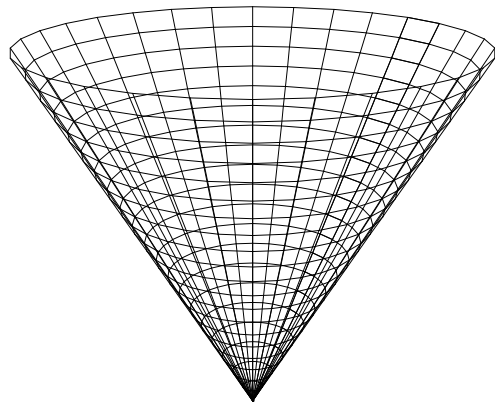
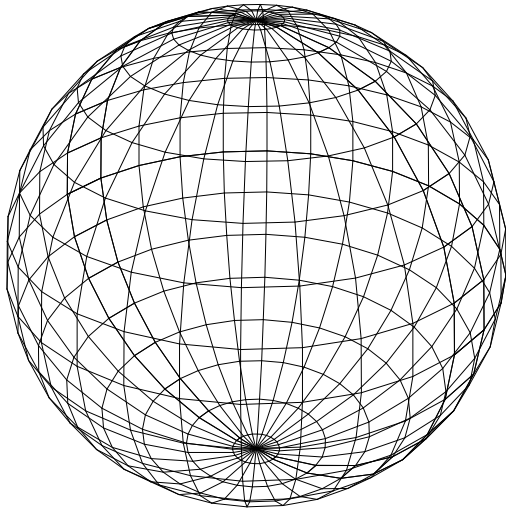


**Universidad de Costa Rica**  
**Escuela de Matemática**



**Serie: Cabécar**

# **Ejercicios de integrales de línea y de superficie**

**Serie: Cabécar**



**Editorial CIMPA**



**Prof. Jorge Poltronieri**

**2006**

515.430.76

P772e Poltronieri Vargas, Jorge, 1952-

Ejercicios de integrales de línea y de superficie /

Jorge Poltronieri. - [San José, C.R.: CIMPA], 2004.

249p. : il. ; 27cm (Serie cabécar)

A la cabeza de la port: Universidad de Costa Rica,  
Escuela de Matemática.

ISBN 9968-9979-5-1

1. INTEGRALES - PROBLEMAS,  
EJERCICIOS, ETC. I. Título.

CIP/1425

CC/SIBDI.UCR

Ejercicios de integrales de línea y de superficie

© Jorge Poltronieri Vargas, Catedrático

Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica.

Diagramación en  $\text{\LaTeX}$  realizada por el autor

Diseño y concepto de carátula realizada por el autor

Impreso en Costa Rica

San José, 2004

# Contenidos

<b>1</b>	<b>Resumen: Integrales de línea y de superficie</b>	<b>1</b>
1.1	Curvas en $\mathbb{R}^n$	1
1.2	Curvas rectificables y longitud de arco de una curva	3
1.3	Integral de línea	4
1.3.1	Integral de línea para campos escalares	4
1.3.2	Integral de línea para campos vectoriales	4
1.3.3	Propiedades de la integral de línea	6
1.3.4	Condición de independencia de la trayectoria	6
1.4	Teorema de Green	8
1.5	Formas diferenciales	11
1.5.1	Aplicaciones a las ecuaciones diferenciales exactas de primer orden	11
1.5.2	Caso de funciones de tres variables	12
1.5.3	Forma diferencial exacta de una función de tres variables	12
1.5.4	Caso de funciones de dos variables	13
1.5.5	Análisis en los campos gradientes en $\mathbb{R}^3$	13
1.6	Teoría de superficies	13
1.6.1	Representación paramétrica de una superficie	13
1.6.2	Cambio de representación paramétrica	15
1.7	Área de una superficie	16
1.7.1	Teorema de Guldin–Pappus	18
1.8	Integral de un campo escalar sobre una superficie	21

1.8.1	Centro de gravedad, momento de inercia . . . . .	22
1.9	Superficies orientables . . . . .	22
1.10	Integral de un campo vectorial sobre una superficie . . . . .	24
1.10.1	Observaciones sobre las integrales de superficie . . . . .	24
1.10.2	Extensiones del teorema de Stokes . . . . .	26
1.10.3	Teorema de la divergencia (Gauss–Ostrogradski) . . . . .	27
<b>2</b>	<b>Ejercicios de integrales de línea</b>	<b>29</b>
2.1	Longitud de arco . . . . .	29
2.2	Conjuntos convexos . . . . .	32
2.3	Integrales de línea . . . . .	33
2.4	Masa, centros de gravedad, momentos . . . . .	42
2.5	Integrales de línea de campos vectoriales . . . . .	50
2.6	Aplicaciones . . . . .	63
2.6.1	Formas diferenciales . . . . .	83
2.7	Fórmula de Green . . . . .	104
<b>3</b>	<b>Ejercicios de integrales de superficie</b>	<b>129</b>
3.1	Teoría de campos . . . . .	129
3.2	Área de superficie . . . . .	143
3.3	Integrales de superficie de campos escalares . . . . .	173
3.4	Centro de gravedad, masa, momentos de inercia. Aplicaciones . . . . .	182
3.5	Integrales de superficie de campos vectoriales . . . . .	192
3.6	Fórmula de Stokes . . . . .	206
3.7	Fórmula de Gauss–Ostrogradski . . . . .	220
	<b>Bibliografía</b>	<b>239</b>

## Capítulo 1

### Resumen: Integrales de línea y de superficie

#### 1.1 Curvas en $\mathbb{R}^n$

**Definición 1.1.1** Sea  $\mathbf{r}(t)$  una función de  $[a, b]$  en  $\mathbb{R}^n$ , tal que  $\mathbf{r}(t) = (r_1(t), \dots, r_n(t))$ , cuando  $t$  varía continuamente en  $[a, b]$ , los puntos especificados por la función  $\mathbf{r}(t)$  describe un conjunto de puntos en  $\mathbb{R}^n$ , que llamamos trayectoria de la función vectorial  $\mathbf{r}(t)$ .

**Definición 1.1.2** Sea  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$  una función vectorial continua definida en el intervalo  $[a, b]$ . La imagen originada por  $\mathbf{r}$  se dice que es la curva determinada por  $\mathbf{r}$  y que une los puntos  $\mathbf{r}(a)$  y  $\mathbf{r}(b)$ .

Si  $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$ , la curva se dice cerrada.

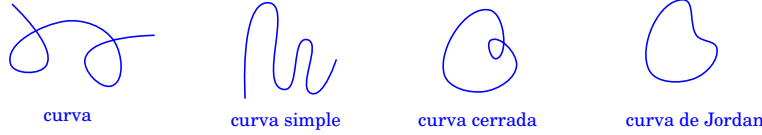
Si  $\mathbf{r}(a) \neq \mathbf{r}(b)$  se dice que es un arco con extremos  $\mathbf{r}(a)$  y  $\mathbf{r}(b)$ .

Si  $\mathbf{r}$  es uno a uno en  $[a, b]$ , la curva se dice simple. Si  $\mathbf{r}$  es uno a uno en el intervalo  $[a, b]$  y  $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$  se llama curva simple cerrada o curva de Jordan<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>**Marie Ennemond Camille Jordan (1838-1922)** Nace el 5 de enero de 1838 en La Croix-Rousse, Lyon, Francia. Muere el 22 de enero de 1922 en Paris, Francia. Estudiante de la promoción de 1855 de L'Ecole Polytechnique, entra como Bertrand, en el Cuerpo de Minas. El nuevo académico había debutado con una Tesis sobre las Sustituciones. En 1865 y 1866, presentó trabajos llenos de consideraciones delicadas y profundas de los Poliedros, donde la noción de simetría y de clase se analizan con una longitud especial. Un año después, siguiendo el mismo orden de ideas, pero pasando de la Geometría a la Geometría cinemática, publicó un trabajo sobre los Grupos de movimientos. Se había propuesto determinar las diversas maneras en que un sistema de moléculas puede superponerse a sí misma y determinar así todas las combinaciones admisibles agrupadas alrededor de 174 tipos, los cuales hacen naturalmente parte del sistemas definido por Bravais en sus estudios cristalográficos. La obra principal de Jordan es su *Traité des substitutions*, lleno de resultados nuevos y donde continúa el camino abierto por Galois y Abel, los principios fundamentales de la Teoría de ecuaciones algebraicas

Si  $\mathbf{r}$  es constante en  $[a, b]$ , la curva se dice *curva punto*.



**Definición 1.1.3** Una curva  $\Gamma$  se dice *regular* sobre  $[a, b]$  (resp.  $]a, b[$ ) si admite una representación paramétrica (parametrización), con ayuda de una función vectorial  $\mathbf{r}(t)$  con derivada continua<sup>2</sup> en  $[a, b]$  (resp.  $]a, b[$ ), de modo que  $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ , en  $[a, b]$  (resp.  $]a, b[$ ), o lo que es equivalente, las componentes  $r'_i(t)$  sobre  $[a, b]$  (resp.  $]a, b[$ ) no se anulan simultáneamente.

**Definición 1.1.4** Se dice que  $\tau$  es un *parámetro admisible* para la curva regular  $\Gamma$  representada por  $\mathbf{r}(t)$ , si está conectado con  $t$  por medio de una función  $\lambda$ , la cual no sólo es estrictamente monótona y continua sino que tiene derivada continua diferente de cero en  $[c, d]$  (resp.  $]c, d[$ ). En este caso

$$\sum_{i=1}^n \beta'_i(\tau)^2 = \lambda'(\tau)^2 \sum_{i=1}^n r'_i(\tau)^2 > 0.$$

**Definición 1.1.5** Se dice que  $\Gamma$  es una *curva regular a trozos* sobre  $[a, b]$  (resp.  $]a, b[$ ) si puede ser representada por una función vectorial  $\mathbf{r}(t)$  sobre  $[a, b]$  (resp.  $]a, b[$ ), tal que el intervalo cerrado  $[a, b]$  (resp. abierto  $]a, b[$ ) se puede particionar por medio de una división  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ , de modo que  $\mathbf{r}(t)$  es una curva regular sobre cada uno de los intervalos  $[a, t_1]$  (resp.  $]a, t_1[$ ),  $[t_1, t_2]$ ,  $\dots$ ,  $[t_{n-1}, b]$  (resp.  $]t_{n-1}, b[$ ).

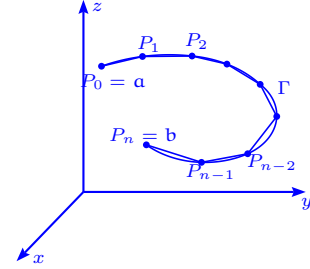
resolubles por radicales, con aplicaciones de la Teoría de integración de las ecuaciones diferenciales lineales. Jordan ayudó a sentar las bases de la teoría de una clase interesante de ecuaciones que aparecen a propósito de la división de los argumentos en las funciones abelianas. Es conveniente agregar los trabajos sobre la *Teoría de formas*, considerado desde el doble punto de vista del Álgebra y la Aritmética y finalmente la publicación del Cours d'Analyse, que el autor enseña desde 1876 en L'Ecole Polytechnique; trabajo capital a nivel de los descubrimientos más elevados y más recientes de la ciencia. Jordan definió el carácter general de sus trabajo, diciendo que se había propuesto constantemente profundizar sobre la *Teoría del orden*, así como en el dominio de la Geometría pura y en el Análisis. Relaciona así, por su tendencia, sus estudios en la simetría en los poliedros, los sistemas de líneas y el ensamblaje de moléculas, a sus investigaciones en la Teoría de sustituciones, que el previó de alguna manera como la teoría analítica del orden.

<sup>2</sup>Se define la derivada de una función vectorial  $\mathbf{r}(t)$  por  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h} = \mathbf{r}'(t) = (r'_1(t), \dots, r'_n(t))$ .

## 1.2 Curvas rectificables y longitud de arco de una curva

Sea  $\Gamma$  una curva continua dada por  $\mathbf{r}(t) = (r_1(t), \dots, r_n(t))$ , con  $a \leq t \leq b$ . Consideremos la partición  $P$  del intervalo  $[a, b]$ , con la ayuda de los puntos de división  $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{m-1} < t_m = b$ .

Sean  $a = P_0, P_1, \dots, P_{m-1}, P_m = b$  los puntos correspondientes y consideremos la línea poligonal inscrita en  $\Gamma$ .



**Definición 1.2.1** La longitud de la curva  $\Gamma$  se define como el límite al cual tienden las sumas de las longitudes de los segmentos de la línea poligonal inscrita en  $\Gamma$ , cuando el máximo en la partición tiende a cero:

$$\ell_{\Gamma} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m |\overline{P_{k-1}P_k}| = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \|\mathbf{r}(t_k) - \mathbf{r}(t_{k-1})\|,$$

con  $\max_{1 \leq k \leq m} (t_k - t_{k-1}) = \|P\| \rightarrow 0$ , si  $m \rightarrow \infty$ .

Si el límite existe, la curva  $\Gamma$  se dice rectificable sobre el intervalo  $[a, b]$  de variación del parámetro  $t$ . Si el límite no existe, se dice que la curva no es rectificable o que no tiene longitud de arco.

**Definición 1.2.2** Un aplicación  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto se denomina campo escalar o función escalar.

**Definición 1.2.3** Un campo vectorial en  $S \subset \mathbb{R}^n$  es una función  $\mathbf{f}: S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , que asigna a cada  $\mathbf{x}$  en su dominio  $S$ , un vector  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ .

**Definición 1.2.4** Un campo vectorial  $\mathbf{f}$  definido sobre un abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$  se dice campo gradiente si existe un campo escalar  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable en  $U$ , tal que  $\nabla \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ,  $\forall \mathbf{x} \in U$ .

También se dice que  $\mathbf{f}$  es el gradiente de  $\varphi$ .

**Teorema 1.2.1** Sea  $\Gamma$  una curva regular descrita por  $\mathbf{r}(t) = (r_1(t), \dots, r_n(t))$ ,  $a \leq t \leq b$ , entonces la longitud de arco de la curva  $\Gamma$  está dada por  $s = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt$  y es independiente del parámetro  $t$ .

## 1.3 Integral de línea

### 1.3.1 Integral de línea para campos escalares

Se define la integral de línea de la función  $f$  a lo largo de  $\Gamma$ , cuando el parámetro es  $t \in [a, b]$  (y no  $s$ ) como:

$$\int_{\Gamma} f ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| dt.$$

– En general, si  $f: S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en  $S$  y  $\Gamma$  una curva contenida en  $S$  convexo,  $\Gamma = \mathbf{r}([a, b])$ ,  $\mathbf{r}$  de clase  $C^1$ , entonces existe la integral de línea a lo largo de la curva  $\Gamma$  y tenemos:

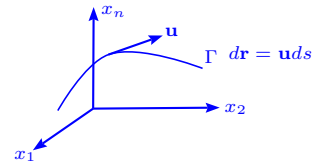
$$\int_{\Gamma} f ds = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m f(\mathbf{r}(t_i)) \Delta s_i.$$

Además:

$$\int_{\Gamma} f ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) s'(t) dt.$$

### 1.3.2 Integral de línea para campos vectoriales

Consideremos una curva continua  $\Gamma$  rectificable orientada, con representación paramétrica  $\mathbf{r}(s)$ ,  $0 \leq s \leq \ell$ , de clase  $C^1$ , donde  $s$  es la longitud de arco a lo largo de  $\Gamma$ .



Sea  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$  una función (campo vectorial continuo)

sobre  $\Gamma$  o sobre un abierto  $S \supset \Gamma$ , donde  $f_1, \dots, f_n$  son continuas sobre  $\Gamma$  (o sobre  $S$ ). Se denomina integral de línea de  $\mathbf{f}$  a lo largo de la curva orientada  $\Gamma$  a la expresión:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma} f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n = \int_{\Gamma} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}) ds = \int_0^{\ell} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}) ds,$$

$d\mathbf{r} = \mathbf{u} ds$  representa el elemento de arco de curva en magnitud y dirección.

Si  $\mathbf{f} \circ \mathbf{r}(s)$  es regular a trozos, el resultado sigue siendo válido.

En el caso general la función  $\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}$  puede tener discontinuidades de primera especie ligadas a algún punto esquina de  $\Gamma$ .

Si la curva  $\Gamma$  se orienta en sentido contrario, el vector tangente es  $-\mathbf{u}$  y denotando el contorno  $\Gamma_-$  se tiene

$$\int_{\Gamma_-} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}.$$

Si el parámetro de la curva es  $t$  (y no  $s$ ),  $t \in [a, b]$ , entonces:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{f}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_0^{\ell} \mathbf{f}(\mathbf{r}(s)) \cdot \mathbf{u} ds,$$

y se puede escribir:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{f}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{u}(t) \|\mathbf{r}'(t)\| dt.$$

Si la curva orientada  $\Gamma$  es cerrada, a menudo se usa el

símbolo  $\oint_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$  para indicar la propiedad de ser cerrada y la integral de  $\mathbf{f}$  es llamada circulación del vector  $\mathbf{f}$  (campo vectorial) sobre  $\Gamma$ .

Si  $\mathbf{f}$  es un campo de fuerza, la integral de línea de  $\mathbf{f}$  sobre  $\Gamma$  representa el trabajo de un campo  $\mathbf{f}$  a lo largo de la curva orientada  $\Gamma$ .

Si  $n = 2$ ,  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ , la integral de línea  $\int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$  se escribe  $\int_{\Gamma} f_1 dx + f_2 dy$ , o bien  $\int_{\Gamma} f_1(x, y) dx + f_2(x, y) dy$ .

En tres dimensiones  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$  y escribimos:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz.$$

Si la curva  $\Gamma$  se representa paramétricamente por  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , con  $t \in [a, b]$ , se tiene:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma} f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz = \int_a^b (f_1(\mathbf{r}(t))x'(t) + f_2(\mathbf{r}(t))y'(t) + f_3(\mathbf{r}(t))z'(t)) dt.$$

Si la curva orientada  $\Gamma$  puede representarse como la unión de dos curvas orientadas  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ , especificada por las mismas ecuaciones correspondiendo a la variación del parámetro  $s$  sobre el intervalo  $[0, c]$  y  $[c, \ell]$ ,  $0 < c < \ell$ , entonces

$$\int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}.$$

Si  $\mathbf{f}: S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función continua sobre  $S$ , la integral de línea de  $\mathbf{f}$  a lo largo de la curva  $\Gamma$  ( $\mathbf{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , con  $\Gamma = \mathbf{r}([a, b]) \subset S$  convexo,  $\mathbf{r}$  de clase  $C^1$ ), entonces:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{f}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt.$$

Si  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ ,  $\mathbf{r} = (x_1, \dots, x_n)$ , entonces  $\int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \sum_{k=1}^n \int_a^b f_k(\mathbf{r}(t)) x'_k(t) dt$ .

### 1.3.3 Propiedades de la integral de línea

Es claro que las integrales de línea, al poderse definir a través de las integrales ordinarias, heredan las propiedades de éstas.

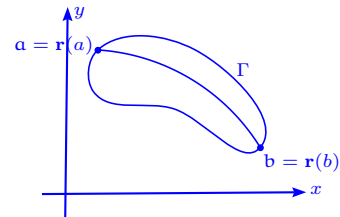
- **Linealidad**  $\int_{\Gamma} (\mathbf{f} + \lambda \mathbf{g}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} + \lambda \int_{\Gamma} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{r}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
- **Aditividad**  $\int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$ , con  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ ,  $\Gamma_1 = \mathbf{r}([a, c])$ ,  $\Gamma_2 = \mathbf{r}([c, b])$ ,  $a \leq c \leq b$ .
- **Cambio de parámetro** En general si  $\mathbf{r}(t)$  y  $\mathbf{w}(t)$  son representaciones paramétricas equivalentes de la misma curva  $\Gamma$  rectificable en la misma dirección, entonces  $\int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{w}$ .  
Además  $\int_{\Gamma_-} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$ .

**Teorema 1.3.1** Si  $\mathbf{r}(t)$  y  $\mathbf{w}(t)$  son dos parametrizaciones regulares o regulares a trozos de  $\Gamma$ , entonces:  $\int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{w}$  si  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{w}$  tienen la misma orientación y  $\int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{w}$  si  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{w}$  tienen orientaciones opuestas.

### 1.3.4 Condición de independencia de la trayectoria

Una condición para que la integral en línea no dependa de la trayectoria que une los puntos  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  es que  $\mathbf{f} = \nabla \varphi$ , con  $\varphi \in C^1$ , en cuyo caso  $f_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ :

$$\int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma} f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n = \int_{\Gamma} d\varphi = \varphi(\mathbf{b}) - \varphi(\mathbf{a}).$$



Se usará el símbolo  $\oint$  para indicar que la integral se realiza sobre una curva cerrada y orientada.

En el caso  $n = 3$ , la condición de independencia de la integral de línea  $\oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz$  de la trayectoria  $\Gamma$ , es que exista una función real  $\varphi$  tal que  $\nabla \varphi = (P, Q, R)$ , o sea  $P = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ ,  $Q = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ ,  $R = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ .

Cuando se cumplen las condiciones  $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , la integral de línea es nula, si la región encerrada por la curva no contiene en su interior puntos en los cuales una de las funciones  $P, Q, R, \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial R}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial y}$  no sea continua o no esté definida.

En general para que se tenga que la integral en línea sea independiente de la trayectoria, debe tenerse que  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , en la región  $S$ , siempre que una de las funciones  $f_i, \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n$ , no sea discontinua o no esté definida en  $S$ .

**Definición 1.3.1** Sea  $S \subset \mathbb{R}^2$  se dice conexo, si todo par de puntos de  $S$  puede unirse por medio de una curva regular a trozos dentro de  $S$ .

**Definición 1.3.2** Sea  $S \subset \mathbb{R}^2$  un conjunto abierto y conexo, se dice que es simplemente conexo, si para toda curva de Jordan  $\Gamma$  situada en  $S$ , la región interior de  $S$  es también subconjunto de  $S$ .

**Teorema 1.3.2** Sea  $\varphi: S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^1$ , donde  $S$  es un conjunto conexo abierto, entonces para dos puntos  $\mathbf{a} = \mathbf{r}(a)$  y  $\mathbf{b} = \mathbf{r}(b)$  unidos por una curva regular a trozos  $\Gamma \subset S$ , se tiene:

$$\int_{\Gamma} \nabla \varphi \cdot d\mathbf{r} = \varphi(\mathbf{r}(b)) - \varphi(\mathbf{r}(a)).$$

**Teorema 1.3.3** Sea  $\mathbf{f}$  un campo vectorial definido sobre un abierto  $S \subset \mathbb{R}^n$ , entonces las siguientes propiedades son equivalentes:

- i) Existe una función escalar  $\varphi$  de clase  $C^1$  tal que  $\nabla \varphi = \mathbf{f}$  sobre  $S$ .
- ii) La integral de  $\mathbf{f}$  sobre curva cerrada regular a trozos  $\Gamma \subset S$  es igual a cero:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

**Observación** La integral de línea se puede expresar de varias maneras:

- 1) Forma vectorial:  $\int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} ds$
- 2) Forma paramétrica:  $\int_a^b (f_1(t) \frac{dx_1}{dt} + \dots + f_n(t) \frac{dx_n}{dt}) dt$
- 3) Forma diferencial:  $\int_{\Gamma} f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n.$

**Definición 1.3.3** Si un campo vectorial  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$  definido sobre un abierto  $S \subset \mathbb{R}^3$  y donde  $f_1, f_2, f_3$  tienen derivadas parciales continuas, entonces definimos el vector:

$$\text{rot } \mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{f} = \left( \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right),$$

llamado rotacional del campo vectorial  $\mathbf{f}$ .

**Teorema 1.3.4** Si un campo vectorial  $\mathbf{f}$  de clase  $C^1$  en un abierto  $S \subset \mathbb{R}^3$ , con la propiedad  $\oint_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0$ , para cualquier curva cerrada orientable regular a trozos  $\Gamma \subset S$ , entonces  $\text{rot } \mathbf{f} = \mathbf{0}$  sobre  $S$ .

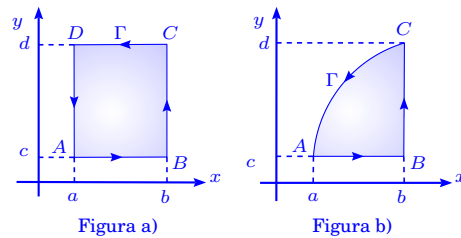
El inverso de este teorema no es válido para un abierto arbitrario  $S$ , salvo cuando  $S$  es conexo.

## 1.4 Teorema de Green

**Teorema 1.4.1** Sea  $S \subset \mathbb{R}^2$  un abierto,  $P, Q: S \rightarrow \mathbb{R}$  funciones de clase  $C^1$ , sea  $\Gamma$  una curva cerrada regular a trozos y sea  $R$  la unión de  $\Gamma$  y la región que encierra, de modo que  $R \subset S$ , con la propiedad de que se puede partir con ayuda de líneas paralelas a los ejes coordenados  $x, y$ , en un número finito de partes, cada una de las cuales es del tipo  $w$ , entonces:

$$\iint_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\Gamma} P dx + Q dy,$$

donde  $w$  es una región del tipo de la figura b) adjunta.



El teorema anterior se conoce como Teorema de Green<sup>3</sup>. Consideramos ahora que  $R = \bigcup_{k=1}^p w_k$  es una partición de  $R$ , en partes del tipo  $w$  y sean  $\Gamma_k, k = 1, \dots, p$ , las curvas frontera

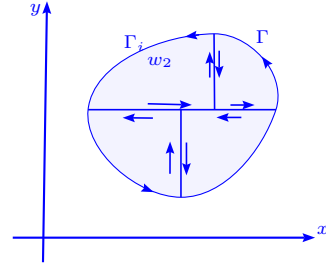
<sup>3</sup>**George Green (1793-1841)** Nace el julio de 1793 en Sneinton, Nottingham, Inglaterra. Muere el 31 de mayo de 1841 en Sneinton, Nottingham, Inglaterra. Su padre era panadero en Nottingham y trabajó en la panadería con su padre. No se tiene conocimiento cómo llegó a ser uno de los matemáticas más avanzadas de su tiempo, con clara influencia de las ideas matemáticas francesas.

Nadie sin suficientes conocimientos matemáticas podría apreciar la importancia del trabajo de Green. Las cosas cambiaron cuando se contactó con Sir Edward Bromhead. Bromhead había estudiado matemática en Cambridge y había sido un miembro de la Sociedad Analítica y le propuso estudiar en Cambridge. Green va a Cambridge en octubre de 1833 a la edad de 40. En 1838 y 1839 publica dos trabajos en hidrodinámica (el movimiento de las

orientadas positivamente de cada región  $w_k$ . La fórmula de Green aplicada a cada uno de las regiones  $w_k$  da:

$$\iint_{\mathbb{R}} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \sum_{k=1}^p \iint_{w_k} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \sum_{k=1}^p \oint_{\Gamma_k} P dx + Q dy = \oint_{\Gamma} P dx + Q dy.$$

La última integral se explica como sigue. La unión  $C$  de las fronteras de todas las partes  $w_k$  consiste de  $\Gamma$  y la unión de un número finito de segmentos, cada uno de los cuales está contenido en  $\mathbb{R}$  y sirve de frontera común de dos partes contiguas de tipo  $w$ . Cada segmento es recorrido en dos direcciones opuestas.



Dado que  $P(x, y)$  y  $Q(x, y)$  son uniformemente continuas en  $\mathbb{R}$ , las integrales de la derecha, tienden a un límite cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , la cual es igual a la integral de la izquierda cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , es decir tiene al mismo límite que es la integral doble impropia con singularidades en  $\Gamma$ . Así obtenemos:

$$\iint_{\mathbb{R}} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\Gamma} P dx + Q dy.$$

**El área expresada como integral de línea**

El área de una región plana puede calcularse por  $\frac{1}{2} \oint_{\Gamma} x dy - y dx$ , donde  $\Gamma$  es la curva que limita a la región plana (en el sentido de integración positivo).

Si  $\mathbb{R}$  es la región encerrada por la curva  $\Gamma$ , podemos aplicar de teorema de Green y se tiene:

$$\text{Área}(\mathbb{R}) = \oint_{\Gamma} P dx + Q dy = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} -y dx + x dy.$$

---

olas en canales), dos trabajos en reflexión y refracción de luz y dos trabajos en reflexión y refracción del sonido. En mayo de 1840 vuelve a Nottingham padeciendo problemas de salud. Sólo unas semanas antes de la muerte de Green, se le había admitido en el Saint Peter's College de Cambridge. Sesenta años más tarde Thomson recuerda su excitación y la de Liouville y Sturm, a quienes les mostró el trabajo de Green en Paris en el verano de 1845. Después de volver a Cambridge, Thomson fue responsable de recolectar los trabajos de Green, con una introducción (1850-54). Ni Thomson, ni Maxwell, ni persona alguna, hubiera pensado que la teoría matemática general de potencial que desarrolló el hijo de un panadero autodidacta, llevaría las teorías matemáticas de electricidad a la industria del siglo veinte. Su trabajo versó sobre la teoría del potencial en relación con la electricidad y el magnetismo, las vibraciones, las ondas y la teoría de elasticidad. Permaneció casi desconocido en Inglaterra hasta después de su muerte.

Si la curva frontera  $\Gamma$  está dada por  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $a \leq t \leq$

$b$ , la integral de línea que da el área, toma la forma:

$$\text{Área}(\mathbb{R}) = \frac{1}{2} \int_a^b (-y(t)x'(t) + x(t)y'(t))dt = \frac{1}{2} \int_a^b \begin{vmatrix} x(t) & y(t) \\ x'(t) & y'(t) \end{vmatrix} dt.$$

Es evidente que se da la igualdad  $\oint_{\Gamma_{\pm}} x dy = -\oint_{\Gamma_{\pm}} y dx = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma_{\pm}} x^2 d\left(\frac{y}{x}\right) = \pm|\mathbb{R}|$ , donde el signo  $+$  corresponde al caso de orientación del contorno  $\Gamma = \Gamma_+$  y el signo  $-$  corresponde a la orientación negativa  $\Gamma = \Gamma_-$ .

**Teorema 1.4.2** Si  $f(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$  es un campo vectorial de clase  $C^1$  en un conjunto abierto simplemente conexo  $S$  del plano, entonces  $f$  es un gradiente en  $S$  si y sólo si tenemos que  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ,  $\forall (x, y) \in S$ .

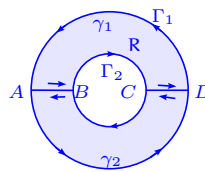
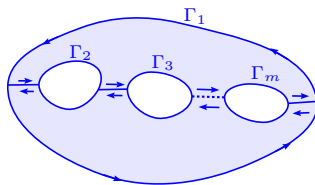
**Teorema 1.4.3** Sean  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ ,  $m$  curvas de Jordan, regulares a trozos que tienen las propiedades siguientes:

- Dos curvas cualesquiera  $\Gamma_i, \Gamma_j$ ,  $i \neq j$ , no se cortan.
- Todas las curvas  $\Gamma_2, \dots, \Gamma_m$  están situadas en el interior de  $\Gamma_1$ .
- La curva  $\Gamma_i$  está en el exterior de la curva  $\Gamma_j$  para cada  $i \neq j$ ,  $i > 1, j > 1$ .

Sea  $\mathbb{R}$  la región que consiste en la unión de  $\Gamma_1$  con el interior de  $\Gamma_1$  que no está dentro de cualquiera de las curvas  $\Gamma_2, \dots, \Gamma_m$  (ver siguiente figura).

Sean  $P$  y  $Q$  aplicaciones de clase  $C^1$  en un conjunto abierto  $S$  que contiene a  $\mathbb{R}$ , entonces:

$$\iint_{\mathbb{R}} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\Gamma_1} P dx + Q dy - \sum_{k=2}^m \oint_{\Gamma_k} P dx + Q dy.$$



## 1.5 Formas diferenciales

**Definición 1.5.1** Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  un abierto, se llama forma diferencial (de grado uno) sobre  $U$  toda aplicación  $\omega: U \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ , tal que existen  $n$  aplicaciones  $f_i: U \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$  sobre  $U$ , de modo que  $\forall \mathbf{x} \in U$ ,  $\omega(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x})dx_1 + \cdots + f_n(\mathbf{x})dx_n$ .

Recordemos que  $dx_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es tal que  $dx_i(\mathbf{h}) = h_i$ , con  $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ .

**Definición 1.5.2** Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  un abierto,  $\omega$  una forma diferencial sobre  $U$  se dice exacta (o que  $\omega$  admite una primitiva sobre  $U$ ), si existe una aplicación  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$  sobre  $U$  tal que  $d\varphi = \omega$  (i.e.  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = f_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ). La aplicación  $\varphi$ , si existe, se llama primitiva de  $\omega$  sobre  $U$ .

**Definición 1.5.3 Forma diferencial cerrada** Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  un abierto,  $\omega$  una forma diferencial sobre  $U$ , se dice que  $\omega$  es cerrada sobre  $U$  si y sólo si  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ .

**Teorema 1.5.1** Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  un abierto,  $\omega$  una forma diferencial sobre  $U$ , si  $\omega$  es exacta entonces  $\omega$  es cerrada sobre  $U$ .

**Teorema 1.5.2 Poincaré<sup>4</sup>** Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  un abierto y  $\omega$  una forma diferencial sobre  $U$ , si  $U$  es conexo y  $\omega$  es cerrada, entonces  $\omega$  es exacta sobre  $U$ .

### 1.5.1 Aplicaciones a las ecuaciones diferenciales exactas de primer orden

**Teorema 1.5.3** Consideremos la forma diferencial exacta  $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$  en un conjunto conexo abierto  $S$  y sea  $\varphi$  tal que  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = P$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q$  en todo  $S$ , entonces la ecuación diferencial  $Q(x, y)y' + P(x, y) = 0$  tiene por solución  $y(x)$  que satisface la ecuación

---

<sup>4</sup>**Jules Henri Poincaré (1854-1912)** Matemático francés nacido en Nancy y fallecido en París. Poincaré ha sido calificado por algunos como el último de los matemáticos que dominó toda esta ciencia, ya que fue capaz de realizar un trabajo creador en casi todas las ramas de las matemáticas, y también en astronomía, e incluso en literatura. Se interesó ya de muy joven por las matemáticas, graduándose como doctor en 1879, siendo Hermite uno de sus profesores. Este interés está documentado por sus escritos filosóficos y por una masa imponente de trabajos matemáticos, en las cuales, entre otras cosas, contribuyó a echar las bases de la topología. Más imponente todavía es el conjunto de trabajos en torno a la física matemática y la física teórica. Su obra científica fue muy notable; además de treinta volúmenes, un número impresionante de artículos, ensayos y memorias, reunidos en "Tratados y memorias". Fue uno de los primeros en comprender la importancia de la teoría de la relatividad de Einstein.

$$\varphi(x, y(x)) = c.$$

Inversamente, si la ecuación  $\varphi(x, y) = c$  define  $y$  como función implícita diferenciable de  $x$ , entonces esta función es una solución de la ecuación diferencial  $Q(x, y)y' + P(x, y) = 0$ .

**Definición 1.5.4** Si la ecuación diferencial lineal de primer orden  $Q(x, y)y' + P(x, y) = 0$ , satisface que al multiplicarse por el factor  $\mu(x, y)$ , la expresión  $\omega = \mu(x, y)Q(x, y)dy + \mu(x, y)P(x, y)dx$  es exacta, se dirá que la ecuación diferencial  $\mu(x, y)Q(x, y)y' + \mu(x, y)P(x, y) = 0$  es exacta y  $\mu(x, y)$  se denomina factor integrante de la ecuación original  $Q(x, y)y' + P(x, y) = 0$ .

### 1.5.2 Caso de funciones de tres variables

**Definición 1.5.5** Se dice que un campo de vectores  $\mathbf{f}$  definida sobre un abierto  $U \subset \mathbb{R}^3$  es la derivada de un potencial escalar  $\varphi$ , si existe una aplicación  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable en  $U$ , tal que  $\nabla\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ,  $\forall \mathbf{x} \in U$ .

**Condición necesaria** Supongamos que  $\mathbf{f}$  es de clase  $C^1$  sobre el abierto  $U \subset \mathbb{R}^3$ , si  $\mathbf{f}$  es la derivada de un potencial escalar  $\varphi$ , se tiene  $\nabla\varphi(x, y, z) = \mathbf{f}(x, y, z)$  i.e.  $\text{rot } \mathbf{f}(x, y, z) = \mathbf{0}$ .

Dado que  $\mathbf{f}$  es de clase  $C^1$  sobre el abierto  $U$ , la condición necesaria para que sea así es que  $\text{rot } \mathbf{f}(x, y, z) = \mathbf{0}$ ,  $\forall (x, y, z) \in U$ , que se traduce en las condiciones:

$$\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

**Condición suficiente** Sea  $U \subset \mathbb{R}^3$  abierto,  $\mathbf{f} \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$  un campo de vectores tal que  $\text{rot } \mathbf{f}(x, y, z) = \mathbf{0}$ ,  $\forall (x, y, z) \in U$ , entonces para todo  $B = [a, b] \times [c, d] \times [e, f] \subset U$ , existe un campo escalar  $\varphi \in C^2(B, \mathbb{R})$  tal que  $\nabla\varphi(x, y, z) = \mathbf{f}(x, y, z)$ ,  $\forall (x, y, z) \in B$ .

### 1.5.3 Forma diferencial exacta de una función de tres variables

**Teorema 1.5.4** Sean  $P, Q, R$  funciones de clase  $C^1$  sobre  $U = [a, b] \times [c, d] \times [e, f] \subset \mathbb{R}^3$ , la forma diferencial  $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$  es exacta si y sólo si  $\forall (x, y, z) \in U$ ,

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

### 1.5.4 Caso de funciones de dos variables

Si consideramos que  $R = 0$  y que  $P, Q$  son independientes de  $z$ , tenemos la siguiente propiedad.

**Teorema 1.5.5** Sean  $P, Q$  funciones numéricas de clase  $C^1$  sobre  $B = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ , la forma diferencial  $\omega = P dx + Q dy$  es exacta en  $U$  si y sólo si  $\forall (x, y) \in B$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ .

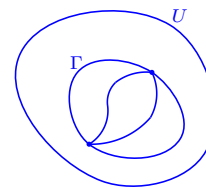
### 1.5.5 Análisis en los campos gradientes en $\mathbb{R}^3$

Supongamos en particular que el campo vectorial  $\mathbf{f}$  de clase  $C^1$ , deriva de un potencial escalar  $\varphi(x, y, z)$  de clase  $C^2$  i.e.  $\mathbf{f} = \nabla\varphi = (P, Q, R)$  en un conjunto  $U \subset \mathbb{R}^3$  conexo.

Sea  $\Gamma$  un arco de curva de origen  $(x_0, y_0, z_0)$  y extremo  $(x_1, y_1, z_1)$ , entonces la integral del diferencial  $\omega = P dx + Q dy + R dz = \nabla\varphi \cdot d\mathbf{r}$  satisface:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Gamma} \omega = \int_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz = \int_{\Gamma} \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z} dz \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \nabla\varphi \cdot d\mathbf{r} = \varphi(x_1, y_1, z_1) - \varphi(x_0, y_0, z_0). \end{aligned}$$

En las condiciones indicadas, la integral de línea solo depende de los valores del potencial  $\varphi$  en los extremos de  $\Gamma$ . En otras palabras, la integral de línea no depende del camino seguido, sino sólo de los extremos.



En particular, la integral de un gradiente sobre una curva cerrada es nula.

## 1.6 Teoría de superficies

### 1.6.1 Representación paramétrica de una superficie

**Definición 1.6.1** Una superficie parametrizada es una función  $\mathbf{r}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . La superficie  $S = \mathbf{r}(\mathbb{R})$  y se puede escribir  $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ .

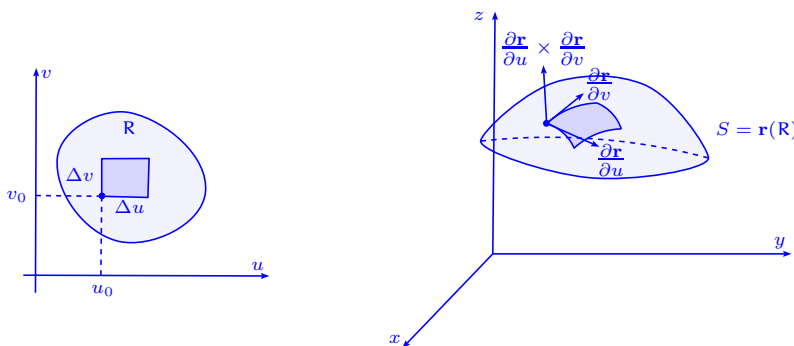
Si  $\mathbf{r}$  es diferenciable o de clase  $C^1$ , decimos que la superficie  $S$  es diferenciable o de clase  $C^1$ .

**Definición 1.6.2** Si la aplicación  $\mathbf{r}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbf{r}(\mathbb{R})$  es biyectiva, la superficie  $\mathbf{r}(\mathbb{R})$  se denomina superficie paramétrica simple.

Consideremos una superficie representada por la fórmula  $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ , con  $(u, v) \in R$ . Si  $x, y, z$  son de clase  $C^1$ , podemos considerar los dos vectores:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \left( \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right), \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \left( \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right).$$

El producto vectorial  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \left( \left| \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right|, \left| \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right|, \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \right).$



**Definición 1.6.3** Sea  $R \subset \mathbb{R}^2$  un abierto y sea  $S$  la superficie en  $\mathbb{R}^3$  dada por  $\mathbf{r}: R \rightarrow S$  de clase  $C^1$ , se dice que la superficie es regular en  $(u, v) \in R$ , si  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v) \neq \mathbf{0}$ .

Los puntos  $(u, v) \in R$  en los que las derivadas parciales  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$  no son continuas o bien  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u, v) = \mathbf{0}$ , se llaman puntos singulares de la superficie  $S$  o de  $\mathbf{r}$ .

Toda superficie tiene más de una representación paramétrica y puede suceder que un punto puede ser regular para una representación y singular para otra.

**Proposición 1.6.1** Si  $g(x, y, z)$  es una función de clase  $C^1$ ,  $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $R \subset \mathbb{R}^3$  abierto tal que  $\|\nabla g(x, y, z)\| > 0$ ,  $\forall (x, y, z) \in R$  y si la superficie  $S$  para la cual  $g(x, y, z) = 0$  no es vacía, entonces  $S$  es regular.

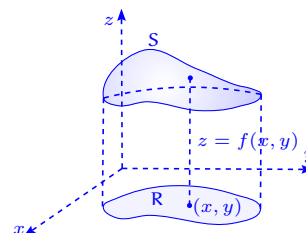
**Definición 1.6.4** Una superficie que se puede partir en un número finito de elementos regulares se dice regular a trozos.

**Definición 1.6.5** Una superficie parametrizada  $S$  es regular a trozos, si es la unión de imágenes de superficies parametrizadas  $\mathbf{r}_i: R_i \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $R_i \subset \mathbb{R}^2$  tales que:

- i)  $R_i$  es un abierto del plano
- ii)  $\mathbf{r}_i$  es de clase  $C^1$  y uno a uno excepto tal vez en la frontera de  $R_i$
- iii)  $S_i$ , la imagen de  $\mathbf{r}_i$  es regular, excepto tal vez en un número finito de puntos.

Cuando una superficie  $S$  se da en la forma explícita  $z = f(x, y)$ , podemos representarla por la ecuación  $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$ . La proyección de  $S$  sobre el plano  $xy$  determina  $R$ . Además, el producto vectorial es:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = \left( -\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right),$$

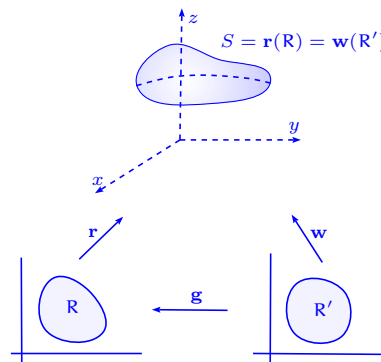


por lo que  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \neq \mathbf{0}$ ,  $\forall (x, y) \in R$ . Los únicos puntos singu-

lares que se pueden dar son puntos en los que una de las derivadas parciales  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$  no es continua.

### 1.6.2 Cambio de representación paramétrica

Supongamos que la función  $\mathbf{r}: R \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $R \subset \mathbb{R}^2$  es la representación paramétrica de la superficie  $S = \mathbf{r}(R)$  y que la  $R$  es la imagen de la región  $R' \subset \mathbb{R}^2$  por la aplicación biyectiva  $\mathbf{g}: R' \rightarrow R$  de clase  $C^1$ , dada por  $\mathbf{g}(s, t) = (u(s, t), v(s, t))$ . Así tenemos que  $\mathbf{w}(s, t) = \mathbf{r}(\mathbf{g}(s, t))$  y las aplicaciones  $\mathbf{r}: R \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{w}: R' \rightarrow \mathbb{R}^3$ , representan la misma superficie, es decir  $\mathbf{r}(R) = \mathbf{w}(R') = S$  (regularmente equivalentes).



**Teorema 1.6.1** Sean  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{w}$  dos funciones regularmente equivalentes dadas por  $\mathbf{w} = \mathbf{r} \circ \mathbf{g}$ ,

donde  $\mathbf{g}(s, t) = (u(s, t), v(s, t))$  es de clase  $C^1$ ,  $\mathbf{g}: \mathbb{R}' \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces:

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)} \right|,$$

donde las derivadas parciales  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$  están evaluadas en el punto  $(u(s, t), v(s, t))$ , o sea el producto vectorial de  $\mathbf{w}$ , es igual al producto vectorial de  $\mathbf{r}$ , multiplicado por el determinante jacobiano de la transformación  $\mathbf{g}$ .

## 1.7 Área de una superficie

**Teorema 1.7.1** Sea  $S$  una superficie regular con representación paramétrica de clase  $C^1$ ,  $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ ,  $(u, v) \in \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}$  acotado medible, entonces el área de la superficie  $S$  está dado por:  $|S| = \iint_{\mathbb{R}} \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| du dv$ .

Cuando  $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  se tiene que:

$$|S| = \iint_{\mathbb{R}} \sqrt{\left| \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right|^2 + \left| \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right|^2 + \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|^2} du dv.$$

Si  $S$  se expresa por la ecuación  $z = f(x, y)$  i.e.  $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$  se tiene que:

$$|S| = \iint_{\mathbb{R}} \sqrt{1 + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2} dx dy.$$

Si  $S$  se expresa por la ecuación  $F(x, y, z) = 0$ , donde  $S$  puede proyectarse uno a uno sobre el plano  $xy$  y si la ecuación  $F(x, y, z) = 0$ , define a  $z$  como función de  $x, y$  i.e.  $z = f(x, y)$ , entonces  $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$  en los puntos en que  $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$  y tenemos:

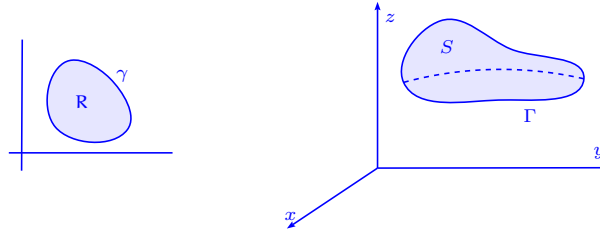
$$|S| = \iint_{\mathbb{R}} \frac{\sqrt{\left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial z} \right)^2}}{\left| \frac{\partial F}{\partial z} \right|} dx dy.$$

**Teorema 1.7.2** Si  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{w}$  son dos funciones regularmente equivalentes, entonces el área de la superficie  $|S|$  es independiente de la representación paramétrica usada para describir la superficie  $S$ , es decir si  $\mathbf{r}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$  es la representación paramétrica de la superficie

$S = \mathbf{r}(R)$  y  $R$  es la imagen de la región  $R' \subset \mathbb{R}^2$  por la aplicación biyectiva  $\mathbf{g}: R' \rightarrow R$  de clase  $C^1$ , dada por  $\mathbf{g}(s, t) = (u(s, t), v(s, t))$ , de modo que  $\mathbf{w}(s, t) = \mathbf{r}(\mathbf{g}(s, t))$ , ( $\mathbf{r}(R) = \mathbf{w}(R') = S$ ), entonces:

$$\iint_R \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| du dv = \iint_{R'} \left\| \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \right\| ds dt$$

– Si consideramos una superficie regular  $S$  representada paraméricamente por  $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ , donde  $\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| > 0$ , para  $(u, v) \in R$  abierto medible en el plano  $uv$  y donde  $x, y, z$  son de la clase  $C^1$  en  $\bar{R}$ . Se supone que existe una correspondencia uno a uno entre  $S$  y  $R$ . Como  $R$  es un abierto medible, es acotado y tiene frontera  $\gamma$  no vacía. La frontera  $\gamma$  se transforma bajo las condiciones de  $\mathbf{r}$ , en el borde  $\Gamma = \bar{S} \setminus S$  de la superficie. No se requiere que la transformación de  $\gamma$  en  $\Gamma$  sea uno a uno.



– Supongamos que la superficie  $S$  es proyectable uno a uno sobre el plano  $z = 0$  i.e.  $z = f(x, y)$  y que  $x = g_1(u, v)$ ,  $y = g_2(u, v)$ ,  $(x, y) \in R'$ ,  $(u, v) \in R$  de clase  $C^1$  es una biyección entre los conjuntos abiertos medibles  $R'$  y  $R$  de modo que el Jacobiano  $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \neq 0$ .

– Sean  $p = \frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $q = \frac{\partial f}{\partial y}$  las derivadas parciales de  $z = f(x, y) = g_3(u(x, y), v(x, y))$ ,  $(x, y) \in R'$ , donde  $u(x, y)$  y  $v(x, y)$  son las soluciones del sistema  $x = g_1(u, v)$ ,  $y = g_2(u, v)$ , tales que no sólo son continuas sobre  $R$ , sino que son uniformemente continuas, entonces tenemos:

$$|S| = \iint_R \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| du dv = \iint_{R'} \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy.$$

Si las funciones  $p$  y  $q$  son solamente continuas y acotadas, la igualdad anterior puede fallar, salvo que se pueda garantizar el cambio de variable en la integral. Además si  $p$  y  $q$  son continuas pero no acotadas sobre  $R$ , la igualdad anterior puede sin embargo, ser válida si la integral de la derecha se entiende en el sentido de la integral impropia.

– Si  $\omega$  es un abierto medible,  $\omega \subset \mathbb{R}^2$ , la parte  $S(\omega)$  de la superficie regular  $S$  dada por  $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ ,  $(u, v) \in \omega$  es a su vez regular y su área está dada por:

$$|S(\omega)| = \iint_{\omega} \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| du dv.$$

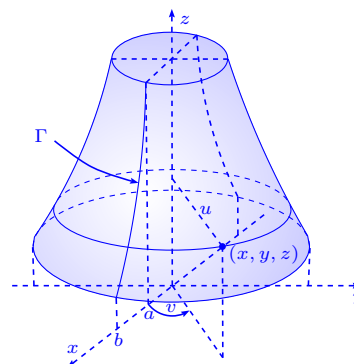
La integral anterior tiene sentido cuando  $\omega$  es un conjunto medible arbitrario de  $\bar{\mathbb{R}}^2$  y es natural verla como la integral del área de la parte  $S(\omega)$ , de una superficie regular  $S$  descrita por  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ .

Es obvio que  $|S(\omega)| = |S(\bar{\omega})|$  y en particular  $|\bar{S}| = |S(\bar{\mathbb{R}}^2)| = |S(\mathbb{R}^2)| = |S|$ . Así, se puede hablar de la parte  $S(\omega)$  de la superficie  $\bar{S}$  descrita por  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ , correspondiente a cada posible subconjunto  $\omega \subset \mathbb{R}^2$ . A cada una de estos subconjuntos le asociamos el número  $|S(\omega)|$ . Si  $\omega_1, \omega_2$  son medibles  $|S(\omega_1 \cup \omega_2)| = |S(\omega_1)| + |S(\omega_2)|$ .

### 1.7.1 Teorema de Guldin–Pappus

Uno de los teoremas de Guldin–Pappus establece que una superficie de revolución obtenida por la rotación de una curva plana de longitud  $\ell$  alrededor de un eje situado en el plano de la curva, tiene por área  $2\pi\ell h$ , donde  $h$  es la distancia desde el centro de gravedad de la curva al eje de rotación. Usaremos la fórmula para demostrar este teorema en un caso especial de superficie de revolución.

Consideremos una curva  $\Gamma$ , inicialmente en el plano  $xz$ , que gira alrededor del eje  $z$ . Sea  $z = f(x)$  su ecuación en el plano  $xz$ , donde  $a \leq x \leq b$ ,  $a \geq 0$ , la superficie de revolución  $S$  así engendrada puede representarse por la ecuación vectorial  $\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, f(u))$ , donde  $(u, v) \in [a, b] \times [0, 2\pi]$ . Los parámetros  $u, v$  pueden interpretarse como el radio y el ángulo polar como se ve en la figura siguiente.



Si  $a \leq u \leq b$ , todos los puntos  $(x, y, z)$  a una misma distancia  $u$  del eje  $z$ , tienen la misma coordenada  $z$ ,  $f(u)$ , de manera que están todos en la superficie.

Así tenemos que:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos v & \sin v & f'(u) \\ -u \sin v & u \cos v & 0 \end{vmatrix} = (-u f'(u) \cos v, -u f'(u) \sin v, u),$$

por lo que  $\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| = u \sqrt{1 + [f'(u)]^2}$  y el área es (Teorema de Guldin<sup>5</sup>–Pappus<sup>6</sup>):

$$|S| = \int_0^{2\pi} \int_a^b u \sqrt{1 + (f'(u))^2} du dv = 2\pi \int_a^b u \sqrt{1 + (f'(u))^2} du = 2\pi \int_{\Gamma} x ds.$$

En efecto, la integral resultante puede expresarse como  $\int_{\Gamma} x ds$ , que es una integral de línea respecto a la longitud del arco tomada a lo largo de  $\Gamma$ . Como esta integral vale  $\bar{x}\ell$ , donde  $\bar{x}$  es la coordenada  $x$  del centro de gravedad de  $\Gamma$  y  $\ell$  la longitud de  $\Gamma$ , entonces el área de  $S$  es  $2\pi\bar{x}\ell$ .

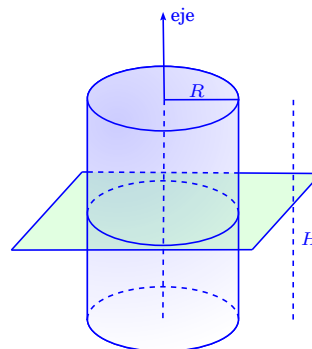
**Ejemplo 1.7.1** La definición de área de una superficie oculta una dificultad, ya que la simple generalización de la definición de longitud de arco no es válida, pues si aproximamos el área mediante superficies poliédricas inscritas, de modo que las dimensiones de las caras de la superficie poliédrica tiendan a cero, el límite de las correspondientes áreas de las superficies poliédricas, puede no existir dependiendo del tipo de superficie poliédrica usada.

---

<sup>5</sup>**Paul Guldin (1577-1643)** Nace el 12 de junio de 1577 en Saint Gall (hoy Saint Gallen), Suiza. Muere el 3 de noviembre de 1643 en Graz, Austria. Paul Guldin se llamaba Habakkuk Guldin. El llegó a ser un orfebre y trabajó en este oficio en su juventud. De origen judío, sus padres eran protestantes, pero Guldin se convirtió al catolicismo a la edad de 20 y se une a los jesuitas. En este momento cambia su nombre a Paul. En 1609 fue mandado al Colegio Jesuita en Roma, donde estudió bajo la dirección de Clavius. Enseñó en el Colegio Jesuita en Roma y cuando volvió a Graz, fue profesor de matemáticas en Viena de 1623 hasta 1637. Guldin mantuvo correspondencia con Kepler, pero en temas religiosos, no matemática ni astronomía. Los trabajos más importantes de Guldin están en 4 volúmenes. En el Volumen I se consideran los centros de la gravedad y en particular discute el centro de la gravedad de la Tierra. El volumen II tiene los teoremas de Guldin.

<sup>6</sup>**Pappus de Alejandría (260- )** Matemático griego que nace y muere en Alejandría, desconociéndose la fecha de su muerte. Junto a Zósimo y Diofanto, formó la retaguardia de la matemática griega. Fue ante todo un recopilador, que resumió toda la matemática griega en ocho libros. Personalmente no añadió nada original, pero su valía radica en que sus libros contienen casi todo lo que hoy sabemos de la matemática griega. Además comentó detalladamente el sistema astronómico.

Consideremos un cilindro regular de radio  $R$  y altura  $H$ . Sea  $\sigma$  la superficie lateral y  $|\sigma|$  el área de la superficie. Se divide  $\sigma$  en partes con ayuda de un sistema equidistante de planos perpendiculares al eje del cilindro, distanciados por  $H/m^3$ . Denotando  $C_1, \dots, C_{m^3}$  los círculos resultantes del corte de los planos en la superficie  $\sigma$ , y partamos el círculo  $C$  con ayuda de  $2m$  partes iguales.

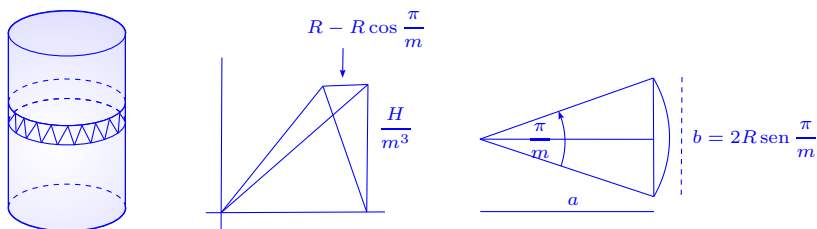


El paso siguiente es eliminar de los círculos  $C_k$  con índice impar, los puntos con índices pares y de los círculos  $C_k$  con índice par, los puntos con índices impares. Así quedan un número finito de puntos marcados sobre la superficie  $\sigma$  y se construye un sistema de triángulos con vértices estos puntos, i.e. se obtiene una superficie  $\sigma_m$  inscrita en  $\sigma$ . Dos puntos de cada triplete pertenece a un mismo círculo  $C_k$  y el tercero pertenece a  $C_{k+1}$  o  $C_{k-1}$ . El número de triángulos es igual a  $2m \cdot m^3 = 2m^4$  y el área de cada triángulo es  $\frac{1}{2} \left( 2R \sin \frac{\pi}{m} \right) \sqrt{R^2 \left( 1 - \cos \frac{\pi}{m} \right)^2 + \left( \frac{H}{m^3} \right)^2} \sim \frac{\pi^3}{2m^3} R^2$  cuando  $m \rightarrow \infty$ . Así  $|\sigma_m| \sim 2m^4 \cdot \frac{\pi^3 R^2}{2m^3} = \pi^3 R^2 m \rightarrow +\infty$ , cuando  $m \rightarrow \infty$ .

Esto nos indica que el área no puede definirse simplemente como el límite del área de la superficie poligonal inscrita, cuando el máximo diámetro tiende a cero.

Este ejemplo es conocido como el ejemplo de Schwarz<sup>7</sup>, quien lo dio a conocer en 1890.

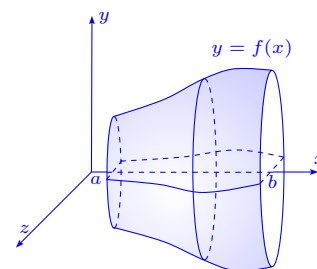
<sup>7</sup>**Hermann Amandus Schwarz (1843-1921)** Nace en Hermsdorf, Silesia (hoy Polonia) y muere en Berlín, Alemania. Schwarz comenzó en Berlín sus estudios en química, pero fue influenciado por Kummer y Weierstrass y se interesa en la geometría. Continuó estudiando en Berlín supervisado por Weierstrass hasta su doctorado (en 1864) sobre superficies mínimas (superficies de menor área), un problema típico del cálculo de variaciones, que estableció un puente entre la teoría de superficies mínimas y la teoría de funciones analíticas. En 1869 fue designado como profesor de matemáticas en el Eidgenössische Technische Hochschule en Zurich y en 1875, aceptó un puesto de Matemáticas en la Universidad de Göttingen. Schwarz dio un método alternativo para resolver el problema de Dirichlet que pronto llegó a ser una técnica usual. Schwarz contestó la pregunta de si una superficie mínima dada rinde realmente un área mínima. Una idea de este trabajo, en que él construyó una función que usa aproximaciones sucesivas, Emile Picard la usó para la prueba de la existencia para soluciones de ecuaciones diferenciales. Contiene también la desigualdad para la integral ahora conocido como “la desigualdad de Cauchy-Schwarz o de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz”. Creó métodos generales basado en su magnífica intuición geométrica. La desigualdad de Cauchy-Schwarz aparece en aritmética, geometría y en las formulaciones teóricas del trabajo de matemáticos tal como Bunyakovsky, Cauchy, Grassmann, von Neumann y Weyl.



**Ejemplo 1.7.2** Se considera  $y = f(x)$  una función continua sobre  $[a, b]$  y se desea calcular el área de la superficie generada al girar el gráfico de  $f(x)$  alrededor del eje  $x$ .

Se define la parametrización  $x = u$ ,  $y = f(u) \sin v$ ,  $z = f(u) \cos v$ , sobre la región  $D: a \leq u \leq b, 0 \leq v \leq 2\pi$ .

Así tenemos  $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = -f(u) \sin v$ ,  $\left| \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right| = f(u) f'(u)$ ,  
 $\left| \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} \right| = f(u) \cos v$  y el área es:



$$\begin{aligned}
 |S| &= \iint_D \sqrt{f(u)^2 \sin^2 v + f(u)^2 f'(u)^2 + f(u)^2 \cos^2 v} \, du \, dv \\
 &= \iint_D |f(u)| \sqrt{1 + f'(u)^2} \, du \, dv = \int_0^{2\pi} \int_a^b |f(u)| \sqrt{1 + f'(u)^2} \, du \, dv \\
 &= 2\pi \int_a^b |f(u)| \sqrt{1 + [f'(u)]^2} \, du.
 \end{aligned}$$

## 1.8 Integral de un campo escalar sobre una superficie

**Definición 1.8.1** Sea  $S$  una superficie regular parametrizada por la función  $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ , donde  $(u, v) \in \mathbb{R}$  abierto medible,  $\mathbf{r}$  de clase  $C^1$  sobre  $\bar{\mathbb{R}}$ , de modo que  $\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| > 0$ , para todo  $(u, v) \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{r}$  es una biyección entre  $\mathbb{R}$  y  $S$ .

Sea  $h(x, y, z)$  una función definida y acotada sobre  $\bar{S}$  se define la integral de superficie de  $h$  sobre  $S$  por:

$$\iint_S h(x, y, z) dS = \iint_{\mathbb{R}} h \circ \mathbf{r}(u, v) \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| \, du \, dv.$$

Si una superficie regular  $S$  está determinada por la ecuación  $z = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}$ ,  $f \in C^1$  sobre  $\bar{\mathbb{R}}$ , se puede parametrizar  $S$  con ayuda de  $x$  y  $y$ :  $x = x$ ,  $y = y$ ,  $z = f(x, y)$ , por lo que

$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right\| = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$ ,  $p = \frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $q = \frac{\partial f}{\partial y}$  y se tiene:

$$\iint_S h(x, y, z) dS = \iint_R h(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy.$$

Si  $S$  es la unión de superficies parametrizadas  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, p$ , que se intersecan a lo sumo en curvas que forman parte de sus fronteras, la integral de  $h$  sobre  $S$  está dada por:

$$\iint_S h dS = \sum_{i=1}^p \iint_{S_i} h dS.$$

**Teorema 1.8.1** Si  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{w}$  son dos funciones regularmente equivalentes y la integral de superficie  $\iint_{\mathbf{r}(R)} f dS$  existe, entonces  $\iint_{\mathbf{w}(R')} f dS$  también existe y se tiene que  $\iint_{\mathbf{r}(R)} f dS = \iint_{\mathbf{w}(R')} f dS$ .

### 1.8.1 Centro de gravedad, momento de inercia

Si un campo escalar  $f$  se interpreta como la densidad (masa por unidad de área) de una lámina delgada adaptada a la superficie  $S$ , la masa  $m$  de la superficie se define por la fórmula  $m = \iint_S f(x, y, z) dS$ .

Su centro de gravedad es el punto  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  determinado por las fórmulas:

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \iint_S x f(x, y, z) dS, \quad \bar{y} = \frac{1}{m} \iint_S y f(x, y, z) dS, \quad \bar{z} = \frac{1}{m} \iint_S z f(x, y, z) dS.$$

El momento de inercia  $I_\ell$  de  $S$  alrededor de un eje  $\ell$  viene dado por:

$$I_\ell = \iint_S \delta^2(x, y, z) f(x, y, z) dS,$$

donde  $\delta(x, y, z)$  representa la distancia de un punto  $(x, y, z)$  de  $S$  a la recta  $\ell$ .

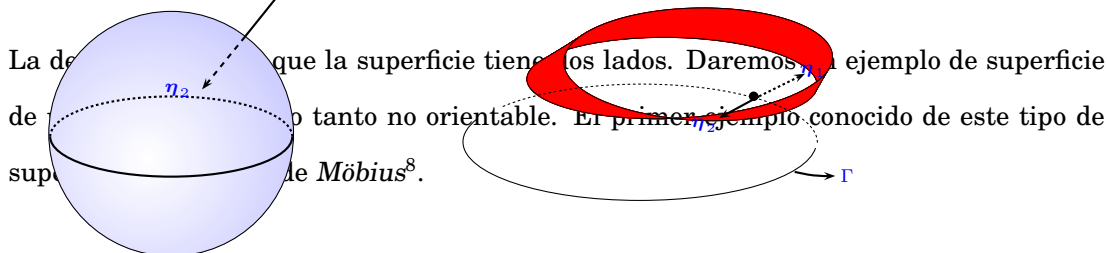
## 1.9 Superficies orientables

Consideremos una superficie  $S$  arbitraria representada por  $\mathbf{r}(u, v) = (x, y, z)$ . La normal a  $S$  en el punto  $(u, v)$  puede escogerse de dos vectores con direcciones opuestas, a saber

$$\boldsymbol{\eta} = \pm \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\|}, \quad (u, v) \in R.$$

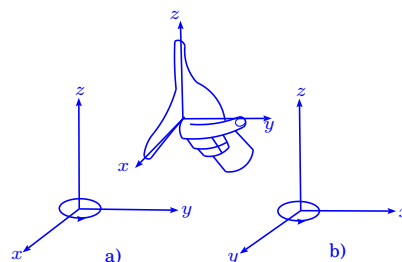
El signo  $+$  corresponde a un lado de la superficie  $S$  (con una familia “continua” de vectores unitarios) y el signo  $-$  corresponde al otro lado de la superficie.

**Definición 1.9.1** Si en cada punto  $(x, y, z)$  de la superficie regular  $S$ , es posible asociarle un vector unitario  $\eta(x, y, z)$ , de modo que como función sea continua sobre toda la superficie  $S$ , entonces se dice que la superficie  $S$  es orientable.



En cada punto  $(x, y, z)$  de la cinta de Möbius hay dos normales  $\eta_1$  y  $\eta_2$ , sin embargo  $\eta_1$  no determina un lado único de la superficie en  $(x, y, z)$ , ni tampoco  $\eta_2$ . Para ver esto “deslizamos”  $\eta_2$  alrededor de una curva cerrada  $\Gamma$ . Cuando  $\eta_2$  regresa al punto de partida coincidiría con  $\eta_1$  y  $\eta_2$  apuntan del mismo lado de  $(x, y, z)$  por lo que la superficie tiene un solo lado. Más adelante volveremos sobre este asunto.

Diremos que el sistema de coordenadas  $xyz$  está orientado positivamente, si se rige por la ley de la mano derecha (sistema a)). En el caso contrario diremos que el sistema está orientado negativamente.



**Definición 1.9.2** Una superficie  $S$  regular a trozos se dice orientable si cada uno de los elementos son regulares orientados y si las direcciones correspondientes en los contornos de los elementos son coherentes en el sentido de que son opuestos entre si a lo largo de toda la frontera común.

La superficie del cubo, es una superficie regular a trozos orientable, compuesta por seis superficies cuadradas que son regulares y orientables.



<sup>8</sup>**August Ferdinand Möbius (1790-1868)** Nace en Schulpforra, Alemania. Hizo estudios de matemática y astronomía en la Universidad de Leipzig, Göttingen y Halle. En 1915, a los 26 años fue designado profesor de Astronomía en Leipzig y dirige la construcción de un observatorio que va a dirigir. Ahí permanece hasta su muerte. Trabajó en mecánica celeste, pero sus investigaciones más importantes fueron sobre temas de Geometría y Teoría de números.

**Definición 1.9.3** Sea  $\mathbf{r}: \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una parametrización de la superficie  $S$  regular orientable, donde  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \neq \mathbf{0}$ , para  $(u, v) \in \mathbb{R}$ .

Sea  $\boldsymbol{\eta}(u, v)$  la normal unitaria, se dice que la parametrización  $\mathbf{r}$  preserva la orientación si  $\frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\|} = \boldsymbol{\eta}(u, v)$  en todo  $(u, v) \in \mathbb{R}$ . En caso contrario se dice que  $\mathbf{r}$  invierte la orientación.

## 1.10 Integral de un campo vectorial sobre una superficie

**Definición 1.10.1** Sea  $\mathbf{f}: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}^3$ , acotado y medible,  $\mathbf{f}$  un campo vectorial de clase  $C^1$  y sea  $S$  una superficie regular parametrizada por la función  $\mathbf{r}(u, v)$ , donde  $(u, v) \in \mathbb{R}$  abierto medible, de modo que  $S \subset \mathbb{T}$ , la integral de la función vectorial  $\mathbf{f}$  sobre la superficie  $S$  se define por:

$$\iint_S \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS = \iint_{\mathbb{R}} \mathbf{f} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \, du \, dv.$$

### 1.10.1 Observaciones sobre las integrales de superficie

Supongamos ahora que  $\mathbf{f} = (P, Q, R)$ ,  $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ , entonces el producto vectorial de  $\mathbf{r}$  está dado por  $\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \left( \left| \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right|, \left| \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right|, \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \right)$ .

Si  $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_1$  la integral de superficie:

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS &= \iint_{\mathbb{R}} P(\mathbf{r}(u, v)) \left| \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right| \, du \, dv + \iint_{\mathbb{R}} Q(\mathbf{r}(u, v)) \left| \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right| \, du \, dv + \\ &\quad \iint_{\mathbb{R}} R(\mathbf{r}(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, du \, dv, \end{aligned}$$

y si  $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_2$ , cada una de las integrales dobles del segundo miembro se reemplaza por su inverso aditivo. Frecuentemente las integrales del segundo miembro se escriben:

$$\iint_S P(x, y, z) \, dy \wedge dz + \iint_S Q(x, y, z) \, dz \wedge dx + \iint_S R(x, y, z) \, dx \wedge dy,$$

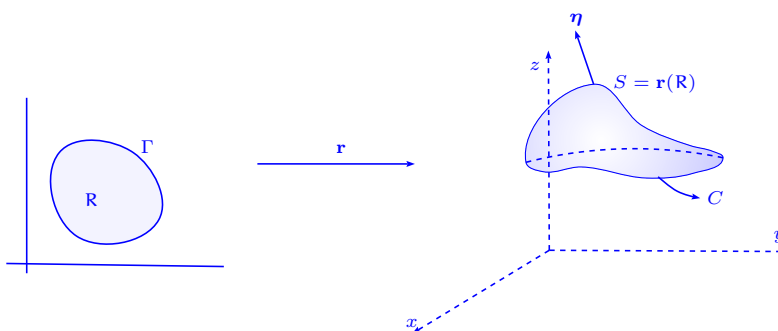
o bien  $\iint_S P \, dy \wedge dz + \iint_S Q \, dz \wedge dx + \iint_S R \, dx \wedge dy$ , con lo cual tenemos que:

$$\iint_S P \, dy \wedge dz = \iint_{\mathbb{R}} P[\mathbf{r}(u, v)] \left| \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right| \, du \, dv, \text{ etc.}$$

Si el vector unitario  $\eta$  se expresa en función de los cosenos directores  $\eta = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ , entonces  $\mathbf{f} \cdot \eta = P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma$  y se tiene:

$$\iint_S \mathbf{f} \cdot \eta \, dS = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) \, dS.$$

**Teorema 1.10.1 Teorema de Stokes**<sup>9</sup> Sea  $S = \mathbf{r}(R)$  una superficie paramétrica regular, donde  $R$  es una región limitada por la curva de Jordan regular a trozos  $\Gamma$ . Supongamos que  $\mathbf{r}$  es una aplicación biyectiva de clase  $C^2$  sobre un abierto  $U \supset R \cup \Gamma$ , sea  $C$  la imagen de  $\Gamma$  por  $\mathbf{r}$  y sean  $P, Q, R$  aplicaciones de clase  $C^1$  sobre  $S$ , entonces:



$$\iint_S \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy = \oint_C P \, dx + Q \, dy + R \, dz,$$

donde la curva  $\Gamma$  se recorre en el sentido positivo y la curva  $C$  en el sentido que resulte de aplicar a  $\Gamma$ , la función  $\mathbf{r}$ .

<sup>9</sup>**Sir George Gabriel Stokes** Nace el 13 agosto de 1819 en Skreen, Condado Sligo, Irlanda. Muere el 1 de febrero de 1903 en Cambridge, Cambridgeshire, Inglaterra.

En 1832, George asistió a escuela en Dublin. Siguió los estudios de la escuela y atrajo la atención del maestro de matemática por su solución de problemas de geométricos. En 1835, a la edad de 16, Stokes fue a Inglaterra y entra al Bristol College de Bristol, donde prepara sus estudios para Cambridge.

En 1845 publica las teorías de la fricción interior de fluidos en movimiento. Quizás el evento más importante en el reconocimiento de Stokes como un matemático importante fue su Informe en investigaciones en hidrodinámica que presentó a la Asociación Británica para el Avance de Ciencia en 1846.

En 1849 Stokes se nombra como profesor de Matemática en Cambridge. En 1851 Stokes se eligió a la Sociedad Real, se le otorgó medalla de esa Sociedad en 1852 y se quedó en la secretaría de la Sociedad en 1854. Fue profesor de Física en la Escuela del Gobierno de Minas en Londres. Stokes recibió la medalla Copley de la Sociedad Real de Londres en 1893. También es conocido por sus importantes aportes a la teoría de series infinitas, al flujo viscoso (ecuaciones de Navier-Stokes), la geodesia y la óptica.

