o, y_o, z_o) a las curvas trazadas en dicha superficie que pasan por el punto (x_o, y_o, z_o).

Se denomina normal a la superficie a la recta perpendicular al plano tangente en el punto de contacto.

Si la superficie se escribe $z = f(x, y)$, con f diferenciable, la ecuación del plano tangente en el punto (x_o, y_o, z_o) es

$$Z - z_o = f_x(x_o, y_o)(X - x_o) + f_y(x_o, y_o)(Y - y_o),$$

donde (X, Y, Z) están en el plano tangente.

Las ecuaciones del plano normal tienen la forma $\dfrac{X - x_o}{f_x(x_o, y_o)} = \dfrac{Y - y_o}{f_y(x_o, y_o)} = \dfrac{Z - z_o}{-1}$, donde (X, Y, Z) está en el plano normal.

Ejemplo Dar las ecuaciones de la recta normal y el plano tangente a la superficie $z = \frac{1}{2}x^2 - y^2$ en el punto $(2, -1, 1)$.

Se tiene que $z = f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 - y^2$, $f_x(x, y) = x$, $f_y(x, y) = -2y$, entonces el plano tangente es $z - 1 = 2(x - 2) + 2(y + 1)$ i.e. $z - 2z - 2y + 1 = 0$.

La ecuación de la recta normal satisface $\dfrac{x - 2}{2} = \dfrac{y + 1}{2} = \dfrac{z - 1}{-1}$, es decir $(x, y, z) = (2, -1, 1) + t(2, 2, -1)$.

3.9.5. Caso en que la superficie se da implícitamente $F(x, y, z) = 0$

En el caso en que la superficie se escribe $F(x, y, z) = 0$ tenemos que la ecuación del plano tangente en (x_o, y_o, z_o), donde $F(x_o, y_o, z_o) = 0$, es:

$$F_x(x_o, y_o, z_o)(X - x_o) + F_y(x_o, y_o, z_o)(Y - y_o) + F_z(x_o, y_o, z_o)(Z - z_o) = 0.$$

La ecuación del plano normal es $\dfrac{X - x_o}{F_x(x_o, y_o, z_o)} = \dfrac{Y - y_o}{F_y(x_o, y_o, z_o)} = \dfrac{Z - z_o}{F_z(x_o, y_o, z_o)}$.

Ejemplo Dar la ecuación del plano tangente y de la recta normal a la superficie $3xyz - z^3 = a^3$ en el punto que tiene $x = 0$, $y = a$.

Solución Debemos determinar el valor de z si $x = 0$, $y = a$; entonces $-z^3 = a^3 \Longrightarrow z = -a$. Así el punto de contacto es $(0, a, -a)$ y designemos $F(x, y, z) = 3xyz - z^3 - a^3 = 0$, por lo que $F_x = 3yz$, $F_y = 3xz$, $F_z = 3xy - 3z^2$ y en el punto $(0, a, -a)$ tenemos $F_x = -3a^2$, $F_y = 0$, $F_z = -3a^2$.

El plano tangente es $-3a^2(x - 0) + 0(y - a) - 3a^2(z + a) = 0 \Longrightarrow x + z + a = 0$.

La recta normal satisface $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y - a}{0} = \dfrac{z + a}{1}$ o bien $(x, y, z) = (0, a, -a) + t(1, 0, 1)$.

3.9.6. Intersección de dos superficies

Sea Γ una curva del espacio definida como intersección de dos superficies R, S. Supongamos que las superficies R y S admiten ecuaciones cartesianas $R\colon F(x, y, z) = 0$, $S\colon G(x, y, z) = 0$, donde F, $G\colon V \longrightarrow \mathbb{R}$ son aplicaciones de clase C^1 sobre un abierto $V \subset \mathbb{R}^3$.

Sea $(a, b, c) \in \Gamma$ y supongamos que $\{\nabla F(a, b, c), \nabla G(a, b, c)\}$ es libre, entonces R y S tienen en (a, b, c) planos tangentes denotados Π_R y Π_S respectivamente, por lo que $\Pi_R \neq \Pi_S$.

Vamos a demostrar que Γ tiene en (a, b, c) una tangente T y que $T = \Pi_R \cap \Pi_S$.

Por hipótesis $\operatorname{rang}(\nabla F, \nabla G)(a, b, c) = 2$ y se puede suponer (sin pérdida de generalidad) que $\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}(a, b, c) \neq 0$. Por el teorema de la función implícita existe un intervalo V_a de centro a e intervalos abiertos W_b, W_c centrados en b, c respectivamente tales que:

— $V_a \times W_b \times W_c \subset V$

— $\exists\, \varphi\colon V_a \longrightarrow W_b, \psi\colon V_a \longrightarrow W_c$ tales que $\forall\, x \in V_a$, $F(x, \varphi(x), \psi(x)) = 0$, $G(x, \varphi(x), \psi(x)) =$

0

— φ, ψ son de clase C^1 sobre V_a.

Dicho de otro modo, Γ admite en un vecindario de (a,b,c) la representación paramétrica $x = x$, $y = y(x)$, $z = \psi(x)$.

Un vector tangente ν en (a,b,c) a Γ tiene por lo tanto coordenadas $(1, \varphi'(a), \psi'(a)) \neq \mathbf{0}$, por lo que $\nu \cdot \nabla F(a,b,c) = F_x(a,b,c) + \varphi'(a) F_y(a,b,c) + \psi'(a) F_z(a,b,c) = \dfrac{d}{dx} F(x, \varphi(x), \psi(x))(a) = 0 \Longrightarrow \nu \in \Pi_R$. De manera similar se tiene $\nu \in \Pi_S$.

Resumimos estos resultados en siguiente teorema.

Definición 3.9.5 *Sean R, S dos superficies, $\Gamma = R \cap S$, $(a,b,c) \in \Gamma$ se supone que (a,b,c) es un punto de R y de S y que los planos tangentes Π_R, Π_S en (a,b,c) a R y S son distintos, entonces (a,b,c) es un punto regular de Γ y la tangente en (a,b,c) a Γ es $\Pi_R \cap \Pi_S$.*

Ejemplo Determinar un vector tangente en $(-2,-1,3)$ a la curva Γ, que es la intersección entre las superficies $x^3 + y^3 + z^3 = 18$, $xy + yz + zx = -7$.

Veamos que efectivamente $(-2,-1,3) \in \Gamma$.

Sea $F(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 18$, $\nabla F(x,y,z) = (3x^2, 3y^2, 3z^2)$, $\nabla F(-2,-1,3) = (12,3,3)$

y $G(x,y,z) = xy + yz + zx + 7$, $\nabla G(x,y,z) = (y+z, z+x, x+y)$, $\nabla G(-2,-1,3) = (2,1,-3)$.

Además $\nabla F(-2,-1,3) \times \nabla G(-2,-1,3) = (-12,42,6) \neq (0,0,0)$ y por el Teorema anterior, Γ admite en $(-2,-1,3)$ una tangente dirigida por $(-2,7,1)$.

3.9.7. Superficies usuales

Cilindros

Definición 3.9.6 *Sea ν una dirección de rectas y Γ una curva, se llama cilindro (o superficie cilíndrica) de directriz Γ y de dirección de generatrices ν, la unión S de rectas de $\mathbb{R}^3$ de dirección ν que intersecan Γ.*

Para todo punto M del cilindro S, se llama generatriz de M (sobre S) la recta pasando por M y de dirección ν.

Se llama sección recta del cilindro S, la intersección de S con plano ortogonal a ν.

Salvo casos particulares, un punto de un cilindro admite una generatriz y sólo una y el cilindro una infinidad de directrices.

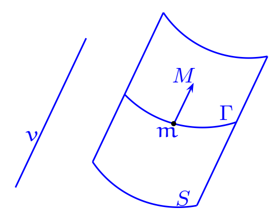
Sean $\mathfrak{u}$ un vector dirigiendo ν y $m\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una representación paramétrica de Γ, entonces una representación paramétrica del cilindro S de directriz Γ y de dirección de generatriz ν es

$$\begin{aligned} I \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (t,\lambda) &\longmapsto \mathfrak{m}(t) + \lambda\mathfrak{u}. \end{aligned}$$

Ejemplo Una representación paramétrica del cilindro de directriz $\Gamma(x = t, y = t^2, z = t^3, t \in \mathbb{R})$ y generatrices paralelas a $\mathfrak{u} = (2,1,-3)$ es $x = t + 2\lambda$, $y = t^2 + \lambda$, $z = t^3 - 3\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Sea S un cilindro de directriz Γ, de dirección de generatrices ν. Consideremos un sistema de referencia $\mathsf{R}' = \{\mathbf{0}, \mathsf{I}, \mathsf{J}, \mathsf{K}\}$ tal que K dirige ν, el cilindro S admite en R' una ecuación cartesiana de la forma $f(X,Y) = 0$. En el sistema inicial R, S admite una cartesiana de la forma $f(P,Q) = 0$, donde P, Q son los (primeros miembros de ecuación cartesiana) planos. De esta manera tenemos la regla práctica:

Se tiene que una superficie S es un cilindro cuando admite una ecuación cartesiana de la forma $f(P,Q) = 0$, donde P, Q son planos secantes. Además en estas condiciones las generatrices de S son paralelas a la recta de ecuación cartesiana $P = 0$, $Q = 0$.



Ejemplo La superficie S de ecuación cartesiana $e^{x^2+y^2+z^2} - (x+z)e^{-2xz} = 0$ es un cilindro, pues denotando $P = x + z$, $Q = y$, S tiene por ecuación cartesiana $e^{P^2+Q^2} - P = 0$. Las generatrices de S son paralelas a $(1,0,-1)$.

Proposición 3.9.1 *El plano tangente en un punto regular de un cilindro contiene la generatriz de ese punto.*

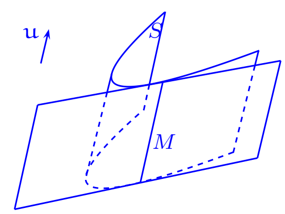
Demostración El cilindro S admite una representación paramétrica $\Phi\colon I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\Phi(t,\lambda) = \mathfrak{m}(t) + \lambda\mathfrak{u}$, donde $\mathfrak{m}\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ es una representación paramétrica de Γ, de clase C^1 y $\mathfrak{u}$ dirige las generatrices.

Dado que $\Phi_\lambda = \mathfrak{u}$, el plano tangente en $M(t,\lambda)$ a S, contiene la recta pasando por M y dirigida por $\mathfrak{u}$, es decir la generatriz de M.

Observación Sea S un cilindro, de directriz Γ, de dirección de generatriz $\mathfrak{v}$ y supongamos que Γ sea plana y regular y que $\mathfrak{v}$ no sea paralela al plano P de Γ.

Sea $\mathfrak{m}\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una representación paramétrica Γ y sea $\Phi\colon I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\Phi(t,\lambda) = \mathfrak{m}(t) + \lambda\mathfrak{u}$, entonces es de clase C^1 y tenemos que $\dfrac{\partial\Phi}{\partial t} = \mathfrak{m}'(t)$, $\dfrac{\partial\Phi}{\partial\lambda} = \mathfrak{u}$.

Por hipótesis $\mathfrak{m}'(t) \neq \mathbf{0}$, $\mathfrak{m}'(t) \in P$, entonces $\{\dfrac{\partial\Phi}{\partial t}, \dfrac{\partial\Phi}{\partial\lambda}\}$ es libre y todo punto de S es regular. Además, el plano tangente en M a S es el plano que pasa por M y contiene la generatriz de M y la tangente en $\mathfrak{m}$ a Γ.



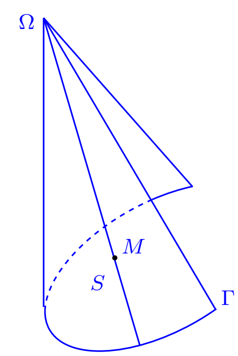
Conos

Definición 3.9.7 *Sea $\Omega \in \mathbb{R}^3$, Γ una curva, se llama cono S de vértice Ω y directriz Γ la unión de todas las rectas que pasan por Ω e intersecan Γ.*

Para cada punto M del cono S, salvo Ω, se llama generatriz de M sobre S, la recta ΩM.

Observaciones

1. Se impone a menudo la condición $\Omega \notin \Gamma$, o sea Γ es plana en un plano P, $\Omega \notin \Gamma$.
2. El vértice Ω del cono S no tiene generatriz.
3. Salva casos particulares un cono admite un vértice y sólo uno y una infinidad de directrices.



Sea $\mathfrak{m}\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una representación paramétrica de la curva Γ, una representación paramétrica del cono S de vértice Ω y de directriz Γ es $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\Phi(t,\lambda) = \Omega + \lambda(\Omega - \mathfrak{m}(t))$, es decir si $M(t,\lambda)$ es un punto de S, $\Omega - M(t,\lambda) = \lambda(\Omega - \mathfrak{m}(t)$.

El vértice Ω se obtiene para $\lambda = 0$, $t \in \mathbb{R}$.

Ejemplo El cono de vértice $\Omega(1,-1,1)$ y de directriz $\Gamma(x = t, y = t^2, z = t^3, t \in \mathbb{R})$ admite por representación paramétrica $x = 1 + \lambda(t-1)$, $y = -1 + \lambda(t^2+1)$, $z = 1 + \lambda(t^3 - 1)$, $(\lambda, t) \in \mathbb{R}^2$.

Sea S un cono, de vértice Ω, de directriz Γ, se supone que Γ es plana y que Ω no está en el plano P de Γ. Existe un sistema de referencia ortonormado $\mathsf{R}' = \{\Omega, \mathrm{I}, \mathrm{J}, \mathrm{K}\}$ tal que el plano P tiene por ecuación cartesiana en R', $Z = h$, $h > 0$.

La curva Γ admite un sistema de ecuaciones cartesianas $f(X, Y) = 0$, $Z = h$, entonces para todo punto $M(X, Y, Z)$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $Z \neq 0$, se tiene $M \in S \iff \exists\, \mathfrak{m} \in \Gamma, \exists\, \lambda \in \mathbb{R}^*$ de modo que $\Omega - M = \lambda(\Omega - \mathfrak{m}) \iff \exists (X_1, Y_1, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, $X = \lambda X_1$, $Y = \lambda Y_1$, $Z = \lambda h$, $f(X_1, Y_1) = 0 \iff f\big(\frac{hX}{Z}, \frac{hY}{Z}\big) = 0$, de donde tenemos la siguiente regla práctica.

> Se reconoce que una superficie es un cono cuando admite una ecuación cartesiana de la forma $f(\frac{P}{R}, \frac{Q}{R}) = 0$, donde P, Q, R son planos (secantes en un sólo punto).
> Además en estas condiciones, el vértice Ω de S está definido por $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$.

Ejemplo Consideremos la superficie S de ecuación cartesiana $z^2 - xy - 2z + 1 = 0$. La ecuación se puede escribir $(z-1)^2 - xy = 0$ y dividiendo por $(z-1)^2$ por ejemplo, consideremos la superficie S' obtenida eliminando en S las dos rectas del sistema de ecuaciones cartesianas $(x = 0, z = 1)$, $(y = 0, z = 1)$. Así, S' tiene por ecuación cartesiana $-\frac{x}{z-1}\frac{y}{z-1} + 1 = 0$, que es de la forma $f(\frac{P}{R}, \frac{Q}{R}) = 0$, con $P = x$, $Q = y$, $R = z - 1$, $f(u, v) = 1 - uv$. S' es un cono de vértice $\Omega(0, 0, 1)$. Se obtiene una directriz de S', cortando S' por un plano no conteniendo Ω, por ejemplo el plano xy, por lo que una ecuación cartesiana de una directriz Γ de S' es $xy = 1$, $z = 0$.

Proposición 3.9.2 *El plano tangente en un punto regular de un cono contiene la generatriz de ese punto.*

Demostración El cono S admite una representación paramétrica $\Phi\colon I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\Phi(t, \lambda) = \Omega + \lambda(\Omega - \mathfrak{m}(t))$, donde $\mathfrak{m}\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una representación paramétrica de Γ, de clase C^1 y Ω es el vértice de S.

Como $\dfrac{\partial \Phi}{\partial t}$ y $\Omega - \mathfrak{m}(t)$ dirige la generatriz de M (se supone que $\Omega \notin \Gamma$) el plano tangente en M a S contiene la generatriz de M.

Observaciones

1. Sea S un cono, de vértice Ω, de directriz Γ. Supongamos que Γ sea plana y regular y que $\Omega \notin P$, plano de Γ. Denotando $\mathfrak{m}\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una representación paramétrica de Γ, una representación paramétrica de S es $\Phi\colon I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\Phi(t, \lambda) = \Omega + \lambda(\Omega - \mathfrak{m}(t))$,

entonces Φ es de clase C^1 y $\forall\,(t,\lambda) \in I \times \mathbb{R}^*$, $\dfrac{\partial\Phi}{\partial t} = \lambda \mathtt{m}'(t)$, $\dfrac{\partial\Phi}{\partial\lambda} = \Omega - \mathtt{m}(t)$. Por hipótesis $\lambda \neq 0$, $\mathtt{m}'(t) \in P$, $\Omega - \mathtt{m}(t) \notin P$, entonces $\{\dfrac{\partial\Phi}{\partial t}, \dfrac{\partial\Phi}{\partial\lambda}\}$ es libre y todo punto de S, salvo Ω, es regular. Además, el plano tangente en $M(\neq \Omega)$ a S es el plano que pasa por M y contiene la generatriz de M y la tangente en $\mathtt{m}$ a Γ.

2. El vértice Ω del cono es un punto no regular de S.

   En la práctica, el vértice de un cono el único punto no regular de S, lo que permite determinar el eventual vértice de un cono a partir de una ecuación cartesiana.

Ejemplo Determinar que $S\colon x^2 + xy - xz + y^2 + z^2 + x + 3y - z + 3 = 0$ es un cono y determinar su vértice.

Denotando $F(x,y,z) = x^2 + xy - xz + y^2 + z^2 + x + 3y - z + 3$, se busca un punto $\Omega(x,y,z)$ de S no regular i.e. tal que $\nabla F = (0,0,0)$:

$$\begin{array}{lcccl} F_x(x,y,z) = 0 & & 2x + y - z + 1 = 0 & & x = 1 \\ F_y(x,y,z) = 0 & \Longleftrightarrow & x + 2y + 3 = 0 & \Longleftrightarrow & y = -2 \\ F_z(x,y,z) = 0 & & -x + 2z - 1 = 0 & & z = 1. \end{array}$$

Se verifica que el punto $\Omega(1,-2,1)$ esta en S. Tomando como nuevo sistema de referencia $\mathsf{R}' = \{\Omega, \mathsf{I}, \mathsf{J}, \mathsf{K}\}$ las fórmulas del cambio de sistema de referencia son $x = X + 1$, $y = Y + 2$, $z = Z + 1$, lo que permite escribir una ecuación cartesiana de S en R':

$(X+1)^2 + (X+1)(Y-2) - (X-1)(Z+1) + (Y-2)^2 + (Z+1)^2 + (X+1) + 3(Y-2) - (Z+1) + 3 = 0$, es decir $X^2 + XY - XZ + Y^2 + Z^2 = 0$.

Sobre esta última ecuación se ve que si un punto $\mathtt{m}(X,Y,Z) \neq \Omega$ está en S, la recta $\Omega{-}\mathtt{m} \subset S$ i.e. S es un cono con vértice $\Omega(1,-2,1)$.

3.9.8. Superficies de revolución

Definición 3.9.8 *Se llama superficie de revolución, la superficie S obtenida girando una curva Γ alrededor de una recta Δ.*

Se dice que Δ es el eje de S.

Se llama meridiano (o semi-meridiano) de S, la intersección de S con un semi-plano limitado por Δ.

Se llaman paralelos de S los círculos de eje Δ que intersecan Γ.

Observaciones

1. Salvo excepciones, una superficie de revolución tiene un eje único.
2. Con las notaciones de la definición, S es la unión de sus paralelos.

Ejemplo El toro es la superficie S obtenida haciendo girar un círculo alrededor de una recta del plano de un círculo.

En el sistema R consideremos el círculo Γ de ecuaciones $\begin{cases} x = 0 \\ (y-a)^2 + z^2 = r^2, \end{cases}$

para a, $r \in \mathbb{R}^*$, fijos y giramos Γ alrededor de z. Se obtiene una representación paramétrica del toro S:

$$\begin{aligned} x &= a\cos\theta + r\cos\theta\cos\alpha \\ y &= a\operatorname{sen}\theta + r\operatorname{sen}\theta\cos\alpha, \qquad \theta, \alpha \in [\,-\pi, \pi\,]\,. \\ z &= r\operatorname{sen}\alpha \end{aligned}$$

A partir de esta representación paramétrica, se puede obtener una ecuación cartesiana de S, eliminando θ, α:

$$\exists\,\theta, \alpha \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = (a + r\cos\alpha)\cos\theta \\ y = (a + r\cos\alpha)\operatorname{sen}\theta \\ z = r\operatorname{sen}\alpha \end{cases} \iff \exists\,\alpha \in \mathbb{R}, \begin{cases} x^2 + y^2 = (a + r\cos\alpha)^2 \\ z = r\operatorname{sen}\alpha \end{cases}$$

$$\iff \exists\,\alpha \in \mathbb{R}, \begin{cases} x^2 + y^2 - a^2 - (r^2 - z^2) = 2ar\cos\alpha \\ z = r\operatorname{sen}\alpha \end{cases}$$

$$\iff ((x^2 + y^2 + z^2) - (a^2 + r^2))^2 + 4a^2z^2 = 4a^2z^2$$

$$\iff (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(a^2 + r^2)(x^2 + y^2) + 2(a^2 - r^2)z^2 + (a^2 - r^2)^2 = 0.$$

Sea Δ una recta, Γ una curva, S la superficie de revolución obtenida haciendo girar Γ alrededor de Δ, P un plano ortogonal a Δ, w un punto de Δ, Σ una esfera de centro w.

Un círculo de eje Δ, que es la intersección de un plano a P y una esfera de centro w, admite por sistema de ecuaciones cartesianas $P = \lambda$, $\Sigma = \mu$, donde λ, $\mu \in \mathbb{R}$. El círculo interseca Γ si y sólo si (λ, μ) satisface una relación del tipo $f(\lambda, \mu) = 0$. Se deduce que S admite una ecuación de la forma $f(P, \Sigma) = 0$, donde P y Σ son (los primeros miembros de las ecuaciones de) un plano y de una esfera, de donde se tiene la regla práctica siguiente:

Se reconoce que una superficie S es de revolución cuando admite una ecuación cartesiana de la forma $f(P, \Sigma) = 0$, donde P es un plano y Σ una esfera.

Además, en estas condiciones, el eje de S es la recta que pasa por el centro de Σ y es ortogonal a P.

Ejemplo La superficie S de la ecuación cartesiana $xy + yz + zx + x + y + z + 1 = 0$ es de revolución pues denotando $P = x + y + z$ y $\Sigma = x^2 + y^2 + z^2$, S tiene por ecuación $P^2 - \Sigma + 2P + 2 = 0$. El eje de S es la recta que pasa por **0**, dirigida por $(1, 1, 1)$.

3.9.9. Cuádricas

Definición 3.9.9 *Se llama cuádrica a toda superficie de ecuación cartesiana $F(x, y, z) = 0$, donde F es un polinomio de grado total 2.*

Observaciones

1. Una cuádrica tiene una ecuación cartesiana de la forma:

   $$Ax^2 + 2Bxy + 2Cxz + Dy^2 + 2Eyz + Fz^2 + 2Gx + 2Hy + 2Iz + J = 0,$$

   con A, B,...,$J \in \mathbb{R}$.

   El uso del 2 en los coeficientes se justificará más adelante, cuando se use una forma cuadrática o una matriz simétrica.

2. Se supone que A, B, C, D, E, F no son todos nulos. En caso contrario tenemos un plano, $\emptyset$ o $\mathbb{R}^3$.

3. Toda esfera es una cuádrica.

4. La unión de dos planos es una cuádrica.

5. Se observa que la intersección de una cuádrica y un plano es $\emptyset$ o una cónica.

3.9.10. Búsqueda del centro de simetría

Sea S una ecuación cartesiana

$$(1) \qquad Ax^2 + 2Bxy + 2Cxz + Dy^2 + 2Eyz + Fz^2 + 2Gx + 2Hy + 2Iz + J = 0,$$

sea $\Omega(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ el vértice y sea $\mathsf{R}' = \{\Omega, \mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}\}$ el sistema de referencia. Las fórmulas del cambio de sistema son $x = x_0 + X$, $y = y_0 + Y$, $z = z_0 + Z$, es decir si M es un punto de $\mathbb{R}^3$, tiene coordenadas (x, y, z) en R o (X, Y, Z) en R'.

La ecuación cartesiana de la cuádrica S en R' es:

$$\begin{aligned} AX^2 + 2BXY &+ 2CXZ + DY^2 + 2EYZ + FZ^2 + 2(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + G)X \\ &+ 2(Bx_0 + Dy_0 + Ez_0 + H)Y + 2(Cx_0 + Ey_0 + Fz_0 + I) + J = 0. \end{aligned}$$

El punto Ω es el centro de simetría de S si:

$$(2) \qquad \begin{cases} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + G = 0 \\ Bx_0 + Dy_0 + Ez_0 + H = 0 \\ Cx_0 + E_0 + Fz_0 + I = 0. \end{cases}$$

Consideremos la matriz simétrica $Q = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & D & E \\ C & E & F \end{pmatrix}$.

Si Q es invertible el sistema (2) admite una solución única (x_0, y_0, z_0) y S admite a (x_0, y_0, z_0) como centro de simetría. Se dice que S es una cuádrica con centro de simetría (x_0, y_0, z_0).

Si Q no es invertible, el sistema de ecuaciones (2) no admite solución o bien tiene una infinidad de soluciones.

Por ejemplo, la cuádrica $x^2 - 2y = 0$ (cilindro) no tiene centro de simetría o bien la cuádrica de ecuación $x^2 + y^2 = 1$ (cilindro de revolución) tiene una infinidad de centros de simetría.

Observemos que (2) $\iff \nabla F(x_0, y_0, z_0) = 0$.

3.9.11. Cuádricas con centro de simetría

Vamos a considerar el caso en que Q es invertible. En este caso tomamos el sistema de referencia $\mathsf{R}' = \{\Omega, \mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}\}$ por lo que S tiene ecuación cartesiana:

$$AX^2 + 2BXY + 2CXZ + DY^2 + 2EYZ + FZ^2 + J_1 = 0.$$

La matriz $Q = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & D & E \\ C & E & F \end{pmatrix}$ es simétrica real y por lo tanto diagonizable, es decir $\exists P$ ortogonal y D diagonal tal que $Q = PDP^{-1}$.

Denotando q la forma cuadrática de matriz Q en la base $\{\mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}\}$, sea $M \in \mathbb{R}^3$ de coordenadas (X, Y, Z) en R', entonces si $\mathrm{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\mathrm{v} = P^{-1}\mathrm{u}$ se tiene:

$$M \in S \iff \mathrm{u}'Q\mathrm{u} + J_1 = 0 \iff \mathrm{u}'P'P\mathrm{u} + J_1 = 0 \iff \mathrm{v}'D\mathrm{v} + J_1 = 0.$$

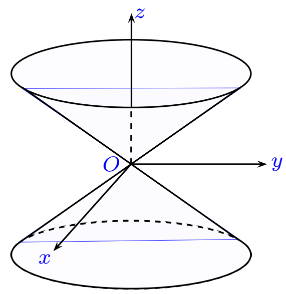
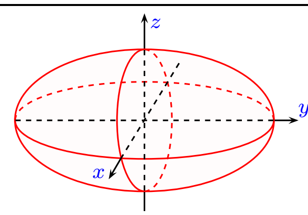
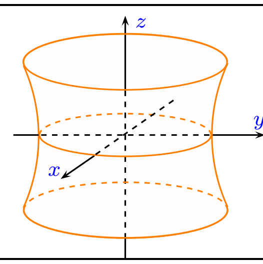
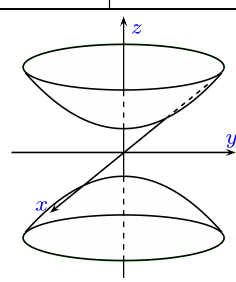
Sea $\{\mathrm{I}, \mathrm{J}, \mathrm{K}\}$ la base deducida de $\{\mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}\}$ por la matriz de pasaje ortogonal P, es decir por ejemplo las componentes de I en $\{\mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}\}$ forman la primera columna de P. Denotemos $\mathsf{R}'' = \{\Omega, \mathrm{I}, \mathrm{J}, \mathrm{K}\}$, $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ se tiene que S tiene ecuación cartesiana en R'': $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + J_1 = 0$, con (x_1, x_2, x_3) coordenadas de M en R''.

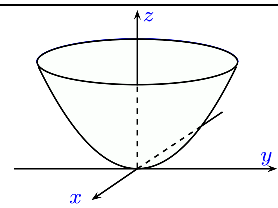
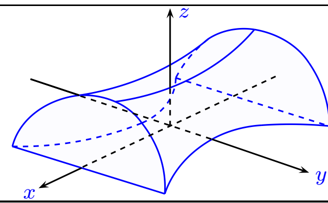
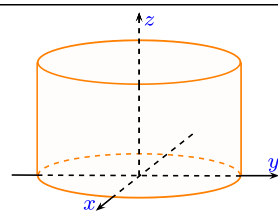
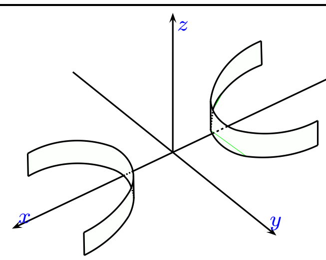
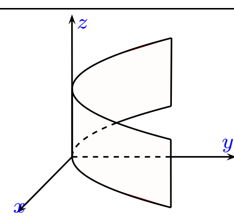
Dado que Q es invertible, $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$. Es claro que podemos escribir esta ecuación cartesiana en la forma:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \epsilon\,\frac{x_3^2}{c^2} = \epsilon',$$

donde a, b, $c > 0$, $\epsilon = \pm 1$, $\epsilon' \in \{-1, 0, 1\}$. Esta ecuación se llama ecuación reducida de S.

Cuádricas con centro de simetría

Ecuación reducida	Forma	Nombre
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$		punto aislado
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$		cono (de segundo grado)
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$		$\emptyset$
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$		elipsoide
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$		hiperboloide de un manto
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$		hiperboloide de dos mantos

Ecuación reducida	Forma	Nombre
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{2z}{c}$		paraboloide elíptico
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{2z}{c}$		paraboloide hiperbólico
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$		$\emptyset$
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$		cilindro elíptico
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$		cilindro hiperbólico
$x^2=2py$		cilindro parabólico

3.10. Ejercicios

3.10.1. Ejercicios sobre longitud de arco, movimiento, velocidad, aceleración

1. Calcular la longitud del arco de las curvas siguientes:

a) $x = t$, $y = t^2$, $z = \dfrac{2t^2}{3}$, $t \in [\,0, 2\,]$

b) $x = 2\cos t$, $y = 2\,\mathrm{sen}\, t$, $z = \dfrac{3}{\pi}t$, $t \in [\,0, \pi\,]$

c) $x = \mathrm{e}^t \cos t$, $y = \mathrm{e}^t\,\mathrm{sen}\, t$, $z = \mathrm{e}^t$, $t \in [\,0, t_1\,]$

d) $y = \frac{1}{2}x^2$, $z = \frac{1}{6}x^3$, $x \in [\,0, 6\,]$

e) $x^2 = 3y$, $2xy = 9z$, desde $(0, 0, 0)$ hasta $(3, 3, 2)$

f) $y = a\,\mathrm{arc\,sen}\,\dfrac{x}{a}$, $z = \dfrac{a}{4}\ln\dfrac{a+x}{a-x}$ desde $(0, 0, 0)$ a (x_o, y_o, z_o).

Solución

a) $\ell = \displaystyle\int_0^2 \sqrt{1 + 4t^2 + 4t^4}\,dt = \int_0^2 (1 + 2t^2)\,dt = \big(t + \tfrac{2}{3}t^3\big)\Big|_0^2 = 2 + \tfrac{16}{3} = \tfrac{22}{3}.$

b) $\ell = \displaystyle\int_0^\pi \big(4\,\mathrm{sen}^2\, t + 4\cos^2 t + \frac{9}{\pi^2}\big)^{\frac{1}{2}}\,dt = \int_0^\pi \big(4 + \frac{9}{\pi^2}\big)^{\frac{1}{2}}\,dt = \frac{\sqrt{4\pi^2+9}}{\pi}t\Big|_0^\pi = \sqrt{4\pi^2 + 9}.$

c) Se tiene $x' = \mathrm{e}^t\cos t - \mathrm{e}^t\,\mathrm{sen}\, t$, $y' = \mathrm{e}^t\cos t + \mathrm{e}^t\,\mathrm{sen}\, t$, $z' = \mathrm{e}^t$,

$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \mathrm{e}^{2t}(1 - 2\,\mathrm{sen}\, t\cos t) + \mathrm{e}^{2t}(1 + 2\,\mathrm{sen}\, t\cos t) + \mathrm{e}^{2t} = 3\mathrm{e}^{2t}$ i.e.