La integral de línea del teorema de Stokes puede escribirse así:

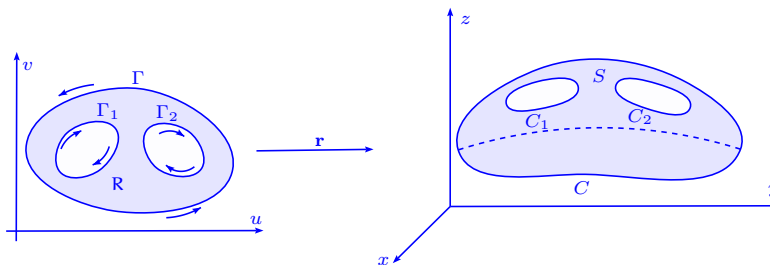
$$\iint_S \text{rot } \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS = \oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}.$$

En el caso en que  $S$  está en el plano  $xy$  y  $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{k}$ , la fórmula se reduce a:

$$\iint_S \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \, dy = \oint_C P \, dx + Q \, dy.$$

### 1.10.2 Extensiones del teorema de Stokes

El teorema de Stokes puede extenderse a superficies regulares simples más generales. Si  $R$  es una región múltiplemente conexa como en la figura abajo (con un número finito de agujeros), la imagen biyectiva  $S = \mathbf{r}(R)$  tendrá el mismo número de agujeros que en  $R$ . Para extenderse el teorema de Stokes a tales superficies seguiremos el mismo tipo de razonamiento que en la demostración precedente, excepto que se usará el teorema de Green para regiones múltiplemente conexas. En lugar de la integral de línea, precisamos una suma de integrales de línea, con signos adecuados, tomadas sobre las imágenes de las curvas que constituyen la frontera de  $S$ .



Si  $S$  tiene dos agujeros como en la figura anterior y las curvas  $\Gamma$ ,  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  se recorren en la dirección indicada, la identidad del teorema de Stokes toma la forma:

$$\iint_S \text{rot } \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS = \oint_C \mathbf{f} \cdot d\mathbf{w} + \oint_{C_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{w}_1 + \oint_{C_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{w}_2,$$

donde  $C$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  son las imágenes de  $\Gamma$ ,  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  respectivamente y  $\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{w}_1$  y  $\mathbf{w}_2$  son las funciones  $\mathbf{w}(t) = \mathbf{r}(\mathbf{g}(t))$ ,  $\mathbf{w}_1(t) = \mathbf{r}(\mathbf{g}_1(t))$ ,  $\mathbf{w}_2(t) = \mathbf{r}(\mathbf{g}_2(t))$ . Las funciones  $\mathbf{g}$ ,  $\mathbf{g}_1$  y  $\mathbf{g}_2$  son las que describen  $\Gamma$ ,  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  en las direcciones inducidas por la aplicación  $\mathbf{r}$  a partir de  $-\Gamma$ ,  $\Gamma_1$ ,

$\Gamma_2$ .

El teorema de Stokes se puede extender a algunas superficies regulares no simples (pero no a todas).

**Definición 1.10.2** Sea  $f$  un campo vectorial sobre un abierto  $R \subset \mathbb{R}^3$ , definimos la divergencia de  $f$  y la denotamos  $\operatorname{div} f$  por la expresión:

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = \nabla \cdot \mathbf{f} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \mathbf{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}.$$

Si  $\nabla \cdot \mathbf{f} = 0$  se dice que un campo vectorial solenoidal. También se dice que el campo vectorial es incompresible.

**Teorema 1.10.2** Sea  $f$  una función escalar de clase  $C^2$ , entonces  $\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$ , es decir que el rotacional de un gradiente es nulo.

### 1.10.3 Teorema de la divergencia (Gauss–Ostrogradski)

El teorema de la divergencia, o de Gauss–Ostrogradski<sup>10</sup>, análogo al teorema de Stokes, da la relación entre una integral extendida a un sólido y una integral de superficie tomada sobre la frontera de ese sólido.

**Teorema 1.10.3** Sea  $V$  un sólido en  $\mathbb{R}^3$  limitado por una superficie orientable  $S$  y sea  $\boldsymbol{\eta}$  la normal unitaria exterior a  $S$ , si  $f$  es un campo vectorial de clase  $C^1$  sobre  $V$ , entonces:

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{f} \, dx \, dy \, dz = \iint_S \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS.$$

---

<sup>10</sup>**Carl Friedrich Gauss (1777-1855)** Nace el 30 de abril 1777 en Brunswick, (hoy Alemania). Muere el 23 de febrero 1855 en Göttingen, Hanover (hoy Alemania). Hijo de un humilde albañil, fue un niño prodigio en matemáticas y continuó siéndolo toda su vida. Su inteligencia llamó la atención del duque de Brunswick, quien decidió costearle todos sus estudios, entrando en 1795 en la Universidad de Göttingen. El día 30 de marzo de 1796 hizo un brillante descubrimiento. Desde hacía más de 2000 años, se sabía como construir con regla y compás el triángulo equilátero, el cuadrado y el pentágono regular (así como algunos otros polígonos regulares cuyos números de lados son múltiplos de dos, de tres o de cinco), pero ningún otro polígono regular con un número primo de lados.

---

Demostró que sólo ciertos polígonos equiláteros se podían construir con ayuda de regla y compás. Hizo una labor importante en la Teoría de Números, sintetizada en su obra “Disquisitiones arithmeticae”. También construyó una geometría no euclídea, basada en axiomas distintos a los de Euclides, pero se negó a publicarla. Lobachevski y Bolyai ostentan el honor de su descubrimiento al publicarla algo más tarde. En 1799 Gauss demostró el teorema fundamental del álgebra.

En 1801 demostró el teorema fundamental de la aritmética: todo número natural se puede representar como el producto de números primos de una y solamente una forma. Fuera del dominio de las matemáticas puras, Gauss ganó gran fama por su labor sobre el planeta Ceres, del que calculó su órbita, siendo nombrado director del observatorio de Göttingen en 1807.

**Mikhail Vasilevich Ostrogradski (1801-1862)** Nace el 24 de setiembre de 1801 en Pashennaya (hoy Poltava), Ucrania. Muere el 1 de enero de 1862 en Poltava (hoy Ucrania). Ostrogradski entró a la Universidad de Kharkov en 1816 y estudia física y matemática. El dejó Rusia para estudiar en París. Entre 1822 y 1827 asistió a las conferencias de Laplace, Fourier, Legendre, Poisson, Binet y Cauchy. Hizo un rápido progreso en París y pronto comenzó a publicar en la Academia de París. Sus trabajos en este tiempo muestran la influencia de los matemáticos en París y escribió en física y cálculo integral. Sus trabajos se incorporaron luego en un trabajo mayor en hidrodinámica que publicó en París en 1832. Otros resultados que obtuvo en este tiempo sobre la teoría de residuos, aparecen en los trabajos de Cauchy. Ostrogradski fue a San Petersburgo en 1828. El presentó tres importantes trabajos en teoría del calor, integrales dobles y teoría de potencial, a la Academia de Ciencias. Fundándose en estos trabajos, fue elegido como académico en la sección de matemática aplicada.

## Capítulo 2

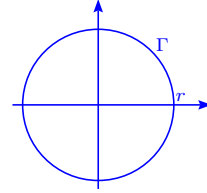
### Ejercicios de integrales de línea

#### 2.1 Longitud de arco

1. Calcular la longitud de arco de la curva  $\mathbf{r}(t) = (r \cos t, r \sin t)$ , para  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

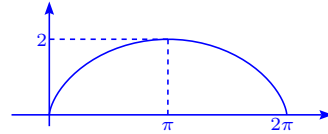
**Solución** Es claro que la longitud de arco es la longitud de la circunferencia de radio  $r$ , i.e.  $2\pi r$ . En efecto:

$$\ell = \int_0^{2\pi} \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r.$$



2. Calcular la longitud de arco, velocidad y rapidez de la cicloide  $(t - \sin t, 1 - \cos t)$ .

**Solución** La curva se describe por  $\mathbf{r}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ , por lo que la velocidad es  $\mathbf{r}'(t) = (1 - \cos t, \sin t)$  y  $\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} = \sqrt{2 - 2 \cos t}$  es la rapidez.



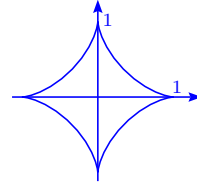
Observemos que la rapidez es variable y vale cero en  $2n\pi$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . La longitud de arco para  $0 \leq u \leq 2\pi$  es:

$$\ell(u) = \int_0^u \sqrt{2 - 2 \cos t} dt = 2 \int_0^u \sqrt{\frac{1 - \cos t}{2}} dt = 2 \int_0^u \sin \frac{t}{2} dt = -4 \cos \frac{t}{2} \Big|_0^u = -4 \cos \frac{u}{2} + 4.$$

La longitud de un ciclo (o sea si  $u = 2\pi$ ), es  $\ell(2\pi) = -4 \cos \pi + 4 = 8$ .

3. Una partícula se mueve sobre el hipocicloide  $x = \cos^3 t$ ,  $y = \sin^3 t$ . Determinar la velocidad y la rapidez.

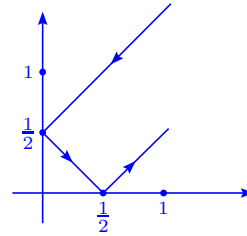
**Solución** El desplazamiento de la partícula está dado por  $\mathbf{r}(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$  y la velocidad es  $\mathbf{r}'(t) = (-3 \cos^2 t \sin t, 3 \sin^2 t \cos t)$ . La rapidez es:



$$\begin{aligned} v(t) &= \|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{9 \cos^4 t \sin^2 t + 9 \sin^4 t \cos^2 t} \\ &= 3|\sin t| |\cos t|. \end{aligned}$$

4. Hallar la longitud de arco de la trayectoria  $\mathbf{r}(t) = (|t|, |t - \frac{1}{2}|, 0)$ ,  $-1 \leq t \leq 1$ .

**Solución** Es importante destacar que  $\mathbf{r}(t)$  no es de clase  $C^1$ , pero si dividimos el dominio en los intervalos  $[-1, 0]$ ,  $[0, \frac{1}{2}]$ ,  $[\frac{1}{2}, 1]$ , cada aplicación  $\mathbf{r}_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3$  definida sobre estos intervalos es de la clase  $C^1$  en cada intervalo y la curva  $\Gamma$  es de la clase  $C^1$  a trozos. De esta forma:



$$\mathbf{r}_1: [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}^3, \mathbf{r}_1(t) = (-t, -t + \frac{1}{2}, 0), \mathbf{r}'_1(t) = (-1, -1, 0);$$

$$\mathbf{r}_2: [0, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^3, \mathbf{r}_2(t) = (t, -t + \frac{1}{2}, 0), \mathbf{r}'_2(t) = (1, -1, 0);$$

$$\mathbf{r}_3: [\frac{1}{2}, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \mathbf{r}_3(t) = (t, t - \frac{1}{2}, 0), \mathbf{r}'_3(t) = (1, 1, 0).$$

La longitud de arco es:

$$\ell = \int_{-1}^1 \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_{-1}^0 \sqrt{2} dt + \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{2} dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{2} dt = \sqrt{2} + \sqrt{2} \frac{1}{2} + \sqrt{2} \frac{1}{2} = 2\sqrt{2}.$$

5. Calcular la longitud de arco de la curva dada por:

a)  $\mathbf{r}(t) = (6t, 3t^2, t^3)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

b)  $\mathbf{r}(t) = (\sin 3t, \cos 3t, 2t^{\frac{3}{2}})$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

c)  $\mathbf{r}(t) = (t, t \sin t, t \cos t)$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ .

d)  $\mathbf{r}(t) = (2t, t, t^2)$ ,  $0 \leq t \leq 2$ .

e)  $\mathbf{r}(t) = (t \sin t, t \cos t, \sqrt{3}t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

f)  $\mathbf{r}(t) = (\sqrt{2}t, e^t, e^{-t})$ ,  $-1 \leq t \leq 1$ .

g)  $\mathbf{r}(t) = (t, t, \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}})$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$ .

**Solución**

a) Tenemos que  $\mathbf{r}'(t) = (6, 6t, 3t^2)$  y

$$\ell = \int_0^1 \sqrt{36 + 36t^2 + 9t^4} dt = 3 \int_0^1 \sqrt{t^4 + 4t^2 + 4} dt = 3 \int_0^1 (t^2 + 2) dt = 3 \left( \frac{t^3}{3} + 2t \right) \Big|_0^1 = 7.$$

b) En este caso  $\mathbf{r}'(t) = (3 \cos 3t, -3 \sin 3t, 3t^{\frac{1}{2}})$  y

$$\ell = \int_0^1 \sqrt{9 + 9t} dt = 3 \int_0^1 \sqrt{1+t} dt = 3 \int_1^2 \sqrt{u} du = 3 \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_1^2 = 2(2\sqrt{2} - 1).$$

c) Se tiene que  $\mathbf{r}'(t) = (1, \sin t + t \cos t, \cos t - t \sin t)$ , por lo que:

$$\begin{aligned} \ell &= \int_0^\pi \sqrt{1 + (\sin t + t \cos t)^2 + (\cos t - t \sin t)^2} dt = \int_0^\pi \sqrt{2 + t^2} dt = \\ &= \left( \frac{t\sqrt{t^2+2}}{2} + \ln(t + \sqrt{t^2+2}) \right) \Big|_0^\pi = \ln(\sqrt{\pi^2+2} + \pi) + \frac{\pi}{2}\sqrt{\pi^2+2} - \frac{1}{2}\ln 2. \end{aligned}$$

d) Es claro que  $\mathbf{r}'(t) = (2, 1, 2t)$  y  $\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{5 + 4t^2}$  i.e.

$$\begin{aligned} \ell &= \int_0^2 2\sqrt{\frac{5}{2} + t^2} dt = \left( t\sqrt{t^2 + \frac{5}{2}} + \frac{5}{2} \ln \left( t + \sqrt{t^2 + \frac{5}{2}} \right) \right) \Big|_0^2 = \\ &= 2\sqrt{\frac{13}{2}} + \frac{5}{2} \ln \left( 4 + \sqrt{\frac{13}{2}} \right) - \frac{5}{4} \ln \frac{5}{2} = \sqrt{26} + \frac{5}{2} \ln(2\sqrt{2} + \sqrt{13}) - \frac{5}{4} \ln 5. \end{aligned}$$

e) Aquí,  $\mathbf{r}'(t) = (\sin t + t \cos t, \cos t - t \sin t, \sqrt{3})$  i.e.

$$\ell = \int_0^1 \sqrt{4 + t^2} dt = \left( \frac{t\sqrt{t^2+4}}{2} + 2 \ln(t + \sqrt{t^2+4}) \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \sqrt{5} + 2 \ln(1 + \sqrt{5}) - 2 \ln 2.$$

f) La trayectoria tiene derivada  $\mathbf{r}'(t) = (\sqrt{2}, e^t, -e^{-t})$ ,  $\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{2 + e^{2t} + e^{-2t}} = e^t + e^{-t}$  y

$$\ell = \int_{-1}^1 (e^t + e^{-t}) dt = (e^t - e^{-t}) \Big|_{-1}^1 = 2(e - e^{-1}).$$

g) La derivada  $\mathbf{r}'(t) = (1, 1, t^{\frac{1}{2}})$  y  $\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{2+t}$ . Así tenemos que:

$$\ell = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{2+t} dt = \frac{2}{3}(2+t)^{\frac{3}{2}} \Big|_{t_0}^{t_1} = \frac{2}{3}((2+t_1)^{\frac{3}{2}} - (2+t_0)^{\frac{3}{2}}).$$

6. Determinar la longitud de arco  $s(t) = \int_a^t \|\mathbf{r}'(t)\| dt$  de las curvas:

a)  $\mathbf{r}(t) = (\cosh t, \sinh t, t)$ ,  $a = 0$

b)  $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ ,  $a = 0$ .

### Solución

a) Dado que  $\mathbf{r}'(t) = (\sinh t, \cosh t, 1)$ ,  $\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{2 \cosh^2 t - 1 + 1} = \sqrt{2} \cosh t$ , entonces:

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{2} \cosh u du = \sqrt{2} \sinh u \Big|_0^t = \sqrt{2} \sinh t.$$

b) Además  $\mathbf{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$ ,  $\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{2}$  y tenemos que  $s(t) = \int_0^t \sqrt{2} du = \sqrt{2}t$ .

7. Calcular la longitud de arco de la curva en los siguientes casos:

a)  $\mathbf{r}(t) = (2t, t^2, \ln t)$ ,  $t > 0$  entre los puntos  $(2, 1, 0)$  y  $(4, 4, \ln 2)$ .

b)  $\mathbf{r}(t) = (t, t \operatorname{sen} t, t \operatorname{cos} t)$  entre  $(0, 0, 0)$  y  $(\pi, 0, -\pi)$ .

### Solución

a) Es claro que  $1 \leq t \leq 2$ , entonces  $\mathbf{r}'(t) = (2, 2t, \frac{1}{t})$ ,  $\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{4 + 4t^2 + \frac{1}{t^2}} = \frac{\sqrt{4t^4 + 4t^2 + 1}}{\sqrt{t^2}} =$

$\frac{2t^2 + 1}{t} = 2t + \frac{1}{t}$ , por lo que:

$$\ell = \int_1^2 (2t + \frac{1}{t}) dt = (t^2 + \ln t) \Big|_1^2 = 4 + \ln 2 - 1 = 3 + \ln 2.$$

b) La variación de  $t$  es  $[0, \pi]$ ,  $\mathbf{r}'(t) = (1, \operatorname{sen} t + t \operatorname{cos} t, \operatorname{cos} t - t \operatorname{sen} t)$ ,  $\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{t^2 + 2}$ , por lo que:

$$\ell = \int_0^\pi \sqrt{2 + t^2} dt = \ln(\sqrt{\pi^2 + 2} + \pi) + \frac{\pi}{2} \sqrt{\pi^2 + 2} - \frac{1}{2} \ln 2,$$

ver ejercicio 5c).

## 2.2 Conjuntos convexos

8. Determinar cuáles de los siguientes conjuntos  $S$  de  $\mathbb{R}^2$  son conexos. Para cada uno explicar, cómo se puede ir de un punto a otro de  $S$  por una curva regular a trazos que los une.

a)  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \geq 0\}$

b)  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 > 0\}$

c)  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 1\}$

d)  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 < x^2 + y^2 < 2\}$

e)  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 > 1 \text{ y } (x - 3)^2 + y^2 > 1\}$

f)  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 1 \text{ o } (x - 3)^2 + y^2 < 1\}$ .

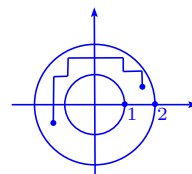
### Solución

a)  $S = \mathbb{R}^2$  es conexo y se puede ir de un punto a otro por una recta.

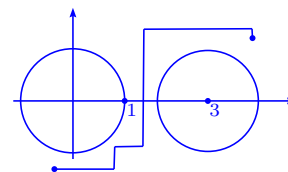
b)  $S = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  es conexo y se puede ir de un punto a otro por una recta, si la recta no pasa por el origen. En tal caso, se unen por una línea quebrada.

c)  $S$  es conexo pues es el interior de un círculo de radio 1 y centro  $(0, 0)$ . Se puede ir de un punto a otro por una recta.

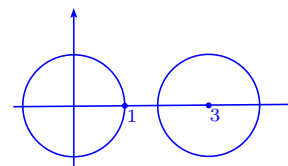
d)  $S$  es conexo y todo punto se puede unir con una línea quebrada que no toque la circunferencia de radio 1 ni la circunferencia de radio 2.



e)  $S$  es conexo y se puede unir todo par de puntos en el plano usando una línea quebrada que no toque los círculos de radio 1 y centro  $(0, 0)$  y  $(3, 0)$ .



f)  $S$  no es conexo. No se puede ir de un punto de círculo de radio 1 y centro  $(0, 0)$ , al círculo de radio 1 y centro  $(3, 0)$ , sin salir de  $S$ .



9. Sea  $f(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$  un campo vectorial en  $\mathbb{R}^2$ , de clase  $C^1$  en un abierto  $S$ . Si  $f$  es el gradiente de un cierto potencial  $\varphi$ , probar que  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  en  $S$ .

**Solución** En efecto, si  $f = \nabla\varphi \in C^1$ , entonces  $\varphi$  es de clase  $C^2$  y se tiene que:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

## 2.3 Integrales de línea

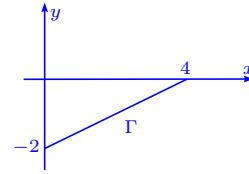
10. Calcular las siguientes integrales de línea:

- $\int_{\Gamma} \frac{ds}{x-y}$ ,  $\Gamma$  segmento de recta  $y = \frac{1}{2}x - 2$ , con  $x \in [0, 4]$ .
- $\int_{\Gamma} xy ds$ ,  $\Gamma$  es el contorno del rectángulo con vértices:  $(0, 0)$ ,  $(4, 0)$ ,  $(4, 2)$ ,  $(0, 2)$ .
- $\int_{\Gamma} y ds$ ,  $\Gamma$  es el arco de la parábola  $y^2 = 2px$ , recortada por la parábola  $x^2 = 2py$ .
- $\int_{\Gamma} (x^2 + y^2)^n ds$ ,  $\Gamma$  es la circunferencia  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$ .
- $\int_{\Gamma} xy ds$ ,  $\Gamma$  es la cuarta parte de la elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , situada en el primer cuadrante.
- $\int_{\Gamma} \sqrt{2y} ds$ ,  $\Gamma$  es el primer arco del cicloide  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$ .

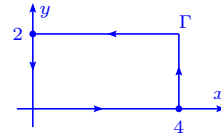
**Solución**

a) Si  $y = \frac{1}{2}x - 2$ ,  $y' = \frac{1}{2}$  i.e.  $\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ,

$$\int_{\Gamma} \frac{ds}{x-y} = \int_0^4 \frac{dx}{2+\frac{1}{2}x} \frac{\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5} \ln \left(2 + \frac{1}{2}x\right) \Big|_0^4 = \sqrt{5} \ln 2.$$



b)  $\int_{\Gamma} xy ds = \int_0^4 x \cdot 0 dx + \int_0^2 4y dy - \int_4^0 2x dx - \int_2^0 0 \cdot y dy =$   
 $2y^2 \Big|_0^2 + x^2 \Big|_0^4 = 8 + 16 = 24.$

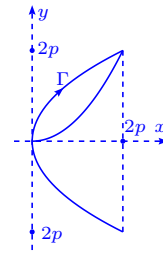


c) La intersección de las curvas  $y^2 = 2px$ ,  $x^2 = \sqrt{2py}$ , ocurre si  $y^2 = 2p\sqrt{2py}$  i.e.  $y^{\frac{3}{2}} = (2p)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow y = 2p$ .

Por otro lado,  $y = \sqrt{2px}$ ,  $y' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2p}{x}} \Rightarrow \sqrt{y'^2+1} = \sqrt{\frac{p+2x}{2x}}$ ,  
 entonces:

$$\int_0^{2p} \sqrt{2px} \frac{\sqrt{p+2x}}{\sqrt{2x}} dx = \sqrt{p} \int_0^{2p} \sqrt{p+2x} dx = \frac{1}{3} \sqrt{p} (p+2x)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{2p} =$$

$$\frac{1}{3} \sqrt{p} \left( (p+4p)^{\frac{3}{2}} - p^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{1}{3} p^2 (5\sqrt{5} - 1).$$



d) La curva  $\Gamma$  está dada por  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$ ,  $\sqrt{x'^2+y'^2} = a$ , entonces:

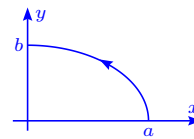
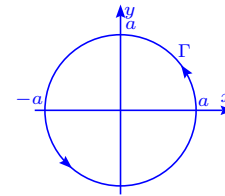
$$\int_{\Gamma} (x^2 + y^2)^n ds = \int_0^{2\pi} a^{2n} a d\theta = 2\pi a^{2n+1}.$$

e) La curva está dada por  $x = a \cos \theta$ ,  $y = b \cos \theta$ ,  
 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  y  $\sqrt{x'^2+y'^2} = \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} =$   
 $\sqrt{b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 \theta}$ , entonces:

$$\int_{\Gamma} xy ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ab \sin \theta \cos \theta \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 \theta} d\theta = \frac{ab}{2} \int_0^1 \sqrt{\alpha + \beta u} du =$$

$$\frac{ab}{3} \frac{(\alpha + \beta u)^{\frac{3}{2}}}{\beta} \Big|_0^1 = \frac{ab}{3\beta} \left( (\alpha + \beta)^{\frac{3}{2}} - \alpha^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{ab}{3(a^2 - b^2)} (a^3 - b^3) = \frac{ab}{3(a+b)} (a^2 + ab + b^2), \text{ donde}$$

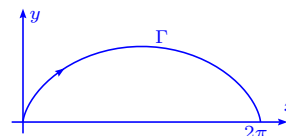
$$\alpha = b^2 \text{ y } \beta = a^2 - b^2.$$



f) Se tiene que  $x'^2 + y'^2 = a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t = 2a^2(1 - \cos t)$ , entonces:

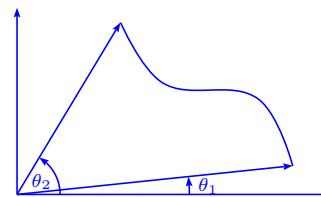
$$\int_{\Gamma} \sqrt{2y} ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{2a(1 - \cos t)} \sqrt{2a} \sqrt{1 - \cos t} dt =$$

$$2a^{\frac{3}{2}} \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) dt = 2a^{\frac{3}{2}} (t - \sin t) \Big|_0^{2\pi} = 4\pi a^{\frac{3}{2}}.$$



11. Deducir la fórmula para calcular la integral  $\int_{\Gamma} f(x, y) ds$  en coordenadas polares, si la curva  $\Gamma$  está dada por  $\rho = \rho(\theta)$ ,  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ .

**Solución** Usando coordenadas polares tenemos  $x = \rho(\theta) \cos \theta$  y  $y = \rho(\theta) \sin \theta$ ,  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ , por lo que  $x'(\theta) = \rho' \cos \theta - \rho \sin \theta$ ,  $y'(\theta) = \rho' \sin \theta + \rho \cos \theta$  i.e.



$$x'^2 + y'^2 = \rho'^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta - 2\rho\rho' \sin \theta \cos \theta + \rho'^2 \sin^2 \theta + \rho^2 \cos^2 \theta + 2\rho\rho' \sin \theta \cos \theta = \rho'^2 + \rho^2,$$

entonces  $\int_{\Gamma} f(x, y) ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\rho(\theta) \cos \theta, \rho(\theta) \sin \theta) \sqrt{\rho'^2 + \rho^2} d\theta.$

12. Calcular las siguientes integrales de línea:

- $\int_{\Gamma} (x - y) ds$ ,  $\Gamma$  es la circunferencia  $x^2 + y^2 = ax$ .
- $\int_{\Gamma} x \sqrt{x^2 - y^2} ds$ ,  $\Gamma$  es la curva dada por la ecuación  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ ,  $x \geq 0$ .
- $\int_{\Gamma} \arctan \frac{y}{x} ds$ ,  $\Gamma$  es la espiral de Arquímedes  $\rho = 2\theta$ , comprendida dentro de un círculo de centro  $(0, 0)$  y radio  $a$ .
- $\int_{\Gamma} \frac{z^2 ds}{x^2 + y^2}$ ,  $\Gamma$  es la primera espira de la hélice  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$ ,  $z = at$ .
- $\int_{\Gamma} xyz ds$ ,  $\Gamma$  es la parte de la circunferencia  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,  $x^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$ , situada en el primer octante.
- $\int_{\Gamma} (2z - \sqrt{x^2 + y^2}) ds$ ,  $\Gamma$  es la primera espira de la curva  $x = t \cos t$ ,  $y = t \sin t$ ,  $z = t$ .
- $\int_{\Gamma} (x + y) ds$ ,  $\Gamma$  es la parte de la circunferencia  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,  $y = x$ , situada en el primer octante.

**Solución**

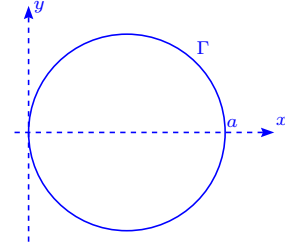
a) Usando coordenadas polares  $x = \rho \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \theta$ ,

la curva se escribe  $\rho = a \cos \theta$ , con  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ . Además

$\rho'^2 + \rho^2 = a^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta = a^2$ , por lo que:

$$\int_{\Gamma} (x - y) ds = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (a \cos^2 \theta - a \sin \theta \cos \theta) a d\theta =$$

$$2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta - \frac{a^2}{2} \sin^2 \theta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2a^2 \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} + 0 = \frac{\pi}{2} a^2.$$



b) Usando a coordenadas polares la curva  $(x^2 + y^2)^2 =$

$a^2(x^2 - y^2)$ ,  $x \geq 0$ , está dada por la ecuación  $\rho =$

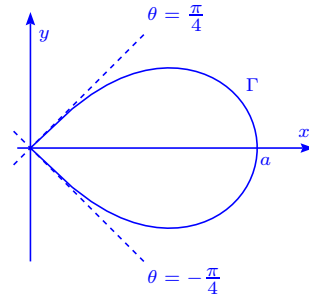
$a\sqrt{\cos 2\theta}$ ,  $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ , entonces  $\rho' = \frac{-a \sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$  i.e.

$\rho'^2 + \rho^2 = \frac{a^2 \sin^2 2\theta}{\cos 2\theta} + a^2 \cos 2\theta = \frac{a^2}{\cos 2\theta}$ . Así:

$$\int_{\Gamma} x \sqrt{x^2 - y^2} ds = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \rho \cos \theta \rho \sqrt{\cos 2\theta} \frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta = a^3 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta \cos \theta d\theta =$$

$$\frac{1}{2} a^3 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos \theta + \cos 3\theta) d\theta = \frac{1}{2} a^3 (\sin \theta + \frac{1}{3} \sin 3\theta) \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = a^3 (\sin \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi}{4}) =$$

$$a^3 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{3} \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{2\sqrt{2}}{3} a^3.$$

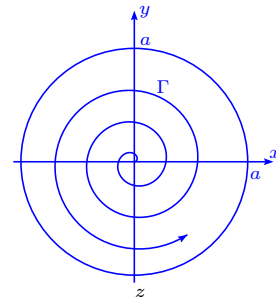


c) Se tiene que  $\rho = 2\theta = a \implies \theta = \frac{a}{2}$  i.e. si se usan

coordenadas polares tenemos ( $\sqrt{\rho'^2 + \rho^2} = \sqrt{4 + 4\theta^2}$ ):

$$\int_{\Gamma} \arctan \frac{y}{x} ds = \int_0^{\frac{a}{2}} 2\theta \sqrt{1 + \theta^2} d\theta = \frac{2}{3} (1 + \theta^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\frac{a}{2}} =$$

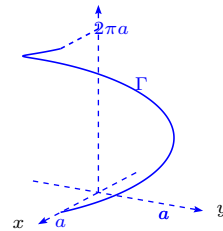
$$\frac{2}{3} \left( \left(1 + \frac{a^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right) = \frac{1}{12} \left( (4 + a^2)^{\frac{3}{2}} - 8 \right).$$



d) Dado  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$ ,  $z = at$ ,  $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 2a^2$ ,

entonces:

$$\int_{\Gamma} \frac{z^2 ds}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{a^2 t^2 \sqrt{2} a}{a^2} dt = \sqrt{2} a \frac{t^3}{3} \Big|_0^{2\pi} = \frac{8\sqrt{2}}{3} a \pi^3.$$



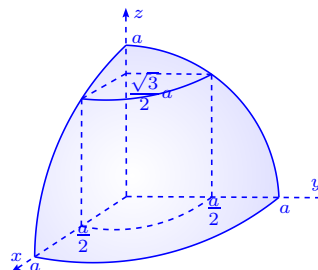
e) Observemos que la intersección (circunferencia) de

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \text{ y } x^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}, \text{ satisface } z^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4}a^2 \text{ i.e. } z = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

La curva es  $(\frac{a}{2} \cos t, \frac{a}{2} \sin t, \frac{\sqrt{3}}{2}a)$ ,  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$  i.e.

$$\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \frac{a}{2}, \text{ por lo que:}$$

$$\int_{\Gamma} xyz \, ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2}{4} \sin t \cos t \frac{\sqrt{3}}{2} a \cdot \frac{a}{2} dt = \frac{\sqrt{3}}{16} a^4 \frac{\sin^2 t}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{32} a^4.$$

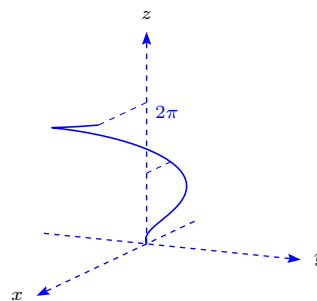


f) La curva  $\Gamma$  es  $(t \cos t, t \sin t, t)$  i.e.  $\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} =$

$$\sqrt{2 + t^2}, \text{ entonces:}$$

$$\int_{\Gamma} (2z - \sqrt{x^2 + y^2}) \, ds = \int_0^{2\pi} (2t - t) \sqrt{2 + t^2} \, dt =$$

$$\frac{1}{3} (2 + t^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{2\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \left( (1 + 2\pi^2)^{\frac{3}{2}} - 1 \right).$$

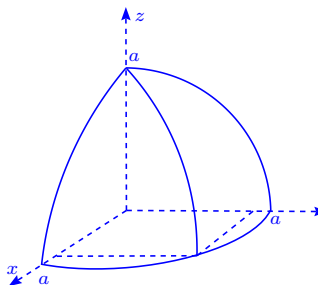


g) La curva intersección se escribe  $(t, t, \sqrt{a^2 - 2t^2})$ , con  $0 \leq$

$$t \leq \frac{a}{\sqrt{2}}, \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{1 + 1 + \frac{4t^2}{a^2 - 2t^2}} = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{a^2 - 2t^2}},$$

por lo tanto:

$$\int_{\Gamma} (x + y) \, ds = \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} 2t \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{a^2 - 2t^2}} \, dt = -\sqrt{2}a \sqrt{a^2 - 2t^2} \Big|_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}a^2.$$



13. Calcular las siguientes integrales curvilíneas:

a)  $\oint_{\Gamma} xy \, ds$ ,  $\Gamma$  es la curva  $|x| + |y| = a$ ,  $a > 0$ .

b)  $\int_{\Gamma} \frac{ds}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$ ,  $\Gamma$  es el segmento de recta que une los puntos  $(0, 0)$  y  $(1, 2)$ .

c)  $\int_{\Gamma} xy \, ds$ ,  $\Gamma$  es la parte de la elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , situada en el primer cuadrante.

d)  $\int_{\Gamma} y^2 \, ds$ ,  $\Gamma$  es el primer arco de cicloide  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$ .

e)  $\int_{\Gamma} \sqrt{x^2 + y^2} \, ds$ ,  $\Gamma$  es el arco de la envolvente de la circunferencia  $x = a(\cos t + t \sin t)$ ,  $y = a(\sin t - t \cos t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

f)  $\int_{\Gamma} (x^2 + y^2)^2 \, ds$ ,  $\Gamma$  es el arco de la espiral logarítmica  $r = ae^{m\varphi}$ ,  $m > 0$ , desde  $(0, a)$  hasta

$(-\infty, 0)$ .

g)  $\oint_{\Gamma} (x+y) ds$ ,  $\Gamma$  es el lazo derecho de la lemniscata  $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ .

h)  $\int_{\Gamma} (x+z) ds$ ,  $\Gamma$  es un arco de la curva  $x = t$ ,  $y = \frac{3}{\sqrt{2}}t^2$ ,  $z = t^3$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

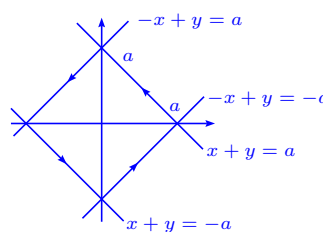
i)  $\int_{\Gamma} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} ds$ ,  $\Gamma$  es la primera esfera de la hélice circular  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$ ,  $z = bt$ .

### Solución

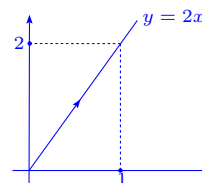
a) La curva  $\Gamma$  está dada por  $|y| = a - |x|$ ,  $|x| \leq a$ . En cada

caso  $y' = \pm 1$ , por lo que  $ds = \sqrt{1 + (y')^2} dx = \sqrt{2} dx$ . De esta manera:

$$\oint_{\Gamma} xy ds = \int_a^0 x(a-x)\sqrt{2} dx + \int_0^{-a} x(x+a)\sqrt{2} dx + \int_{-a}^0 x(-a-x)\sqrt{2} dx + \int_0^a x(x-a)\sqrt{2} dx = 2\sqrt{2} \left( \left( -a\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_a^0 - \left( \frac{x^3}{3} + a\frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^{-a} \right) = 0.$$



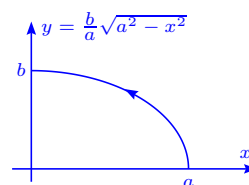
b)  $\int_{\Gamma} \frac{ds}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}} = \int_0^1 \frac{\sqrt{5} dx}{\sqrt{5x^2 + 4}} = \ln(\sqrt{5}x + \sqrt{5x^2 + 4}) \Big|_0^1 = \ln \frac{\sqrt{5} + 3}{2}$ , ya que  $ds = \sqrt{1 + 4} dx = \sqrt{5} dx$ .



c) En este caso  $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ ,  $0 \leq x \leq a$ ,  $\sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{\frac{a^4 + (b^2 - a^2)x^2}{a^2(a^2 - x^2)}}$ , entonces:

$$\int_{\Gamma} xy ds = \int_0^a x \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \frac{\sqrt{a^4 + (b^2 - a^2)x^2}}{a\sqrt{a^2 - x^2}} dx =$$

$$\frac{b}{2a^2} \int_0^a \frac{1}{b^2 - a^2} \sqrt{a^4 + (b^2 - a^2)x^2} 2(b^2 - a^2)x dx = \frac{b}{2a^2(b^2 - a^2)} \frac{2}{3} (a^4 + (b^2 - a^2)x^2)^{3/2} \Big|_0^a = \frac{b}{3a^2(b^2 - a^2)} (a^3b^3 - a^6) = \frac{a^3b(b^3 - a^3)}{3a^2(b^2 - a^2)} = \frac{ab(a^2 + ab + b^2)}{3(b + a)}.$$

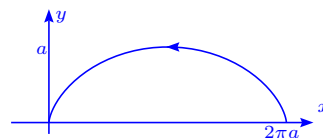


d)  $ds = \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt = a\sqrt{2 - 2\cos t} dt$ ,

entonces  $\int_{\Gamma} y^2 ds = \int_0^{2\pi} a^3 \sqrt{2}(1 - \cos t)^{5/2} dt =$

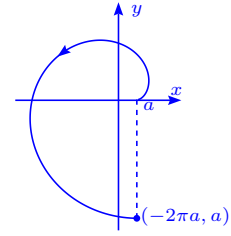
$$\frac{a^3}{2} \int_0^{2\pi} \left| 2 \sin \frac{t}{2} \right|^5 \frac{dt}{2} = 16a^3 \int_0^{\pi} \sin^5 u du =$$

$$32a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 u du = 32a^3 \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{256}{15} a^3, \text{ ya que } \sqrt{2}(1 - \cos t)^{1/2} = 2 \left| \sin \frac{t}{2} \right|.$$



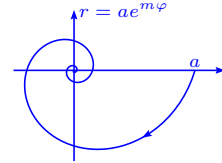
e) Se tiene que  $\sqrt{(x')^2 + (y')^2} = \sqrt{a^2(t \cos t)^2 + a^2(t \sin t)^2} = \sqrt{a^2 t^2} = at$ ,  $x^2 + y^2 = a^2(\cos^2 t + 2t \sin t \cos t + t^2 \sin^2 t + \sin^2 t - 2t \sin t \cos t + t^2 \cos^2 t) = a^2(1 + t^2)$ ; así:

$$\int_{\Gamma} \sqrt{x^2 + y^2} ds = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 \sqrt{1+t^2} 2t dt = \frac{1}{2} a^2 \frac{2}{3} (1+t^2)^{3/2} \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{3} a^2 ((1+4\pi)^{3/2} - 1).$$



f) La espiral se toma para  $\theta \in ]-\infty, 0]$ ,  $(x')^2 + (y')^2 = (ame^{m\theta} \cos \theta - ae^{m\theta} \sin \theta)^2 + (ame^{m\theta} \sin \theta + ae^{m\theta} \cos \theta)^2 = a^2(m^2 e^{2m\theta} + e^{2m\theta}) = a^2 e^{2m\theta} (m^2 + 1)$ , entonces:

$$\int_{\Gamma} (x^2 + y^2)^2 ds = \int_{-\infty}^0 a^4 e^{4m\theta} a e^{m\theta} (m^2 + 1)^{1/2} d\theta = a^5 \sqrt{m^2 + 1} \int_{-\infty}^0 e^{5m\theta} d\theta = \frac{a^5 \sqrt{m^2 + 1}}{5m}.$$



g) En este caso se tiene  $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ ,  $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ ,

$$x = a\sqrt{\cos 2\varphi} \cos \varphi, y = a\sqrt{\cos 2\varphi} \sin \varphi,$$

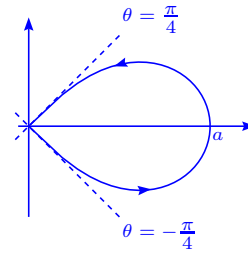
$$(x')^2 + (y')^2 = \left[ \left( -\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \cos \varphi - \sqrt{\cos 2\varphi} \sin \varphi \right)^2 + \right.$$

$$\left. \left( -\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \sin \varphi + \sqrt{\cos 2\varphi} \cos \varphi \right)^2 \right] a^2 = a^2 \left( \frac{\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi} + \cos 2\varphi \right) = a^2 \frac{1}{\cos 2\varphi}, \text{ por lo tanto}$$

$$\sqrt{(x')^2 + (y')^2} = a \frac{1}{\sqrt{\cos 2\varphi}}, \text{ con lo cual la integral:}$$

$$\oint_{\Gamma} (x+y) ds = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a\sqrt{\cos 2\varphi} (\sin \varphi + \cos \varphi) a \frac{1}{\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi = (-a^2 \cos \varphi + a^2 \sin \varphi) \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} =$$

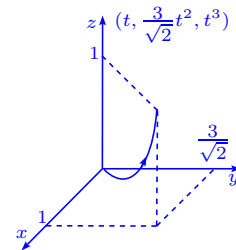
$$a^2 \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) = \sqrt{2} a^2.$$



h) Se tiene que  $\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{1 + 18t^2 + 9t^4}$ , por lo que:

$$\int_{\Gamma} (x+z) ds = \int_0^1 (t+t^3) \sqrt{1+18t^2+9t^4} dt =$$

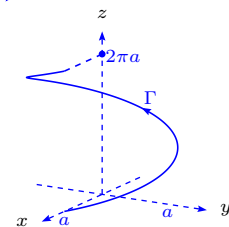
$$\frac{1}{54} (9t^4 + 18t^2 + 1)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{1}{54} ((28)^{3/2} - 1) = \frac{1}{54} (56\sqrt{7} - 1).$$



i) La curva  $\Gamma$  satisface  $\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$ , además

$$\int_{\Gamma} \frac{ds}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{b}{a} \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2 t^2} dt = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b} \frac{1}{a} \arctan \frac{bt}{a} \Big|_0^{2\pi} =$$

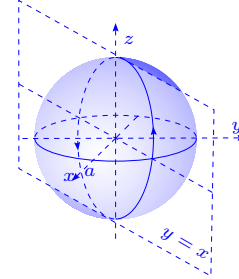
$$\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{ab} \arctan \frac{2\pi b}{a}.$$



14. Calcular  $\oint_{\Gamma} \sqrt{2y^2 + z^2} ds$ , donde  $\Gamma$  es el círculo  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,  $x = y$ .

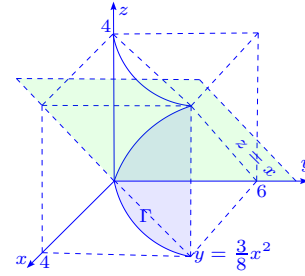
**Solución** El círculo  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,  $x = y$  tiene por ecuación paramétrica  $(a \sin \frac{\pi}{4} \cos \phi, a \cos \frac{\pi}{4} \cos \phi, a \sin \phi)$ , con  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ , entonces  $x'^2 + y'^2 + z'^2 = a^2$ , por lo que:

$$\oint_{\Gamma} \sqrt{2y^2 + z^2} ds = \oint_{\Gamma} a ds = \int_0^{2\pi} a^2 d\phi = 2a^2\pi.$$



15. Hallar el área de la superficie lateral del cilindro parabólico  $y = \frac{3}{8}x^2$ , limitada por los planos  $z = 0$ ,  $x = 0$ ,  $z = x$ ,  $y = 6$ .

**Solución** En general  $\int_{\Gamma} f(x, y) ds$  se puede interpretar geoméricamente como el área de la superficie del cilindro que tiene generatriz paralela al eje  $z$ , cuya base es  $\Gamma$  y de altura  $z = f(x, y)$ . Por esta razón el área es  $\int_{\Gamma} x ds$  en este caso, pues  $f(x, y) = z = x$ .



Además  $x'^2 + y'^2 = 1 + (\frac{3}{4}x)^2 = \frac{16 + 9x^2}{16}$ . Así:

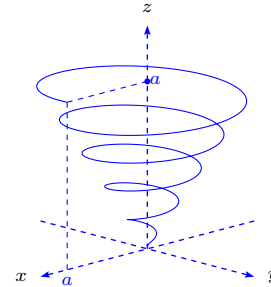
$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{\Gamma} x ds = \frac{1}{4} \int_0^4 x \sqrt{16 + 9x^2} dx = \frac{1}{18 \cdot 4} \frac{2}{3} (16 + 9x^2)^{3/2} \Big|_0^4 = \frac{1}{27 \cdot 4} ((16 + 144)^{3/2} - 16^{3/2}) = \\ &= \frac{16^{3/2}}{4 \cdot 27} (10^{3/2} - 1) = \frac{16}{27} (10\sqrt{10} - 1). \end{aligned}$$

16. Hallar la longitud del arco de la hélice cónica  $x = ae^t \cos t$ ,  $y = ae^t \sin t$ ,  $z = ae^t$  desde el punto  $(0, 0, 0)$  hasta el punto  $(a, 0, a)$ .

**Solución** Para obtener este recorrido necesitamos que

$t \in ]-\infty, 0]$ . Además:

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 + z'^2 &= a^2 e^{2t} ((\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2 + 1) = \\ &= 3a^2 e^{2t}, \text{ entonces } \int_{\Gamma} ds = \int_{-\infty}^0 \sqrt{3} a e^t dt = \sqrt{3} a e^t \Big|_{-\infty}^0 = \\ &= \sqrt{3} a. \end{aligned}$$



17. Calcular la integral de línea con respecto a la longitud de arco en:

a)  $\int_{\Gamma} (x + y) ds$ , siendo  $\Gamma$  el triángulo de vértices  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  y  $(0, 1)$  recorrido en sentido contrario al de las agujas del reloj.

b)  $\int_{\Gamma} y^2 ds$ , donde  $\Gamma$  tiene la ecuación vectorial  $\mathbf{r}(t) = a(t - \text{sen } t, 1 - \text{cos } t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

c)  $\int_{\Gamma} (x^2 + y^2) ds$ , donde  $\Gamma$  tiene la ecuación vectorial  $\mathbf{r}(t) = a(\text{cos } t + t \text{sen } t, \text{sen } t - t \text{cos } t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

d)  $\int_{\Gamma} z ds$ , donde  $\Gamma$  tiene la ecuación vectorial  $\mathbf{r}(t) = (t \text{cos } t, t \text{sen } t, t)$ ,  $0 \leq t \leq t_0$ .

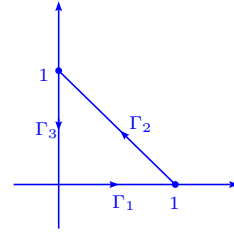
### Solución

a) Se divide el camino en tres:

$\Gamma_1$ ,  $(t, 0)$ , con  $0 \leq t \leq 1$ ;

$\Gamma_2$ ,  $(t, 1 - t)$ , con  $1 \geq t \geq 0$  y

$\Gamma_3$ ,  $(0, t)$ , con  $1 \geq t \geq 0$ , entonces:



$$\int_0^1 t \|(1, 0)\| dt + \int_1^0 1 \|(1, -1)\| dt + \int_1^0 t \|(0, 1)\| dt = \int_0^1 t dt - \int_0^1 \sqrt{2} dt - \int_0^1 t dt = -\sqrt{2}t \Big|_0^1 = -\sqrt{2}.$$

$$\text{b) } \int_0^{2\pi} [a(1 - \text{cos } t)]^2 \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} a^2(1 - \text{cos } t)^2 \|(a - a \text{cos } t, a \text{sen } t)\| dt =$$

$$\int_0^{2\pi} a^2(1 - \text{cos } t)^2 \sqrt{a^2(1 - \text{cos } t)^2 + a^2 \text{sen}^2 t} dt =$$

$$a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \text{cos } t)^2 a \sqrt{(1 - \text{cos } t)^2 + \text{sen}^2 t} dt = a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \text{cos } t)^2 \sqrt{2 - 2 \text{cos } t} dt =$$

$$\sqrt{2} a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \text{cos } t)^{\frac{5}{2}} dt = \sqrt{2} a^3 \left[ \int_0^{\pi} (1 - \text{cos } t)^{\frac{5}{2}} dt + \int_{\pi}^{2\pi} (1 - \text{cos } t)^{\frac{5}{2}} dt \right] =$$

$$\sqrt{2} a^3 \int_0^{\pi} \frac{(1 - \text{cos } t)^2 \text{sen } t}{(1 + \text{cos } t)^{\frac{1}{2}}} dt + \sqrt{2} a^3 \int_{\pi}^{2\pi} \frac{(1 - \text{cos } t)^2 (-\text{sen } t)}{(1 + \text{cos } t)^{\frac{1}{2}}} dt =$$

$$2\sqrt{2} a^3 \int_0^{\pi} \frac{(1 - \text{cos } t)^2 \text{sen } t}{(1 + \text{cos } t)^{\frac{1}{2}}} dt \stackrel{1 - \text{cos } t = u}{=} 2\sqrt{2} a^3 \int_0^2 \frac{-u^2}{(2 - u)^{\frac{1}{2}}} du \stackrel{u = 2 - k}{=} 2\sqrt{2} a^3 \int_0^2 \frac{(2 - k)^2}{k^{\frac{1}{2}}} dk =$$

$$2\sqrt{2} a^3 \int_0^2 \frac{4 - 4k + k^2}{k^{\frac{1}{2}}} dk = 2\sqrt{2} a^3 \left( 8k^{\frac{1}{2}} - \frac{8}{3} k^{\frac{3}{2}} + \frac{2k^{\frac{5}{2}}}{5} \right) \Big|_0^2 = 2\sqrt{2} a^3 \left( 8\sqrt{2} - \frac{16\sqrt{2}}{3} + \frac{8\sqrt{2}}{5} \right) = \frac{256}{15} a^3.$$

$$\text{c) } \int_0^{2\pi} (a^2(\text{cos } t + t \text{sen } t)^2 + a^2(\text{sen } t - t \text{cos } t)^2) \|(a(\text{sen } t + t \text{cos } t - \text{sen } t), a(\text{cos } t - \text{cos } t + t \text{sen } t))\| dt =$$

$$a^2 \int_0^{2\pi} (\text{cos}^2 t + 2t \text{sen } t \text{cos } t + t^2 \text{sen}^2 t + \text{sen}^2 t - 2t \text{sen } t \text{cos } t + t^2 \text{cos}^2 t) \sqrt{a^2 t^2 \text{cos}^2 t + a^2 t^2 \text{sen}^2 t} dt =$$

$$a^3 \int_0^{2\pi} (1 + t^2) \sqrt{t^2} dt = a^3 \int_0^{2\pi} (t + t^3) dt = a^3 \left( \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} = a^3 \left( \frac{(2\pi)^2}{2} + \frac{(2\pi)^4}{4} \right) =$$

$$a^3 \left( \frac{4\pi^2}{2} + \frac{16\pi^4}{4} \right) = a^3 (2\pi^2 + 4\pi^4) = 2\pi^2 a^3 (1 + 2\pi^2).$$

$$\begin{aligned}
 \text{d)} \int_0^{t_0} t \|(\cos t - t \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t + t \cos t, 1)\| dt &= \int_0^{t_0} t \sqrt{(\cos t - t \operatorname{sen} t)^2 + (\operatorname{sen} t + t \cos t)^2 + 1} dt = \\
 &= \int_0^{t_0} t \sqrt{\cos^2 t - 2t \operatorname{sen} t \cos t + t^2 \operatorname{sen}^2 t + \operatorname{sen}^2 t + 2t \operatorname{sen} t \cos t + t^2 \cos^2 t + 1} dt = \\
 &= \int_0^{t_0} t \sqrt{t^2 + 2} dt = \int_2^{t_0^2+2} \frac{\sqrt{u}}{2} du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_2^{t_0^2+2} = \frac{(t_0^2+2)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{2}}{3}.
 \end{aligned}$$

## 2.4 Masa, centros de gravedad, momentos

18. Un alambre uniforme tiene la forma de una porción de curva de intersección de las superficies  $x^2 + y^2 = z$ ,  $y = x$ , que une los puntos  $(0, 0, 0)$  y  $(1, 1, 2)$ . Determinar la coordenada  $\bar{z}$  del centroide.

**Solución** Parametrizando la curva tenemos que:

$$\mathbf{r} = (x, x, 2x^2), 0 \leq x \leq 1, \mathbf{r}' = (1, 1, 4x), \|\mathbf{r}'\| = \sqrt{2 + 16x^2},$$

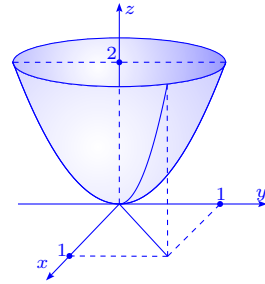
$$m = \int_{\Gamma} ds = \int_0^1 \|\mathbf{r}'(x)\| dx = \int_0^1 \sqrt{2 + 16x^2} dx =$$

$$\frac{1}{4} (\ln(\sqrt{8x^2 + 1} + 2\sqrt{2}x) + 2\sqrt{2}x\sqrt{8x^2 + 1}) \Big|_0^1 =$$

$$\frac{1}{4} (6\sqrt{2} + \ln(2\sqrt{2} + 3)),$$

$$\int_{\Gamma} z ds = \int_0^1 2x^2 \sqrt{2 + 16x^2} dx = \frac{1}{64} (2\sqrt{2}x\sqrt{8x^2 + 1}(16x^2 + 1) - \ln(\sqrt{8x^2 + 1} + 2\sqrt{2}x)) \Big|_0^1 =$$

$$\frac{1}{64} (101\sqrt{2} - \ln(2\sqrt{2} + 3)), \text{ entonces } \bar{z} = \frac{1}{m} \int_{\Gamma} z ds = \frac{101\sqrt{2} - \ln(2\sqrt{2} + 3)}{16(6\sqrt{2} + \ln(2\sqrt{2} + 3))}.$$



19. Calcular la masa  $m$  de un muelle que tiene la forma de la hélice  $\mathbf{r}(t) = (a \cos t, a \operatorname{sen} t, bt)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , si la densidad  $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ . Determinar los centros de gravedad y los momentos de inercia respecto a los ejes coordenados.

**Solución** En este caso tenemos que  $s'(t) = \|\mathbf{r}'(t)\| =$

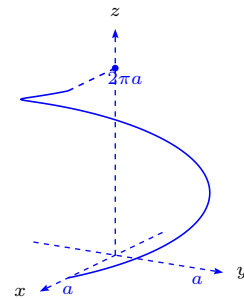
$$\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ y la masa } m = \int_{\Gamma} \rho ds =$$

$$\int_{\Gamma} (x^2 + y^2 + z^2) ds = \int_0^{2\pi} (a^2 \cos^2 t + a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 t^2) \sqrt{a^2 + b^2} dt =$$

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2} (a^2 + b^2 t^2) dt = \sqrt{a^2 + b^2} (a^2 t + \frac{1}{3} b^2 t^3) \Big|_0^{2\pi} =$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} \pi (2a^2 + \frac{8}{3} \pi^2 b^2),$$

$$m\bar{x} = \int_{\Gamma} x \rho ds = \int_0^{2\pi} x(t) (a^2 + b^2 t^2) s'(t) dt = a \int_0^{2\pi} \cos t \sqrt{a^2 + b^2} (a^2 + b^2 t^2) dt =$$



$$a\sqrt{a^2+b^2}(2b^2t \cos t + (b^2t^2 + a^2 - 2b^2) \operatorname{sen} t) \Big|_0^{2\pi} = 4ab^2\pi\sqrt{a^2+b^2}.$$

$$m\bar{y} = \int_{\Gamma} y\rho ds = a \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2+b^2} \operatorname{sen} t(a^2 + b^2t^2) dt =$$

$$(a\sqrt{a^2+b^2}(-(a^2 + b^2(t^2 - 2)) \cos t + 2b^2t \operatorname{sen} t) \Big|_0^{2\pi} = -4ab^2\pi^2\sqrt{a^2+b^2},$$

$$m\bar{z} = \int_{\Gamma} z\rho ds = \sqrt{a^2+b^2} \int_0^{2\pi} bt(a^2 + b^2t^2) dt = \sqrt{a^2+b^2} \left( \frac{1}{2}ba^2t^2 + \frac{1}{4}b^3t^4 \right) \Big|_0^{2\pi} =$$

$$b\sqrt{a^2+b^2}(2\pi^2a^2 + 4\pi^4b^2),$$

$$\text{o sea } \bar{x} = \frac{6ab^2}{3a^2 + 4\pi^2b^2}, \bar{y} = -\frac{6\pi ab^2}{3a^2 + 4\pi^2b^2}, \bar{z} = \frac{3b\pi(a^2 + 2\pi^2b^2)}{3a^2 + 4\pi^2b^2}.$$

$$I_x = \int_{\Gamma} (y^2 + z^2)(x^2 + y^2 + z^2) ds = \int_0^{2\pi} (a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2t^2)(a^2 + b^2t^2)\sqrt{a^2+b^2} dt =$$

$$-\frac{1}{20}\sqrt{a^2+b^2}(5a^2(2b^2t^2 + 2a^2 - b^2) \operatorname{sen} t \cos t - 10a^2b^2t \operatorname{sen}^2 t - t(4b^4t^4 + 10a^2b^2t^2 + 10a^4 + 5a^2b^2)) \Big|_0^{2\pi} = -\frac{1}{10}\pi\sqrt{a^2+b^2}(64\pi^4b^4 + 40a^2b^2\pi^2 + 10a^4 - 5a^2b^2),$$

$$I_y = \int_{\Gamma} (x^2 + z^2)(x^2 + y^2 + z^2) ds = \int_0^{2\pi} (a^2 \cos^2 t + b^2t^2)(a^2 + b^2t^2)\sqrt{a^2+b^2} dt =$$

$$\frac{1}{20}\sqrt{a^2+b^2}(5a^2(2b^2 + t^2 + 2a^2 - b^2) \operatorname{sen} t \cos t - 10a^2b^2t \operatorname{sen}^2 t + t(4b^4t^4 + 10a^2b^2t^2 + 10a^4 + 5a^2b^2)) \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{10}\sqrt{a^2+b^2}\pi(64a^4\pi^4 + 40a^2b^2\pi^2 + 10a^4 + 5a^2b^2).$$

$$I_z = \int_{\Gamma} (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + z^2) ds = \int_0^{2\pi} a^2(a^2 + b^2t^2)\sqrt{a^2+b^2} dt =$$

$$a^2\sqrt{a^2+b^2}(a^2t + \frac{1}{3}b^2t^2) \Big|_0^{2\pi} = a^2\sqrt{a^2+b^2}(2\pi a^2 + \frac{8}{3}\pi^3b^2).$$

20. Hallar la masa de un alambre cuya forma es la curva de la intersección de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  y el plano  $x + y + z = 0$ , si la densidad del alambre en  $(x, y, z)$  es  $x^2$ .

**Solución** Se tiene que la densidad  $\rho(x, y, z) = x^2$  y que  $\Gamma$  es la curva de intersección de las superficies  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  y el plano  $x + y + z = 0$ . Parametrizando  $\Gamma$  tenemos,  $x^2 + y^2 + (-x - y)^2 = 1 \implies 2x^2 + 2y^2 + 2xy = 1$ .

Consideremos la siguiente sustitución  $x = u + v$ ,  $y = u - v$ , entonces  $2(u + v)^2 + 2(u - v)^2 + 2(u + v)(u - v) = 1$ , es decir  $2u^2 + 2v^2 + 2u^2 + 2v^2 + 2u^2 - 2v^2 = 1$ , por lo tanto  $6u^2 + 2v^2 = 1$ .

Si  $\sqrt{6}u = \cos \theta$ ,  $\sqrt{2}v = \operatorname{sen} \theta$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , se tiene que  $x = \frac{\cos \theta}{\sqrt{6}} + \frac{\operatorname{sen} \theta}{\sqrt{2}}$ ,  $y = \frac{\cos \theta}{\sqrt{6}} - \frac{\operatorname{sen} \theta}{\sqrt{2}}$ ,  $z = -(x + y) = -\frac{2\cos \theta}{\sqrt{6}}$ , por lo tanto  $\mathbf{r}(\theta) = \left( \frac{\cos \theta}{\sqrt{6}} + \frac{\operatorname{sen} \theta}{\sqrt{2}}, \frac{\cos \theta}{\sqrt{6}} - \frac{\operatorname{sen} \theta}{\sqrt{2}}, -\frac{2\cos \theta}{\sqrt{6}} \right) \implies$

$$\mathbf{r}'(\theta) = \left( -\frac{\operatorname{sen} \theta}{\sqrt{6}} + \frac{\cos \theta}{\sqrt{2}}, -\frac{\operatorname{sen} \theta}{\sqrt{6}} - \frac{\cos \theta}{\sqrt{2}}, \frac{2\operatorname{sen} \theta}{\sqrt{6}} \right) \implies \|\mathbf{r}'(\theta)\|^2 = 2\frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{6} + 2\frac{\cos^2 \theta}{2} + \frac{4}{6}\operatorname{sen}^2 \theta =$$

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ ,  $\|\mathbf{r}'(\theta)\| = 1$ . Por lo tanto  $ds = d\theta$  y

$$\begin{aligned} M &= \int_{\Gamma} \rho ds = \int_0^{2\pi} \left( \frac{\cos \theta}{\sqrt{6}} + \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \right)^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \left( \frac{\cos^2 \theta}{6} + \frac{\sin^2 \theta}{2} + \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{12}} \right) d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{1 + \cos 2\theta}{12} + \frac{1 - \cos 2\theta}{4} + \frac{\sin 2\theta}{\sqrt{12}} \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{4 - 2 \cos 2\theta}{12} d\theta + \frac{1}{\sqrt{12}} \int_0^{2\pi} \sin 2\theta d\theta = \\ &= \frac{1}{3}(2\pi) - \frac{1}{6} \int_0^{2\pi} \cos 2\theta d\theta + \frac{1}{\sqrt{12}} \cdot 0 = \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{6} \cdot 0 = \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

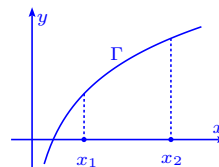
21. Determinar la masa de la curva  $y = \ln x$  comprendida entre los puntos  $x_1$  y  $x_2$ , si la densidad de la curva en cada punto es igual al cuadrado de la abscisa del punto.

**Solución** La densidad  $\gamma = x^2$ . La curva  $\Gamma$  se escribe:

$(x, \ln x)$  i.e.  $\sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2}}$ . La masa

está dada por:

$$m = \int_{\Gamma} \gamma ds = \int_{\Gamma} x^2 ds = \int_{x_1}^{x_2} x \sqrt{x^2 + 1} dx = \frac{1}{3} (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{3} \left( (x_2^2 + 1)^{\frac{3}{2}} - (x_1^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \right).$$



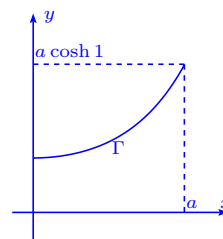
22. Determinar la masa de un fragmento de la catenaria  $y = a \cosh \frac{x}{a}$  entre los puntos cuyas abscisas son  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = a$ , si la densidad de la curva en cada punto es inversamente proporcional a la ordenada del punto, con la densidad  $\delta$  en el punto  $(0, a)$ .

**Solución** La densidad  $\gamma = \frac{\alpha}{y}$ , con  $\gamma(0, a) = \frac{\alpha}{a} = \delta$  i.e.  $\alpha = a\delta$ ,

o sea  $\gamma = \frac{a\delta}{y}$ . Además,  $y' = \sinh \frac{x}{a}$  y  $\sqrt{1 + y'^2} = \cosh \frac{x}{a}$ ; así

tenemos:

$$m = \int_{\Gamma} \frac{a\delta}{y} ds = a\delta \int_0^a \frac{\cosh \frac{x}{a}}{a \cosh \frac{x}{a}} dx = a\delta.$$

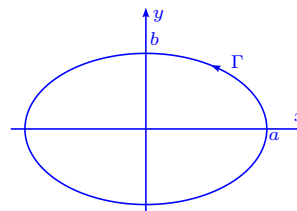


23. Calcular la masa de la parte de la elipse  $x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$ ,  $a > b$ , situada en el primer cuadrante, si la densidad en cada punto es igual a la ordenada del punto.

**Solución** La densidad es  $\gamma = y$  y tenemos que  $\sqrt{x'^2 + y'^2} =$

$\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}$ , entonces la masa es:

$$\begin{aligned} m &= \int_{\Gamma} y ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} b \sin t \sqrt{a^2 + (b^2 - a^2) \cos^2 t} dt \\ &= b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 t} \frac{\sqrt{a^2 - b^2} \sin t}{\sqrt{a^2 - b^2}} dt \end{aligned}$$

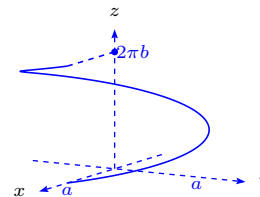


$$\begin{aligned}
 &= b \int_{\sqrt{a^2-b^2}}^0 \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2-b^2}} (-dx) = \frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}} \left( \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \arcsen \frac{x}{a} \right) \Big|_0^{\sqrt{a^2-b^2}} \\
 &= \frac{b^2}{2} + \frac{a^2 b}{\sqrt{a^2-b^2}} \arcsen \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}.
 \end{aligned}$$

24. Calcular la masa de la primera espira de la hélice  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$ ,  $z = bt$ , cuya densidad en cada punto es igual al cuadrado del radio polar en ese punto.

**Solución** La curva satisface  $\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$  y la densidad es  $\gamma = a^2 + b^2 t^2$ , entonces:

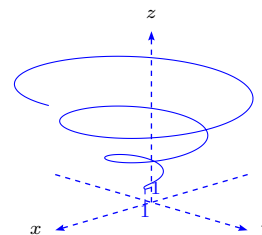
$$\int_0^{2\pi} (a^2 + b^2 t^2) \sqrt{a^2 + b^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2} (2\pi a^2 + \frac{8}{3} \pi^3 b^2).$$



25. Calcular la masa del arco de la curva  $x = e^t \cos t$ ,  $y = e^t \sin t$ ,  $z = e^t$ , desde  $t = 0$  hasta un punto arbitrario, si la densidad es inversamente proporcional al cuadrado del radio polar y en el punto  $(1, 0, 1)$  es igual a 1.

**Solución** La densidad es  $\gamma = \alpha(e^{2t} + e^{2t})^{-1} = \frac{\alpha}{2e^{2t}}$ , con  $\gamma(1, 0, 1) = \frac{\alpha}{2} = 1 \implies \alpha = 2$ , o sea  $\gamma = e^{-2t}$ . Además,  $x'^2 + y'^2 + z'^2 = (e^t \cos t - e^t \sin t)^2 + (e^t \sin t + e^t \cos t)^2 + e^{2t} = 3e^{2t}$  entonces:

$$m = \int_{\Gamma} \gamma ds = \int_0^t e^{-2u} \sqrt{3e^{2u}} du = \sqrt{3} \int_0^t e^{-u} du = \sqrt{3}(1 - e^{-t}).$$



26. Determinar las coordenadas del centro de gravedad de la primera semi-espira de la hélice  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$ ,  $z = bt$ , si la densidad  $\gamma$  es constante.

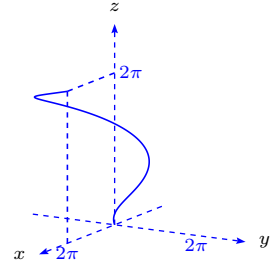
**Solución** Se tiene que  $\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$ , entonces:

$$\begin{aligned}
 m &= \int_{\Gamma} \gamma ds = \int_0^{\pi} \gamma \sqrt{a^2 + b^2} dt = \pi \gamma \sqrt{a^2 + b^2}, \\
 \bar{x} &= \frac{1}{m} \int_0^{\pi} a \cos t \gamma \sqrt{a^2 + b^2} dt = 0, \\
 \bar{y} &= \frac{1}{m} \int_0^{\pi} a \sin t \gamma \sqrt{a^2 + b^2} dt = \frac{a \gamma \sqrt{a^2 + b^2} \cdot 2}{\pi \gamma \sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{2a}{\pi}, \\
 \bar{z} &= \frac{1}{m} \int_0^{\pi} \gamma \sqrt{a^2 + b^2} b t dt = \frac{b \gamma \sqrt{a^2 + b^2}}{\pi \gamma \sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{\pi^2}{2} = \frac{b\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

27. Calcular el momento estático de la primera espira de la curva helicoidal cónica  $x = t \cos t$ ,  $y = t \sin t$ ,  $z = t$ , con respecto al plano  $xy$ , considerando la densidad proporcional al cuadrado del punto desde el plano  $xy$ .

**Solución** La densidad  $\gamma = kz^2$ ,  $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 2 + t^2$ , entonces:

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \int_{\Gamma} z\gamma ds = \int_{\Gamma} kz^3 ds = k \int_0^{2\pi} t^3 \sqrt{2+t^2} dt \\ &= k \left( \frac{(2+t^2)^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{2}{3}(2+t^2)^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= k \left( (2+4\pi^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \left( \frac{2+4\pi^2}{5} - \frac{2}{3} \right) + 2^{\frac{3}{2}} \left( \frac{2}{3} - \frac{2}{5} \right) \right) \\ &= k \left( 2\sqrt{2}(2\pi^2+1)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{6+12\pi^2-10}{15} + 2\sqrt{2} \cdot \frac{10-6}{15} \right) = k \cdot \frac{8\sqrt{2}}{15} \left( (2\pi^2+1)^{\frac{3}{2}} \cdot (3\pi^2-1) + 1 \right). \end{aligned}$$



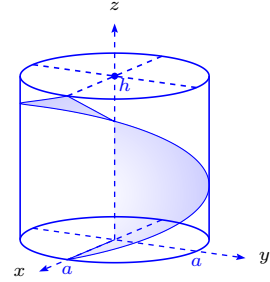
28. Calcular los momentos de inercia con respecto a los ejes de coordenadas de la primera esfera de la hélice  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$ ,  $z = \frac{h}{2\pi}t$ .

**Solución** Tomamos la densidad  $\gamma = 1$ ;

$$\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{a^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}}, \text{ entonces:}$$

$$\begin{aligned} I_x = I_y &= \int_{\Gamma} (x^2 + z^2) ds \\ &= \int_0^{2\pi} \left( a^2 \cos^2 t + \frac{h^2}{4\pi^2} t^2 \right) \cdot \frac{\sqrt{4a^2\pi^2 + h^2}}{2\pi} dt \\ &= \frac{\sqrt{4a^2\pi^2 + h^2}}{2\pi} \left( a^2 4 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{h^2}{4\pi^2} \cdot \frac{(2\pi)^3}{3} \right) = \left( \frac{a^2}{2} + \frac{1}{3}h^2 \right) \sqrt{4a^2\pi^2 + h^2} \end{aligned}$$

$$I_z = \int_{\Gamma} (x^2 + y^2) ds = \int_0^{2\pi} \frac{a^2 \sqrt{4a^2\pi^2 + h^2}}{2\pi} dt = a^2 \sqrt{4a^2\pi^2 + h^2}.$$



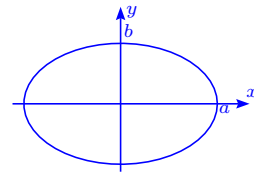
29. Determinar la masa del contorno de la elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , si su densidad lineal en cada punto  $(x, y)$  es igual a  $|y|$ .

**Solución** Usando la representación paramétrica  $x =$

$$a \cos t, y = b \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi \text{ se tiene que } \sqrt{x'^2 + y'^2} =$$

$$\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}, \text{ entonces:}$$

$$\begin{aligned} m &= \oint_{\Gamma} |y| ds = \int_0^{2\pi} b |\sin t| \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = \\ &= 4b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 t} (-\sin t) dt \stackrel{u=\cos t}{=} -4b \int_1^0 \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)u^2} du = \\ &= 4b \left( u \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)u^2} \right) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{-u^2(a^2 - b^2) + a^2 - a^2}{\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)u^2}} du = \\ &= 4b \left( b - \int_0^1 \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)u^2} du + \int_0^1 \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)u^2}} du \right) \text{ y como la integral se repite,} \end{aligned}$$



pasamos a sumar y dividiendo por dos tenemos:

$$m = 4b \int_0^1 \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)u^2} du = 2b \left( b + \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \operatorname{arcsen} \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} u \Big|_0^1 \right) =$$

$$2 \left( b^2 + \frac{a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arcsen} \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \right).$$

30. Hallar la masa de la primera espira de la hélice circular  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$ ,  $z = bt$ , si la densidad en cada punto es igual a  $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

**Solución** Se tiene que  $\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$  y  $\delta(x, y, z) = \sqrt{a^2 + b^2 t^2}$ , entonces:

$$m = \int_{\Gamma} \delta ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{a^2 + b^2 t^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2} \left( t \sqrt{a^2 + b^2 t^2} \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{t^2 b^2 dt}{\sqrt{a^2 + b^2 t^2}} \right) =$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} \left( 2\pi \sqrt{a^2 + 4\pi^2 b^2} - \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2 t^2} dt + \frac{1}{b} \int_0^{2\pi} \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 t^2}} \right)$$

y como la integral se repite, pasamos a sumar y dividiendo por dos tenemos:

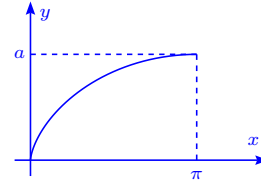
$$m = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2} \left( 2\pi \sqrt{a^2 + 4\pi^2 b^2} + \frac{a^2}{b} \ln |bt + \sqrt{b^2 t^2 + a^2}| \Big|_0^{2\pi} \right) =$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} \left( \pi \sqrt{a^2 + 4\pi^2 b^2} + \frac{a^2}{2b} \ln \frac{2b\pi + \sqrt{a^2 + 4\pi^2 b^2}}{a} \right).$$

31. Determinar las coordenadas del centro de gravedad del semi-arco de la cicloide, dada por  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ .

**Solución** En este problema tenemos que  $\sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} = a\sqrt{2(1 - \cos t)}$ . Además:

$$m = \int_{\Gamma} ds = \int_0^{\pi} 2a \sin \frac{t}{2} dt = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta = 4a,$$



ya que  $\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos t} = 2|\sin \frac{t}{2}|$ .

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \int_{\Gamma} x ds = \frac{1}{m} a^2 \int_0^{\pi} (t - \sin t) 2 \sin \frac{t}{2} dt = \frac{2a^2}{m} \int_0^{\pi} \left( t \sin \frac{t}{2} - 2 \sin^2 \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} \right) dt =$$

$$\frac{4a^2}{m} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2y \sin y dy - \frac{2}{3} \sin^3 y \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{8a^2}{4a} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} y \sin y dy - \frac{1}{3} \right) =$$

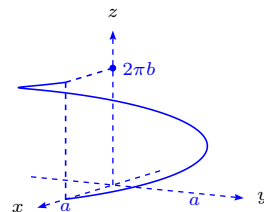
$$2a \left( -y \cos y \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos y dy - \frac{1}{3} \right) = 2a \frac{2}{3} = \frac{4}{3} a.$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m} \int_0^{\pi} \frac{a^2}{2} (\sqrt{2}(1 - \cos t))^{3/2} dt = \frac{a^2}{m} \int_0^{\pi} 8 \sin^3 \frac{t}{2} \frac{dt}{2} = \frac{8a^2}{4a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 y dy = 2a \frac{2}{3} = \frac{4}{3} a.$$

32. Determinar el momento de inercia con respecto al eje  $z$ , de la primera espira de la hélice circular  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$ ,  $z = bt$ .

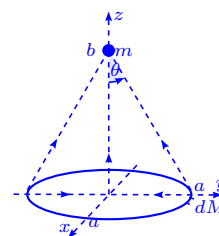
**Solución** Sabemos que  $\sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$ , por lo que:

$$I_z = \int_{\Gamma} (x^2 + y^2) ds = \int_0^{2\pi} a^2 \sqrt{a^2 + b^2} dt = 2\pi a^2 \sqrt{a^2 + b^2}.$$



33. Calcular la fuerza con que la masa  $M$  distribuida con densidad constante en la circunferencia  $x^2 + y^2 = a^2$ ,  $z = 0$ , influye sobre una masa  $m$  situada en el punto  $(0, 0, b)$ .

**Solución** Observemos que el efecto de la atracción sobre el plano  $xy$  es nulo, por lo que  $dF = \frac{GmdM}{a^2 + b^2} \cos \theta = \frac{GmbdM}{\sqrt{(a^2 + b^2)^3}}$ , entonces la fuerza de atracción es la integral de línea sobre la circunferencia  $\Gamma : x^2 + y^2 = a^2$ , es decir:



$$F = \int_{\Gamma} \frac{Gmb}{\sqrt{(a^2 + b^2)^3}} dM = \frac{Gmb}{\sqrt{(a^2 + b^2)^3}} \int_{\Gamma} dM = \frac{GMmb}{\sqrt{(a^2 + b^2)^3}}.$$

34. Consideremos un alambre semicircular uniforme de radio  $a$ .

a) Demostrar que el centroide está situado en el eje de simetría a una distancia  $\frac{2a}{\pi}$  del centro.

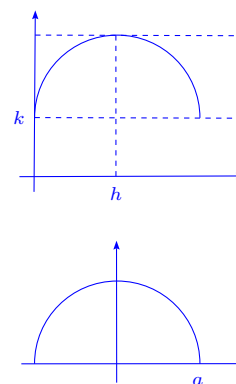
b) Demostrar que el momento de inercia respecto al diámetro que pasa por los extremos del alambre es  $\frac{1}{2}Ma^2$ , siendo  $M$  la masa del alambre.

**Solución**

a) Dado que el alambre es un semicírculo, tomemos como su ecuación  $(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2$  y definimos  $x - h = a \cos \theta$ ,  $y - k = a \sin \theta$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ , con  $(h, k)$  el centro del círculo, o sea  $x = a \cos \theta + h$ ,  $y = a \sin \theta + k$ . Así,  $\mathbf{r}'(\theta) = (-a \sin \theta, a \cos \theta)$ ,  $\|\mathbf{r}'(\theta)\| = a$  y  $M = \int_0^{\pi} \gamma a d\theta = \gamma a \pi$ ,

$$\bar{x} = \frac{1}{\gamma a \pi} \int_0^{\pi} (a \cos \theta + h) \gamma a d\theta = \frac{\gamma a}{\gamma a \pi} \int_0^{\pi} (a \cos \theta + h) d\theta = \frac{1}{\pi} (\sin \theta + h\theta) \Big|_0^{\pi} = h,$$

$$\bar{y} = \frac{1}{\gamma a \pi} \int_0^{\pi} (a \sin \theta + k) \gamma a d\theta = \frac{\gamma a}{\gamma a \pi} \int_0^{\pi} (a \sin \theta + k) d\theta = \frac{1}{\pi} (-a \cos \theta + k\theta) \Big|_0^{\pi} = \frac{2a}{\pi} + k,$$



entonces el centroide es  $(h, \frac{2a}{\pi} + k)$ , que se encuentra sobre el eje de simetría a una distancia de  $\frac{2a}{\pi}$  del centro.

b) El diámetro que pasa por los extremos del alambre tiene como ecuación  $y = k$ . Por lo que la distancia de un punto a este eje es  $a \operatorname{sen} \theta$ , con lo cual:

$$I_k = \int_0^\pi (a \operatorname{sen} \theta)^2 \gamma a d\theta = \gamma a^3 \int_0^\pi \operatorname{sen}^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \gamma a^3 (\theta - \cos \theta \operatorname{sen} \theta) \Big|_0^\pi = \frac{1}{2} \gamma a^3 \pi = \frac{1}{2} M a^2.$$

35. Un alambre tiene la forma de un círculo  $x^2 + y^2 = a^2$ . Determine su masa y su momento de inercia con respecto a un diámetro, si la densidad en  $(x, y)$  es  $|x| + |y|$ .

**Solución** Parametricemos la circunferencia por  $x = a \cos t$ ,  $y = a \operatorname{sen} t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , entonces la masa es:

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{2\pi} (|a \cos t| + |a \operatorname{sen} t|) \|(-a \operatorname{sen} t, a \cos t)\| dt = \\ &= \int_0^{2\pi} a(|\cos t| + |\operatorname{sen} t|) \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 t + a^2 \cos^2 t} dt = \int_0^{2\pi} a^2 (|\cos t| + |\operatorname{sen} t|) dt = \\ &= a^2 \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t + \operatorname{sen} t) dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (-\cos t + \operatorname{sen} t) dt + \int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} -(\operatorname{sen} t + \cos t) dt + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} (\cos t - \operatorname{sen} t) dt \right) = \\ &= a^2 \left( (\operatorname{sen} t - \cos t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (-\operatorname{sen} t - \cos t) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^\pi + (-\operatorname{sen} t + \cos t) \Big|_\pi^{\frac{3\pi}{2}} + (\operatorname{sen} t + \cos t) \Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \right) = 8a^2. \end{aligned}$$

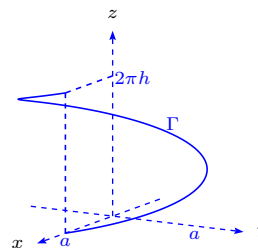
Ahora el momento de inercia lo tomamos con respecto al diámetro que pasa por el eje  $x$ .

La distancia de un punto a este eje es  $a \operatorname{sen} t$  i.e.

$$\begin{aligned} I_x &= \int_0^{2\pi} (a \operatorname{sen} t)^2 a (|\cos t| + |\operatorname{sen} t|) \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 t + a^2 \cos^2 t} dt = a^4 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t (|\cos t| + |\operatorname{sen} t|) dt = \\ &= a^4 \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen}^2 t \cos t + \operatorname{sen}^3 t) dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (-\operatorname{sen}^2 t \cos t + \operatorname{sen}^3 t) dt + \int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} (-\operatorname{sen}^2 t \cos t - \operatorname{sen}^3 t) dt + \right. \\ &\quad \left. \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} (\operatorname{sen}^2 t \cos t - \operatorname{sen}^3 t) dt \right) = \\ &= a^4 \left( \left( \frac{1}{3} \operatorname{sen}^3 t - \cos t + \frac{1}{3} \cos^3 t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \left( -\frac{1}{3} \operatorname{sen}^3 t - \cos t + \frac{1}{3} \cos^3 t \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^\pi + \left( -\frac{1}{3} \operatorname{sen}^3 t + \cos t - \frac{1}{3} \cos^3 t \right) \Big|_\pi^{\frac{3\pi}{2}} + \right. \\ &\quad \left. \left( \frac{1}{3} \operatorname{sen}^3 t + \cos t - \frac{1}{3} \cos^3 t \right) \Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \right) = 4a^4. \end{aligned}$$

## 2.5 Integrales de línea de campos vectoriales

36. Calcular la integral de línea del vector  $\mathbf{r}$  a lo largo de una espira de la hélice circular  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$ ,  $z = ht$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .



**Solución** En este caso se tiene que:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} (-a^2 \cos t \sin t + a^2 \sin t \cos t + h^2 t) dt = \frac{1}{2} h^2 t^2 \Big|_0^{2\pi} = 2\pi^2 h^2.$$

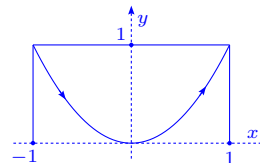
37. Calcule la integral de línea del campo vectorial  $\mathbf{f}$  a lo largo de la curva indicada:

- a)  $\mathbf{f}(x, y) = (x^2 - 2xy, y^2 - 2xy)$ ,  $y = x^2$  desde  $(-1, 1)$  a  $(1, 1)$ .
- b)  $\mathbf{f}(x, y) = (2a - y, x)$ ,  $\mathbf{r}(t) = a(t - \sin t, 1 - \cos t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .
- c)  $\mathbf{f}(x, y, z) = (y^2 - z^2, 2yz, -x^2)$ ,  $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^3)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .
- d)  $\mathbf{f}(x, y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$ ,  $y = 1 - |1 - x|$  de  $(0, 0)$  a  $(2, 0)$ .
- e)  $\mathbf{f}(x, y) = (x + y, x - y)$ , la elipse  $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ , en sentido contrario a las agujas del reloj.
- f)  $\mathbf{f}(x, y, z) = (2xy, x^2 + z, y)$ , desde  $(1, 0, 2)$  a  $(3, 4, 1)$  a lo largo del segmento de recta que los une.
- g)  $\mathbf{f}(x, y, z) = (x, y, xz - y)$ , desde  $(0, 0, 0)$  a  $(1, 2, 4)$ , a lo largo de un segmento rectilíneo que los une.
- h)  $\mathbf{f}(x, y, z) = (x, y, xz - y)$ , a lo largo del camino dado por  $\mathbf{r}(t) = (t^2, 2t, 4t^3)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

**Solución**

a) Sea  $\mathbf{r}(t) = (t, t^2)$ ,  $\mathbf{r}(-1) = (-1, 1)$  y  $\mathbf{r}(1) = (1, 1)$ . Así:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \mathbf{f}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt &= \int_{-1}^1 \mathbf{f}(t, t^2) \cdot (1, 2t) dt = \\ \int_{-1}^1 (t^2 - 2t^3, t^4 - 2t^3) \cdot (1, 2t) dt &= \int_{-1}^1 (t^2 - 2t^3 + 2t(t^4 - 2t^3)) dt = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (t^2 - 2t^3 + 2t^5 - 4t^4) dt &= \left( \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{3} - \frac{4t^5}{5} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{4}{5} - \left( -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{4}{5} \right) = \\ \frac{2}{3} - \frac{8}{5} &= -\frac{14}{15}. \end{aligned}$$

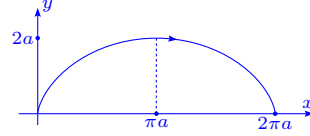
b) 
$$\int_0^{2\pi} \mathbf{f}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt =$$

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{f}(a(t - \sin t), a(1 - \cos t)) \cdot (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))' dt =$$

$$\int_0^{2\pi} (2a - a(1 - \cos t), a(t - \sin t)) \cdot (a(1 - \cos t), a \sin t) dt =$$

$$\int_0^{2\pi} (a + a \cos t, at - a \sin t) \cdot (a - a \cos t, a \sin t) dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 t - \sin^2 t + t \sin t) dt =$$

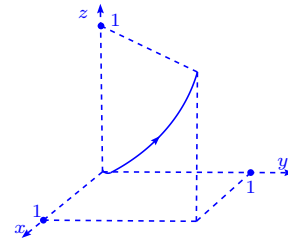
$$a^2 \int_0^{2\pi} t \sin t dt = a^2 (-t \cos t + \sin t) \Big|_0^{2\pi} = -2\pi a^2.$$



c) 
$$\int_0^1 \mathbf{f}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_0^1 \mathbf{f}(t, t^2, t^3) \cdot (t, t^2, t^3)' dt =$$

$$\int_0^1 (t^4 - t^6, 2t^5, -t^2) \cdot (1, 2t, 3t^2) dt = \int_0^1 (t^4 - t^6 + 4t^6 - 3t^4) dt =$$

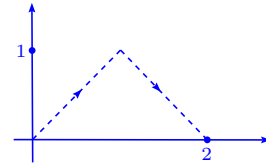
$$\int_0^1 (-2t^4 + 3t^6) dt = \left( -\frac{2t^5}{5} + \frac{3t^7}{7} \right) \Big|_0^1 = -\frac{2}{5} + \frac{3}{7} = \frac{1}{35}.$$



d) Dividimos la integral  $\int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^2 \mathbf{f}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt =$

$$\int_0^1 \mathbf{f}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt + \int_1^2 \mathbf{f}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt, \text{ donde}$$

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} (t, 1 - (1 - t)) = (t, t), & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ (t, 1 - (t - 1)) = (t, 2 - t), & \text{si } 1 \leq t \leq 2, \text{ así:} \end{cases}$$



$$\int_0^1 \mathbf{f}(t, t) \cdot (t, t)' dt + \int_1^2 \mathbf{f}(t, 2 - t) \cdot (t, 2 - t)' dt =$$

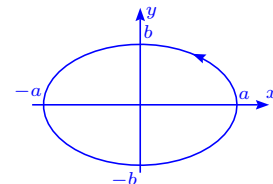
$$\int_0^1 (t^2 + t^2, t^2 - t^2) \cdot (1, 1) dt + \int_1^2 (t^2 + (2 - t)^2, t^2 - (2 - t)^2) \cdot (1, -1) dt =$$

$$\int_0^1 (2t^2, 0) \cdot (1, 1) dt + \int_1^2 (t^2 + 4 - 4t + t^2, t^2 - (4 - 4t + t^2)) \cdot (1 - 1) dt =$$

$$\int_0^1 2t^2 dt + \int_1^2 (2t^2 - 4t + 4, 4t - 4) \cdot (1, -1) dt = \int_0^1 2t^2 dt + \int_1^2 (2t^2 - 4t + 4 - 4t + 4) dt =$$

$$\int_0^1 2t^2 dt + \int_1^2 (2t^2 - 8t + 8) dt = \frac{2}{3} t^3 \Big|_0^1 + \left( \frac{2}{3} t^3 - 4t^2 + 8t \right) \Big|_1^2 = \frac{2}{3} + \left( \frac{16}{3} - 16 + 16 \right) - \left( \frac{2}{3} - 4 + 8 \right) = \frac{4}{3}.$$

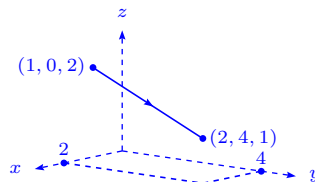
e) Dividamos la curva en dos caminos  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ , con  $\Gamma_1$  dada por  $\mathbf{r}_1(t) = (t, \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - t^2})$ , que empieza con  $t = a$  y termina con  $t = -a$  y  $\Gamma_2$  dada por  $\mathbf{r}_2(t) = (t, -\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - t^2})$ , que empieza en  $t = -a$  y termina con  $t = a$ . Así:



$$\begin{aligned}
& \int_a^{-a} \mathbf{f}(\mathbf{r}_1(t)) \cdot \mathbf{r}'_1(t) dt + \int_{-a}^a \mathbf{f}(\mathbf{r}_2(t)) \cdot \mathbf{r}'_2(t) dt = \\
& - \int_{-a}^a \mathbf{f}\left(t, \frac{b}{a}\sqrt{a^2-t^2}\right) \cdot \left(t, \frac{b}{a}\sqrt{a^2-t^2}\right)' dt + \int_{-a}^a \mathbf{f}\left(t, -\frac{b}{a}\sqrt{a^2-t^2}\right) \cdot \left(t, -\frac{b}{a}\sqrt{a^2-t^2}\right)' dt = \\
& \int_{-a}^a \left[ \left(t - \frac{b}{a}\sqrt{a^2-t^2}, t + \frac{b}{a}\sqrt{a^2-t^2}\right) \cdot \left(1, \frac{bt}{a\sqrt{a^2-t^2}}\right) - \right. \\
& \quad \left. \left(t + \frac{b}{a}\sqrt{a^2-t^2}, t - \frac{b}{a}\sqrt{a^2-t^2}\right) \cdot \left(1, -\frac{bt}{a\sqrt{a^2-t^2}}\right) \right] dt = \\
& \int_{-a}^a \left( t - \frac{b}{a}\sqrt{a^2-t^2} + \left(t + \frac{b}{a}\sqrt{a^2-t^2}\right) \frac{bt}{a\sqrt{a^2-t^2}} - t - \frac{b}{a}\sqrt{a^2-t^2} + \left(t - \frac{b}{a}\sqrt{a^2-t^2}\right) \frac{bt}{a\sqrt{a^2-t^2}} \right) dt = \\
& \int_{-a}^a \left( -\frac{2b}{a}\sqrt{a^2-t^2} + \frac{2tbt}{a\sqrt{a^2-t^2}} \right) dt = -\frac{2b}{a} \int_{-a}^a \left( \sqrt{a^2-t^2} - \frac{t^2}{\sqrt{a^2-t^2}} \right) dt = \\
& -\frac{2b}{a} \int_{-a}^a \frac{a^2-t^2-t^2}{\sqrt{a^2-t^2}} dt = -\frac{2b}{a} \int_{-a}^a \frac{a^2-2t^2}{\sqrt{a^2-t^2}} dt = -\frac{4b}{a} \int_0^a \frac{a^2-2t^2}{\sqrt{a^2-t^2}} dt = \\
& -\frac{4b}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(a^2-2a^2\sin^2 x)}{a\cos x} a\cos x dx = -4ba \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx = -2ab \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0.
\end{aligned}$$

f) La ecuación de la recta es  $(1, 0, 2) + (2, 4, -1)t$  y el segmento buscado se tiene con  $0 \leq t \leq 1$ .

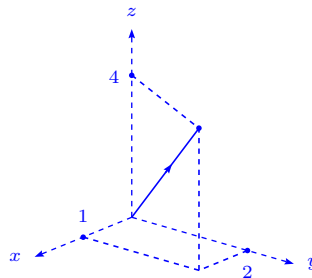
$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \mathbf{f}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_0^1 \mathbf{f}(1+2t, 4t, 2-t) \cdot (2t+1, 4t, 2-t)' dt = \\
& \int_0^1 (2(1+2t)4t, (1+2t)^2+2-t, 4t) \cdot (2, 4, -1) dt = \\
& \int_0^1 (16t^2+8t, 4t^2+3t+3, 4t) \cdot (2, 4, -1) dt = \\
& \int_0^1 (32t^2+16t+16t^2+12t+12-4t) dt = \int_0^1 (48t^2+24t+12) dt = 12 \int_0^1 (4t^2+2t+1) dt = \\
& 12 \left( \frac{4}{3}t^3 + t^2 + t \right) \Big|_0^1 = 12 \left( \frac{4}{3} + 1 + 1 \right) = 40.
\end{aligned}$$



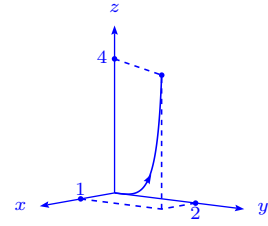
g) La ecuación de la recta es  $(1, 2, 4)t$  y con  $0 \leq t \leq 1$  se obtiene

el segmento buscado.

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \mathbf{f}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_0^1 \mathbf{f}(t, 2t, 4t) \cdot (t, 2t, 4t)' dt = \\
& \int_0^1 (t, 2t, 4t^2-2t) \cdot (1, 2, 4) dt = \int_0^1 (t+4t+16t^2-8t) dt = \\
& \int_0^1 (16t^2-3t) dt = \left( \frac{16}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{16}{3} - \frac{3}{2} = \frac{23}{6}.
\end{aligned}$$

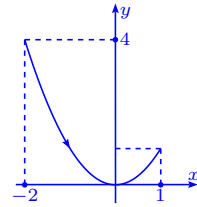


$$\begin{aligned} \text{h)} \int_0^1 \mathbf{f}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt &= \int_0^1 \mathbf{f}(t^2, 2t, 4t^3) \cdot (t^2, 2t, 4t^3)' dt = \\ &= \int_0^1 (t^2, 2t, 4t^5 - 2t) \cdot (2t, 2, 12t^2) dt = \int_0^1 (2t^3 + 4t + 48t^7 - 24t^3) dt = \\ &= \int_0^1 (4t - 22t^3 + 48t^7) dt = \left( 2t^2 - \frac{11}{2}t^4 + 6t^8 \right) \Big|_0^1 = 2 + 6 - \frac{11}{2} = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$



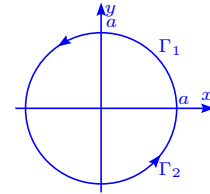
38. Calcule  $\int_{\Gamma} (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy$ , donde  $\Gamma$  el arco de parábola  $y = x^2$  que une los puntos  $(-2, 4)$  y  $(1, 1)$ .

$$\begin{aligned} \text{Solución} \int_{-2}^1 ((t^2 - 2t^3) + (t^4 - 2t^3)2t) dt &= \\ \int_{-2}^1 (t^2 - 2t^3 + 2t^5 - 4t^4) dt &= \left( \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{3}t^6 - \frac{4}{5}t^5 \right) \Big|_{-2}^1 = \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{4}{5} - \left( -\frac{8}{3} - \frac{16}{2} + \frac{64}{3} + \frac{128}{5} \right) &= 3 + \frac{15}{2} - 21 - \frac{132}{5} = -\frac{369}{10}. \end{aligned}$$



39. Calcule  $\int_{\Gamma} \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$ , donde  $\Gamma$  es la circunferencia  $x^2 + y^2 = a^2$ , recorrida en sentido contrario al de las agujas del reloj.

**Solución** Partamos  $\Gamma$  en  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ , con representaciones  $(t, \sqrt{a^2 - t^2})$  y  $(t, -\sqrt{a^2 - t^2})$  respectivamente, entonces  $\Gamma_1$  empieza en  $t = a$  y termina en  $t = -a$  y  $\Gamma_2$  empieza en  $t = -a$  y termina en  $t = a$ . Así:



$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{a^2} + \int_{\Gamma_2} \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{a^2} &= \\ \frac{1}{a^2} \int_a^{-a} \left( (t + \sqrt{a^2 - t^2}) - (t - \sqrt{a^2 - t^2}) \frac{-t}{\sqrt{a^2 - t^2}} \right) dt + \\ \frac{1}{a^2} \int_{-a}^a \left( (t - \sqrt{a^2 - t^2}) - (t + \sqrt{a^2 - t^2}) \frac{t}{\sqrt{a^2 - t^2}} \right) dt &= \\ \frac{1}{a^2} \int_{-a}^a \left( - (t + \sqrt{a^2 - t^2}) - \frac{(t - \sqrt{a^2 - t^2})t}{\sqrt{a^2 - t^2}} + (t - \sqrt{a^2 - t^2}) - \frac{(t + \sqrt{a^2 - t^2})t}{\sqrt{a^2 - t^2}} \right) dt &= \\ \frac{1}{a^2} \int_{-a}^a \left( -2\sqrt{a^2 - t^2} - \frac{t \cdot 2t}{\sqrt{a^2 - t^2}} \right) dt &= -\frac{2}{a^2} \int_{-a}^a \left( \sqrt{a^2 - t^2} + \frac{t^2}{\sqrt{a^2 - t^2}} \right) dt = \\ -\frac{2}{a^2} \int_{-a}^a \frac{a^2 - t^2 + t^2}{\sqrt{a^2 - t^2}} dt &= -\frac{2}{a^2} \int_{-a}^a \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - t^2}} dt = -\frac{4}{a^2} \int_0^a \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - t^2}} dt = \\ -\frac{4}{a^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2}{a \sqrt{1 - \text{sen}^2 x}} a \cdot \cos x dx &= -\frac{4}{a^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2}{\cos x} \cos x dx = -4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = -4 \frac{\pi}{2} = -2\pi. \end{aligned}$$

40. Calcule  $\int_{\Gamma} \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$ , donde  $\Gamma$  es el contorno del cuadrado de vértices  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(-1, 0)$  y

$(0, -1)$  recorrido en sentido contrario al de las agujas del reloj.

**Solución** Dividimos el camino de integración en  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  y

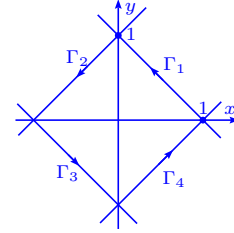
$\Gamma_4$ , de modo que:

$\Gamma_1$  tal que empieza en  $(1, 0)$  y termina en  $(0, 1)$ ,  $y = -x + 1$ .

$\Gamma_2$  tal que empieza en  $(0, 1)$  y termina en  $(-1, 0)$ ,  $y = x + 1$ .

$\Gamma_3$  tal que empieza en  $(-1, 0)$  y termina en  $(0, -1)$ ,  $y = -x - 1$ .

$\Gamma_4$  tal que empieza en  $(0, -1)$  y termina en  $(1, 0)$ ,  $y = x - 1$ .



$$\int_{\Gamma_1} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} + \int_{\Gamma_2} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} + \int_{\Gamma_3} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} + \int_{\Gamma_4} \frac{dx + dy}{|x| + |y|} = \int_1^0 \frac{1-1}{|t| + |1-t|} dt + \int_0^{-1} \frac{1+1}{-t+t+1} dt + \int_{-1}^0 \frac{1-1}{|t| + |t+1|} dt + \int_0^1 \frac{1+1}{t+1-t} dt = \int_1^0 \frac{1-1}{|t| + |1-t|} dt + \int_0^{-1} \frac{1+1}{-t+t+1} dt + \int_{-1}^0 \frac{1-1}{|t| + |t+1|} dt + \int_0^1 \frac{1+1}{t+1-t} dt = \int_1^0 2 dt + \int_0^{-1} 2 dt = 2t \Big|_1^0 + 2t \Big|_0^{-1} = -2 + 2 = 0.$$

41. Calcule  $\int_{\Gamma} (y dx + z dy + x dz)$ , donde:

a)  $\Gamma$  es la curva de intersección de las dos superficies  $x + y = 2$  y  $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$ . La curva es recorrida de tal modo que mirando desde el origen, el sentido es el de las agujas de un reloj.

b)  $\Gamma$  es la intersección de las dos superficies  $z = xy$  y  $x^2 + y^2 = 1$ , recorrida en sentido que visto desde encima del plano  $xy$ , es el contrario al de las agujas del reloj.

**Solución**

a) Primero hallemos la intersección  $x + y = 2$  y  $x^2 +$

$y^2 + z^2 = 2(x + y)$ , entonces si  $x = t$ ,  $y = 2 - t$  y

$z^2 = 4 - t^2 - (2 - t)^2 = 4 - t^2 - 4 + 4t - t^2 = 4t - 2t^2$ .

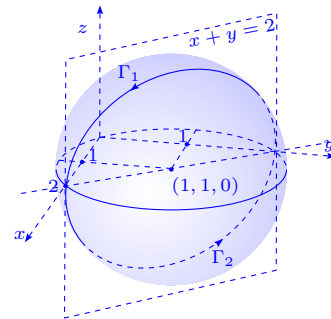
Como  $2t(2 - t) = z^2$ , se cumple que si  $t \geq 0$ ,  $2 - t \geq 0$ ,

$2 \geq t \geq 0$  y si  $t \leq 0 \implies 2 - t \leq 0$  y no hay solución.

Dividimos  $\Gamma$  en dos curvas:  $\Gamma_1$ ,  $x = t$ ,  $y = 2 - t$  y  $z = \sqrt{4t - 2t^2}$ , de 0 a 2 y  $\Gamma_2$ ,  $x = t$ ,  $y = 2 - t$

y  $z = -\sqrt{4t - 2t^2}$ , de 2 a 0. Así:

$$\int_{\Gamma_1} (y dx + z dy + x dz) + \int_{\Gamma_2} (y dx + z dy + x dz) = \int_0^2 \left( (2-t) + \sqrt{4t - 2t^2}(-1) + \frac{t(2-2t)}{\sqrt{4t - 2t^2}} \right) dt + \int_2^0 \left( (2-t) + (-\sqrt{4t - 2t^2})(-1) + t \frac{-(2-2t)}{\sqrt{4t - 2t^2}} \right) dt =$$



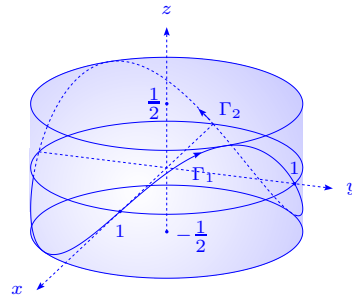
$$\begin{aligned} & \int_0^2 \left( (2-t) - \sqrt{4t-2t^2} + \frac{t(2-2t)}{\sqrt{4t-2t^2}} - (2-t) - \sqrt{4t-2t^2} + \frac{t(2-2t)}{\sqrt{4t-2t^2}} \right) dt = \\ & \int_0^2 \left( \frac{2t(2-2t)}{\sqrt{4t-2t^2}} - 2\sqrt{4t-2t^2} \right) dt = 2 \int_0^2 \frac{(2t-2t^2) - (4t-2t^2)}{\sqrt{4t-2t^2}} dt = 2 \int_0^2 \frac{-2t}{\sqrt{4t-2t^2}} dt = \\ & -4 \int_0^2 \frac{t}{\sqrt{4t-2t^2}} dt = -\frac{4}{\sqrt{2}} \int_0^2 \frac{t}{\sqrt{2t-t^2}} dt = -2\sqrt{2} \int_0^2 \frac{t}{\sqrt{1-(t-1)^2}} dt \stackrel{t-1=u}{=} \\ & -2\sqrt{2} \int_{-1}^1 \frac{u+1}{\sqrt{1-u^2}} du \stackrel{u=\sin x}{=} -2\sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + 1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} \cos x dx = -2\sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + 1) dx = \\ & -2\sqrt{2}(x - \cos x) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -2\sqrt{2} \left( \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{2} - \left( -\frac{\pi}{2} - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) \right) = -2\sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

b) Si  $x = t, y = \pm\sqrt{1-t^2}, z = \pm t\sqrt{1-t^2}, -1 \leq t \leq 1$ . Se divide  $\Gamma$  en dos curvas  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ .

$\Gamma_1: (t, \sqrt{1-t^2}, t\sqrt{1-t^2})$  va de  $t = 1$  a  $t = -1$  y

$\Gamma_2: (t, -\sqrt{1-t^2}, -t\sqrt{1-t^2})$  va de  $t = -1$  a  $t = 1$ .

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_1} (y dx + z dy + x dz) + \int_{\Gamma_2} (y dx + z dy + x dz) = \\ & \int_1^{-1} \left( \sqrt{1-t^2} + \frac{t\sqrt{1-t^2}(-2t)}{2\sqrt{1-t^2}} + \frac{t(1-2t^2)}{\sqrt{1-t^2}} \right) dt + \\ & \int_{-1}^1 \left( -\sqrt{1-t^2} + \frac{-t\sqrt{1-t^2}(2t)}{2\sqrt{1-t^2}} + \frac{t(1-2t^2)}{-\sqrt{1-t^2}} \right) dt = \\ & \int_{-1}^1 \left( -\sqrt{1-t^2} - t^2 - \frac{t(1-2t^2)}{\sqrt{1-t^2}} - \sqrt{1-t^2} + t^2 - \frac{t(1-2t^2)}{\sqrt{1-t^2}} \right) dt = \\ & -2 \int_{-1}^1 \left( \sqrt{1-t^2} + \frac{t-2t^3}{\sqrt{1-t^2}} \right) dt = -2 \int_{-1}^1 \frac{1-t^2+t-2t^3}{\sqrt{1-t^2}} dt \stackrel{t=\sin x}{=} \\ & -2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2 x + \sin x - 2\sin^3 x}{\cos x} \cdot \cos x dx = -2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x + \sin x - 2\sin^3 x) dx = \\ & -2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx - 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - 2\sin^3 x) dx = -4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx - 2 \cdot 0 = -4 \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} = -\pi. \end{aligned}$$



42. Calcular las siguientes integrales curvilíneas:

- $\int_{\Gamma} (x^2 - 2xy) dx + (2xy + y^2) dy$ ,  $\Gamma$  es el arco de parábola  $y = x^2$  que va desde  $(1, 1)$  a  $(2, 4)$ .
- $\int_{\Gamma} (2a - y) dx + x dy$ ,  $\Gamma$  es el primer arco de la cicloide  $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$  recorrido en el sentido de crecimiento de  $t$ .
- $\int_{\Gamma} 2xy dx - x^2 dy$ , donde  $\Gamma$  está descrita por los diferentes caminos que parten del origen

$O(0, 0)$  y que finaliza en  $A(2, 1)$ :

$\alpha$ ) sobre la recta  $OmA$ .

$\beta$ ) sobre la parábola con eje de simetría el eje  $x$ .

$\gamma$ ) sobre la parábola con eje de simetría el eje  $y$ .

$\delta$ ) sobre la línea quebrada  $OBA$ .

$\epsilon$ ) sobre la línea quebrada  $OCA$ .

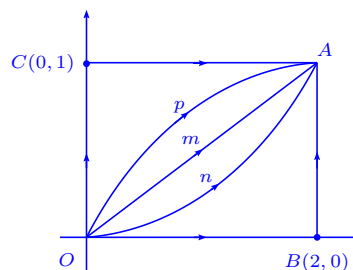
d)  $\int_{\Gamma} 2xy dx + x^2 dy$  en las mismas condiciones que en c).

e)  $\oint_{\Gamma} \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$ ,  $\Gamma$  es la circunferencia  $x^2 + y^2 = a^2$ , tomada en el sentido contrario a las agujas del reloj.

f)  $\int_{\Gamma} y^2 dx + x^2 dy$ ,  $\Gamma$  es la mitad superior de la elipse  $x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$ , en el sentido de las agujas del reloj.

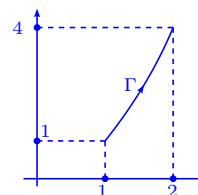
g)  $\int_{\Gamma} \cos y dx - \sin x dy$ ,  $\Gamma$  es el segmento  $AB$  de la bisectriz del segundo ángulo coordenado, si la abscisa del punto  $A$  es 2 y la ordenada del punto  $B$  es 2.

h)  $\oint_{\Gamma} \frac{xy(y dx - x dy)}{x^2 + y^2}$ ,  $\Gamma$  es el lazo derecho de la lemniscata  $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ , recorrida en el sentido contrario a las agujas del reloj.

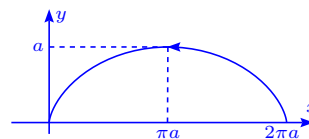


### Solución

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_{\Gamma} (x^2 - 2xy) dx + (2xy + y^2) dy &= \int_1^2 (x^2 - 2x^3 + 2x(2x^3 + x^4)) dx = \\ &= \int_1^2 (x^2 - 2x^3 + 4x^4 + 2x^5) dx = \left( \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{4}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^6 \right) \Big|_1^2 = \frac{1219}{30}. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{b) } \int_{\Gamma} (2a - y) dx + x dy &= \int_0^{2\pi} a^2 [(1 + \cos t)(1 - \cos t) + (t - \sin t) \sin t] dt = \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 t + t \sin t - \sin^2 t) dt = a^2 \int_0^{2\pi} t \sin t dt = \\ &= a^2 \left( -t \cos t \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos t dt \right) = -2\pi a^2. \end{aligned}$$



$$\text{c) } \alpha) y = \frac{1}{2}x, \int_{\Gamma} 2xy dx - x^2 dy = \int_0^2 \left( x^2 - \frac{x^2}{2} \right) dx = \frac{x^3}{6} \Big|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

$$\beta) y = \frac{1}{4}x^2, \int_{\Gamma} 2xy dx - x^2 dy = \int_0^2 \left( \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^3 \right) dx = 0.$$

$$\gamma) x = 2y^2, \int_{\Gamma} 2xy dx - x^2 dy = \int_0^1 (2 \cdot 2y^3 \cdot 4y - 4y^4) dy = \int_0^1 12y^4 dy = \frac{12}{5} y^5 \Big|_0^1 = \frac{12}{5}.$$

$$\delta) \Gamma = \overline{OB} + \overline{BA}, \int_{\Gamma} 2xy dx - x^2 dy = \int_{\overline{OB}} 2x \cdot 0 dx - x^2 \cdot 0 + \int_{\overline{BA}} -4 dy = 0 + \int_0^1 -4 dy = -4.$$

$$\epsilon) \Gamma = \overline{OC} + \overline{CA}, \int_{\Gamma} 2xy dx - x^2 dy = \int_{\overline{OC}} 2x \cdot 0 \cdot 0 - 0^2 dy + \int_{\overline{CA}} 2x dx = x^2 \Big|_0^2 = 4.$$

d) Observemos que  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 2x$ , en la expresión  $\int_{\Gamma} P dx + Q dy = \int_{\Gamma} 2xy dx + x^2 dy$ , con  $P(x, y) = 2xy$ ,  $Q(x, y) = x^2$ , por lo que la integral de línea es independiente de la trayectoria, es decir que en cualesquiera de las cinco trayectorias propuestas la integral de la misma cantidad. Verifiquemos esta situación:

$$\alpha) y = \frac{1}{2}x, \int_{\Gamma} 2xy dx + x^2 dy = \int_0^2 (x^2 + \frac{1}{2}x^2) dx = \frac{1}{2}x^3 \Big|_0^2 = 4.$$

$$\beta) y = \frac{1}{4}x^2, \int_{\Gamma} 2xy dx + x^2 dy = \int_0^2 x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 \Big|_0^1 = 4.$$

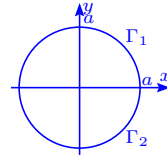
$$\gamma) x = 2y^2, \int_{\Gamma} 2xy dx + x^2 dy = \int_0^1 (4y^3 \cdot 4y + 4y^4) dy = \int_0^1 20y^4 dy = 4y^5 \Big|_0^1 = 4.$$

$$\delta) \Gamma = \overline{OB} + \overline{BA}, \int_{\Gamma} 2xy dx + x^2 dy = 0 + \int_0^1 4 dy = 4.$$

$$\epsilon) \Gamma = \overline{OC} + \overline{CA}, \int_{\Gamma} 2xy dx + x^2 dy = 0 + \int_0^2 2x dx = x^2 \Big|_0^2 = 4.$$

e) Usando la parametrización  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$

tenemos:  $\oint_{\Gamma} \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2} =$

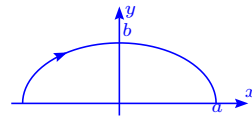


$$\int_0^{2\pi} \frac{a^2((\sin t + \cos t)(-\sin t) - (\cos t - \sin t) \cos t)}{a^2} dt = - \int_0^{2\pi} dt = -2\pi.$$

f) Usando la parametrización  $x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$  tenemos:

$$\int_{\Gamma} y^2 dx + x^2 dy = \int_{\pi}^0 (-ab^2 \sin^3 t + a^2 b \cos^3 t) dt =$$

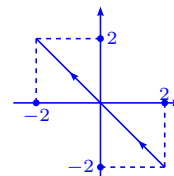
$$\int_0^{\pi} ab^2 \sin^3 t dt + 0 = 2ab^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t dt = 2ab^2 \frac{2}{3} = \frac{4}{3} ab^2.$$



g) En este caso  $y = -x$ , por lo que:

$$\int_{\Gamma} \cos y dx - \sin x dy = \int_2^{-2} (\cos x + \sin x) dx =$$

$$-(\sin x - \cos x) \Big|_{-2}^2 = -2 \sin 2.$$



h) Parametrizando la curva tenemos:

$$x = r \cos \varphi = a\sqrt{\cos 2\varphi} \cos \varphi, y = r \sin \varphi = a\sqrt{\cos 2\varphi} \sin \varphi,$$

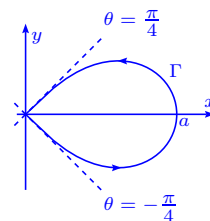
$$x'(\varphi) = a \left( -\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \cos \varphi - \sqrt{\cos 2\varphi} \sin \varphi \right),$$

$$y'(\varphi) = a \left( -\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \sin \varphi + \sqrt{\cos 2\varphi} \cos \varphi \right), \text{ entonces:}$$

$$\oint_{\Gamma} \frac{xy(y dx - x dy)}{x^2 + y^2} = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{x(\varphi)y(\varphi)(y(\varphi)x'(\varphi) - x(\varphi)y'(\varphi))d\varphi}{x(\varphi)^2 + y(\varphi)^2} =$$

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{a^2 \cos 2\varphi \cos \varphi \sin \varphi a^2 (\sin 2\varphi \sin \varphi \cos \varphi - \cos 2\varphi \sin^2 \varphi - \sin 2\varphi \sin \varphi \cos \varphi - \cos 2\varphi \cos^2 \varphi)d\varphi}{a^2 \cos 2\varphi} =$$

$$a^2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos \varphi \sin \varphi \cos 2\varphi = \frac{1}{4}a^2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin 2\varphi \cos 2\varphi (2d\varphi) = \frac{1}{4}a^2 \left( \frac{1}{2} \sin^2 2\varphi \right) \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = 0.$$



43. Calcular las integrales curvilíneas en las curvas indicadas:

a)  $\int_{\Gamma} x dy$ ,  $\Gamma$  es la curva dada por el triángulo con los dos ejes coordenados y la recta  $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ , en el sentido positivo.

b)  $\int_{\Gamma} x dy$ ,  $\Gamma$  es un segmento de la recta  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ , desde el punto de intersección del eje  $y$  hasta el punto de intersección del eje  $x$ .

c)  $\int_{\Gamma} (x^2 - y^2) dx$ ,  $\Gamma$  es el arco de parábola desde  $(0, 0)$  hasta  $(2, 4)$ .

d)  $\int_{\Gamma} (x^2 - y^2) dy$ ,  $\Gamma$  es el contorno de un cuadrilátero con vértices  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(4, 4)$ ,  $(0, 4)$  indicados según el recorrido.

e)  $\int_{\Gamma} -x \cos y dx + y \sin x dy$ ,  $\Gamma$  es el segmento que une los puntos  $(0, 0)$  y  $(\pi, 2\pi)$ .

f)  $\int_{\Gamma} xy dx + (y - x) dy$ ,  $\Gamma$  es la curva:  $\alpha) y = x$ ,  $\beta) y = x^2$ ,  $\gamma) y^2 = x$ ,  $\delta) y = x^3$ .

g)  $\int_{\Gamma} 2xy dx + x^2 dy$ ,  $\Gamma$  es la curva:  $\alpha) y = x$ ,  $\beta) y = x^2$ ,  $\gamma) y^2 = x$ ,  $\delta) y = x^3$ .

h)  $\int_{\Gamma} y dx + x dy$ ,  $\Gamma$  es la parte de la circunferencia  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$ ,  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ .

i)  $\int_{\Gamma} y dx - x dy$ ,  $\Gamma$  es la elipse  $x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$  recorrida en el sentido positivo.

j)  $\int_{\Gamma} \frac{y^2 dx - x^2 dy}{x^2 + y^2}$ ,  $\Gamma$  es la semicircunferencia  $x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$ ,  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ .

k)  $\int_{\Gamma} (2a - y) dx - (a - y) dy$ ,  $\Gamma$  es el primer arco de la cicloide  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

l)  $\int_{\Gamma} \frac{x^2 dy - y^2 dx}{x^{\frac{5}{3}} + y^{\frac{5}{3}}}$ ,  $\Gamma$  es la cuarta parte del asteroide  $x = a \cos^3 t$ ,  $y = a \sin^3 t$ , desde el punto  $(a, 0)$  hasta el punto  $(0, a)$ .

m)  $\int_{\Gamma} x dx + y dy + (x + y - 1) dz$ ,  $\Gamma$  es el segmento de recta que va desde el punto  $(1, 1, 1)$  hasta el punto  $(2, 3, 4)$ .

n)  $\int_{\Gamma} yz dx + zx dy + xy dz$ ,  $\Gamma$  es el arco de la hélice  $x = b \cos t$ ,  $y = b \sin t$ ,  $z = \frac{at}{2\pi}$ , desde el plano  $z = 0$  hasta el plano  $z = a$ .

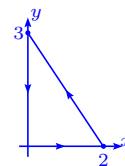
o)  $\int_{\Gamma} \frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - x - y + 2z}}$ ,  $\Gamma$  es el segmento de recta que une el punto  $(1, 1, 1)$  y el punto  $(4, 4, 4)$ .

p)  $\int_{\Gamma} y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$ ,  $\Gamma$  es la curva de intersección de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  y del cilindro  $x^2 + y^2 = ax$ ,  $a > 0$ ,  $z \geq 0$ , recorrida en sentido contrario a las agujas del reloj, si se observa desde el origen. Ver ejercicio 80, página 97

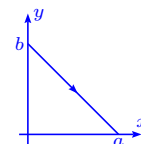
**Solución**

$$a) \int_{\Gamma} x dy = \int_0^2 2 \cdot 0 + \int_0^3 2 \left(1 - \frac{y}{3}\right) dy + \int_3^0 0 \cdot dy =$$

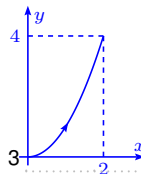
$$\frac{2}{3} \int_0^3 (3 - y) dy = \frac{2}{3} \left(3y - \frac{y^2}{2}\right) \Big|_0^3 = \frac{2}{3} \left(9 - \frac{9}{2}\right) = 3.$$



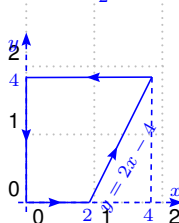
$$b) \int_{\Gamma} x dy = - \int_0^a x \frac{b}{a} dx = - \frac{b}{a} \frac{x^2}{2} \Big|_0^a = -\frac{1}{2} ab.$$



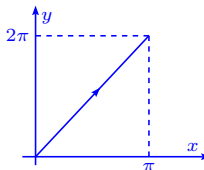
$$c) \int_{\Gamma} (x^2 - y^2) dx = \int_0^2 (x^2 - x^4) dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right) \Big|_0^2 = \frac{8}{3} - \frac{32}{5} = \frac{40 - 32 \cdot 3}{15} = -\frac{56}{15}.$$



$$d) \int_{\Gamma} (x^2 + y^2) dy = \int_0^2 x^2 \cdot 0 + \int_2^4 (x^2 + (2x - 4)^2) 2 dx + \int_4^0 (x^2 + 16) \cdot 0 + \int_4^0 y^2 dy = 2 \left(\frac{5}{3}x^3 - 8x^2 + 16x\right) \Big|_2^4 - \frac{1}{3}y^3 \Big|_0^4 = 2 \left(\frac{128}{3} - \frac{40}{3}\right) - \frac{64}{3} = \frac{112}{3}.$$



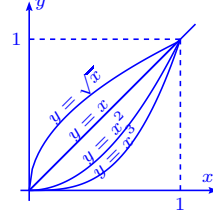
$$e) \int_{\Gamma} -x \cos y dx + y \sin x dy = \int_0^{\pi} (-x \cos 2x + 4x \sin x) dx = \left(\frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{2} x \sin 2x - 4x \cos x + 4 \sin x\right) \Big|_0^{\pi} = 4\pi.$$



$$f) \int_{\Gamma} xy dx + (y-x) dy$$

$$\alpha) \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

$$\beta) \int_0^1 (x^3 + (x^2-x)2x) dx = \int_0^1 (3x^3 - 2x^2) dx = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}.$$



$$\gamma) \int_0^1 (y^3 2y + (y-y^2)) dy = \int_0^1 (2y^4 - y^2 + y) dy = \left( \frac{2}{5} y^5 - \frac{1}{3} y^3 + \frac{1}{2} y^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{17}{30}.$$

$$\delta) \int_0^1 (x^4 + 3x^2(x^3-x)) dx = \int_0^1 (x^4 + 3x^5 - 3x^3) dx = \left( \frac{1}{5} x^5 + \frac{1}{2} x^6 - \frac{3}{4} x^4 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{20}.$$

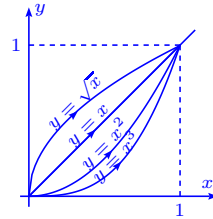
$$g) \int_{\Gamma} 2xy dx + x^2 dy$$

$$\alpha) \int_0^1 3x^2 dx = 1$$

$$\beta) \int_0^1 (2x^3 + 2x^3) dx = x^4 \Big|_0^1 = 1.$$

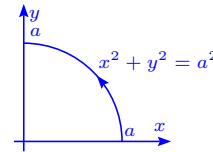
$$\gamma) \int_0^1 (4y^4 + y^4) dy = \int_0^1 5y^4 dy = y^5 \Big|_0^1 = 1.$$

$$\delta) \int_0^1 (2x^4 + 3x^2 \cdot x^2) dx = \int_0^1 5x^4 dx = x^5 \Big|_0^1 = 1.$$



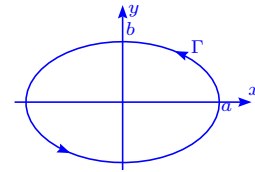
$$h) \int_{\Gamma} y dx + x dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t) dt =$$

$$a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt = \frac{1}{2} a^2 \sin 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0.$$



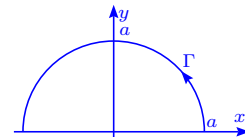
$$i) \int_{\Gamma} y dx - x dy = \int_0^{2\pi} (-ab \sin^2 t - ab \cos^2 t) dt =$$

$$-ab \int_0^{2\pi} dt = -2\pi ab.$$

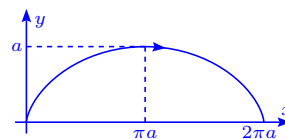


$$j) \int_{\Gamma} \frac{y^2 dx - x^2 dy}{x^2 + y^2} = \int_0^{\pi} \frac{(-a^3 \sin^3 t - a^3 \cos^3 t) dt}{a^2} =$$

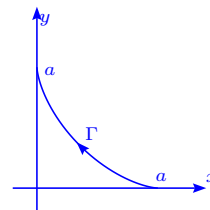
$$-a \left( \int_0^{\pi} \sin^3 t dt + \int_0^{\pi} \cos^3 t dt \right) = -2a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t dt = -2a \frac{2}{3} = -\frac{4}{3} a.$$



$$\begin{aligned} \text{k) } \int_{\Gamma} (2a - y)dx - (a - y)dy &= \\ \int_0^{2\pi} (a(1 + \cos t)a(1 - \cos t) - a^2 \cos t \sin t) dt &= \\ a^2 \int_0^{2\pi} (\sin^2 t - \sin t \cos t) dt &= 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt + 0 = 4a^2 \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} = a^2\pi. \end{aligned}$$



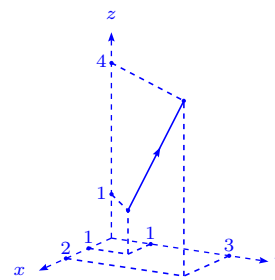
$$\begin{aligned} \text{l) } \int_{\Gamma} \frac{x^2 dy - y^2 dx}{x^{\frac{5}{3}} + y^{\frac{5}{3}}} &= \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2 \cos^6 t 3a \sin^2 t \cos t + a^2 \sin^6 t 3a \cos^2 t \sin t}{a^{\frac{5}{3}} (\cos^5 t + \sin^5 t)} dt &= \\ 3a^{\frac{4}{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t \cos^7 t + \sin^7 t \cos^2 t}{\sin^5 t + \cos^5 t} dt &= 3a^{\frac{4}{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t dt = \\ 3a^{\frac{4}{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t - \sin^4 t) dt &= 3a^{\frac{4}{3}} \left( \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} \frac{3}{4} \right) = \frac{3}{16} \pi a^{\frac{4}{3}}. \end{aligned}$$



m) El segmento de recta se escribe  $\ell = (1, 1, 1) + t(1, 2, 3)$ ,

$0 \leq t \leq 1 \implies x = 1 + t, y = 1 + 2t, z = 1 + 3t, 0 \leq t \leq 1$ , i.e.

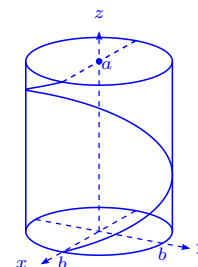
$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} x dx + y dy + (x + y - 1) dz &= \int_0^1 (1 + t + 2(1 + 2t) + 3(1 + 3t)) dt = \\ \int_0^1 (14t + 6) dt &= (7t^2 + 6t) \Big|_0^1 = 13. \end{aligned}$$



n) Se parametriza la curva con  $x = b \cos t, y = b \sin t, z = \frac{at}{2\pi}$ ,

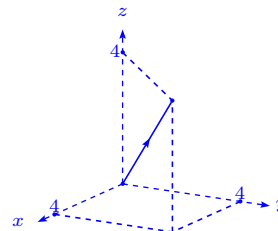
por lo que si  $z = a \implies t = 2\pi$ , entonces:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} yz dx + zx dy + xy dz &= \\ \int_0^{2\pi} \left( -b^2 \sin t \frac{at}{2\pi} \sin t + \frac{at}{2\pi} b^2 \cos t + b^2 \sin t \cos t \frac{a}{2\pi} \right) dt &= \\ \frac{ab^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} (t(-\sin^2 t + \cos^2 t) + \sin t \cos t) dt &= \frac{ab^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} (t \cos 2t + \sin t \cos t) dt = \\ \frac{a}{2\pi} b^2 \left( \frac{\cos 2t}{4} + \frac{1}{2} t \sin 2t + \frac{1}{2} \sin^2 t \right) \Big|_0^{2\pi} &= 0. \end{aligned}$$

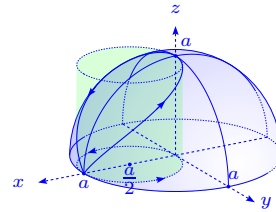


o) La curva se escribe  $(t, t, t), 1 \leq t \leq 4$ , entonces:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - x - y + 2z} &= \int_1^4 \frac{3t dt}{\sqrt{3t^2}} = \\ \sqrt{3} \int_1^4 dt &= 3\sqrt{3}. \end{aligned}$$



p) El cambio de variable  $x = r \cos \psi \cos \theta$ ,  $y = r \cos \psi \sin \theta$ ,  $z = r \sin \psi$ , permite la parametrización de la curva  $\Gamma$ :  $x^2 + y^2 = a^2 \cos^2 \psi = a^2 \cos \psi \cos \theta \implies \cos \psi = \cos \theta$  i.e.  $x = a \cos^2 \theta$ ,  $y = a \sin \theta \cos \theta$ ,  $z = a \sin \theta$ , con  $\pi \geq \theta \geq 0$ , por lo tanto:



$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz &= \\ a^3 \int_0^{\pi} (\sin^2 \theta \cos^2 \theta (-2 \sin \theta \cos \theta) + \sin^2 \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + \cos^5 \theta) d\theta &= \\ -a^3 \left[ \int_0^{\pi} -\frac{1}{8} (\sin 2\theta)^3 2d\theta + \int_0^{\pi} \sin^2 \theta d\theta - 2 \int_0^{\pi} \sin^4 \theta d\theta + \int_0^{\pi} \cos^5 \theta d\theta \right] &= \\ -a^3 \left[ -\frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \sin^3 u du + 2 \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} - 4 \frac{1 \cdot 3 \cdot \pi}{2 \cdot 4 \cdot 2} + 0 \right] &= -a^3 \left( 0 + \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{4} a^3. \end{aligned}$$

44. Calcular las integrales curvilíneas siguientes:

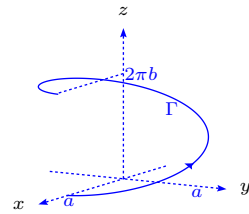
a)  $\int_{\Gamma} (y-z) dx + (z-x) dy + (x-y) dz$ ,  $\Gamma$  es una espira de la hélice circular  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$ ,  $z = bt$ , con  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

b)  $\oint_{\Gamma} y dx + z dy + x dz$ ,  $\Gamma$  es la circunferencia  $x = a \cos \alpha \cos t$ ,  $y = a \cos \alpha \sin t$ ,  $z = a \sin \alpha$ .  $\alpha = \text{cte}$ , recorrida en el sentido de crecimiento del parámetro.

c)  $\int_{\Gamma} xy dx + yz dy + zx dz$ , donde  $\Gamma$  es el arco de la circunferencia  $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$ ,  $z = x$ , situado por el lado del plano  $xz$ , con  $y > 0$ .

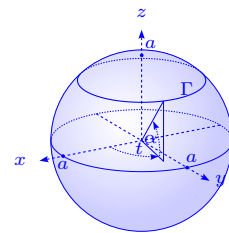
**Solución**

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_{\Gamma} (y-z) dx + (z-x) dy + (x-y) dz &= \int_0^{2\pi} [-(a \sin t - bt)a \sin t + \\ (bt - a \cos t)a \cos t + a(\cos t - \sin t)b] dt &= \\ \int_0^{2\pi} (-a^2 + abt(\cos t + \sin t)) dt + \int_0^{2\pi} ab(\cos t - \sin t) dt &= \\ -2\pi a^2 + ab \left( t(\sin t - \cos t) \right) \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} (\sin t + \cos t) dt &+ 0 = -2\pi a^2 - 2\pi ab = -2\pi a(a+b). \end{aligned}$$

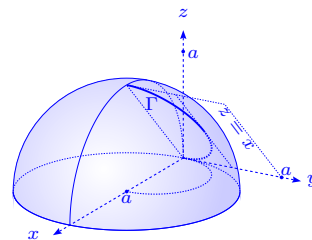


$$\text{b) } \oint_{\Gamma} y dx + z dy + x dz =$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (-a^2 \cos^2 \alpha \sin^2 t + a^2 \sin \alpha \cos \alpha \cos t + a \cos \alpha \cos t \cdot 0) dt &= \\ -4a^2 \cos^2 \alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt + 0 + 0 &= -4a^2 \cos^2 \alpha \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} = -\pi a^2 \cos^2 \alpha. \end{aligned}$$



c) Determinemos la ecuación de la circunferencia. Se tiene que  $z = x$ , entonces escogiendo por parámetro  $x$  se tiene que  $y^2 = 2ax - 2x^2$  y como  $y > 0$ ,  $y = \sqrt{2ax - 2x^2}$ , con  $2ax - 2x^2 \geq 0$ , o sea  $2x(a - x) \geq 0$ , es decir  $0 \leq x \leq a$ . Así la curva es  $(x, \sqrt{2ax - 2x^2}, x)$ , con  $0 \leq x \leq a$  y tenemos:



$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} xy dx + yz dy + zx dz &= \int_0^a (x\sqrt{2ax - 2x^2} + x\sqrt{2ax - 2x^2} \frac{a - 2x}{\sqrt{2ax - 2x^2}} + x^2) dx = \\ &= \int_0^a (x^{\frac{3}{2}}\sqrt{2a - 2x} + ax - x^2) dx = \sqrt{2}a^{3/2} \int_0^a \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{a} \frac{dx}{a} + \left(a\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right) \Big|_0^a = \\ &= \sqrt{2}a^3 \int_0^1 y^{\frac{3}{2}}(1 - y)^{\frac{1}{2}} dy + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)a^3 = a^3(\sqrt{2}\beta\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{6}) = a^3\left(\sqrt{2}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(4)} + \frac{1}{6}\right) = \\ &= a^3\left(\sqrt{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{6}\right) = a^3\left(\sqrt{2}\frac{\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}}{16} + \frac{1}{6}\right) = a^3\left(\frac{\sqrt{2}}{16}\pi + \frac{1}{6}\right), \text{ pues } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

## 2.6 Aplicaciones

45. Calcular  $\int_{\Gamma} (6xy^2 - y^3) dx + (6x^2y - 3xy^2) dy$ , a lo largo de cualquier curva  $\Gamma$  desde el punto  $(1, 2)$  al punto  $(3, 4)$ .

**Solución**  $f_1 = 6xy^2 - y^3$ ,  $f_2 = 6x^2y - 3xy^2$ ,  $\frac{\partial f_1}{\partial y} = 12xy - 3y^2$ ,  $\frac{\partial f_2}{\partial x} = 12xy - 3y^2$ , por lo tanto  $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$ . Así,  $f_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 6xy^2 - y^3$ ,  $f_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 6x^2y - 3xy^2$ ,  $\varphi = 3x^2y^2 - xy^3 + g_1(y)$  y  $\varphi = 3x^2y^2 - xy^3 + g_2(x)$ . Tomemos  $\varphi = 3x^2y^2 - xy^3$ .

$$\begin{aligned} \text{De esta manera } \int_{\Gamma} (6xy^2 - y^3) dx + (6x^2y - 3xy^2) dy &= \varphi(3, 4) - \varphi(1, 2) = \\ 3 \cdot 3^2 \cdot 4^2 - 3 \cdot 4^3 - (3 \cdot 1^2 \cdot 2^2 - 1 \cdot 2^3) &= 3 \cdot 4^2(9 - 4) - 2^2(3 - 2) = 3 \cdot 4^2 \cdot 5 - 4 = 236. \end{aligned}$$

46. Calcular la integral curvilínea  $\int_{\Gamma} x dx + y dy - z dz$ , a lo largo de cualquier curva  $\Gamma$  que va desde  $(1, 0, -3)$  a  $(6, 4, 8)$ .

**Solución**  $\mathbf{f} = (x, y, -z) = (f_1, f_2, f_3)$ , como  $\frac{\partial f_1}{\partial y} = 0 = \frac{\partial f_2}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f_1}{\partial z} = 0 = \frac{\partial f_3}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f_2}{\partial z} = 0 = \frac{\partial f_3}{\partial y}$ , existe la función potencial tal que  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = x$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = y$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -z \implies \varphi = \frac{x^2}{2} + h_1(y, z)$ ,  $\varphi = \frac{y^2}{2} + h_2(x, z)$ ,  $\varphi = -\frac{z^2}{2} + h_3(x, y)$  y se escoge  $\varphi = \frac{x^2 + y^2 - z^2}{2}$ .

$$\text{Así, } \int_{\Gamma} x dx + y dy - z dz = \varphi(6, 4, 8) - \varphi(1, 0, -3) = \frac{36 + 16 - 64}{2} - \frac{1 - 9}{2} = -2.$$

47. Calcular  $\int_{\Gamma} xy dx + yz dy + zx dz$ , donde  $\Gamma$  es la circunferencia que resulta al intersecar

$x^2 + y^2 + z^2 = 4x$ , con  $z = x$ , recorrida en el sentido contrario de la manecillas del reloj, vista sobre el semieje positivo de la  $z$ .

**Solución** Sea  $\Gamma : x^2 + y^2 + z^2 = 4x, z = x \implies x^2 + y^2 + x^2 = 4x \implies 2(x^2 - 2x + 1) + y^2 = 2 \implies \frac{(x-1)^2}{1} + \frac{y^2}{2} = 1$ .

Sea  $x - 1 = \cos \theta, \frac{y}{\sqrt{2}} = \sin \theta$  y  $z = x$ , entonces

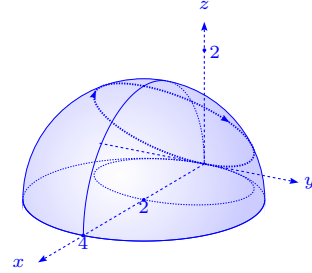
$$\mathbf{r}(\theta) = (1 + \cos \theta, \sqrt{2} \sin \theta, 1 + \cos \theta), 0 \leq \theta \leq 2\pi \implies$$

$$\mathbf{r}'(\theta) = (-\sin \theta, \sqrt{2} \cos \theta, -\sin \theta).$$

Como  $\mathbf{f} = (xy, yz, zx) \implies \mathbf{f}(\theta) = ((1 + \cos \theta)\sqrt{2} \sin \theta, (1 + \cos \theta)\sqrt{2} \sin \theta, (1 + \cos \theta)^2) =$

$(1 + \cos \theta)(\sqrt{2} \sin \theta, \sqrt{2} \sin \theta, 1 + \cos \theta)$  y se tiene que  $\int_{\Gamma} xy dx + yz dy + zx dz =$

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} (1 + \cos \theta) [\sqrt{2} \sin \theta, \sqrt{2} \sin \theta, 1 + \cos \theta] \cdot [-\sin \theta, \sqrt{2} \cos \theta, -\sin \theta] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (1 + \cos \theta) [-\sqrt{2} \sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta - \sin \theta] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sqrt{2} \sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta - \sin \theta - \sqrt{2} \sin^2 \theta \cos \theta + \sin \theta \cos^2 \theta - \sin \theta \cos \theta) d\theta \\ &= -\int_0^{2\pi} \sqrt{2} \sin^2 \theta d\theta + 0 - 0 - 0 + 0 - 0 = -4\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta = -4\sqrt{2} \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} = -\sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$



48. Verificar que las integrales tomadas a lo largo de las curvas cerradas, son iguales a cero para cualquier función  $f$  integrable.

a)  $\oint_{\Gamma} f(xy)(y dx + x dy)$ .

b)  $\oint_{\Gamma} f\left(\frac{y}{x}\right) \frac{x dy - y dx}{x^2}$ .

c)  $\oint_{\Gamma} [f(x+y) + f(x-y)] dx + [f(x+y) - f(x-y)] dy$ .

d)  $\oint_{\Gamma} f(x^2 + y^2 + z^2)(x dx + y dy + z dz)$ .

**Solución** En este problema recordemos que si  $\varphi(x, y)$  es una función diferenciable, tenemos que  $\int_{\Gamma} d\varphi = \varphi(x_2, y_2) - \varphi(x_1, y_1)$ , donde  $(x_1, y_1)$  es el punto inicial de la curva  $\Gamma$  y  $(x_2, y_2)$  es el punto final de la curva  $\Gamma$ . Si  $\Gamma$  es cerrada,  $\oint_{\Gamma} f d\varphi = 0$ .

a) Sea  $\varphi(x, y) = F(xy)$ , donde  $F'(u) = f(u)$ , entonces  $d\varphi = f(xy)(y dx + x dy)$  y se tiene  $\oint_{\Gamma} d\varphi = \oint_{\Gamma} f(xy)(y dx + x dy) = 0$ .

b) Sea  $\varphi(x, y) = F\left(\frac{x}{y}\right)$ , con  $F'(u) = f(u)$ ,  $d\varphi = f\left(\frac{x}{y}\right)\left(-\frac{y}{x^2} dx + \frac{1}{x} dy\right) = f\left(\frac{x}{y}\right) \frac{x dy - y dx}{x^2}$  i.e.

$$\oint_{\Gamma} d\varphi = \oint_{\Gamma} f\left(\frac{x}{y}\right) \frac{x dy - y dx}{x^2} = 0.$$

c) Tomemos  $\varphi(x, y) = F(x + y) + F(x - y)$ , con  $F'(u) = f(u)$ , entonces:

$$d\varphi = (f(x + y) + f(x - y))dx + (f(x + y) - f(x - y))dy, \text{ o sea}$$

$$\oint_{\Gamma} d\varphi = \oint_{\Gamma} (f(x + y) + f(x - y))dx + (f(x + y) - f(x - y))dy = 0.$$

d) Sea  $F(u)$  tal que  $F'(u) = f(u)$ , entonces si  $\varphi(x, y, z) = F(x^2 + y^2 + z^2)$  tenemos que

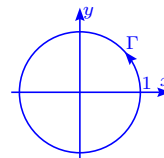
$$d\varphi = 2f(x^2 + y^2 + z^2)(x dx + y dy + z dz) \text{ y por lo tanto:}$$

$$\oint_{\Gamma} f(x^2 + y^2 + z^2)(x dx + y dy + z dz) = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} d\varphi = 0.$$

49. Calcular la integral  $\int_{\Gamma} \frac{x dy - y dx}{x^2 + 4y^2}$ , sobre la circunferencia  $\Gamma: x^2 + y^2 = 1$ , en sentido positivo.

**Solución** Sea  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , entonces:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \frac{x dy - y dx}{x^2 + 4y^2} &= \int_0^{2\pi} \frac{(\cos^2 t + \sin^2 t) dt}{1 + 3 \sin^2 t} = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{4 - 3 \cos^2 t} = \\ &4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 t dt}{(4 - 3 \cos^2 t) \sec^2 t} = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 t dt}{4 \sec^2 t - 3} = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 t dt}{1 + 4 \tan^2 t} \underset{x=2 \tan t}{=} 2 \int_0^{\infty} \frac{2 dx}{1 + 4x^2} = \\ &2 \arctan 2x \Big|_0^{\infty} = \frac{2\pi}{2} = \pi. \end{aligned}$$



50. Calcular las integrales de línea siguientes:

a)  $\int_{(0,0)}^{(2,1)} 2xy dx + x^2 dy.$

b)  $\int_{(-1,2)}^{(2,3)} y dx + x dy.$

c)  $\int_{(3,4)}^{(5,12)} \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2}$  (el origen  $(0, 0)$  no está en la trayectoria de integración).

d)  $\int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  (los puntos  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  están situados en circunferencias concéntricas, con centro en el origen y de radios con  $R_1$  y  $R_2$  respectivamente. El origen no está en la trayectoria de integración).

e)  $\int_{(1,-1,2)}^{(2,1,3)} x dx - y^2 dy + z dz.$

f)  $\int_{(1,2,3)}^{(3,2,1)} yz dx + zx dy + xy dz.$

$$g) \int_{(7,2,3)}^{(5,3,1)} \frac{zx dy + xy dz - yz dx}{(x - yz)^2} \text{ (la trayectoria de integración no corta la superficie } z = \frac{x}{y}\text{).}$$

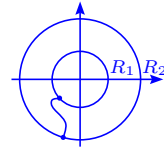
**Solución**

$$a) \int_{(0,0)}^{(2,1)} 2xy dx + x^2 dy = \int_{(0,0)}^{(2,1)} d(x^2 y) = x^2 y \Big|_{(0,0)}^{(2,1)} = 4 - 0 = 4.$$

$$b) \int_{-(1,2)}^{(2,3)} y dx + x dy = \int_{-(1,2)}^{(2,3)} d(xy) = xy \Big|_{-(1,2)}^{(2,3)} = 6 - 2 = 4.$$

$$c) \int_{(3,4)}^{(5,12)} \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} \int_{(3,4)}^{(5,12)} d \ln(x^2 + y^2) = \frac{1}{2} \ln \frac{169}{25} = \ln \frac{13}{5}.$$

$$d) \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} d(\sqrt{x^2 + y^2}) = R_2 - R_1.$$



$$e) \int_{(1,-1,2)}^{(2,1,3)} x dx - y^2 dy + z dz = \int_{(1,-1,2)}^{(2,1,3)} d\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}z^2\right) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}z^2\right) \Big|_{(1,-1,2)}^{(2,1,3)} = 2 - \frac{1}{3} + \frac{9}{2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 2\right) = 4 - \frac{2}{3} = \frac{10}{3}.$$

$$f) \int_{(1,2,3)}^{(3,2,1)} yz dx + zx dy + xy dz = \int_{(1,2,3)}^{(3,2,1)} d(xyz) = xyz \Big|_{(1,2,3)}^{(3,2,1)} = 6 - 6 = 0.$$

$$g) \int_{(7,2,3)}^{(5,3,1)} \frac{zx dy + xy dz - yz dx}{(x - yz)^2} = \int_{(7,2,3)}^{(5,3,1)} d\left(\frac{1}{2} \frac{x + yz}{x - yz}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{5+3}{5-3} - \frac{7+6}{7-6}\right) = \frac{1}{2}(4-13) = -\frac{9}{2}.$$

51. Determinar las funciones  $\varphi(x, y)$ , dadas en los diferenciales siguientes:

$$a) d\varphi = x^2 dx + y^2 dy$$

$$b) d\varphi = 4(x^2 - y^2)(x dx - y dy).$$

$$c) d\varphi = \frac{(x + 2y)dx + y dy}{(x + y)^2}.$$

$$d) d\varphi = \frac{x}{y\sqrt{x^2 + y^2}} dx - \frac{x^2 + \sqrt{x^2 + y^2}}{y^2\sqrt{x^2 + y^2}} dy.$$

$$e) d\varphi = \left(\frac{x - 2y}{(y - x)^2} + x\right) dx + \left(\frac{y}{(y - x)^2} - y^2\right) dy.$$

$$f) d\varphi = (2x \cos y - y^2 \operatorname{sen} x) dx + (2y \cos x - x^2 \operatorname{sen} y) dy.$$

$$g) d\varphi = \frac{2x(1 - e^y)}{(1 + x^2)^2} dx + \left(\frac{e^y}{1 + x^2} + 1\right) dy.$$

$$h) d\varphi = \frac{(3y - x)dx + (y - 3x)dy}{(x + y)^3}.$$

$$i) d\varphi = \frac{dx + dy + dz}{x + y + z}.$$

$$\text{j) } d\varphi = \frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

$$\text{k) } d\varphi = \frac{yz dx + xz dy + xy dz}{1 + x^2 y^2 z^2}.$$

$$\text{l) } d\varphi = \frac{2(zx dy + xy dz - yz dx)}{(x - yz)^2}.$$

$$\text{m) } d\varphi = \frac{dx - 3dy}{z} + \frac{3y - x + x^3}{z^2} dz.$$

$$\text{n) } d\varphi = e^{\frac{y}{z}} dx + \left( \frac{e^{\frac{y}{z}}(x+1)}{z} + ze^{yz} \right) dy + \left( -\frac{e^{\frac{y}{z}}(x+1)y}{z^2} + ye^{yz} + e^{-z} \right) dz.$$

**Solución**

a) Se tiene que  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = x^2$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = y^2 \implies \varphi = \frac{1}{3}x^3 + C(y) = \frac{1}{3}y^3 + C_2(x) = \frac{1}{3}(x^3 + y^3) + C$ .

b) En este caso  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 4x(x^2 - y^2)$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -4y(x^2 - y^2) \implies \varphi = (x^2 - y^2)^2 + C_1(y) = (x^2 - y^2)^2 + C_2(x) = (x^2 - y^2)^2 + C$ .

c)  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{x}{(x+y)^2} + \frac{2y}{(x+y)^2}$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{y}{(x+y)^2} \implies \varphi = \ln|x+y| - \frac{y}{x+y} + C_1(y) = \ln|x+y| - \frac{y}{x+y} + C_2(x) = \ln|x+y| - \frac{y}{x+y} + C$ .

d)  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}}$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{-x^2 + \sqrt{x^2+y^2}}{y^2\sqrt{x^2+y^2}} \implies \varphi = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y} + C_1(y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2} + 1}{y} + C_2(x) = \frac{\sqrt{x^2+y^2} + 1}{y} + C$ .

e)  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{x-2y}{(x-y)^2} + x$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{y}{(x-y)^2} - y^2 \implies \varphi = \ln|x-y| + \frac{y}{x-y} + \frac{x^2}{2} + C_1(y) = \ln|x-y| + \frac{y}{x-y} - \frac{y^3}{3} + C_2(x) = \ln|x-y| + \frac{x}{x-y} + \frac{x^2}{2} - \frac{y^3}{3} + C$ .

f)  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2x \cos y - y^2 \sin x$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2y \cos x - x^2 \sin y \implies \varphi = x^2 \cos y + y^2 \cos x + C_1(y) = y^2 \cos x + x^2 \cos y + C_2(x) = x^2 \cos y + y^2 \cos x + C$ .

g)  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{e^y}{1+x^2} + 1 \implies \varphi = \frac{e^y - 1}{1+x^2} + C_1(y) = \frac{e^y}{1+x^2} + y + C_2(x) = \frac{e^y - 1}{1+x^2} + y + C$ .

h)  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{3y-x}{(x+y)^3}$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{y-3x}{(x+y)^3} \implies \varphi = -\frac{2y}{(x+y)^2} + \frac{1}{x+y} + C_1(y) = -\frac{2y}{(x+y)^2} + \frac{1}{x+y} + C_2(x) = -\frac{2y}{(x+y)^2} + \frac{1}{x+y} + C$ .

i)  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{x+y+z} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \implies \varphi = \ln|x+y+z| + C_1(y, z) = \ln|x+y+z| + C_2(x, y) = \ln|x+y+z| + C_3(x, y)$  i.e.  $u = \ln|x+y+z| + C$ .

j)  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \implies \varphi = \sqrt{x^2+y^2+z^2} + C$ .