$\ell = \displaystyle\int_0^{t_1} \sqrt{3}\mathrm{e}^t\,dt = \sqrt{3}\mathrm{e}^t\Big|_0^{t_1} = \sqrt{3}(\mathrm{e}^{t_1} - 1).$

d) Si se define $x = t$ se tiene $y = \frac{1}{2}t^2$, $z = \frac{1}{6}t^3 \Longrightarrow \ell = \displaystyle\int_0^6 \sqrt{1 + t^2 + \tfrac{1}{4}t^4}\,dt = \tfrac{1}{2}\int_0^6 (t^2 + 2)\,dt = \tfrac{1}{2}\big(\tfrac{1}{3}t^3 + 2t\big)\Big|_0^6 = \tfrac{1}{2}\big(\tfrac{6^3}{3} + 2{\cdot}6\big) = 42.$

e) Sea $x = t$, $y = \frac{1}{3}t^2$, $z = \frac{2}{9}t\big(\frac{1}{3}t^2\big) = \frac{2}{27}t^3$, con $t \in [\,0, 3\,]$. Así se tiene que:

$\ell = \displaystyle\int_0^3 \sqrt{1 + \tfrac{4}{9}t^2 + \tfrac{4}{81}t^4}\,dt = \tfrac{1}{9}\int_0^3 \sqrt{81 + 36t^2 + 4t^4}\,dt = \tfrac{1}{9}\int_0^3 (9 + 2t^2)\,dt = \tfrac{1}{9}(9t + \tfrac{2}{3}t^3)\Big|_0^3 = \tfrac{1}{9}(27 + \tfrac{2}{3}{\cdot}27) = 5.$

f) Sea $x = t \neq a$, $y = a\,\mathrm{arc\,sen}\,\dfrac{t}{a}$, $z = \dfrac{a}{4}\ln\dfrac{a+t}{a-t}$, $t \in [\,0, t_o\,]$ de modo que $x_o = t_o$, $y_o = a\,\mathrm{arc\,sen}\,\dfrac{x_o}{a}$, $z_o = \dfrac{a}{4}\ln\dfrac{a+x_o}{a-x_o}$. De esta manera tenemos que:

$$x' = 1,\, y' = \frac{a}{\sqrt{1-\left(\frac{t}{a}\right)^2}}\frac{1}{a} = \frac{a}{\sqrt{a^2-t^2}},\, z' = \left(\frac{1}{a+t} - \frac{1}{a-t}\right)\frac{a}{4} = \frac{a^2}{2(a^2-t^2)} \Longrightarrow$$

$$x'^2+y'^2+z'^2 = 1+\frac{a^2}{a^2-t^2}+\frac{a^4}{4(a^2-t^2)^2} = \frac{9a^4-12a^2t^2+4t^4}{4(a^2-t^2)} = \frac{(3a^2-2t^2)^2}{4(a^2-t^2)^2} \Longrightarrow$$

$$\ell = \int_0^{t_o} \frac{3a^2-2t^2}{2(a^2-t^2)}\,dt = \int_0^{t_o} \frac{a^2+2(a^2-t^2)}{2(a^2-t^2)}\,dt = \frac{a^2}{2}\int_0^{t_o}\frac{dt}{a^2-t^2} + \int_0^{t_o} dt =$$

$$\frac{a^2}{2}\,\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+t_o}{a-t_o}\right| + t_o = \frac{a}{4}\ln\left|\frac{a+t_o}{a-t_o}\right| + t_o = z_o + x_o = z_o + a\,\mathrm{sen}\,\frac{y_o}{a}.$$

2. La posición de un punto en cualquier instante $t > 0$ se determina por las ecuaciones $x = 2t$, $y = \ln t$, $z = t^2$. Calcular la velocidad media entre los instantes $t = 1$ y $t = 10$.

   Solución El desplazamiento del punto es $\ell = \displaystyle\int_1^{10} \sqrt{4+\frac{1}{t^2}+4t^2}\,dt =$

   $$\int_1^{10} \frac{1}{t}\sqrt{1+4t^2+4t^4}\,dt = \int_1^{10} \frac{1}{t}(1+2t^2)\,dt\Big|_1^{10} =$$

   $$(\ln t + t^2)\Big|_1^{10} = \ln 10 + 100 - 1 = 99 + \ln 10.$$

   De esta manera $v_m = \dfrac{\Delta S}{\Delta t} = \dfrac{99+\ln 10}{9} = 11 + \frac{1}{9}\ln 10.$

3. Demostrar que la ecuación vectorial $\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_1 = (\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1)t$, donde $\mathfrak{r}_1$ y $\mathfrak{r}_2$ son vectores, es la ecuación de la recta.

   Solución Sea $\mathfrak{r} = (x,y,z)$, $\mathfrak{r}_1 = (x_1,y_1,z_1)$, $\mathfrak{r}_2 = (x_2,y_2,z_2)$, entonces si $\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_1 = (\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1)t \Longrightarrow (x-x_1, y-y_1, z-z_1) = \big((x_2-x_1)t, (y_2-y_1)t, (z_2-z_1)t\big) \Longrightarrow \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} = \dfrac{z-z_1}{z_2-z_1} = t.$

4. Determinar ¨qué son las siguientes funciones vectoriales?

   a) $\mathfrak{r} = \mathfrak{a}t + \mathfrak{c}$ b) $\mathfrak{r} = \mathfrak{a}t^2 + \mathfrak{b}t$

   c) $\mathfrak{r} = \mathfrak{a}\cos t + \mathfrak{b}\,\mathrm{sen}\,t$ d) $\mathfrak{r} = \mathfrak{a}\,\mathrm{ch}\ t + \mathfrak{b}\,\mathrm{sh}\ t.$

   Solución

   a) $\mathfrak{r} - \mathfrak{c} = \mathfrak{a}t$ es una recta.

b) $\mathfrak{r} = \mathfrak{a}t^2 + \mathfrak{b}t = (a_1t^2 + b_1t, a_2t^2 + b_2t, a_3t^2 + b_3t)$. Efectuando la rotación $\mathfrak{a} \mapsto (1,0,0)$, $\mathfrak{b} \mapsto (0,1,0)$ (transformación ortogonal P tal que $P\mathfrak{a} = (\alpha,0,0)$, $P\mathfrak{b} = (0,\beta,0)$) tenemos que:

$P(x,y,z) = (x_1,y_1,z_1) = P\mathfrak{a}t^2 + P\mathfrak{b}t = (\alpha t^2, \beta t, 0)$, o sea $x_1 = \alpha t$, $y_1 = \beta t^2$, es decir $y_1 = \dfrac{\beta x_1^2}{\alpha^2}$ y tenemos una parábola en el sistema x_1, y_1, z_1.

c) Sea P una matriz de pasaje ortogonal talque $P\mathfrak{a} = (\alpha,0,0)$, $P\mathfrak{b} = (0,\beta,0)$, entonces:

$P(x,y,z) = P\mathfrak{a}\cos t + P\mathfrak{b}\operatorname{sen} t \Longrightarrow (x_1,y_1,z_1) = (\alpha\cos t, \beta\operatorname{sen} t, 0)$, o sea es una elipse.

d) Sea P una matriz de pasaje ortogonal talque $P\mathfrak{a} = (\alpha,0,0)$, $P\mathfrak{b} = (0,\beta,0) \Longrightarrow P(x,y,z) = (x_1,y_1,z_1) = (\alpha\operatorname{ch} t, \beta\operatorname{sh} t, 0) \Longrightarrow x_1 = \alpha\operatorname{ch} t$, $y_1 = \beta\operatorname{sh} t$, pero $x_1 = \alpha\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t} = \alpha\sqrt{1+\left(\frac{y_1}{\beta}\right)^2} \Longrightarrow \left(\frac{x_1}{\alpha}\right)^2 = 1 + \left(\frac{y_1}{\beta}\right)^2$ y se tiene una hipérbola en el sistema $\{x_1,y_1\}$.

5. Determinar la derivada de la función vectorial $\mathfrak{r}(t) = \alpha(t)\mathfrak{a}^o(t)$, donde $\alpha(t)$ es una función escalar, $\mathfrak{a}^o(t)$ es un vector unitario, en los casos que $\mathfrak{r}(t)$ varía:

   a) sólamente en longitud

   b) sólamente en dirección

   c) en longitud y dirección.

   Establecer el resultado geométrico de los resultados obtenidos.

   Solución

   a) En este caso tenemos que $\mathfrak{r}(t) = \alpha(t)\mathfrak{a}^o \Longrightarrow \mathfrak{r}'(t) = \alpha'(t)\mathfrak{a}^o$.

   b) Aquí se tiene que $\mathfrak{r}(t) = \alpha\mathfrak{a}^o(t) \Longrightarrow \mathfrak{r}'(t) = \alpha\mathfrak{a}^{o\prime}(t)$.

   c) En el caso general tenemos $\mathfrak{r}'(t) = \alpha'(t)\mathfrak{a}^o + \alpha(t)\mathfrak{a}^{o\prime}(t)$. Esto significa que el vector velocidad se escribe como la suma de una componente en la dirección del movimento y una componente en la dirección ortogonal $\mathfrak{a}^o(t)$, ya que si $\|\mathfrak{a}^o(t)\|^2 = \mathfrak{a}^o(t)\cdot\mathfrak{a}^o(t) = 1 \Longrightarrow \mathfrak{a}^o(t)\cdot\mathfrak{a}^{o\prime}(t) = 0$.

6. Deducir una fórmula para la derivada del producto mixto de funciones vectoriales $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c}$.

Solución Se sabe que $(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})' = \mathfrak{a}'\times\mathfrak{b}+\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}'$ y que $(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})' = \mathfrak{a}'\cdot\mathfrak{b}+\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}'$, entonces $(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c})' = (\mathfrak{a}\times\mathfrak{b})'\cdot\mathfrak{c}+\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c}' = \mathfrak{a}'\times\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c}+\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}'\cdot\mathfrak{c}+\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c}'$.

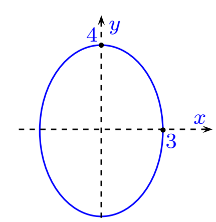
7. Calcular la derivada, con respecto al parámetro t, del volumen del paralelepípedo construidos sobre los vectores $\mathfrak{a} = (1, t, t^2)$, $\mathfrak{b} = (2t, -1, t^3)$, $\mathfrak{c} = (-t^2, t^3, 1)$.

   Solución Recordemos que el volumen $V = |\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c}|$, entonces $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b} = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ 1 & t & t^2 \\ 2t & -1 & t^3 \end{vmatrix} =$ $(t^4+t^2, t^3, -1-2t^2)$ y $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c} = -t^6-t^4+t^6-1-2t^2 = -t^4-2t^2-1 = -(t^2+1)^2 \Longrightarrow$ $V(t) = (t^2+1)^2 \Longrightarrow V'(t) = 2(t^2+1)(2t) = 4t(t^2+1)$.

   Recuerde que $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c} = \begin{vmatrix} 1 & t & t^2 \\ 2t & -1 & t^3 \\ -t^2 & t^3 & 1 \end{vmatrix}$.

8. La ecuación del movimiento es $\mathfrak{r}(t) = (3\cos t, 4\,\mathrm{sen}\, t)$, donde t es el tiempo; calcular la velocidad y la aceleración. Construir la trayectoria del movimiento y los vectores de la velocidad y de la aceleración en $t = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$.

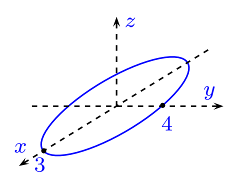
   Solución Se tiene que $\mathfrak{r} = (3\cos t, 4\,\mathrm{sen}\, t, 0) \Longrightarrow \mathfrak{r}'(t) =$ $(-3\,\mathrm{sen}\, t, 4\cos t, 0)$, $\mathfrak{r}''(t) = (-3\cos t, -4\,\mathrm{sen}\, t, 0)$.

   Es interesante observar que $\mathfrak{r}'' = -\mathfrak{r}$.

   En $t = 0$, $\mathfrak{r} = (3, 0, 0)$, $\mathfrak{r}' = (0, 4, 0)$, $v = \|\mathfrak{r}'\| = 4$, $\mathfrak{r}'' = (-3, 0, 0)$, $a = \|\mathfrak{r}''\| = 3$.

   En $t = \frac{\pi}{4}$, $\mathfrak{r} = (-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{4}{\sqrt{2}}, 0)$, $\mathfrak{r}' = (-\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{4}{\sqrt{2}}, 0)$, $v = \|\mathfrak{r}'\| = \sqrt{\frac{9}{2}+\frac{16}{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$, $\mathfrak{r}'' = (-\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{4}{\sqrt{2}}, 0)$, $a = \|\mathfrak{r}''\| = \frac{5}{\sqrt{2}}$.

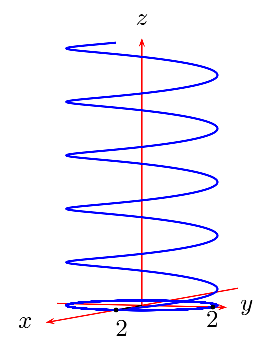
   En $t = \frac{\pi}{2}$, $\mathfrak{r} = (0, 4, 0)$, $\mathfrak{r}' = (-3, 0, 0)$, $v = \|\mathfrak{r}'\| = 3$, $\mathfrak{r}'' = (0, -4, 0)$, $a = \|\mathfrak{r}''\| = 4$.

9. La ecuación del movimiento es $\mathfrak{r} = (2\cos t, 2\,\mathrm{sen}\, t, 3t)$, donde t es el tiempo, determinar la trayectoria, velocidad y aceleración del movimiento. Determinar las magnitudes de la velocidad y la aceleración y las direcciones en $t = 0, \frac{\pi}{2}$.

Solución El movimiento $\mathrm{r} = (2\cos t, 2\,\mathrm{sen}\, t, 3t)$ es una hélice circular de velocidad $\mathrm{r}'(t) = (-2\,\mathrm{sen}\, t, 2\cos t, 3)$, $v = \|\mathrm{r}'\| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$ y la aceleración $\mathrm{r}'' = (-2\cos t, -2\,\mathrm{sen}\, t, 0)$, $a = \|\mathrm{r}''\| = \sqrt{4} = 2$.

En $t = 0$, $\mathrm{r} = (2,0,0)$, $\mathrm{r}' = (0,2,3)$, $v = \sqrt{13}$, $\mathrm{r}'' = (-2,0,0)$, $a = 2$.

En $t = \frac{\pi}{2}$, $\mathrm{r} = (0, 2, \frac{3\pi}{2})$, $\mathrm{r}' = (-2,0,3)$, $v = \sqrt{13}$, $\mathrm{r}'' = (0,-2,0)$, $a = 2$.



Se observa que en este movimiento la velocidad y la aceleración (magnitudes) son constantes.

10. La ecuación del movimiemto es $\mathrm{r} = (\cos\alpha\cos wt, \mathrm{sen}\,\alpha\cos wt, \mathrm{sen}\, wt)$, donde α, w son constantes y t es el tiempo. Determinar la trayectoria, la magnitud y la dirección de la velocidad y la aceleración del movimiento.

    Solución La ecuación del movimiento es:

    $\mathrm{r} = (\cos\alpha\cos wt, \mathrm{sen}\,\alpha\cos wt, \mathrm{sen}\, wt)$, la velocidad es

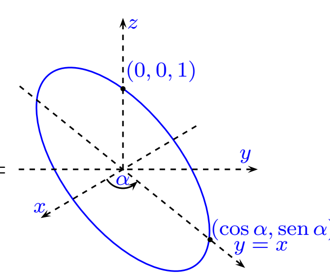
    $\mathrm{r}' = (-w\cos\alpha\,\mathrm{sen}\, wt, -w\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\, wt, w\cos wt)$,

    $v = \|\mathrm{r}'\| = \sqrt{w^2(\cos^2\alpha + \mathrm{sen}^2)\,\mathrm{sen}^2 wt + w^2\cos^2 wt} = |w|$.

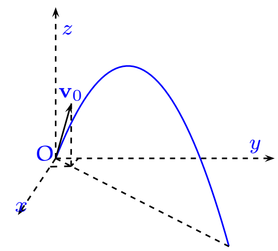
    $\mathrm{r}'' = (-w^2\cos\alpha\cos wt, -w^2\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos wt, \mathrm{sen}\, wt)$,

    $a = \|\mathrm{r}''\| = \sqrt{w^4(\cos^2\alpha + \mathrm{sen}^2\alpha)\cos^2 wt + w^4\,\mathrm{sen}^2 wt} = w^2$.

    La trayectoria es una circunferencia en $\mathbb{R}^3$.



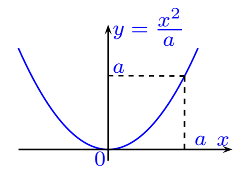
11. La ecuación del movimiento de un proyectil (sin tomar en cuenta la resistencia del aire) es $\mathrm{r} = \mathrm{v}_o t - \frac{1}{2}gt^2\mathrm{k}$, donde $\mathrm{v}_o = (v_1, v_2, v_3)$ es la velocidad inicial. Determinar la velocidad y la aceleración en cualquier instante.



Solución Se tiene que $\mathrm{r} = (v_1 t, v_2 t, v_3 t - \frac{1}{2} g t^2)$,
$\mathrm{r}' = (v_1, v_2, v_3 - gt) = \mathrm{v}_o - gt\mathrm{k}$, $\mathrm{r}'' = (0, 0, -g)$,
$v = \|\mathrm{r}'\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + (v_3 - gt)^2}$, $a = \|\mathrm{r}''\| = g$.

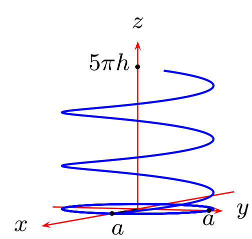
12. Demostrar que si un punto se mueve sobre la parábola $y = \dfrac{x^2}{a}$, $z = 0$, de modo que la velocidad sobre el eje x es constante, la aceleración también se mantendrá constante.

Solución La ecuación el movimiento es $\mathrm{r} = (x, \dfrac{x^2}{a}, 0)$ de modo que $\dfrac{dx}{dt} = k \implies \mathrm{r}' = (x', \dfrac{2x}{a} x', 0)$, $\mathrm{r}'' = (0, \dfrac{2}{a}(x')^2, 0) = (0, \dfrac{2}{a} k^2, 0)$.



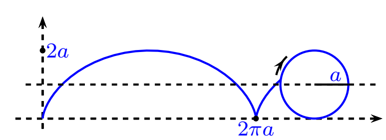
13. Un punto situado en la rosca de un tornillo, que se enrosca en una viga, describe una elipse circular $x = a\cos\theta$, $y = a\,\mathrm{sen}\,\theta$, $z = h\theta$, donde θ es el ángulo de giro del tornillo y h la elevación correspondiente al giro de un radián. Determinar la velocidad del movimiento del punto.