$C$ .

$$\text{k) } \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{yz}{1+x^2y^2z^2}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{xz}{1+x^2y^2z^2}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{xy}{1+x^2y^2z^2} \implies \varphi = \arctan(xyz) + C.$$

$$\text{l) } \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{2yz}{(x-yz)^2}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{2xz}{(x-yz)^2}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{2xy}{(x-yz)^2}, \text{ por el ejercicio 50 g) tenemos que } u = \frac{x+yz}{x-yz} + C.$$

$$\text{m) Tenemos que } \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{z}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{3}{z}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{3y-x+z^3}{z^2} = \frac{3y}{z^2} - \frac{x}{z^2} + z, \text{ entonces } u = \frac{x}{z} + C_1(y, z) = -\frac{3y}{z} + C_2(x, z) = -\frac{3y+x}{z} + \frac{z^2}{2} + C_3(x, y) = \frac{x}{z} - \frac{3y}{z} + \frac{z^2}{2} + C.$$

$$\text{n) Aquí, } \frac{\partial \varphi}{\partial x} = e^{\frac{y}{z}}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{e^{\frac{y}{z}}(x+1)}{z} + ze^{\frac{y}{z}}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{e^{\frac{y}{z}}(x+1)y}{z^2} + ye^{\frac{y}{z}} + e^{-z}, \text{ por lo tanto, } u = xe^{\frac{y}{z}} + C_1(y, z) = e^{\frac{y}{z}}(x+1) + e^{yz} + C_2(x, z) = e^{\frac{y}{z}}(x+1) + e^{yz} - e^{-z} + C_3(x, y) = e^{\frac{y}{z}}(x+1) + e^{yz} - e^{-z} + C.$$

52. Decidir si los siguientes campos vectoriales poseen o no función potencial. Encontrarla en caso que exista.

$$\text{a) } \mathbf{f}(x, y, z) = (2xy^3, x^2z^2, 3x^2yz^2).$$

$$\text{b) } \mathbf{g}(x, y, z) = (4xy - 3x^2z^2 + 1, 2x^2 + 2, -2x^3z - 3z^2).$$

$$\text{c) } \mathbf{h}(x, y, z) = (y^2 \cos x + z^3, -4 + 2y \sin x, 3xz^2 + 2).$$

### Solución

a) Sea  $f_1 = 2xy^3$ ,  $f_2 = x^2z^2$ ,  $f_3 = 3x^2yz^2$ ,  $\frac{\partial f_2}{\partial z} = 2x^2z$ ,  $\frac{\partial f_3}{\partial y} = 3x^2z^2$ ,  $\frac{\partial f_2}{\partial z} \neq \frac{\partial f_3}{\partial y}$  y  $f$  no tiene función potencial.

b) Si  $g_1 = 4xy - 3x^2z^2 + 1$ ,  $g_2 = 2x^2 + 2$ ,  $g_3 = -2x^3z - 3z^2$ ,  $\frac{\partial g_1}{\partial y} = 4x$ ,  $\frac{\partial g_2}{\partial x} = 4x$ ,  $\frac{\partial g_3}{\partial x} = -6x^2z$ ,  $\frac{\partial g_1}{\partial z} = -6x^2z$ ,  $\frac{\partial g_2}{\partial z} = 0$ ,  $\frac{\partial g_3}{\partial y} = 0$ , por lo tanto tenemos que  $\frac{\partial g_1}{\partial y} = \frac{\partial g_2}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial g_3}{\partial x} = \frac{\partial g_1}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial g_2}{\partial z} = \frac{\partial g_3}{\partial y}$  y  $g$  tiene función potencial  $\phi$ .

Integrando tenemos que  $\frac{\partial \phi}{\partial x} = 4xy - 3x^2z^2 + 1 \implies \phi = 2x^2y - x^3z^2 + x + \psi_1(y, z)$ ,

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 2x^2 + 2 \implies \phi = 2x^2y + 2y + \psi_2(x, z), \frac{\partial \phi}{\partial z} = -2x^3z - 3z^2 \implies \phi = -x^3z^2 - z^3 + \psi_3(x, y).$$

Así,  $\phi = 2x^2y - x^3z^2 + x + 2y - z^3 + C$ . Verifiquemos que  $\nabla \phi = g$ . En efecto:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 4xy - 3x^2z^2 + 1 = g_1, \frac{\partial \phi}{\partial y} = 2x^2 + 2 = g_2 \text{ y } \frac{\partial \phi}{\partial z} = -2x^3z - 3z^2 = g_3.$$

c)  $h_1 = y^2 \cos x + z^3$ ,  $h_2 = -4 + 2y \sin x$ ,  $h_3 = 3xz^2 + 2$ ,  $\frac{\partial h_1}{\partial y} = 2y \cos x$ ,  $\frac{\partial h_2}{\partial x} = 2y \cos x$ ,  $\frac{\partial h_3}{\partial x} = 3z^2$ ,

$\frac{\partial h_1}{\partial z} = 3z^2$ ,  $\frac{\partial h_2}{\partial z} = 0$ ,  $\frac{\partial h_3}{\partial y} = 0$ , por lo tanto  $h$  tiene función potencial  $\psi$ .

Integrando tenemos que  $\frac{\partial \psi}{\partial x} = y^2 \cos x + z^3 \implies \psi = y^2 \sin x + xz^3 + \rho_1(y, z)$ ,

$\frac{\partial \psi}{\partial y} = -4 + 2y \sin x \implies \psi = -4y + y^2 \sin x + \rho_2(x, z)$ ,  $\frac{\partial \psi}{\partial z} = 3xz^2 + 2 \implies \psi = xz^3 + 2z + \rho_3(x, y)$ .

Así,  $\psi = xz^3 + 2z + y^2 \sin x - 4y + C$ . Verifiquemos que  $\nabla \psi = h$ .

En efecto,  $\frac{\partial \psi}{\partial x} = z^3 + y^2 \cos x = h_1$ ,  $\frac{\partial \psi}{\partial y} = 2y \sin x - 4 = h_2$  y  $\frac{\partial \psi}{\partial z} = 3xz^2 + 2 = h_3$ .

53. Supongamos que la ecuación diferencial  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ , tiene un factor integrante  $\mu(x, y)$  que nos permite obtener una familia de soluciones de la forma  $\varphi(x, y) = c$ . Si la pendiente de la curva  $\varphi(x, y) = c$  en  $(x, y)$  es  $\tan \theta$ , el vector unitario normal  $\eta$  se expresa  $\eta = (\sin \theta, -\cos \theta)$ . Existe un campo escalar  $g(x, y)$  tal que la derivada normal de  $\varphi$  viene dada por la fórmula  $\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \mu(x, y)g(x, y)$ , donde  $\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \nabla \varphi \cdot \eta$ . Hallar una fórmula explícita de  $g(x, y)$  en función de  $P(x, y)$  y  $Q(x, y)$ .

**Solución** Se tiene que  $\varphi(x, y) = c \implies \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' = 0 \implies \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \tan \theta = 0 \implies \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \sin \theta = 0$ , o sea si  $\mathbf{T} = (\cos \theta, \sin \theta)$ ,  $\nabla \varphi \cdot \mathbf{T} = 0 \implies \nabla \varphi$  es proporcional a  $\eta$  i.e.  $\eta = \frac{\nabla \varphi}{\|\nabla \varphi\|} \implies \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \mu(x, y)g(x, y) = \nabla \varphi \cdot \eta = \nabla \varphi \cdot \frac{\nabla \varphi}{\|\nabla \varphi\|} = \|\nabla \varphi\| = |\mu(x, y)|\sqrt{P^2 + Q^2}$ , ya que  $\mu P dx + \mu Q dy = 0$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \mu P$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \mu Q$ .

Así tenemos que  $g(x, y) = \pm \sqrt{P^2(x, y) + Q^2(x, y)}$ .

54. Demostrar que las ecuaciones diferenciales siguientes son exactas y en cada caso hallar la primitiva de la forma diferencial asociada y la solución de la ecuación diferencial.

a)  $(x + 2y)dx + (2x + y)dy = 0$ .

b)  $2xydx + x^2dy = 0$ .

c)  $(x^2 - y)dx - (x + \sin^2 y)dy = 0$ .

d)  $4 \sin x \sin 3y \cos x dx - 3 \cos 3y \cos 2x dy = 0$ .

e)  $(3x^2y + 8xy^2)dx + (x^3 + 8x^2y + 12ye^y)dy = 0$ .

**Solución**

a) Sea  $P(x, y) = x + 2y$ ,  $Q(x, y) = 2x + y$ , entonces si integramos tenemos que  $\int P(x, y)dx =$

$\frac{x^2}{2} + 2xy + C_1(y)$ ,  $\int Q(x, y)dy = \frac{y^2}{2} + 2xy + C_2(x)$ , son iguales si  $C_1(y) = \frac{y^2}{2}$ ,  $C_2(x) = \frac{x^2}{2}$ , o sea existe  $\varphi = \frac{x^2}{2} + 2xy + \frac{y^2}{2}$  tal que  $\nabla\varphi = (P, Q)$ .

Finalmente la solución  $y(x)$  de la ecuación diferencial satisface  $\varphi(x, y(x)) = \frac{x^2}{2} + 2xy + \frac{y^2}{2} = C$ , para algún  $C \in \mathbb{R}$ .

b) Tomemos  $P(x, y) = 2xy$ ,  $Q(x, y) = x^2$ , entonces  $\int Pdx = x^2y + C_1(y)$ ,  $\int Qdy = x^2y + C_2(x)$ , son iguales si  $C_1(y) = C_2(x) = 0$  y existe  $\varphi(x, y) = x^2y$  tal que  $\nabla\varphi = (P, Q)$ .

La solución  $y$  de la ecuación diferencial satisface  $\varphi(x, y) = x^2y = C$  para algún  $C \in \mathbb{R}$ .

c) Sea  $P(x, y) = x^2 - y$ ,  $Q(x, y) = -x - \sin^2 y$ , entonces  $\int Pdx = \frac{1}{3}x^3 - xy + C_1(y)$ ,  $\int Qdy = -xy - \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}\sin 2y + C_2(x)$ , por lo que  $\varphi(x, y) = \frac{1}{3}x^3 - xy - \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}\sin 2y$  es tal que  $\nabla\varphi = (P, Q)$ .

La solución  $y(x)$  de la ecuación diferencial satisface  $\varphi(x, y) = \frac{1}{3}x^3 - xy - \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}\sin 2y = C$ , para algún  $C \in \mathbb{R}$ .

d) Consideremos  $P(x, y) = 4 \sin x \cos x \sin 3y = 2 \sin 2x \sin 3y$ ,  $Q(x, y) = -3 \cos 3y \cos 2x$ , entonces  $\int Pdx = -\cos 2x \sin 3y + C_1(y)$ ,  $\int Qdy = -\sin 3y \cos 2x + C_2(x)$ , por lo que  $\varphi(x, y) = -\cos 2x \sin 3y$  es una primitiva de la forma diferencial asociada a la ecuación diferencial. La solución de la ecuación diferencial es tal que  $\varphi(x, y) = -\cos 2x \sin 3y = C$  para algún  $C \in \mathbb{R}$ .

e) Sea  $P(x, y) = 3x^2y + 8xy^2$ ,  $Q(x, y) = x^3 + 8x^2y + 12ye^y$ , entonces  $\int Pdx = x^3y + 4x^2y^2 + C_1(y)$ ,  $\int Qdy = x^3y + 4x^2y^2 - 12e^y + 12ye^y + C_2(x)$ , por lo tanto  $\varphi(x, y) = x^3y + 4x^2y^2 - 12e^y + 12ye^y$  es tal que  $\nabla\varphi = (P, Q)$ . La solución  $y$  de la ecuación diferencial satisface  $\varphi(x, y) = x^3y + 4x^2y^2 - 12e^y + 12ye^y = C$ , para algún  $C \in \mathbb{R}$ .

55. Demostrar que una ecuación lineal de primer orden  $y' + P(x)y = Q(x)$  tiene factor integrante  $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$ . Resolver la ecuación diferencial.

**Solución** La ecuación diferencial se puede escribir  $dy + (P(x)y - Q(x))dx = 0$ , por lo que para la ecuación diferencial sea exacta debe existir  $\mu(x)$ , tal que  $\mu dy + (\mu P(x)y - \mu Q(x))dx = 0$ , o sea existe  $\varphi$  tal que  $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \mu P(x)y - \mu Q(x)$ ,  $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \mu$ . Así tenemos que  $\varphi = \left( \int \mu P dx \right) y -$

$\int \mu Q dx + C_1(y)$ ,  $\varphi = \mu y + C_2(x)$ , por lo que  $\mu = \int \mu P dx$ , i.e.  $\mu' = \mu P(x) \implies \frac{\mu'}{\mu} = P(x)$ , es decir  $\mu = e^{\int P(x) dx}$ .

Así tenemos que  $\varphi(x, y) = e^{\int P(x) dx} y - \int e^{\int P(x) dx} Q(x) dx$  y la solución de la ecuación diferencial satisface  $\varphi(x, y) = C$ , para algún  $C \in \mathbb{R}$ .

56. Sea  $\mu(x, y)$  de clase  $C^1$  un factor integrante de la ecuación diferencial  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ , donde  $P$  y  $Q$  son de clase  $C^1$ , demostrar que  $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = Q \frac{\partial}{\partial x} \log |\mu| - P \frac{\partial}{\partial y} \log |\mu|$ .

Deducir de esta ecuación las siguientes reglas para encontrar factores integrantes:

- a) Si  $(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x})/Q = f(x)$  es función sólo de  $x$ , entonces  $e^{\int f(x) dx}$  es un factor integrante.  
 b) Si  $(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})/P = g(y)$  es una función que depende sólo de  $y$ , entonces  $e^{\int g(y) dy}$  es un factor integrante.

**Solución** Si  $\mu$  es un factor integrante, debe existir  $\varphi$  de clase  $C^2$  tal que  $\nabla \varphi = \mu(P, Q)$ , o sea  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \mu P$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \mu Q$ , por lo que  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial y} P + \mu \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} Q + \mu \frac{\partial Q}{\partial x}$ , es decir  $(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x})\mu = \frac{\partial \mu}{\partial x} Q - \frac{\partial \mu}{\partial y} P \implies \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = Q \frac{\partial}{\partial x} \log |\mu| - P \frac{\partial}{\partial y} \log |\mu|$ .

- a) Si  $(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x})/Q = f(x)$  sólo depende de  $x$ , probemos que  $\mu = e^{\int f(x) dx}$  es un factor integrante.

En efecto si  $\mu = e^{\int f(x) dx}$ , entonces debe tenerse que existe  $\varphi$  de clase  $C^2$  tal que  $\nabla \varphi = (\mu P, \mu Q)$ , o bien que  $\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$ . Así  $\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} - \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} = \mu \frac{\partial P}{\partial y} - \mu' Q - \mu \frac{\partial Q}{\partial x} = \mu \frac{\partial P}{\partial y} - \mu f(x) Q - \mu \frac{\partial Q}{\partial x} = \mu \frac{\partial P}{\partial y} - \mu \frac{\partial Q}{\partial x} - \mu (\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}) \frac{Q}{Q} = 0$ , lo que concluye la prueba.

- b) Un razonamiento similar prueba que  $\mu = e^{\int g(y) dy}$  es un factor integrante.

57. Usando el ejercicio anterior, determinar el factor integrante y la solución de las ecuaciones diferenciales siguientes.

a)  $y dx - (2x + y) dy = 0$

b)  $(x^3 + y^3) dx - xy^2 dy = 0$ .

**Solución**

- a) Se tiene que  $(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})/P = \frac{-2-1}{y} = -\frac{3}{y}$  sólo depende de  $y$ , entonces  $\mu(y) = e^{-\int \frac{3 dy}{y}} = y^{-3}$  es un factor integrante, por lo que  $\frac{1}{y^2} dx - \frac{2x+y}{y^3} dy = 0$  es exacta, es decir

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{y^2}, \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} - \frac{2x}{y^3} \implies \varphi = \frac{x}{y^2} + C_1(y) = \frac{x}{y^2} + \frac{1}{y} + C_2(x), \text{ o sea } \varphi(x, y) = \frac{x}{y^2} + \frac{1}{y}.$$

La solución  $y$  de la ecuación diferencial satisface  $\varphi(x, y) = \frac{x}{y^2} + \frac{1}{y} = C$ , para algún  $C \in \mathbb{R}$ .

b) En este caso  $(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x})/Q = \frac{3y^2 + y^2}{-xy^2} = -\frac{4}{x}$  sólo depende de  $x$ , entonces  $e^{-\int \frac{4}{x} dx} = e^{-\ln x^4} = \frac{1}{x^4}$  es un factor integrante, por lo que  $\frac{x^3 + y^3}{x^4} dx - \frac{y^2}{x^3} dy$  es exacta. Así tenemos que  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{x} + \frac{y^3}{x^4}$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{y^2}{x^3} \implies \varphi = \ln|x| - \frac{1}{3} \frac{y^3}{x^3} + C_1(y) = -\frac{1}{3} \frac{y^3}{x^3} + C_2(x)$ , o sea  $\varphi = -\frac{1}{3} \frac{y^3}{x^3} + \ln|x| = C$ .

La solución  $y$  de la ecuación diferencial satisface la ecuación  $\varphi(x, y) = -\frac{1}{3} \frac{y^3}{x^3} + \ln|x| = C$ , para algún  $C \in \mathbb{R}$ .

58. Si  $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = f(x)Q(x, y) - g(y)P(x, y)$ , demostrar que  $e^{\int f(x)dx + \int g(y)dy}$  es un factor integrante de la ecuación diferencial  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ .

Determinar el factor integrante y la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales:

a)  $(2x^2y + y^2)dx + (2x^3 - xy)dy = 0$

b)  $(e^x \sec y - \tan y)dx + dy = 0$ .

**Solución** Por el ejercicio 56 tenemos que  $\frac{\partial}{\partial x} \log|\mu| = f(x)$ ,  $\frac{\partial}{\partial y} \log|\mu| = g(y) \implies \log|\mu| = \int f(x)dx + C_1(y) = \int g(y)dy + C_2(x) \implies \log|\mu| = \int f(x)dx + \int g(y)dy \implies \mu = e^{\int f(x)dx + \int g(y)dy}$  es un factor integrante.

a)  $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x^2 + 2y - 6x^2 - y = -4x^2 + 3y = f(x)(2x^3 - xy) - g(y)(2x^2y + y^2)$ , entonces  $f(x) = -\frac{5}{2} \frac{1}{x}$ ,  $g(y) = -\frac{1}{2} \frac{1}{y}$ , pues  $-\frac{5}{2} \frac{1}{x}(2x^3 - xy) + \frac{1}{2y}(2x^2y + y^2) = -5x^2 + \frac{5}{2}y + x^2 + \frac{1}{2}y = -4x^2 + 3y$ , por lo tanto  $\mu = e^{\int f(x)dx + \int g(y)dy} = e^{-\frac{5}{2} \ln x - \frac{1}{2} \ln y} = (x^5 y)^{-\frac{1}{2}}$  es un factor integrante. Así pues  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2x^{-\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{5}{2}} y^{\frac{3}{2}}$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2x^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} - x^{-\frac{3}{2}} y^{\frac{1}{2}} \implies \varphi = -4x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3} x^{-\frac{3}{2}} y^{\frac{3}{2}} + C_1(y) = -4x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3} x^{-\frac{3}{2}} y^{\frac{3}{2}} + C_2(x)$ , i.e.  $\varphi(x, y) = 4(xy)^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3} \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{3}{2}}$ .

La solución  $y$  de la ecuación diferencial satisface  $\varphi(x, y) = 4(xy)^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3} \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{3}{2}} = C$ , para algún  $C \in \mathbb{R}$ .

b)  $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = e^x \sec y \tan y - \sec^2 y - 0 = e^x \sec y \tan y - \tan^2 y - 1 = \tan y(e^x \sec y - \tan y) - 1 = \tan y P(x, y) - Q(x, y)$ , entonces  $e^{-x + \int \tan y dy} = e^{-x + \ln|\cos y|} = e^{-x} \cos y$ , es un factor integrante. Así,  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 1 - e^{-x} \sin y$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = e^x \cos y \implies \varphi = x + e^{-x} \sin y + C_1(y) = e^{-x} \sin y +$

$C_2(x)$ , o sea  $\varphi(x, y) = x + e^{-x} \operatorname{sen} y$ . La solución  $y$  de la ecuación diferencial satisface  $\varphi(x, y) = x + e^{-x} \operatorname{sen} y = C$ , para alguna constante  $C \in \mathbb{R}$ .

59. Calcular las siguientes integrales curvilíneas de las expresiones diferenciales exactas siguientes:

- a)  $\int_{(-1,2)}^{(2,3)} x dy + y dx$       b)  $\int_{(0,1)}^{(3,4)} x dx + y dy$       c)  $\int_{(0,0)}^{(1,1)} (x+y)(dx+dy)$   
d)  $\int_{(1,2)}^{(2,1)} \frac{y dx - x dy}{y^2}$  el camino no corta el eje  $x$ .  
e)  $\int_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}^{(x,y)} \frac{dx + dy}{x+y}$  el camino no corta la recta  $x+y=0$ .      f)  $\int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} \varphi(x) dx + \psi(y) dy$ .

**Solución** Observemos que la notación usada aquí en general es ambigua, pues solo muestra el punto de salida y de llegada de la curva. Sin embargo en este caso no presenta problema pues al ser diferenciales exactos, la integral es la misma cualquiera que sea la curva que se use, para ir del punto inicial al punto final. Así que solamente se ocupa al punto final y el punto inicial para evaluar la función  $\varphi$ , de modo que  $d\varphi = P dx + Q dy$  i.e.

$$\varphi(a_2, b_2) - \varphi(a_1, b_1) = \int_{(a_1, b_1)}^{(a_2, b_2)} P dx + Q dy.$$

a) Aquí  $P(x, y) = y$ ,  $Q(x, y) = x$ ,  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$ ,  $\varphi = xy + c$ , entonces:

$$\int_{(-1,2)}^{(2,3)} x dy + y dx = xy \Big|_{(-1,2)}^{(2,3)} = 6 + 2 = 8.$$

b)  $P(x, y) = x$ ,  $Q(x, y) = y$ ,  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ ,  $\varphi = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + c$ , entonces:

$$\int_{(0,1)}^{(3,4)} x dx + y dy = \left( \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 \right) \Big|_{(0,1)}^{(3,4)} = \frac{1}{2}(9 + 16) - \frac{1}{2} = 12.$$

c)  $P(x, y) = x+y = Q(x, y)$ ,  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$ ,  $\varphi = \frac{1}{2}x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2 + c = \frac{1}{2}(x+y)^2 + c$ , entonces:

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} (x+y)(dx+dy) = \frac{1}{2}(x+y)^2 \Big|_{(0,0)}^{(1,1)} = 2.$$

d)  $P(x, y) = \frac{1}{y}$ ,  $Q(x, y) = -\frac{x}{y^2}$ ,  $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ,  $\varphi = \frac{x}{y} + c$ , entonces:

$$\int_{(1,2)}^{(2,1)} \frac{y dx - x dy}{y^2} = \frac{x}{y} \Big|_{(1,2)}^{(2,1)} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

e)  $P(x, y) = \frac{1}{x+y} = Q(x, y)$ ,  $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{(x+y)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ,  $\varphi = \ln(x+y) + c$ , entonces:

$$\int_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}^{(x, y)} \frac{dx + dy}{x + y} = \ln(x + y) \Big|_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}^{(x, y)} = \ln(x + y).$$

f)  $P(x, y) = \varphi(x)$ ,  $Q(x, y) = \psi(y)$ ,  $\frac{\partial P}{\partial y} = 0 = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ,  $\varphi = \int_{x_1}^x \varphi(x) dx + \int_{y_1}^y \psi(y) dy$ , entonces:

$$\int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} \varphi(x) dx + \psi(y) dy = \varphi(x, y) \Big|_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(t) dt + \int_{y_1}^{y_2} \psi(t) dt.$$

60. Determinar las primitivas de las expresiones y calcular las siguientes integrales:

a)  $\int_{(-2, -1)}^{(3, 0)} (x^4 + 4xy^3) dx + (6x^2y^2 - 5y^4) dy$

b)  $\int_{(0, -1)}^{(1, 0)} \frac{x dy - y dx}{(x - y)^2}$ , el camino de integración no corta la recta  $y = x$ .

c)  $\int_{(1, 1)}^{(3, 1)} \frac{(x + 2y) dx + y dy}{(x + y)^2}$ , el camino de integración no corta la recta  $y = -x$ .

d)  $\int_{(0, 0)}^{(1, 1)} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y \right) dx + \left( \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + x \right) dy$ .

### Solución

a) Tenemos que  $P = x^4 + 4xy^3$ ,  $Q = 6x^2y^2 - 5y^4$ , entonces  $\frac{\partial P}{\partial y} = 12xy^2 = \frac{\partial Q}{\partial x}$  y existe  $\varphi$  tal que  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = P$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q$ , o sea  $\varphi = \frac{1}{5}x^5 + 2x^2y^3 + c_1(y) = -y^5 + 2x^2y^3 + c_2(x) = \frac{1}{5}x^5 - y^5 + 2x^2y^3 + c$ . Así tenemos que:

$$\int_{(-2, -1)}^{(3, 0)} P dx + Q dy = \varphi(3, 0) - \varphi(-2, -1) = \frac{3^5}{5} - \left( \frac{(-2)^5}{5} + 1 + 2 \cdot 4 \cdot (-1) \right) =$$

$$\frac{243}{5} + \frac{32}{5} + 7 = 55 + 7 = 62.$$

b) Sea  $P = -\frac{y}{(x-y)^2}$ ,  $Q = \frac{x}{(x-y)^2}$ , entonces  $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{(x-y)^2 + y(2)(x-y)}{(x-y)^4} = -\frac{x+y}{(x-y)^3}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{(x-y)^2 - 2(y-x)x}{(x-y)^4} = -\frac{x+y}{(x-y)^3}$  i.e.  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{-y}{(x-y)^2}$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{x}{(x-y)^2}$ , o sea  $\varphi = \frac{y}{x-y} + c_1(x) = -\frac{x}{x-y} + c_2(y) \Rightarrow \varphi = \frac{x}{x-y} + c$ , con lo cual tenemos:

$$\int_{(0, -1)}^{(1, 0)} P dx + Q dy = \varphi(1, 0) - \varphi(0, -1) = 1.$$

c) Sea  $P = \frac{x+2y}{(x+y)^2}$ ,  $Q = \frac{y}{(x+y)^2}$ , entonces  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2(x+y)^2 - 2(x+y)(x+2y)}{(x+y)^4} = -\frac{2y}{(x+y)^3}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{2y}{(x+y)^3}$ , o sea  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = P$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q$ :

$$\begin{aligned}\varphi &= \int \frac{y}{(x+y)^2} dy + c_1(x) = \int \frac{x+y-x}{(x+y)^2} dy + c_1(x) = \int \frac{1}{x+y} dy - \int \frac{x dy}{(x+y)^2} + c_1(x) = \\ \ln(x+y) + \frac{x}{x+y} + c_1(x) &= \int \frac{(x+y)+y}{(x+y)^2} dx + c_2(x) = \ln(x+y) - \frac{y}{x+y} + c_2(x), \text{ por lo que} \\ \varphi &= \ln(x+y) + \frac{x}{x+y} + c, \text{ con lo cual tenemos que:}\end{aligned}$$

$$\int P dx + Q dy = \varphi(3, 1) - \varphi(1, 1) = \ln 4 + \frac{3}{4} - \ln 2 - \frac{1}{2} = \ln 2 + \frac{1}{4}.$$

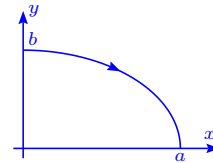
d) Sea  $P = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y$ ,  $Q = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + x$ ,  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}} + 1 = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , con lo cual se tiene que existe  $\varphi$  tal que  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = P$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q$ , o sea:

$$\varphi = \sqrt{x^2+y^2} + xy + c_1(y) = \sqrt{x^2+y^2} + xy + c_2(y) \implies \varphi = \sqrt{x^2+y^2} + xy + c \text{ y tenemos:}$$

$$\int P dx + Q dy = \varphi(1, 1) - \varphi(0, 0) = \sqrt{2} + 1.$$

61. Calcular la integral  $I = \int_{\Gamma} \frac{x dx + y dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$  a lo largo del cuarto de elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , que se encuentra en el primer cuadrante, en el sentido de las agujas del reloj.

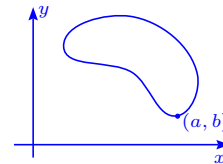
**Solución** Sea  $P = \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$ ,  $Q = \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$ ,  
 $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{xy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , entonces existe  $\varphi$  tal  
 que  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = P$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q \implies \varphi = \sqrt{1+x^2+y^2} + c_1(y) =$   
 $\sqrt{1+x^2+y^2} + c_2(y)$ , es decir  $\varphi = \sqrt{1+x^2+y^2} + c$ .



$$\text{Así tenemos que } \int_{\Gamma} P dx + Q dy = \varphi(0, b) - \varphi(a, 0) = \sqrt{1+b^2} - \sqrt{1+a^2}.$$

62. Demostrar que si  $f(u)$  es una función continua y  $\Gamma$  es una curva cerrada regular a trozos, la integral  $\oint_{\Gamma} f(x^2+y^2)(x dx + y dy) = 0$ .

**Solución** Sea  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ , entonces  $\varphi(x, y) =$   
 $\frac{1}{2}F(x^2+y^2) + c$  satisface  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = P$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q$ . De esta manera tenemos que  $\oint_{\Gamma} f(x^2+y^2)(x dx + y dy) = \oint_{\Gamma} d\varphi =$   
 $\varphi(a, b) - \varphi(a, b) = 0$ .



63. Determinar la función primitiva  $\varphi$  si:

a)  $d\varphi = (2x + 3y) dx + (3x - 4y) dy$ .

b)  $d\varphi = (3x^2 - 2xy + y^2) dx - (x^2 - 2xy + 3y^2) dy$ .

c)  $d\varphi = e^{x-y} [(1+x+y)dx + (1-x-y)dy]$ .

d)  $d\varphi = \frac{dx}{x+y} + \frac{dy}{x+y}$ .

### Solución

a) Sea  $P(x, y) = 2x + 3y$  y  $Q(x, y) = 3x - 4y$ , como  $\frac{\partial P}{\partial y} = 3 = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , entonces existe  $\varphi(x, y)$  tal que  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = P$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q \implies \varphi = x^2 + 3xy + c_1(y) = 3xy - 2y^2 + c_2(x)$  i.e.  $\varphi = x^2 + 3xy - 2y^2 + c$ .

b) Tenemos que  $P = 3x^2 - 2xy + y^2$ ,  $Q = -x^2 + 2xy - 3y^2$ , entonces  $\frac{\partial P}{\partial y} = -2x + 2y = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , por lo que  $\varphi = x^3 - x^2y + y^2x + c_1(y) = -x^2y + xy^2 - y^3 + c_2(x)$  i.e.  $\varphi = x^3 - x^2y + xy^2 - y^3 + c$ .

c) Sea  $P = e^{x-y}(1+x+y)$ ,  $Q = e^{x-y}(1-x-y)$ , entonces  $\frac{\partial P}{\partial y} = -e^{x-y}(1+x+y) + e^{x-y} = -e^{x-y}(x+y)$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x} = e^{x-y}(1-x-y) + e^{x-y}(-1) = -e^{x-y}(x+y)$ , por lo tanto:

$$\varphi = \int e^{x-y}(1+x+y)dx + c_1(y) = e^{x-y}(x+y) + c_1(y) = \int e^{x-y}(1-x-y)dy + c_2(x) = e^{x-y}(x+y) + c_2(x) \text{ i.e. } \varphi = (x+y)e^{x-y} + c.$$

d) Sea  $P = Q = \frac{1}{x+y}$ , entonces  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{(x+y)^2}$ , por lo que existe  $\varphi(x, y)$  tal que  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{x+y} \implies \varphi = \ln|x+y| + c_1(y) = \ln|x+y| + c_2(x)$ , o sea  $\varphi = \ln|x+y| + c$ .

64. Calcular las integrales curvilíneas de las diferenciales exactas siguientes:

a)  $\int_{(1,0,-3)}^{(6,4,8)} x dx + y dy + z dz$     b)  $\int_{(1,1,1)}^{(a,b,c)} yz dx + xz dy + xy dz$     c)  $\int_{(0,0,0)}^{(3,4,5)} \frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

d)  $\int_{(1,1,1)}^{(x,y,\frac{1}{xy})} \frac{yz dx + zx dy + xy dz}{xyz}$ , donde la curva esta situada en el primer octante.

### Solución

a) Sea  $\varphi = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + c$ , entonces  $d\varphi = x dx + y dy + z dz$ , por lo que:

$$\int_{(1,0,-3)}^{(6,4,8)} x dx + y dy + z dz = \varphi(6, 4, 8) - \varphi(1, 0, -3) = \frac{1}{2}(36 + 16 + 64 - 1 - 0 - 9) = 53.$$

b) Sea  $\varphi = xyz + c$ ,  $d\varphi = yz dx + zx dy + xy dz$ , por lo que:

$$\int_{(1,1,1)}^{(a,b,c)} yz dx + zx dy + xy dz = \varphi(a, b, c) - \varphi(1, 1, 1) = abc - 1.$$

c) Tomemos  $\varphi = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + c$ , entonces  $d\varphi = \frac{x dx + y dy + z dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ , por lo que:

$$\int_{(0,0,0)}^{(3,4,5)} d\varphi = \varphi(3, 4, 5) - \varphi(0, 0, 0) = \sqrt{9 + 16 + 25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

d) Como la región de definición está contenida en el primer octante y no incluye el punto

$(0, 0, 0)$ , vemos que  $d\varphi = \frac{1}{x} dx + \frac{1}{y} dy + \frac{1}{z} dz$ , por lo que  $\varphi = \ln xyz + c$ , es decir:

$\int_{(1,1,1)}^{(x,y,\frac{1}{xy})} d\varphi = \varphi(x, y, \frac{1}{xy}) - \varphi(1, 1, 1) = \ln(xy \frac{1}{xy}) - \ln 1 = 0 - 0 = 0$ , o sea que la integral curvilínea de cualquier curva en el primer octante es nula.

65. En este problema se trata el trabajo de una fuerza en el plano.

a) En cada punto del plano, sobre un punto material actúa una fuerza cuya magnitud es constante e igual a  $F$  y cuya dirección sigue el lado positivo del eje  $x$ . Determinar el trabajo realizado por esta fuerza, cuando el punto se desplaza a lo largo de la circunferencia  $x^2 + y^2 = a^2$  situada en el primer cuadrante.

b) Sobre cada punto del plano, actúa una fuerza  $\mathbf{F}$  que es igual a  $(xy, x + y)$ . Calcular el trabajo realizado por  $\mathbf{F}$  al desplazarse desde  $(0, 0)$  hasta el punto  $(1, 1)$  a lo largo de:

$\alpha)$  la región  $y = x$                        $\beta)$  la parábola  $y = x^2$

$\gamma)$  una trayectoria de dos eslabones, cuyos lados se encuentran sobre los ejes coordenados. Considere los dos casos.

c) En cada punto  $M$  de la elipse  $x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$ , está aplicada la fuerza  $\mathbf{F}$  cuyo valor es igual a la distancia al centro de la elipse, dirigida al centro de la misma.

$\alpha)$  Calcular el trabajo realizado por la fuerza  $\mathbf{F}$  al desplazar el punto  $M$  a lo largo de la elipse situada en el primer cuadrante.

$\beta)$  Calcular el trabajo cuando se recorre toda la elipse.

d) Si la fuerza  $\mathbf{F} = (2xy, x^2)$ , probar que el trabajo realizado por la fuerza, depende sólo de su posición inicial y final y no depende de la forma del trayecto. Calcular el trabajo al desplazarse desde el punto  $(1, 0)$  hasta el punto  $(0, 3)$ .

e) La magnitud de la fuerza es inversamente proporcional a la distancia del punto al plano  $xy$ . La fuerza está dirigida hacia el origen de coordenadas. Calcular el trabajo al desplazarse el punto bajo la acción de esta fuerza a lo largo de la recta  $x = at$ ,  $y = bt$ ,  $z = ct$ , desde el punto  $(a, b, c)$  hasta el punto  $(2a, 2b, 2c)$ .

f) La magnitud de la fuerza es inversamente proporcional a la distancia que media entre

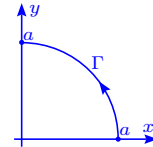
el punto de su aplicación y el eje  $z$ . La fuerza es perpendicular a este eje y está dirigida hacia él. Calcular el trabajo al desplazarse el punto bajo la acción de dicha fuerza a lo largo de la circunferencia  $x = \cos t$ ,  $y = 1$ ,  $z = \sin t$ , desde el punto  $(1, 1, 0)$  hasta el punto  $(0, 1, 1)$ .

g) Demostrar que el trabajo de la fuerza de gravitación de dos masas puntuales, efectuado al desplazarse una de ellas no depende de la forma de la trayectoria. La magnitud de la fuerza de atracción  $F$  la establece la ley de Newton  $F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$ , donde  $r$  es la distancia entre los puntos,  $m_1$  y  $m_2$  son las masas concentradas en dichos puntos,  $G$  es la constante de gravitación.

### Solución

a) La fuerza  $\mathbf{F} = (0, F)$ , por lo que el trabajo es:

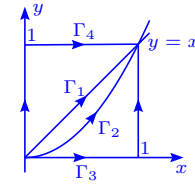
$$T = \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma} F dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} Fa \cos t dt = Fa \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = Fa.$$



b) En este caso el trabajo es:

$$T = \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma} xy dx + (x + y) dy.$$

$$\alpha) \Gamma_1 : y = x, \text{ entonces } T = \int_0^1 (x^2 + 2x) dx = \left( \frac{1}{3}x^3 + x^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{4}{3}.$$



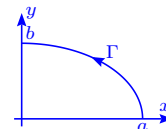
$$\beta) \Gamma_2 : y = x^2, \text{ entonces } T = \int_0^1 (x^3 + (x + x^2)2x) dx = \int_0^1 (3x^3 + 2x^2) dx = \left( \frac{3}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{9+8}{12} = \frac{17}{12}.$$

$$\gamma) \Gamma_3 : [0, 1] \times \{0\} \cup \{1\} \times [0, 1], \text{ entonces } T = \int_0^1 x \cdot 0 dx + \int_0^1 (x + 0)0 + \int_0^1 (1 + y) dy = \left( y + \frac{1}{2}y^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{2}.$$

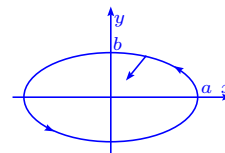
$$\delta) \Gamma_4 : \{0\} \times [0, 1] \cup [0, 1] \times \{1\}, \text{ entonces } T = \int_0^1 y dy + \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}y^2 \Big|_0^1 + \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^1 = 1.$$

c) La fuerza  $\mathbf{F}$  es tal que  $\|\mathbf{F}\| = \|\mathbf{r}\|$  i.e.  $\mathbf{F} = -\|\mathbf{r}\| \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} = -\mathbf{r} = -(x, y)$  y el trabajo es:

$$\begin{aligned} \alpha) T &= \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\Gamma} (x, y) \cdot (dx, dy) = - \int_{\Gamma} x dx + y dy = \\ &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-a^2 \sin t \cos t + b^2 \sin t \cos t) dt = -(b^2 - a^2) \frac{\sin^2 t}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \frac{1}{2}(a^2 - b^2). \end{aligned}$$



$$\beta) T = \int_0^{2\pi} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = (a^2 - b^2) \frac{1}{2} \sin^2 t \Big|_0^{2\pi} = 0.$$



$$d) \alpha) \text{ El trabajo } T = \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma} 2xy dx + x^2 dy = \int_{\Gamma} d(x^2 y) =$$

$$\int_{(a_1, a_2)}^{(b_1, b_2)} d(x^2 y) = x^2 y \Big|_{(a_1, a_2)}^{(b_1, b_2)} = b_1^2 b_2 - a_1^2 a_2.$$

$$\beta) \text{ Si } (a_1, a_2) = (0, 1) \text{ y } (b_1, b_2) = (0, 3), \text{ entonces } T = (-1)^2 \cdot 0 - 0^2 \cdot 3 = 0.$$

e) La función  $\mathbf{F} = -\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} \frac{k}{z} = -\frac{k}{\|\mathbf{r}\|} \left( \frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1 \right)$  y  $\Gamma$  es  $(a, b, ct)$ ,  $1 \leq t \leq 2$ , entonces:

$$T = - \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = k \int_{\Gamma} \frac{x}{\|\mathbf{r}\|} \frac{dx}{z} + \frac{y}{\|\mathbf{r}\|} \frac{dy}{z} + \frac{dz}{\|\mathbf{r}\|} =$$

$$k \int_1^2 \left( \frac{at}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 t}} \cdot \frac{a}{ct} + \frac{bt}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 t}} \cdot \frac{b}{ct} + \frac{ct}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 t}} \right) dt =$$

$$k \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} c} \int_1^2 \frac{dt}{t} = \frac{k}{c} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \ln 2.$$

f) Tenemos que  $\|\mathbf{F}\| \propto \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  i.e.  $\mathbf{F} = \left( 0, 0, \frac{-k}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$  y la curva  $\Gamma$  es  $(\cos t, 1, \sin t)$ ,

$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ , entonces el trabajo es:

$$T = \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\Gamma} \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}} dz = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k \cos t}{\sqrt{1 + \cos^2 t}} dt = -k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t dt}{\sqrt{2 - \sin^2 t}} =$$

$$-k \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2 - x^2}} = -k \arcsen \frac{x}{\sqrt{2}} \Big|_0^1 = -k \arcsen \frac{\sqrt{2}}{2} = -k \frac{\pi}{4}.$$

g) Se tiene que  $\|\mathbf{F}\| = \frac{Gm_1 m_2}{r^2}$ , o sea  $\mathbf{F} = -Gm_1 m_2 \frac{\mathbf{r}}{r^3}$ , entonces el trabajo es:

$$T = \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma} -Gm_1 m_2 \frac{xdx + ydy + z dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_{\Gamma} -Gm_1 m_2 d\left(-\frac{1}{r}\right) = Gm_1 m_2 \frac{1}{r} \Big|_{(a_1, a_2)}^{(b_1, b_2)} =$$

$$Gm_1 m_2 \left( \frac{1}{\|(b_1, b_2)\|} - \frac{1}{\|(a_1, a_2)\|} \right),$$

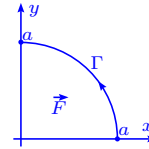
o sea que el trabajo realizado por la fuerza  $\mathbf{F}$  no depende de la forma de la trayectoria; depende únicamente del punto inicial y del punto final de la trayectoria.

66. Un campo está generado por una fuerza de magnitud constante  $F$ , que tiene la dirección del semi-eje positivo  $x$ . Determinar el trabajo realizado por dicho campo, cuando un punto

material describe en el sentido positivo, el cuarto de círculo  $x^2 + y^2 = a^2$  que se encuentra en el primer cuadrante.

**Solución** La fuerza  $\mathbf{f} = (F, 0)$ , por lo que el trabajo es:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{\Gamma} F dx + 0 dy \\ &= \int_0^a F dx = Fa. \end{aligned}$$

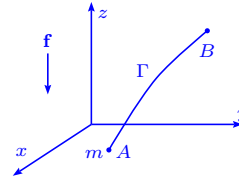


67. Hallar el trabajo que realiza la fuerza de gravedad al trasladar un punto material de masa  $m$ , desde la posición  $A(x_1, y_1, z_1)$  hasta la posición  $B(x_2, y_2, z_2)$  (el eje  $z$  está dirigido verticalmente hacia arriba).

La fuerza de gravedad la describimos con  $\mathbf{f} = (0, 0, -mg)$ , entonces:

**Solución**

$$\begin{aligned} \text{Trabajo} &= \int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma} -mg dz \\ &= \int_{z_1}^{z_2} -mg dz = mg(z_1 - z_2). \end{aligned}$$

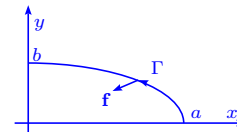


68. Hallar el trabajo de una fuerza elástica dirigida hacia el origen de coordenadas, cuya magnitud es proporcional al alejamiento del punto al origen de coordenadas, si el punto de aplicación de dicha fuerza describe en el sentido positivo, el cuarto de elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  situado en el primer cuadrante.

**Solución** Se tiene que la fuerza  $\mathbf{f} = -kr = k(x, y)$ ,

entonces el trabajo realizado por  $\mathbf{f}$  es:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} &= -k \int_{\Gamma} x dx + y dy = -k \int_0^{\pi/2} (a^2 \cos t (-\sin t) + b^2 \sin t \cos t) dt \\ &= -k(b^2 - a^2) \int_0^{\pi/2} \sin t \cos t dt = k(a^2 - b^2) \frac{\sin^2 t}{2} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} k(a^2 - b^2). \end{aligned}$$



69. Determinar la función potencial de la fuerza  $\mathbf{f}(x, y, z)$  y determinar el trabajo realizado por dicha fuerza en el camino que se indica, si:

a)  $X = 0, Y = 0, Z = -mg$  (fuerza de gravedad) y el punto se desliza desde la posición

$A(x_1, y_1, z_1)$  a la posición  $B(x_2, y_2, z_2)$ .

b)  $X = -\mu \frac{x}{r^3}$ ,  $Y = -\mu \frac{y}{r^3}$ ,  $Z = -\mu \frac{z}{r^3}$ , donde  $\mu$  es la constante y  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  (fuerza de atracción de Newton) y el punto material se desplaza desde el punto  $A(a, b, c)$  hasta infinito.

c)  $X = -k^2x$ ,  $Y = -k^2y$ ,  $Z = -k^2z$ , donde  $k = \text{constante}$  (fuerza elástica), estando el punto inicial de camino en la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  y el final en la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$  ( $a > r$ ).

### Solución

a)  $\mathbf{f} = (0, 0, -mg)$ , el potencial es  $\varphi = -mgz + c$ , por lo que:

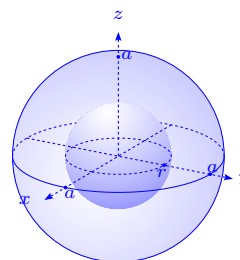
$$\int_A^B \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B -mg dz = \int_{z_1}^{z_2} -mg dz = -mg(z_2 - z_1).$$

b) La fuerza se puede escribir  $\mathbf{f} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r}$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  y el potencial es  $\varphi = -\mu \frac{1}{r}$ , ya que  $d\varphi = -\mu \left( \frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3} \right) \cdot (dx, dy, dz) = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$ , es decir:

$$\int_{(a,b,c)}^{\infty} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(a,b,c)}^{\infty} d\varphi = -\mu \frac{1}{r} \Big|_{(a,b,c)}^{\infty} = \frac{\mu}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

c)  $\mathbf{f} = -k^2 \mathbf{r}$ ,  $\mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = -k^2(x dx + y dy + z dz)$ , entonces el potencial es  $\varphi = -\frac{1}{2}k^2(x^2 + y^2 + z^2) + c$ , por lo tanto:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma} d\varphi = \varphi \Big|_a^r = -\frac{1}{2}k^2(r^2 - a^2) = \frac{1}{2}k^2(a^2 - r^2).$$



70. En cada caso determinar si  $\mathbf{f}$  es o no el gradiente de un campo escalar. Cuando  $\mathbf{f}$  sea un gradiente, hallar la correspondiente función potencial  $\varphi$ .

a)  $\mathbf{f}(x, y) = (x, y)$

b)  $\mathbf{f}(x, y) = (3x^2y, x^3)$

c)  $\mathbf{f}(x, y) = (2xe^y + y), x^2e^y + x - 2y)$

d)  $\mathbf{f}(x, y) = (\text{sen } y - y \text{sen } x + x, \cos x + x \cos y + y)$

e)  $\mathbf{f}(x, y) = (\text{sen}(xy) + xy \cos(xy), x^2 \cos(xy))$

f)  $\mathbf{f}(x, y, z) = (x, y, z)$

g)  $\mathbf{f}(x, y, z) = (x + z, -y - z, x - y)$

$$\text{h) } \mathbf{f}(x, y, z) = (2xy^3, x^2, 3x^2yz^2)$$

$$\text{i) } \mathbf{f}(x, y, z) = (3y^4z^2, 4x^3z^2, -3x^2y^2)$$

$$\text{j) } \mathbf{f}(x, y, z) = (2x^2 + 8xy^2, 3x^3y - 3xy, -4y^2z^2 - 2x^3z)$$

$$\text{k) } \mathbf{f}(x, y, z) = (y^2 \cos x + z^3, -4 + 2y \operatorname{sen} x, 3xz^2 + 2)$$

$$\text{l) } \mathbf{f}(x, y, z) = (4xy - 3x^2y^2 + 1, 2(x^2 + 1), -2x^3z - 3z^2).$$

### Solución

a) Sí es un gradiente. Aplicando la fórmula de construcción de la función potencial, tenemos:

$$\int x \, dx = \frac{x^2}{2} + A(y) = \frac{y^2}{2} + B(x) = \int x \, dy \implies \varphi = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + C \text{ sirve como potencial.}$$

b) Sí es un gradiente. Si aplicamos la construcción de la función potencial se tiene:

$$\int 3x^2y \, dx = x^3y + A(y) = x^3y + B(x) = \int x^3 \, dy \implies \varphi = x^3y + C \text{ y sirve como potencial.}$$

c) Sí es un gradiente. Si aplicamos la construcción de la función potencial:

$$\int (2xe^y + y) \, dx = x^2e^y + yx + A(y) = x^2e^y + yx - y^2 + B(x) = \int (x^2e^y + x - 2y) \, dy \implies \varphi = x^2e^y + yx - y^2 + C \text{ sirve como potencial.}$$

d) Sí,  $\mathbf{f}$  es un gradiente. Aplicando la construcción de la función potencial:

$$\int (\operatorname{sen} y - y \operatorname{sen} x + x) \, dx = x \operatorname{sen} y + y \cos x + \frac{x^2}{2} + A(y) = y \cos x + x \operatorname{sen} y + \frac{y^2}{2} + B(x) = \int (\cos x + x \cos y + y) \, dy \implies \varphi = x \operatorname{sen} y + y \cos x + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + C \text{ sirve como potencial.}$$

e) Si,  $\mathbf{f}$  es un gradiente. Aplicando la construcción de la función potencial:

$$\int (\operatorname{sen} xy + xy \cos xy) \, dx = x \operatorname{sen} xy + A(y) = x \operatorname{sen} xy + B(x) = \int x^2 \cos xy \, dy \implies \varphi = x \operatorname{sen} xy + C \text{ sirve como función potencial.}$$

f) Si,  $\mathbf{f}$  es un gradiente. Aplicando la construcción de la función potencial:

$$\int x \, dx = \frac{x^2}{2} + A(y, z), \int y \, dy = \frac{y^2}{2} + B(x, z), \int z \, dz = \frac{z^2}{2} + C(y, x) \implies \varphi = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} + C \text{ sirve como función potencial.}$$

g) Si,  $\mathbf{f}$  es un gradiente. Aplicando la construcción de la función potencial:

$$\int (x + z) \, dx = \frac{x^2}{2} + zx + A(y, z), \int -(y + z) \, dy = -\frac{y^2}{2} - yz + B(x, z), \int (x - y) \, dz =$$

$xz - yz + C(x, y) \implies \varphi = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + xz - yz + C$  sirve como potencial.

h)  $f$  no es un gradiente, pues si fuese el gradiente de  $\varphi$ , tendríamos  $\mathbf{f} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$  y por lo tanto,  $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x} \implies 3 \cdot 2xy^2 = 0$ , que es una contradicción.

i)  $f$  no es un gradiente, pues si fuese el gradiente de  $\varphi$  se tendría que  $\mathbf{f} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$  y por lo tanto,  $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x} \implies 8x^3z = -6x^2y$ , que es una contradicción.

j)  $f$  no es un gradiente, pues si fuese el gradiente de  $\varphi$  tendríamos que  $\mathbf{f} = \left(\frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\varphi}{dy}, \frac{d\varphi}{dz}\right)$  y por lo tanto,  $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x} \implies 4x + 8y^2 = 3x^2 - 3x$ , que es una contradicción.

k) Sí es un gradiente. Aplicando la construcción de la función potencial:

$\int (y^2 \cos x + z^3) dx = y^2 \sin x + z^3 x + A(y, z)$ ,  $\int (-4 + 2y \sin x) dy = -4y + \sin xy^2 + B(x, z)$ ,  
 $\int (3xz^2 + 2) dz = xz^3 + 2z + C(x, y) \implies \varphi = y^2 \sin x + z^3 x + 2z - 4y + C$  sirve como la función potencial.

l)  $f$  es un gradiente. Aplicando la construcción de la función potencial:

$\int (4xy - 3x^2z^2 + 1) dx = 2x^2y - z^2x^3 + x + A(y, z)$ ,  $\int (2x^2 + 2) dy = 2x^2y + 2y + B(x, z)$ ,  
 $\int (-2x^3z - 3z^2) dz = -z^2x^3 - z^3 + C(x, y) \implies \varphi = 2x^2y - z^2x^3 + x + 2y - z^3 + C$  sirve como la función potencial.

### 2.6.1 Formas diferenciales

71. Estudiar las formas diferenciales  $\omega$  siguientes, en dos variables. ¿Es  $\omega$  cerrada? ¿ $\omega$  es exacta? En caso afirmativo, calcular las primitivas de  $\omega$ ; si  $\omega$  no es cerrada, buscar una función  $\varphi(x, y) \neq 0$  en el que la forma diferencial  $\omega_1(x, y) = \varphi(x, y)\omega(x, y)$  sea cerrada ( $\varphi$  es el factor integrante de  $\omega$ ) ¿Es  $\omega_1$  exacta? En caso afirmativo calcular las primitivas de  $\omega_1$ :

a)  $(2x + 2y + e^{x+y})(dx + dy)$

b)  $\frac{xdy - ydx}{(x - y)^2}$

c)  $\frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} - ydy$

d)  $((1 + 2xy)dx + 2y^2dy) \cos(x^2 + y^2) + ((1 - 2xy)dy - 2x^2dx) \sin(x^2 + y^2)$

e)  $\frac{y^2dx + x^2dy}{(x + y)^2}$

- f)  $\frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2 + y^2}$
- g)  $(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}((1+x^2)dy + (xy-2x^2-1)dx)$
- h)  $\frac{1}{(1-x^2)^2 + y^4} (2xy^2dx + 2(1-x^2)ydy)$
- i)  $\frac{(ax+by)(xdy-ydx)}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$
- j)  $\frac{1}{x^2y} dx - \frac{1}{xy^2} dy$ ,  $\varphi(x, y)$  depende sólo de  $x^2 + y^2$
- k)  $(x^2 + y^2 - 1)dx - 2ydy$ ,  $\varphi(x, y)$  depende sólo de  $x$
- l)  $y^2dx + x^2dy$ ,  $\varphi(x, y)$  depende sólo de  $x + y$
- m)  $\frac{ydx - xdy}{xy - 1}$ ,  $\varphi(x, y)$  depende sólo de  $xy$
- n)  $2x(y-1)dx - (x^2-1)dy$ ,  $\varphi(x, y)$  depende sólo de  $x$
- o)  $(x^2 + y^2 - 1)dx - 2xydy$ ,  $\varphi(x, y)$  depende sólo de  $x^2 - y^2$
- p)  $y(1+x)e^{-y}dx + x(1-y)e^{-y}dy$ ,  $\varphi(x, y)$  depende sólo de  $x$
- q)  $(1+(x+y)y)dx + (1+(x+y)x)dy$ ,  $\varphi(x, y)$  depende sólo de  $xy$ .

**Solución**

a)  $w = (2x + 2y + e^{x+y})dx + (2x + 2y + e^{x+y})dy = Pdx + Qdy$ ;  $w$  es exacta en  $\mathbb{R}^2$ , pues

$\frac{\partial P}{\partial y} = 2 + e^{x+y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ . Además:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y + e^{x+y} &\implies f = x^2 + 2xy + e^{x+y} + C_1(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2x + 2y + e^{x+y} &\implies f = 2xy + y^2 + e^{x+y} + C_2(x) \end{aligned} \right\} \implies f = (x+y)^2 + e^{x+y} + C.$$

Las primitivas de  $w$  son las aplicaciones  $f(x, y) = (x+y)^2 + e^{x+y} + C$ ,  $C \in \mathbb{R}$ .

b)  $w = \frac{x}{(x-y)^2}dy - \frac{y}{(x-y)^2}dx = Pdx + Qdy$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{x+y}{(x-y)^2} = \frac{\partial P}{\partial y} \implies w$  es cerrado sobre  $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq y\}$  y es  $w$  exacta sobre

$U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x - y > 0\}$  y  $U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x - y < 0\}$ . Por otro lado, tenemos que:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{(x-y)^2} &\implies f = \frac{y}{x-y} + C_1(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{(x-y)^2} &\implies f = -\frac{x}{x+y} + C_2(x) \end{aligned} \right\} \implies f = \frac{y}{x-y} + C.$$

Las primitivas de  $w$  son  $f(x, y) = \frac{x}{x-y} + C_i$ , sobre  $U_i$ ,  $C_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2$ .

$$c) w = \frac{x}{x^2 + y^2} dx + \frac{y - y(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} dy = P dx + Q dy.$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x} \implies w \text{ es exacta sobre } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}. \text{ Además:}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2} &\implies f = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + C_1(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2} - y &\implies f = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) - \frac{1}{2} y^2 + C_2(x) \end{aligned} \right\} \implies f = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) - \frac{1}{2} y^2 + C.$$

Las primitivas de  $w$  son las funciones  $f(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) - \frac{1}{2} y^2 + C$ ,  $C \in \mathbb{R}$ .

$$d) w = ((1 + 2y) \cos(x^2 + y^2) - 2x^2 \sin(x^2 + y^2)) dx +$$

$$((1 - 2xy) \sin(x^2 + y^2) - 2y^2 \cos(x^2 + y^2)) dy = P dx + Q dy.$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} = 2x \cos(x^2 + y^2) - (1 + 2xy)2y \sin(x^2 + y^2) - 4x^2 y \cos(x^2 + y^2) \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = -2y \sin(x^2 + y^2) + (1 - 2xy)2x \cos(x^2 + y^2) - 4xy^2 \sin(x^2 + y^2) \end{aligned} \right\} \implies \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

y  $w$  es exacta sobre  $\mathbb{R}^2$ . Además:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} = P &\implies f = y \sin(x^2 + y^2) + x \cos(x^2 + y^2) + C_1(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = Q &\implies f = x \cos(x^2 + y^2) + y \sin(x^2 + y^2) + C_2(x) \end{aligned} \right\} \implies$$

$$f = x \cos(x^2 + y^2) + y \sin(x^2 + y^2) + C.$$

Las primitivas de  $w$  es la familia de funciones  $f(x, y) = x \cos(x^2 + y^2) + y \sin(x^2 + y^2) + C$ .

$$e) w = \frac{y^2}{(x + y)^2} dx + \frac{x^2}{(x + y)^2} dy = P dx + Q dy$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \text{ por lo tanto } w \text{ es cerrada sobre } U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y \neq 0\} \text{ y es exacta sobre}$$

$$U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y > 0\} \text{ y sobre } U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y < 0\}.$$

Por otro lado:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^2}{(x + y)^2} &\implies f = \frac{xy}{x + y} + C_1(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2}{(x + y)^2} &\implies f = \frac{xy}{x + y} + C_2(y) \end{aligned} \right\} \implies f = \frac{xy}{x + y} + C.$$

Las primitivas de  $w$  sobre  $U_i$  es la familia  $f(x, y) = \frac{xy}{x + y} + C_i$ ,  $C_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2$ .

$$f) w = \frac{x - y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x + y}{x^2 + y^2} dy = P dx + Q dy.$$

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-x^2 + y^2 - 2xy}{(x^2 + y^2)^2}$ , por lo que  $w$  es exacta sobre  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  y se tiene:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x-y}{x^2+y^2} &\implies f(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) - \arctan \frac{x}{y} + C_1(y) \\ \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x+y}{x^2+y^2} &\implies f(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + \arctan \frac{y}{x} + C_2(x) \end{aligned} \right\} \implies$$

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + \arctan \frac{x}{y} + C,$$

es la familia de primitivas de  $w$ . Recuerde que  $\arctan \alpha + \arctan \frac{1}{\alpha} = \frac{\pi}{2}$ .

g)  $w = \frac{xy - 2x^2 - 1}{\sqrt{1+x^2}} dx + \sqrt{1+x^2} dy = P dx + Q dy$ .

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , por lo que  $w$  es exacta en  $\mathbb{R}^2$ . Además:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{xy - 2x^2 - 1}{\sqrt{1+x^2}} &\implies f(x, y) = (y-x)\sqrt{1+x^2} + C_1(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{1+x^2} &\implies f(x, y) = y\sqrt{1+x^2} + C_2(x) \end{aligned} \right\} \implies$$

$$f(x, y) = (y-x)\sqrt{1+x^2} + C,$$

es la familia de primitivas de  $w$  sobre  $\mathbb{R}^2$ .

h)  $w = \frac{2xy^2}{(1-x^2)^2 + y^4} dx + \frac{2(1-x^2)y}{(1-x^2)^2 + y^4} dy = P dx + Q dy$ .

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{4xy((1-x^2) - y^4)}{((1-x^2)^2 + y^4)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  i.e.  $w$  es exacta sobre  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(-1, 0), (1, 0)\}$ .

Ahora:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xy^2}{(1-x^2) + y^4} &\implies f = -\arctan \frac{1-x^2}{y^2} + c_1(y), \text{ si } y \neq 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2(1-x^2)y}{(1-x^2) + y^4} &\implies f = \arctan \frac{y^2}{1-x^2} + c_2(x), \text{ si } y \neq 0 \end{aligned} \right\} \implies$$

$$f(x, y) = -\arctan \frac{1-x^2}{y^2} + C, \text{ si } y \neq 0,$$

pues  $\arctan \alpha + \arctan \frac{1}{\alpha} = \frac{\pi}{2}$ .

Cuando  $y = 0$  y  $|x| < 1$ , se tiene que  $f(x, y) = -\frac{\pi}{2} + C$ .

Cuando  $y = 0$  y  $|x| > 1$ , se tiene que  $f(x, y) = \frac{\pi}{2} + C$ .

De esta manera tenemos que las primitivas de  $w$  sobre  $U$  son las funciones:

$$f(x, y) = \begin{cases} -\arctan \frac{1-x^2}{y^2} + C & \text{si } y \neq 0, C \in \mathbb{R}, \\ \frac{\pi}{2} + C & \text{si } y = 0, |x| > 1, C \in \mathbb{R} \\ -\frac{\pi}{2} + C & \text{si } y = 0, |x| < 1, C \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

i)  $w = -\frac{(ax+by)y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dx + \frac{(ax+by)x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dy = Pdx + Qdy.$

$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{ax^3 + 2bx^2y - 2axy^2 - by^3}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{\partial Q}{\partial x} \implies w$  es exacta sobre  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ . Así:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(ax+by)y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \implies f = \frac{ay}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{bx}{\sqrt{x^2+y^2}} + C_1(y) \\ \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{ax^2+bxxy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \implies f = \frac{ay}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{bx}{\sqrt{x^2+y^2}} + C_2(x) \end{aligned} \right\} \implies$$

$$f(x, y) = \frac{ay - bx}{\sqrt{x^2+y^2}} + C,$$

es decir las primitivas de  $w$  es la familia de funciones  $f(x, y) = \frac{ay - bx}{\sqrt{x^2+y^2}} + C, C \in \mathbb{R}$ , sobre  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ .

j)  $w = \frac{1}{x^2y}dx - \frac{1}{xy^2}dy = Pdx + Qdy.$

$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{x^2y^2} \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{x^2y^2} \implies w$  no es cerrada sobre  $\mathbb{R}^{*2} = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \cup \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_-^* \cup \mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}_+^* \cup \mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}_-^*$ .

Si existe un factor integrante de la forma  $\varphi(x, y) = g(x^2 + y^2), g \in C^1, z = x^2 + y^2$ , debemos tener que  $w_1 = \frac{g(z)}{x^2y}dx - \frac{g(z)}{xy^2}dy$  es exacta, es decir:

$\frac{g'2x^2y^2 - x^2g}{x^4y^2} = -\frac{g'2x^2y^2 - y^2g}{x^2y^4} \implies g'(x^2+y^2)2x^2y^2 = 2x^2y^2g \implies \frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{1}{x^2+y^2} = \frac{1}{z} \implies \ln y = \ln z \implies g(z) = z = x^2 + y^2.$  De esta manera tenemos que:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^2+y^2}{x^2y} = \frac{1}{y} + \frac{y}{x^2} \implies f = \frac{x}{y} - \frac{y}{x} + C_1(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x^2+y^2}{xy^2} = -\frac{x}{y^2} - \frac{1}{x} \implies f = \frac{x}{y} - \frac{y}{x} + C_2(y) \end{aligned} \right\} \implies f(x, y) = \frac{x}{y} - \frac{y}{x} + C.$$

Finalmente, las primitivas de  $w_1$  son las familias de funciones  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{xy} + C_i$ , sobre cada uno de los cuatro cuadrantes  $U_i, i = 1, 2, 3, 4$ .

k)  $w = (x^2 + y^2 - 1)dx - 2ydy = Pdx + Qdy.$

Dado que  $\frac{\partial P}{\partial y} = 2y \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$  se tiene que  $w$  no es cerrada sobre  $\mathbb{R}^2$ . Si existe un factor integrante de la forma  $\varphi(x, y) = g(x)$ ,  $g \in C^1$  entonces debemos tener que  $w_1 = g(x)(x^2 + y^2 - 1)dx - g(x)2ydy$  es exacta, es decir:

$$g(x)2y = -g'(x)2y \implies \frac{g'(x)}{g(x)} = -1 \implies \ln g(x) = -x \text{ i.e. } g(x) = e^{-x}.$$

Finalmente tenemos:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= (x^2 + y^2 - 1)e^{-x} \implies f = -(x^2 + 2x + 1 + y^2)e^{-x} + C_1(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -2ye^{-x} \implies f = -y^2e^{-x} + C_2(x) \end{aligned} \right\} \implies$$

$$f(x, y) = -((x + 1)^2 + y^2)e^{-x} + C,$$

es decir las primitivas de  $w$ , son las familias de funciones  $f(x, y) = -((x + 1)^2 + y^2)e^{-x} + C$ ,  $C \in \mathbb{R}$ .

l)  $w = y^2dx + x^2dy = Pdx + Qdy$ .

Como  $\frac{\partial P}{\partial x} = 2y \neq \frac{\partial Q}{\partial y} = 2x$ ,  $w$  no es cerrada sobre  $\mathbb{R}^2$ .

Si existe un factor integrante de la forma  $\varphi(x, y) = g(x + y)$ ,  $g \in C^1$ ,  $z = x + y$ , entonces  $w_1 = y^2g(z)dx + x^2g(z)dy$  es exacta y tenemos que:

$$2yg + y^2g' = 2xg + x^2g' \implies 2(y - x)g = (x^2 - y^2)g' \implies \frac{g'(z)}{g(z)} = -\frac{2}{z} \implies$$

$$\ln g(z) = -\ln z^2 \implies g = \frac{1}{z^2} = \frac{1}{(x + y)^2} \implies w_1 = \frac{y^2}{(x + y)^2}dx + \frac{x^2}{(x + y)^2}dy$$

es la forma diferencial del ejercicio e).

m)  $w = \frac{y}{xy - 1}dx - \frac{x}{xy - 1}dy = Pdx + Qdy$ .

Tenemos que  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-1}{(xy - 1)^2} \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{(xy - 1)^2}$  i.e.  $w$  no es cerrada sobre  $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy \neq 1\}$ . Si existe un factor integrante de la forma  $\varphi(x, y) = g(xy)$ ,  $g \in C^1$ ,  $xy = z$ ,

entonces debemos tener que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{g(z)y}{xy - 1} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{g(z)x}{xy - 1} \right) \implies \frac{(g'(z)xy + g(z))(xy - 1) - xyg(z)}{(xy - 1)^2} = \\ &= \frac{-(g'(z)xy + g(z))(xy - 1) + xyg(z)}{(xy - 1)^2} \implies g'(z)xy(xy - 1) = g(z) \implies \frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{1}{z(z - 1)} = \\ &= \frac{1}{z - 1} - \frac{1}{z} \implies \ln g(z) = \ln \frac{z - 1}{z} \implies g(z) = \frac{z - 1}{z} = \frac{xy - 1}{xy}, \text{ si } xy \neq 1, xy \neq 0. \end{aligned}$$

De esta manera la región  $U$  se particiona en 6 regiones convexas y para cada una va a

existir una familia de funciones que son primitivas de  $w$ . Finalmente tenemos:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{y}{xy-1} \cdot \frac{xy-1}{xy} = \frac{1}{x} \implies f = \ln|x| + C_1(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{x}{xy-1} \cdot \frac{xy-1}{xy} = \frac{1}{y} \implies f = \ln|y| + C_2(x) \end{aligned} \right\} \implies f(x, y) = \ln|x| - \ln|y| + C,$$

es decir las primitivas de  $w_1$  son las familias de funciones  $f(x, y) = \ln\left|\frac{x}{y}\right| + C_i, i = 1, \dots, 6$ .

Observemos que en este caso, las aplicaciones son extendibles con continuidad sobre el conjunto  $U$ .

$$\text{n) } w = 2x(y-1)dx - (x^2-1)dy = Pdx + Qdy.$$

Se observa que  $w$  no es cerrada en  $\mathbb{R}^2$ , ya que  $\frac{\partial P}{\partial y} = 2x \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = -2x$ .

Si existe un factor integrante de la forma  $\varphi(x, y) = g(x)$ ,  $g \in C^1$ , debemos tener que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}(2xg(x)(y-1)) &= -\frac{\partial}{\partial x}(g(x)(x^2-1)) \implies 2xg(x) = -2xg(x) - (x^2-1)g'(x) \implies \frac{g'(x)}{g(x)} = \\ \frac{-4x}{x^2-1} &= -\frac{2}{x+1} - \frac{2}{x-1} \implies g(x) = \frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{1}{(x^2-1)^2}. \text{ Así:} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{2x(y-1)}{(x^2-1)^2} \implies f = \frac{1-y}{x^2-1} + C_1(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{x^2-1} \implies f = \frac{y}{x^2-1} + C_2(x) \end{aligned} \right\} \implies f(x, y) = \frac{1-y}{x^2-1} + C.$$

Finalmente la primitiva de  $w$ , son las familias de funciones  $f(x, y) = \frac{1-y}{x^2-1} + C_i, i = 1, 2, 3$ ,

sobre cada una de las tres regiones  $U_1 = ]-\infty, -1[ \times \mathbb{R}, U_2 = ]-1, 1[ \times \mathbb{R}, U_3 = ]1, +\infty[ \times \mathbb{R}$ .

$$\text{o) } w = (x^2 + y^2 - 1)dx - 2xydy = Pdx + Qdy.$$

Es claro que  $\frac{\partial P}{\partial x} = 2x \neq \frac{\partial Q}{\partial y} = -2x$  i.e.  $w$  no es cerrada en  $\mathbb{R}^2$ .