Solución Sea $\mathrm{r} = (a\cos\theta, \mathrm{sen}\,\theta, h\theta)$, la velocidad es:
$\mathrm{r}'(t) = (-a\,\mathrm{sen}\,\theta \dfrac{d\theta}{dt}, a\cos\theta \dfrac{d\theta}{dt}, h\dfrac{d\theta}{dt}) = \dfrac{d\theta}{dt}(-a\,\mathrm{sen}\,\theta, a\cos\theta, h)$, $v = \|\mathrm{r}'\| = |\dfrac{d\theta}{dt}|\sqrt{a^2 + h^2} = |w|\sqrt{a^2 + h^2}$, donde $w = \dfrac{d\theta}{dt}$ es la velocidad angular del movimiento.



14. Determinar la velocidad de un punto de la circunferencia de una cuerda de radio a, que gira con velocidad angular constante w de modo que su centro se desplaza en línea recta con velocidad v_o.

Solución Para simplificar tomemos el movimiento en un plano, de modo que $\mathrm{r} = (a\cos wt, a\,\mathrm{sen}\,wt) + (v_o t, 0) =$
$(v_o t + a\cos wt, a\,\mathrm{sen}\,wt)$, entonces:



$\mathrm{r}' = (v_o - aw \operatorname{sen} wt, aw \cos wt)$, $v = \|\mathrm{r}'\| = \sqrt{(v_o - aw \operatorname{sen} wt)^2 + w^2 a^2 \cos^2 wt} = \sqrt{v_o^2 - 2av_o w \operatorname{sen} wt + a^2 w^2}$.

15. En una esfera de radio a y centro O se considera el movimiento definido en coordenadas esféricas por $\theta = 2t$, $\phi = \frac{\pi}{2} - t$, $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Estudiar el movimiento y en particular $\|\mathrm{r}'\| = v$ en función de t.

Solución Determinemos las ecuaciones cartesianas de r, para determinar las tres proyecciones $x = a\cos t \cos 2t$, $y = a \cos t \operatorname{sen} 2t$, $z = a \operatorname{sen} t$.

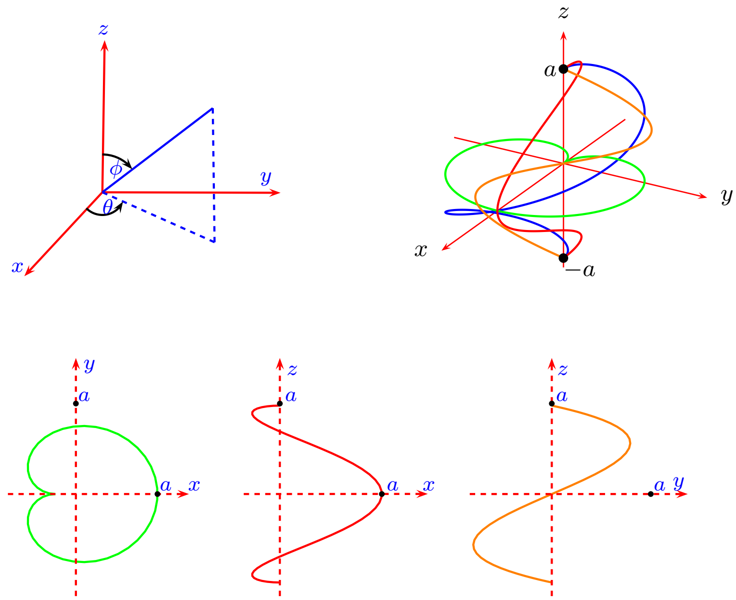
La proyección sobre el plano xy es $x = a\cos t \cos 2t$, $y = a\cos t \operatorname{sen} 2t$ o bien $r^2 = x^2 + y^2 = a^2 \cos^2 t$, o sea $r = a\cos t = a \cos \dfrac{\theta}{2}$, con $-\pi \leq \theta \leq \pi$ (cardioide).

La proyección sobre el plano xz es $x = a\cos t \cos 2t$, $z = a \operatorname{sen} t \Longrightarrow x = a\cos t(1 - 2\operatorname{sen}^2 t) = a\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}(1 - 2\operatorname{sen}^2 t) = a\big(1 - \dfrac{z^2}{a^2}\big)^{\frac{1}{2}}\big(1 - 2\dfrac{z^2}{a^2}\big) = \dfrac{1}{a^{\frac{3}{2}}}(a^2 - z^2)(a^2 - 2z^2)$.

La proyección sobre el plano yz es $y = a\cos t \operatorname{sen} 2t$, $z = a\operatorname{sen} t \Longrightarrow y = 2a\cos^2 t \operatorname{sen} t = 2z\big(1 - \dfrac{z^2}{a^2}\big)$.

Por otro lado, $\mathrm{r}' = (6a \operatorname{sen} t(\operatorname{sen}^2 t - \frac{5}{6}), 6a\cos t(\cos^2 t - \frac{2}{3}), a\cos t)$, de donde tenemos la tabla y gráficos siguientes:

t	0		t_1		$\frac{\pi}{4}$		t_2		$\frac{\pi}{2}$
x'	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	a
y'	$2a$	$+$	0	$-$		$-$		$-$	0
z'	a	$+$		$+$		$+$		$+$	0
x	a	$\searrow$		$\searrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	0
y	0	$\nearrow$		$\searrow$	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	$\searrow$		$\searrow$	0
z	0	$\nearrow$		$\nearrow$	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$		$\nearrow$	a



Finalmente $v = \|\mathrm{r}'\| = a\sqrt{\operatorname{sen}^2 t(6\operatorname{sen}^2 t - 5)^2 + \cos^2 t(6\cos^2 t - 4)^2 + \cos^2 t} = a\sqrt{1 + 4\cos^2 t}$, por lo que se tiene que en $]\,0, \frac{\pi}{2}\,[$ el movimiento se retarda y en $]-\frac{\pi}{2}, 0\,[$ el movimiento se acelera.

16. Determinar el movimiento rectilíneo tal que la abscisa x verifica $x'' + x' + x = 0$, donde en $t = 0$ se tiene $x = x' = 1$.

Solución La solución $x'' + x' + x = (D^2 + D + 1)x = 0 \Longrightarrow$ la solución es de la forma $x = a\mathrm{e}^{\alpha t} + \bar{a}\mathrm{e}^{\bar{\alpha} t}$, $x' = a\alpha\mathrm{e}^{\alpha t} + \bar{a}(\bar{\alpha})\mathrm{e}^{\bar{\alpha} t}$, donde α, $\bar{\alpha}$ son raíces de la ecuación característica y como en $t = 0$ se tiene $1 = a + \bar{a}$, $1 = a\alpha + \bar{a}\bar{\alpha} \Longrightarrow a = -\alpha, \bar{a} = -\bar{\alpha}$. Así, $x = -2\mathfrak{Re}(\alpha\mathrm{e}^{\alpha t}) = -2\mathfrak{Re}(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}) = -2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\pi}{3})$, con lo cual se tiene un movimiento oscilatorio amortiguado, de pseudo-período $\frac{4\pi}{\sqrt{3}}$.

Los puntos de abscisa extrema están dados por $t_n = \frac{\pi}{\sqrt{3}} + 2n\frac{\pi}{\sqrt{3}}, n \in \mathbb{Z}, x_n = (-1)^{n+1}\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t_n}$.

En efecto, $x = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\pi}{3}) - 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\operatorname{sen}(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\pi}{3}) = 0 \Longrightarrow \tan(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}t_n - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z} \Longrightarrow t_n = \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$ y se tiene $x_n = -2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t_n}\cos(\frac{\pi}{6} + n\pi) = (-1)^{n+1}\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t_n}$.

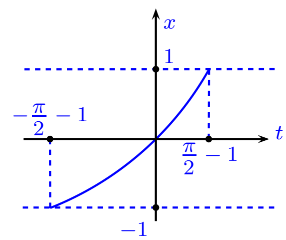
17. Estudiar el movimiento rectilíneo definido para $|x| < 1$, por $x'' = \dfrac{x'^2}{1-x^2}$, con las condiciones iniciales $x_o = 0$, $x'_o = 1$. Representar la curva en función de t.

Solución Sea $v = x'$, $\dfrac{dv}{dt} = x''$, entonces $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}{1-x^2} \Longrightarrow \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dv}{dx}\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\left(\frac{dx}{dt}\right)\frac{dx}{dt}}{1-x^2} \Longrightarrow \dfrac{dv}{v} = \dfrac{dx}{1-x^2} \Longrightarrow \ln v = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x} + \ln a \Longrightarrow v = a\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ y en $t = 0$, $x_o = 0$, $x'_o = v(0) = 1 = a$.

El cambio de variable $x = \cos\alpha$ satisface $\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha} = \operatorname{cotg}^2\dfrac{\alpha}{2} \Longrightarrow v = \operatorname{cotg}\dfrac{\alpha}{2} \Longrightarrow \dfrac{dx}{dt} = \operatorname{cotg}\dfrac{\alpha}{2} \Longrightarrow -\operatorname{sen}\alpha\dfrac{d\alpha}{dt} = \operatorname{cotg}\dfrac{\alpha}{2} \Longrightarrow \dfrac{dt}{d\alpha} = -2\operatorname{sen}^2\dfrac{\alpha}{2} = \cos\alpha - 1 \Longrightarrow t = \operatorname{sen}\alpha - \alpha + b$, pero en $t = 0$, $x = 0 = \cos\alpha \Longrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$ i.e. $b = \frac{\pi}{2} - 1$.

Finalmente tenemos la tabla y gráfico siguientes:

α	0		$\frac{\pi}{2}$		π
t	$\frac{\pi}{2}-1$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}-1$
v	$-\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0
x	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1



18. Sean $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$ no nulos de modo que $\mathfrak{a} \perp \mathfrak{b}$, determinar el movimiento de los puntos tales que $\mathfrak{r}'' = \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \times \mathfrak{r}'$. Verificar que en cierta proyección oblícua, la trayectoria es un círculo. Graficar la función vectorial.

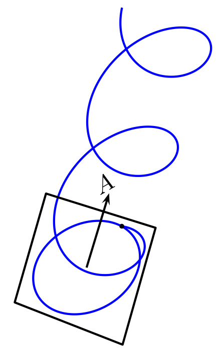
Solución Sin pérdida de generalidad podemos considerar $\mathfrak{a} = a\mathfrak{i}$, $a > 0$, $\mathfrak{b} = b\mathfrak{j}$, $b > 0$, (es la rotación ortogonal del sistema de coordenadas de modo que $\mathfrak{a}$ coincida con $\mathfrak{i}$ y $\mathfrak{b}$ coincida con $\mathfrak{j}$). Como $\mathfrak{b} \times \mathfrak{r} = (bz', 0, -bx')$ y $\mathfrak{r}'' = \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \times \mathfrak{r}'$, tenemos que $x'' = a + bz'$, $y'' = 0$, $z'' = -bx' \Longrightarrow y' = y_o$ y utilizando números complejos podemos escribir $\dfrac{d}{dt}(x' + \mathrm{i}z') = a - b\mathrm{i}(x' + \mathrm{i}z') \Longrightarrow x' + \mathrm{i}z' = \dfrac{a}{b\mathrm{i}} + (\lambda + \mathrm{i}\mu)\mathrm{e}^{-b\mathrm{i}t}$, donde λ, μ son reales.

Así, $x'_o + \mathrm{i}z'_o = \dfrac{a}{b\mathrm{i}} + \lambda + \mathrm{i}\mu \Longrightarrow x' + \mathrm{i}z' = -\mathrm{i}\frac{a}{b} + (x'_o + \mathrm{i}(z'_o + \frac{a}{b}))\mathrm{e}^{-b\mathrm{i}t}$ y se concluye que el gráfico es un círculo en el plano $y = y'_o$, de centro $(0, y'_o, -\frac{a}{b})$ y radio $\sqrt{x'^2_o + (z'_o + \frac{a}{b})^2}$.

La trayectoria r se determina integrando de nuevo. Se puede escoger el origen O para que $y = y'_o t$, $x + \mathrm{i}z = -\mathrm{i}\frac{a}{b}t + \frac{\mathrm{i}}{b}(x'_o + \mathrm{i}(z'_o + \frac{a}{b}))\mathrm{e}^{-b\mathrm{i}t})$, por lo que tenemos las ecuaciones:

$$x = -\frac{1}{b}(z'_o + \frac{b}{a})\cos bt + \frac{x'_o}{b}\operatorname{sen} bt,$$
$$y = y'_o t,$$
$$z = -\frac{a}{b}t + \frac{x'_o}{b}\cos bt + \frac{1}{b}(z'_o + \frac{b}{a})\operatorname{sen} bt,$$

es decir $\mathrm{r} = tA + \cos btB + \operatorname{sen} btC$, donde $A = (0, y'_o, -\frac{a}{b})$, $B = (-\frac{1}{b}(z'_o + \frac{a}{b}), 0, \frac{x'_o}{b})$, $C = (\frac{x'_o}{b}, 0, \frac{1}{b}(z'_o + \frac{b}{a}))$, donde $B \perp C$.



La proyección sobre el plano BC paralelamente a A transforma r en un círculo de centro O y de radio $\frac{1}{b}\sqrt{x'^2_o + (z'_o + \frac{a}{b})^2}$.

19. Sobre la parábola de ecuación $x^2 = 2py$, determinar las trayectorias para las cuales r es constantemente normal a r''.

Solución Puesto que $\mathrm{r} = (x, y) \perp \mathrm{r}'' = (x'', y'')$ se tiene $xx'' + yy'' = 0$, con $x^2 = 2py \Longrightarrow 2py' = 2xx' \Longrightarrow 2py'' = 2x'^2 + 2xx'' \Longrightarrow 2p^2x'' + x^2x'' + xx'^2 = 0$.
Sea $u = x'$, $x'' = u' = \frac{du}{dx}$, entonces $2p^2\frac{du}{dx} + x^2\frac{du}{dx} + xu = 0 \Longrightarrow \frac{du}{u} = \frac{xdx}{x^2 + 2p^2} = 0 \Longrightarrow u = \frac{a}{\sqrt{x^2 + 2p^2}}$, a constante. De esta forma tenemos $a\frac{dt}{dx} = \sqrt{x^2 + 2p^2} \Longrightarrow$
$t = \frac{p^2}{2a}\big(\frac{x\sqrt{x^2 + 2p^2}}{2} + p^2\ln(x + \sqrt{x^2 + 2p^2}) - p^2\ln\sqrt{2}p\big)$ escogiendo el origen en $t = 0$.

Sin embargo esta solución no es tan clara como se deseara, por lo que es conveniente parametrizar la solución por $x = \sqrt{2}p\operatorname{sh}\alpha$, $\frac{dt}{d\alpha} = \frac{dt}{dx}\frac{dx}{d\alpha} = \frac{1}{a}\sqrt{x^2 + 2p^2}\,\frac{dx}{d\alpha} = \frac{1}{a}\sqrt{2}p\sqrt{\operatorname{sh}^2 x + 1}\sqrt{2}p\operatorname{ch}\alpha = \frac{2p^2}{a}\operatorname{ch}^2\alpha \Longrightarrow t = \frac{p^2}{2a}(2\alpha + \operatorname{sh}^2\alpha)$, $x = p\sqrt{2}\operatorname{sh}\alpha$, donde α es un parámetro que rige el tiempo t y el movimiento x.

20. Sea $\mathrm{r}(t)$ el desplazamiento de un punto tal que $\mathrm{r} \perp \mathrm{r}''$ y $\mathrm{r}' \perp \mathrm{r}''$, demostrar que se puede

escoger el origen del tiempo para que $\|\mathrm{r}'\| = a$ y $\|\mathrm{r}\| = \sqrt{a^2t^2+b}$, donde a, $b \in \mathbb{R}$. Establecer el recíproco.

Se supone además que la trayectoria r está sobre un cilindro de revolución de radio c cuyo eje pasa por O. Determinar r distinguiendo los casos $b = c^2$, $b > c^2$, $b < c^2$.

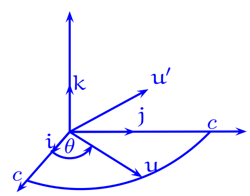
Solución Observemos que las derivadas de $\|\mathrm{r}\|^2$ hacen intervenir las condiciones del enunciado. Además $\mathrm{r}' \perp \mathrm{r}''$ caracteriza los movimientos uniformes.

Es claro que $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathrm{r}\|^2 = \mathrm{r}{\cdot}\mathrm{r}'$, $\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\|\mathrm{r}\|^2 = \|\mathrm{r}'\|^2 + \mathrm{r}{\cdot}\mathrm{r}''$.

Si $\mathrm{r}'{\cdot}\mathrm{r}'' = 0$, entonces $\|\mathrm{r}'\|$ es una constante a.

Si además $\mathrm{r}{\cdot}\mathrm{r}'' = 0 \Longrightarrow \frac{d^2}{dt^2}\|\mathrm{r}\|^2 = 2a^2 \Longrightarrow \frac{d}{dt}\|\mathrm{r}\|^2 = 2a^2t \Longrightarrow \|\mathrm{r}\|^2 = a^2t^2 + b$.

Inversamente, si $\|\mathrm{r}\|^2 = a^2t^2 + b$ y $\|\mathrm{r}'\| = a$, $\mathrm{r}{\cdot}\mathrm{r}'' + \|\mathrm{r}\|^2 = a^2$, $\mathrm{r}' \perp \mathrm{r}'' \Longrightarrow \mathrm{r}''$ es ortogonal a r' y a r, pues $\mathrm{r}{\cdot}\mathrm{r}'' + \|\mathrm{r}'\|^2 = \mathrm{r}{\cdot}\mathrm{r}'' + a^2 = a^2$ i.e. $\mathrm{r}{\cdot}\mathrm{r}'' = 0$.