Si existe un factor integrante  $\varphi(x, y) = g(x^2 - y^2)$ ,  $g \in C^1$ ,  $z = x^2 - y^2$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}(g(z)(x^2 + y^2 - 1)) &= \frac{\partial}{\partial x}(g(z)2xy) \implies g'(z)(-2y)(x^2 + y^2 - 1) + 2yg(z) = -g'(z)2x(2xy) - \\ g(z)2y &\implies g'(z)2y(-x^2 - y^2 + 1 + 2x^2) = -4yg(z) \implies \frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{2}{x^2 - y^2 + 1} = \frac{2}{z+1} \implies \\ g(z) &= \frac{1}{(z+1)^2} = \frac{1}{(x^2 - y^2 + 1)^2}, \text{ es decir } \varphi(x, y) = \frac{1}{(x^2 - y^2 + 1)^2} \text{ es un factor integrante} \end{aligned}$$

de  $w$ , sobre  $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - y^2 + 1 \neq 0\}$ . Así  $w$  es exacta y

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{x^2 + y^2 - 1}{(x^2 - y^2 + 1)^2} \implies f = \frac{-x}{x^2 - y^2 + 1} + C_1(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{-2xy}{(x^2 - y^2 + 1)^2} \implies f = \frac{-x}{x^2 - y^2 + 1} + C_2(x) \end{aligned} \right\} \implies f(x, y) = \frac{-x}{x^2 - y^2 + 1} + C_i, i = 1, 2, 3,$$

son las primitivas de  $w_1$  sobre cada una de las tres regiones convexas de  $U$ , que parten el plano por la ecuación  $x^2 - y^2 + 1 = 0$ .

$$\text{p) } w = y(1+x)e^{-y}dx + x(1-y)e^{-y}dy = Pdx + Qdy.$$

La forma diferencial  $w$  no es exacta sobre  $\mathbb{R}^2$  ya que  $\frac{\partial P}{\partial y} = (1+x)(1-y)e^{-y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = (1-y)e^{-y}$ . Si  $w$  tiene un factor integrante de la forma  $\varphi(x, y) = g(x)$ ,  $g \in C^1$ , entonces debemos tener que:

$$\frac{\partial}{\partial y}(g(x)(1+x)y e^{-y}) = \frac{\partial}{\partial x}(g(x)x(1-y)e^{-y}) \implies g(x)(1+x)(1-y)e^{-y} = (g'(x)x + g(x))(1-y)e^{-y} \implies \frac{g'(x)}{g(x)} = 1 \implies g(x) = e^x.$$

De esta forma tenemos:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} = y(1+x)e^{x-y} &\implies f = xy e^{x-y} + C_1(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x(1-y)e^{x-y} &\implies f = xy e^{x-y} + C_2(x) \end{aligned} \right\} \implies f(x, y) = xy e^{x-y} + C,$$

es la familia de primitivas de  $w$ , sobre  $\mathbb{R}^2$ .

$$\text{q) } w = (1+(x+y)y)dx + (1+(x+y)x)dy = Pdx + Qdy.$$

La forma diferencial  $w$  no es exacta sobre  $\mathbb{R}^2$ , ya que  $\frac{\partial P}{\partial y} = x+2y \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x+y$ . Si  $w$  tiene un factor integrante de la forma  $\varphi(x, y) = g(x, y)$ ,  $z = xy$ ,  $g \in C^1$ , se tiene que:

$$\frac{\partial}{\partial y}(g(z)(1+(x+y)y)) = \frac{\partial}{\partial x}(g(z)(1+(x+y)x)) \implies g'(z)x(1+(x+y)y) + g(z)(2y+x) = g'(z)y(1+(x+y)x) + g(z)(2x+y) \implies g'(z)(x-y) = g(z)(x-y) \implies \frac{g'(z)}{g(z)} = 1, \text{ es decir } g(z) = e^z = e^{xy}. \text{ Así obtenemos que:}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} = e^{xy}(1+(x+y)y) &\implies f = (x+y)e^{xy} + C_1(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = e^{xy}(1+(x+y)x) &\implies f = (x+y)e^{xy} + C_2(x) \end{aligned} \right\} \implies f(x, y) = (x+y)e^{xy} + C,$$

es una familia de primitivas de  $w$  en  $\mathbb{R}^2$ .

72. La misma pregunta anterior, para el caso de formas diferenciales en tres variables.

$$\text{a) } 3(x^2 + 2xy + 2xz)dx + 3(x^2 + y^2)dy + 3(x^2 + z^2)dz$$

$$\text{b) } \left(\frac{1}{y} - \frac{z}{x^2}\right)dx + \left(\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}\right)dy + \left(\frac{1}{x} - \frac{y}{z^2}\right)dz$$

$$\text{c) } 2xzdx - 2yzdy + (z^2 - x^2 + y^2)dz, \varphi(x, y, z) \text{ depende sólo de } z$$

d)  $(y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$ ,  $\varphi(x, y, z)$  depende sólo de  $y - z$

e)  $yz(y + z)dx + zx(z + x)dy + xy(x + y)dz$ ,  $\varphi(x, y, z)$  depende sólo de  $x + y + z$ .

### Solución

a)  $w = 3(x^2 + 2xy + 2xz)dx + 3(x^2 + y^2)dy + 3(x^2 + z^2)dz = Pdx + Qdy + Rdz$ .

Dado que  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 6x$ ,  $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial z} = 6x$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} = 0$ , la forma diferencial  $w$  es exacta en  $\mathbb{R}^3$ , por lo que:

$$\left. \begin{aligned} P = \frac{\partial f}{\partial x} &\implies f = x^3 + 3x^2y + 3x^2z + C_1(y, z) \\ Q = \frac{\partial f}{\partial y} &\implies f = 3x^2y + y^3 + C_2(x, z) \\ R = \frac{\partial f}{\partial z} &\implies f = 3x^2z + z^3 + C_3(x, y) \end{aligned} \right\} \implies$$

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2y + 3x^2z + C,$$

es una familia de primitivas de  $w$ .

b)  $w = \left(\frac{1}{y} - \frac{z}{x^2}\right)dx + \left(\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}\right)dy + \left(\frac{1}{x} - \frac{y}{z^2}\right)dz = Pdx + Qdy + Rdz$ .

Es claro que debemos tener  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$ ,  $z \neq 0$ . Además:

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{y^2}$ ,  $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} = -\frac{1}{z^2} \implies w$  es exacta en cada una de los ocho octantes de  $\mathbb{R}^{*3}$  y tenemos:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y} - \frac{z}{x^2} &\implies f = \frac{x}{y} + \frac{z}{x} + C_1(y, z) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{z} - \frac{x}{y^2} &\implies f = \frac{y}{z} + \frac{x}{y} + C_2(x, z) \\ \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{x} - \frac{y}{z^2} &\implies f = \frac{z}{x} + \frac{y}{z} + C_3(x, y) \end{aligned} \right\} \implies$$

las primitivas sobre cada uno de los octantes, son las familias  $f(x, y, z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + C_i$ ,  $i = 1, \dots, 8$ .

c)  $w = 2xzdx - 2yzdy + (z^2 - x^2 + y^2)dz \implies Pdx + Qdy + Rdz$ .

Dado que  $\frac{\partial P}{\partial z} = 2x \neq \frac{\partial R}{\partial x} = -2x$ ,  $w$  no es cerrada en  $\mathbb{R}^3$ .

Si  $w$  admite un factor integrante de la forma  $\varphi(x, y, z) = g(z)$ ,  $g \in C^1$ , tenemos  $\frac{\partial}{\partial z}(2xzg(z)) = \frac{\partial}{\partial x}((z^2 - x^2 + y^2)g(z))$ ,  $\frac{\partial}{\partial y}(2xzg(z)) = \frac{\partial}{\partial x}(-2yzg(z)) = 0$ ,

$\frac{\partial}{\partial z}(2yzg(z)) = \frac{\partial}{\partial y}((z^2 - x^2 + y^2)g(z))$ , por lo que:

$$2x(g(z) + zg'(z)) = -2xg(z) \implies 2g(z) = -zg'(z) \implies g(z) = -\frac{1}{z^2},$$

es decir  $w_1$  es exacta sobre los conexos  $U_1 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+^*$  y sobre  $U_2 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_-^*$ . Además:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{z} &\implies f = \frac{x^2}{z} + C_1(y, z) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{xy}{z} &\implies f = \frac{-y^2}{z} + C_2(x, z) \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 1 + \frac{-x^2 + y^2}{z^2} &\implies f = z + \frac{x^2 - y^2}{z} + C_3(x, y) \end{aligned} \right\} \implies f = \frac{x^2 - y^2}{z} + z + C_i,$$

es una familia de primitivas sobre cada  $U_i$ ,  $i = 1, 2$ .

d)  $w = (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz = Pdx + Qdy + Rdz$ .

La forma diferencial  $w$  no es cerrada en  $\mathbb{R}^3$ , pues,  $\frac{\partial P}{\partial y} = 1 \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = -1$ .

Si  $w$  admite un factor integrante  $\varphi(x, y, z) = g(y - z)$ ,  $g \in C^1$ ,  $v = y - z$ , entonces debemos tener que:  $\frac{\partial}{\partial y}((y - z)g) = \frac{\partial}{\partial x}((z - x)g)$ ,  $\frac{\partial}{\partial z}((y - z)g) = \frac{\partial}{\partial x}((x - y)g)$ ,  $\frac{\partial}{\partial z}((z - x)g) = \frac{\partial}{\partial x}((x - y)g)$ , entonces  $g + (y - z)g' = -g \implies \frac{g'}{g} = -\frac{2}{y - z} = -\frac{2}{v} \implies \frac{1}{v^2} = \frac{1}{(y - z)^2}$ , i.e.  $w_1$  es exacta sobre los conexos  $U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y > z\}$  y sobre  $U_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y < z\}$ .

Así:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y - z} &\implies f = \frac{x}{y - z} + C_1(y, z) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{z - x}{(y - z)^2} &\implies f = -\frac{z - x}{y - z} = -\frac{z}{y - z} + \frac{x}{y - z} + C_2(y, z) \\ \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{x - y}{(y - z)^2} &\implies f = \frac{x - y}{y - z} = \frac{x}{y - z} - \frac{y}{y - z} + C_3(x, y) \end{aligned} \right\} \implies f = \frac{x - z}{y - z} + C_i,$$

son las primitivas de  $w$  sobre cada  $U_i$ ,  $i = 1, 2$ . Observe que  $\frac{y}{y - z} = -\frac{z}{y - z} + 1$ .

e)  $w = yz(y + z)dx + zx(z + x)dy + xy(x + y)dz = Pdx + Qdy + Rdz$ .

La forma diferencial no es cerrada en  $\mathbb{R}^3$  ya que  $\frac{\partial P}{\partial y} = 2yz + z^2 \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xz + z^2$ .

Si existe un factor integrante  $\varphi(x, y, z)$  de la forma  $g(x + y + z)$ ,  $g \in C^1$ ,  $x + y + z = v$  debemos tener que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}((yz + y + z)g(v)) &= \frac{\partial}{\partial x}((zx(z + x)g(v))) \implies z(y + z)g + yzg + yz(x + z)g' = z(x + z)g + xzg + \\ xz(x + z)g' &\implies 2(y - x)g = (y - x)(x + y + z)g' \implies \frac{g'}{g} = \frac{2}{v} \implies g(v) = \frac{1}{v^2} = \frac{1}{(x + y + z)^2}, \text{ por} \end{aligned}$$

lo que  $w_1$  es exacta sobre los conjuntos conexos  $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z > 0\}$  y sobre  $V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z < 0\}$ . Así tenemos:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{yz(y+z)}{(x+y+z)^2} \implies f = -\frac{yz(y+z)}{x+y+z} + yz + C_1(y, z) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{zx(z+x)}{(x+y+z)^2} \implies f = -\frac{zx(z+x)}{x+y+z} + xz + C_2(x, z) \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{xy(x+y)}{(x+y+z)^2} \implies f = -\frac{xy(x+y)}{x+y+z} + xy + C_3(x, y) \end{aligned} \right\} \implies f = \frac{xyz}{x+y+z} + C_i,$$

es una familia de primitivas de  $w$ , sobre los conjuntos  $U_i$ ,  $i = 1, 2$ .

Observemos que  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{xyz}{x+y+z} \right) = \frac{yz(y+z)}{(x+y+z)^2}$ .

73. Sea  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$  y  $\omega$  la forma diferencial definida por:

$$\omega(x, y) = \frac{(x^2 + y^2 + f(x, y))(ydx - xdy)}{x^2 + y^2}.$$

¿Cómo escoger  $f$  para que  $\omega$  sea exacta en  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ?

**Solución** Para que  $w = Pdx + Qdy$  sea exacta en  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  debemos tener:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= 1 + \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2} + y \frac{f_y(x, y)(x^2 + y^2) - 2yf(x, y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \\ &- \left[ 1 + \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2} + x \frac{f_x(x, y)(x^2 + y^2) - 2xf(x, y)}{(x^2 + y^2)^2} \right] \implies \\ 2 + \frac{2f(x, y)}{x^2 + y^2} + \frac{yf_y(x, y)(x^2 + y^2) - 2y^2f(x, y) + xf_x(x, y)(x^2 + y^2) - 2x^2f(x, y)}{(x^2 + y^2)^2} &= 0 \implies \\ 2 + \frac{2f}{x^2 + y^2} + \frac{yf_y + xf_x}{x^2 + y^2} - \frac{2f}{x^2 + y^2} &= 0 \implies yf_y + xf_x = -2(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

Si tomamos  $f$  de la forma  $f(x, y) = -(x^2 + y^2) + g(x, y)$ , transformamos la ecuación diferencial en homogénea, pues  $yf_y + xf_x = y(-2y + g_y) + x(-2x + g_x) = -2(x^2 + y^2) + xg_x + yg_y \implies xg_x + yg_y = 0$ .

Podemos resolver esta ecuación diferencial escribiéndola  $g_x + g_y \frac{y}{x} = 0$ , y tomando  $g(x, y) = h\left(\frac{y}{x}\right)$ ,  $h \in C^1$  ya que  $g_x + g_y \frac{y}{x} = h'\left(\frac{y}{x}\right) \left(-\frac{y}{x^2}\right) + h'\left(\frac{y}{x}\right) \frac{1}{x} \frac{y}{x} = 0$ .

Así tenemos que  $f(x, y) = -(x^2 + y^2) + h\left(\frac{y}{x}\right)$ , con  $h \in C^1$ ,  $w$  es exacta.

74. Determinar  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$  para que la forma diferencial  $\omega$  definida por  $\omega(x, y, z) = 2xzdx + f(y)g(z)dy + (x^2 + \frac{1}{2}y^2)dz$  sea cerrada en  $\mathbb{R}^3$ . Calcular las primitivas.

**Solución** Para que  $w = 2xzdx + f(y)g(z)dy + (x^2 + \frac{1}{2}y^2)dz = Pdx + Qdy + Rdz$  sea cerrada

debemos tener:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \implies f(y)g'(z) = y \implies \frac{f(y)}{y} = g'(z) = a \in \mathbb{R} \implies f(y) = ay, \quad g(z) = \frac{1}{\alpha}z\alpha\beta.$$

Así tenemos que las primitivas de  $w$  satisfacen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} = 2xz &\implies f = x^2z + C_1(y, z) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \alpha y \left( \frac{z}{\alpha} + \beta \right) &\implies f = \frac{1}{2}\alpha y^2 \left( \frac{z}{\alpha} + \beta \right) + C_2(x, z) \\ \frac{\partial f}{\partial z} = x^2 + \frac{1}{2}y^2 &\implies f = x^2z + \frac{1}{2}y^2z + C_3(x, y) \end{aligned} \right\} \implies f(x, y, z) = x^2z + \frac{1}{2}y^2z + \frac{1}{2}\alpha\beta y^2 + C.$$

75. A cada aplicación  $\varphi: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$  se asocia la forma diferencial  $\omega_\varphi$  definida sobre  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , por  $\omega_\varphi(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} [(x - y\varphi(x, y))dx + (x\varphi(x, y) + y)dy]$ .

a) Demostrar que  $\omega_\varphi$  es cerrada sii  $\varphi$  verifica una ecuación en derivadas parciales (E).

b) Demostrar que  $\varphi_0(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$  es solución de (E).

c) ¿La forma diferencial  $\omega_{\varphi_0}$  es exacta en  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ?

### Solución

a) La forma diferencial  $w_\varphi = \frac{x - y\varphi(x, y)}{x^2 + y^2}dx + \frac{x\varphi(x, y) + y}{x^2 + y^2}dy = Pdx + Qdy$  es cerrada si  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  sobre  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , es decir que:

$$\frac{x(2y)}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{(\varphi - y\varphi_x)(x^2 + y^2) - 2y(y\varphi)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y(2x)}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{(y - x\varphi_x)(x^2 + y^2) - 2x^2\varphi}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\implies (\varphi - x\varphi_x)(x^2 + y^2) + (\varphi - y\varphi_y)(x^2 + y^2) = 2(x^2 + y^2)\varphi = 0 \implies x\varphi_x + y\varphi_y = 0, \text{ es decir}$$

la ecuación diferencial en derivadas parciales que debe satisfacer  $\varphi$  es:

$$x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \quad (E)$$

b) Verifiquemos que  $\varphi_0 = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$  satisface la ecuación diferencial (E).

$$\text{En efecto, } x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi}{\partial y} = x \frac{2x(x^2 + y^2) - 2x^3}{(x^2 + y^2)^2} - y \frac{2x^2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x^2y^2 - 2x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0.$$

c)  $w_{\varphi_0}$  es exacta en  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  ya que:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{x^2(x^2 + y^2)^2 - x^2y2(x^2 + y^2)2y}{(x^2 + y^2)^4} = -\frac{x(x^3 + 2x^2y - 3xy^2 + 2y^3)}{(x^2 + y^2)^3},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{3x^2(x^2 + y^2)^2 - x^3 2(x^2 + y^2)2x}{(x^2 + y^2)^4} + \frac{2xy(x^2 + y^2) - 2x^3y}{(x^2 + y^2)^2} =$$

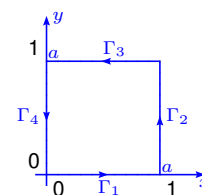
$$- \frac{x(x^3 + 2x^2y - 3xy^2 + 2y^3)}{(x^2 + y^2)^3}, \text{ i.e. } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ en } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

76. Hallar el trabajo realizado por la fuerza  $\mathbf{f}(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ , al mover una partícula en sentido contrario al de las agujas del reloj, recorriendo una vez al contorno del cuadrado limitado por los ejes coordenados y las rectas  $x = a$  y  $y = a$ ,  $a > 0$ .

**Solución** Se divide el camino en cuatro caminos:

$$\Gamma_1, (t, 0), 0 \leq t \leq a; \Gamma_2, (a, t), 0 \leq t \leq a; \Gamma_3, (t, a), a \geq t \geq 0;$$

$\Gamma_4, (0, t), a \geq t \geq 0$ , entonces el trabajo es:



$$\int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_1} \mathbf{f}(\mathbf{r}(t))\mathbf{r}'(t) dt + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}(\mathbf{r}(t))\mathbf{r}'(t) dt + \int_{\Gamma_3} \mathbf{f}(\mathbf{r}(t))\mathbf{r}'(t) dt + \int_{\Gamma_4} \mathbf{f}(\mathbf{r}(t))\mathbf{r}'(t) dt =$$

$$\int_0^a \mathbf{f}(t, 0) \cdot (1, 0) dt + \int_0^a \mathbf{f}(a, t) \cdot (0, 1) dt + \int_a^0 \mathbf{f}(t, a) \cdot (-1, 0) dt + \int_a^0 \mathbf{f}(0, t) \cdot (0, 1) dt =$$

$$\int_0^a (t^2, 0) \cdot (1, 0) dt + \int_0^a (a^2 - t^2, 2at) \cdot (0, 1) dt + \int_a^0 (t^2 - a^2, 2at) \cdot (-1, 0) dt + \int_a^0 (-t^2, 0) \cdot (0, 1) dt =$$

$$\int_0^a t^2 dt + \int_0^a 2at dt + \int_a^0 (t^2 - a^2) dt = \int_0^a (t^2 + 2at + a^2 - t^2) dt = (at^2 + a^2t) \Big|_0^a = 2a^3.$$

77. Un campo de fuerzas bidimensional  $\mathbf{f}$  viene dado por la ecuación  $\mathbf{f}(x, y) = (cxy, x^6y^2)$ , siendo  $c$  una constante positiva. Esa fuerza actúa sobre una partícula que se mueve desde  $(0, 0)$  hasta la recta  $x = 1$ , siguiendo una curva de la forma  $y = ax^b$ , en donde  $a > 0$  y  $b > 0$ . Encontrar el valor de  $a$  (en función de  $c$ ) tal que el trabajo realizado por esa fuerza sea independiente de  $b$ .

**Solución** 
$$\int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{f}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_0^1 \mathbf{f}(t, at^b) \cdot (1, abt^{b-1}) dt =$$

$$\int_0^1 (cat^{b+1}, a^2t^{2b+6}) \cdot (1, abt^{b-1}) dt = \int_0^1 (cat^{b+1} + a^3bt^{3b+5}) dt = \left( \frac{cat^{b+2}}{b+2} + \frac{a^3bt^{3b+6}}{3b+6} \right) \Big|_0^1 =$$

$$\frac{ca}{b+2} + \frac{a^3b}{3b+6} = \frac{ca}{b+2} + \frac{a^3b}{3(b+2)} = \frac{3ca}{3(b+2)} + \frac{a^3b}{3(b+2)} = \frac{3ca + a^3b}{3(b+2)}.$$

Ahora como la integral no depende de  $b$ ,  $\frac{3ca + a^3b}{3(b+2)} = \frac{3ca + a^3b'}{3(b'+2)} \implies (3ca + a^3b)(b'+2) =$

$$(3ca + a^3b')(b+2) \implies 3cab' + 6ca + a^3bb' + 2a^3b = 3cab + 6ca + 2a^3b' + a^3b' \implies 3ca(b' - b) +$$

$$2a^3(b - b') = 0 \implies 3ca - 2a^3 = 0, \text{ pues } b - b' \neq 0 \implies 3c - 2a^2 = 0, \text{ ya que } a \neq 0, \text{ es decir}$$

$$a = \sqrt{\frac{3c}{2}}.$$

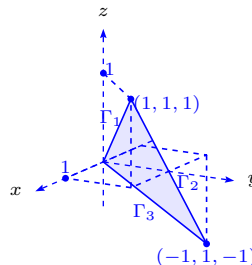
78. Un campo de fuerzas  $f$  en el espacio de tres dimensiones viene dado por la fórmula  $f(x, y, z) = (yz, xz, x(y+1))$ . Calcular el trabajo realizado por  $f$  al mover una partícula recorriendo una vez el contorno del triángulo de vértices  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 1, 1)$ ,  $(-1, 1, -1)$ , en este orden.

**Solución** Se divide la curva en tres:

$$\Gamma_1: (t, t, t), \text{ con } 0 \leq t \leq 1,$$

$$\Gamma_2: (1-2t, 1, 1-2t), \text{ con } 0 \leq t \leq 1 \text{ y}$$

$$\Gamma_3: (-1+t, 1-t, -1+t), \text{ con } 1 \geq t \geq 0, \text{ entonces el trabajo es:}$$



$$\int_0^1 \mathbf{f}(t, t, t) \cdot (1, 1, 1) dt + \int_0^1 \mathbf{f}(1-2t, 1, 1-2t) \cdot (-2, 0, -2) dt + \int_1^0 \mathbf{f}(-1+t, 1-t, -1+t) \cdot (-1, 1, -1) dt =$$

$$\int_0^1 (t^2, t^2, t^2+t) \cdot (1, 1, 1) dt + \int_0^1 (1-2t, (1-2t)^2, 2-4t) \cdot (-2, 0, -2) dt -$$

$$\int_0^1 (-t^2, t^2, -t-t^2) \cdot (-1, 1, -1) dt =$$

$$\int_0^1 (t^2 + t^2 + t + t^2) dt + \int_0^1 (-2(1-2t) - 2(2-4t)) dt - \int_0^1 (t^2 + t^2 + t + t^2) dt =$$

$$\int_0^1 (12t - 6) dt = (6t^2 - 6t) \Big|_0^1 = 0.$$

79. Calcular el trabajo realizado por el campo de fuerzas  $f(x, y, z) = (y-z, z-x, x-y)$ , a lo largo de la curva de intersección de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  y el plano  $z = y \tan \theta$ , en donde  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ . El camino es recorrido de modo que, observando el plano  $xy$  desde el eje  $z$  positivo, el sentido aparezca contrario al de las agujas del reloj.

**Solución** Si  $y = t \implies z = t \tan \theta$ ,  $x^2 + t^2 + t^2 \tan^2 \theta = 4 \implies$

$$x^2 = 4 - t^2(1 + \tan^2 \theta) = 4 - t^2 \sec^2 \theta \implies x = \pm \sqrt{4 - t^2 \sec^2 \theta}.$$

Ahora bien,  $4 - t^2 \sec^2 \theta \geq 0$ , lo que implica  $4 \geq t^2 \sec^2 \theta \implies$

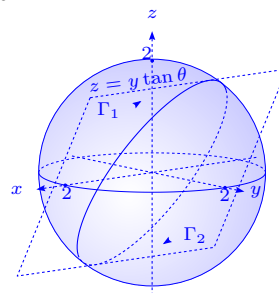
$$\frac{4}{\sec^2 \theta} \geq t^2, \text{ o sea } -\frac{2}{\sec \theta} \leq t \leq \frac{2}{\sec \theta}.$$

Dividimos el camino en dos.

$$\Gamma_1: x = -\sqrt{4 - t^2 \sec^2 \theta}, y = t, z = t \tan \theta, \text{ con } -\frac{2}{\sec \theta} \leq t \leq \frac{2}{\sec \theta} \text{ y}$$

$$\Gamma_2: x = \sqrt{4 - t^2 \sec^2 \theta}, y = t, z = t \tan \theta, \text{ con } -\frac{2}{\sec \theta} \leq t \leq \frac{2}{\sec \theta}.$$

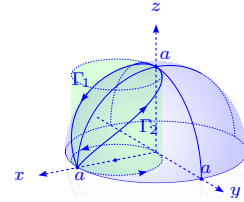
Así el trabajo es:



$$\begin{aligned}
& \int_{\frac{2}{\sec \theta}}^{-\frac{2}{\sec \theta}} \mathbf{f}(-\sqrt{4-t^2 \sec^2 \theta}, t, t \tan \theta) \cdot \left( \frac{t \sec^2 \theta}{\sqrt{4-t^2 \sec^2 \theta}}, 1, \tan \theta \right) dt + \\
& \int_{-\frac{2}{\sec \theta}}^{\frac{2}{\sec \theta}} \mathbf{f}(\sqrt{4-t^2 \sec^2 \theta}, t, t \tan \theta) \cdot \left( -\frac{t \sec^2 \theta}{\sqrt{4-t^2 \sec^2 \theta}}, 1, \tan \theta \right) dt = \\
& \int_{-\frac{2}{\sec \theta}}^{\frac{2}{\sec \theta}} \left( -(t-t \tan \theta, t \tan \theta + \sqrt{4-t^2 \sec^2 \theta}, -\sqrt{4-t^2 \sec^2 \theta} - t) \cdot \left( \frac{t \sec^2 \theta}{\sqrt{4-t^2 \sec^2 \theta}}, 1, \tan \theta \right) + \right. \\
& \left. (t-t \tan \theta, t \tan \theta - \sqrt{4-t^2 \sec^2 \theta}, \sqrt{4-t^2 \sec^2 \theta} - t) \cdot \left( -\frac{t \sec^2 \theta}{\sqrt{4-t^2 \sec^2 \theta}}, 1, \tan \theta \right) \right) dt = \\
& \int_{-\frac{2}{\sec \theta}}^{\frac{2}{\sec \theta}} \left( -\frac{(t-t \tan \theta)t \sec^2 \theta}{\sqrt{4-t^2 \sec^2 \theta}} - t \tan \theta - \sqrt{4-t^2 \sec^2 \theta} + \tan \theta(\sqrt{4-t^2 \sec^2 \theta} + t) - \right. \\
& \left. \frac{(t-t \tan \theta)t \sec^2 \theta}{\sqrt{4-t^2 \sec^2 \theta}} + t \tan \theta - \sqrt{4-t^2 \sec^2 \theta} + \tan \theta(\sqrt{4-t^2 \sec^2 \theta} - t) \right) dt = \\
& \int_{-\frac{2}{\sec \theta}}^{\frac{2}{\sec \theta}} \left( -\frac{2(t-t \tan \theta)t \sec^2 \theta}{\sqrt{4-t^2 \sec^2 \theta}} - 2\sqrt{4-t^2 \sec^2 \theta} + 2 \tan \theta \sqrt{4-t^2 \sec^2 \theta} \right) dt = \\
& -2 \int_{-\frac{2}{\sec \theta}}^{\frac{2}{\sec \theta}} \left( \frac{t^2(1-\tan \theta) \sec^2 \theta}{\sqrt{4-t^2 \sec^2 \theta}} + \sqrt{4-t^2 \sec^2 \theta}(1-\tan \theta) \right) dt = \\
& -2(1-\tan \theta) \int_{-\frac{2}{\sec \theta}}^{\frac{2}{\sec \theta}} \frac{t^2 \sec^2 \theta + 4 - t^2 \sec^2 \theta}{\sqrt{4-t^2 \sec^2 \theta}} dt = -4(1-\tan \theta) \int_{-\frac{2}{\sec \theta}}^{\frac{2}{\sec \theta}} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{t \sec \theta}{2}\right)^2}} dt \stackrel{t=\frac{2u}{\sec \theta}}{=} \\
& -4(1-\tan \theta) \int_{-1}^1 \frac{2du}{\sec \theta \sqrt{1-u^2}} = -\frac{8(1-\tan \theta)}{\sec \theta} \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \stackrel{u=\sin x}{=} \\
& -\frac{8\left(1-\frac{\sin \theta}{\cos \theta}\right)}{\frac{1}{\cos \theta}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x} dx = 8\pi(\sin \theta - \cos \theta).
\end{aligned}$$

80. Calcular el trabajo realizado por un campo de fuerza  $\mathbf{f} = (y^2, z^2, x^2)$ , a lo largo de la curva de intersección de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  y el cilindro  $x^2 + y^2 = ax$ , siendo  $z \geq 0$ ,  $a \geq 0$ . El camino es recorrido de modo que, observando al plano  $xy$  desde el eje  $z$  positivo, el sentido sea contrario al de las agujas del reloj. Ver ejercicio 43, página 59

**Solución** Determinemos la intersección entre  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  y  $x^2 + y^2 = ax$ . Es claro que  $x > 0$  y como  $ax + z^2 = a^2$ ,  $z = \sqrt{a^2 - ax} > 0$ . Así,  $a^2 - ax > 0 \implies a > x > 0$ . Además,  $y = \sqrt{ax - x^2}$  o  $y = -\sqrt{ax - x^2}$ .



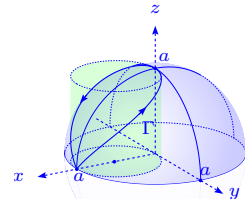
Dividimos la curva en  $\Gamma_1: x = t, y = \sqrt{at - t^2}, z = \sqrt{a^2 - at}$ , con  $a > t > 0$  y en  $\Gamma_2: x = t,$

$y = -\sqrt{at - t^2}$ ,  $z = \sqrt{a^2 - at}$ , con  $0 < t < a$ . El trabajo es:

$$\begin{aligned} & \int_a^0 \mathbf{f}(t, \sqrt{at - t^2}, \sqrt{a^2 - at}) \cdot \left(1, \frac{a - 2t}{2\sqrt{at - t^2}}, -\frac{a}{2\sqrt{a^2 - at}}\right) dt + \\ & \int_0^a \mathbf{f}(t, -\sqrt{at - t^2}, \sqrt{a^2 - at}) \cdot \left(1, \frac{2t - a}{2\sqrt{at - t^2}}, -\frac{a}{2\sqrt{a^2 - at}}\right) dt = \\ & - \int_0^a \left( (at - t^2, a^2 - at, t^2) \cdot \left(1, \frac{a - 2t}{2\sqrt{at - t^2}}, -\frac{a}{2\sqrt{a^2 - at}}\right) - \right. \\ & \quad \left. (at - t^2, a^2 - at, t^2) \cdot \left(1, \frac{2t - a}{2\sqrt{at - t^2}}, -\frac{a}{2\sqrt{at - t^2}}\right) \right) dt = \\ & - \int_0^a \left( (at - t^2) + \frac{(a^2 - at)(a - 2t)}{2\sqrt{at - t^2}} - \frac{at^2}{2\sqrt{a^2 - at}} - (at - t^2) - \frac{(a^2 - at)(2t - a)}{2\sqrt{a^2 - t^2}} + \frac{at^2}{2\sqrt{a^2 - t^2}} \right) dt = \\ & - \int_0^a \frac{(a^2 - at)(a - 2t)}{\sqrt{at - t^2}} dt = - \int_0^a \frac{a^3 - 2a^2t - a^2t + 2at^2}{\sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} + at - t^2}} dt = - \int_0^a \frac{a^3 - 3a^2t + 2at^2}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2} - t\right)^2}} dt = \\ & - a \int_0^a \frac{a^2 - 3at + 2t^2}{\frac{a}{2}\sqrt{1 - \left(1 - \frac{2t}{a}\right)^2}} dt = -2 \int_0^a \frac{(2t - a)(t - a)}{\sqrt{1 - \left(\frac{2t - a}{a}\right)^2}} dt \stackrel{t = \frac{au + a}{2}}{=} -2 \int_{-1}^1 \frac{au\left(\frac{au - a}{2}\right)}{\sqrt{1 - u^2}} \frac{a}{2} du = \\ & -\frac{a^3}{2} \int_{-1}^1 \frac{u(u - 1)}{\sqrt{1 - u^2}} du \stackrel{u = \sin x}{=} -\frac{a^3}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x(\sin x - 1)}{\cos x} \cos x dx = -\frac{a^3}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x - \sin x) dx = \\ & -\frac{a^3}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = -\frac{a^3}{2} \frac{\sin x \cdot \cos x + x}{2} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{a^3}{2} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{a^3\pi}{4}. \end{aligned}$$

Otra manera de resolver el problema es la siguiente.

Sea  $\Gamma$  la curva de intersección; la proyección de  $\Gamma$  en el plano  $xy$  es la curva  $x^2 + y^2 = ax$ , es decir  $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$ . Sea  $x - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} \cos \theta$ ,  $y = \frac{a}{2} \sin \theta$ ,  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ , entonces  $x = \frac{a}{2}(1 + \cos \theta)$ ,  $y = \frac{a}{2} \sin \theta$ ,  $z = \frac{\sqrt{2}}{2} a \sqrt{1 - \cos \theta}$ ,



por lo tanto  $\mathbf{r}(\theta) = \left(\frac{a}{2}(1 + \cos \theta), \frac{a}{2} \sin \theta, \frac{\sqrt{2}}{2} a \sqrt{1 - \cos \theta}\right)$ , donde  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  y  $\mathbf{r}'(\theta) = \left(-\frac{a}{2} \sin \theta, \frac{a}{2} \cos \theta, \frac{\sqrt{2}}{4} a \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - \cos \theta}}\right)$ .

Dado que  $\theta$  se mide en el sentido contrario a las agujas del reloj, tenemos  $W = + \int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$ ,

pero como  $\mathbf{f} = (y^2, z^2, x^2) = \left(\frac{a^2}{4} \sin^2 \theta, \frac{a^2}{2}(1 - \cos \theta), \frac{a^2}{4}(1 + \cos \theta)^2\right)$ ,

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{a^2}{4} \sin^2 \theta, \frac{a^2}{2}(1 - \cos \theta), \frac{a^2}{4}(1 + \cos \theta)^2\right) \cdot \left(-\frac{a}{2} \sin \theta, \frac{a}{2} \cos \theta, \frac{\sqrt{2}a}{4} \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - \cos \theta}}\right) d\theta = \\ & -\frac{a^3}{8} \int_0^{2\pi} \sin^3 \theta d\theta + \frac{a^3}{4} \int_0^{2\pi} (\cos \theta - \cos^2 \theta) d\theta + \frac{a^3\sqrt{2}}{16} \int_0^{2\pi} \frac{(1 + \cos \theta)^2 \sin \theta}{\sqrt{1 - \cos \theta}} d\theta = \end{aligned}$$

$$-\frac{a^3}{8} \cdot 0 + \frac{a^3}{4} \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta - \frac{a^3}{4} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta + \frac{a^3 \sqrt{2}}{16} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \sin \theta}{\sqrt{2} |\sin \frac{\theta}{2}|} d\theta =$$

$$0 + \frac{a^3}{4} \cdot 0 - \frac{a^3}{4} \cdot 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta + 0 = -a^3 \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} = -\frac{a^3}{4} \pi.$$

Observe que  $\frac{\sin \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \sin \theta}{\sqrt{2} |\sin \frac{\theta}{2}|}$  tiene integral nula en  $[0, 2\pi]$ .

81. Sea  $f(x, y) = (P(x, y), (Q(x, y)))$  un campo vectorial en  $\mathbb{R}^2$ , de clase  $C^1$  en un abierto  $S$ . Si  $f$  es el gradiente de un cierto potencial  $\varphi$ , probar que  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  en  $S$ .

**Solución** En efecto, si  $f = \nabla \varphi \in C^1$ , entonces  $\varphi$  es de clase  $C^2$  y se tiene que:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

82. Aplicar el resultado anterior para verificar que  $f$  no es un gradiente. Determinar una curva  $\Gamma$  tal que  $\oint_{\Gamma} f \cdot dr \neq 0$ .

a)  $f(x, y) = (y, -x)$

b)  $f(x, y) = (y, xy - x)$ .

**Solución**

- a)  $f$  no es un gradiente dado que si  $f = (y, -x) = (P, Q)$ ,  $\frac{\partial P}{\partial y} = 1 \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = -1$ . Sea  $\Gamma$  la curva  $r = (\cos t, \sin t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , entonces  $\|r'(t)\| = 1$  y tenemos que:

$$\oint_{\Gamma} f \cdot dr = \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t - \cos^2 t) dt = -2\pi.$$

- b)  $f$  no es un gradiente pues  $\frac{\partial P}{\partial y} = 1 \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = y - 1$ . Sea  $\Gamma = (\cos t, \sin t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , entonces:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} f \cdot dr &= \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t + (\cos t \sin t - \cos t) \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-1 + \cos^2 t \sin t) dt = -2\pi - \frac{1}{3} \cos^3 t \Big|_0^{2\pi} = -2\pi. \end{aligned}$$

83. Se considera el campo vectorial  $f(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$  de clase  $C^1$  sobre  $S \subset \mathbb{R}^3$  abierto. Si  $f$  es un gradiente de una cierta función potencial  $\varphi$ , demostrar que  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$  en  $S$ .

**Solución** Si  $f = \nabla \varphi$  de clase  $C^1$ , entonces  $\varphi$  es de clase  $C^2$ , por lo que  $P = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ ,  $Q = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ ,  $R = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ , entonces  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , en  $S$ .

De la misma manera se prueba que  $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$  en  $S$ .

84. En cada uno de los siguientes campos vectoriales aplicar el ejercicio anterior para demostrar que  $\mathbf{f}$  no es un gradiente. Determinar un camino cerrado  $\Gamma$  tal que  $\oint_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} \neq 0$ .

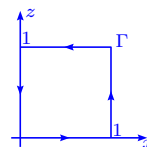
a)  $\mathbf{f}(x, y, z) = (y, x, x)$

b)  $\mathbf{f}(x, y, z) = (xy, x^2 + 1, z^2)$ .

### Solución

a)  $\mathbf{f}$  no es un gradiente, pues  $\frac{\partial P}{\partial z} = 0 \neq \frac{\partial R}{\partial x} = 1$ . Consideramos la curva cerrada  $\Gamma$  que aparece en la gráfica adjunta, entonces:

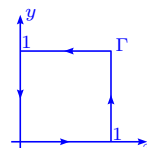
$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} &= \oint_{\Gamma} ydx + xdy + xdz = \oint_{\Gamma} xdz = \\ &0 + \int_0^1 1dz + 0 + \int_1^0 0dz = 1. \end{aligned}$$



b)  $\mathbf{f}$  no es un gradiente, pues  $\frac{\partial P}{\partial y} = x \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$ .

Tomamos la curva  $\Gamma$  cerrada que aparece en el gráfico, entonces:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} &= \oint_{\Gamma} xydx + (x^2 + 1)dy + z^2dz = \oint_{\Gamma} xydx + (x^2 + 1)dy = \\ &0 + \int_0^1 (1^2 + 1)dy + \int_1^0 xdx + \int_1^0 (0^2 + 1)dy = 2 - \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$



85. Sea  $\mathbf{f} = (y, z, yz)$  un campo de fuerzas.

a) Determinar si  $\mathbf{f}$  es o no conservativo.

b) Calcular el trabajo realizado al mover una partícula sobre la curva dada por  $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, e^t)$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ .

### Solución

a) El campo de fuerza  $\mathbf{f} = (P, Q, R)$  no es conservativo, pues debe tenerse que  $\mathbf{f} = \nabla\varphi$ , para alguna función  $\varphi$ , pero  $\frac{\partial P}{\partial y} = 1 \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ .

b) Sea  $\Gamma$  la curva dada por  $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, e^t)$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ , entonces:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{\pi} (\sin t, e^t, \sin t e^t) \cdot (-\sin t, \cos t, e^t) dt = \int_0^{\pi} (-\sin^2 t + e^t \cos t + e^{2t} \sin t) dt = \\ &\left( \frac{1}{5}(2 \sin t - \cos t)e^{2t} + \frac{1}{2}(\sin t + \cos t)e^t + \frac{1}{2} \sin t \cos t - \frac{1}{2}t \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{5}e^{2\pi} - \frac{1}{2}e^{\pi} - \frac{1}{2}\pi - \frac{3}{10}. \end{aligned}$$

86. Un campo de fuerza  $\mathbf{f}$  está dado por  $\mathbf{f}(x, y) = (x + y, x - y)$ .

a) Demostrar que el trabajo realizado por la fuerza  $\mathbf{f}$ , al mover una partícula sobre la curva  $\mathbf{r}(t) = (f(t), g(t))$ ,  $a \leq t \leq b$ , de clase  $C^1$ , depende sólo de  $f(a)$ ,  $f(b)$ ,  $g(a)$ ,  $g(b)$ .

b) Dar el trabajo realizado cuando  $f(a) = 1$ ,  $f(b) = 2$ ,  $g(a) = 3$ ,  $g(b) = 4$ .

### Solución

a) El trabajo realizado es:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{\Gamma} (x + y, x - y) \cdot (dx, dy) = \int_{\Gamma} (x + y)dx + (x - y)dy = \\ &= \int_a^b ((f + g)f' + (f - g)g') dt = \int_a^b (f(t)f'(t) + (f(t)g(t))' - g(t)g'(t)) dt = \\ &= \frac{1}{2}(f^2(t) + 2f(t)g(t) - g^2(t)) \Big|_a^b = \\ &= \frac{1}{2}(f^2(b) + 2f(b)g(b) - g^2(b) - f^2(a) - 2f(a)g(a) + g^2(a)) \end{aligned}$$

y sólo depende de  $f(a)$ ,  $f(b)$ ,  $g(a)$  y  $g(b)$ .

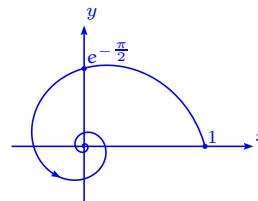
$$\text{b) } \int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2}(4 + 16 - 16 - 1 - 6 + 9) = 3.$$

87. Un campo de fuerzas viene dado por la ecuación  $\mathbf{f}(r, \theta) = (-4 \operatorname{sen} \theta, 4 \operatorname{sen} \theta)$ . Calcular el trabajo utilizado al mover una partícula desde  $(1, 0)$  al origen, siguiendo la espiral de la ecuación polar  $r = e^{-\theta}$ .

**Solución** Consideramos la curva  $\Gamma$  dada por  $\mathbf{w}(\theta) = r(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta) = (e^{-\theta} \cos \theta, e^{-\theta} \operatorname{sen} \theta)$ ,  $0 \leq \theta < +\infty$ ,  $\mathbf{w}'(\theta) = (-e^{-\theta} \cos \theta - e^{-\theta} \operatorname{sen} \theta, -e^{-\theta} \operatorname{sen} \theta + e^{-\theta} \cos \theta)$ , el trabajo realizado es:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{w} &= \int_0^{\infty} 4e^{-\theta} (\operatorname{sen} \theta \cos \theta + \operatorname{sen}^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta + \operatorname{sen} \theta \cos \theta) d\theta = \\ &= \int_0^{\infty} 8e^{-\theta} \operatorname{sen} \theta \cos \theta d\theta = -4e^{-\theta} \left( \frac{1}{5} \cos 2\theta + \frac{1}{10} \operatorname{sen} 2\theta \right) \Big|_0^{\infty} = \frac{8}{5}. \end{aligned}$$

Observamos que la integral de línea es convergente.



88. Un campo de fuerzas radial o central  $\mathbf{f}$  en el plano, se puede expresar en la forma  $\mathbf{f}(x, y) = f(r)\mathbf{r}$ , donde  $\mathbf{r} = (x, y)$ ,  $r = \|\mathbf{r}\|$  y  $f$  es continua, demostrar que el campo es conservativo.

**Solución** El campo  $\mathbf{f} = (f(r)x, f(r)y)$  es conservativo. En efecto, si  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = f(r)x$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} =$

$f(r)y$ , consideremos  $g(r) = \int_0^r tf(t) dt$ .

Sea  $\varphi(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2}) = g(r)$ , entonces  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = g'(r) \frac{\partial r}{\partial x} = rf(r) \frac{x}{r} = f(r)x$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = g'(r) \frac{\partial r}{\partial y} = f(r)y$ .

Notemos que  $\varphi(x, y) = \int_0^{\sqrt{x^2 + y^2}} tf(t) dt$ .

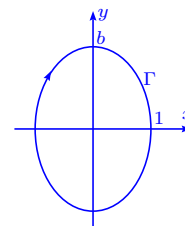
89. Calcular el trabajo realizado por la fuerza  $\mathbf{f}(x, y) = (3y^2 + 2, 16x)$  al mover una partícula desde  $(-1, 0)$  a  $(1, 0)$ , siguiendo la mitad superior de la elipse  $b^2x^2 + y^2 = b^2$ . ¿Sobre qué elipse se hace el mínimo trabajo?

**Solución** La curva  $\Gamma$  está dada por  $\mathbf{r}(t) = (\cos t, b \sin t)$ ,  $0 \leq t \leq \pi$

i.e.  $x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . El trabajo es

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} &= - \int_0^{\pi} (3b^2 \sin^2 t + 2, 16 \cos t) \cdot (-\sin t, b \cos t) dt = \\ &= - \int_0^{\pi} (-3b^2 \sin^3 t - 2 \sin t + 16b \cos^2 t) dt = - \left( (b^2 \sin^2 t + 8b \sin t + 2b^2 + 2) \cos t + 8bt \right) \Big|_0^{\pi} = \\ &= - \left( (2b^2 + 2) + 8b\pi - (2b^2 + 2) \right) = 4b^2 + 4 - 8b\pi. \end{aligned}$$

Además si  $f(b) = 4b^2 + 4 - 8b\pi$ , entonces  $f'(b) = 8b - 8\pi = 0 \implies b = \pi$ , es decir el trabajo mínimo se obtiene cuando  $b = \pi$ .



90. Un fluido se desplaza en un plano  $xy$  de modo que cada partícula se mueve en línea recta desde el origen. Si una partícula está a una distancia  $r$  del origen, su velocidad es  $ar^n$ . Determinar una función potencial de la velocidad, que sea una gradiente.

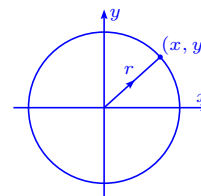
**Solución** La velocidad  $\mathbf{v}(x, y)$  en cualquier punto  $(x, y)$  tal

que  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  es la misma,  $\|\mathbf{v}(x, y)\| = ar^n$ , es decir

$$\mathbf{v}(x, y) = ar^n \left( \frac{x}{r}, \frac{y}{r} \right) = ar^{n-1} \mathbf{r}.$$

De esta manera tenemos que,  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = ar^{n-1}x$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = ar^{n-1}y \implies \varphi = \frac{ar^{n+1}}{n+1} + C$ .

Si  $n = -1$ ,  $\varphi = a \log r + C$ .



91. Si  $\varphi$  y  $\psi$  son funciones potenciales para un campo vectorial  $\mathbf{f}$  en un conjunto convexo abierto

$S \subset \mathbb{R}^n$ , demostrar que  $\varphi - \psi$  es constante en  $S$ .

**Solución** En efecto, sea  $\rho = \varphi - \psi$ , entonces,  $\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$ ,  $\frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$ , por lo que  $\rho = \text{constante}$  en  $S$ .

92. Sea  $S$  el conjunto  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , sea  $r = \|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$  y sea  $\mathbf{f}$  un campo vectorial sobre  $S$  dado por  $\mathbf{f}(x) = r^p \mathbf{x}$ ,  $p \in \mathbb{R}$ .

a) Determinan una función potencial para  $\mathbf{f}$  en  $S$ .

b) Determinar  $\varphi$ , si  $\mathbf{f}(x) = \frac{g'(r)}{r} \mathbf{x}$ ,  $g$  de clase  $C^1$  en  $\mathbb{R}$ .

**Solución**

a) Es claro que  $\mathbf{f}(x_1, \dots, x_n) = (r^p x_1, \dots, r^p x_n)$ , entonces si  $\mathbf{f} = \nabla \varphi$ , para algún  $\varphi$  se tiene  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = r^{p+1} \frac{x_i}{r}$ ,  $i = 1, \dots, n \implies \varphi = \frac{r^{p+2}}{p+2} + C$ .

Si  $p = -2$ ,  $\mathbf{f} = \frac{1}{r} \left( \frac{x_1}{r}, \dots, \frac{x_n}{r} \right)$ , es decir  $\varphi = \ln r + C$ .

b) Si  $\mathbf{f}(x) = \frac{g'(r)}{r} \mathbf{x}$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = g'(r) \frac{x_i}{r}$ ,  $i = 1, \dots, n \implies \varphi = g(r) + C$ , i.e.  $\varphi(x) = g(\|\mathbf{x}\|) + C$ .

93. Sea  $\mathbf{f}$  un campo vectorial definido en  $S = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , dado por la fórmula  $\mathbf{f}(x, y) = \left( -\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ .

a) Probar que  $\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(y^2 + x^2)^2}$ .

b) Sea  $S' = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 0, x \leq 0\}$ , si  $(x, y) \in S'$  expresar  $x, y$  en coordenadas polares,  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ ,  $r > 0$ ,

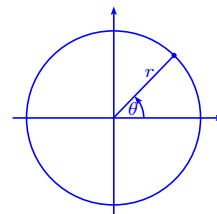
$-\pi < \theta < \pi$ , demostrar que  $\theta$  viene dado por la fórmula:

$$\theta = \begin{cases} \arctan \frac{x}{y} & \text{si } x > 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0, \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Deducir que  $\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}$ ,  $\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}$ , para  $(x, y) \in S'$ .

**Solución**

a) Se tiene que  $\frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{(x^2 + y^2) - 2y(y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$ ,  $\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{x^2 + y^2 - 2x(x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$ .



b) Dado que  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta \implies \tan \theta = \frac{y}{x}$ , si  $x \neq 0$ . Observemos que para  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ,  $0 < \tan \theta < +\infty$  y para  $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$ ,  $-\infty < \tan \theta < 0$ .

Si  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ , por lo que  $\tan \theta = \frac{y}{x} \iff \theta = \arctan \frac{y}{x}$ ,  $x > 0$ .

Si  $x > 0$ ,  $y < 0$ ,  $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$ ,  $\tan \theta = \frac{y}{x} \iff \theta = \arctan \frac{y}{x}$ ,  $x > 0$ .

Si  $x < 0$ ,  $y > 0$ ,  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ,  $\tan \theta = \frac{y}{x} < 0 \iff \theta = \arctan \frac{y}{x} + \pi$ ,  $x < 0$ .

Si  $x < 0$ ,  $y < 0$ ,  $-\pi < \theta < -\frac{\pi}{2}$ ,  $\tan \theta = \frac{y}{x} > 0 \iff \theta = \arctan \frac{y}{x} + \pi$ ,  $x < 0$ .

Si  $x = 0 = r \cos \theta \implies \theta = \frac{\pi}{2}$ .

Haciendo el cambio de variable tenemos  $\mathbf{F}(r, \theta) = \mathbf{f}(x(r, \theta), y(r, \theta)) = \left( \frac{-r \sin \theta}{r^2}, \frac{r \cos \theta}{r^2} \right) = \frac{1}{r}(-\sin \theta, \cos \theta)$ .

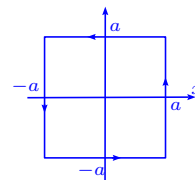
Usando la fórmula de  $\theta$  tenemos  $\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(\frac{-y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$ ,  $\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right)x} = \frac{x}{x^2 + y^2}$ , es decir  $\theta$  es una función potencial en  $S'$ .

Este ejercicio hace ver que la existencia de la función potencial depende no sólo del campo vectorial  $\mathbf{f}$ , sino también del conjunto en que está definido el campo vectorial.

94. Si  $P(x) = xe^{-y^2}$ ,  $Q(x, y) = -x^2ye^{-y^2} + \frac{1}{x^2 + y^2}$ , calcular  $\oint_{\Gamma} P dx + Q dy$ , donde  $\Gamma$  es la frontera del cuadrado de lado  $2a$ , determinado por las desigualdades  $|x| \leq a$  y  $|y| \leq a$ , circulando en el sentido contrario a las manecillas del reloj.

**Solución**  $\oint_{\Gamma} P dx + Q dy =$

$$\int_{-a}^a xe^{-a^2} dx + \int_{-a}^a \left( -a^2 ye^{-y^2} + \frac{1}{a^2 + y^2} \right) dy + \int_a^{-a} xe^{-a^2} dx + \int_a^{-a} \left( -a^2 ye^{-y^2} + \frac{1}{a^2 + y^2} \right) dy = 0.$$



## 2.7 Fórmula de Green

95. Calcular  $\oint_{\Gamma} y^2 dx + x dy$  en cada caso y usar el teorema de Green para verificar el resultado:
- $\Gamma$  es el cuadrado de los vértices  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(2, 2)$ ,  $(0, 2)$ .
  - $\Gamma$  es el cuadrado de los vértices  $(\pm 1, \pm 1)$ .
  - $\Gamma$  es el cuadrado de los vértices  $(\pm 2, 0)$ ,  $(0, \pm 2)$ .

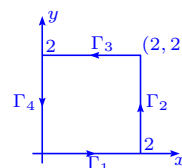
d)  $\Gamma$  es la circunferencia de radio 2 y centro  $(0, 0)$ .

e)  $\Gamma$  tiene la ecuación vectorial  $\mathbf{r}(t) = (2 \cos^3 t, 2 \sin^3 t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

**Solución** Recordemos que si  $P$  y  $Q$  son de clase  $C^1$  en un abierto, el teorema de Green permite escribir:

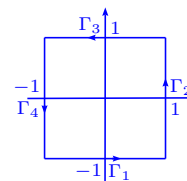
$$\oint_{\Gamma} P dx + Q dy = \iint_{\mathbf{R}} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dy dx = \iint_{\mathbf{R}} (1 - 2y) dy dx.$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \oint_{\Gamma} y^2 dx + x dy &= \int_{\Gamma_1} 0 dx + \int_{\Gamma_2} 2 dy + \int_{\Gamma_3} 2^2 dx + \int_{\Gamma_4} 0 dy = \\ &= \int_0^2 2 dy - \int_0^2 4 dx = 4 - 8 = -4. \end{aligned}$$



$$\text{Por otro lado, } \iint_{\mathbf{R}} (1 - 2y) dy dx = \int_0^2 dx \int_0^2 (1 - 2y) dy = 2(y - y^2) \Big|_0^2 = -4.$$

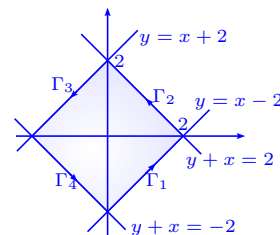
$$\begin{aligned} \text{b) } \oint_{\Gamma} y^2 dx + x dy &= \int_{\Gamma_1} (1)^2 dx + \int_{\Gamma_2} 1 dy + \int_{\Gamma_3} (1)^2 dx + \\ &= \int_{\Gamma_4} (-1) dy = \int_{-1}^1 dx + \int_{-1}^1 dy + \int_1^{-1} dx + \int_1^{-1} -dy = \\ &= 2 + 2 - 2 + 2 = 4. \end{aligned}$$



$$\text{Además, } \iint_{\mathbf{R}} (1 - 2y) dy dx = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1 - 2y) dy dx = 2(y - y^2) \Big|_{-1}^1 = 2(0 - (-2)) = 4.$$

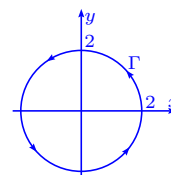
$$\text{c) } \oint_{\Gamma} y^2 dx + x dy =$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\Gamma_1} (x-2)^2 dx + x dx + \int_{\Gamma_2} (2-x)^2 dx + x(-dx) + \\ &= \int_{\Gamma_3} (x+2)^2 dx + x dx + \int_{\Gamma_4} (-2-x)^2 dx + x(-dx) = \\ &= \int_0^2 (x^2 - 3x + 4) dx + \int_2^0 (x^2 - 5x + 4) dx + \int_0^{-2} (x^2 + 5x + 4) dx + \int_{-2}^0 (x^2 + 3x + 4) dx = \\ &= \int_0^2 (5x - 3x) dx + \int_{-2}^0 (3x - 5x) dx = \int_0^2 2x dx + \int_{-2}^0 (-2x) dx = x^2 \Big|_0^2 + (-x^2) \Big|_{-2}^0 = 4 + (-(-4)) = 8. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{También tenemos que } \iint_{\mathbf{R}} (1 - 2y) dy dx &= \int_{-2}^0 \int_{-2-x}^{2+x} (1 - 2y) dy dx + \int_0^2 \int_{x-2}^{2-x} (1 - 2y) dy dx = \\ &= \int_{-2}^0 (y - y^2) \Big|_{-2-x}^{2+x} dx + \int_0^2 (y - y^2) \Big|_{x-2}^{2-x} dx = \int_{-2}^0 (2x + 4) dx + \int_0^2 (4 - 2x) dx = (x^2 + 4x) \Big|_{-2}^0 + \\ &= (4x - x^2) \Big|_0^2 = 4 + 4 = 8. \end{aligned}$$

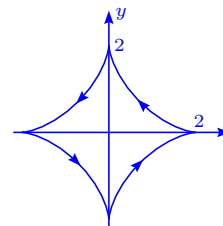
$$\begin{aligned} \text{d) } \oint_{\Gamma} y^2 dx + x dy &= \int_0^{2\pi} (4 \operatorname{sen}^2 t (-2 \operatorname{sen} t) + 2 \cos t (2 \cos t)) dt = \\ &= -8 \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen} t - \cos^2 t \operatorname{sen} t) dt + 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \\ &= -8 \left( \cos t + \frac{1}{3} \cos^3 t \right) \Big|_0^{2\pi} + 16 \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} = 0 + 4\pi = 4\pi. \end{aligned}$$



Se tiene que  $\iint_{\mathbb{R}} (1 - 2y) dy dx = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (1 - 2y) dy dx = \int_{-2}^2 (y - y^2) \Big|_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dx =$

$$\int_{-2}^2 2\sqrt{4-x^2} dx = 8 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = 16 \cdot \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} = 4\pi.$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \oint_{\Gamma} y^2 dx + x dy &= \int_0^{2\pi} [4 \operatorname{sen}^6 t (-6 \cos^2 t \operatorname{sen} t) + 2 \cos^3 t (6 \operatorname{sen}^2 t \cos t)] dt = \\ &= -24 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^7 t \cos^2 t dt + 12 \int_0^{2\pi} \cos^4 t \operatorname{sen}^2 t dt = \\ &= 0 + 12 \cdot 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t (1 - \cos^2 t) dt = \\ &= 48 \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 t dt \right) = 48 \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{5}{6} \right) = \frac{3}{2} \pi. \end{aligned}$$

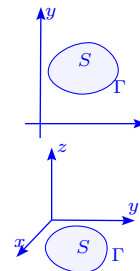


En este caso tenemos que  $y = \pm(2^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}$ ,  $-2 \leq x \leq 2$ , entonces  $\iint_{\mathbb{R}} (1 - 2y) dy dx =$

$$\begin{aligned} &= \int_{-2}^2 \int_{-(2^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}}^{(2^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}} (1 - 2y) dy dx = 2 \int_{-2}^2 (2^{2/3} - x^{2/3})^{3/2} dx = 4 \int_0^2 (2^{2/3} - x^{2/3})^{3/2} dx = \\ &= 8 \int_0^2 \left( 1 - \left( \frac{x}{2} \right)^{2/3} \right)^{3/2} dx \stackrel{x=2u}{=} 16 \int_0^1 (1 - u^{2/3})^{3/2} du \stackrel{\sqrt[3]{u}=\operatorname{sen} \theta}{=} 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \cos^4 \theta \operatorname{sen}^2 \theta d\theta = \\ &= 48 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 \theta - \cos^6 \theta) d\theta = 48 \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{5}{6} \right) = \frac{3}{2} \pi. \end{aligned}$$

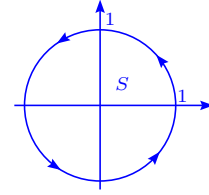
96. Si  $\Gamma$  es una curva cerrada simple en el plano  $x, y$  y representamos con  $I_z$  al momento de inercia (alrededor del eje  $z$ ) de la región interior a  $\Gamma$ , demostrar que existe un entero  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $nI_z = \oint_{\Gamma} x^3 dy - y^3 dx$ .

**Solución** Consideremos  $S$  la región limitada por  $\Gamma$ ; la inercia respecto al eje  $z$  es  $\iint_S (x^2 + y^2) dx dy$ . Llamando  $\frac{\partial P}{\partial x} = x^2$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial y} = -y^2$  y usando el teorema de Green tenemos,  $\iint_S (x^2 + y^2) dx dy = \oint_{\Gamma} \frac{1}{3} x^3 dy -$

$$\frac{1}{3} y^3 dx \text{ i.e. } n = 3, \text{ es decir } nI_z = \oint_{\Gamma} x^3 dy - y^3 dx.$$


97. Sean  $u, v$  funciones de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}$  de clase  $C^1$  en un conjunto  $U$  conteniendo el círculo  $x^2 + y^2 \leq 1$ , que lo denotamos  $S$ . Se define  $\mathbf{f}(x, y) = (v(x, y), u(x, y))$ ,  $\mathbf{g}(x, y) = (u_x - u_y, v_x - v_y)$ . Determinar el valor de la integral doble  $\iint_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{g} dx dy$ , si se sabe que en la frontera de  $S$  se tiene  $u(x, y) = 1, v(x, y) = y$ .

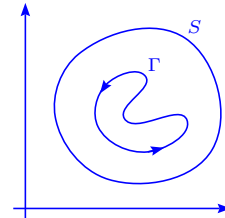
**Solución** Se tiene  $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)v + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)u = \left(v\frac{\partial v}{\partial x} + u\frac{\partial v}{\partial x}\right) - \left(v\frac{\partial v}{\partial y} + u\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(uv) - \frac{\partial}{\partial y}(uv)$ , entonces:

$$\iint_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{g} dx dy = \iint_S \left(\frac{\partial}{\partial x}(uv) - \frac{\partial}{\partial y}(uv)\right) dx dy =$$


$$\oint_{\Gamma} (uv) dx + (uv) dy = \oint_{\Gamma} y dx + y dy = \int_0^{2\pi} \sin t (\cos t - \sin t) dt = \int_0^{2\pi} (\cos t \sin t - \sin^2 t) dt = \frac{1}{2} \sin^2 t \Big|_0^{2\pi} - 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = 0 - 4 \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} = -\pi.$$

98. Si  $f$  y  $g$  son funciones reales de clase  $C^1$  en un conjunto abierto conexo  $S$  del plano, demostrar que  $\oint_{\Gamma} f \nabla g \cdot dr = -\oint_{\Gamma} g \nabla f \cdot dr$ , para toda curva de Jordan  $\Gamma$  regular a trozos contenida en  $S$ .

**Solución** Se tiene que el producto  $fg$  es de clase  $C^1$  sobre  $S$ , por lo que el campo vectorial  $\nabla(fg) = f \nabla g + g \nabla f$  cumple que  $\oint_{\Gamma} \nabla(fg) \cdot dr = 0$ , pues la curva de Jordan  $\Gamma$  es cerrada. Así tenemos que:

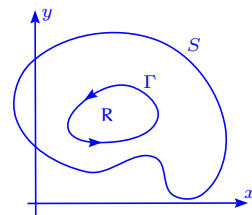


$$\oint_{\Gamma} \nabla(fg) \cdot dr = \oint_{\Gamma} (f \nabla g + g \nabla f) \cdot dr = 0 \implies \oint_{\Gamma} f \nabla g \cdot dr = -\oint_{\Gamma} g \nabla f \cdot dr.$$

99. Sean  $u, v$  funciones de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}$  de clase  $C^2$  en un abierto conexo  $S$  del plano. Sea  $R$  una región de  $S$  limitada por la curva Jordan  $\Gamma$  regular a trozos. Demostrar que:

i)  $\oint_{\Gamma} uv dx + uv dy = \iint_R \left( v \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + u \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) dx dy.$

ii)  $\frac{1}{2} \oint_{\Gamma} \left( v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left( u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy = \iint_R \left( u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) dx dy.$



**Solución**

i) Dado que se tienen las hipótesis del Teorema de Green, llamando  $P = Q = uv$  se tiene:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} uv dx + uv dy &= \iint_{\mathbb{R}} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_{\mathbb{R}} \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \iint_{\mathbb{R}} \left( v \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + u \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) dx dy. \end{aligned}$$

ii) Denotando  $P = v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x}$ ,  $Q = u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y}$ , se tiene por la fórmula de Green:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} \left( v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left( u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy &= \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \\ \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} - v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) dx dy &= \\ \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}} \left( u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) dx dy. \end{aligned}$$

100. Si  $\mathbf{f}(x, y) = (Q(x, y), -P(x, y))$  es de la clase  $C^1$  sobre un abierto  $S \subset \mathbb{R}^2$  y si  $\Gamma$  una curva contenida en  $S$ , demostrar que  $\int_{\Gamma} P dx + Q dy = \int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} ds$ , donde  $\boldsymbol{\eta}$  es el vector normal a la curva  $\Gamma$ .

**Solución** Sea  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ ,  $a \leq t \leq b$ , la representación paramétrica de  $\Gamma$ . Recordemos que  $\int_{\Gamma} P dx + Q dy = \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} ds = \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds$ , donde  $\mathbf{T}$  es el vector tangente unitario y  $\mathbf{F} = (P, Q)$ .

Por otro lado:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} ds = \int_{\Gamma} (Q, -P) \cdot \frac{(y', -x')}{\|\mathbf{r}'(t)\|} ds = \int_{\Gamma} (P, Q) \cdot \frac{(x', y')}{\|\mathbf{r}'(t)\|} ds = \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \int_{\Gamma} P dx + Q dy.$$

101. Sean  $f, g$  funciones de clase  $C^2$  en un conjunto abierto  $S$  del plano. Supongamos que  $R$  es una región contenida en  $S$ , cuya frontera es una curva de Jordan  $\Gamma$  regular a trozos.

Demostrar las identidades siguientes, donde  $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ :

$$\text{a) } \oint_{\Gamma} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\eta}} ds = \iint_{\mathbb{R}} \nabla^2 g dx dy.$$

$$\text{b) } \oint_{\Gamma} f \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\eta}} ds = \iint_{\mathbb{R}} (f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g) dx dy.$$

$$\text{c) } \oint_{\Gamma} \left( f \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\eta}} - g \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\eta}} \right) ds = \iint_{\mathbb{R}} (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) dx dy \text{ (fórmula de Green)}$$

d) Si  $f, g$  son armónicas en  $\mathbb{R}$ , verificar que:

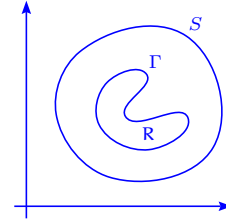
$$\oint_{\Gamma} f \frac{\partial g}{\partial \eta} ds = \oint_{\Gamma} g \frac{\partial f}{\partial \eta} ds, \quad \oint_{\Gamma} f \frac{\partial g}{\partial \eta} ds = \iint_{\mathbb{R}} \nabla f \cdot \nabla g dx dy, \quad \oint_{\Gamma} \frac{\partial g}{\partial \eta} ds = \oint_{\Gamma} \frac{\partial f}{\partial \eta} ds = 0.$$

### Solución

a) Sabemos que  $\frac{\partial g}{\partial \eta} = \nabla g \cdot \eta$ , entonces por el ejercicio 100 y

usando Green:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \frac{\partial g}{\partial \eta} ds &= \oint_{\Gamma} \nabla g \cdot \eta ds = \oint_{\Gamma} -\frac{\partial g}{\partial y} dx + \frac{\partial g}{\partial x} dy = \\ &= \iint_{\mathbb{R}} \left( \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right) dx dy = \iint_{\mathbb{R}} \nabla^2 g dx dy. \end{aligned}$$



b) Sea  $P = -f \frac{\partial g}{\partial y}$ ,  $Q = f \frac{\partial g}{\partial x}$ , entonces:  $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial y} - f \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} + f \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$  y tenemos:

$$\oint_{\Gamma} f \frac{\partial g}{\partial \eta} ds = \oint_{\Gamma} -f \frac{\partial g}{\partial y} dx + f \frac{\partial g}{\partial x} dy = \iint_{\mathbb{R}} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_{\mathbb{R}} (\nabla f \cdot \nabla g + f \nabla^2 g) dx dy.$$

c) Usando b) se tiene que:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \left( f \frac{\partial g}{\partial \eta} - g \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) ds &= \iint_{\mathbb{R}} (f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g - g \nabla^2 f - \nabla f \cdot \nabla g) dx dy \\ &= \iint_{\mathbb{R}} (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) dx dy. \end{aligned}$$

d) Si  $f, g$  son armónicas,  $\nabla^2 f = \nabla^2 g = 0$ , entonces usando c) se tiene:

$$\oint_{\Gamma} \left( f \frac{\partial g}{\partial \eta} - g \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) ds = 0 \implies \oint_{\Gamma} f \frac{\partial g}{\partial \eta} ds = \oint_{\Gamma} g \frac{\partial f}{\partial \eta} ds.$$

Por b) tenemos  $\oint_{\Gamma} f \frac{\partial g}{\partial \eta} ds = \iint_{\mathbb{R}} (f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g) dx dy = \iint_{\mathbb{R}} \nabla f \cdot \nabla g dx dy$ , pues  $\nabla^2 g = 0$ .

Usando a) y el hecho que  $\nabla^2 f = \nabla^2 g = 0$ , tenemos:

$$\oint_{\Gamma} \frac{\partial g}{\partial \eta} ds = \iint_{\mathbb{R}} \nabla^2 g dx dy = 0, \quad \oint_{\Gamma} \frac{\partial f}{\partial \eta} ds = \iint_{\mathbb{R}} \nabla^2 f dx dy = 0.$$

102. Sea  $v(x, y) = (y^c, x^c)$ ,  $c > 0$  y sea  $r(x, y) = (x, y)$ . Consideremos una región plana  $R'$  bordeada por una curva de Jordan  $\Gamma$  regular a trozos. Calcular  $\text{div}(v \times r)$  y  $\text{rot}(v \times r)$  y aplicando el Teorema de Green, demostrar que  $\oint_{\Gamma} v \times r \cdot dw = 0$ , donde  $w$  es la función que describe la

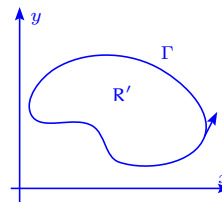
curva  $\Gamma$ .

**Solución** Sin pérdida de generalidad, consideremos las variables y las funciones vectoriales como elementos de  $\mathbb{R}^3$  i.e.  $\mathbf{v}(x, y, z) = (y^c, x^c, 0)$ ,  $\mathbf{r} = (x, y, 0)$ , entonces:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ y^c & x^c & 0 \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, y^{c+1} - x^{c+1}) \implies \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{r}) = (c+1)(y^c, x^c, 0) = (c+1)\mathbf{v},$$

por lo que  $\text{div}(\mathbf{v} \times \mathbf{r}) = (c+1)(0+0+0) = 0$ . Además  $\oint_{\Gamma} \mathbf{v} \times \mathbf{r} \cdot d\mathbf{w} = \oint_{\Gamma} \mathbf{v} \times \mathbf{r} \cdot \mathbf{t} ds = 0$ , ya que:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{r} \cdot \mathbf{t} = (0, 0, y^{c+1} - x^{c+1}) \cdot (t_1, t_2, 0) = 0.$$



Definiendo  $\mathbf{v} \times \mathbf{r} = (P, Q, R)$  y aplicando Green se tiene:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \mathbf{v} \times \mathbf{r} \cdot d\mathbf{w} &= \oint_{\Gamma} 0 dx + 0 dy + (y^{c+1} - x^{c+1}) dz = \oint_{\Gamma} 0 dx + 0 dy \\ &= \iint_{R'} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_{R'} (0 - 0) dx dy = 0. \end{aligned}$$

103. Demostrar que el teorema de Green puede expresarse en la forma:

$$\iint_R (\text{rot } \mathbf{v}) \cdot \mathbf{k} dx dy = \oint_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} ds,$$

donde  $\mathbf{t}$  es el vector unitario tangente a  $\Gamma$  y  $s$  es la longitud del arco.