Consideremos ahora un cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = c^2$ y expresemos r en función de u y k, es decir $\mathrm{r} = c\mathrm{u} + z\mathrm{k}$, $\mathrm{r}' = c\mathrm{u}'\theta' + z'\mathrm{k}$.

Por la primera parte del problema es necesario y suficiente que existan constantes a, $b \in \mathbb{R}$ tales que $c^2 + z^2 = a^2t^2 + b$, $c^2\theta'^2 + z'^2 = a^2$.

i) Si $b = c^2$, se tiene $z = \pm at$, $\Longrightarrow c^2\theta'^2 + a^2 = a^2 \Longrightarrow \theta' = 0$ i.e. r es un movimiento rectilíneo uniforme.

Si $b \neq c^2$, entonces $2zz' = 2a^2t \Longrightarrow z' = \dfrac{a^2t}{\pm\sqrt{a^2t^2+b-c^2}} \Longrightarrow c^2\theta'^2 = a^2 - \dfrac{a^4t^2}{a^2t^2+b-c^2} = \dfrac{a^2(b-c^2)}{a^2t^2+b-c^2}$.

ii) Si $b > c^2$, $\theta' = \pm\frac{a}{c}\frac{m}{\sqrt{t^2+m^2}}$, donde $m = b - c^2 > 0$ y se obtiene la curva definida por $t = m \operatorname{sh}\frac{c\theta}{am}$, $z = am\big(\operatorname{ch}^2\frac{c\theta}{am} + \frac{a^2+1}{a^2}\big)^{\frac{1}{2}}$, pues $\theta = \pm\frac{am}{c}\operatorname{arcsh}\frac{t}{m} \Longrightarrow t = \pm m \operatorname{sh}\frac{c\theta}{am} \Longrightarrow z^2 = a^2t^2 + b - c^2 = a^2t^2 + m^2 = a^2m^2\operatorname{sh}^2\frac{c\theta}{am} + m^2 = m^2(a^2\operatorname{sh}^2\frac{c\theta}{am} + 1) = m^2(a^2\operatorname{ch}^2\frac{c\theta}{am} + a^2 + 1) = a^2m^2\operatorname{ch}^2\frac{c\theta}{am} + m^2(a^2+1)$.

iii) Si $b < c^2$, sea $c^2 = b + a^2m^2$, entonces $z^2 = a^2(t^2 - m^2)$, $c^2\theta'^2 = \dfrac{a^2m^2}{m^2 - t^2}$ y se obseva que las relaciones son incompatibles, es decir el movimiento es imposible.

3.10.2. Plano tangente, normal

21. Determinar las ecuaciones de los planos tangentes y las rectas normales a las siguientes superficies en los puntos que se indican:

a) El paraboloide de revolución $z = x^2 + y^2$, en el punto $(1, -2, 5)$.

b) El cono $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{8} = 0$, en el punto $(4, 3, 4)$.

c) La esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$, en el punto $(R\cos\alpha, R\operatorname{sen}\alpha, R)$.

Solución

a) Se tiene que la ecuación de la superficie $F(x, y, z) = z - x^2 - y^2$; las derivadas parciales $F_x = -2x$, $F_y = -2y$, $F_z = 1$ y en $(1, -2, 5)$ se tiene $F_x = -2$, $F_y = 4$, $F_z = 1$.

El plano tangente en $(1, -2, 5)$ es $-2(x-1)+4(x+2)+(z-5) = 0$ i.e. $2x-4y-z-5 = 0$.

La recta normal es $(x, y, z) = (-1, 2, 5) + t(2, -4, -1)$, $t \in \mathbb{R}$.

b) Tomamos $F(x, y, z) = \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{8} = 0$, $F_x = \frac{1}{8}x$, $F_y = \frac{2}{9}y$, $F_z = -\frac{1}{4}z$ y en el punto $(4, 3, 4)$ se tiene que $F_x = \frac{1}{2}$, $F_y = \frac{2}{3}$, $F_z = -1$.

La ecuación del plano tangente es $\frac{1}{2}(x-4)+\frac{2}{3}(y-3)-(z-4) = 0 \Longrightarrow 3x+4y-6z = 0$.

La recta normal satisface $(x, y, z) = (4, 3, 4) + t(3, 4, -6)$.

c) Sea $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2Rz = 0$, $F_x = 2x$, $F_y = 2y$, $F_z = 2z - 2R$, por lo que en el punto $(R\cos\alpha, R\operatorname{sen}\alpha, R)$ tenemos $F_x = 2R\cos\alpha$, $F_y = 2R\operatorname{sen}\alpha$, $F_z = 0$.

La ecuación del plano tangente es $2R\cos\alpha(x - R\cos\alpha) + 2R\operatorname{sen}\alpha(y - R\operatorname{sen}\alpha) + 0(z-R) = 0 \Longrightarrow x\cos\alpha+y\operatorname{sen}\alpha-R\cos^2\alpha-R\operatorname{sen}^2\alpha = x\cos\alpha+y\operatorname{sen}\alpha-R = 0$.

22. ¿En qué puntos del elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, la normal forma ángulos iguales con los ejes coordenados?

Solución Las derivadas parciales de la función $F(x, y, z) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1$ son

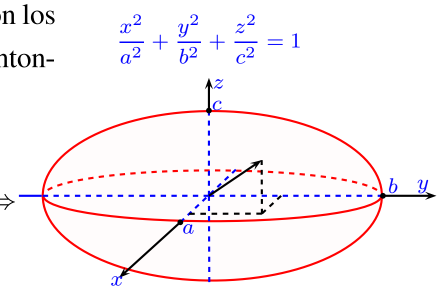
$F_x = \dfrac{2x}{a^2}$, $F_y = \dfrac{2y}{b^2}$, $F_z = \dfrac{2z}{c^2}$.

Sea (x_o, y_o, z_o) un punto que forma ángulos iguales con los ejes coordenados, el vector director es $(\frac{x_o}{a^2}, \frac{y_o}{b^2}, \frac{z_o}{c^2})$ entonces

$\dfrac{x_o}{a^2} = \dfrac{y_o}{b^2} = \dfrac{z_o}{c^2} = \lambda = \dfrac{x_o + y_o + z_o}{a^2 + b^2 + c^2} \Longrightarrow$

$\dfrac{x_o}{a^2}x_o + \dfrac{y_o}{b^2}y_o + \dfrac{z_o}{c^2}z_o = 1 \Longrightarrow x_o + y_o + z_o = \dfrac{1}{\lambda} \Longrightarrow$

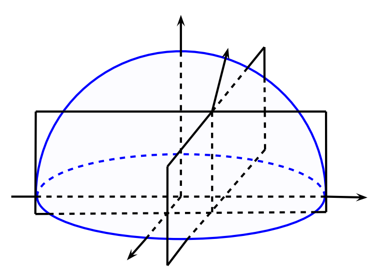
$\lambda^2 = \dfrac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \Longrightarrow \lambda = \pm\dfrac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.



De esta forma tenemos $(x_o, y_o, z_o) = \pm\left(\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \dfrac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \dfrac{c^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right)$.

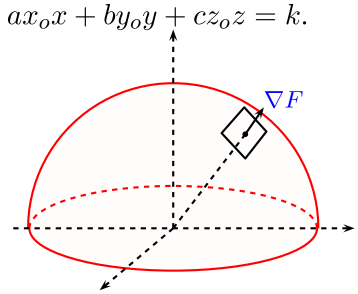
23. Por el punto $M(3, 4, 12)$ de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ pasan planos perpendiculares a los ejes x y y. Escribir la ecuación del plano que pasa por las tangentes a las secciones que originan aquellos, en el punto M.

    Solución Sea $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 169$, es claro que el vector (F_x, F_y, F_z) es perpendicular a la superficie de la esfera, es decir el vector $(2x, 2y, 2z)\Big|_{(3,4,12)} = (6, 8, 24)$ es ortogonal al plano que pasa por las tangentes a las secciones, por lo que la ecuación del plano $6(x - 3) + 8(y - 4) + 24(y - 12) = 0$, o bien $3x + 4y + 12y - 169 = 0$.



24. Demostrar que la ecuación del plano tangente a la superficie central de segundo orden $ax^2 + by^2 + cz^2 = k$ en un punto (x_o, y_o, z_o), tiene la forma $ax_ox + by_oy + cz_oz = k$.

    Solución Consideremos $F(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 - k$, el vector normal $(F_x, F_y, F_z) = (2ax, 2by, 2cz)$ es perpendicular al plano tangente a la superficie. Así en el punto (x_o, y_o, z_o) se tiene $2ax_o(x - x_o) + 2by_o(y - y_o) + 2cz_o(z - z_o) = 0 \Longrightarrow ax_ox + by_oy + cz_oz - ax_o^2 - by_o^2 - cz_o^2 = 0$ i.e. $ax_ox + by_oy + cz_oz = k$.



25. Dada la superficie $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$, trazar planos tangentes que sean paralelos al

plano $x + 4y + 6z = 0$.

Solución Consideremos $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 21$, por el ejercicio 24 tenemos que el plano tangente es $x_o x + 2y_o y + 3z_o z = 21$ y además las derivadas parciales de f en (x_o, y_o, z_o) son $F_x = 2x_o$, $F_y = 4y_o$, $F_z = 6z_o$ i.e. $(2x_o, 4y_o, 6z_o) = t(1, 4, 6)$ que debe satisfacer $x_o^2 + 2y_o^2 + 3z_o^2 = 21 \Longrightarrow x_o = \frac{1}{2}t, y_o = t, z_o = t \Longrightarrow \frac{1}{4}t_o^2 + 2t_o^2 + 3t_o^2 = 21 \Longrightarrow \frac{21}{4}t_o^2 = 21 \Longrightarrow t_o = \pm 2 \Longrightarrow (x_o, y_o, z_o) = \pm(1, 2, 2)$.

Finalmente los planos son $\pm(x + 4y + 6z) = 21$, o bien $x + 4y + 6z = \pm 21$.

26. Dada la ecuación del elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, trazar planos tangentes que intersequen en los ejes coordenados segmentos de igual longitud.

Solución Sea $F(x, y, z) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1$, entonces si (x_o, y_o, z_o) es un punto en que el plano tangente corta los ejes coordenados en segmentos de igual longitud, así el plano satisface $\dfrac{2x_o}{a^2}(x - x_o) + \dfrac{2y_o}{b^2}(y - y_o) + \dfrac{2z_o}{c^2}(z - z_o) = 0$, ya que $F_x = \dfrac{2x}{a^2}$, $F_y = \dfrac{2y}{b^2}$, $F_z = \dfrac{2z}{c^2}$.

Así tenemos que $\dfrac{x_o}{a^2}x + \dfrac{y_o}{b^2}y + \dfrac{z_o}{c^2}z - \dfrac{x_o^2}{a^2} - \dfrac{y_o^2}{b^2} - \dfrac{z_o^2}{c^2} = \dfrac{x_o}{a^2}x + \dfrac{y_o}{b^2}y + \dfrac{z_o}{c^2}z - 1 = 0$.

Por otro lado, como el vector normal a la superficie es $\left(\dfrac{2x_o}{a^2}, \dfrac{2y_o}{b^2}, \dfrac{2z_o}{c^2}\right)$, sus componentes son iguales en valor absoluto i.e. $\pm\dfrac{x_o}{a^2} = \pm\dfrac{y_o}{b^2} = \pm\dfrac{z_o}{c^2} \Longrightarrow \pm x_o \pm y_o \pm z_o = \dfrac{1}{\lambda}$ i.e. (ver ejercicio 22) $x_o = \dfrac{\pm a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$, $y_o = \dfrac{\pm b^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$, $z_o = \dfrac{\pm c^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

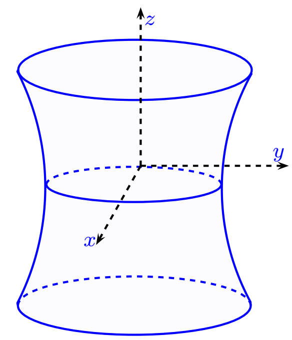
Finalmente los planos tangentes son $\pm\dfrac{x}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \pm \dfrac{y}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \pm \dfrac{z}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 1$, o bien $\pm x \pm y \pm z = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

27. Determinar en la superficie $x^2 + y^2 - z^2 - 2x = 0$, los puntos en que los planos tangentes sean paralelos a los ejes coordenados.

Solución Sea $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 2x = (x - 1)^2 + y^2 - z^2 - 1$, las derivadas son $F_x = 2x - 2$, $F_y = 2y$, $F_z = -2z$.

El plano tangente es el punto (x_o, y_o, z_o) es:

$$2(x - x_o)(x_o - 1) + 2y_o(y - y_o) - 2z_o(z - z_o) = 0.$$



Caso paralelo al eje z

En este caso debe tenerse que $F_x = 0$, $F_y = 0$, $F_z = 1$, por lo que si existe un punto (x_o, y_o, z_o) debe tenerse que $x_o = 1$, $y_o = 0$, $-z_o = 2\lambda$.

Así debe tenerse $1^2 + 0^2 - z_o^2 - 2 = -z_o^2 - 1 = 0 \Longrightarrow z_o^2 = -1$ que es imposible. Se concluye que no hay planos tangentes paralelos a la superficie $F(x, y, z) = 0$.

Caso paralelo al eje x

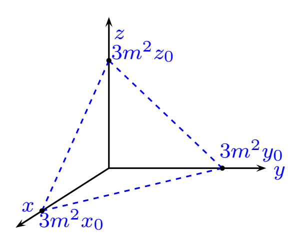
Se debe tener que $F_x = \pm 2\lambda$, $F_y = 0$, $F_z = 0 \Longrightarrow x_o - 1 = \pm\lambda$, $y_o = 0$, $z_o = 0$ y (x_o, y_o, z_o) está en la superficie. Así pues, $x_o = 1 \pm \lambda$, $y_o = 0$, $z_o = 0$ con lo cual $x_o^2 + y_o^2 - z_o^2 - 2x_o = x_o^2 - 2x_o = x_o(x_o - 2) = (1 \pm \lambda)(-1 \pm \lambda) = \pm(\lambda + 1)(\lambda - 1) = 0$ i.e. $\lambda = \pm 1$. Así tenemos dos puntos $(0, 0, 0)$ y $(2, 0, 0)$.

Caso paralelo al eje y

En este caso $F_x = 0$, $F_y = \pm 2\lambda$, $F_z = 0 \Longrightarrow x_o - 1 = 0$, $y_o = \pm\lambda$, $z_o = 0$ y el punto (x_o, y_o, z_o) está en la superficie. De esta forma $(x_o - 1)^2 + y_o^2 - z_o^2 = 1 \Longrightarrow \lambda^2 = 1$ i.e. $\lambda = \pm 1$, es decir tenemos los puntos $(1, 1, 0)$ y $(1, -1, 0)$.

28. Demostrar que los planos tangentes a la superficie $xyz = m^3$, forman con los planos coordenados tetraedros de volumen constante.

Solución Consideremos la función $F(x, y, z) = xyz - m^3$, las derivadas parciales son $F_x = yz$, $F_y = xz$, $F_z = xy$, por lo que la ecuación del plano en el punto (x_o, y_o, z_o) es $y_o z_o(x - x_o) + x_o z_o(y - y_o) + x_o y_o(z - z_o) = 0 \Longrightarrow y_o z_o x + x_o z_o y + x_o y_o z - 3m^3 = 0 \Longrightarrow \frac{x}{x_o} + \frac{y}{y_o} + \frac{z}{z_o} = 3m^2$.



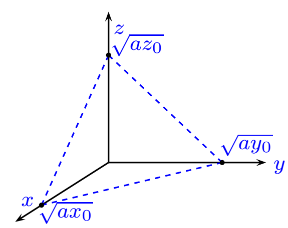
De esta manera tenemos que el volumen es:

$$V = \frac{1}{3}\left(\frac{3m^2x_o3m^2y_o}{2}3m^2z_o\right) = \frac{9}{2}m^3.$$

29. Demostrar que los planos tangentes a la superficie $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ interseca los ejes coordenados en segmentos cuya suma es constante.

Solución Sea $F(x,y,z) = \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-\sqrt{a}$, entonces $F_x = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $F_y = \frac{1}{2\sqrt{y}}$, $F_z = \frac{1}{2\sqrt{z}}$. El plano tangente en el punto (x_o, y_o, z_o) es

$$\frac{1}{2\sqrt{x_o}}(x-x_o)+\frac{1}{2\sqrt{y_o}}(y-y_o)+\frac{1}{2\sqrt{z_o}}(z-z_o)=0 \Longrightarrow$$
$$\frac{x}{\sqrt{x_o}}-\sqrt{x_o}+\frac{y}{\sqrt{y_o}}-\sqrt{y_o}+\frac{z}{\sqrt{z_o}}-\sqrt{z_o}-\sqrt{z_o}=0 \Longrightarrow$$
$$\frac{x}{\sqrt{x_o}}+\frac{y}{\sqrt{y_o}}+\frac{z}{\sqrt{z_o}}=\sqrt{a}.$$



La suma de los segmentos es $\sqrt{ax_o}+\sqrt{ay_o}+\sqrt{az_o} = \sqrt{a}(\sqrt{x_o}+\sqrt{y_o}+\sqrt{z_o}) = \sqrt{a}\sqrt{a}=a$.

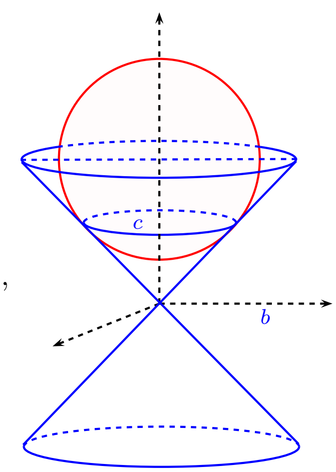
30. Demostrar que el cono $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$ y la esfera $x^2+y^2+\left(z-\frac{b^2-c^2}{c}\right)^2=\frac{b^2}{c^2}(b^2+c^2)$ son tangentes entre sí en los puntos $(0,\pm b, c)$.

Solución Si (x_o, y_o, z_o) es un punto que está en el plano tangente a las superficies, se tiene que satisface las ecuaciones de los planos tangentes, es decir:

$\frac{2x_o}{a^2}(x-x_o)+\frac{2y_o}{b^2}(y-y_o)-\frac{2z_o}{c^2}(z-z_o)=0,$

$2x_o(x-x_o)+2y_o(y-y_o)+2(z_o-\frac{b^2+c^2}{c})(z-z_o)=0.$

Verifiquemos que en los puntos $(0,\pm b,c)$ los planos coinciden.



En efecto:

$\pm\frac{2b}{b^2}(y\mp b)-\frac{2c}{c^2}(z-c)=\pm\frac{2}{b}(y\mp b)-\frac{2}{c}(z-c)=0,$
$\pm 2b(y\mp b)+2\big(c-\frac{b^2+c^2}{c}\big)(z-c)$
$=\pm 2b(y\mp b)-\frac{2}{c}b^2(z-c)=0\iff$
$\pm\frac{2}{b}(y\mp b)-\frac{2}{c}(z-c)=0.$

31. ¿Qué ángulo forman en su intersección el cilindro $x^2+y^2=R^2$ y la esfera $(x-R)^2+y^2+z^2=R^2$ en el punto $\big(\frac{R}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}R,0\big)$?

Solución Consideremos las superficies $F(x,y,z)=x^2+y^2-R^2=0$, $G(x,y,z)=(x-R)^2+y^2+z^2-R^2=0$, entonces $F_x=2x$, $F_y=2z$, $F_z=0$, $G_x=2(x-R)$, $G_y=2y$, $G_z=2z$ y el ángulo que forman las superficies en el punto $\big(\frac{R}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}R,0\big)$ lo determinan los vectores normales a las superficies en el punto.

De esta manera los vectores normales son $\eta_F=(R,\sqrt{3}R,0)$, $\|\eta_F\|=2R$, $\eta_G=(-R,\sqrt{3}R,0)$, $\|\eta_G\|=2R$ i.e. $\cos\theta=\frac{\eta_F\cdot\eta_G}{\|\eta_F\|\,\|\eta_G\|}=\frac{-R^2+3R^2}{4R^2}=\frac{1}{2}$, donde θ es el ángulo formado por los vectores, es decir $\theta=\frac{\pi}{3}$.

32. Demostrar que las superficies $x^2+y^2+z^2=r^2$ (esfera), $y=x\tan\varphi$ (plano), $z^2=(x^2+y^2)\tan^2\psi$ (cono), que sonsuperficies coordenadas del sistema de coordenadas esféricas r, φ, ψ son ortogonales entre sí.

Solución Verifiquemos que en los puntos de intersección de cada par de superficies los planos tangentes son ortogonales.

Sean las superficies $F_1(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-r^2=0$, $F_2(x,y,z)=y-x\tan\varphi$, $F_3(x,y,z)=-z^2+(x^2+y^2)\tan^2\psi$.

a) Sea (x_o,y_o,z_o) un punto en que las superficies $F_1(x,y,z)=0$, $F_2(x,y,z)=0$ se cortan y demostremos que el ángulo formado por los vectores normales son ortogonales. En efecto, sea η_i el vector normal en (x_o, y_o, z_o) a la superficie $F_i(x, y, z) = 0$, entonces $\eta_1 = \dfrac{1}{r}(x_o, y_o, z_o)$, $\eta_2 = \dfrac{(-\tan\varphi, 1, 0)}{\sec^2\varphi} \Longrightarrow \eta_1{\cdot}\eta_2 = \dfrac{1}{r\sec^2\varphi}(-x_o\tan\varphi + y_o) = 0$ ya que $F_2(x_o, y_o, z_o) = y_o - x_o\tan\varphi = 0$.

b) Similarmente, $\eta_1 = \dfrac{1}{r}(x_o, y_o, z_o)$, $\eta_3 = \dfrac{(x_o\tan^2\psi, y_o\tan^2\psi, -z_o)}{\sqrt{(x_o^2 + y_o^2)\tan^4\psi + z_o^2}} =$

$\dfrac{(x_o\tan^2\psi, y_o\tan^2\psi, -z_o)}{\sqrt{z_o^2(1+\tan^2\psi)}}$, entonces $\eta_1{\cdot}\eta_3 = \dfrac{1}{r\sqrt{z_o^2(1+\tan^2\psi)}}(x_o^2\tan^2\psi + y_o^2\tan^2\psi - z_o^2) = 0$, pues $F_3(x_o, y_o, z_o) = 0$.

c) Finalmente, $\eta_2{\cdot}\eta_3 = \dfrac{1}{\sqrt{z_o^2(1+\tan^2\psi)\sec^2\varphi}} =$

$\dfrac{1}{\sqrt{z_o^2(1+\tan^2\psi)}\sec^2\varphi}(-x_o\tan\varphi\tan^2\psi + y_o\tan^2\psi) =$

$\dfrac{\tan^2\psi}{\sqrt{z_o^2(1+\tan^2\psi)}\sec^2\varphi}(-x_o\tan\varphi + y_o) = 0$, pues $F_2(x_o, y_o, z_o) = 0$.

33. Demostrar que todos los planos tangentes a la superficie cónica $z = -xf\big(\frac{y}{x}\big)$ en el punto (x_o, y_o, z_o), donde $x_o \neq 0$, pasan por el origen de coordenadas.

    Solución Sea $F(x, y, z) = z - xf\big(\frac{y}{x}\big) = 0$, entonces $F_x = f\big(\frac{y}{x}\big) - \frac{y}{x}f'\big(\frac{y}{x}\big)$, $F_y = f'\big(\frac{y}{x}\big)$, $F_z = 1$, entonces el plano tangente en (x_o, y_o, z_o) es:
    $(z - z_o) = \big(f\big(\frac{y_o}{x_o}\big) - \frac{y_o}{x_o}f'\big(\frac{y_o}{x_o}\big)\big)(x - x_o) + f'\big(\frac{y_o}{x_o}\big)(y - y_o) = f\big(\frac{y_o}{x_o}\big)x - f\big(\frac{y_o}{x_o}\big)x_o - \frac{y_o}{x_o}f'\big(\frac{y_o}{x_o}\big)x + y_of'\big(\frac{y_o}{x_o}\big) + f'\big(\frac{y_o}{x_o}\big)y - f'\big(\frac{y_o}{x_o}\big)y_o \Longrightarrow z = \big(f\big(\frac{y_o}{x_o}\big) - \frac{y_o}{x_o}f'\big(\frac{y_o}{x_o}\big)\big)x + f'\big(\frac{y_o}{x_o}\big)y$ i.e. el plano tangente pasa por $(0, 0, 0)$.

34. Determinar las proyecciones del elipsoide $x^2 + y^2 + z^2 - xy - 1 = 0$ sobre los planos coordenados.

    Solución Recordemos que la curva de contacto de la superficie con el cilindro que proyecta esta superficie sobre algún plano, representa el lugar geométrico de los puntos en los que el plano tangente a la superficie dada, es perpendicular al plano de proyección. Así tenemos que al proyectar la superficie $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - 1 = 0$ sobre la superficie $x = 0$, debemos tener $(F_x, F_y, F_z){\cdot}(1, 0, 0) = 2x - y = 0 \Longrightarrow$

$x^2 + y^2 + z^2 - xy - 1 = (x - \frac{1}{2}y)^2 + \frac{3}{4}y^2 + z^2 - 1 = \frac{3}{4}y^2 + z^2 - 1 = 0.$

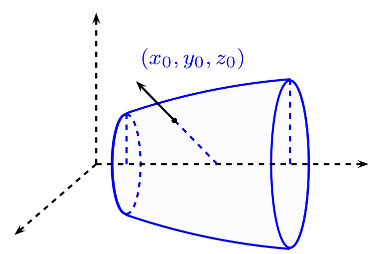
Similarmente al proyectar sobre $y = 0$, $(F_x, F_y, F_z)\cdot(0,1,0) = 2y - x = 0 \Longrightarrow$ $x^2 + y^2 + z^2 - xy - 1 = (y - \frac{1}{2}x)^2 + \frac{3}{4}x^2 + z^2 - 1 = \frac{3}{4}x^2 + z^2 - 1 = 0.$

En la proyección sobre $z = 0$, $(F_x, F_y, F_z)\cdot(0,0,1) = 2z = 0 \Longrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - xy - 1 = x^2 + y^2 - xy - 1 = 0.$

35. Demostrar que la normal en cualquier punto de la superficie de revolución $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$, $f' \neq 0$, corta a su eje de rotación.

Solución

La superficie $F(x, y, z) = f(\sqrt{x^2 + y^2}) - z = 0$ tiene por vector director de la normal en el punto (x_o, y_o, z_o) $\eta = (\dfrac{x_o f'(\sqrt{x_o^2 + y_o^2})}{\sqrt{x_o^2 + y_o^2}}, \dfrac{y_o f'(\sqrt{x_o^2 + y_o^2})}{\sqrt{x_o^2 + y_o^2}}, -1)$ y la recta normal es $(x_o, y_o, z_o) + t(f'(r)\frac{x_o}{r}, \frac{f'(r)}{r}y_o, -1)$, donde $r = \sqrt{x_o^2 + y_o^2}$. Para verificar la conclusión debemos determinar que un punto de la forma $(0, 0, u)$ está en la recta normal.



En efecto, si $t = -\dfrac{r}{f'(r)}$, se tiene que en la recta normal

$(x_o, y_o, z_o) + t\big(\frac{f'(r)}{r}x_o, \frac{f'(r)}{r}y_o, -1\big) = (x_o, y_o, z_o) + \big(-x_o, -y_o, \dfrac{r}{f'(r)}\big) =$ $\big(0, 0, z_o + \dfrac{r}{f'(r)}\big)$, por lo que hemos demostrado que la recta normal corta su eje de rotación.

3.10.3. Triedro, curvatura, torsión

36. Determinar los vectores unitarios principales $\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta}$ de la curva $x = 1 - \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = t$ en el punto $t = \frac{\pi}{2}$.

Solución Sea $\mathrm{r} = (1 - \cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $\mathrm{r}' = (\operatorname{sen} t, \cos t, 1)$, $\mathrm{r}'' = (\cos t, -\operatorname{sen} t, 0)$, $\mathrm{r}(\frac{\pi}{2}) = (1, 1, \frac{\pi}{2})$, $\mathrm{r}'(\frac{\pi}{2}) = (1, 0, 1)$, $\mathrm{r}''(\frac{\pi}{2}) = (0, -1, 0)$ y los vectores unitarios en $\frac{\pi}{2}$ son:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathrm{r}'}{\|\mathrm{r}'\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1), \mathbf{B} = \mathrm{r}'\times\mathrm{r}'' = \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (1,0,-1), \boldsymbol{\beta} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1),$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{B}\times\mathbf{T} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(0,2,0), \boldsymbol{\nu} = (0,1,0).$$

37. Determinar los vectores unitarios de la tangente y normal principal de la espiral cónica $\mathrm{r} = (\mathrm{e}^t\cos t, \mathrm{e}^t \operatorname{sen} t, \mathrm{e}^t)$ en el punto arbitrario. Determinar los ángulos que forman estas rectas con el eje z.

   Solución Sea $\mathrm{r} = (\mathrm{e}^t\cos t, \mathrm{e}^t\operatorname{sen} t, \mathrm{e}^t)$, $\mathbf{T} = \mathrm{r}' = \mathrm{e}^t(\cos t - \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t + \cos t, 1)$, $\|\mathrm{r}'\| = \mathrm{e}^t\sqrt{3}$,

   $\mathrm{r}'' = (-\mathrm{e}^t\operatorname{sen} t + \mathrm{e}^t\cos t - \mathrm{e}^t\operatorname{sen} t - \mathrm{e}^t\cos t, \mathrm{e}^t\cos t + \mathrm{e}^t\operatorname{sen} t + \mathrm{e}^t\cos t - \mathrm{e}^t\operatorname{sen} t, \mathrm{e}^t) = \mathrm{e}^t(-2\operatorname{sen} t, 2\cos t, 1)$, $\|\mathrm{r}''\| = \sqrt{5}\mathrm{e}^t$,

   $\mathbf{B} = \mathrm{r}'\times\mathrm{r}'' = \mathrm{e}^{2t}\begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ \cos t - \operatorname{sen} t & \operatorname{sen} t + \cos t & 1 \\ -2\operatorname{sen} t & 2\cos t & 1 \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{2t}(\operatorname{sen} t - \cos t, -\cos t - \operatorname{sen} t, 2)$,

   $\mathbf{N} = \mathbf{B}\times\mathbf{T} = \mathrm{e}^{3t}\begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ \operatorname{sen} t - \cos t & -\cos t - \operatorname{sen} t & 2 \\ \cos t - \operatorname{sen} t & \operatorname{sen} t + \cos t & 1 \end{vmatrix} = -\mathrm{e}^{3t}(3\operatorname{sen} t + 3\cos t, 3\operatorname{sen} t - 3\cos t, 0)$,

   $\|\mathbf{N}\| = 3\sqrt{2}\mathrm{e}^{3t}$,

   $\boldsymbol{\tau} = \dfrac{\mathbf{T}}{\|\mathbf{T}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\cos t - \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t + \cos t, 1)$, $\boldsymbol{\nu} = \dfrac{\mathbf{N}}{\|\mathbf{N}\|} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\operatorname{sen} t + \cos t, \operatorname{sen} t - \cos t, 0)$.

   El ángulo con el eje z se determina así:

   $\boldsymbol{\tau}\cdot\mathrm{k} = \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Longrightarrow \alpha = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\boldsymbol{\nu}\cdot\mathrm{k} = \cos\beta = 0 \Longrightarrow \beta = \frac{\pi}{2}$.

38. Determinar los vectores unitarios principales $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$ de la curva $y = x^2$, $z = 2x$ en el punto cuando $x = 2$.

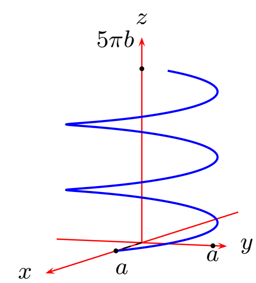
Solución Sea $x = t$, $\mathrm{r} = (t, t^2, 2t)$, $\mathrm{r}' = (1, 2t, 2)$, $\mathrm{r}'' = (0, 2, 0)$, entonces si $x = 2$ tenemos $\mathrm{r} = (2, 4, 4)$, $\mathrm{r}' = (1, 4, 2)$, $\|\mathrm{r}'\| = \sqrt{21}$, $\boldsymbol{\tau} = \dfrac{\mathrm{r}'}{\|\mathrm{r}'\|} = \frac{1}{\sqrt{21}}(1, 4, 2)$,

$$\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-4, 0, 2),\ \|\mathbf{B}\| = 2\sqrt{5},\ \boldsymbol{\beta} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 0, 1),$$

$$\mathbf{N} = \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ -4 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = (-8, 10, -16),\ \|\mathbf{N}\| = 2\sqrt{105},\ \boldsymbol{\nu} = \tfrac{1}{\sqrt{105}}(-4, 5, -8).$$

39. Dada la hélice circular $x = a\cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$, $z = bt$, escribir las ecuaciones de las rectas que forman las aristas del triedro intrínseco en un punto arbitrario de la curva. Determinar los cosenos directores de la tangente y de la normal principal.

Solución Sea $\mathrm{r} = (a\cos t, a\operatorname{sen} t, bt)$, $\mathbf{T} = \mathrm{r}' = (-a\operatorname{sen} t, -a\cos t, b)$,



$\|\mathbf{T}\| = \sqrt{a^2+b^2}$, $\mathrm{r}'' = (-a\cos t, a\operatorname{sen} t, 0)$,

$$\mathbf{B} = \mathrm{r}' \times \mathrm{r}'' = \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ -a\operatorname{sen} t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\operatorname{sen} t & 0 \end{vmatrix} =$$

$(ab\operatorname{sen} t, -ab\cos t, a^2)$, $\|\mathbf{B}\| = a\sqrt{a^2+b^2}$.

$$\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T} = \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ ab\operatorname{sen} t & -ab\cos t & a^2 \\ -a\operatorname{sen} t & a\cos t & b \end{vmatrix} = -a(b^2+a^2)(\cos t, \operatorname{sen} t, 0),\ \|\mathbf{N}\| =$$

$a(a^2+b^2)$.