**Solución** Tomemos  $\mathbf{v}(x, y, z) = (P(x, y), Q(x, y), 0)$ ,  $\text{rot } \mathbf{v} = \left( 0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$ ,  $\mathbf{r} = (x, y, 0)$ ,  $d\mathbf{r} = (dx, dy, 0)$ ,  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{t} ds = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = P dx + Q dy$ , entonces:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} ds = \oint_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\Gamma} P dx + Q dy = \iint_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_R \text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} dx dy.$$

104. Una región  $R$  está limitada por una curva de Jordan, regular a trozos  $\Gamma$ . Se conocen los momentos de inercia de  $R$  alrededor de los ejes  $x$  e  $y$  que valen respectivamente  $a$  y  $b$ . Calcular la integral de línea  $\oint_{\Gamma} \nabla r^4 \cdot \boldsymbol{\eta} ds$ , en función de  $a$  y  $b$ .

En la integral  $\mathbf{r} = (x, y)$ ,  $r = \|\mathbf{r}\|$ ,  $\boldsymbol{\eta}$  representa el vector unitario normal exterior a  $\Gamma$  y  $s$  es

la longitud de arco. La curva se recorre en el sentido contrario a las agujas del reloj.

**Solución** Se tiene que  $\nabla r^4 = 4r^2(x, y)$  y  $\nabla^2(r^4) = 12x^2 + 12y^2 = 12r^2$ , entonces:

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma} \nabla(r^4) \cdot \boldsymbol{\eta} \, ds &= \oint_{\Gamma} \frac{\partial r^4}{\partial \boldsymbol{\eta}} \, ds = \iint_{\mathbb{R}} \nabla^2(r^4) \, dx \, dy = 12 \iint_{\mathbb{R}} (x^2 + y^2) \, dx \, dy \\ &= 12 \iint_{\mathbb{R}} x^2 \, dx \, dy + 12 \iint_{\mathbb{R}} y^2 \, dx \, dy = 12(a + b).\end{aligned}$$

105. Sea  $\mathbf{f}$  un campo vectorial en el plano, dar una definición de la integral de línea  $\int_{\Gamma} \mathbf{f} \times d\mathbf{r}$ . Esta definición debe ser tal que, pueda obtenerse como consecuencia del teorema de Green, la fórmula siguiente:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{f} \times d\mathbf{r} = k \iint_{\mathbb{R}} (\operatorname{div} \mathbf{f}) \, dx \, dy.$$

**Solución** Sea  $\mathbf{f} = (P, Q, 0)$ ,  $\mathbf{t} = (t_1, t_2, 0)$  el vector unitario tangente a la curva  $\Gamma$ . Se define la integral  $\int_{\Gamma} \mathbf{f} \times d\mathbf{r} = \int_{\Gamma} \mathbf{f} \times \mathbf{t} \, ds$ .

De esta forma tenemos que  $\mathbf{f} \times \mathbf{t} = (0, 0, Pt_2 - Qt_1)$ , entonces:

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} \mathbf{f} \times \mathbf{t} \, ds &= (0, 0, \int_{\Gamma} (-Q, P, 0) \cdot \mathbf{t} \, ds) \\ &= k \iint_{\mathbb{S}} \left( \frac{\partial P}{\partial x} - \left( -\frac{\partial Q}{\partial y} \right) \right) \, dx \, dy = k \iint_{\mathbb{S}} (\operatorname{div} \mathbf{f}) \, dx \, dy.\end{aligned}$$

106. Transformar la siguiente integral curvilínea  $\oint_{\Gamma} \sqrt{x^2 + y^2} \, dx + y(xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})) \, dy$ , usando la fórmula de Green, donde  $\Gamma$  es la curva que limita la región  $\mathbb{R}$ .

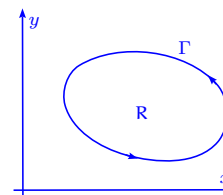
**Solución** La fórmula de Green establece que:

$$I = \oint_{\Gamma} P \, dx + Q \, dy = \iint_{\mathbb{R}} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dx \, dy,$$

y como  $\frac{\partial Q}{\partial x} = y \left( y + \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \left( 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \right) =$

$y \left( y + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = y^2 + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ,  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ , entonces  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y^2$  y tenemos

$$I_x = \iint_{\mathbb{R}} y^2 \, dx \, dy.$$



107. Usando el Teorema de Green, calcular las siguientes integrales curvilíneas:

- a)  $\oint_{\Gamma} 2(x^2 + y^2) dx + (x + y)^2 dy$ ,  $\Gamma$  es el borde del triángulo de vértices  $(1, 1)$ ,  $(2, 2)$ ,  $(1, 3)$  recorrido en el sentido positivo. Verificar el resultado calculando la integral directamente.
- b)  $\oint_{\Gamma} -x^2 y dx + xy^2 dy$ ,  $\Gamma$  es la circunferencia  $x^2 + y^2 = a^2$  recorrida en el sentido contrario a las agujas del reloj. Verificar el resultado directamente.
- c)  $\oint_{\Gamma} (x + y) dx - (x - y) dy$ ,  $\Gamma$  es la curva que une los puntos  $A(1, 0)$  y  $B(2, 3)$  por una parábola cuyo eje es el eje  $y$ , y la cuerda  $\overline{BA}$ . Verificar el resultado directamente.
- d)  $\oint_{\Gamma} e^{xy}(y^2 dx + (1 + xy) dy)$ ,  $\Gamma$  es una curva que une los puntos  $A$  y  $B$  situados sobre el eje  $x$  y el segmento  $AB$ , de modo que el área limitada por  $\Gamma$  es igual a  $R$ .

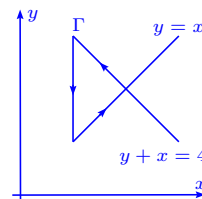
**Solución**

a) Se tiene que  $\frac{\partial P}{\partial y} = 4y$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2(x + y)$ , por lo tanto

$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2(x - y)$  y tenemos:

$$\iint_{\mathbb{R}} 2(x - y) dx dy = \int_1^2 \left( \int_x^{-x+4} 2(x - y) dy \right) dx =$$

$$\int_1^2 (2xy - y^2) \Big|_x^{-x+4} dx = - \int_1^2 (4x^2 - 16x + 16) dx = -4 \int_1^2 (x - 2)^2 dx = -\frac{4}{3} (x - 2)^3 \Big|_1^2 = -\frac{4}{3} (0 - (-1)^3) = -\frac{4}{3}.$$



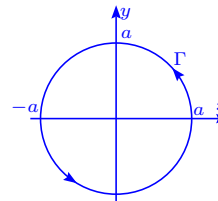
Por otro lado:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} 2(x^2 + y^2) dx + (x + y)^2 dy &= \int_1^2 (4x^2 + 4x^2) dx + \int_2^1 2(x^2 + (4-x)^2 + 16) dx + \int_3^1 (1+y)^2 dy = \\ &= \int_1^2 (8x^2 - (4x^2 - 16x - 32 + 16)) dx - \frac{1}{3} (1+y)^3 \Big|_1^3 = \left( \frac{4}{3} x^3 + 8x^2 - 16x \right) \Big|_1^2 - \frac{56}{3} = \frac{52}{3} - \frac{56}{3} = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

b) Sea  $P = -x^2 y$ ,  $Q = xy^2$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y^2 + x^2$ , entonces:

$$\oint_{\Gamma} -x^2 y dx + xy^2 dy = \iint_{\mathbb{R}} (x^2 + y^2) dx dy =$$

$$\int_0^{2\pi} \left( \int_0^a r^3 dr \right) d\theta = 2\pi \frac{1}{4} r^4 \Big|_0^a = \frac{1}{2} \pi a^4.$$



Por otro lado parametrizando la curva  $\Gamma$  con  $x = a \cos t$ ,  $y = a \sin t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , tenemos

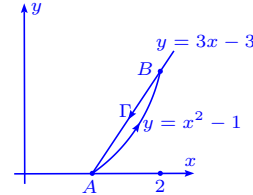
que  $x' = -a \sin t$ ,  $y' = a \cos t$ , por lo que:

$$\oint_{\Gamma} -x^2 y dx + xy^2 dx = \int_0^{2\pi} (a^4 \sin^2 t \cos^2 t + a^4 \sin^2 t \cos^2 t) dt = \frac{a^4}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2(2t) 2 dt =$$

$$\frac{1}{4}a^4 \cdot 8 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2(2t) 2 dt = 2a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u du = 2a^4 \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \pi a^4.$$

c) En este caso  $P = x + y$ ,  $Q = -x + y$ ,  $\frac{\partial P}{\partial y} = 1$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x} = -1$  y  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -2$ .

La parábola se escribe  $y = ax^2 + b$ ,  $y(1) = 0 = a + b$ ,  
 $y(2) = 3 - 4a + b \implies a = 1, b = -1$ . Además la recta  $\overleftarrow{AB}$   
 se escribe  $y = 3x + b$ ,  $y(1) = 0 = 3 + b \implies b = -3$ . De  
 esta manera tenemos que:

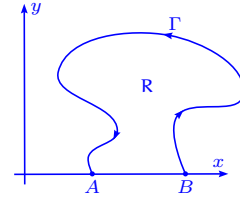


$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} (x+y) dx - (x-y) dy &= \iint_{\mathbf{R}} -2 dx dy = -2 \int_1^2 \left( \int_{x^2-1}^{3x-3} dy \right) dx = -2 \int_1^2 (3x-3-x^2+1) dx = \\ &= -2 \int_1^2 (3x - x^2 - 2) dx = -2 \left( \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - 2x \right) \Big|_1^2 = -2 \left( 6 - \frac{8}{3} - 4 - \frac{3}{2} + \frac{1}{3} + 2 \right) = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Por otro lado, calculando la integral directamente tenemos:

$$\oint_{\Gamma} (x+y) dx - (x-y) dy = \int_1^2 (2x^3 - x^2 - x - 1) dx + \int_2^1 (6x - 6) dx = \frac{8}{3} - 3 = -\frac{1}{3}.$$

d) Sea  $P = y^2 e^{xy}$ ,  $Q = (1 + xy)e^{xy}$ ,  $\frac{\partial P}{\partial y} = xe^{xy}y^2 + 2ye^{xy}$ ,  
 $\frac{\partial Q}{\partial x} = ye^{xy}(1 + xy) + ye^{xy} = 2ye^{xy} + xy^2e^{xy}$ , por lo que  
 $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$ , es decir:



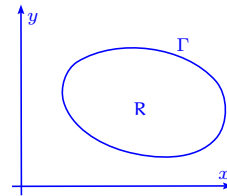
$$\oint_{\Gamma} e^{xy} (y^2 dx + (1 + xy) dy) = \iint_{\mathbf{R}} 0 dx dy = 0.$$

108. Calcular la integral  $\oint_{\Gamma} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$  examinando dos casos:

- a) el origen  $(0, 0)$  está fuera de la curva  $\Gamma$ ,
- b) cuando la curva rodea  $n$  veces el origen  $(0, 0)$ .

**Solución** Sea  $P = \frac{-y}{x^2 + y^2}$ ,  $Q = \frac{x}{x^2 + y^2}$ , entonces:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= -\frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}. \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$



a) Si  $(0, 0) \notin \mathbf{R}$ ,  $\int_{\Gamma} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \iint_{\mathbf{R}} 0 dx dy = 0$ .

b) Si  $(0, 0) \in R$ , tomamos como región  $R \setminus C_n((0, 0), \epsilon)$ ,  $0 < \epsilon < 1$ , donde  $C_n((0, 0), \epsilon)$  es el círculo de centro  $(0, 0)$  y radio  $\epsilon$ , recorrido  $n$  veces. El valor de  $\epsilon$  se escoge suficientemente pequeño para que no corte la curva  $\Gamma$ . Así tenemos:

$$\oint_{\Gamma} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} - \oint_{C_n} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \iint_{R \setminus C_n} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_{R \setminus C_n} 0 dx dy = 0 \implies$$

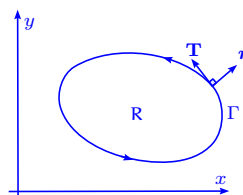
$$\oint_{\Gamma} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \oint_{C_n} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi n} \frac{\epsilon^2 (\cos^2 t + \sin^2 t) dt}{\epsilon^2} = 2\pi n.$$

109. Demostrar que si  $\Gamma$  es una curva cerrada, entonces  $\oint_{\Gamma} \cos(x, \boldsymbol{\eta}) ds = 0$ , donde  $R$  es la longitud de arco y  $\boldsymbol{\eta}$  es la normal exterior.

**Solución** Si consideramos el recorrido positivo tenemos que

$\cos(x, \boldsymbol{\eta}) = \cos(y, \mathbf{T}) = \frac{dy}{ds}$ , entonces:

$$\oint_{\Gamma} \cos(x, \boldsymbol{\eta}) ds = \oint_{\Gamma} \frac{dy}{ds} ds = \oint_{\Gamma} dy = 0.$$

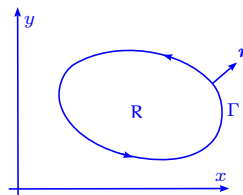


110. Usando la fórmula de Green, determinar la integral  $I = \oint_{\Gamma} (x \cos(x, \boldsymbol{\eta}) + y \sin(x, \boldsymbol{\eta})) ds$ , donde  $s$  es la longitud de arco y  $\boldsymbol{\eta}$  es la normal exterior a la curva  $\Gamma$ .

**Solución** Se tiene que  $\sin(x, \boldsymbol{\eta}) = -\cos(x, \mathbf{T}) = -\frac{dx}{ds}$ .

Además  $\cos(x, \boldsymbol{\eta}) = \cos(y, \mathbf{T}) = \frac{dy}{ds}$ , entonces:

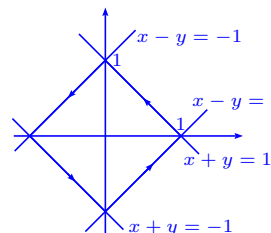
$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \left( x \frac{dy}{ds} + y \left( -\frac{dx}{ds} \right) \right) ds &= \oint_{\Gamma} x dy - y dx = \\ \iint_{R} (1 + 1) dx dy &= 2|R|. \end{aligned}$$



111. Calcular la integral  $\oint_{\Gamma} \frac{dx - dy}{x + y}$ , tomada sobre el borde del cuadrado con vértices  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(0, -1)$ , en el sentido contrario a las agujas del reloj.

**Solución**

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \frac{dx - dy}{x + y} &= \int_1^0 \frac{2dx}{1} + \int_0^{-1} \frac{dx - dx}{2x + 1} + \int_{-1}^0 \frac{2dx}{-1} + \\ \int_0^1 \frac{dx - dx}{2x - 1} &= -2x \Big|_1^0 - 2x \Big|_{-1}^0 = -2 - (-2(-1)) = -4. \end{aligned}$$



112. Sean  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 > 0\}$ ,  $P(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$ ,  $Q(x, y) = \frac{-x}{x^2 + y^2}$  en  $S$  y sea  $\Gamma$  una curva de Jordan regular a trozos contenida en  $S$ .

i) Si  $(0, 0)$  es interior a  $\Gamma$ , demostrar que la integral  $\oint_{\Gamma} P dx + Q dy$  toma el valor  $\pm 2\pi$  y analizar cuando el signo es positivo.

ii) Calcular el valor de la integral  $\int_{\Gamma} P dx + Q dy$ , cuando  $(0, 0)$  es exterior a  $\Gamma$ .

### Solución

i) Sea  $\Gamma'$  la curva  $(\cos \theta, \sin \theta)$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , entonces

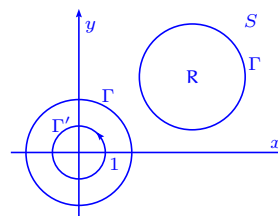
por el teorema de invariancia de la integral de línea

$$\oint_{\Gamma'} P dx + Q dy = \oint_{\Gamma} P dx + Q dy, \text{ pues } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ en } S$$

abierto y conexo. De esta forma tenemos que si  $\Gamma'$  es

la circunferencia de centro  $(0, 0)$  y radio 1:

$$\oint_{\Gamma'} P dx + Q dy = \int_0^{2\pi} (\sin \theta (-\sin \theta) + (-\cos \theta) \cos \theta) d\theta = - \int_0^{2\pi} d\theta = -2\pi.$$



En el caso en que la parametrización se efectúa de manera negativa i.e.  $(\cos \theta, -\sin \theta)$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , se tiene:

$$\int_{\Gamma'} P dx + Q dy = \int_0^{2\pi} (-\sin \theta (-\sin \theta) + (-\cos \theta)(-\cos \theta)) d\theta = 2\pi.$$

La integral es  $2\pi$  cuando el recorrido se efectúa en el mismo sentido que el movimiento de las agujas del reloj.

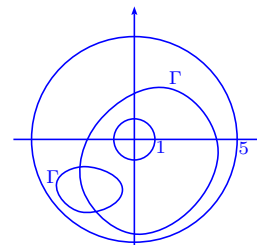
ii) Si  $(0, 0)$  es exterior a la curva  $\Gamma$  que contiene la región  $R$  se tiene:

$$\oint_{\Gamma} P dx + Q dy = \iint_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_R \frac{x^2 - y^2 - (x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} dx dy = 0.$$

113. Sean  $\mathbf{r} = (x, y)$ ,  $r = \|\mathbf{r}\|$  y  $\mathbf{f}(x, y) = \left( \frac{\partial \log r}{\partial y}, -\frac{\partial \log r}{\partial x} \right)$ , para  $r > 0$ . Sea  $\Gamma$  una curva de Jordan regular a trozos situada en el anillo  $1 < x^2 + y^2 < 25$ . Determinar todos los valores posibles de la integral de línea de  $\mathbf{f}$  a lo largo de  $\Gamma$ .

**Solución** Es claro, por el teorema de invariancia de la integral de línea, que hay sólo dos valores  $\pm 2\pi$ , si la curva  $\Gamma$  encierra a  $(0, 0)$ , o vale 0 si la curva  $\Gamma$  no encierra a  $(0, 0)$ , pues

$$\frac{\partial \log r}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad -\frac{\partial \log r}{\partial x} = \frac{-x}{x^2 + y^2} \text{ (ver ejercicio 112).}$$



114. Una región conexa con un sólo agujero se llama doblemente conexa (el anillo  $1 < x^2 + y^2 < 25$  es un ejemplo). Si  $P$  y  $Q$  son de clase  $C^1$  en una región abierta  $R$  doblemente conexa y si  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , en todo  $R$ , ¿cuántos valores distintos posibles existen para las integrales  $\int_{\Gamma} P dx + Q dy$ , donde  $\Gamma$  es una curva de Jordan regular a trozos en  $R$ ?

**Solución** Sean  $\Gamma'$  y  $\gamma$  las fronteras de la región  $R$  de modo que la curva  $\gamma$  está contenida en la región contenida por  $\Gamma'$ .

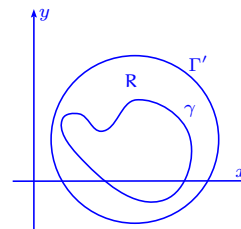
Si  $P, Q$  están definidas de  $\mathbb{R}^2$  en  $R$  y son tales que no tienen discontinuidades en la región encerrada por  $\gamma$ , se tiene que

$$\oint_{\Gamma} P dx + Q dy = 0.$$

Si hay discontinuidades en el interior de  $\gamma$ , la integral  $\oint_{\Gamma} P dx + Q dy$  puede tomar dos valores según el sentido de orientación de la curva  $\Gamma$ .

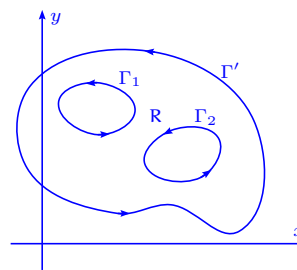
Si  $P, Q$  tienen discontinuidades en el interior de  $\gamma$ , pero  $\Gamma$  no encierra a  $\gamma$ , tenemos que  $\oint_{\Gamma} P dx + Q dy = 0$ .

Finalmente, los distintos valores que pueden tomar las integrales de línea  $\int_{\Gamma} P dx + Q dy$ , donde  $\Gamma$  es una curva de Jordan en  $R$ , son tres.



115. Resolver el ejercicio 114 para regiones triplemente conexas, es decir regiones planas con dos agujeros solamente.

**Solución** Aplicando el Teorema de Green para regiones múltiplemente conexas tenemos  $\oint_{\Gamma} P dx + Q dy - \sum_{k=1}^2 \oint_{\Gamma_k} P dx + Q dy = \iint_R \left( \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx dy = 0$ . De esta manera tenemos que si  $\Gamma'$  es una curva de Jordan en  $R$  regular a trozos puede suceder lo siguiente:



a)  $\Gamma'$  no contiene a  $\Gamma_1$  ni a  $\Gamma_2$ , por lo que  $\oint_{\Gamma'} P dx + Q dy = 0$ .

b)  $\Gamma'$  contiene a  $\Gamma_1$  solamente,  $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$  continuas en la región contenida en  $\Gamma_1$ , por lo que  $\oint_{\Gamma'} P dx + Q dy = \oint_{\Gamma_1} P dx + Q dy = 0$ .

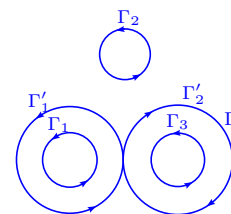
- c)  $\Gamma'$  contiene a  $\Gamma_1$  solamente, con  $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$  con discontinuidades en la región contenida en  $\Gamma_1$ , por lo que  $\oint_{\Gamma'} P dx + Q dy = \oint_{\Gamma_1} P dx + Q dy = 0$  o  $\pm a$ .
- d)  $\Gamma'$  contiene a  $\Gamma_2$  solamente, con  $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$  continuas en la región contenida en  $\Gamma_2$ , por lo que  $\oint_{\Gamma'} P dx + Q dy = \oint_{\Gamma_2} P dx + Q dy = 0$ .
- e)  $\Gamma'$  contiene a  $\Gamma_2$  solamente, con  $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$  discontinuas en la región contenida en  $\Gamma_2$ , por lo que  $\oint_{\Gamma'} P dx + Q dy = \oint_{\Gamma_2} P dx + Q dy = 0$  o  $\pm b$ .
- f)  $\Gamma'$  contiene a  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ , con  $\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}$  continuas en  $\Gamma_1$  y discontinuidad en el interior de  $\Gamma_2$ , por lo que  $\oint_{\Gamma'} P dx + Q dy = \oint_{\Gamma_1} P dx + Q dy + \int_{\Gamma_2} P dx + Q dy = 0 \pm b = \pm b$  o  $0 + 0 = 0$ .
- g)  $\Gamma'$  contiene a  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ , con  $\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}$  discontinuas en  $\Gamma_1$  y continuas en el interior de  $\Gamma_2$ , por lo que  $\oint_{\Gamma'} P dx + Q dy = \oint_{\Gamma_1} P dx + Q dy + \oint_{\Gamma_2} P dx + Q dy = 0 + 0 = 0$  o  $0 \pm a = \pm a$ .
- h)  $\Gamma'$  contiene a  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ , con  $\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}$  discontinuas en el interior de  $\Gamma_1$  y discontinuas en el interior de  $\Gamma_2$ , por lo que  $\oint_{\Gamma'} P dx + Q dy = \oint_{\Gamma_1} P dx + Q dy + \oint_{\Gamma_2} P dx + Q dy = 0 + 0 = 0$  o  $\pm a + 0$  o  $\pm b + 0$  o  $a + b$  o  $-a - b$ .

En conclusión hay 7 maneras distintas. Observe que  $a - b$  o  $-a + b$  no es permitido pues  $\Gamma_2$  y  $\Gamma_3$  tienen siempre el mismo sentido (o signo) y que las curvas en forma de 8 no se permiten.

116. Sean  $P, Q$  funciones de clase  $C^1$  tales que  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  en todo punto excepto en tres puntos. Sean  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  tres círculos como se muestra en la figura adjunta y sea  $I_k = \oint_{\Gamma_k} P dx + Q dy$ . Supongamos que  $I_1 = 12, I_2 = 10, I_3 = 15$ .

a) Determinar el valor  $\int_{\Gamma} P dx + Q dy$ , siendo  $\Gamma$  la curva en forma de ocho.

b) Dibujar otra curva cerrada  $\Gamma$  a lo largo de la cual  $\int P dx + Q dy = 1$ . Indicar en el dibujo el sentido en que recorre el camino.



c) Si  $I_1 = 12, I_2 = 9, I_3 = 15$ , demostrar que no existe camino cerrado alguno  $\Gamma$  a lo largo del cual  $\int_{\Gamma} P dx + Q dy = 1$ .

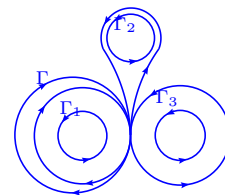
**Solución**

a) Consideremos la curva  $\Gamma = \Gamma'_1 \cup \Gamma'_2$  como en el gráfico, entonces:

$$\oint_{\Gamma} P dx + Q dy = \int_{\Gamma'_1 \cup \Gamma'_2} P dx + Q dy = \int_{\Gamma'_1} P dx + Q dy + \int_{\Gamma'_2} P dx + Q dy = 12 - 15 = -3.$$

b)  $-2I_1 + I_2 + I_3 = 1$ . Se dan dos vueltas alrededor de  $\Gamma_1$  en sentido contrario, más una vuelta a  $\Gamma_2$ , más una vuelta a  $\Gamma_3$ .

c) Si existen  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  tales que  $12a + 9b + 15c = 1$ , entonces hay dos casos para analizar:  $9b$  par y  $15c$  impar ó  $9b$  impar y  $15c$  par.



Si  $9b$  par y  $15c$  impar, entonces  $12a + 9b + 15c = 1 \implies 12a + 18b' + 30c' + 15 = 1 \implies 2(6a + 9b' + 15c' + 7) + 1 = 1 \implies 6a + 9b' + 15c' + 7 = 0 \implies 3(2a + 3b' + 5c' + 2) + 1 = 0$ , pero  $2a + 3b' + 5c' + 2 \in \mathbb{Z}$  y se concluye que  $2a + 3b' + 5c' + 2 = -\frac{1}{3}$  que es una contradicción.

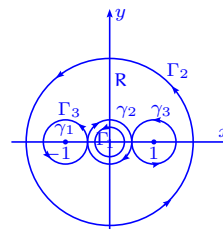
De manera similar se analiza el caso  $9b$  impar y  $15c$  par.

Finalmente tenemos que no existen enteros  $a, b$  y  $c$  tales que  $12a + 9b + 15c = 1$ .

117. Sea  $I_k = \int_{\Gamma_k} P dx + Q dy$ , donde  $P(x, y) = -y \left[ \frac{1}{(x-1)^2 + y^2} + \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{(x+1)^2 + y^2} \right]$  y  $Q(x, y) = \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2} + \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{x+1}{(x+1)^2 + y^2}$ . En la figura adjunta  $\Gamma_1$  es la circunferencia menor  $x^2 + y^2 = \frac{1}{8}$  (con el sentido contrario al de las agujas del reloj),  $\Gamma_2$  es la circunferencia mayor  $x^2 + y^2 = 4$  (con el sentido contrario al de las agujas del reloj) y  $\Gamma_3$  es la curva unión de las tres circunferencias  $\gamma_1 : (x-1)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ ,  $\gamma_2 : x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ ,  $\gamma_3 : (x+1)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ , dibujadas en los sentidos que se indican en la figura. Si  $I_2 = 6\pi$  e  $I_3 = 2\pi$ , hallar el valor de  $I_1$ .

**Solución** Primeramente observemos que  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ . En efecto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= - \left[ \frac{1}{(x-1)^2 + y^2} + \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{(x+1)^2 + y^2} \right] - \\ &\quad y \left[ \frac{-2y}{((x+1)^2 + y^2)^2} + \frac{-2y}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{-2y}{((x+1)^2 + y^2)^2} \right] \\ &= \frac{y^2 - (x-1)^2}{((x-1)^2 + y^2)^2} + \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{y^2 - (x+1)^2}{((x+1)^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{(x+1)^2 + y^2 - 2(x-1)(x-1)}{((x-1)^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{(x+1)^2 + y^2 - 2(x+1)^2}{(x+1)^2 + y^2} \\ &= \frac{y^2 - (x-1)^2}{((x-1)^2 + y^2)^2} + \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{y^2 - (x+1)^2}{((x+1)^2 + y^2)^2}.\end{aligned}$$

Así, por la fórmula de Green se tiene:

$$\begin{aligned}0 &= \iint_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Gamma_2} P dx + Q dy - \sum_{i=1}^3 \int_{\gamma_i} P dx + Q dy = \\ &6\pi - (2\pi - \int_{\gamma_2} P dx + Q dy + 2\pi), \text{ o sea } - \int_{\gamma_2} P dx + Q dy = \int_{\Gamma_1} P dx + Q dy = I_1 = 2\pi.\end{aligned}$$

118. Calcular el área de las figuras limitadas por las siguientes curvas:

a) la elipse  $x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$ .      b) la astroide  $x = a \cos^3 t$ ,  $y = a \sin^3 t$ .

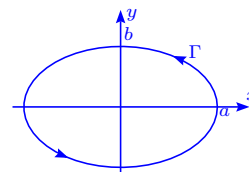
c) la cardioide  $x = a(2 \cos t - \cos 2t)$ ,  $y = a(2 \sin t - \sin 2t)$ .

d) el lazo del folio de Descartes  $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ ,  $a > 0$ .

e) la curva  $(x+y)^3 = axy$ .

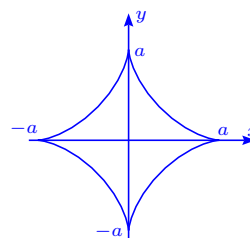
**Solución**

$$\begin{aligned}\text{a) Área} &= \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (ab \cos^2 t + ab \sin^2 t) dt = \\ &\frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} dt = \pi ab.\end{aligned}$$



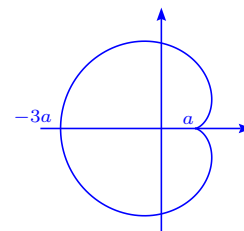
b) En este caso  $xy' - yx' = 3a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 3a^2 \sin^4 t \cos^2 t = 3a^2 \sin^2 t \cos^2 t (\sin^2 t + \cos^2 t) = 3a^2 \sin^2 t \cos^2 t = \frac{3}{4} a^2 \sin^2 2t$ .

$$\begin{aligned}\text{Área} &= \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (xy' - yx') dt \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{3}{4} a^2 \sin^2 2t (2 dt) = \frac{3 \cdot 8}{16} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 2t (2 dt) \\ &= \frac{3}{2} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u du = \frac{3}{2} a^2 \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} = \frac{3}{8} \pi a^2.\end{aligned}$$



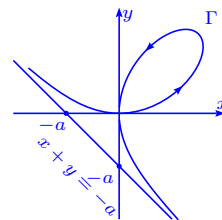
c) Para el cardioide  $xy' - yx' = a^2 [(2 \cos t - \cos 2t)(2 \cos t - 2 \cos 2t) + (2 \sin t - \sin 2t)(2 \sin t - 2 \sin 2t)] =$

$$\begin{aligned}a^2 [4 \cos^2 t - 2 \cos t \cos 2t - 4 \cos t \cos 2t + 2 \cos^2 2t + 4 \sin^2 t - \\ 4 \sin t \sin 2t - 2 \sin t \sin 2t + 2 \sin^2 2t] =\end{aligned}$$



$a^2(6 - 6 \cos t \cos 2t - 6 \sin t \sin 2t) = 6a^2(1 - \cos t(\cos^2 t - \sin^2 t) - 2 \sin^2 t \cos t) = 6a^2(1 - \cos t)^2$ ,  
 entonces Área =  $\frac{1}{2} \oint_{\Gamma} x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 6a^2(1 - \cos t)^2 dt = 3a^2(2\pi - 0) = 6\pi a^2$ .

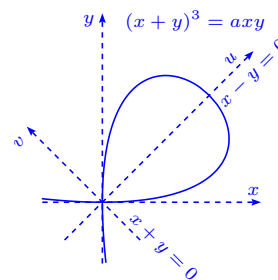
d) Usemos la representación paramétrica del folio de Descartes  $x = \frac{3at}{1+t^3}$ ,  $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$ ; el lazo corresponde a  $t \in [0, +\infty[$ . Como  $y = xt$  se tiene que  $xy' - yx' = x \cdot x't + x^2 - x \cdot x't = x^2$ , es decir:



$$\text{Área} = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{9a^2 t^2}{(1+t^3)^2} dt = \frac{3}{2} a^2 \int_0^{\infty} \frac{3t^2 dt}{(1+t^3)^2} = -\frac{3}{2} a^2 (1+t^3)^{-1} \Big|_0^{\infty} = \frac{3}{2} a^2.$$

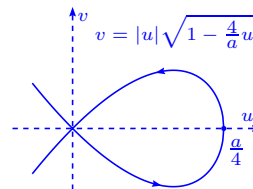
Otra manera de enfocarlo, es usando la fórmula Área =  $\frac{1}{2} \oint_{\Gamma} x^2 d\left(\frac{y}{x}\right)$  que nos lleva al mismo valor.

e) La curva así definida no nos queda claro la región donde está definida. Para simplificar consideremos el cambio de variable  $u = x + y$ ,  $v = x - y$ , entonces  $x = \frac{1}{2}(u + v)$ ,  $y = \frac{1}{2}(u - v)$  y la ecuación de la curva se transforma en  $u^3 = \frac{a}{4}(u^2 - v^2)$ , es decir  $v = \pm |u| \sqrt{1 - \frac{4}{a}u}$ , con  $1 - \frac{4}{a}u \geq 0$ , lo que implica  $u \leq \frac{a}{4}$ .



Graficando tenemos que la curva, es de la forma que aparece en la figura i.e. la región que nos interesa es para  $0 \leq u \leq \frac{a}{4}$ .

Observemos que con este cambio de variable de  $(x, y)$  a  $(u, v)$  lo que hicimos fue rotar los ejes  $(x, y)$  a  $(u, v)$  de modo que se simplificará el término  $x + y$  y pasarlo a  $u$ .



De esta manera tenemos que si  $y = x\sqrt{1 - \frac{4}{a}x}$ :

$$xy' - yx' = x \left( \sqrt{1 - \frac{4}{a}x} + \frac{x \left( -\frac{2}{a} \right)}{\sqrt{1 - \frac{4}{a}x}} \right) - x \sqrt{1 - \frac{4}{a}x} = x \frac{1 - \frac{4}{a}x - \frac{2x}{a} - \left( 1 - \frac{4}{a}x \right)}{\sqrt{1 - \frac{4}{a}x}} = -\frac{2x^2}{a\sqrt{1 - \frac{4}{a}x}}, \text{ si } y > 0 \text{ y } 0 \leq x \leq \frac{a}{4}.$$

Si  $y = -x\sqrt{1 - \frac{4}{a}x}$  (parte inferior de la curva),  $xy' - yx' = \frac{2x^2}{a\sqrt{1 - \frac{4}{a}x}}$ ,  $0 \leq x \leq \frac{a}{4}$ ,

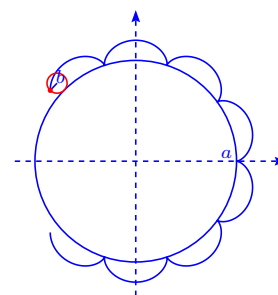
$$\text{por lo tanto, Área} = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} x dy - y dx = \frac{1}{2} \left( \int_{a/4}^0 \frac{-2x^2}{a\sqrt{1 - \frac{4}{a}x}} dx + \int_0^{a/4} \frac{2x^2}{a\sqrt{1 - \frac{4}{a}x}} dx \right) =$$

$$\frac{2}{a} \int_0^{a/4} \frac{x^2}{\sqrt{1 - \frac{4}{a}x}} dx = -\frac{2}{a} \left( \frac{1}{10} x^2 a \sqrt{1 - \frac{4}{a}x} + \frac{1}{30} x a^2 \sqrt{1 - \frac{4}{a}x} + \frac{1}{60} a^3 \sqrt{1 - \frac{4}{a}x} \right) \Big|_0^{a/4} = \frac{2}{a} \frac{1}{60} a^3 = \frac{a^2}{30}.$$

Observemos que se pudo usar la fórmula:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= -\oint_{\Gamma} y dx = - \left( \int_0^{a/4} -x \sqrt{1 - \frac{4}{a}x} dx + \int_{a/4}^0 x \sqrt{1 - \frac{4}{a}x} dx \right) = \\ &2 \int_0^{a/4} x \sqrt{1 - \frac{4}{a}x} dx = 2 \cdot \frac{a^2}{16} \int_0^{a/4} \frac{4}{a} x \sqrt{1 - \frac{4}{a}x} d\left(\frac{4}{a}x\right) = \frac{1}{8} a^2 \int_0^1 x(1-x)^{1/2} dx = \frac{1}{8} a^2 \beta\left(2, \frac{3}{2}\right) = \\ &\frac{1}{8} a^2 \frac{\Gamma(2)\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{7}{2})} = \frac{1}{8} a^2 \frac{1 \cdot \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2})}{\frac{3}{2} \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{1}{8} \frac{4}{15} a^2 = \frac{1}{30} a^2. \end{aligned}$$

119. Una circunferencia de radio  $b$  rueda sin resbalar sobre otra circunferencia fija de radio  $a$ , por fuera de la misma. Supongamos que  $\frac{a}{b} \in \mathbb{N}^*$ , entonces determinar el área limitada por la curva (epicicloide) que describe un punto fijo sobre la circunferencia de radio  $b$  al rodar sobre la circunferencia de radio  $a$ . Analizar el caso en que  $a = b$  (cardioide).



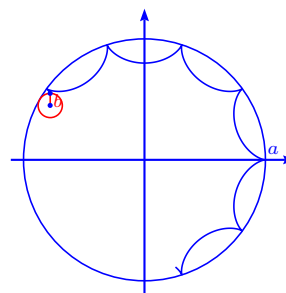
**Solución** Las ecuaciones paramétricas de la curva son  $x = (a + b) \cos t - b \cos \frac{a+b}{b}t$ ,  $y = (a + b) \sin t - b \sin \frac{a+b}{b}t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , que es el ciclo de la epicicloide ya que  $\frac{a+b}{b} = \frac{a}{b} + 1 = n + 1 \in \mathbb{N}$ .

Así tenemos  $xy' - yx' = -(a + b)(a + 2b)(\cos t \cos \frac{a+b}{b}t + \sin t \sin \frac{a+b}{b}t - 1)$ , por lo que:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} -(a + b)(a + 2b) \left( \cos t \cos \frac{a+b}{b}t + \sin t \sin \frac{a+b}{b}t - 1 \right) dt = \\ &\frac{1}{2} (a + b)(a + 2b) 2\pi + 0 = \pi (a + b)(a + 2b), \text{ usando el hecho de que } \frac{a}{b} = n \in \mathbb{N} \text{ y que} \\ &\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)), \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)) \end{aligned}$$

Si  $a = b$ , el área es  $6\pi a^2$ .

120. Una circunferencia de radio  $b$  rueda sin resbalar por otra circunferencia fija de radio  $a$  permaneciendo dentro de ella, de modo que  $\frac{a}{b} \in \mathbb{N}^*$ . Calcular el área limitada por la curva (hipocicloide) descrita por un punto fijo de la circunferencia móvil al rodar dentro de la circunferencia de radio  $b$ .



Analizar el caso particular en que  $a = \frac{b}{4}$  (astroide).

**Solución** Las ecuaciones paramétricas que describen el movimiento, están dada por  $x = (a - b) \cos t + b \cos \frac{a-b}{b}t$ ,  $y = (a - b) \sin t - b \sin \frac{a-b}{b}t$ .

Notemos que son las mismas ecuaciones del epicicloide sustituyendo  $b$  por  $-b$ . Tomando en cuenta esta observación, la expresión del  $xy' - yx'$  del hipocicloide es la misma expresión que el epicicloide sustituyendo  $b$  por  $-b$  (verificarlo):

$$xy' - yx' = -(a - 2b)(a - b)(\cos t \cos \frac{a-b}{b}t - \sin t \sin \frac{a-b}{b}t - 1).$$

Así tenemos que:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} -(a - 2b)(a - b)(\cos t \cos \frac{a-b}{b}t - \sin t \sin \frac{a-b}{b}t - 1) dt \\ &= \frac{1}{2}(a - b)(a - 2b)2\pi + 0 = \pi(a - b)(a - 2b), \end{aligned}$$

ya que  $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$ ,  $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$  y que  $\frac{a}{b} \in \mathbb{N}$ .

Si  $b = \frac{1}{4}a$ ,  $\text{Área} = \pi \frac{1}{2}a \cdot \frac{3}{4}a = \frac{3}{8}\pi a^2$ .

121. Transformar las integrales de línea tomadas a lo largo de las curvas cerradas  $\Gamma$ , en el sentido positivo, en las integrales dobles sobre los dominios limitados por estos contornos:

a)  $\oint_{\Gamma} (1 - x^2)y dx + x(1 + x^2) dy$ .

b)  $\oint_{\Gamma} (e^{xy} + 2x \cos y) dx + (e^{xy} - x^2 \sin y) dy$ .

**Solución**

a) Tomando  $P = (1 - x^2)y$ ,  $Q = x(1 + y^2)$ , entonces  $\frac{\partial P}{\partial y} = 1 - x^2$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1 + y^2$ , con lo cual

tenemos:

$$\oint_{\Gamma} (1-x^2)y dx + x(1+y^2) dy = \iint_S (x^2 + y^2) dx dy.$$

b) Sea  $P = e^{xy} + 2x \cos y$ ,  $Q = e^{xy} - x^2 \operatorname{sen} y$ , entonces  $\frac{\partial P}{\partial y} = xe^{xy} - 2x \operatorname{sen} y$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x} = ye^{xy} - 2x \operatorname{sen} y$ , por lo tanto:

$$\oint_{\Gamma} (e^{xy} + 2x \cos y) dx + (e^{xy} - x^2 \operatorname{sen} y) dy = \iint_S (y-x)e^{xy} dx dy.$$

122. Calcular la integral  $\oint_{\Gamma} (1-x^2)y dx + x(1+y^2) dy$ , donde  $\Gamma$  es la circunferencia  $x^2 + y^2 = a^2$ , directamente y aplicando la fórmula de Green.

**Solución** Tomando la parametrización  $x = a \cos t$ ,  $y = a \operatorname{sen} t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , entonces:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (1-x^2)y dx + x(1+y^2) dy &= \\ \int_0^{2\pi} \left( (1-a^2 \cos^2 t) a \operatorname{sen} t (-a \operatorname{sen} t) + a \cos t (1+a^2 \operatorname{sen}^2 t) a \cos t \right) dt &= \\ 4a^4 \int_0^{2\pi} 2 \cos^2 t (1-\cos^2 t) dt + a^2 \int_0^{2\pi} \cos 2t dt &= 8a^4 \left( \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} \frac{3}{4} \right) = \frac{1}{2} \pi a^4. \end{aligned}$$

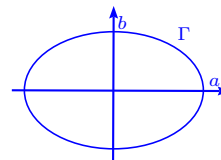
Por otro lado:

$$\int_{\Gamma} (1-x^2)y dy + x(1+y^2) dx = \iint_S (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^a r^3 dr \right) d\theta = 2\pi \frac{a^4}{4} = \frac{1}{2} \pi a^4.$$

123. Calcular la integral  $\int_{\Gamma} (xy + x + y) dx + (xy + x - y) dy$ , donde  $\Gamma$  es la elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  y cuando  $\Gamma$  es la circunferencia  $x^2 + y^2 = ax$ . La integral debe calcularse directamente y usando la fórmula de Green.

**Solución**

a) Usando la parametrización  $x = a \cos t$ ,  $y = b \operatorname{sen} t$ , tenemos:



$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (xy + x + y) dx + (xy + x - y) dy &= \\ \int_0^{2\pi} \left( (ab \operatorname{sen} t \cos t + a \cos t + b \operatorname{sen} t)(-a \operatorname{sen} t) + (ab \operatorname{sen} t \cos t + a \cos t - b \operatorname{sen} t) b \cos t \right) dt &= \\ \int_0^{2\pi} \left( -a^2 b \operatorname{sen}^2 t \cos t - a^2 \operatorname{sen} t \cos t - ab \operatorname{sen}^2 t + ab^2 \operatorname{sen} t \cos^2 t - b^2 \operatorname{sen} t \cos t + ab \cos^2 t \right) dt &= \\ -a^2 b \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t \cos t dt - ab^2 \int_0^{2\pi} \cos^2(-\operatorname{sen} t) dt - (a^2 + b^2) \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t \cos t dt + ab \int_0^{2\pi} \cos 2t dt &= \\ 0 + 0 + 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

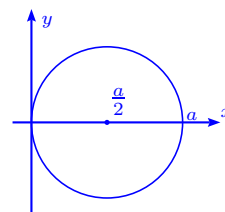
Usando la fórmula de Green tenemos:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy &= \iint_{\mathbb{R}} (y + 1 - (x + 1))dx dy = \iint_{\mathbb{R}} (y - x)dx dy = \\ \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 (br \operatorname{sen} t - ar \operatorname{cos} t)abr dr \right) dt &= ab \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 (br \operatorname{sen} t - ar \operatorname{cos} t)dt \right) r dr = \\ ab \int_0^1 0 \cdot r dr &= 0. \end{aligned}$$

b) La circunferencia se escribe  $r = a \cos \theta$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ,

entonces  $x = r \cos \theta = a \cos^2 \theta$ ,  $y = r \operatorname{sen} \theta = a \operatorname{sen} \theta \cos \theta$ ,

por lo tanto:



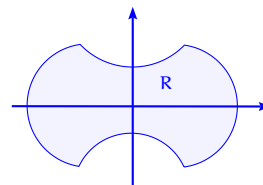
$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy &= \\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[ (a^2 \cos^3 \theta \operatorname{sen} \theta + a \cos^2 \theta + a \operatorname{sen} \theta \cos \theta)(-2a \cos \theta \operatorname{sen} \theta) + \right. \\ &\quad \left. (a^2 \cos^3 \theta \operatorname{sen} \theta + a \cos^2 \theta - a \operatorname{sen} \theta \cos \theta)a(\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) \right] d\theta = \\ -2 \left[ a^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta \operatorname{sen}^2 \theta d\theta + a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta \operatorname{sen} \theta d\theta + a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta d\theta \right] + \\ a^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \theta \operatorname{sen} \theta d\theta - a^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta \operatorname{sen}^3 \theta d\theta + a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta - a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \operatorname{sen}^2 \theta d\theta + \\ a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3 \theta \cos \theta d\theta - a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta \operatorname{sen} \theta d\theta &= \\ -2a^3 \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 \theta - \cos^6 \theta) d\theta - 3a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta d\theta + a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta &= \\ -4a^3 \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} \frac{3}{4} \left(1 - \frac{5}{6}\right) - 3a^2 \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{4}\right) + a^2 \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} \frac{3}{4} &= -\frac{3 \cdot 4 \pi a^3}{4 \cdot 4} \frac{1}{6} = -\frac{1}{8} \pi a^3. \end{aligned}$$

Usando la fórmula de Green tenemos:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy &= \iint_{\mathbb{R}} (y - x)dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{a \cos \theta} (\operatorname{sen} \theta - \cos \theta)r^2 dr \right) d\theta = \\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} a^3 \cos^3 \theta (\operatorname{sen} \theta - \cos \theta) d\theta &= \frac{1}{3} a^3 \left( 0 - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta \right) = -\frac{2}{3} a^3 \frac{\pi}{2} \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} = -\frac{1}{8} a^3 \pi. \end{aligned}$$

124. Demostrar que la integral  $\int_{\Gamma} (y^2 x^3 + e^y)dx + (xy^3 + xe^y - 2y)dy$  es igual a cero, si  $\Gamma$  es una curva cerrada simétrica respecto al eje  $y$ .

**Solución** Sea  $P(x) = y^2x^3 + e^y$ ,  $Q(x, y) = xy^3 + xe^y - 2y$ , entonces  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y^3 + e^y - 2yx^3 - e^y = y^3 - 2yx^3$ , por lo tanto la simetría respecto al eje  $y$  implica que



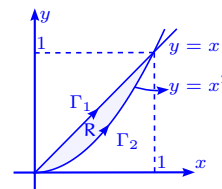
$\varphi(x, y) = y^3 - 2yx^3$ , satisface  $\varphi(x, -y) = -\varphi(x, y)$  y la integral sobre la región encerrada  $R$  es nula, pues  $\int_{\Gamma} Pdx + Qdy = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{-\rho(x)}^{\rho(x)} \varphi(x, y) dy dx = \int_{\alpha}^{\beta} 0 dx = 0$ .

Recuerde que una función impar tiene integral nula sobre intervalos de la forma  $[-a, a]$ .

125. Usando la fórmula de Green, calcular la diferencia entre  $I_1 = \int_{\Gamma_1} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy$  e  $I_2 = \int_{\Gamma_2} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy$ , donde  $\Gamma_1$  es un segmento de la recta que une los puntos  $(0, 0)$  y  $(1, 1)$  y  $\Gamma_2$  es el arco de la parábola  $y = x^2$ .

**Solución** Tenemos que:

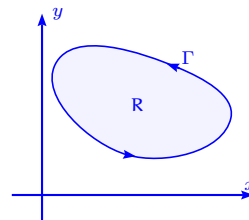
$$\begin{aligned} I_1 - I_2 &= \iint_{\mathbf{R}} (-2(x-y) - 2(x+y)) dx dy = \iint_{\mathbf{R}} 4x dx dy \\ &= \int_0^1 \left( \int_{x^2}^x 4x dy \right) dx = 4 \int_0^1 xy \Big|_{x^2}^x dx = 4 \int_0^1 (x^2 - x^3) dx \\ &= 4 \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$



126. Demostrar que el valor de la integral  $\int_{\Gamma} (2xy - y) dx + x^2 dy$ , donde  $\Gamma$  es la curva cerrada, es igual al área del dominio limitado por esta curva.

**Solución** En este caso,  $\int_{\Gamma} (2xy - y) dx + x^2 dy =$

$$\iint_{\mathbf{R}} (2x - 2x + 1) dx dy = \iint_{\mathbf{R}} dx dy = |\mathbf{R}|.$$



127. Demostrar que la integral  $\int_{\Gamma} \varphi(y) dx + [x\varphi'(y) + x^3] dy$ , es igual al momento de inercia triple de una figura plana homogénea limitada por el contorno  $\Gamma$ , respecto al eje de ordenadas, donde  $\varphi$  es de clase  $C^1$ .

**Solución** Se tiene que:

$$\int_{\Gamma} \varphi(y) dx + [x\varphi'(y) + x^3] dy = \iint_{\mathbf{R}} (\varphi'(y) + 3x^2 - \varphi'(y)) dx dy = 3 \iint_{\mathbf{R}} x^2 dx dy = 3I_y.$$

128. Calcular el área de las figuras limitadas por las curvas cerradas, usando la integral de

línea:

$$\text{a) } (x+y)^4 = x^2y \qquad \text{b) } (x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2) \qquad \text{c) } (\sqrt{x} + \sqrt{y})^{12} = xy.$$

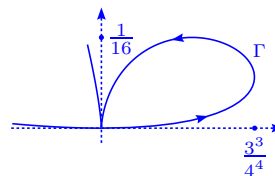
### Solución

a) Parametricemos la curva, con la sustitución  $\frac{y}{x} = u$ , entonces

$$(x+y)^4 = x^4\left(1+\frac{y}{x}\right)^4 = x^2y \implies \left(1+\frac{y}{x}\right)^4 = \frac{y}{x^2} \implies x = \frac{u}{(1+u)^4},$$

$$y = \frac{u^2}{(1+u)^4}, \text{ para } u \in \mathbb{R}.$$

Cuando  $u \in [0, +\infty[$  genera la curva  $\Gamma$  sobre la cual vamos a calcular la región que encierra.



En los intervalos  $] -1, 0 [$  y  $]-\infty, -1 [$ , se generan las otras dos ramas de la gráfica. Además,

$$x' = \frac{-3u-1}{(1+u)^5}, y' = \frac{-2u(u-1)}{(u+1)^5} \implies xy' - yx' = \frac{u^2}{(u+1)^8} = \frac{1}{(u+1)^8} - \frac{2}{(u+1)^7} + \frac{1}{(u+1)^6},$$

para  $u \in [0, +\infty[$ . Así tenemos que:

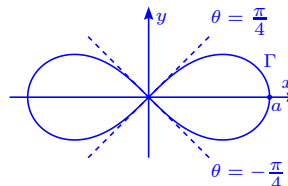
$$\begin{aligned} \text{Área} &= \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{u^2}{(u+1)^8} du = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{(u+1)^8} - \frac{2}{(u+1)^7} + \frac{1}{(u+1)^6} \right) du \\ &= \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{(u+1)^7} + \frac{1}{3(u+1)^6} - \frac{1}{5(u+1)^5} \right) \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2} \frac{1}{105} = \frac{1}{210}. \end{aligned}$$

b) La lemniscata de Bernoulli con la sustitución  $u = \frac{y}{x}$ , se

$$\text{escribe: } x = \pm \frac{\sqrt{2a}\sqrt{1-u^2}}{1+u^2}, y = \pm \frac{\sqrt{2a}u\sqrt{1-u^2}}{1+u^2}, |u| \leq 1.$$

$$\text{Además, } x' = \pm \frac{\sqrt{2a}u(u^2-3)}{\sqrt{1-u^2}(u^2+1)^2}, y' = \mp \frac{\sqrt{2a}(3u^2-1)}{\sqrt{1-u^2}(u^2+1)^2}, \text{ por}$$

lo que el área es (dos veces por razones de simetría):

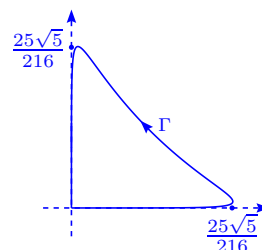


$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} x dy - y dx &= \frac{1}{2} \cdot 2 \int_{-1}^1 \frac{2a^2(1-u^2)}{(u^2+1)^2} du = \int_{-1}^1 \frac{2a^2 du}{(u^2+1)^2} - \int_{-1}^1 \frac{2a^2}{u^2+1} du \\ &= \left[ 2a^2 \left( \frac{u}{u^2+1} + \arctan u \right) - 2a^2 \arctan u \right]_{-1}^1 = \frac{2a^2 u}{u^2+1} \Big|_{-1}^1 = 2a^2. \end{aligned}$$

c) En este caso usamos la sustitución  $y = xt^2$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,

$$\text{entonces } x^6 \left(1 + \sqrt{\frac{y}{x}}\right)^{12} = xy \implies x^4 \left(1 + \sqrt{\frac{y}{x}}\right)^{12} = \frac{x}{y} \implies x^4 =$$

$$\frac{t^2}{(1+|t|)^{12}}, x = \frac{\sqrt{|t|}}{(1+|t|)^3}, y = \frac{t^2 \sqrt{|t|}}{(1+|t|)^3}.$$



De esta manera vemos que el gráfico es el mismo para  $t \in ]-\infty, 0 [$  o  $t \in [0, +\infty[$ . Usaremos

$$\text{el intervalo } [0, +\infty[ \text{ i.e. } x = \frac{\sqrt{t}}{(1+t)^3}, y = \frac{t^{\frac{5}{2}}}{(1+t)^3}, x' = -\frac{5t-1}{2\sqrt{t}(1+t)^4}, y' = -\frac{t^{\frac{3}{2}}(t-5)}{2(t+1)^4}.$$

Así el área es:

$$\begin{aligned}\text{Área} &= \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{2t^2}{(t+1)^6} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left( \frac{2}{(t+1)^6} - \frac{4}{(t+1)^5} + \frac{2}{(t+1)^4} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \left( -\frac{2}{5(t+1)^5} + \frac{1}{(t+1)^4} - \frac{2}{3(t+1)^3} \right) \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{15} = \frac{1}{30}.\end{aligned}$$



## Capítulo 3

### Ejercicios de integrales de superficie

#### 3.1 Teoría de campos

1. a) Determinar las superficies de nivel del campo escalar  $U = f(r)$ , donde  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .  
¿Cuáles son las superficies de nivel del campo  $U = g(\rho)$ , donde  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ ?

- b) Determinar las superficies de nivel del campo escalar  $U = \arcsen \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ .

#### Solución

- a) Si  $U = f(r) = c$ , constante tenemos que si existen varios valores de  $r = \alpha$ , tales que  $f(\alpha) = c$ , entonces  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \alpha$  son esferas concéntricas de radio  $\alpha$ .

Si  $U = f(\rho) = c$ ,  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ , se tiene que si existe  $\alpha$  de modo que  $f(\alpha) = c$ ,  $\alpha = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ , tenemos cilindros.

- b) Si  $U = \arcsen \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = c$ , se tiene que  $\alpha = \sin c = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ , o sea  $z = \alpha \sqrt{x^2 + y^2}$  es un cono.

2. a) Demostrar que las líneas vectoriales del campo vectorial  $\mathbf{f}(x, y, z) = \mathbf{c}$ , donde  $\mathbf{c}$  es un vector constante, son rectas paralelas al vector  $\mathbf{c}$ .

- b) Determinar las líneas vectoriales del campo  $F(x, y, z) = (-wy, wx, 0)$ , donde  $w$  es una constante.

#### Solución

- a) Se debe tener que  $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{r}(t)) = \mathbf{c} \implies x'(t) = c_1, y'(t) = c_2, z'(t) = c_3$  i.e.  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{c}t + \mathbf{a}$ ,

con a vector arbitrario.

b) Se tiene que  $x'(t) = -wy(t)$ ,  $y'(t) = wx(t)$ ,  $z'(t) = 0$ , ya que  $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{r}(t))$ , entonces  $y''(t) = -w^2y(t)$ ,  $x''(t) = -w^2x(t)$ ,  $z = c$ , o sea  $y(t) = a \operatorname{sen} wt$ ,  $x(t) = a \operatorname{cos} wt$ ,  $z = c \implies x^2 + y^2 = a^2$ ,  $z = c$ .

3. Sean  $u$ ,  $v$  campos escalares de clase  $C^1$  y  $\varphi$  una función real derivable. Deducir las fórmulas:

- $\nabla(\alpha u + \beta v) = \alpha \nabla u + \beta \nabla v$ , donde  $\alpha, \beta$  son constantes.
- $\nabla(uv) = u \nabla v + v \nabla u$ .
- $\nabla(u^2) = 2u \nabla u$ .
- $\nabla\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \nabla u - u \nabla v}{v^2}$ .
- $\nabla(\varphi(u)) = \varphi'(u) \nabla u$ .

### Solución

a) Sabemos que  $\frac{\partial}{\partial t}(\alpha u + \beta v) = \alpha \frac{\partial u}{\partial t} + \beta \frac{\partial v}{\partial t}$ , donde  $t \in \{x, y, z\}$ , entonces se tiene que la expresión  $\nabla(\alpha u + \beta v) = \alpha \nabla u + \beta \nabla v$ .

b) Sea  $t \in \{x, y, z\}$ , entonces  $\frac{\partial}{\partial t}(uv) = \frac{\partial u}{\partial t}v + u \frac{\partial v}{\partial t}$ , es decir  $\nabla(uv) = v \nabla u + u \nabla v$ .

c) Sea  $t \in \{x, y, z\}$ , entonces  $\frac{\partial}{\partial t}(u^2) = 2u \frac{\partial u}{\partial t}$ , por lo que  $\nabla(u^2) = 2u \nabla u$ .

d) Si  $t \in \{x, y, z\}$  tenemos  $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial v}{\partial t}}{v^2}$ , i.e.  $\nabla\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \nabla u - u \nabla v}{v^2}$ .

e) Similarmente si  $t \in \{x, y, z\}$ ,  $\frac{\partial}{\partial t}(\varphi(u)) = \varphi'(u) \frac{\partial u}{\partial t} \implies \nabla(\varphi(u)) = \varphi'(u) \nabla u$ .

4. a) Hallar la magnitud y la dirección del gradiente del campo  $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$  en el punto  $(2, 1, 1)$ . Determinar en qué puntos el gradiente del campo es perpendicular al eje  $z$  y en cuáles es igual a cero.

b) Calcular el  $\nabla u$ , si  $u$  es respectivamente igual a:

- $r$
- $r^2$
- $\frac{1}{r}$
- $f(r)$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

c) Determinar el gradiente del campo escalar  $u = \mathbf{c} \cdot \mathbf{r}$ , donde  $\mathbf{c}$  es un vector constante y  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ . ¿Cuáles son las superficies de nivel de este campo y cómo están situadas respecto al vector  $\mathbf{c}$ ?

**Solución**

a) Se tiene que  $u(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ , entonces  $\nabla u = (3x^2 - 3yz, 3y^2 - 3xz, 3z^2 - 3xy)$ ,  $\nabla u(2, 1, 1) = (9, -3, -3) = 3(3, -1, -1)$ ,  $\|\nabla u\| = 3\sqrt{9 + 1 + 1} = 3\sqrt{11}$ .

La dirección del gradiente  $\boldsymbol{\eta} = \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} = \frac{(3, -1, -1)}{\sqrt{11}}$ .

Si  $\nabla u \cdot (0, 0, 1) = 0 \iff z^2 = xy$  i.e. en la superficie  $z^2 = xy$  tenemos que  $\nabla u \perp$  eje  $z$ .

Finalmente,  $\nabla u = (0, 0, 0) \iff x^2 = yz, y^2 = xz, z^2 = xy \implies \left(\frac{y}{z}\right)^2 = \frac{y}{z} \implies y^3 = z^3 = x^3$ , o sea  $x = y = z$ .

b) i)  $\nabla r = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right) = \frac{1}{r}\mathbf{r}$ , pues  $\frac{\partial}{\partial t}r = \frac{t}{r}$ , si  $t \in \{x, y, z\}$ .

ii)  $\nabla r^2 = (2x, 2y, 2z) = 2\mathbf{r}$ .

iii)  $\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^3}(x, y, z) = -\frac{1}{r^3}\mathbf{r}$ , pues  $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{t}{r^3}$ , si  $t \in \{x, y, z\}$ .

iv)  $\nabla(f(r)) = f'(r)\nabla r = \frac{f'(r)}{r}\mathbf{r}$ .

c) Se tiene que  $u = c_1x + c_2y + c_3z$ , con  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ , entonces  $\nabla u = (c_1, c_2, c_3) = \mathbf{c}$ . De esta manera  $u = \mathbf{c} \cdot \mathbf{r} = \alpha = c_1x + c_2y + c_3z$  es un plano normal a  $\mathbf{c}$ , es decir las superficies de nivel son planos perpendiculares a  $\mathbf{c}$ .

5. a) Determinar la derivada de la función  $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$  en un punto  $(x, y, z)$ , en la dirección del vector  $\mathbf{r}$  en ese punto. ¿En qué caso esta derivada es igual a la magnitud del gradiente?

b) Determinar la derivada de la función  $u = \frac{1}{r}$  en la dirección  $\boldsymbol{\ell} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$  ¿En qué caso esta derivada es igual a cero?

**Solución**

a) Tenemos que  $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ , entonces  $\nabla u = \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2}\right)$  y por lo tanto  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{r}} = \nabla u \cdot \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right) = \frac{2}{r} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) = 2u\frac{1}{r}$ .

Además  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{r}} = \|\nabla u\| \iff 2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^{1/2} = 2 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ , es decir hay igual si y sólo si  $a = b = c, \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

b) Como  $u = \frac{1}{r}$ ,  $\nabla u = -\frac{1}{r^3}(x, y, z)$  y  $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\ell}} = \nabla u \cdot \boldsymbol{\ell} = -\frac{1}{r^3}(x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) = \frac{1}{r^3}\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{r}$ .

$$\text{Si } \frac{\partial u}{\partial \ell} = \frac{1}{r^3} \ell \cdot \mathbf{r} = 0 \iff \mathbf{r} \perp \ell.$$

6. Sea  $\varphi$  un campo escalar de clase  $C^1$  y  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{g}$  dos campos vectoriales de clase  $C^1$ , con  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ ,  $\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3)$ . Deducir las fórmulas:

a)  $\text{div}(\alpha\mathbf{f} + \beta\mathbf{g}) = \alpha\text{div}\mathbf{f} + \beta\text{div}\mathbf{g}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

b)  $\text{div}(\varphi\mathbf{c}) = \nabla\varphi \cdot \mathbf{c}$ ,  $\mathbf{c}$  es un vector constante.

c)  $\text{div}(\varphi\mathbf{f}) = \nabla\varphi \cdot \mathbf{f} + \varphi\text{div}\mathbf{f}$ .

d)  $\text{rot}(\alpha\mathbf{f} + \beta\mathbf{g}) = \alpha\text{rot}\mathbf{f} + \beta\text{rot}\mathbf{g}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

e)  $\text{rot}(\varphi\mathbf{c}) = \nabla\varphi \times \mathbf{c}$ ,  $\mathbf{c}$  es un vector constante.

f)  $\text{rot}(\varphi\mathbf{f}) = \nabla\varphi \times \mathbf{f} + \varphi\text{rot}\mathbf{f}$ .

### Solución

a)  $\alpha\mathbf{f} + \beta\mathbf{g} = (\alpha f_1 + \beta g_1, \alpha f_2 + \beta g_2, \alpha f_3 + \beta g_3)$  y como  $\frac{\partial}{\partial t}(\alpha f_i + \beta g_i) = \alpha \frac{\partial f_i}{\partial t} + \beta \frac{\partial g_i}{\partial t}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $t \in \{x, y, z\}$ , entonces  $\text{div}(\alpha\mathbf{f} + \beta\mathbf{g}) = \alpha\text{div}(\mathbf{f}) + \beta\text{div}(\mathbf{g})$ .

b)  $\text{div}(\varphi\mathbf{c}) = \text{div}(c_1\varphi, c_2\varphi, c_3\varphi) = c_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + c_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + c_3 \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \mathbf{c} \cdot \nabla\varphi$ .

c)  $\text{div}(\varphi\mathbf{f}) = \text{div}(\varphi f_1, \varphi f_2, \varphi f_3) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} f_1 + \varphi \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} f_2 + \varphi \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} f_3 + \varphi \frac{\partial f_3}{\partial z} = \varphi\text{div}\mathbf{f} + \nabla\varphi \cdot \mathbf{f}$ .

$$\begin{aligned} \text{d) } \text{rot}(\alpha\mathbf{f} + \beta\mathbf{g}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \alpha f_1 + \beta g_1 & \alpha f_2 + \beta g_2 & \alpha f_3 + \beta g_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \alpha f_1 & \alpha f_2 & \alpha f_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \beta g_1 & \beta g_2 & \beta g_3 \end{vmatrix} = \alpha\text{rot}\mathbf{f} + \beta\text{rot}\mathbf{g}. \end{aligned}$$

$$\text{e) } \text{rot}(\varphi\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \varphi c_1 & \varphi c_2 & \varphi c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \nabla\varphi \times \mathbf{c}.$$

f) Sabemos que  $\frac{\partial}{\partial t}(\varphi f_i) = \frac{\partial \varphi}{\partial t} f_i + \varphi \frac{\partial f_i}{\partial t}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $t \in \{x, y, z\}$ , entonces:

$$\operatorname{rot}(\varphi \mathbf{f}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \varphi f_1 & \varphi f_2 & \varphi f_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \varphi \frac{\partial}{\partial x} & \varphi \frac{\partial}{\partial y} & \varphi \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \nabla \varphi \times \mathbf{f} + \varphi \operatorname{rot} \mathbf{f}.$$

7. a) Calcular la  $\operatorname{div} \left( \frac{1}{r} \mathbf{r} \right)$ .

b) Determinar la  $\operatorname{div}(\mathbf{f})$  para el campo vectorial central  $\mathbf{f}(x, y, z) = f(r) \frac{1}{r} \mathbf{r}$ ,  $f$  derivable.

**Solución**

$$\text{a) } \operatorname{div} \left( \frac{1}{r} \mathbf{r} \right) = \operatorname{div} \left( \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right) = \frac{r - \frac{x^2}{r}}{r^2} + \frac{r - \frac{y^2}{r}}{r^2} + \frac{r - \frac{z^2}{r}}{r^2} = \frac{2(x^2 + y^2 + z^2)}{r^3} = \frac{2}{r}.$$

$$\text{b) } \operatorname{div}(\mathbf{f}) = \operatorname{div} \left( f(r) \left( \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( f(r) \frac{x}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( f(r) \frac{y}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( f(r) \frac{z}{r} \right) = f'(r) \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}{r} + f(r) \frac{2}{r} = f'(r) + f(r) \frac{2}{r}.$$

8. Para cada uno de los siguientes campos vectoriales, determinar la matriz Jacobiana y calcular el rotacional y la divergencia:

a)  $\mathbf{f}(x, y, z) = (x^2 + yz, y^2 + xz, z^2 + xy)$

b)  $\mathbf{f}(x, y, z) = (2z - 3y, 3x - z, y - 2x)$

c)  $\mathbf{f}(x, y, z) = (z + \operatorname{sen} y, -z + x \cos y, 0)$

d)  $\mathbf{f}(x, y, z) = (e^{xy}, \cos(xy), \cos(xz^2))$

e)  $\mathbf{f}(x, y, z) = (x^2 \operatorname{sen} y, y^2 \operatorname{sen}(xz), xy \operatorname{sen}(\cos z)).$

**Solución** Recordemos que si  $\mathbf{f} = (P, Q, R)$ , entonces:

$$J_{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial y} & \frac{\partial R}{\partial z} \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{f} = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right),$$

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

a)  $J_{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} 2x & z & y \\ z & 2y & x \\ y & x & 2z \end{pmatrix}, \operatorname{rot} \mathbf{f} = (x - x, y - y, z - z) = (0, 0, 0), \operatorname{div} \mathbf{f} = 2x + 2y + 2z.$

$$\text{b) } J_{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{rot } \mathbf{f} = (1+1, 2+2, 3+3) = (2, 4, 6) = 2(1, 2, 3), \text{div } \mathbf{f} = 0+0+0 = 0.$$

$$\text{c) } J_{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} 0 & \cos y & 1 \\ \cos y & -x \text{sen } y & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{rot } \mathbf{f} = (0+1, 1-0, \cos y - \cos y) = (1, 1, 0),$$

$$\text{div } \mathbf{f} = 0 - x \text{sen } y + 0 = -x \text{sen } y.$$

$$\text{d) } J_{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} ye^{xy} & xe^{xy} & 0 \\ -y \text{sen}(xy) & -x \text{sen}(xy) & 0 \\ -z^2 \text{sen}(xz^2) & 0 & -2xz \text{sen}(xz^2) \end{pmatrix},$$

$$\text{rot } \mathbf{f} = (0-0, 0+z^2 \text{sen}(xz^2), -y \text{sen}(xy) - xe^{xy}) = (0, z^2 \text{sen}(xz^2), -y \text{sen}(xy) - xe^{xy}),$$

$$\text{div } \mathbf{f} = ye^{xy} - x \text{sen}(xy) - 2xz \text{sen}(xz^2).$$

$$\text{e) } J_{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} 2x \text{sen } y & x^2 \cos y & 0 \\ -y^2 z \cos(xz) & 2y \text{sen}(xz) & xy^2 \cos(xz) \\ y \text{sen}(\cos z) & x \text{sen}(\cos z) & -xyy \cos(\cos z) \text{sen } z \end{pmatrix},$$

$$\text{rot } \mathbf{f} = (x \text{sen}(\cos z) - xy^2 \cos(xz), 0 - y \text{sen}(\cos z), y^2 z \cos(xz) - x^2 \cos y) =$$

$$(x \text{sen}(\cos z) - xy^2 \cos(xz), -y \text{sen}(\cos z), y^2 z \cos(xz) - x^2 \cos y),$$

$$\text{div } \mathbf{f} = 2x \text{sen } y + 2y \text{sen}(xz) - xy \cos(\cos z) \text{sen } z.$$

9. a) Si  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  y  $r = \|\mathbf{r}\|$ , calcule  $\text{rot} [f(r)\mathbf{r}]$ , donde  $f$  es una función derivable.

b) Si  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  y  $\mathbf{a}$  es un vector constante, demostrar que  $\text{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{a}$ .

c) Si  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  y  $r = \|\mathbf{r}\|$ , determinar todos los valores de  $n$  para los que  $\text{div}(r^n \mathbf{r}) = 0$ .

### Solución

$$\text{a) } \text{rot}(f(r)\mathbf{r}) = f(r)\text{rot } \mathbf{r} + \nabla f(r) \times \mathbf{r} = f'(r) \left( \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right) \times (x, y, z) = \mathbf{0}.$$

$$\text{b) } \text{Se tiene que } \mathbf{a} \times \mathbf{r} = (a_2 z - a_3 y, a_3 x - a_1 z, a_1 y - a_2 x) \implies \text{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = (2a_1, 2a_2, 2a_3) = 2\mathbf{a}.$$

$$\text{c) } \text{div}(r^n \mathbf{r}) = \text{div}(r^n x, r^n y, r^n z) = nr^{n-1} \frac{x^2}{r} + r^n + nr^{n-1} \frac{y^2}{r} + r^n + nr^{n-1} \frac{z^2}{r} + r^n = nr^n + 3r^n = (n+3)r^n = 0 \implies n = -3.$$

10. Determinar un campo vectorial cuyo rotacional es  $(x, y, z)$ , o demostrar que no existe tal

campo.

**Solución** No existe tal campo, por que si existiera  $\mathbf{f}$  tal que  $\text{rot } \mathbf{f} = (x, y, z)$ , entonces  $\text{div}(\text{rot } \mathbf{f}) = \text{div}(x, y, z) = 1 + 1 + 1 = 3 \neq 0$  que es imposible.

11. Demostrar que  $\text{rot}(\text{rot } \mathbf{f}) = \nabla(\text{div } \mathbf{f}) - \nabla^2 \mathbf{f}$ , si  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$  es de clase  $C^2$ .

**Solución** Se tiene que  $\text{rot}(\text{rot}(f_1, f_2, f_3)) = \text{rot}\left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) =$   
 $\left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f_3}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial y \partial z}\right) =$   
 $\nabla(\text{div } \mathbf{f}) - \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 f_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial z^2}\right) =$   
 $\nabla(\text{div } \mathbf{f}) - \nabla^2 \mathbf{f}$ , ya que:

$$\nabla(\text{div } \mathbf{f}) = \nabla\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}\right) =$$

$$\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 f_3}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y}\right).$$

12. Demostrar la identidad  $\nabla \cdot (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = \mathbf{g} \cdot (\nabla \times \mathbf{f}) - \mathbf{f} \cdot (\nabla \times \mathbf{g})$ , donde  $\mathbf{f}$  y  $\mathbf{g}$  son campos vectoriales diferenciables.