Recta tangente $(x, y, z) = (a\cos t, a\operatorname{sen} t, bt) + \lambda(-a\operatorname{sen} t, a\cos t, b)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Cosenos directores $\cos\alpha = -\dfrac{a\operatorname{sen} t}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\beta = \dfrac{a\cos t}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\gamma = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Recta binormal $(x, y, z) = (a\cos t, a\operatorname{sen} t, bt) + \lambda(ab\operatorname{sen} t, -ab\cos t, a^2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Recta normal principal $(x, y, z) = (a\cos t, a\operatorname{sen} t, bt) + \lambda(\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Cosenos directores $\cos\alpha = -\cos t$, $\cos\beta = -\operatorname{sen} t$, $\cos\gamma = 0$.

40. Determinar las ecuaciones de los planos que forman el triedro intrínseco de la curva

$x^2+y^2+z^2=6$, $x^2-y^2+z^2=4$, en el punto $(1,1,2)$.

Solución Es claro que si definimos $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-6=0$, $G(x,y,z)=x^2-y^2+z^2-4=0$, la matriz $\begin{pmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y & 2z \\ -2y & -2z \end{pmatrix}$ es de rango 2 sobre la curva, por lo que podemos escribir la ecuación de dicha curva en función de x, es decir existen funciones φ, ψ de clase C^2 tales que $F(x,\varphi(x),\psi(x))=0$, $G(x,\varphi(x),\psi(x))=0$. De esta manera tenemos:

$2x+2\varphi\varphi'+2\psi\psi'=0$, $1+\varphi'^2+\varphi\varphi''+\psi'^2+\psi\psi''=0$,

$2x-2\varphi\varphi'+2\psi\psi'=0$, $1-\varphi'^2-\varphi\varphi''+\psi'^2+\psi\psi''=0 \Longrightarrow x=-\psi\psi'$, $\varphi\varphi'=0$.

En el punto $(1,1,2)$ se tiene $\varphi(1)=1$, $\psi(1)=2$ por lo que $\varphi'(1)=0$, $\psi'(1)=-\frac{1}{2}$, por lo que el vector tangente es $\mathbf{T}=(1,\varphi'(1),\ \psi'(1))=(1,0,-\frac{1}{2})$, $\boldsymbol{\tau}=\dfrac{\mathbf{T}}{\|\mathbf{T}\|}=\frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,-1)$.

Además usando las ecuaciones de orden 2, $1+\psi'^2+\psi\psi''=1+\frac{1}{4}+\psi''=0 \Longrightarrow \psi''(1)=-\frac{5}{4}$ y $\varphi'^2+\varphi\varphi''=0 \Longrightarrow \varphi''(1)=0$, es decir $r''=(0,\varphi'',\psi'')=(0,0,-\frac{5}{4})$.

El vector binormal $\mathbf{B}=\begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{4} \end{vmatrix}=(0,-\frac{5}{2},0)$, $\boldsymbol{\beta}=\dfrac{\mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|}=(0,-1,0)$.

El vector normal principal $\mathbf{N}=\mathbf{B}\times\mathbf{T}=\begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ 0 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}=(\frac{5}{4},0,\frac{5}{2})$, $\boldsymbol{\nu}=\dfrac{\mathbf{N}}{\|\mathbf{N}\|}=\frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,2)$.

Plano normal $(x-1,y-1,z-2)\cdot(2,0,-1)=0 \Longrightarrow 2x-z=0$.

Plano osculador $(x-1,y-1,z-2)\cdot(0,-1,0)=0 \Longrightarrow y=1$.

Plano rectificante $(x-1,y-1,z-2)\cdot(1,0,2)=0 \Longrightarrow x+2z=5$.

41. Determinar las ecuaciones de la tangente, del plano normal y del plano osculador de la curva $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$ en el punto $(2,4,8)$.

Solución Sea $\mathrm{r}=(t,t^2,t^3)$, $\mathrm{r}'=(1,2t,3t^2)$, $\mathrm{r}''=(0,2,6t)$, en el punto $(2,4,8)$ tenemos $\mathrm{r}' = \mathbf{T} = (1,4,12)$, $\mathrm{r}'' = (0,2,12)$, $\mathbf{B} = \mathrm{r}' \times \mathrm{r}'' = \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ 1 & 4 & 12 \\ 0 & 2 & 12 \end{vmatrix} = (24,-12,2)$.

Recta tangente $(2,4,8) + \lambda(1,4,12)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Plano osculador $12(x-2) - 6(y-4) + (z-8) = 0 \Longleftrightarrow 12x - 6y + z - 8 = 0$.

Plano normal $(x-2) + 4(y-4) + 12(z-8) \Longleftrightarrow x + 4y + 12z - 114 = 0$.

42. Determinar las ecuaciones de la tangente, de la normal principal y de la binormal en un punto arbitrario de la curva $x = \frac{1}{4}t^4$, $y = \frac{1}{3}t^3$, $z = \frac{1}{2}t^2$.

Solución Sea $\mathrm{r} = (\frac{1}{4}t^4, \frac{1}{3}t^3, \frac{1}{2}t^2)$, $\mathrm{r}' = (t^3, t^2, t)$, $\mathrm{r}'' = (3t^2, 2t, 1)$,

$\mathbf{B} = \mathrm{r}' \times \mathrm{r}'' = \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ t^3 & t^2 & t \\ 3t^2 & 2t & 1 \end{vmatrix} = (-t^2, 2t^3, -t^4) = t^2(-1, 2t, t^2)$.

$\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T} = \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ -t^2 & 2t^3 & -t^4 \\ t^3 & t^2 & t \end{vmatrix} = (t^6 + 2t^4, -t^7 + t^3, -(2t^2+1)t^4) =$

$t^3(t^3 + 2t, 1 - t^4, -2t^3 - t)$.

La recta tangente $(\frac{1}{4}t^4, \frac{1}{3}t^3, \frac{1}{2}t^2) + \lambda(t^2, t, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

La recta binormal $(\frac{1}{4}t^4, \frac{1}{3}t^3, \frac{1}{2}t^2) + \lambda(1, -2t, t^2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

La recta normal principal $(\frac{1}{4}t^4, \frac{1}{3}t^3, \frac{1}{2}t^2) + \lambda(t^3 + 2t, 1 - t^4, -2t^3 - t)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

43. Determinar las ecuaciones de la tangente, del plano osculador, de la normal principal y de la binormal de la curva $x = t$, $y = -t$, $z = \frac{1}{2}t^2$ en el punto $t = 2$. Dar los cosenos directores de la binormal en este punto.

Solución Sea $\mathrm{r} = (t, -t, \frac{1}{2}t^2)$, $\mathrm{r}' = \mathbf{T} = (1, -1, t)$, $\mathrm{r}'' = (0,0,1)$,

$\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ 1 & -1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1,-1,0)$, $\mathbf{N} = \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix} = (-t, t, 2)$.

Recta tangente $(2,-2,2) + \lambda(1,-1,2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Recta binormal $(2,-2,2) + \lambda(1,1,0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Recta normal principal $(2,-2,2)+\lambda(-1,1,1)$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Plano osculador $(x-2)+(y+2)=x+y=0$.

Cosenos directores de la binormal $\boldsymbol{\beta}=\dfrac{\mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,-1,0)$; eje x, $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{2}}$; eje y, $\cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, eje z, $\cos\gamma=0$.

44. Dar las ecuaciones de la tangente y del plano normal a las curvas siguientes:

a) $x=R\cos^2 t$, $y=R\operatorname{sen} t\cos t$, $z=R\operatorname{sen} t$, en $t=\frac{\pi}{4}$.

b) $z=x^2+y^2$, $x=y$ en el punto $(1,1,2)$.

c) $x^2+y^2+z^2=25$, $x+z=5$ en el punto $(2,2\sqrt{3},3)$.

Solución

a) Consideremos la curva $\mathrm{r}=R(\cos^2 t,\operatorname{sen} t\cos t,\operatorname{sen} t)$, $\mathrm{r}'=R(-2\cos t\operatorname{sen} t,\cos 2t,\cos t)$, en $t=\frac{\pi}{4}$ se tiene que la recta tangente es $R(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}})+\lambda(-1,0,\frac{1}{\sqrt{2}})$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Plano normal $-\big(x-\dfrac{R}{2}\big)+\big(z-\dfrac{R}{\sqrt{2}}\big)\dfrac{1}{\sqrt{2}}=0\Longleftrightarrow x\sqrt{2}-z=0$.

b) Se tiene que $y=x$, i.e. $z=2x^2$ con lo cual tenemos la curva $\mathrm{r}=(x,x,2x^2)\Longrightarrow \mathrm{r}'=(1,1,4x)$ y la recta tangente en $(1,1,2)$ es $(1,1,2)+\lambda(1,1,4)$.

Plano normal: $(x-1)+(y-1)+4(z-2)=0\Longleftrightarrow x+y+4z=10$.

c) Sea $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-25=0$, $G(x,y,z)=x+z-5=0$, entonces como $\begin{pmatrix}2y & 2z\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ es de rango 2, se puede escribir y,z en función de x. Así tenemos la curva $(t,y(t),z(t))$, $\mathrm{r}'=(1,y',z')$ y debemos determinar $y'(2)$, $z'(2)$.

Derivando con respecto a x se tiene $2x+2yy'+2zz'=0$, $1+z'=0\Longrightarrow z'(2)=-1\Longrightarrow 2\sqrt{3}y'(2)=-2-(3)(-1)=1\Longrightarrow y'=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$. Así $\mathbf{T}=(1,\dfrac{1}{2\sqrt{3}},-1)$ lo que permite escribir:

Recta tangente $(2,2\sqrt{3},3)+\lambda(2\sqrt{3},1,-2\sqrt{3})$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Plano normal $2\sqrt{3}(x-2)+(y-2\sqrt{3})-2\sqrt{3}(z-3)=0\Longleftrightarrow 2\sqrt{3}x+y-2\sqrt{3}z=0$.

45. Calcular la ecuación del plano normal a la curva $z=x^2-y^2$, $y=x$ en el origen de coordenadas.

Solución Si hacemos $x = t \Longrightarrow y = t$, $z = 0$ i.e. $\mathrm{r} = (t, t, 0)$, $\mathrm{r}'(1, 1, 0)$ y el plano normal en $(0, 0, 0)$ es: $(x - 0) + (y - 0) + 0(z - 0) = 0 \Longleftrightarrow x + y = 0$.

46. Determinar la ecuación del plano osculador a la curva $x = \mathrm{e}^t$, $y = \mathrm{e}^{-t}$, $z = \sqrt{2}t$ en el punto $t = 0$.

Solución Sea $\mathrm{r} = (\mathrm{e}^t, \mathrm{e}^{-t}, \sqrt{2}t) \Longrightarrow \mathrm{r}' = (\mathrm{e}^t, -\mathrm{e}^{-t}, \sqrt{2})$, $\mathrm{r}'' = (\mathrm{e}^t, \mathrm{e}^{-t}, 0)$,

$$\mathbf{B} = \mathrm{r}' \times \mathrm{r}'' = \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ \mathrm{e}^t & -\mathrm{e}^{-t} & \sqrt{2} \\ \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{-t} & 0 \end{vmatrix} = (-\sqrt{2}\mathrm{e}^{-t}, \sqrt{2}\mathrm{e}^t, 2).$$

En $t = 0$, $\mathbf{T} = (1, -1, \sqrt{2})$, $\mathbf{B} = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$ y el plano normal es $-\sqrt{2}(x - 1) + \sqrt{2}(y - 1) + 2z = 0 \Longleftrightarrow x - y - \sqrt{2}z = 0$.

47. Determinar las ecuaciones de los planos osculadores a las curvas:

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x^2 - y^2 = 3$ en el punto $(2, 1, 2)$.

b) $x^2 = 4y$, $x^3 = 24z$ en el punto $(6, 9, 9)$.

c) $x^2 + z^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = b^2$ en cualquier punto (x_o, y_o, z_o) de la curva.

Solución

a) Sea $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$, $G(x, y, z) = x^2 - y^2 - 3 = 0$ y como $\begin{pmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y & 2z \\ -2y & 0 \end{pmatrix}$ es de rango 2, si $yz \neq 0$, se pueden escribir en función de x. Así se tiene que:

$$\left.\begin{array}{c} x + yy' + zz' = 0 \\ x - yy' = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow y'(z) = \frac{x}{y} = 2,\ 2z'(2) = -2(2) \Longrightarrow z'(2) = -2.$$

Además, $1 + y'^2 + yy'' + z'^2 + zz'' = 0$, $1 = y'^2 + yy'' \Longrightarrow y''(2) = 3$, $2z'' = -1 - 4 + 3 - 4 = -6 \Longrightarrow z''(2) = -3$. De esta forma en $(2, 1, 2)$, $\mathrm{r}' = (1, 2, 2)$, $\mathrm{r}'' = (0, y'', z'') = (0, -3, -3) \Longrightarrow$

$$\mathbf{B} = \mathrm{r}' \times \mathrm{r}'' = \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & -3 \end{vmatrix} = (-12, 3, -3)$$ y el plano osculador es $4(x - 2) - (y - 1) + (z - 2) = 0 \Longleftrightarrow 4x - y + z - 9 = 0$.

b) Sea $x = t$, $y = \frac{1}{4}t^2$, $z = \frac{1}{24}t^3$, entonces $\mathrm{r}' = (1, \frac{1}{2}t, \frac{1}{8}t^2)$ y en $t = 6$, $\mathrm{r}' = (1, 3, \frac{9}{2})$.

Además $\mathrm{r}'' = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}t)$ i.e. $\mathrm{r}''(6) = (0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ por lo que $\mathbf{B} = \mathrm{r}' \times \mathrm{r}'' = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ 2 & 6 & 9 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$ $\frac{1}{4}(9, -6, 2)$.

El plano osculador es $9(x-6) - 6(y-9) + 2(z-9) = 0 \Longleftrightarrow 9x - 6y + 2z - 18 = 0$.

c) Sea $F(x, y, z) = x^2 + z^2 - a^2$, $G(x, y, z) = y^2 + z^2 - b^2$, entonces la matriz $\begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix}$ es de rango 2, si $yx \neq 0$ y la curva es expresable en función de z. De esta forma tenemos que en (x_o, y_o, z_o), $xx' + z = 0$, $yy' + z = 0 \Longrightarrow y' = -\frac{z_o}{y_o}$, $x' = -\frac{z_o}{x_o}$ i.e. $\mathbf{T} = (-\frac{z_o}{x_o}, -\frac{z_o}{y_o}, 1)$.

Además, $x'^2 + xx'' + 1 = 0$, $y'^2 + yy'' + 1 = 0 \Longrightarrow x'' = -\dfrac{a^2}{x_o^3}$, $y'' = -\dfrac{b^2}{y_o^3}$ i.e.

$$\mathrm{r}'' = \Big(-\frac{a^2}{x_o^3}, -\frac{b^2}{y_o^3}, 0\Big) \Longrightarrow \mathbf{B} = \mathrm{r}' \times \mathrm{r}'' = \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ -y_o z_o & -x_o z_o & x_o y_o \\ -\dfrac{a^2}{x_o^3} & -\dfrac{b^2}{y_o^3} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\left(\frac{b^2 x_o}{y_o^2}, -\frac{a^2 y_o}{x_o^2}, \frac{b^2 z_o}{y_o^2} - \frac{a^2 z_o}{x_o^2}\right),$$

y el plano osculador es $(x - x_o)\dfrac{b^2 x_o}{y_o^2} - (y - y_o)\dfrac{a^2 y_o}{x_o^2} + (z - z_o)\Big(-\dfrac{a^2 z_o}{x_o^2} + \dfrac{b^2 z_o}{y_o^2}\Big) = 0 \Longrightarrow$ $b^2 x_o^3 x - a^2 y_o^3 y + (b^2 - a^2) z_o^3 z = x_o^4 b^2 - y_o^4 a^2 + z_o^2 (\dfrac{b^2}{y_o^2} - \dfrac{a^2}{x_o^2}) x_o^2 y_o^2 = x_o^4 b^2 - y_o^4 a^2 +$ $z_o^2(b^2 x_o^2 - a^2 y_o^2) = b^2 x_o^2(x_o^2 + z_o^2) - y_o^2 a^2 (y_o^2 + z_o^2) = a^2 b^2 (x_o^2 - y_o^2) = a^2 b^2 (a^2 - b^2)$, o sea $b^2 x_o^3 x - a^2 y_o^3 y + (b^2 - a^2) z_o^3 z = a^2 b^2 (a^2 - b^2)$.

48. Determinar las ecuaciones del plano osculador, de la normal principal y de la binormal a la curva $y^2 = x$, $x^2 = z$ en el punto $(1, 1, 1)$.

Solución Consideremos $x = t$, $\mathrm{r} = (t, \sqrt{t}, t^2)$, $\mathrm{r}' = \big(1, \dfrac{1}{2\sqrt{t}}, 2t\big)$, $\mathrm{r}'' = \big(0, -\dfrac{1}{4t^{\frac{3}{2}}}, 2\big)$.

Así, para $t = 1$, $\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 2 \end{vmatrix} = \left(\frac{3}{2}, -2, -\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}(6, -8, -1)$ y el plano osculador es $6(x-1) - 8(y-1) - (z-1) = 0 \Longrightarrow 6x - 8y - z + 3 = 0$.

Además $\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T} = \frac{1}{8} \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ 6 & -8 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -\frac{1}{8}(31, 26, -22)$.

Recta binormal $(1, 1, 1) + \lambda(6, -8, -1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Recta normal $(1, 1, 1) + \lambda(31, 26, -22)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

49. Determinar las ecuaciones del plano osculador, de la normal principal y de la binormal a la hélice cónica $x = t\cos t$, $y = t \operatorname{sen} t$, $z = bt$ en el origen de coordenadas. Hallar los vectores unitarios de la tangente, de la normal principal y de la binormal en el origen.

Solución Sea $\mathrm{r} = (t\cos t, t\operatorname{sen} t, bt)$, $\mathrm{r}' = \mathbf{T} = (\cos t - t\operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t + t\cos t, b)$,

$\mathrm{r}'' = (-2\operatorname{sen} t - t\cos t, 2\cos t - t\operatorname{sen} t, 0)$.

En el origen, $\mathrm{r}' = (1, 0, b)$, $\mathrm{r}'' = (0, 2, 0)$, $\mathbf{B} = \mathrm{r}' \times \mathrm{r}'' = \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-2b, 0, 2)$.

$\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T} = 2 \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ -b & 0 & 1 \\ 1 & 0 & b \end{vmatrix} = 2(0, b^2 + 1, 0)$.

Plano osculador $-xb + z = 0$.

Recta normal $\lambda(0, 1, 0)$, es decir el eje y.

Recta binormal $\lambda(-b, 0, 1)$.

Finalmente $\boldsymbol{\tau} = \dfrac{\mathbf{T}}{\|\mathbf{T}\|} = \dfrac{1}{\sqrt{b^2+1}}(1, 0, b)$, $\boldsymbol{\beta} = \dfrac{\mathbf{B}}{\|\mathbf{B}\|} = \dfrac{1}{\sqrt{b^2+1}}(-b, 0, 1)$, $\boldsymbol{\nu} = (0, 1, 0)$.

50. Demostrar que si la curvatura es igual a 0 en todos los puntos de la curva, la curva es una recta.

Solución Si la curvatura es $0 = K = \dfrac{1}{R} = \|\mathrm{r}''\| \Longrightarrow x''(t) = y''(t) = z''(t) = 0 \Longrightarrow$

$x'(t) = a$, $y'(t) = b$, $z'(t) = c \Longrightarrow x(t) = at + a'$, $y(t) = bt + b'$, $z(t) = ct + c'$ i.e. $\mathrm{r} = (a', b', c') + (a, b, c)t$.

51. Demostrar que si la torsión es igual a 0 en todos los puntos de una curva, esta es una curva plana.

    Solución Si $\dfrac{1}{\rho} = 0 \Longrightarrow \dfrac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} = -\dfrac{\boldsymbol{\nu}}{\rho} = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{\beta}$ es constante i.e. $\mathbf{B} = (a, b, c)$ y la curva Γ está en el plano ortogonal a $\mathbf{B}$.

52. Verificar que la curva $x = 1+3t+2t^2$, $y = 2-2t+5t^2$, $z = 1-t^2$ es plana y determinar el plano en que se encuentra.

    Solución Se tiene $x' = 3 + 4t$, $y' = -2 + 10t$, $z' = -2t$; $x'' = 4$, $y'' = 10$, $z'' = -2$, $x''' = 0$, $y''' = 0$, $z''' = 0 \Longrightarrow \mathrm{r}' \cdot \mathrm{r}'' \times \mathrm{r}''' = 0 \Longrightarrow \dfrac{1}{\rho} = 0$ y por el ejercicio anterior la curva es plana.

    Tomemos $\mathrm{r}' \times \mathrm{r}'' = \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ 3+4t & -2+10t & -2t \\ 4 & 10 & -2 \end{vmatrix} = (4, 6, 38)$ y como la curva pasa por $(1, 2, 1)$ en $t = 0$, tenemos $(x-1, y-2, z-1) \cdot (2, 3, 19) = 0$ i.e. $2x+3y+19z-27 = 0$.

53. Calcular la curvatura de las curvas:

    a) $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = \operatorname{ch}\, t$, en $t = 0$

    b) $x^2 - y^2 + z^2 = 1$, $y^2 - 2x + z = 0$ en el punto $(1, 1, 1)$.

    Solución

    a) Sea $\mathrm{r} = (\cos t, \operatorname{sen} t, \operatorname{ch}\, t)$, $\mathrm{r}' = (-\operatorname{sen} t, \cos t, \operatorname{sh}\, t)$, $\mathrm{r}'' = (-\cos t, -\operatorname{sen} t, \operatorname{ch}\, t)$ y en $t = 0$, $\mathrm{r} = (1, 0, 1)$, $\mathrm{r}' = (0, 1, 0)$, $\mathrm{r}'' = (-1, 0, 1)$, $\mathrm{r}' \times \mathrm{r}'' = \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1, 0, 1)$,

    $\dfrac{1}{R} = \dfrac{\|\mathrm{r}' \times \mathrm{r}''\|}{\|\mathrm{r}'\|^3} = \sqrt{2}$.

    b) Sea $F(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2 - 1 = 0$, $G(x, y, z) = y^2 - 2x + z = 0$, $\begin{pmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 2y & 2z \\ 2y & 1 \end{pmatrix}$ es de rango 2 alrededor del punto $(1,1,1)$, entonces y, z se pueden expresar en función de x. Así tenemos:

$x - yy' + zz' = 0$, $2yy' - 2 + z' = 0 \Longrightarrow z'(2z+1) = 0 \Longrightarrow z'(1) = 0$, $y'(1) = 1 \Longrightarrow \mathrm{r}'(1) = (1,1,0)$. Además, $1 - y'^2 - yy'' + z'^2 + zz'' = 0$, $2y'^2 + 2yy'' + z'' = 0 \Longrightarrow y''(1) = z''(1)$, $2 + 2y''(1) + z''(1) = 0 \Longrightarrow \mathrm{r}''(1) = (0, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ y $\mathrm{r}' \times \mathrm{r}'' = -\frac{2}{3}\begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{2}{3}(1,-1,1) \Longrightarrow \dfrac{1}{R} = \dfrac{\|\mathrm{r}' \times \mathrm{r}''\|}{\|\mathrm{r}'\|^3} = \dfrac{2\sqrt{3}}{32^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

54. Calcular la curvatura y la torsión de las siguientes curvas en cualquier punto:

a) $x = \mathrm{e}^t \cos t$, $y = \mathrm{e}^t \operatorname{sen} t$, $z = \mathrm{e}^t$

b) $x = a \operatorname{ch} t$, $y = a \operatorname{sh} t$, $z = at$ (hélice hiperbólica).

Solución

a) Se tiene que $\mathrm{r}' = \mathrm{e}^t(-\operatorname{sen} t + \cos t, \operatorname{sen} t + \cos t, 1)$, $\mathrm{r}'' = \mathrm{e}^t(-2\operatorname{sen} t, 2\cos t, 1)$, $\mathrm{r}''' = 2\mathrm{e}^t(-\cos t - \operatorname{sen} t, \cos t - \operatorname{sen} t, \frac{1}{2})$,

$\mathrm{r}' \times \mathrm{r}'' = \mathrm{e}^{2t}\begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ \cos t - \operatorname{sen} t & \operatorname{sen} t + \cos t & 1 \\ -2\operatorname{sen} t & 2\cos t & 1 \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{2t}(-\cos t + \operatorname{sen} t, -\operatorname{sen} t - \cos t, 2)$,

$\|\mathrm{r}' \times \mathrm{r}''\| = \mathrm{e}^{2t}\sqrt{6}$, entonces $K = \dfrac{1}{R} = \dfrac{\|\mathrm{r}' \times \mathrm{r}''\|}{\|\mathrm{r}'\|^3} = \mathrm{e}^{-t}\dfrac{\sqrt{2}}{3}$, $\dfrac{1}{\rho} = \dfrac{\mathrm{r}' \times \mathrm{r}'' \cdot \mathrm{r}'''}{\|\mathrm{r}' \times \mathrm{r}''\|^2} = \dfrac{2\mathrm{e}^{3t}}{6\mathrm{e}^{4t}} = \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{3}$.

b) Sea $\mathrm{r} = (a \operatorname{ch} t, a \operatorname{sh} t, at)$, $\mathrm{r}' = (a \operatorname{sh} t, a \operatorname{ch} t, a)$, $\mathrm{r}'' = (a \operatorname{ch} t, a \operatorname{sh} t, 0)$, $\mathrm{r}''' = (a \operatorname{sh} t, a \operatorname{ch} t, 0)$,

$\mathrm{r}' \times \mathrm{r}'' = a^2\begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t & 1 \\ \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t & 0 \end{vmatrix} = a^2(-\operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t, -1)$, $\|\mathrm{r}' \times \mathrm{r}''\| = a^2\sqrt{2}\operatorname{ch} t \Longrightarrow$

$K = \dfrac{1}{R} = \dfrac{\|\mathrm{r}' \times \mathrm{r}''\|}{\|\mathrm{r}'\|^3} = \dfrac{\sqrt{2}a^2 \operatorname{ch} t}{2a^3\sqrt{2}\operatorname{ch}^3 t} = \dfrac{1}{2a^2 \operatorname{ch}^2 t}$,

$$\mathrm{r}' \times \mathrm{r}'' \cdot \mathrm{r}''' = a^3(-\operatorname{sh}^2 t + \operatorname{ch}^2 t) = a^3 \Longrightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{\mathrm{r}' \times \mathrm{r}'' \cdot \mathrm{r}'''}{\|\mathrm{r}' \times \mathrm{r}''\|^2} = \frac{a^3}{2a^4 \operatorname{ch}^2 t} = \frac{1}{2a \operatorname{ch}^2 t}.$$

55. Determinar los radios de curvatura y de torsión de las siguientes curvas en un punto arbitrario (x, y, z).

a) $x^2 = 2ay$, $x^3 = 6a^2 z$

b) $x^3 = 3p^2 y$, $2xz = p^2$.

Solución

a) Consideremos $x = t$, entonces $\mathrm{r} = \big(t, \frac{1}{2a}t^2, \frac{1}{6a^2}t^3\big)$, $\mathrm{r}' = \big(1, \frac{1}{a}t, \frac{1}{2a^2}t^2\big)$, $\mathrm{r}'' = \big(0, \frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}t\big)$, $\mathrm{r}''' = \big(0, 0, \frac{1}{a^2}\big)$, $\mathrm{r}' \times \mathrm{r}'' = \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ 1 & \frac{t}{a} & \frac{t^2}{2a^2} \\ 0 & \frac{1}{a} & \frac{t}{a^2} \end{vmatrix} = \big(\frac{t^2}{2a^3}, -\frac{t}{a^2}, \frac{1}{a}\big)$,

$\|\mathrm{r}' \times \mathrm{r}''\| = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{t^4}{4a^4} + \frac{t^2}{a^2} + 1} = \frac{1}{2a^3}(t^4 + 4a^2t^2 + 4a^4)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2a^3}(t^2 + 2a^2)$,

$\mathrm{r}' \times \mathrm{r}'' \cdot \mathrm{r}''' = \frac{1}{a^3}$, $\|\mathrm{r}'\| = \big(1 + \frac{t^2}{a^2} + \frac{t^4}{4a^4}\big)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2a^2}(t^2 + 2a^2) \Longrightarrow \frac{1}{R} = \dfrac{\frac{1}{2a^3}(t^2 + 2a^2)}{\frac{1}{8a^6}(t^2 + 2a^2)^3} = 4a^3 \frac{1}{(t^2 + 2a^2)^2} \Longrightarrow R = \frac{(t^2 + 2a^2)^2}{4a^3} = \frac{(2ay + 2a^2)^2}{4a^3} = \frac{(y + a)^2}{a}$,

$\frac{1}{\rho} = \dfrac{\frac{1}{a^3}4a^6}{(t^2 + 2a^2)^2} \Longrightarrow \rho = \frac{(t^2 + 2a^2)^2}{4a^3} = \frac{(2ay + 2a^2)^2}{4a^3} = \frac{(y + a)^2}{a}$.

b) Sea $\mathrm{r} = \big(x, \frac{x^3}{3p^2}, \frac{p^2}{2x}\big)$, $\mathrm{r}' = \big(1, \frac{x^2}{p^2}, -\frac{p^2}{2x^2}\big)$, $\mathrm{r}'' = \big(0, \frac{2x}{p^2}, \frac{p^2}{x^3}\big)$, $\mathrm{r}''' = \big(0, \frac{2}{p^2}, -\frac{3p^2}{x^4}\big)$,

$\mathrm{r}' \times \mathrm{r}'' = \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ 1 & \frac{x^2}{p^2} & -\frac{p^2}{2x^2} \\ 0 & \frac{2x}{p^2} & \frac{p^2}{x^3} \end{vmatrix} = \big(\frac{2}{x}, -\frac{p^2}{x^3}, \frac{2x}{p^2}\big)$, $\|\mathrm{r}' \times \mathrm{r}''\| = \sqrt{\frac{4}{x^2} + \frac{p^4}{x^6} + \frac{4x^2}{p^4}} = \frac{p^4 + 2x^4}{x^3p^2}$

$\|\mathrm{r}'\| = \big(1 + \frac{x^4}{p^4} + \frac{p^4}{4x^4}\big)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^2p^2}(p^4 + 2x^4) \Longrightarrow \frac{1}{R} = \frac{\|\mathrm{r}' \times \mathrm{r}''\|}{\|\mathrm{r}'\|^3} = \frac{8x^3p^4}{(p^4 + 2x^4)^2} \Longrightarrow$

$R = \dfrac{(p^4+2x^4)^2}{8p^4x^3}$.

Además $\mathrm{r}'\times\mathrm{r}''\cdot\mathrm{r}''' = -\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{6}{x^3} = -\dfrac{8}{x^3} \Longrightarrow \dfrac{1}{\rho} = -\dfrac{8}{x^3}\dfrac{p^4x^6}{(p^4+2x^4)^2} = -\dfrac{8p^4x^3}{(p^4+2x^4)^2} \Longrightarrow$ $\rho = -\dfrac{(p^4+2x^4)^2}{8p^4x^3}$.

56. Demostrar que las componentes tangencial y normal del vector aceleración a se expresan por las fórmulas $\mathrm{a}_{\boldsymbol{\tau}} = \dfrac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau}$, $\mathrm{a}_{\boldsymbol{\nu}} = \dfrac{v^2}{R}\boldsymbol{\nu}$, donde v es la velocidad, R es el radio de curvatura, $\boldsymbol{\tau}$ y $\boldsymbol{\nu}$ los vectores de la tangente y de la normal principal a la curva.

Solución Se sabe que $\boldsymbol{\tau} = \dfrac{\mathrm{r}'}{\|\mathrm{r}'\|}$, $\boldsymbol{\nu} = \dfrac{\mathbf{N}}{\|\mathbf{N}\|}$, $\mathrm{r}' = \dfrac{d\mathrm{r}}{dt} = \dfrac{d\mathrm{r}}{ds}\dfrac{ds}{dt} = v\boldsymbol{\tau}$, $\mathrm{a} = \mathrm{r}'' = \dfrac{d\boldsymbol{\tau}}{dt}v + \boldsymbol{\tau}\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\dfrac{ds}{dt}v + \dfrac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau} = \dfrac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}v^2 + \dfrac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau} = \dfrac{\boldsymbol{\nu}}{R}v^2 + \dfrac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau}$.

57. Por la hélice circular $\mathrm{r} = (a\cos t, a\,\mathrm{sen}\,t, bt)$ se mueve uniformemente un punto con velocidad v, calcular su aceleración w.

Solución Sea $s(t)$ el desplazamiento de la partícula, entonces $s(t) = \displaystyle\int_0^t \sqrt{a^2+b^2}\,dt \Longrightarrow$ $v = \dfrac{ds}{dt} = \sqrt{a^2+b^2} \Longrightarrow \mathrm{r}' = (-a\,\mathrm{sen}\,t, a\cos t, b)$, $\mathrm{r}'' = (-a\cos t, -a\,\mathrm{sen}\,t, 0)$, $\|\mathrm{r}''\| = w = a = \dfrac{av^2}{a^2+b^2}$.

58. Consideremos $\mathrm{r} = (t, t^2, t^3)$ una trayectoria de movimiento, determinar en los instantes $t = 0$, $t = 1$:

a) La curvatura de la trayectoria.

b) Las componentes tangencial y normal del vector de aceleración del movimiento.

Solución Se tiene que $\mathrm{r} = (t, t^2, t^3)$, $\mathrm{r}' = (1, 2t, 3t^2)$, $\mathrm{r}'' = (0, 2, 6t)$, $\mathrm{r}''' = (0, 0, 6)$,

$$\mathrm{r}\times\mathrm{r}'' = \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{vmatrix} = (6t^2, -6t, 2),\ \|\mathrm{r}'\| = \sqrt{1+4t^2+9t^4},$$

$\|\mathrm{r}'\times\mathrm{r}''\| = 2\sqrt{1+9t^2+9t^4}$, $v = \dfrac{ds}{dt} = \sqrt{1+4t^2+9t^4}$, $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{4t+18t^3}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}$.

En $t = 0$, $\dfrac{1}{R} = \dfrac{\|\mathrm{r}'\times\mathrm{r}''\|}{\|\mathrm{r}'\|^3} = 2$, $w_{\boldsymbol{\tau}} = \dfrac{dv}{dt} = 0$, $w_{\boldsymbol{\nu}} = \dfrac{v^2}{R} = 2$.

En $t = 1$, $\dfrac{1}{R} = \dfrac{2\sqrt{19}}{14\sqrt{14}} = \dfrac{\sqrt{19}}{7\sqrt{14}}$, $w_{\boldsymbol{\nu}} = \dfrac{v^2}{R} = \dfrac{14}{7}\sqrt{\dfrac{19}{14}} = 2\sqrt{\dfrac{19}{14}} = 0$, $w_{\boldsymbol{\tau}} = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{22}{\sqrt{14}}$.