**Solución** Se tiene que:

$$\mathbf{f} \times \mathbf{g} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{vmatrix} = (f_2 g_3 - g_2 f_3, g_1 f_3 - f_1 g_3, f_1 g_2 - g_1 f_2)$$

y

$$\nabla \cdot (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = \frac{\partial f_2}{\partial x} g_3 + f_2 \frac{\partial g_3}{\partial x} - \frac{\partial g_2}{\partial x} f_3 - g_2 \frac{\partial f_3}{\partial x} + \frac{\partial g_1}{\partial y} f_3 + g_1 \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_1}{\partial y} g_3 - f_1 \frac{\partial g_3}{\partial y} +$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} g_2 + \frac{\partial g_2}{\partial z} f_1 - \frac{\partial g_1}{\partial z} f_2 - g_1 \frac{\partial f_2}{\partial z}.$$

Por otro lado:

$$\nabla \times \mathbf{f} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right),$$

$$\nabla \times \mathbf{g} = \left(\frac{\partial g_3}{\partial y} - \frac{\partial g_2}{\partial z}, \frac{\partial g_1}{\partial z} - \frac{\partial g_3}{\partial x}, \frac{\partial g_2}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial y}\right),$$

entonces:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) &= (g_1, g_2, g_3) \cdot \left( \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) - \\ &\quad (f_1, f_2, f_3) \cdot \left( \frac{\partial g_3}{\partial y} - \frac{\partial g_2}{\partial z}, \frac{\partial g_1}{\partial z} - \frac{\partial g_3}{\partial x}, \frac{\partial g_2}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial y} \right) \\ &= \mathbf{g} \cdot (\nabla \times \mathbf{f}) - \mathbf{f} \cdot (\nabla \times \mathbf{g}).\end{aligned}$$

13. Un campo vectorial  $\mathbf{f}$  no será gradiente de un potencial a menos que  $\text{rot } \mathbf{f} = \mathbf{0}$ . Sin embargo es posible encontrar una función real  $\mu$  tal que  $\mu \mathbf{f}$  es un gradiente.

Demostrar que si un tal  $\mu$  existe,  $\mathbf{f}$  es perpendicular a su rotacional.

Cuando el campo es bidimensional  $\mathbf{f} = (P, Q)$ , este ejercicio nos da una condición para que la ecuación diferencial  $P dx + Q dy = \mathbf{0}$  tenga un factor integrante.

**Solución** Supongamos que  $\exists \mu, \varphi$  tales que  $\mu \mathbf{f} = \nabla \varphi$  i.e.  $\mu f_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \mu f_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \mu f_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ .

Observemos que:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} = \frac{\partial \mu}{\partial z} f_1 + \mu \frac{\partial f_1}{\partial z} = \frac{\partial \mu}{\partial x} f_3 + \mu \frac{\partial f_3}{\partial x} \implies \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} = \left( \frac{\partial \mu}{\partial x} f_3 - \frac{\partial \mu}{\partial z} f_1 \right) / \mu.$$

Considerando las otras funciones  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$ , se tiene que:

$$\begin{aligned}\mathbf{f} \cdot \text{rot } \mathbf{f} &= f_1 \left( \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) + f_2 \left( \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \right) + f_3 \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \\ &= \frac{f_1 \left( \frac{\partial \mu}{\partial z} f_2 - \frac{\partial \mu}{\partial y} f_3 \right)}{\mu} + \frac{f_2 \left( \frac{\partial \mu}{\partial x} f_3 - \frac{\partial \mu}{\partial z} f_1 \right)}{\mu} + \frac{f_3 \left( \frac{\partial \mu}{\partial y} f_1 - \frac{\partial \mu}{\partial x} f_2 \right)}{\mu} = 0.\end{aligned}$$

Si  $\mu$  es un factor integrante de  $P dx + Q dy = 0 \implies \mu \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = (\mu P, \mu Q) \cdot d\mathbf{r} = \nabla \varphi \cdot d\mathbf{r} = 0$ , por lo que la solución satisface  $\varphi(x, y) = c \in \mathbb{R}$ .

14. Sea  $\mathbf{f}(x, y, z) = (y^2 z^2, z^2 x^2, x^2 y^2)$ , demostrar que  $\text{rot } \mathbf{f}$  no siempre es  $\mathbf{0}$ , pero  $\mathbf{f} \cdot \text{rot } \mathbf{f} = 0$ .

Hallar un campo escalar  $\mu$  tal que  $\mu \mathbf{f}$  sea un gradiente.

**Solución** Es claro que  $\text{rot } \mathbf{f} = (2yx^2 - 2zx^2, 2zy^2 - 2xy^2, 2xz^2 - 2yz^2) \neq \mathbf{0}$  y

$$\mathbf{f} \cdot \text{rot } \mathbf{f} = x^2 y^2 z^2 (2y - 2z) + x^2 y^2 z^2 (2z - 2x) + x^2 y^2 z^2 (2x - 2y) = 0.$$

Por otro lado, existe  $\mu$  tal que  $\mu y^2 z^2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \mu x^2 z^2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \mu x^2 y^2 = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \implies$

$$\varphi = y^2 z \int \mu dx + c_1(y, z) = x^2 z^2 \int \mu dy + c_2(x, z) = x^2 y^2 \int \mu dz + c_3(x, y).$$

En particular, haciendo  $c_1 = c_2 = c_3 = 0, x^2 \int \mu dy = y^2 \int \mu dx \implies \int \mu dx = a_1 x^2$ , o sea

$\mu = 2a_1x = 2a_2y = 2a_3z = 2xyz$ , por lo que  $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2x^2y^3z^3$ , es decir  $\varphi = \frac{2}{3}x^3y^3z^3$ .

15. Determinar un campo vectorial  $\mathbf{g}(x, y, z)$ , cuyo rotacional es  $(2, 1, 3)$  en  $\mathbb{R}^3$ . ¿Cuál es el campo vectorial de clase  $C^1$  más general con esta propiedad?

**Solución** Se tiene que  $\text{rot } \mathbf{g} = (2, 1, 3) = (f_1, f_2, f_3)$ , entonces como  $\text{div}(\text{rot } \mathbf{g}) = 0$ ,  $\exists \mathbf{f} = (P, Q, R)$  tal que  $\text{rot } \mathbf{f} = (2, 1, 3)$  y se tiene que:

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 2, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 3.$$

Tomemos  $P = 0$ , entonces  $R = -x + c(y, z)$ ,  $Q = -2z + \int \frac{\partial c}{\partial y}(y, z) dz = 3x + c_1(y, z)$  y  $Q = 3x - 2z$ ,  $R = -x$ .

Otra manera de determinararlo, es tomando  $P = 0$ ,  $Q = \int_0^x f_3(t, y, 0) dt - \int_0^z f_1(x, y, t) dt$ ,  $R = -\int_0^x f_2(t, y, z) dt$ , o sea  $P = 0$ ,  $Q = 3x - 2z$ ,  $R = -x$ .

El campo vectorial  $\mathbf{g}$  de clase  $C^1$  más general es,  $\mathbf{g} = (0, 3 - 2z, -x) + \nabla\varphi$ , donde  $\varphi$  es una función de clase  $C^1$  en  $\mathbb{R}^3$ .

16. Verificar que el campo vectorial  $\mathbf{f}(x, y, z) = (y - z, z - x, x - y)$  es solenoidal y determinar un campo vectorial  $\mathbf{g}$  tal que  $\mathbf{f} = \text{rot } \mathbf{g}$ .

**Solución** Notemos que  $\text{div } \mathbf{f} = 0 + 0 + 0 = 0$ , por lo que el campo  $\mathbf{f}$  es solenoidal y existe  $\mathbf{g}$  tal que  $\mathbf{f} = \text{rot } \mathbf{g}$ .

Si  $P = 0$ ,  $Q = \int_0^x (t - y) dt - \int_0^z (y - t) dt = \frac{x^2}{2} - xy + \frac{z^2}{2}yz$ ,  $R = -\int_0^x (z - t) dt = -zx + \frac{x^2}{2}$ .

17. Sea  $\mathbf{f}(x, y, z) = (-z, 0, xy)$ , determinar un campo vectorial  $\mathbf{g}$  de clase  $C^1$  de la forma  $\mathbf{g}(x, y, z) = (L(x, y, z), M(x, y, z), 0)$ , tal que  $\text{rot } \mathbf{f} = \mathbf{g}$  en todo paralelepípedo rectangular en  $\mathbb{R}^3$ . ¿Cuál es el campo  $\mathbf{g}$  más general con esta propiedad?

**Solución** Tomando en cuenta que  $\text{div } \mathbf{f} = 0$ ,  $\exists \mathbf{g}$  tal que  $\mathbf{f} = \text{rot } \mathbf{g}$ , entonces tomando  $g_3 = 0$ ,  $\mathbf{g} = (\frac{1}{2}xy^2, \frac{1}{2}z^2, 0)$  y el campo más general que se puede tomar es  $\frac{1}{2}(xy^2, z^2, 0) + \nabla\varphi(x, y)$ ,  $\varphi$  de clase  $C^1$  independiente de  $z$ .

18. Si dos campos vectoriales  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  son irrotacionales, demostrar que  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  es solenoidal.

**Solución** En efecto,  $\text{div}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \text{rot } \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \text{rot } \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{0} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{0} = 0$ .

19. Sea  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ,  $r = \|\mathbf{r}\|$ , demostrar que  $n = -3$  es el único valor de  $n$ , para el cual  $r^n \mathbf{r}$  es solenoidal, siendo  $r \neq 0$ . Para este  $n$ , elegir un paralelepípedo  $S$ , que no contenga el origen y expresar  $r^{-3} \mathbf{r}$  como un rotacional en  $S$ .

**Solución** Se tiene que  $\operatorname{div}(r^n \mathbf{r}) = \operatorname{div}(r^n(x, y, z)) = nr^{n-1} \left( \frac{x^2}{r} + \frac{y^2}{r} + \frac{z^2}{r} \right) + r^n + r^n + r^n = (n+3)r^n = 0$  si y sólo si  $n = -3$ .

Por otro lado,  $r^{-3} \mathbf{r} = \operatorname{rot} \mathbf{g} = nr^{n-1} \left( \frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3} \right) = (f_1, f_2, f_3)$ , con  $\operatorname{div} \mathbf{g} = 0$ , por lo que si tomamos  $g_3 = 0$ ,  $g_2 = -\int_0^z f_1(x, y, t) dt = -\int_0^z \frac{x dt}{(x^2 + y^2 + t^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-xz}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ ,  $g_1 = \int_0^z f_2(x, y, t) dt - \int_0^y f_3(x, t, 0) dt = \int_0^z \frac{y dt}{(x^2 + y^2 + t^2)^{\frac{3}{2}}} - 0 = \frac{yz}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ , en todos los puntos en que  $z \neq 0$ .

Finalmente  $\mathbf{g} = \left( \frac{yz}{(x^2 + y^2)r}, \frac{-xz}{(x^2 + y^2)r}, 0 \right)$ , con  $\operatorname{rot} \mathbf{g} = \mathbf{0}$ .

20. Determinar la forma más general de una función  $f$  de clase  $C^1$  y una sola variable real, tal que el campo vectorial  $f(r)\mathbf{r}$  sea solenoidal, donde  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ,  $r = \|\mathbf{r}\|$ .

**Solución** Es claro que  $\operatorname{div}(f(r)x, f(r)y, f(r)z) = f'(r) \left( \frac{x^2}{r} + \frac{y^2}{r} + \frac{z^2}{r} \right) + 3f(r) = f'(r)r + 3f(r) = 0 \implies \frac{f'(r)}{f(r)} = -\frac{3}{r} \implies \ln f(r) = -3 \ln r + \ln c$  i.e.  $f(r) = cr^{-3}$ .

21. Sea  $\mathbf{v}$  un campo vectorial de clase  $C^1$  en un paralelepípedo  $R$  de  $\mathbb{R}^3$ . Consideremos las dos afirmaciones siguientes relativas a  $\mathbf{v}$ :

i)  $\operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{0}$  y  $\mathbf{v} = \operatorname{rot} \mathbf{u}$ , para algún campo vectorial  $\mathbf{u}$  de clase  $C^2$  en  $R$ .

ii)  $\exists \varphi$  campo escalar de clase  $C^2$  tal que,  $\mathbf{v} = \nabla \varphi$  y  $\nabla^2 \varphi = 0$  en  $R$ .

a) Demostrar que i)  $\implies$  ii), es decir un campo vectorial que es a la vez irrotacional y solenoidal en  $R$ , es el gradiente de una función armónica en  $R$ .

b) Demostrar que ii)  $\implies$  i) o dar un contraejemplo.

### Solución

a) Sabemos que  $\mathbf{v} = \operatorname{rot} \mathbf{u} \implies \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$  y existe  $\varphi$  de clase  $C^2$  tal que  $\nabla \varphi = \mathbf{v} = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$ . Así tenemos que  $\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{div} \nabla \varphi = \nabla^2 \varphi = 0$  en  $R$ .

b) Si existe  $\varphi$  de clase  $C^2$  tal que  $\mathbf{v} = \nabla \varphi$  y  $\nabla^2 \varphi = 0$  en  $R$ , entonces existe un campo vectorial

u tal que  $v = \text{rot } u$ . Además  $\text{rot } v = \text{rot } (\nabla\varphi) = \mathbf{0}$ .

22. Sea  $\mathbf{h}$  un campo vectorial de clase  $C^1$  en un abierto  $S$ , de modo que  $\mathbf{h} = \mathbf{f} + \mathbf{g}$ , donde  $\mathbf{f}$  es solenoidal y  $\mathbf{g}$  irrotacional, o sea existe un campo vectorial  $\mathbf{u}$  tal que  $\mathbf{f} = \text{rot } \mathbf{u}$  y un campo escalar  $\varphi$  tal que  $\mathbf{g} = \nabla\varphi$  en  $S$ . Demostrar que  $\mathbf{u}$  y  $\varphi$  satisfacen en  $S$  la siguiente ecuación diferencial en derivadas parciales:

$$\nabla^2\varphi = \text{div } \mathbf{h}, \quad \text{grad } (\text{div } \mathbf{u}) - \nabla^2\mathbf{u} = \text{rot } \mathbf{h}.$$

**Solución** Es claro que  $\mathbf{h} = \text{rot } \mathbf{u} + \nabla\varphi$ , entonces  $\text{rot } \mathbf{h} = \text{rot } (\text{rot } \mathbf{u}) + \mathbf{0} = \nabla(\text{div } \mathbf{u} + \nabla^2\mathbf{u})$ . Además  $\text{div } \mathbf{h} = \text{div } \mathbf{f} + \text{div } \mathbf{g} = 0 + \text{div } \mathbf{g} = \text{div } (\nabla\varphi) = \nabla^2\varphi$ .

**Nota** Se puede demostrar que todo campo vectorial  $\mathbf{h}$  de clase  $C^1$  se puede expresar en la forma  $\mathbf{h} = \mathbf{f} + \mathbf{g}$ , donde  $\mathbf{f}$  es solenoidal y  $\mathbf{g}$  es irrotacional.

23. Sea  $\mathbf{h}(x, y, z) = (x^2y, y^2z, z^2x)$ , determinar los campos vectoriales  $\mathbf{f}$  y  $\mathbf{g}$ , donde  $\mathbf{f}$  es un rotacional y  $\mathbf{g}$  es un gradiente, de modo que se verifique  $\mathbf{h} = \mathbf{f} + \mathbf{g}$ .

**Solución** Se tiene que  $\text{div } \mathbf{h} = 2xy + 2yz + 2xz = \nabla^2\varphi$ , con lo cual si  $\mathbf{h} = \mathbf{f} + \mathbf{g} = \text{rot } \mathbf{u} + \nabla\varphi$ , debemos tener  $\text{div } \mathbf{u} - \nabla^2\mathbf{u} = \text{rot } \mathbf{h}$ ,  $\text{rot } \mathbf{h} = (-y^2, -z^2, -x^2)$ ,

$$\text{div } \mathbf{h} = \text{div } \mathbf{g} = 2xy + 2yz + 2xz = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \nabla^2\varphi \implies$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = x^2y + x^2z + C_1(x, y, z) \implies \varphi = \frac{1}{3}x^3(y + z) + C_2'(x, y, z)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = xy^2 + zy^2 + C_2(x, y, z) \implies \varphi = \frac{1}{3}y^3(x + z) + C_2'(x, y, z)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = yz^2 + xz^2 + C_3(x, y, z) \implies \varphi = \frac{1}{3}z^3(x + y) + C_3'(x, y, z),$$

por lo que podemos tomar:

$$\varphi = \frac{1}{3}x^3y + \frac{1}{3}y^3z + \frac{1}{3}z^3x + C,$$

$$\mathbf{g} = \nabla\varphi = (x^2y - \frac{1}{3}z^3, y^2z - \frac{1}{3}x^3, z^2x - \frac{1}{3}y^3),$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{h} - \mathbf{g} = \frac{1}{3}(z^3, x^3, y^3).$$

24. Calcular la divergencia y el rotacional de  $\mathbf{f}$ , si  $\mathbf{f}$  es igual a:

a)  $\mathbf{r}$

b)  $r\mathbf{c}$

c)  $f(r)\mathbf{c}$ , donde  $\mathbf{c}$  es un vector constante.

**Solución**

$$\text{a) } \operatorname{div} \mathbf{r} = \operatorname{div}(x, y, z) = 3, \operatorname{rot} \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = (0, 0, 0) = \mathbf{0}.$$

$$\text{b) } \operatorname{div}(r\mathbf{c}) = \operatorname{div}(rc_1, rc_2, rc_3) = c_1 \frac{x}{r} + c_2 \frac{y}{r} + c_3 \frac{z}{r} = \frac{1}{r} \mathbf{r} \cdot \mathbf{c}.$$

$$\operatorname{rot}(r\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ rc_1 & rc_2 & rc_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial r}{\partial z} \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \nabla r \times \mathbf{c} = \frac{1}{r} \mathbf{r} \times \mathbf{c}.$$

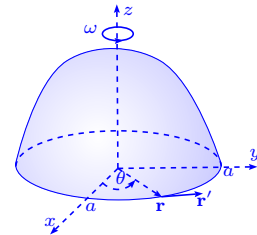
$$\text{c) } \operatorname{div}(f(r)\mathbf{c}) = f'(r) \left( \frac{x}{r} c_1 + \frac{y}{r} c_2 + \frac{z}{r} c_3 \right) = f'(r) \nabla r \cdot \mathbf{c}.$$

Como  $\frac{\partial}{\partial t}(f(r)c_i) = f'(r) \frac{t}{r} c_i$ , tenemos que:

$$\operatorname{rot}(f(r)\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f(r)c_1 & f(r)c_2 & f(r)c_3 \end{vmatrix} = \frac{f'(r)}{r} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \frac{f'(r)}{r} \mathbf{r} \times \mathbf{c}.$$

25. a) Hallar la divergencia y el rotacional del campo de las velocidades lineales de los puntos de un cuerpo que gira con una velocidad angular constante  $\omega$ , alrededor del eje  $z$ , en dirección contraria a las agujas del reloj.

- b) Calcular el rotacional del campo de las velocidades lineales  $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$  de los puntos del cuerpo, que gira con velocidad angular  $\omega$  constante, alrededor del eje que pasa por el origen de coordenadas.



**Solución** Sea  $\mathbf{r}$  el vector de posición del movimiento circular  $\mathbf{r} = (a \cos \theta, a \sin \theta, 0)$ ,

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = (-a \sin \theta, a \cos \theta, 0) \frac{d\theta}{dt}, \quad \omega = \frac{d\theta}{dt} \text{ es la velocidad angular.}$$

Se denota  $\omega = \omega \mathbf{k}$  el vector velocidad angular y se tiene que:

$$\omega \times \mathbf{r} = \omega \mathbf{k} \times \mathbf{r} = \omega \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ a \cos \theta & a \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = \omega(-a \sin \theta, a \cos \theta, 0) = \mathbf{v} = \omega(-y, x, 0).$$

a) Así tenemos  $\operatorname{div}(\mathbf{v}) = \omega \left( \frac{\partial}{\partial x}(-y) + \frac{\partial}{\partial y}(x) + \frac{\partial}{\partial z}(0) \right) = 0$ ,

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \omega \operatorname{rot}(\mathbf{k} \times \mathbf{r}) = \omega \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = \omega(0, 0, 2) = 2\omega.$$

b) Sea  $\boldsymbol{\eta}$  un vector unitario en dirección del eje de rotación,  $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{\eta}$  y  $\mathbf{v} = \omega\boldsymbol{\eta} \times \mathbf{r} =$

$$\omega \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \omega(\eta_2 z - \eta_3 y, x\eta_3 - z\eta_1, \eta_1 y - \eta_2 x), \text{ entonces } \operatorname{div}(\mathbf{v}) = \omega(0 + 0 + 0) = 0.$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{v}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \eta_2 z - \eta_3 y & x\eta_3 - z\eta_1 & \eta_1 y - \eta_2 x \end{vmatrix} = \omega(\eta_1 + \eta_1, \eta_2 + \eta_2, \eta_3 + \eta_3) = 2\omega\boldsymbol{\eta} = 2\omega.$$

26. a) Calcular la divergencia y el rotacional del gradiente de un campo escalar  $u$  de clase  $C^2$ .

b) Demostrar que  $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{f}) = 0$ , si  $\mathbf{f}$  es de clase  $C^2$ .

### Solución

a) Se tiene que  $\nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right)$  y  $\operatorname{rot}(\nabla u) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} =$

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right) = (0, 0, 0) = \mathbf{0}, \text{ por el teorema de Schwarz.}$$

$$\operatorname{div}(\nabla u) = \operatorname{div} \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

b)  $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{f}) = \operatorname{div} \left( \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right)$   
 $= \frac{\partial^2 f_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial z \partial y} = 0$ , por ser  $\mathbf{f}$  de clase  $C^2$ .

27. Demostrar que si  $\mathbf{f}$  es una fuerza central, es decir que está dirigida hacia un punto  $\mathbf{0}$  fijo y depende solamente de la distancia  $r$  hasta este punto ( $\mathbf{f} = f(r)\mathbf{r}$ , donde  $f(r)$  es una función continua), el campo será potencial. Determinar el potencial  $\varphi$  del campo.

**Solución** Tenemos que  $\operatorname{rot} \mathbf{f} = \operatorname{rot}(f(r)\mathbf{r}) = \nabla f(r) \times \mathbf{r} + f(r) \operatorname{rot} \mathbf{r} = \frac{f'(r)}{r} \mathbf{r} \times \mathbf{r} + f(r)\mathbf{0} = \mathbf{0}$ ,

es decir existe  $\varphi$  campo escalar de clase  $C^1$  tal que  $\mathbf{f} = \nabla\varphi$ . Así tenemos:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = xf(r), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = yf(r), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = zf(r) \implies \varphi = \int_{r_0}^r rf(r) dr,$$

ya que  $\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial t} = rf(r) \frac{t}{r} = tf(r)$ , si  $t \in \{x, y, z\}$ .

28. Determinar el potencial  $\varphi$  del campo gravitacional que engendra un punto material de masa  $m$  situado en el origen de coordenadas:  $\mathbf{f} = -\frac{m}{r^3}\mathbf{r}$ . Demostrar que el potencial  $\varphi$  satisface la ecuación de Laplace  $\nabla^2\varphi = 0$ .

**Solución** Usando el ejercicio 27 tenemos que  $\mathbf{f} = -\frac{m}{r^3}\mathbf{r}$ , con  $f(r) = -\frac{m}{r^3}$ , entonces  $\varphi = -m \int_{r_0}^r r \frac{1}{r^3} dr = -m \int_{r_0}^r \frac{1}{r^2} dr = m\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$ .

Además  $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \nabla^2\varphi = \nabla(\nabla\varphi) = \nabla\mathbf{f} = \text{div}\mathbf{f} = 0$  (ver ejercicio 9, página 134), si  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ .

29. Comprobar si cada campo vectorial tiene potencial  $\varphi$  y si lo tiene determinarlo:

a)  $\mathbf{f}(x, y, z) = (5x^2y - 4xy, 3x^2 - 2, 0)$ .

b)  $\mathbf{f}(x, y, z) = (yz, zx, xy)$ .

c)  $\mathbf{f}(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$ .

### Solución

- a) Verifiquemos que  $\text{rot}\mathbf{f} \neq \mathbf{0}$ , por lo que  $\mathbf{f}$  no tiene potencial  $\varphi$ . En efecto:

$$\text{rot}\mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 5x^2y - 4xy & 3x^2 - 2 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 6x - 5x^2 - 4x) = (0, 0, 2x - 5x^2) \neq (0, 0, 0).$$

b)  $\text{rot}\mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & zx & xy \end{vmatrix} = (x-x, -(y-y), z-z) = (0, 0, 0)$ , entonces  $\mathbf{f}$  tiene un potencial

$\varphi$  de modo que  $\nabla\varphi = \mathbf{f}$ , por lo que  $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = yz$ ,  $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = zx$ ,  $\frac{\partial\varphi}{\partial z} = xy \implies \varphi = xyz + c_1(y, z) = xyz + c_2(x, z) = xyz + c_3(x, y)$ , o sea  $\varphi = xyz + c$ .

$$\text{c) } \operatorname{rot} \mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+z & x+z & x+y \end{vmatrix} = (1-1, -(1-1), 1-1) = (0, 0, 0), \text{ por lo tanto existe un}$$

campo escalar  $\varphi$  tal que  $\nabla\varphi = \mathbf{f} \implies \frac{\partial\varphi}{\partial x} = y+z, \frac{\partial\varphi}{\partial y} = x+z, \frac{\partial\varphi}{\partial z} = x+y \implies \varphi = xy + xz + c_1(y, z) = xy + zy + c_2(x, z) = xz + yz + c_3(x, y) \implies \varphi = xy + xz + yz + c.$

30. Demostrar que el campo central  $\mathbf{f} = f(r)\mathbf{r}$  es solenoidal, solamente en el caso en que  $f(r) = \frac{k}{r^3}$ , donde  $k$  es una constante.

**Solución** En efecto, por el ejercicio 7b) y escribiendo  $\mathbf{f} = (rf(r))\frac{\mathbf{r}}{r}$ , se tiene que  $\operatorname{div} \mathbf{f} = (rf(r))' + (rf(r))\frac{2}{r} = f(r) + rf'(r) + 2f(r) = 0 \implies \frac{f'(r)}{f(r)} = -\frac{3}{r} \implies \ln f(r) = -3\ln r + c = \ln r^{-3} + c \implies f(r) = kr^{-3}.$

31. Determinar si el campo vectorial  $\mathbf{f} = r(\mathbf{c} \times \mathbf{r})$  es solenoidal, donde  $\mathbf{c}$  es un vector constante.

**Solución** Tenemos que  $\mathbf{f} = r \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = r(c_2z - c_3y, c_3x - c_1z, c_1y - c_2x)$ , entonces

$\operatorname{div} \mathbf{f} = \frac{1}{r}x(c_2z - c_3y) + \frac{1}{r}y(c_3x - c_1z) + \frac{1}{r}z(c_1y - c_2x) = 0$ , es decir  $\mathbf{f}$  es solenoidal.

### 3.2 Área de superficie

32. Hallar el área de las siguientes superficies:

- La parte del plano  $4x + 3y + 2z = 12$  que está en el primer octante.
- La parte de la superficie  $z^2 = 2xy$  que está por encima del rectángulo situado en el plano  $z = 0$  y limitado por las rectas  $x = 0, y = 0, x = 3, y = 6$ .
- La parte del cono  $z^2 = x^2 + y^2$  situada por encima del plano  $z = 0$  y recortada por el plano  $z = \sqrt{2}\left(\frac{x}{2} + 1\right)$ .
- La parte de  $z^2 = y^2 + x^2$  recortada por el cilindro  $z^2 = 2py$ .
- La parte de  $y^2 + z^2 = x^2$  situada dentro del cilindro  $x^2 + y^2 = a^2$ .
- La parte de  $y^2 + z^2 = x^2$  recortada por el cilindro  $x^2 - y^2 = a^2$  y los planos  $y = \pm b$ .
- La parte de  $z^2 = 4x$  recortada por el cilindro  $y^2 = 4x$  y el plano  $x = 1$ .
- La parte de  $z = xy$  recortada por el cilindro  $x^2 + y^2 = a^2$ .
- La parte de  $2z = x^2 + y^2$  recortada por el cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ .
- La parte de  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  recortada por el cilindro  $x^2 + y^2 = b^2, (b \leq a)$ .
- La parte de  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  recortada por la superficie por la superficie  $(x^2 + y^2)^2 =$

$$a^2(x^2 - y^2).$$

l) La parte de  $z = \frac{x+y}{x^2+y^2}$  recortada por las superficies  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $x^2 + y^2 = 4$  que está en el primer octante.

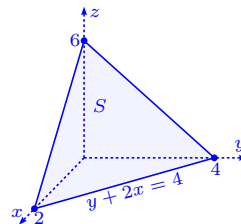
m) La parte de  $(x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha)^2 + z^2 = a^2$  situada en el primer octante ( $\alpha < \frac{\pi}{2}$ ).

### Solución

a) Se tiene que  $z = 6 - 2x - \frac{3}{2}y$  y que  $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{1 + 4 + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{29}}{2}$ .

$$\text{El área es } |S| = \iint_S dS = \int_0^2 \left( \int_0^{4-2x} \frac{7}{2} dy \right) dx =$$

$$\frac{7}{2} \int_0^2 (4 - 2x) dx = \frac{7}{2} (4x - x^2) \Big|_0^2 = 14.$$



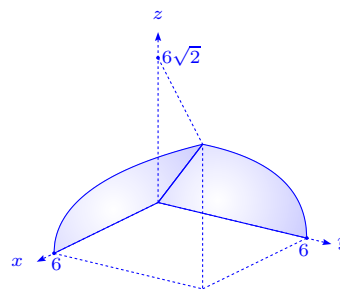
b) La superficie es  $z = \sqrt{2xy}$ , entonces  $z_x = \frac{y}{z}$ ,  $z_y = \frac{x}{z}$

i.e.  $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \frac{|x+y|}{z}$ . El área es:

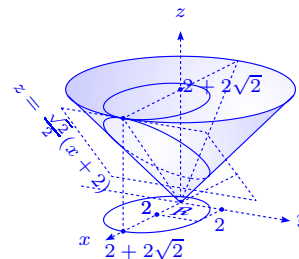
$$|S| = \iint_S dS = \int_0^3 \left( \int_0^6 \frac{x+y}{\sqrt{2xy}} dy \right) dx =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^3 \left( \int_0^6 \left( \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} \right) dy \right) dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^3 \left( 2\sqrt{xy} + \frac{2}{3} \frac{y^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}} \right) \Big|_0^6 dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^3 \left( 2\sqrt{6}x + \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{x}} \right) dx =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left( 2\sqrt{6} \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + 8\sqrt{6}\sqrt{x} \right) \Big|_0^3 = 4\sqrt{3} \frac{\sqrt{3}}{3} + 8\sqrt{3}\sqrt{3} = 12 + 24 = 36.$$



c)  $z^2 = x^2 + y^2$ ,  $z = 0$ ,  $z = \sqrt{2} \left( \frac{x}{2} + 1 \right)$ . Las superficies se intersecan cuando  $z^2 = x^2 + y^2 = 2 \left( \frac{x^2}{4} + x + 1 \right) \implies \left( \frac{x-2}{2\sqrt{2}} \right)^2 + \left( \frac{y}{2} \right)^2 = 1$ , es decir tenemos una elipse en el plano  $xy$ .



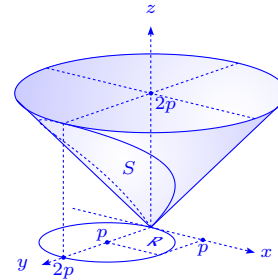
La superficie es  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  y  $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{1 + \left( \frac{x}{z} \right)^2 + \left( \frac{y}{z} \right)^2} = \sqrt{2}$ , entonces:

$$|S| = \iint_S dS = \iint_R \sqrt{2} dx dy = \sqrt{2} \text{Área}(R) = \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2\pi = 8\pi.$$

d)  $z^2 = x^2 + y^2, z^2 = 2py.$

Las superficies se intersecan cuando  $z^2 = x^2 + y^2 = 2py \implies x^2 + (y - p)^2 = p^2$  i.e. proyectado sobre el plano  $xy$ , es un círculo de centro  $(0, p)$  y radio  $p$ .

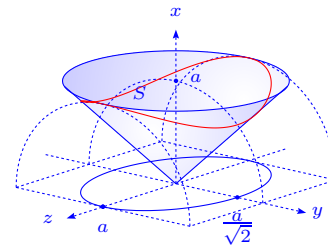
La superficie es  $z = \sqrt{x^2 + y^2}, \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{2}$ , por lo que el área es dos veces el área sobre  $S$ :  $\text{Área} = 2 \iint_S dS = 2 \iint_R \sqrt{2} dx dy = 2\sqrt{2} \text{Área}(R) = 2\sqrt{2}\pi p^2.$



e)  $y^2 + z^2 = x^2, x^2 + y^2 = a^2.$

Al intersecar las superficies se tiene  $y^2 + z^2 = a^2 - y^2$ , es decir  $\left(\frac{y}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{a}\right)^2 = 1$ . Así tenemos que el área, es dos veces el área de la superficie  $x = \sqrt{y^2 + z^2}$ , sobre la elipse  $\left(\frac{y}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{a}\right)^2 = 1$ , por lo que  $\sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2} = \sqrt{2}$ , es decir:

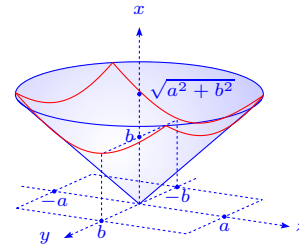
$$\text{Área} = 2 \iint_S dS = 2 \iint_R \sqrt{2} dx dy = 2\sqrt{2} \text{Área}(R) = 2\sqrt{2} \frac{a}{\sqrt{2}} a\pi = 2\pi a^2.$$



f)  $y^2 + z^2 = x^2, x^2 - y^2 = a^2, y = \pm b.$

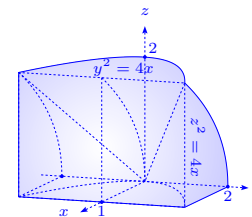
Las superficies se intersecan cuando  $y^2 + z^2 = a^2 + y^2 \implies z = \pm a$ . El área que debemos calcular es dos veces (arriba y abajo del plano  $x = 0$ ) la integral de la superficie arriba y como  $\sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2} = \sqrt{2}$  tenemos:

$$\text{Área} = 2 \iint_S dS = 2\sqrt{2} \int_{-a}^a \left( \int_{-b}^b dy \right) dz = 8\sqrt{2}ab.$$



g)  $z^2 = 4x, y^2 = 4x, x = 1.$

La intersección se da en  $z = \pm y$ , además  $z = 2\sqrt{x}, z_x = \frac{1}{\sqrt{x}}, \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$ , por lo que:



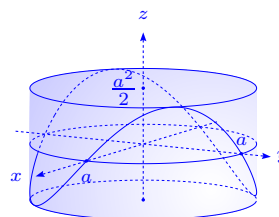
$$|S| = 2 \int_0^1 \left( \int_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} dy \right) dx = 2 \int_0^1 4\sqrt{x+1} dx = 8 \cdot \frac{2}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{16}{3} (\sqrt{8} - 1).$$

h)  $z = xy, x^2 + y^2 = a^2.$

Se tiene  $z = xy, z_x = y, z_y = x$  y  $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{1 + x^2 + y^2},$

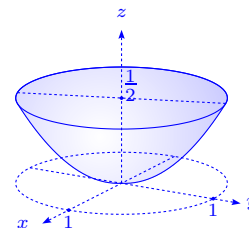
entonces:

$$|S| = \iint_S dS = \iint_R \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^a \sqrt{1 + r^2} r dr \right) d\theta = \frac{2}{3} (1 + r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^a = \frac{2}{3} \pi ((1 + a^2)^{\frac{3}{2}} - 1).$$



i)  $2z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 1.$

Las superficies se cortan en  $z = \frac{1}{2}$  y la proyección de la intersección sobre el plano  $z = 0$  es  $x^2 + y^2 = 1$ . Además tenemos que  $z_x = x, z_y = y$  i.e.  $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{1 + x^2 + y^2},$  entonces:



$$|S| = \iint_S dS = \iint_R \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy = \frac{2}{3} \pi (\sqrt{8} - 1) \text{ usando el ejercicio h) con } a = 1.$$

j)  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 = b^2, b \leq a.$

Las superficies se intersecan en  $z = \pm\sqrt{a^2 - b^2}.$  Además

$$z = \pm\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, z_x = \pm\frac{x}{z}, z_y = \pm\frac{y}{z} \text{ i.e.}$$

$$\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \frac{a}{z}, \text{ entonces el área es dos veces el área}$$

$$\text{de } S_1: \text{Área} = 2 \iint_{S_1} dS = 2 \iint_T \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy =$$

$$2 \int_0^{2\pi} \left( \int_0^b \frac{a}{\sqrt{a^2 - r^2}} r dr \right) d\theta = 4\pi a \left( -(a^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} \right) \Big|_0^b = 4\pi a (a - \sqrt{a^2 - b^2}).$$

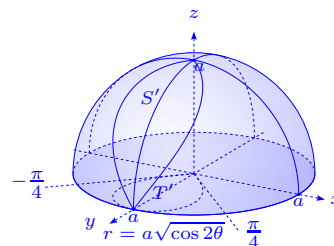
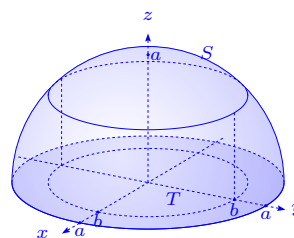
k)  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2).$

Las superficies se intersecan en una curva  $\Gamma$  cuya

proyección es  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2),$  que en coor-

denadas polares es  $r^2 = a^2 \cos 2\theta$  i.e.  $r = a\sqrt{\cos 2\theta},$

$\theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}].$  Así el área es 4 veces el área de

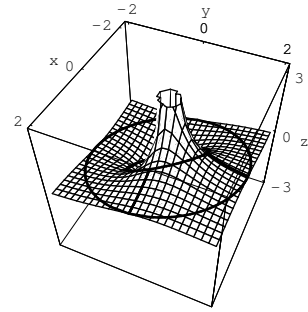


la superficie  $S'$  y como  $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2} = \frac{a}{z}$ :

$$\begin{aligned} \text{Área} &= 4 \iint_{S'} dS = 4 \iint_{T'} \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dx dy = 4 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left( \int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} \frac{ar dr}{\sqrt{a^2-r^2}} \right) d\theta = \\ &= -4a \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{a^2-r^2} \Big|_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta = -4a^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\sqrt{1-\cos 2\theta}-1) d\theta = 4a^2 \left( \frac{\pi}{2} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2} \operatorname{sen} \theta d\theta \right) = \\ &= 4a^2 \left( \frac{\pi}{2} + 2\sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right) \right) = 2a^2(\pi + 4 - 4\sqrt{2}). \end{aligned}$$

l)  $z = \frac{x+y}{x^2+y^2}$ ,  $x^2+y^2 = 1$ ,  $x^2+y^2 = 4$ , en el primer octante.

La superficie  $z = \frac{x+y}{x^2+y^2}$  satisface  $z_x = -\frac{x^2+2xy-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ ,  $z_y = \frac{x^2-2xy-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ ,  $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2} = \frac{\sqrt{x^4+2x^2y^2+y^4+2}}{x^2+y^2}$ ,



entonces:

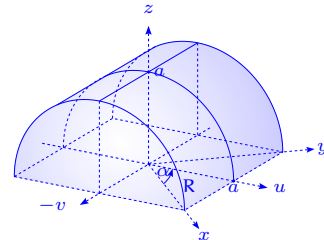
$$\begin{aligned} |S| &= \iint_S dS = \iint_R \frac{\sqrt{(x^2+y^2)^2+2}}{x^2+y^2} dx dy = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_1^2 \frac{\sqrt{r^4+2}}{r} dr \right) d\theta = \frac{\pi}{2} \left( \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \ln(\sqrt{3}+\sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}}{4} \ln 2 \right), \text{ ya que:} \\ &= \int \frac{\sqrt{r^4+a^2}}{r} dr = \frac{a}{2} \ln \left( \frac{\sqrt{r^4+a^2}-a}{r^2} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{r^4+a^2} + C. \end{aligned}$$

m)  $(x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha)^2 + z^2 = a^2$ ,  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ .

La superficie  $z = \sqrt{a^2 - (x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha)^2}$  satisface que

$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2} = \frac{a}{z}$ , entonces el área es:

$$|S| = \iint_S dS = \iint_R \frac{a}{z} dx dy = \iint_R \frac{a dx dy}{\sqrt{a^2 - (x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha)^2}}.$$



Realicemos un cambio de variable ortogonal por rotación  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} u &= x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha & \implies & \begin{cases} x = u \cos \alpha + v \operatorname{sen} \alpha \\ y = u \operatorname{sen} \alpha - v \cos \alpha \end{cases} \text{ i.e. } J = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha \\ -\operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = 1, \\ v &= -x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha \end{aligned}$$

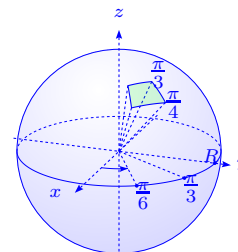
por lo que:

$$\begin{aligned} |S| &= a \int_0^a \left( \int_{-u \tan \alpha}^{u \cot \alpha} \frac{dv}{\sqrt{a^2-u^2}} \right) du = a \int_0^a \frac{(\cot \alpha + \tan \alpha)u du}{\sqrt{a^2-u^2}} \\ &= a \frac{\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha} \left( -\sqrt{a^2-u^2} \right) \Big|_0^a = \frac{2a^2}{\operatorname{sen} 2\alpha}. \end{aligned}$$

33. Calcular el área de la superficie terrestre (considerándola esférica y siendo su radio  $R \approx 6400\text{Km}$ ) comprendida entre los meridianos  $\psi = 30^\circ$ ,  $\psi = 60^\circ$  y los paralelos  $\theta = 45^\circ$ ,  $\theta = 60^\circ$ .

**Solución** Tomamos  $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ ,  $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \frac{R}{z}$  y el área es:  $|S| = \iint_S dS = \iint_T \frac{Rr dr}{\sqrt{R^2 - r^2}}$ .

Sobre la esfera  $x = (R \cos \psi) \cos \theta = r \cos \theta$ ,  $y = (R \cos \psi) \sin \theta = r \sin \theta$  i.e.  $r = R \cos \psi$ ,  $z = R \sin \psi$ ,  $dr = -R \sin \psi d\psi$ .



Como  $r = R \cos \psi$  es decreciente y como  $\frac{\pi}{3} \leq \psi \leq \frac{\pi}{4}$ ,  $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ , entonces:

$$\begin{aligned} |S| &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left( \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{R^2 \cos \psi (-R \sin \psi d\psi)}{R \sin \psi} \right) d\theta = R^2 \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos \psi d\psi \\ &= \frac{\pi R^2}{6} \sin \psi \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi R^2}{6} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\pi R^2}{12} (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \approx 3,40826 \times 10^6 \text{ Km}^2. \end{aligned}$$

34. Calcular el área determinada por las siguientes superficies:

- a) superficie limitada por la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$  y el paraboloide  $x^2 + y^2 = 2az$ .  
 b) superficie de uno de los cilindros de radio  $a$ , con ejes que se cortan en ángulo recto, la cual se encuentra dentro del otro cilindro.

**Solución**

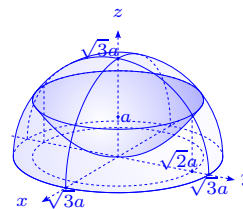
a) Las superficies se intersecan cuando  $z^2 + 2az + a^2 = 4a^2$ , o sea  $z + a = \pm 2a$  i.e.  $z = a$ , pues  $z = -3a$  no está en la esfera.

El área buscada es el área de la esfera más el área del paraboloide sobre el círculo  $x^2 + y^2 = 2a^2$ .

Para la esfera  $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \frac{\sqrt{3}a}{z}$ .

Para el paraboloide  $z_x = \frac{x}{a}$ ,  $z_y = \frac{y}{a}$ ,  $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 + x^2 + y^2}$ .

El área de la esfera es:



$$\begin{aligned} |S| &= \iint_S dS = \iint_R \sqrt{3} \frac{a}{z} dx dy = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\sqrt{2}a} \frac{\sqrt{3}ar dr}{\sqrt{3a^2 - r^2}} \right) d\theta = -2\sqrt{3}\pi a \sqrt{3a^2 - r^2} \Big|_0^{\sqrt{2}a} \\ &= 2\pi\sqrt{3}a^2(\sqrt{3}a - a) = 2\pi\sqrt{3}a^2(\sqrt{3} - 1) = \frac{2}{3}\pi a^2(9 - 3\sqrt{3}). \end{aligned}$$

El área del paraboloides es:

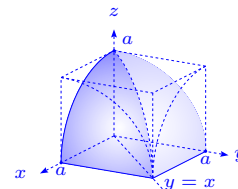
$$\begin{aligned} |S| &= \iint_S dS = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\sqrt{2}a} \frac{1}{a} \sqrt{a^2 + r^2} r dr \right) d\theta = \frac{2\pi}{3a} (a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\sqrt{2}a} \\ &= \frac{2}{3}\pi \frac{1}{a} (3\sqrt{3}a^3 - a^3) = \frac{2}{3}\pi a^2 (3\sqrt{3} - 1). \end{aligned}$$

Finalmente el área total es  $\frac{2}{3}\pi a^2 (9 - 3\sqrt{3}) + \frac{2}{3}\pi a^2 (3\sqrt{3} - 1) = \frac{2}{3}\pi a^2 8 = \frac{16}{3}\pi a^2$ .

b) Haciendo coincidir los ejes de los cilindros con los ejes  $x, y$

tenemos las ecuaciones  $x^2 + z^2 = a^2$ ,  $y^2 + z^2 = a^2$  y escogemos

$z = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$ , entonces  $z_x = \pm\frac{x}{z}$ ,  $z_y = 0$ ,  $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \frac{a}{z}$ .



Así el área es ocho veces del área del primer octante, o sea:

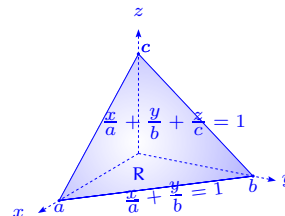
$$|S| = 8 \iint_{S'} dS = 8 \int_0^a \left( \int_0^x \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dy \right) dx = 8a \int_0^a \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 8a(-\sqrt{a^2 - x^2}) \Big|_0^a = 8a^2.$$

35. Calcular el área de las siguientes superficies en las condiciones indicadas:

- $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ ,  $z = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ .
- $x^2 + y^2 = a^2$ ,  $z \geq 0$ ,  $z = mx$ ,  $z = nx$ ,  $m > n > 0$ .
- $x^2 - y^2 = z^2$ ,  $y + z = a$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$ .
- área de  $x^2 + y^2 = ax$ , acotada por  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ .
- área de  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ , acotada por  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,  $a > b$ .
- área de  $y^2 + z^2 = 2ax$ , comprendida entre  $y^2 = ax$ ,  $x = a$ .
- área de  $x^2 + y^2 = 2ax$ , comprendida entre  $z = 0$ ,  $x^2 + y^2 = z^2$ .
- área de  $x^2 - y^2 = z^2$ , dentro del cilindro  $x^2 + y^2 = 2ax$ .
- área de  $y^2 = 4x$ , acotada por  $x^2 + y^2 + z^2 = 5x$ .
- área de  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , acotada por  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ .

**Solución**

a) Se tiene  $z = c \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)$ ,  $z_x = -\frac{c}{a}$ ,  $z_y = -\frac{c}{b}$ , entonces



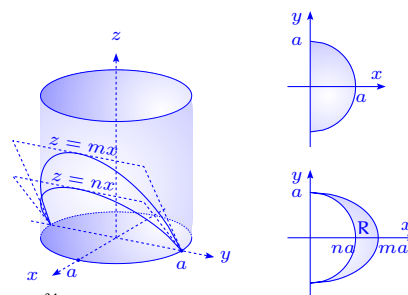
$$\begin{aligned} |S| &= \iint_R \sqrt{\frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} + 1} dx dy \\ &= \int_0^a \int_0^{b-\frac{b}{a}x} c \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} dy dx = c \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \left( bx - \frac{b}{a} \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^a \\ &= c \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \frac{1}{2} ab = \frac{1}{2} abc \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}. \end{aligned}$$

b) Notemos que la proyección sobre  $z = 0$  no es posible, pues no tenemos una superficie con las condiciones requeridas. En efecto la proyección da un segmento de curva  $y = \pm \sqrt{a^2 - x^2}$ ,  $0 \leq x \leq a$ . De esta forma debemos proyectar la superficie, por ejemplo sobre  $x = 0$  i.e.  $x = f(y, z) = \sqrt{a^2 - y^2}$ .

La intersección de la superficie con cada plano es  $y^2 + \frac{z^2}{m^2} = a^2$ ,  $y^2 + \frac{z^2}{n^2} = a^2$  i.e.  $z = \pm m \sqrt{a^2 - y^2}$ ,  $z = \pm n \sqrt{a^2 - y^2}$ .

Así la región R de la integral, es la región acotada por las elipses. El área es el doble de la integral de superficie sobre R, es decir:

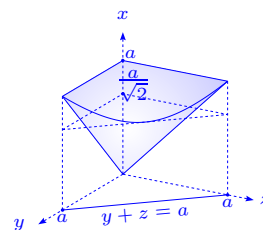
$$\begin{aligned} |S| &= 2 \iint_R \sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2} dy dz \\ &= 2 \iint_R \sqrt{1 + \frac{y^2}{a^2 - y^2} + 0} dy dz \\ &= 2 \int_{-a}^a \int_{n\sqrt{a^2 - y^2}}^{m\sqrt{a^2 - y^2}} \frac{a}{\sqrt{a^2 - y^2}} dz dy \\ &= 2 \int_{-a}^a (m - n)a dy = 4(m - n)a^2. \end{aligned}$$



c) Se tiene que  $x = \sqrt{z^2 + y^2} \implies x_y = \frac{y}{\sqrt{z^2 + y^2}}$ ,  $x_z = \frac{z}{\sqrt{z^2 + y^2}}$ ,

por lo que:

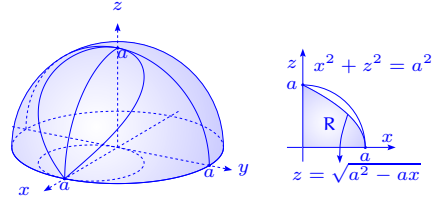
$$\begin{aligned} |S| &= \iint_R \sqrt{1 + \frac{z^2}{z^2 + y^2} + \frac{y^2}{z^2 + y^2}} dy dz = \sqrt{2} \iint_R dy dz = \\ \sqrt{2} \int_0^a \int_a^{a-z} dy dz &= \sqrt{2} \int_0^a (a - z) dz = \sqrt{2} \left( az - \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^a = \frac{\sqrt{2}}{2} a^2. \end{aligned}$$



d) Es claro que  $x^2 + y^2 = ax \implies \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$ , círculo de radio  $\frac{a}{2}$  y centro  $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ .

La intersección de las superficies se da cuando  $z^2 + ax = a^2$ , por lo que el área buscada es 4 veces la integral sobre la región limitada por  $x \geq 0$ ,  $z \geq 0$ ,  $z = \sqrt{a^2 - ax}$  y la superficie  $y = \sqrt{ax - x^2}$ .

En el gráfico solamente aparece la mitad de la superficie intersecada por la esfera. Observemos que proyectamos sobre el plano  $y = 0$  y no sobre el plano  $z = 0$ , como en general se hace.



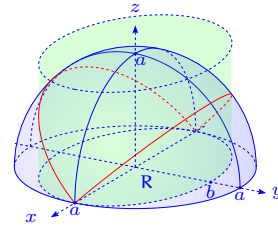
$$\text{De esta manera, } y_x = \frac{a - 2x}{2\sqrt{ax - x^2}}, y_z = 0 \implies \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} = \sqrt{1 + \frac{(a - 2x)^2}{4(ax - x^2)}} = \frac{a}{2\sqrt{ax - x^2}},$$

por lo tanto  $|S| = 4 \iint_R \frac{a}{2\sqrt{ax - x^2}} dz dx = 2 \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - ax}} \frac{a dz dx}{\sqrt{x}\sqrt{a - x}} =$

$$2 \int_0^a \frac{\sqrt{a}\sqrt{a-x} a}{\sqrt{x}\sqrt{a-x}} dx = 2a^{\frac{3}{2}} \int_0^a \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 4a^{\frac{3}{2}} \sqrt{x} \Big|_0^a = 4a^2.$$

e) La superficie es la esfera  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ ,  $z_x = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$ ,  $z_y = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$ ,  $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$ , entonces se tiene:

$$\begin{aligned} |S| &= 2 \iint_R \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dy dx = \\ &2 \int_{-a}^a \int_{-\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}^{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dy dx = \\ &2a \int_{-a}^a \arcsen \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}} \Big|_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \\ &4a \int_{-a}^a \arcsen \frac{b}{a} dx = 8a^2 \arcsen \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

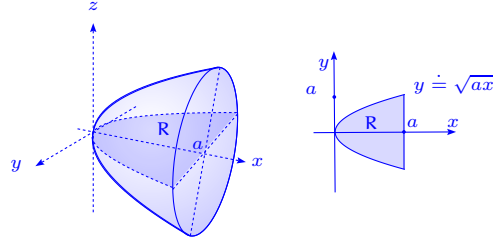


f) La superficie es  $z = \pm\sqrt{2ax - y^2}$  y la región está dada por  $R : 0 \leq y^2 \leq ax, 0 \leq x \leq a$ .

Además,  $z_x = \frac{a}{\sqrt{2ax - y^2}}$ ,  $z_y = -\frac{y}{\sqrt{2ax - y^2}}$ ,  $1 + z_x^2 + z_y^2 = \frac{2ax - y^2 + a^2 + y^2}{2ax - y^2} = \frac{2ax + a^2}{2ax - y^2}$ .

La superficie es dos veces el área de la superficie de  $z = \sqrt{2ax - y^2}$ , sobre la región R, es decir:

$$\begin{aligned}
 |S| &= 2 \iint_{\mathbf{R}} \frac{\sqrt{a}\sqrt{2x+a}}{\sqrt{2ax-y^2}} dy dx = \\
 &2 \int_0^a \int_{-\sqrt{ax}}^{\sqrt{ax}} \frac{\sqrt{a}\sqrt{2x+a}}{\sqrt{2ax-y^2}} dy dx = \\
 &2\sqrt{a} \int_0^a \sqrt{2x+a} \arcsen \frac{y}{\sqrt{2ax}} \Big|_{-\sqrt{ax}}^{\sqrt{ax}} dx = \\
 &4\sqrt{a} \int_0^a \sqrt{2x+a} \arcsen \frac{1}{\sqrt{2}} dx =
 \end{aligned}$$



$$\frac{1}{2} \sqrt{a} \pi \int_0^a \sqrt{2x+a} (2 dx) = \frac{1}{2} \sqrt{a} \pi (2x+a)^{\frac{3}{2}} \frac{2}{3} \Big|_0^a = \frac{1}{3} \sqrt{a} \pi \left( (3a)^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{1}{3} a^2 \pi (3\sqrt{3} - 1).$$

g) La intersección de las superficies es  $2ax = z^2$ .

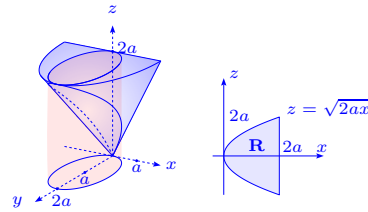
Proyectando sobre el plano  $y = 0$ , tenemos que la región

de intersección es  $0 \leq x \leq 2a$ ,  $-\sqrt{2ax} \leq z \leq \sqrt{2ax}$ ,

$$y = \pm \sqrt{2ax - x^2}, y_x = \pm \frac{a-x}{\sqrt{2ax-x^2}}, y_z = 0 \implies 1 + y_x^2 +$$

$$y_z^2 = 1 + \frac{a^2 - 2ax + x^2}{2ax - x^2} = \frac{a^2}{2ax - x^2}. \text{ Así tenemos que:}$$

$$|S| = \int_0^{2a} \int_{-\sqrt{2ax}}^{\sqrt{2ax}} \frac{a}{\sqrt{2ax-x^2}} dy dx = 2a \int_0^{2a} \frac{\sqrt{2a}\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{2a-x}} dx = 2\sqrt{2a}^{\frac{3}{2}} 2(-\sqrt{2a-x}) \Big|_0^{2a} = 8a^2.$$

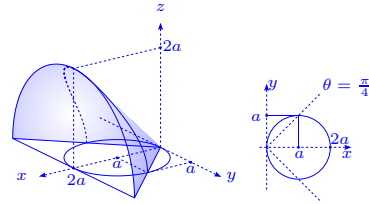


h) Cuando  $z = 0$ ,  $x = \pm y$ , luego el cilindro interseca al paraboloide dentro de los límites  $-x \leq y \leq x$ , cuando  $0 \leq x \leq a$  y dentro del círculo  $-\sqrt{2ax-x^2} \leq y \leq \sqrt{2ax-x^2}$ , cuando  $a \leq x \leq 2a$ .

La superficie es  $z = \pm \sqrt{x^2 - y^2}$ ,  $z_x = \pm \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}$ ,

$$z_y = \frac{\mp y}{\sqrt{x^2 - y^2}}, \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{x^2 - y^2}}.$$

El área buscada está dada por:



$$|S| = 2 \int_0^a \int_{-x}^x \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{x^2 - y^2}} dy dx + 2 \int_a^{2a} \int_{-\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax-x^2}} \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{x^2 - y^2}} dy dx.$$

Sin embargo, el cálculo directo no nos permite determinar la integral fácilmente. De esta forma pasamos a coordenadas polares, lo que permitirá simplificar los cálculos.

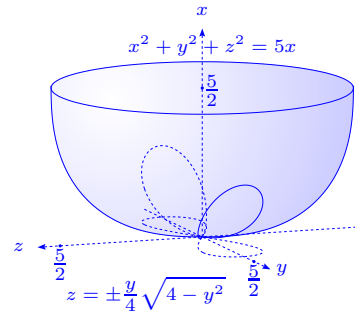
Si  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sen \theta$ , en la región de integración tenemos que  $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$  y  $r$  varía de 0 al círculo de centro  $(a, 0)$  y radio  $a$ , es decir  $x^2 + y^2 = 2ax \implies r$  varía de  $r = 0$  hasta  $r = 2a \cos \theta$  i.e.  $0 \leq r \leq 2a \cos \theta$ . Así tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|S| &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2a \cos \theta} \frac{\sqrt{2}r \cos \theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} dr d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}}{2} r^2 \Big|_0^{2a \cos \theta} \frac{\cos \theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta = 2\sqrt{2}a^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 \theta d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} = \\ &= 4\sqrt{2}a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 \theta (\cos \theta d\theta)}{\sqrt{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}} = 4\sqrt{2}a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1 - \sin^2 \theta) \cos \theta d\theta}{\sqrt{1 - 2\sin^2 \theta}} \stackrel{u=\sin \theta}{=} \\ &= 4\sqrt{2}a^2 \left[ \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{du}{\sqrt{1-2u^2}} - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{u^2 du}{\sqrt{1-2u^2}} \right] \stackrel{y=\sqrt{2}u}{=} 4\sqrt{2}a^2 \left[ \int_0^1 \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} dy}{\sqrt{1-y^2}} - \int_0^1 \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}} y^2 dy}{\sqrt{1-y^2}} \right] = \\ &= 4a^2 \left( \arcsen 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} y \sqrt{1-y^2} + \frac{1}{2} \arcsen y \right) \Big|_0^1 \right) = 4a^2 \left( \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \frac{\pi}{2} \right) = \frac{3}{2} \pi a^2 \implies |S| = 3\pi a^2, \end{aligned}$$

ya que  $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsen \frac{x}{a} + C$ ,  $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{1}{2}a^2 \arcsen \frac{x}{a} + C$ .

i) Tenemos las superficies  $y^2 = 4x$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = 5x$ .

Al intersecarse las superficies tenemos una curva sobre la esfera, como se indica en el gráfico adjunto. Usando las ecuaciones de las superficies, esta curva se puede ver también como la intersección del cilindro  $x^2 + z^2 = x$ , o bien  $(x - \frac{1}{2})^2 + z^2 = \frac{1}{4}$  y la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 5x$ .



Observemos que cuando  $z = 0$  se tiene que las superficies se cortan en  $x = 0$ ,  $x = 1$ .

Si  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  y si  $x = 1$ ,  $y = \pm 2$ ,  $z = 0$ .

Dado que debemos calcular el área de la superficie  $x = \frac{1}{4}y^2$  dentro de la esfera, necesitamos parametrizar la curva de intersección para así obtener la proyección  $x = 0$  y tener la región de integración.

Parametrizando la curva tenemos  $(x, y, z) = (x, \pm 2\sqrt{x}, \pm \sqrt{x-x^2})$ , donde  $0 \leq x \leq 1$ .

Sobre el plano  $x = 0$  se tiene  $(0, \pm 2\sqrt{x}, \pm \sqrt{x-x^2})$  y como  $y = \pm 2\sqrt{x} \implies \frac{y^2}{4} = x$ ,  $\frac{y^4}{16} = x^2 \implies \pm \sqrt{x-x^2} = \pm \sqrt{\frac{y^2}{4} - \frac{y^4}{16}} = \pm \frac{1}{4} \sqrt{4y^2 - y^4} = \pm \frac{y}{4} \sqrt{4-y^2}$ , es decir sobre el plano  $x = 0$  se tiene que la proyección de la curva está dada por  $(0, \pm y, \pm \frac{y}{4} \sqrt{4-y^2})$ ,  $0 \leq y \leq 2$ , ya que  $0 \leq x \leq 1$ .

Ahora,  $x_y = \frac{1}{2}y$ ,  $x_z = 0 \implies \sqrt{1+x_y^2+x_z^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4+y^2}$ , por lo que:

$$|S| = 2 \int_0^2 \int_{-\frac{1}{4}y\sqrt{4-y^2}}^{\frac{1}{4}y\sqrt{4-y^2}} \frac{1}{2} \sqrt{4+y^2} dy = \frac{1}{2} \int_0^2 y \sqrt{4-y^2} \sqrt{4+y^2} dy \stackrel{u=\frac{y}{2}}{=} \int_0^1 u \sqrt{4-u^2} \sqrt{4+u^2} du$$

$$8 \int_0^1 \sqrt{1-u^4} u du \underset{x=u^2}{=} 4 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = 4 \left( \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{1}{2} \arcsen x \right) \Big|_0^1 = \pi.$$

Si se hubiera escogido  $f(x, z) = y = \pm\sqrt{4x}$ , tenemos que el área es  $\iint_S \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$ , donde  $S$  es la región  $y = 0, x^2 + z^2 = x$ , es decir:

$$I = 2 \int_0^1 \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} dz dx = 4 \int_0^1 \sqrt{\frac{x+1}{x}} dx = 4 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \pi.$$

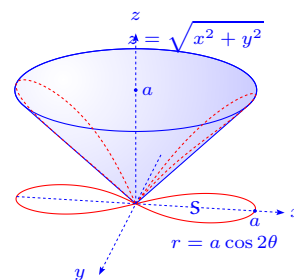
j)  $z = \sqrt{x^2 + y^2}, (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2).$

La curva  $z = 0, (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$  es una lemniscata dada por (al pasar a coordenadas polares)  $r = a\sqrt{\cos 2\theta}$ ,

$\theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}].$  Por otro lado,  $z_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z_y =$

$\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{2}$ , entonces:

$$|S| = 2 \iint_R \sqrt{2} dy dx = 2\sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} r dr d\theta = \sqrt{2}a^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta = \sqrt{2}a^2.$$



36. Demuestre que las áreas de las partes de las superficies de los paraboloides  $x^2 + y^2 = 2az$  y  $x^2 - y^2 = 2az$  cortadas por el cilindro  $x^2 + y^2 = b^2$  son iguales.

**Solución** Tenemos las superficies  $x^2 + y^2 = 2az, x^2 - y^2 = 2az$  y el cilindro  $x^2 + y^2 = b^2$ .

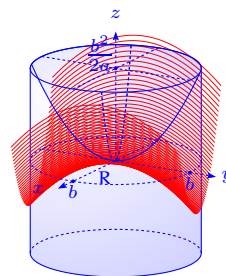
Tomemos la superficie  $x^2 + y^2 = 2az \implies z_x = \frac{x}{a}, z_y = \frac{y}{a}$ , entonces se tiene que  $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 + x^2 + y^2}$ , por lo que  $|S_1| = \frac{1}{a} \iint_R \sqrt{a^2 + x^2 + y^2} dx dy$ .

En la otra superficie,  $x^2 - y^2 = 2az$ , se tiene  $z_x = \frac{x}{a}, z_y = -\frac{y}{a} \implies \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 + x^2 + y^2}$  y claramente también:  $|S_2| = \frac{1}{a} \iint_R \sqrt{a^2 + x^2 + y^2} dx dy = |S_1|$ . No es necesario calcular la integral; sin embargo lo haremos.

$$|S_1| = \frac{1}{a} \iint_R \sqrt{a^2 + x^2 + y^2} dx dy = \frac{1}{2a} \int_0^{2\pi} \int_0^b \sqrt{a^2 + r^2} (2r dr) d\theta =$$

$$\frac{1}{2a} 2\pi \frac{2}{3} (a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^b = \frac{2\pi}{3a} ((a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}} - a^3) =$$

$$\frac{2}{3} \pi a^2 \left( \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right).$$

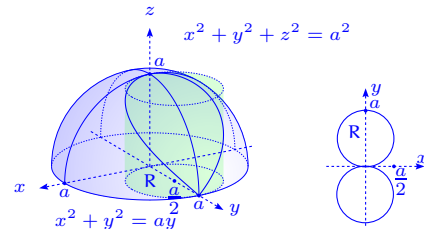


37. Una esfera de radio  $a$  está cortada por dos cilindros circulares, cuyas bases tienen los

diámetros iguales al radio de aquella y que son tangentes entre sí, a lo largo de uno de los diámetros de la misma. Hallar el volumen y el área de la parte de superficie de la esfera que queda.

**Solución** Primeramente determinemos el área y el volumen sobre los cilindros. Dado que el área y el volumen buscados son dos veces el área y el volumen para un sólo cilindro, tomamos las superficies son  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,  $x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$  i.e.  $x^2 + y^2 = ay$ , sobre la región R.

En coordenadas polares, la región de integración es  $r = a \operatorname{sen} \theta$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ . El volumen de la esfera buscado, es cuatro veces el volumen de  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ , sobre R:



$$V = 4 \iint_R \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy = 2 \int_0^\pi \int_0^{a \operatorname{sen} \theta} \sqrt{a^2 - r^2} 2r dr d\theta =$$

$$-2 \int_0^\pi \frac{2}{3} (a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{a \operatorname{sen} \theta} d\theta = -\frac{4}{3} \int_0^\pi (a^3 |\cos^3 \theta| - a^3) d\theta = \frac{4}{3} a^3 \int_0^\pi (1 - |\cos^3 \theta|) d\theta =$$

$\frac{4}{3} a^3 (\pi - 2 \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta d\theta) = \frac{4}{3} a^3 (\pi - 2 \cdot \frac{2}{3})$ . El volumen requerido es el volumen sobre la esfera menos  $V$ , es decir:

$$\frac{4}{3} \pi a^3 - \left( \frac{4}{3} \pi a^3 - \frac{16}{9} a^3 \right) = \frac{16}{9} a^3.$$

Por otro lado, sea  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ ,  $z_x = -\frac{x}{z}$ ,  $z_y = -\frac{y}{z}$ ,  $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \frac{a}{z}$ , entonces el área de la esfera buscada, es cuatro veces el área de la esfera sobre R:

$$|S| = 4 \iint_R \frac{a}{z} dx dy = 4a \iint_R \frac{dx dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = 2a \int_0^\pi \int_0^{a \operatorname{sen} \theta} \frac{2r dr d\theta}{\sqrt{a^2 - r^2}} =$$

$$-2a \int_0^\pi 2\sqrt{a^2 - r^2} \Big|_0^{a \operatorname{sen} \theta} d\theta = -4a \int_0^\pi (a |\cos \theta| - a) d\theta = 4a^2 \int_0^\pi (1 - |\cos \theta|) d\theta =$$

$$4a^2 \left( \pi - 2 \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta \right) = 4\pi a^2 - 8a^2.$$

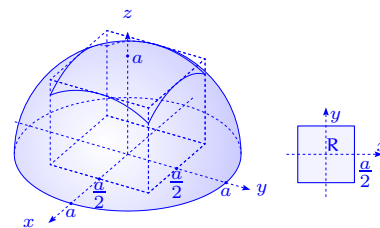
El área es el área de la esfera menos el área calculada, es decir  $4\pi a^2 - (4\pi a^2 - 8a^2) = 8a^2$ .

38. En una esfera de radio  $a$  se ha cortado un orificio con salida de base cuadrada, cuyo lado es igual también a  $a$ . El eje de este orificio coincide con el diámetro de la esfera. Hallar el área de la superficie de ésta cortada por el orificio.

**Solución** Sea  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \implies \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \frac{a}{z}$ ,

$$|S| = \iint_{\mathbf{R}} \frac{a \, dx \, dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = 4 \int_0^{a/2} \int_0^{a/2} \frac{a \, dx \, dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} =$$

$$4a \int_0^{a/2} \arcsen \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}} \Big|_0^{a/2} dx = 4a \int_0^{a/2} \arcsen \frac{a}{2\sqrt{a^2 - x^2}} dx.$$



Sea  $u = \arcsen \frac{a}{2\sqrt{a^2 - x^2}}$ ,  $dx = dv \implies du = \frac{\frac{ax}{2(a^2 - x^2)^{3/2}}}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{4(a^2 - x^2)}}} = \frac{ax \, dx}{\sqrt{3a^2 - 4x^2}(a^2 - x^2)}$ ,

$x = v$ , entonces  $\frac{|S|}{4a} = x \arcsen \frac{a}{2\sqrt{a^2 - x^2}} \Big|_0^{a/2} + \int_0^{a/2} \frac{ax^2 \, dx}{(a^2 - x^2)\sqrt{3a^2 - 4x^2}} =$

$$\frac{a}{2} \arcsen \frac{1}{\sqrt{3}} + a \int_0^{a/2} \frac{(a^2 - x^2 + a^2) \, dx}{\sqrt{3a^2 - 4x^2}(a^2 - x^2)} =$$

$$\frac{a}{2} \arcsen \frac{1}{\sqrt{3}} + a \int_0^{a/2} \frac{dx}{\sqrt{3a^2 - 4x^2}} + a^3 \int_0^{a/2} \frac{dx}{\sqrt{3a^2 - 4x^2}(a^2 - x^2)}.$$

Sea  $x = a \frac{\sqrt{3}}{2} \sen t$ ,  $dx = a \frac{\sqrt{3}}{2} \cos t \, dt \implies x = \frac{a}{2} = a \frac{\sqrt{3}}{2} \sen t \implies \sen t = \frac{1}{\sqrt{3}} \implies t = \arcsen \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Así tenemos que:

$$a \int_0^{a/2} \frac{dx}{\sqrt{3a^2 - 4x^2}} = \frac{a}{2} \int_0^{a/2} \frac{\frac{2 \, dx}{\sqrt{3a}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{\sqrt{3a}}\right)^2}} = \frac{a}{2} \int_0^{\arcsen \frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{\sqrt{3}} \, dt = \frac{a}{2} \arcsen \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

También:

$$a^3 \int_0^{a/2} \frac{dx}{\sqrt{3a^2 - 4x^2}(a^2 - x^2)} = \frac{a^3}{2a^2} \int_0^{a/2} \frac{\frac{2 \, dx}{\sqrt{3a}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x}{\sqrt{3a}}\right)^2} \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)} =$$

$$\frac{a}{2} \int_0^{\arcsen \frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dt}{1 - \frac{3}{4} \sen^2 t} = 2a \int_0^{\arcsen \frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dt}{4 - 3 \sen^2 t} = a \arctan \left( \frac{\tan t}{2} \right) \Big|_0^{\arcsen \frac{1}{\sqrt{3}}} =$$

$$a \arctan \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{2\sqrt{1 - \frac{1}{3}}} = a \arctan \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Recuerde que,  $\int \frac{dx}{p^2 - q^2 \sen^2 ax} = \frac{1}{ap\sqrt{p^2 - q^2}} \arctan \frac{\sqrt{p^2 - q^2} \tan ax}{p} + C$ .

Finalmente,  $\frac{|S|}{4a} = a \arcsen \frac{1}{\sqrt{3}} + a \arctan \frac{\sqrt{2}}{4} \implies |S| = 4a^2 \left( \arcsen \frac{1}{\sqrt{3}} + \arctan \frac{\sqrt{2}}{4} \right)$ .

39. Calcular el área de la parte de superficie helicoidal  $z = c \arctan \frac{x}{y}$ , situada en el primer octante y que está comprendida entre los cilindros  $x^2 + y^2 = a^2$ ,  $x^2 + y^2 = b^2$ .

**Solución** Se tiene que  $z = c \arctan \frac{x}{y} \implies z_x = \frac{c}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \frac{1}{y} = \frac{cy}{x^2 + y^2}$ ,  $z_y = \frac{c}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{-x}{y^2} = -\frac{cx}{x^2 + y^2}$ ,  $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{1 + \frac{c^2 x^2 + c^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2}} = \sqrt{\frac{c^2 + x^2 + y^2}{x^2 + y^2}}$ .

Así tenemos que:

$$|S| = \iint_{\mathbf{R}} \sqrt{\frac{c^2 + x^2 + y^2}{x^2 + y^2}} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_a^b \sqrt{\frac{c^2 + r^2}{r^2}} r dr d\theta = \frac{\pi}{2} \int_a^b \sqrt{c^2 + r^2} dr =$$

$$\frac{\pi}{2} \left[ \frac{1}{2} r \sqrt{c^2 + r^2} + \frac{1}{2} c^2 \ln(r + \sqrt{r^2 + c^2}) \right]_a^b = \frac{\pi}{4} \left( b \sqrt{b^2 + c^2} - a \sqrt{a^2 + c^2} + c^2 \ln \frac{b + \sqrt{b^2 + c^2}}{a + \sqrt{a^2 + c^2}} \right).$$

40. Determinar el área de la superficie de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,  $a > 0$ , contenida dentro del cono  $z \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ .

**Solución** Si  $z \operatorname{tg} \alpha = x \implies \operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{z}$ , entonces la superficie

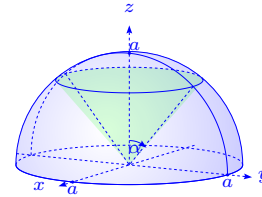
se parametriza por  $\Phi(\theta, \varphi) = (a \operatorname{sen} \varphi \cos \theta, a \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta, a \cos \varphi)$ ,

con  $(\theta, \varphi) \in D = [0, 2\pi] \times [0, \alpha]$ . Además:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta & a \operatorname{sen} \varphi \cos \theta & 0 \\ a \cos \varphi \cos \theta & a \cos \varphi \operatorname{sen} \theta & -a \operatorname{sen} \varphi \end{vmatrix} = -a^2 \operatorname{sen} \varphi (\operatorname{sen} \varphi \cos \theta, \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta, \cos \varphi),$$

entonces  $\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right\| = |a^2 \operatorname{sen} \varphi|$  y el área es:

$$\iint_S dS = \int_0^{2\pi} \int_0^\alpha a^2 \operatorname{sen} \varphi d\varphi d\theta = 2\pi a^2 \int_0^\alpha \operatorname{sen} \varphi d\varphi = 2\pi a^2 (1 - \cos \alpha).$$



41. En los siguientes ejercicios eliminar los parámetros  $u$  y  $v$  para obtener la ecuación la ecuación cartesiana, probando que la ecuación vectorial dada, representa la superficie que se da. Calcular el producto vectorial fundamental  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ , en función de  $u$  y  $v$ .

a) Plano  $\mathbf{r}(u, v) = (x_0 + a_1 u + b_1 v, y_0 + a_2 u + b_2 v, z_0 + a_3 u + b_3 v)$ .

b) Paraboloide elíptico  $\mathbf{r}(u, v) = (au \cos v, bu \operatorname{sen} v, u^2)$ .

c) Elipsoide  $\mathbf{r}(u, v) = (a \operatorname{sen} u \cos v, b \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, c \cos u)$ .

d) Superficie de revolución  $\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \operatorname{sen} v, f(u))$ .

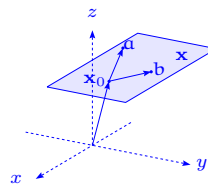
e) Cilindro  $\mathbf{r}(u, v) = (u, a \operatorname{sen} v, b \cos v)$ .

f) Toro  $\mathbf{r}(u, v) = ((a + b \cos u) \operatorname{sen} v, (a + b \cos u) \cos v, b \operatorname{sen} u)$ ,  $0 < b < a$ .

**Solución**

a) Notemos que  $\mathbf{r}(u, v) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} v =$

$$\mathbf{x}_0 + \mathbf{a}u + \mathbf{b}v,$$



es decir que  $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = \mathbf{a}u + \mathbf{b}v$ , donde  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  son vectores no colineales i.e.  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ . De esta manera tenemos que  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  es ortogonal a  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$ , entonces  $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \perp \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ , por lo que  $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$ ; es decir:

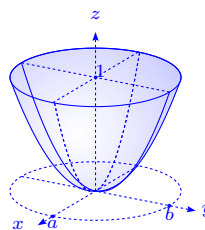
$$(x - x_0)(a_2b_3 - a_3b_2) + (y - y_0)(a_3b_1 - a_1b_3) + (z - z_0)(a_1b_2 - a_2b_1) = 0.$$

Además,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) = \mathbf{a} \times \mathbf{b}.$$

b)  $\mathbf{r}(u, v) = (au \cos v, bu \sin v, u^2) = (x, y, z)$ .

Observemos que  $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = u^2 \cos^2 v + u^2 \sin^2 v = u^2 = z$ . Por otro lado:



$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a \cos v & b \sin v & 2u \\ -a v \sin v & b u \cos v & 0 \end{vmatrix} = (-2bu^2 \cos v, -2au^2 \sin v, abu).$$

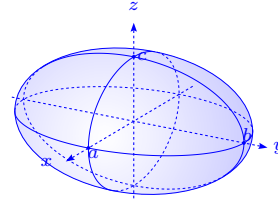
c)  $\mathbf{r}(u, v) = (a \sin u \cos v, b \sin u \sin v, c \cos u) = (x, y, z)$ .

Se tiene que  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \sin^2 u \cos^2 v + \sin^2 u \sin^2 v + \cos^2 u = \sin^2 u + \cos^2 u = 1$ .

También:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a \cos u \cos v & b \cos u \sin v & -c \sin u \\ -a \sin u \sin v & b \sin v \cos v & 0 \end{vmatrix}$$

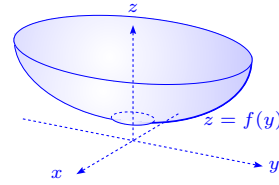
$$= (bc \sin^2 u \cos v, ac \sin^2 u \sin v, ab \sin u \cos u).$$



d)  $\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, f(u)) = (x, y, z)$ .

Observemos que  $x^2 + y^2 = u^2 \cos^2 v + u^2 \sin^2 v = u^2$  i.e.

$z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ . Además:

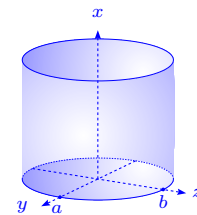


$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos v & \sin v & f'(u) \\ -u \sin v & u \cos v & 0 \end{vmatrix} = (-u f'(u) \cos v, -u f'(u) \sin v, u).$$

e)  $\mathbf{r}(u, v) = (u, a \sin v, b \cos v)$ .

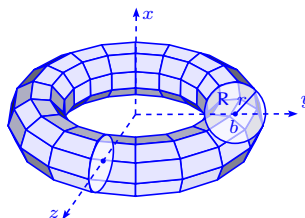
En este caso  $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = \sin^2 v + \cos^2 v = 1$ ,  $x = u \in \mathbb{R}$  i.e. es un cilindro y el producto vectorial es:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & a \cos v & -b \sin v \end{vmatrix} = (0, b \sin v, a \cos v).$$



$$\text{f) } \mathbf{r}(u, v) = ((a + b \cos u) \operatorname{sen} v, (a + b \cos u) \cos v, b \operatorname{sen} u) = (x, y, z), 0 < b < a.$$

Notemos que  $x^2 + y^2 = (a + b \cos u)^2 \implies \sqrt{x^2 + y^2} - a = b \cos u \implies (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = b^2$ . Así:



$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -b \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v & -b \operatorname{sen} u \cos v & b \cos u \\ (a + b \cos u) \cos v & -(a + b \cos u) \operatorname{sen} v & 0 \end{vmatrix} \\ &= (b(a + b \cos u) \cos u \operatorname{sen} v, b(a + b \cos u) \cos u \cos v, b(a + b \cos u) \operatorname{sen} u) \\ &= b(a + b \cos u)(\cos u \operatorname{sen} v, \cos u \cos v, \operatorname{sen} u). \end{aligned}$$

42. En los siguientes ejercicios calcular la magnitud del producto vectorial fundamental en función de  $u$  y  $v$ . En la medida de lo posible determine la ecuación cartesiana.

a)  $\mathbf{r}(u, v) = (a \operatorname{sen} u \operatorname{cosh} v, b \cos u \operatorname{cosh} v, c \operatorname{senh} v)$ .

b)  $\mathbf{r}(u, v) = (u + v, u - v, 4v^2)$ .

c)  $\mathbf{r}(u, v) = (u + v, u^2 + v^2, u^3 + v^3)$ .

d)  $\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \operatorname{sen} v, \frac{1}{2}u^2 \operatorname{sen} 2v)$ .

### Solución

a)  $\mathbf{r}(u, v) = (a \operatorname{sen} u \operatorname{cosh} v, b \cos u \operatorname{cosh} v, c \operatorname{senh} v) = (x, y, z)$ .

Es claro que  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \operatorname{sen}^2 u \operatorname{cosh}^2 v + \cos^2 u \operatorname{cosh}^2 v - \operatorname{senh}^2 v = \operatorname{cosh}^2 v - \operatorname{senh}^2 v = 1$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a \cos u \operatorname{cosh} v & -b \operatorname{sen} u \operatorname{cosh} v & 0 \\ a \operatorname{sen} u \operatorname{senh} v & b \cos u \operatorname{senh} v & c \operatorname{cosh} v \end{vmatrix} \\ &= (-bc \operatorname{sen} u \operatorname{cosh}^2 v, -ac \cos u \operatorname{cosh}^2 v, ab \cos^2 u \operatorname{cosh} v + ab \operatorname{sen}^2 u \operatorname{senh} v) \\ &= (bc \operatorname{sen} v \operatorname{cosh}^2 v, -ac \cos u \operatorname{cosh}^2 v, ab \operatorname{senh} v \operatorname{cosh} v), \end{aligned}$$

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| = |abc| \operatorname{cosh} v \left( \left( \frac{\operatorname{sen}^2 u}{a^2} + \frac{\cos^2 u}{b^2} \right) \operatorname{cosh}^2 v + \frac{\operatorname{senh}^2 v}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

b)  $\mathbf{r}(u, v) = (u + v, u - v, 4v^2) = (x, y, z)$ .

Notemos que  $(x - y)^2 = 4v^2 = z$ .

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 8v \end{vmatrix} = (8v, -8v, -2),$$

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| = \sqrt{64v^2 + 64v^2 + 4} = \sqrt{128v^2 + 4} = 2\sqrt{1 + 32v^2}.$$

c)  $\mathbf{r}(u, v) = (u + v, u^2 + v^2, u^3 + v^3) = (x, y, z)$ .

Claramente se tiene que  $x^2 = (u + v)^2 = u^2 + v^2 + 2uv = y + 2uv$ ,

$$z = u^3 + v^3 = (u + v)(v^2 - uv + u^2) \implies \frac{z}{x} = y - uv = y - \frac{x^2 - y}{2} = \frac{3y - x^2}{2} \implies 2z = 3x(3y - x^2).$$

Además:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2u & 3u^2 \\ 1 & 2v & 3v^2 \end{vmatrix} = (6uv^2 - 6u^2v, 3v^2 - 3u^2, 2v - 2u)$$

$$= (v - u)(6uv, 3(u + v), 2),$$

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| = |v - u| \sqrt{36u^2v^2 + 9v^2 + 9v^2 + 18uv + 4}.$$

d)  $\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, \frac{1}{2}u^2 \sin 2v) = (x, y, z)$ .

Observemos que  $xy = u^2 \sin v \cos v = \frac{1}{2}u^2 \sin 2v = z$ .

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos v & \sin v & u \sin 2v \\ -v \sin v & u \cos v & u^2 \cos 2v \end{vmatrix}$$

$$= (u^2 \sin v \cos 2v - u^2 \cos v \sin 2v, -u^2 \cos v \cos 2v - u^2 \sin v \sin 2v, u)$$

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\|^2 = u^4 \sin^2 v \cos^2 2v + u^4 \cos^2 v \cos^2 2v - 2u^4 \sin v \cos v \sin 2v \cos 2v +$$

$$u^4 \cos^2 v \cos^2 2v + u^4 \sin^2 v \sin^2 2v + 2u^4 \sin v \cos v \sin 2v \cos^2 v + u^2$$

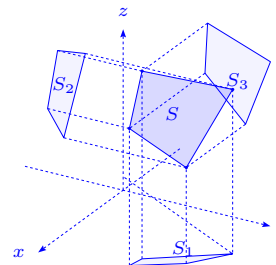
$$= u^4 \cos^2 2v + u^4 \sin^2 2v + u^2 = u^4 + u^2,$$

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| = |u| \sqrt{u^2 + 1}.$$

43. Sea  $S$  un paralelogramo de lados no paralelos a ningún eje coordenado. Sean  $S_1$ ,  $S_2$  y  $S_3$  las áreas de las proyecciones de  $S$  sobre los planos coordenados. Demostrar que el área de

$S$  es  $\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}$ .

**Solución** Sea  $ax + by + cz + d = 0$ , la ecuación del paralelogramo que al proyectarse sobre los planos coordenados, determina las regiones  $S_1$ ,  $S_2$  y  $S_3$ . Si proyectamos sobre el plano  $xy$ ,  $z_x = -\frac{a}{c}$ ,  $z_y = -\frac{b}{c}$ ,  $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{c}$ , por lo que el área de  $S$  es:



$$|S| = \iint_{S_1} \frac{\sqrt{c^2 + a^2 + b^2}}{c} dS = \frac{\sqrt{c^2 + a^2 + b^2}}{c} |S_1|.$$

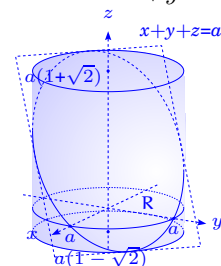
Similarmente,  $|S| = \frac{\sqrt{c^2 + a^2 + b^2}}{b} |S_2| = \frac{\sqrt{c^2 + a^2 + b^2}}{a} |S_3|$ . Así,  $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{|S|^2 c^2}{|S_1|^2} = \frac{|S|^2 b^2}{|S_2|^2} = \frac{|S|^2 a^2}{|S_3|^2} = \frac{|S|^2 a^2 + |S|^2 b^2 + |S|^2 c^2}{|S_1|^2 + |S_2|^2 + |S_3|^2} = \frac{|S|^2 (a^2 + b^2 + c^2)}{|S_1|^2 + |S_2|^2 + |S_3|^2} \Rightarrow |S|^2 = |S_1|^2 + |S_2|^2 + |S_3|^2$ , o sea  $|S| = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}$ , ya que  $|S_i| = S_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

44. Calcular el área de la región que en el plano  $x + y + z = a$ , determina el cilindro  $x^2 + y^2 = a^2$ .

**Solución**

Sea  $z = a - x - y$ ,  $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{1 + 1 + 1}$ , por lo que:

$$\text{Área} = \iint_{\mathcal{R}} \sqrt{3} dx dy = \sqrt{3} \pi a^2.$$



45. Calcular el área de la porción de esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ , interior al cilindro  $x^2 + y^2 = ay$ ,  $a > 0$ .

**Solución** Sea  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ ,  $z_x = -\frac{x}{z}$ ,  $z_y = -\frac{y}{z}$ ,

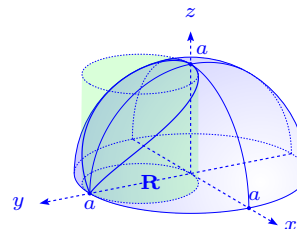
$\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \frac{a}{z}$ . Sea  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , entonces

el área buscada es dos veces el área de  $z$  sobre la región

$x^2 + y^2 = ay$ . Así:

$$\text{Área} = 2 \iint_{\mathcal{R}} \frac{a}{z} dx dy = a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{a \sin \theta} \frac{2r dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} \right) d\theta = a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-2\sqrt{a^2 - r^2}) \Big|_0^{a \sin \theta} d\theta =$$

$$2a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (a - a \cos \theta) d\theta = 2a^2 (\theta - \sin \theta) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2a^2 (\pi - 2). \text{ Ver ejercicio 37, página 154.}$$



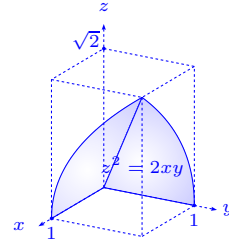
46. Calcular el área de la porción de superficie  $z^2 = 2xy$ , que se proyecta en el primer cuadrante del plano  $xy$  y limitada por los planos  $x = z$ ,  $y = 1$ .

**Solución** Sea  $z = \pm\sqrt{2xy}$ ,  $z_x = \pm\frac{y}{\sqrt{2xy}}$ ,  $z_y = \pm\frac{x}{\sqrt{2xy}}$ , entonces:

$$\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{1 + \frac{y^2}{2xy} + \frac{x^2}{2xy}} = \frac{|x + y|}{\sqrt{2xy}} = \frac{x + y}{\sqrt{2xy}},$$

ya que  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0 \implies x + y \geq 0$ . Así tenemos que:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= 2 \int_0^2 \int_0^1 \frac{x + y}{\sqrt{2xy}} dy dx = 2 \int_0^2 \frac{\sqrt{2}(3x + y)\sqrt{xy}}{3x} \Big|_0^1 dx = \\ &= 2 \int_0^2 \frac{\sqrt{2}(3x + 1)}{3\sqrt{x}} dx = \frac{2}{3} \sqrt{2} \sqrt{x}(x + 1) \Big|_0^2 = 4. \end{aligned}$$



47. Sea  $S$  una superficie de ecuación vectorial  $\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^2)$ , donde  $0 \leq u \leq 4$ ,  $0 \leq v \leq 2\pi$ .

- Demostrar que  $S$  es una porción de cuádrica. Identificar la cuádrica y dibujarla.
- Calcular el producto vectorial fundamental  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$  en función de  $u$  y  $v$ .
- Calcular el área de  $S$ .

**Solución**

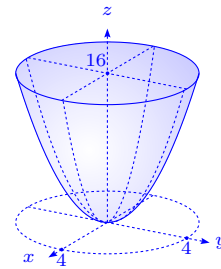
- Es claro que  $x = u \cos v$ ,  $y = u \sin v$ ,  $z = u^2$ , por lo que  $x^2 + y^2 = u^2 = z$  es un paraboloides de revolución.

Observemos que  $r = u$ ,  $v = \theta$  en coordenadas polares.

- Tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos v & \sin v & 2u \\ -u \sin v & u \cos v & 0 \end{vmatrix} = (-2u^2 \cos v, -2u^2 \sin v, u), \\ \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| &= \sqrt{4u^4 + u^2} = u\sqrt{4u^2 + 1}, \end{aligned}$$

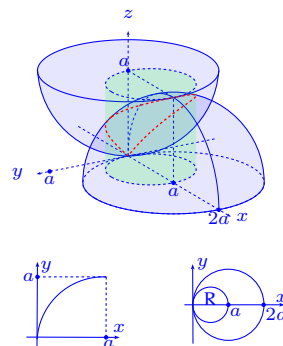
por lo tanto:



$$c) \text{Área} = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^4 u\sqrt{4u^2+1} du \right) dv = 2\pi \frac{(4u^2+1)^{\frac{3}{2}}}{12} \Big|_0^4 = \frac{65\sqrt{65}-1}{12} \cdot 2\pi = \frac{1}{6}\pi(65\sqrt{65}-1).$$

48. Calcular el área de la porción de superficie cónica  $x^2 + y^2 = z^2$ , situada por encima del plano  $xy$  y limitada por la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$ .

**Solución** Se tiene que la intersección de las superficies es  $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$ ,  $x^2 + y^2 = z^2 \implies 2z^2 = 2ax$  i.e.  $z = \sqrt{ax}$ . Además  $2x^2 + 2y^2 = 2ax \implies x^2 + y^2 = ax$  i.e.  $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$  es la proyección de la intersección de las superficies sobre  $z = 0$ . De esta forma el área que buscamos es el área

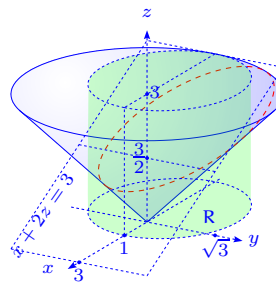


de la porción de superficie  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  sobre el círculo  $x^2 + y^2 = ax$ . Así se tiene que  $z_x = \frac{x}{z}$ ,  $z_y = \frac{y}{z}$ ,  $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + x^2 + y^2}{x^2 + y^2}} = \sqrt{2}$ , o sea:

$$\text{Área} = \iint_R \sqrt{2} dx dy = \sqrt{2} \text{Área}(R) = \sqrt{2}\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{2}}{4} \pi a^2.$$

49. Calcular el área de la porción de superficie cónica  $x^2 + y^2 = z^2$ , situada entre los dos planos  $z = 0$ ,  $x + 2z = 3$ .

**Solución** La intersección del cono con el plano, sobre el plano  $xy$  es:  $x^2 + y^2 = \left(\frac{3-x}{2}\right)^2 \implies \frac{3x^2 + 6x + 4y^2 - 9}{4} = 0 \implies 3(x^2 + 2x + 1) + 4y^2 = 9 + 3 = 12 \implies \frac{(x+1)^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ , o sea es una elipse de centro  $(-1, 0)$  y de ejes  $2$  y  $\sqrt{3}$ .

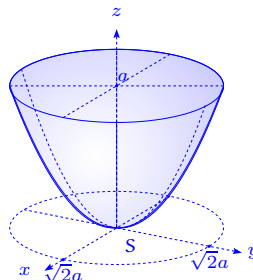


El área que buscamos es la integral de superficie de  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , sobre la elipse  $\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ . Sea  $z_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ,  $z_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ,  $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{2}$ , entonces:

$$\text{Área} = \iint_R \sqrt{2} dx dy = \sqrt{2}(2)(\sqrt{3})\pi = 2\sqrt{6}\pi.$$

50. Calcular el área de la porción de paraboloides  $x^2 + y^2 = 2az$ , cortada por el plano  $z = a$ .

**Solución** Cuando  $z = a$ , la intersección de la superficie es  $x^2 + y^2 = 2a^2$ . Así la superficie es  $z = \frac{x^2 + y^2}{2a}$ , sobre el círculo  $x^2 + y^2 = 2a^2$ ,  $z_x = \frac{x}{a}$ ,  $z_y = \frac{y}{a}$ ,  $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 + x^2 + y^2}$  y el área es:



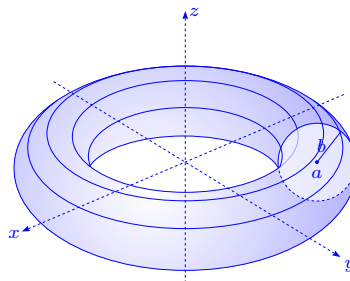
$$\begin{aligned} \text{Área} &= \iint_{\mathbb{R}} \frac{1}{a} \sqrt{a^2 + x^2 + y^2} dx dy = \frac{1}{2a} \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\sqrt{2}a} \sqrt{a^2 + r^2} 2r dr \right) d\theta \\ &= \frac{\pi}{a} (a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\sqrt{2}a} = \frac{2\pi}{3a} \left( (a^2 + 2a^2)^{\frac{3}{2}} - a^3 \right) = \frac{2\pi}{3a} (3\sqrt{3}a^3 - a^3) = \frac{2}{3}\pi(3\sqrt{3} - 1)a^2. \end{aligned}$$

Ver ejercicio 36, página 154.

51. Calcular el área del toro de ecuación  $\mathbf{r}(u, v) = ((a + b \cos u) \cos v, (a + b \cos u) \sin v, b \sin u)$ , con  $0 < b < a$ ,  $0 \leq u \leq 2\pi$ ,  $0 \leq v \leq 2\pi$ .

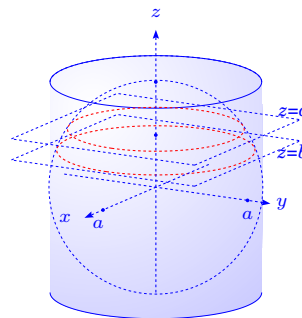
**Solución** Se sabe que  $\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| = \sqrt{b^2(a + b \cos u)^2(\cos^2 u \sin^2 v + \cos^2 u \cos^2 v + \sin^2 u)} = b(a + b \cos u)$ , ver ejercicio 41f), página 157. El área es:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} b(a + b \cos u) du \right) dv \\ &= 2\pi b \int_0^{2\pi} (a + b \cos u) du \\ &= 2\pi b \left( 2\pi a + b \sin u \Big|_0^{2\pi} \right) = 4\pi^2 ab. \end{aligned}$$



52. Una esfera está inscrita en un cilindro circular recto. La esfera es cortada por dos planos paralelos perpendiculares al eje del cilindro. Demostrar que las porciones de la esfera y del cilindro comprendidas entre esos dos planos tienen la misma área.

**Solución** Consideremos la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  y el cilindro  $x^2 + y^2 = a^2$ . Analicemos el caso en que tomamos los planos  $z = b$ ,  $z = c$ ,  $0 < b < c < a$ . Los otros casos se analizan de manera similar ( $-a < b < 0 < c < a$ ,  $-a < b < c < 0$ ).



El área entre los planos  $z = b$ ,  $z = c$  es  $2\pi a(c - b)$ .

El área entre  $z = b$  y  $z = c$  de la esfera es la integral de la esfera  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ , sobre el anillo  $\sqrt{a^2 - c^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{a^2 - b^2}$ .

Así tenemos que  $z_x = \frac{x}{z}$ ,  $z_y = \frac{y}{z}$ ,  $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \frac{a}{z}$ . El área es:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \iint_{\mathbb{R}} \frac{a}{z} dx dy = \frac{a}{2} \int_0^{2\pi} \left( \int_{\sqrt{a^2 - b^2}}^{\sqrt{a^2 - c^2}} \frac{2r dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} \right) d\theta = \pi a \left( -2(a^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} \right) \Big|_{\sqrt{a^2 - b^2}}^{\sqrt{a^2 - c^2}} \\ &= 2\pi a \left( (a^2 - a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} - (a^2 - a^2 + c^2)^{\frac{1}{2}} \right) = 2\pi a(c - b). \end{aligned}$$

53. Sea  $T = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / u^2 + v^2 \leq 1\}$  y sea  $\mathbf{r}(u, v) = \left( \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right)$ .

a) Determinar la imagen por  $\mathbf{r}$  de cada uno de los siguientes conjuntos:

i) La circunferencia  $u^2 + v^2 = 1$ .

ii) El intervalo  $-1 \leq u \leq 1$ .

iii) La parte de la recta  $u = v$  situada en  $T$ .

b) Determinar la superficie  $S = \mathbf{r}(T)$  y dibujarla.

c) Determinar la imagen por  $\mathbf{r}$  del plano  $uv$ . Indicar con un gráfico en el espacio  $xyz$  los significados geométricos de los parámetros  $u$  y  $v$ .

### Solución

a-i) Si  $u^2 + v^2 = 1$ ,  $\mathbf{r}(u, v) = (u, v, 0)$ , o sea  $\mathbf{r}(u, v)$  describe

un círculo de radio 1 en el plano  $xy$ , ya que  $\mathbf{r}(u, v) =$

$(u, \pm\sqrt{1 - u^2}, 0)$ ,  $-1 \leq u \leq 1$ .

ii) En este caso  $-1 \leq u \leq 1$ ,  $v = 0$ , por lo que  $\mathbf{r}(u, 0) =$

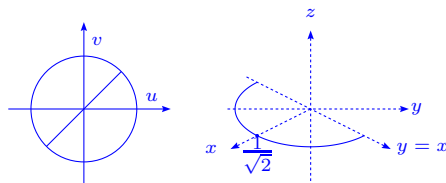
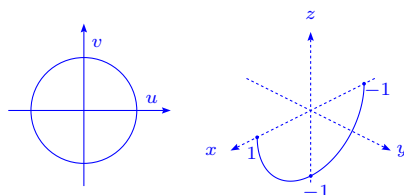
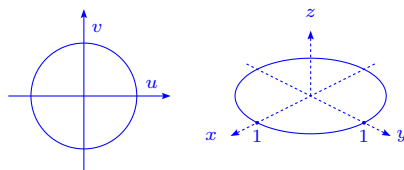
$\left( \frac{2u}{u^2 + 1}, 0, \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1} \right) = (x, y, z)$  y tenemos que  $x^2 + z^2 = \frac{4u^2 + u^4 - 2u^2 + 1}{(u^2 + 1)^2} = \frac{(u^2 + 1)^2}{(u^2 + 1)^2} = 1$ , por lo tanto  $\mathbf{r}(u, 0)$

es un semicírculo con  $z \leq 0$ .

iii) Si  $u = v$ ,  $(u, u) \in T$ , se tiene  $u^2 + v^2 = 2u^2 \leq 1 \implies |u| \leq$

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ . Además  $\mathbf{r}(u, u) = \left( \frac{2u}{2u^2 + 1}, \frac{2u}{2u^2 + 1}, \frac{2u^2 - 1}{2u^2 + 1} \right) =$

$(x, y, z)$  i.e.  $x = y$ , entonces:



$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{4u^2 + 4u^2 + 4u^4 - 4u^2 + 1}{(2u^2 + 1)^2} = \frac{(2u^2 + 1)^2}{(2u^2 + 1)^2} = 1$ , con  $x = y$ , es decir es la traza de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  sobre el plano  $x = y$ , con  $z \leq 0$ , o sea tenemos un semicírculo en la parte inferior de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

b) Observemos que si  $\mathbf{r}(u, v) = \left( \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right) = (x, y, z)$ , entonces:

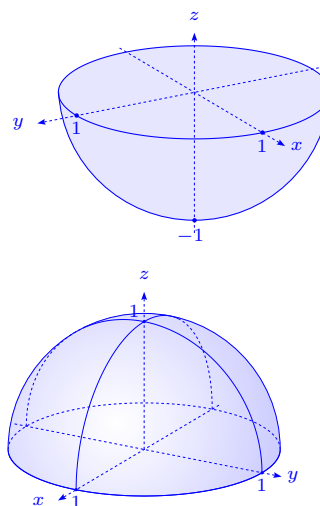
$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{4v^2 + 4v^2 + v^4 + v^4 + 1 + 2u^2v^2 + v^2 - 2u^2 - 2v^2}{(u^2 + v^2 + 1)^2} = \frac{(u^2 + v^2 + 1)^2}{(u^2 + v^2 + 1)^2} = 1,$$

con lo cual tenemos una esfera con  $z \leq 0$ , pues  $(u, v) \in T$

(i.e.  $u^2 + v^2 \leq 1$ ), o sea es la parte inferior de la esfera

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

c) Cuando  $u^2 + v^2 > 1$ , se tiene que  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , con  $z > 0$ , pero  $z < 1$ , ya que cuando  $u, v \rightarrow +\infty$  se tiene que  $z \rightarrow 1$ . De esta manera tenemos la representación de la parte superior de la esfera sin el punto  $(0, 0, 1)$ , o sea es la semiesfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0$ , sin el polo norte.



54. Calcular las áreas de las partes de las superficies cilíndricas comprendidas entre el plano  $xy$  y las superficies indicadas:

a)  $x^2 + y^2 = a^2, z = a + \frac{x^2}{a}$ .

b)  $y^2 = 2px, z = \sqrt{2px - 4x^2}$ .

c)  $y^2 = \frac{4}{9}(x-1)^3, z = 2 - \sqrt{x}$

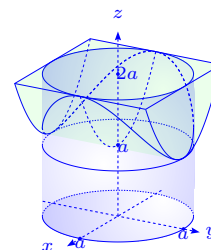
d)  $x^2 + y^2 = a^2, 2az = xy$ .

e)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z = kx, z = 0, (z \geq 0), k > 0$ , herradura cilíndrica.

f)  $y = \sqrt{2px}, z = y, x = \frac{8}{9}p$ .

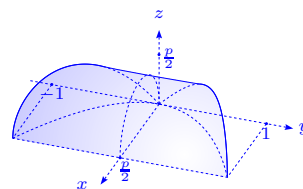
**Solución**

a) Se tiene que si proyectamos sobre el plano  $xz$ , la superficie es  $y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$  y  $\sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ . Así tenemos que el área es dos veces el área de  $y = \sqrt{a^2 - x^2}$  sobre el plano  $xz$ , con  $-a \leq x \leq a, 0 \leq z \leq a + \frac{x^2}{a}$ , es decir:



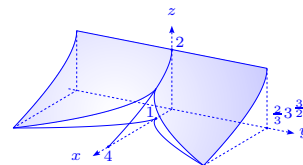
$$\begin{aligned}\text{Área} &= 2 \iint_S dS = 2 \int_{-a}^a \left( \int_0^{a+\frac{x^2}{a}} \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}} dz \right) dx \\ &= 2 \int_{-a}^a \left( a + \frac{x^2}{a} \right) \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = 2 \left( a^2 \int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} + \int_{-a}^a \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx \right) \\ &= 2 \left( a^2 \arcsen \frac{x}{a} - \frac{1}{2} x \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsen \frac{x}{a} \right) \Big|_{-a}^a = 2 \left( a^2 \pi + \frac{1}{2} a^2 \pi \right) = 3\pi a^2.\end{aligned}$$

b) La proyección de la superficie  $y = \pm\sqrt{2px}$  sobre el plano  $xz$ , genera la región  $0 \leq z \leq \sqrt{2px-4x^2}$ ,  $0 \leq x \leq \frac{p}{2}$ . Además  $\sqrt{1+y_x^2+y_z^2} = \sqrt{\frac{p+2x}{2x}}$ , por lo que el área es dos veces el área de  $y = \sqrt{2px}$  sobre la región:



$$\begin{aligned}\text{Área} &= 2 \int_0^{\frac{p}{2}} \left( \int_0^{\sqrt{2px-4x^2}} \sqrt{\frac{2x+p}{2x}} dz \right) dx = 2 \int_0^{\frac{p}{2}} \sqrt{p^2-4x^2} dx \\ &= \left( \frac{2p\sqrt{p^2-4x^2}}{2} + \frac{p^2}{2} \arcsen \frac{2x}{p} \right) \Big|_0^{\frac{p}{2}} = \frac{p^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{4} p^2 \pi.\end{aligned}$$

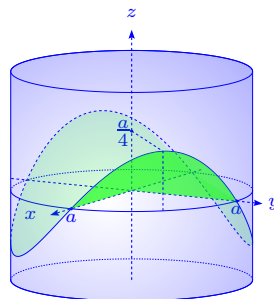
c) La superficie  $y = \pm\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}$  se proyecta sobre el plano  $xz$ , sobre la región  $0 \leq z \leq 2-\sqrt{x}$ ,  $1 \leq x \leq 4$ , por lo tanto el área es dos veces el área de  $y = \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}$  sobre la región. Además  $y_x = \sqrt{x-1}$ , i.e.  $\sqrt{1+y_x^2+y_z^2} = \sqrt{x}$ .



Así el área es:

$$2 \int_1^4 \left( \int_0^{2-\sqrt{x}} \sqrt{x} dz \right) dx = 2 \int_1^4 (2\sqrt{x}-x) dx = 2 \left( \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_1^4 = \frac{11}{3}.$$

d) Hemos resaltado la superficie sobre el primer cuadrante del plano  $xy$ . Por razones de simetría ésta área es 4 veces el área sobre este cuadrante. En este caso  $y = \sqrt{a^2-x^2}$ , por lo que  $\sqrt{1+y_x^2+y_z^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}$ . Al proyectarlo sobre el plano  $xz$ , se tiene que  $z = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2a}$ ,  $0 \leq x \leq a$ , por lo tanto, el área es:



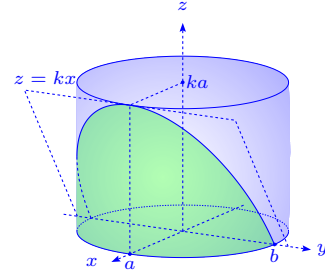
$$\text{Área} = 4 \iint_S dS = 4 \int_0^a \left( \int_0^{\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2a}} \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}} dz \right) dx = 4 \int_0^a \frac{x}{2} dx = x^2 \Big|_0^a = a^2.$$

e) El plano  $z = kx$  corta el cilindro  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , de modo que al proyectarse sobre el plano  $zy$ , se genera la figura  $0 \leq z \leq k\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$ ,  $-b \leq y \leq b$ . Además

$\sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2} = \sqrt{\frac{b^4 + (a^2 - b^2)y^2}{b^2(b^2 - y^2)}}$ , entonces el área es:

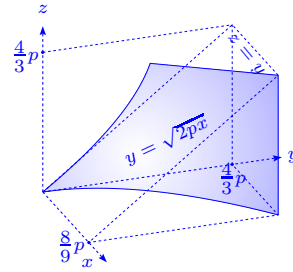
$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{-b}^b \left( \int_0^{k\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}} \sqrt{\frac{b^4 + (a^2 - b^2)y^2}{b^2(b^2 - y^2)}} dz \right) dy = \frac{ka}{cb^2} \int_{-b}^b \sqrt{b^4 + c^2 y^2} c dy = \\ &= \frac{ka}{cb^2} \left( \frac{1}{2} cy \sqrt{b^4 + c^2 y^2} + \frac{1}{2} b^4 \ln (cy + \sqrt{b^4 + c^2 y^2}) \right) \Big|_{-b}^b = \\ &= \frac{ka}{cb^2} \left( \frac{1}{2} cbab + \frac{1}{2} b^4 \ln(cb + ab) + \frac{1}{2} cbab - \frac{1}{2} b^4 \ln(ab - cb) \right) = \frac{ka}{cb^2} \left( cab^2 + \frac{1}{2} b^4 \ln \frac{a+c}{a-c} \right) = \\ &= ka \left( a + \frac{b^2}{2c} \ln \frac{a+c}{a-c} \right), \text{ donde } c = \sqrt{a^2 - b^2} \text{ y se ha supuesto que } a \geq b. \end{aligned}$$

Si  $a = b$ , el área es  $\text{Área} = \int_{-b}^b \left( \int_0^{k\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}} \frac{b}{\sqrt{b^2 - y^2}} dz \right) dy = \int_{-b}^b kb dy = 2kb^2$ .



f) Proyectando la superficie  $y = \sqrt{2px}$  sobre el plano  $zy$ , tenemos la región  $0 \leq z \leq y$ ,  $0 \leq y \leq \frac{4}{3}p$ . De este modo tomamos  $x = \frac{y^2}{2p}$ ,  $\sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2} = \frac{\sqrt{p^2 + y^2}}{p}$  i.e. el área es:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \int_0^{\frac{4}{3}p} \left( \int_0^y \sqrt{p^2 + y^2} dz \right) dy &= \frac{1}{2p} \int_0^{\frac{4}{3}p} \sqrt{p^2 + y^2} 2y dy = \\ \frac{1}{2p} \frac{2}{3} (p^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\frac{4}{3}p} &= \frac{1}{3p} (p^2 + \frac{16}{9}p^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{125}{81} p^2. \end{aligned}$$



55. Calcular el área de la porción de superficie helicoidal definida por  $x = at \cos \theta$ ,  $y = at \sin \theta$ ,

$z = h\theta$ ,  $(\theta, t) \in [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 1]$ ,  $a > 0$ ,  $h > 0$ .

**Solución** Dado que  $A(S) = \iint_S dx dy =$

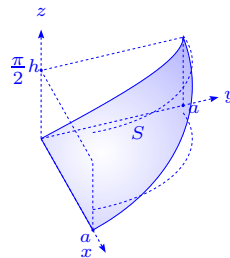
$$\iint_D \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\| d\theta dt, \text{ donde } \Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ es una}$$

representación paramétrica de  $S$ , tenemos  $\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} =$

$$(-at \sin \theta, at \cos \theta, h), \frac{\partial \Phi}{\partial t} = (a \cos \theta, a \sin \theta, 0) \implies$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} = (-ah \sin \theta, ah \cos \theta, -a^2 t), \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\| = a\sqrt{h^2 + a^2 t^2}.$$

Se observa que  $\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \perp \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ , por lo que  $\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\| = \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right\| \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\|$ . Así tenemos que:



$$A(S) = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \sqrt{h^2 + a^2 t^2} dt d\theta = \frac{1}{2} \pi a h \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{at}{h}\right)^2} dt =$$

$$\frac{1}{4} \pi \left( h^2 \ln \left( \frac{a}{h} + \sqrt{1 + \frac{a^2}{h^2}} \right) + a \sqrt{a^2 + h^2} \right).$$

56. Calcular el área de la porción  $S$  del paraboloides de ecuación  $z = xy$ , que se proyecta sobre el plano  $xy$ , dentro del disco  $D$  definido por  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

**Solución** Dado que  $z = \phi(x, y)$  sobre  $D$ , entonces  $S$  tiene

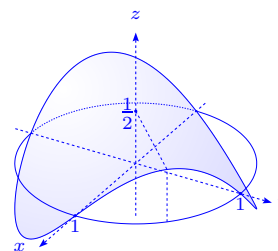
por representación paramétrica  $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\Phi(x, y) =$

$$(x, y, \phi(x, y)), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right\| =$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2}, \text{ por lo que:}$$

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + y^2 + x^2} dx dy = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 \sqrt{1 + \rho^2} \rho d\rho d\theta = \frac{2\pi}{3} (1 + \rho^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{2\pi}{3} (2\sqrt{2} - 1).$$

Ver ejercicio 32h), página 143.



57. Calcular el área  $S$  de las siguientes superficies:

a)  $x^2 + y^2 = a^2$ ,  $x > 0$ , cortada por  $\alpha x \leq z \leq \beta x$ ,  $0 < \alpha < \beta$ ,  $a > 0$ .

b)  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,  $z > 0$ , cortada por  $x^2 + y^2 - ax \leq 0$ ,  $a > 0$ , (ventana de Viviani).

c)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , cortada por  $z = \frac{xy}{c}$ ,  $z \geq 0$ ,  $a, b, c > 0$ .

d)  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ , cortada por  $x + y \leq a$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$ ,  $a > 0$ .

e)  $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax = 0$ ,  $z \geq 0$ , cortada por  $x^2 + y^2 \leq z^2 \tan^2 \alpha$ ,  $a > 0$ ,  $\alpha \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ .

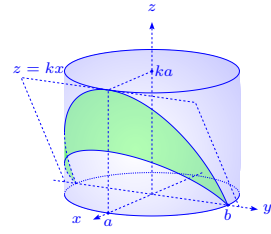
**Solución**

a) Pasando a coordenadas cilíndricas tenemos:

$$A(S) = \iint_S dS = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_{\alpha \cos \theta}^{\beta \cos \theta} a dz \right) d\theta =$$

$$(\beta - \alpha)a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta = 2(\beta - \alpha)a^2.$$

Ver ejercicio 35b), página 149.



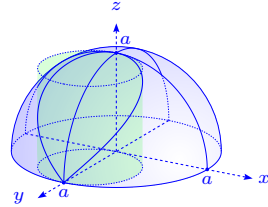
b) Pasando a coordenadas esféricas, con  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ,

$0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ , tenemos  $x^2 + y^2 - ax \leq 0 \iff \theta \leq \phi$ , pues

$a^2 \cos^2 \phi \leq a^2 \cos \phi \cos \theta \iff \cos \phi \leq \cos \theta$ . Finalmente:

$$A(S) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos \phi d\phi \right) d\theta = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin \theta) d\theta = 2a^2 [\theta + \cos \theta] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = (\pi - 2)a^2.$$

Ver ejercicio 37, página 154.



c) El área se encuentra sobre el cilindro  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , recortada por  $z = \frac{xy}{c}$ ,  $z \geq 0$ .

Usando la representación paramétrica  $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida

por  $\Phi(u, v) = (a \cos u, b \sin u, \frac{ab}{c} v \sin u \cos u)$ , donde  $D =$

$[0, \frac{\pi}{2}] \cup [\pi, \frac{3\pi}{2}] \times [0, 1]$  (ya que  $z \geq 0$ ), se tiene que:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = (-a \sin u, b \cos u, \frac{ab}{c} v \cos 2u), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v} = (0, 0, \frac{ab}{c} \cos u \sin u),$$

$$\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \times \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right\| = \frac{ab}{c} |\cos u \sin u| \sqrt{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u}, \text{ por lo que:}$$

$$|S| = \iint_D \frac{ab}{c} |\cos u \sin u| \sqrt{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u} du dv =$$

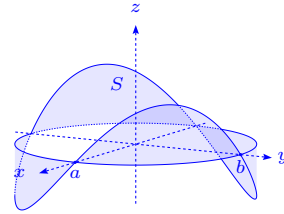
$$2 \frac{ab}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u \cos u \sqrt{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u} du = \frac{ab}{c} \int_0^1 \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2)t} dt,$$

usando la sustitución  $t = \sin^2 u$ .

Si  $a = b$ ,  $|S| = \frac{a^3}{c}$ .

Si  $a \neq b$ , tenemos  $|S| = \frac{ab}{c(a^2 - b^2)} \int_0^1 \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2)t} (a^2 - b^2) dt =$

$$\frac{2ab}{3c(a^2 - b^2)} (b^2 + (a^2 - b^2)t)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{2ab}{3c} \frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2} = \frac{2ab(a^2 + b^2 + ab)}{3c(a + b)}.$$

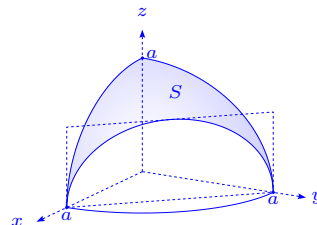


d) Pasando a coordenadas esféricas, tenemos  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ,

$0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$  y se cumple  $0 \leq x + y \leq a \iff$

$$0 \leq (\cos \theta + \sin \theta) \cos \phi \leq 1 \iff \arccos\left(\frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}\right) \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Así se tiene que el área buscada es:



$$\begin{aligned} A(S) &= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_{\arccos \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \phi d\phi \right) d\theta = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\arccos \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}\right) d\theta = \\ &= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{(\cos \theta + \sin \theta)^2}} d\theta = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2 \cos \theta \sin \theta}}{\cos \theta + \sin \theta} d\theta \stackrel{\alpha = \theta - \frac{\pi}{4}}{=} a^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\cos 2\alpha}}{\sqrt{2} \cos \alpha} d\alpha = \\ &= \sqrt{2} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\cos 2\alpha}}{\cos \alpha} d\alpha \stackrel{u = \sin \alpha}{=} \sqrt{2} a^2 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\sqrt{1 - 2u^2}}{1 - u^2} du \stackrel{v = \sqrt{2}u}{=} a^2 \int_0^1 \frac{2\sqrt{1 - v^2}}{2 - v^2} dv \stackrel{\beta = \arcsen v}{=} \\ &= 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \beta}{2 - \sin^2 \beta} d\beta \stackrel{u = \tan \beta}{=} 2a^2 \int_0^{\infty} \frac{dt}{(2 + t^2)(1 + t^2)} = 2a^2 \int_0^{\infty} \left( -\frac{1}{2 + t^2} + \frac{1}{1 + t^2} \right) dt = \\ &= a^2 \left( -\sqrt{2} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}} + 2 \arctan t \right) \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2} \pi (\sqrt{2} - 1) a^2. \end{aligned}$$

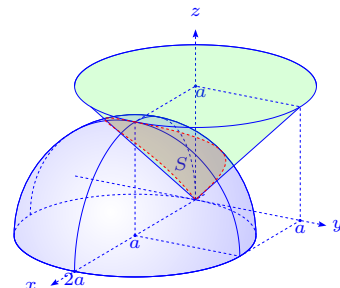
e) Usando coordenadas esféricas  $x = r \cos \theta \cos \phi$ ,  $y =$

$r \sin \theta \cos \phi$ ,  $z = r \sin \phi$ , con  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ ,

pues  $z \geq 0$ . Además,  $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax = 0 \iff r =$

$$2a \cos \theta \cos \phi, \quad x^2 + y^2 \leq z^2 \tan^2 \alpha \iff \tan^2 \phi \geq \frac{1}{\tan^2 \alpha}$$

$$\iff \frac{\pi}{2} - \alpha \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}.$$



En efecto,  $\tan^2 \phi \geq \cotan^2 \alpha \iff \tan \phi \geq \pm \cotan \alpha \iff \tan \phi \geq \tan(\frac{\pi}{2} - \alpha)$  o  $\tan \phi \geq \tan(\frac{\pi}{2} + \alpha) \iff \phi \geq \frac{\pi}{2} - \alpha$  o  $\phi \geq \frac{\pi}{2} + \alpha$ .

Este último resultado no es viable, pues  $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$  y  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ .

De esta manera  $S$  tiene la representación paramétrica  $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definida por  $\Phi(\theta, \phi) = 2a \cos \theta \cos \phi (\cos \theta \cos \phi, \sin \theta \cos \phi, \sin \phi)$ ,  $D = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [\frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{\pi}{2}]$ .

Si consideramos el sistema ortonormado  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{k}\}$ , dado por los vectores  $\mathbf{u} = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$ ,  $\mathbf{v} = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$ ,  $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ , (i.e.  $\mathbf{v} = \mathbf{u}'$ ), la representación paramétrica es  $\Phi(\theta, \phi) =$

$2a \cos \theta \cos \phi (\cos \phi \mathbf{u} + \sin \phi \mathbf{k})$  y así tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} &= -2a \sin \theta \cos^2 \phi \mathbf{u} + 2a \cos \theta \cos^2 \phi \mathbf{v} - a \sin \theta \sin 2\phi \mathbf{k}, \\ &= 2a \cos \phi (-\sin \theta \cos \phi \mathbf{u} + \cos \theta \cos \phi \mathbf{v} - \sin \theta \sin \phi \mathbf{k}), \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} &= -4a \cos \theta \sin \phi \cos \phi \mathbf{u} - 2a \cos \theta \cos 2\phi \mathbf{k}, \\ &= 2a \cos \theta (-\sin 2\phi \mathbf{u} + \cos 2\phi \mathbf{k}), \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} &= 4a^2 \cos \theta \cos \phi \begin{vmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{k} \\ -\sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi & -\sin \theta \sin \phi \\ -\sin 2\phi & 0 & \cos 2\phi \end{vmatrix} \\ &= 4a^2 \cos \theta \cos^2 \phi (\cos \theta \cos 2\phi \mathbf{u} + \sin \theta \mathbf{v} + \cos \theta \sin 2\phi \mathbf{k}) \\ \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right\| &= 4a^2 \cos \theta \cos^2 \phi,\end{aligned}$$

y el área es:

$$\begin{aligned}A(S) &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}} 4a^2 \cos \theta \cos^2 \phi d\phi \right) d\theta = 4a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \phi d\phi \\ &= 4a^2 (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha).\end{aligned}$$

El mismo resultado se obtiene sin el cambio al sistema ortonormado  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{k}\}$ .

### 3.3 Integrales de superficie de campos escalares

58. Calcular las integrales de superficie siguientes:

- $\iint_S (z + 2x + \frac{4}{3}y) dS$ ,  $S$  es la parte del plano  $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ , situado en el primer octante.
- $\iint_S xyz dS$ ,  $S$  es la parte del plano  $x + y + z = 1$ , situada en el primer octante.
- $\iint_S x dS$ ,  $S$  es la parte de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ , situada en el primer octante.
- $\iint_S y dS$ ,  $S$  es la semiesfera  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ .
- $\iint_S \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dS$ ,  $S$  es la semiesfera  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ .
- $\iint_S x^2 y^2 dS$ ,  $S$  es la semiesfera  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ .
- $\iint_S \frac{dS}{r^2}$ ,  $S$  es el cilindro  $x^2 + y^2 = a^2$ , limitado por los planos  $z = 0$ ,  $z = h$  y  $r$  es la distancia

del punto de la superficie al origen de coordenadas.

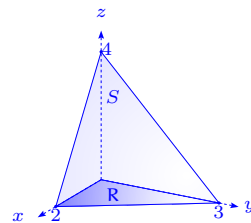
h)  $\iint_S \frac{dS}{r^n}$ ,  $S$  es la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,  $r$  es la distancia de un punto de la esfera a un punto fijo  $(0, 0, c)$ ,  $c > a > 0$ .

i)  $\iint_S \frac{dS}{r}$ ,  $S$  es la parte de la superficie del paraboloides hiperbólico  $z = xy$ , recortada por el cilindro  $x^2 + y^2 = a^2$  y  $r$  es la distancia entre un punto de la superficie y el eje  $z$ .

### Solución

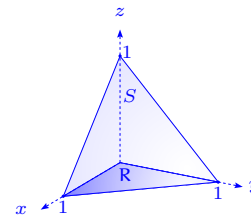
a) Sea  $z = 4 - 2x - \frac{4}{3}y$ , entonces  $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{1 + 4 + \frac{16}{9}} = \frac{\sqrt{61}}{3}$ , por lo tanto:

$$\iint_S (z + 2x + \frac{4}{3}y) dS = \iint_R \frac{4}{3} \sqrt{61} dx dy = \frac{4}{3} \sqrt{61} \text{Área}(R) = \frac{\sqrt{61}}{3} \frac{2 \cdot 3}{2} = 4\sqrt{61}.$$



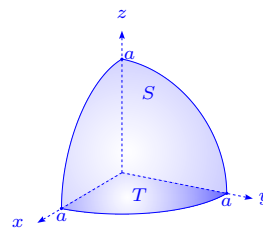
b) Se tiene que  $z = 1 - x - y$ ,  $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{3}$ , entonces

$$\begin{aligned} \iint_S xyz dS &= \iint_R xyz(1-x-y)\sqrt{3} dx dy = \\ \sqrt{3} \int_0^1 \left( \int_0^{1-x} xy(1-x-y) dy \right) dx &= \\ \sqrt{3} \int_0^1 \left( \frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{2}x^2y^2 - \frac{1}{3}xy^3 \right) \Big|_0^{1-x} dx &= \sqrt{3} \int_0^1 \left( \frac{x(1-x)(1-x)^2}{2} - \frac{x(1-x)^3}{3} \right) dx = \\ \sqrt{3} \int_0^1 \frac{x(1-x)^3}{6} dx &= \frac{\sqrt{3}}{6} \beta(2,4) = \frac{\sqrt{3}}{6} \frac{1!3!}{5!} = \frac{\sqrt{3}}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{\sqrt{3}}{120}. \end{aligned}$$



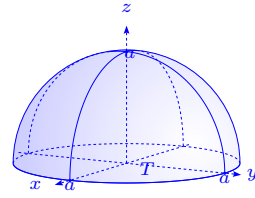
c) Se tiene que  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} &= \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \text{ entonces:} \\ \iint_S x dS &= \iint_T x \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy = \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^a \frac{ar \cos \theta}{\sqrt{a^2 - r^2}} r dr \right) d\theta &= a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \int_0^a \frac{r^2 dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = \\ a \cdot 1 \cdot \left( -\frac{1}{2}r\sqrt{a^2 - r^2} + \frac{1}{2}a^2 \arcsen \frac{r}{a} \right) \Big|_0^a &= a \frac{a^2}{2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} a^3. \end{aligned}$$



d) Se observa que como  $y$  es impar y simétrica en la región  $T$ ,  $\iint_S y dS = 0$ . En efecto:

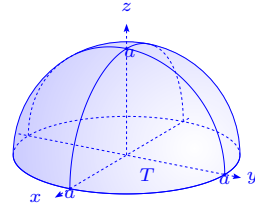
$$\iint_S y dS = \iint_T y \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy = \int_0^a \frac{r^2 dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} \cdot \int_0^{2\pi} \text{sen } \theta d\theta = 0.$$



e) La superficie  $S$  es la semiesfera  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ ,

entonces:

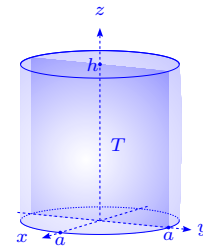
$$\iint_S \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dS = \iint_T \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = a \cdot \text{Área}(T) = \pi a^3.$$



f) La superficie  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$  satisface  $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$ , entonces:

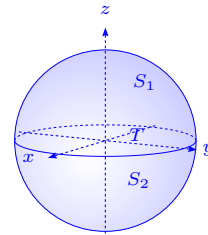
$$\begin{aligned} \iint_S x^2 y^2 dS &= a \iint_T \frac{x^2 y^2}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy = a \int_0^{2\pi} \left( \int_0^a \frac{r^4 \text{sen}^2 \theta \cos^2 \theta r dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} \right) d\theta = \\ &= a \cdot 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\text{sen}^2 \theta - \text{sen}^4 \theta) d\theta \cdot \frac{1}{2} \int_0^a \frac{(r^2)^2 (2r dr)}{\sqrt{a^2 - r^2}} = 4a \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{4}\right) \frac{1}{2} \int_0^{a^2} \frac{u^2 du}{\sqrt{a^2 - u}} = \\ &= a\pi \frac{1}{4} 2 \left( -\frac{8}{15} a^2 u - \frac{2}{5} u^2 - \frac{16}{15} a^4 \right) \sqrt{a^2 - u} \Big|_0^{a^2} = \frac{\pi}{8} a \left( \frac{16}{15} a^5 \right) = \frac{2}{15} \pi a^6. \end{aligned}$$

g) El cilindro  $x^2 + y^2 = a^2$  se proyecta sobre el plano  $yz$ , dando a  $T$  como región de integración:  $-a \leq y \leq a, 0 \leq z \leq h$  y como superficie  $x = \sqrt{a^2 - y^2}$  i.e.  $\sqrt{1 + x_z^2 + x_y^2} = \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{a}{x} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - y^2}}$ , entonces la integral es dos veces la integral sobre el cilindro  $x = \sqrt{a^2 - y^2}$ , es decir:



$$\begin{aligned} \iint_S \frac{dS}{r^2} &= 2 \iint_T \frac{a}{\sqrt{a^2 - y^2}} \frac{1}{a^2 + z^2} dy dz = 2a \int_{-a}^a \frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} \int_0^h \frac{dz}{a^2 + z^2} \\ &= 2a \arcsen \frac{y}{a} \Big|_{-a}^a \cdot \frac{1}{a} \arctan \frac{z}{a} \Big|_0^h = 2 \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \arctan \frac{h}{a} = 2\pi \arctan \frac{h}{a}. \end{aligned}$$

h) En este caso tenemos que  $r = \|(x, y, z) - (0, 0, c)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - c)^2} = \sqrt{a^2 + c^2 - 2zc}$ . La superficie es  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ , por lo que  $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \frac{a}{|z|}$ , entonces:



α) Si  $n \neq 2, z \geq 0$

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \frac{dS}{r^n} &= \iint_T \frac{a}{z} \frac{dx dy}{(a^2 + c^2 - 2zc)^{\frac{n}{2}}} = a \int_0^{2\pi} \left( \int_0^a \frac{r dr}{\sqrt{a^2 - r^2} (a^2 + c^2 - 2c\sqrt{a^2 - r^2})^{\frac{n}{2}}} \right) d\theta \\ &\stackrel{u=\sqrt{a^2-r^2}}{=} -\frac{2\pi a}{2c} \int_a^0 \frac{-2cdu}{(a^2 + c^2 - 2cu)^{\frac{n}{2}}} = -\frac{\pi a}{c} \frac{(a^2 + c^2 - 2cu)^{-\frac{n}{2}+1}}{-\frac{n}{2}+1} \Big|_0^a \\ &= \frac{2\pi a}{c} \frac{(a^2 - 2ca + c^2)^{-\frac{n}{2}+1} - (a^2 + c^2)^{-\frac{n}{2}+1}}{n-2} = \frac{2\pi a}{(n-2)c} \left( \frac{1}{(c-a)^{n-2}} - \frac{1}{(a^2 + c^2)^{\frac{n}{2}-1}} \right). \end{aligned}$$

$\beta$ ) Si  $n \neq 2$ ,  $z < 0$ ,  $r = \sqrt{a^2 + 2zc + c^2}$ , por lo que:

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} \frac{dS}{r^n} &= \iint_T \frac{a}{-z} \frac{dx dy}{(a^2 + c^2 + 2zc)^{\frac{n}{2}}} = -\int_0^{2\pi} a \left( \int_0^a \frac{r dr}{\sqrt{a^2 - r^2} (a^2 + c^2 + 2c\sqrt{a^2 - r^2})^{\frac{n}{2}}} \right) d\theta = \\ &= -\frac{\pi a}{c} \int_a^0 \frac{2cdu}{(a^2 + c^2 + 2cu)^{\frac{n}{2}}} = \frac{\pi a}{c} \frac{(a^2 + c^2 + 2cu)^{-\frac{n}{2}+1}}{-\frac{n}{2}+1} \Big|_0^a = \\ &= \frac{-2\pi a}{c(n-2)} \left( (a^2 + c^2 + 2ac)^{-\frac{n}{2}+1} - (a^2 + c^2)^{-\frac{n}{2}+1} \right) = \frac{2\pi a}{(n-2)c} \left( \frac{1}{(a^2 + c^2)^{\frac{n}{2}-1}} - \frac{1}{(a+c)^{n-2}} \right). \end{aligned}$$

Sumando ambas integrales, tenemos la integral de superficie sobre toda la esfera i.e.

$$\iint_S \frac{dS}{r^n} = \frac{2\pi a}{(n-2)c} \left( \frac{1}{(c-a)^{n-2}} - \frac{1}{(c+a)^{n-2}} \right), \text{ si } n \neq 2.$$

Si  $n = 2$  se tiene que:

$$* \text{ Para } z \geq 0, \iint_{S_1} \frac{dS}{r^2} = -\frac{\pi a}{c} \ln(a^2 + c^2 - 2cu) \Big|_0^a = -\frac{\pi a}{c} \ln \frac{(c-a)^2}{a^2 + c^2}.$$

$$* \text{ Para } z < 0, \iint_{S_2} \frac{dS}{r^2} = \frac{\pi a}{c} \ln(a^2 + c^2 + 2cu) \Big|_0^a = \frac{\pi a}{c} \ln \frac{(c+a)^2}{a^2 + c^2}.$$

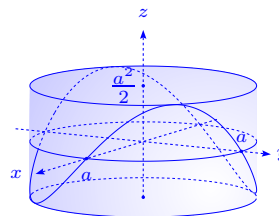
$$\text{Así, } \iint_S \frac{dS}{r^2} = \frac{2\pi a}{c} \ln \frac{c+a}{c-a}.$$

i) La superficie  $z = xy$  satisface  $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$ ,

donde  $-\sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}$ ,  $-a \leq x \leq a$  y  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

En la gráfica adjunta aparece representada la superficie. Así

tenemos que:



$$\begin{aligned} \iint_S \frac{dS}{r} &= \iint_T \frac{\sqrt{1+x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^a \sqrt{1+r^2} \frac{r}{r} dr d\theta = 2\pi \int_0^a \sqrt{1+r^2} dr \\ &= 2\pi \left( \frac{1}{2} r \sqrt{1+r^2} + \frac{1}{2} \ln(r + \sqrt{1+r^2}) \right) \Big|_0^a = \pi \left( a\sqrt{1+a^2} + \ln(a + \sqrt{1+a^2}) \right). \end{aligned}$$

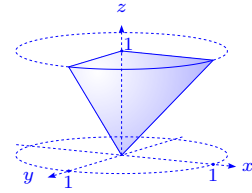
59. Calcular las integrales de superficie  $\iint_S f dS$ , donde  $S$  es la superficie definida por la ecuación  $x^2 + y^2 = z^2$ ,  $0 \leq z \leq 1$ ,  $f(x, y, z) = x^2 y^2 z$ .

**Solución** Parametrizando la superficie  $S$  por  $x = v \cos u$ ,

$y = v \sin u$ ,  $z = v$ , en  $D = [0, 2\pi] \times [0, 1]$ , tenemos la función

$\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\Phi(u, v) = (x, y, z)$ , por lo que:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = (-v \sin u, v \cos u, 0), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v} = (\cos u, \sin u, 1),$$



$\frac{\partial \Phi}{\partial v} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} = (v \cos u, -v \sin u, -v)$ ,  $\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| = \sqrt{2}v$ . Observemos que  $\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| = \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right\| \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\|$ , pues son ortogonales. De esta forma:

$$\begin{aligned} \iint_S f(x, y, z) dS &= \iint_D v^6 \sqrt{2} \cos^2 u \sin^2 u du dv = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \cos^2 u \sin^2 u du \int_0^1 v^6 dv = \\ &= \frac{4}{7} \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 u - \cos^4 u) du = \frac{4}{7} \sqrt{2} \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{3}{4} \right) = \frac{\pi \sqrt{2}}{28}. \end{aligned}$$

60. Calcular la integral de superficie  $\iint_S f dS$  en los siguientes casos:

a)  $f(x, y, z) = xy e^{xz}$ ,  $S$  en el cuarto de cilindro definida por  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $0 \leq z \leq 1$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ .

b)  $f(x, y, z) = \ln z$ ,  $S$  es la parte esférica definida por  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $\frac{1}{2} \leq z \leq 1$ .

c)  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$  y  $S$  es el helicoides  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ ,  $z = \theta$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ,  $0 \leq r \leq 1$ .

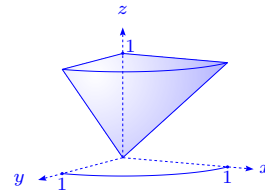
d)  $f(x, y, z) = z^2$  y  $S$  es la esfera unitaria  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

**Solución**

a) Pasando a coordenadas cilíndricas tenemos la

parametrización de la superficie  $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$\Phi(\theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$ ,  $r = 1$ , donde  $D = [0, 2\pi] \times [0, 1]$ ,



$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = (-\sin \theta, \cos \theta, 0), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = (0, 0, 1), \quad \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right\| = 1 \text{ y finalmente:}$$

$$\iint_S f dS = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \cos \theta \operatorname{sen} \theta e^{z \cos \theta} dz d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} \theta (e^{\cos \theta} - 1) d\theta = (-e^{\cos \theta} + \cos \theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = e - 2.$$

b) Usando coordenadas esféricas tenemos  $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$\Phi(\theta, \phi) = (x, y, z), \text{ con } x = r \cos \phi \cos \theta, y = r \cos \phi \operatorname{sen} \theta,$$

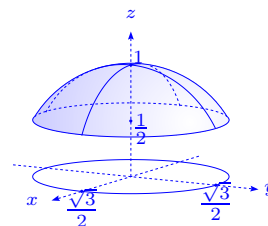
$$z = r \operatorname{sen} \phi, D = [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \text{ por lo que:}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = (-r \cos \phi \operatorname{sen} \theta, r \cos \phi \cos \theta, 0),$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \phi} = (-r \operatorname{sen} \phi \cos \theta, -r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, r \cos \phi) \implies$$

$$\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right\| = \sqrt{(r^2 \cos^2 \phi \cos \theta)^2 + (r^2 \cos^2 \phi \operatorname{sen} \theta)^2 + (r^2 \operatorname{sen} \phi \cos \phi)^2} = r^2 |\cos \phi|, \text{ con } r = 1.$$

$$\text{Finalmente, } \iint_S f dS = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\operatorname{sen} \phi) \cos \phi d\phi = 2\pi \int_{\frac{1}{2}}^1 \ln t dt = \pi(\ln 2 - 1).$$



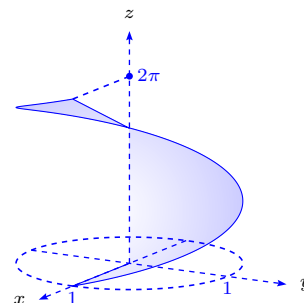
c) Sea  $\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta, \theta)$ ,  $\frac{\partial \Phi}{\partial r} = (\cos \theta, \operatorname{sen} \theta, 0)$ ,  $\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} =$

$$(-r \operatorname{sen} \theta, r \cos \theta, 1), \frac{\partial \Phi}{\partial r} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = (\operatorname{sen} \theta, -\cos \theta, -r), \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial r} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right\| =$$

$\sqrt{r^2 + 1}$  y tenemos

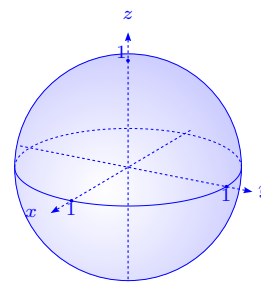
$$\iint_S f dS = \iint_D f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta, \theta) \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial r} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right\| dr d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{r^2 + 1} \sqrt{r^2 + 1} dr d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{4}{3} d\theta = \frac{8}{3}\pi.$$



d) Con la parametrización de la esfera del ejercicio b) tenemos  $\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right\| = |\cos \phi|$ , o sea:

$$\begin{aligned} \iint_S z^2 dS &= \iint_D \operatorname{sen}^2 \phi \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right\| d\phi d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 \phi |\cos \phi| d\phi d\theta \\ &= 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 \phi \cos \phi d\phi = \frac{2}{3}\pi \operatorname{sen}^3 \phi \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3}\pi. \end{aligned}$$



61. Calcular las integrales de superficie  $\iint_S f dS$ , donde:

- a)  $f(x, y, z) = y^2 + 2yz$ ,  $S$  es la parte del plano  $2x + y + 2z = 6$  situada en el primer octante.
- b)  $f(x, y, z) = x + z$ ,  $S$  es la parte del cilindro  $x^2 + y^2 = 9$  situada en el primer octante entre  $z = 0, z = 4$ .

**Solución**

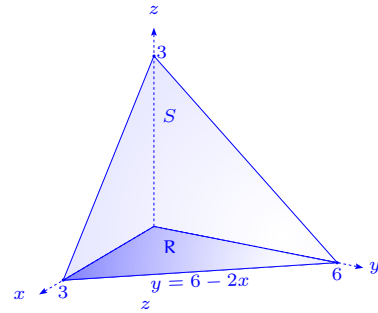
a) Se tiene que  $z(x, y) = \frac{1}{2}(6 - 2x - y)$ ,  $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} =$

$\sqrt{1 + 1 + \frac{1}{4}} = \frac{3}{2}$ , entonces:

$$\iint_S (y^2 + 2yz) dS = \iint_R (y^2 + y(6 - 2x - y)) dx dy =$$

$$\int_0^3 \int_0^{2(3-x)} y(3-x) dy dx = 6 \int_0^3 (3-x)^3 dx =$$

$$-\frac{3}{2}(3-x)^4 \Big|_0^3 = \frac{243}{2}.$$

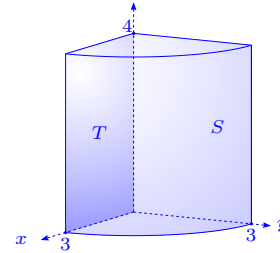


b) En este caso consideremos

$$y(x, z) = \sqrt{9 - x^2}, \quad y_x = \frac{-x}{\sqrt{9 - x^2}}, \quad y_z = 0,$$

$$\sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} = \frac{3}{\sqrt{9 - x^2}},$$

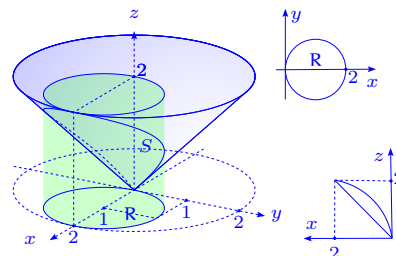
entonces:



$$\begin{aligned} \iint_S (x + z) dS &= \iint_T (x + z) \frac{3}{\sqrt{9 - x^2}} dx dz = \int_0^3 \left( \int_0^4 \frac{3(x + z)}{\sqrt{9 - x^2}} dz \right) dx \\ &= \int_0^3 \left( \frac{3xz}{\sqrt{9 - x^2}} + \frac{3z^2}{2\sqrt{9 - x^2}} \right) \Big|_0^4 dx = \int_0^3 \left( \frac{12x}{\sqrt{9 - x^2}} + \frac{24}{\sqrt{9 - x^2}} \right) dx \\ &= \left( -12\sqrt{9 - x^2} + 24 \arcsen \frac{x}{3} \right) \Big|_0^3 = 24\frac{\pi}{2} + 36 = 36 + 12\pi. \end{aligned}$$

62. El cilindro  $x^2 + y^2 = 2x$  corta una porción de la superficie  $S$ , en la hoja superior del cono  $x^2 + y^2 = z^2$ . Calcular la integral de superficie  $\iint_S (x^4 - y^4 + y^2 z^2 - z^2 x^2 + 1) dS$ .

**Solución** Es claro que podemos tomar como representación paramétrica de la superficie  $S$  a  $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2})$ , para  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , satisfaciendo  $x^2 + y^2 \leq 2x$  i.e.  $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1$ , o sea  $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, \sqrt{2x})$ , con  $(x, y) \in \mathbb{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / (x - 1)^2 + y^2 \leq 1\}$ , donde  $\mathbb{R}$  es la proyección de  $S$  sobre el plano  $xy$ .



Tomando  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} = z$ ,  $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} + 1} = \sqrt{2}$ , entonces  $\iint_S (x^4 - y^4 + y^2 z^2 - z^2 x^2 + 1) dS = \iint_{\mathbb{R}} (x^4 - y^4 + y^2(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)x^2 + 1) \sqrt{2} dx dy = \iint_{\mathbb{R}} \sqrt{2} \cdot 1 dx dy = \sqrt{2} |\mathbb{R}| = \sqrt{2} \pi 1^2 = \sqrt{2} \pi$ .

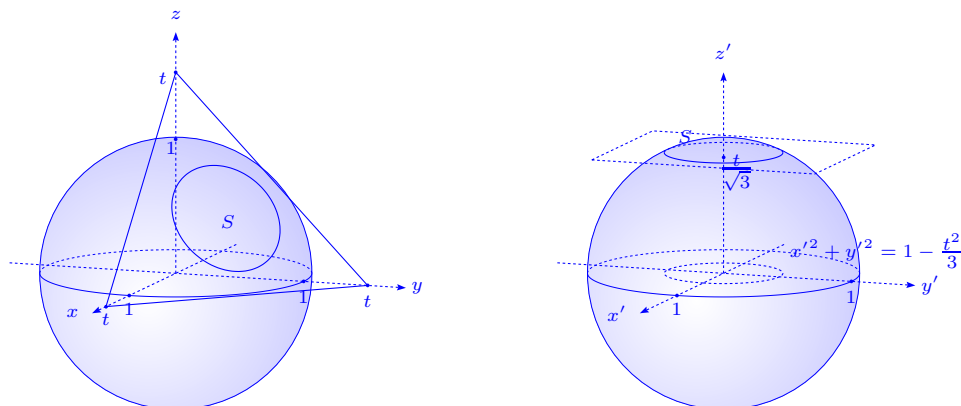
63. Sea  $S$  la porción del plano del plano  $x + y + z = t$  determinada por la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

Sea  $\varphi(x, y, z) = 1 - x^2 - y^2 - z^2$ , si  $(x, y, z)$  es interior a dicha esfera y  $\varphi(x, y, z) = 0$  si no.

Mostrar que  $\iint_S \varphi(x, y, z) dS = \begin{cases} \frac{\pi}{18} (3 - t^2)^2 & \text{si } |t| \leq \sqrt{3}, \\ 0 & \text{si } |t| > \sqrt{3}. \end{cases}$

**Solución** Realicemos un cambio de coordenadas al sistema ortonormal  $(x', y', z')$ , donde el eje  $z'$  es normal al plano  $x + y + z = t$ . De este modo  $z' = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}y + \frac{1}{\sqrt{3}}z = \frac{t}{\sqrt{3}}$  y los ejes  $x'$  y  $y'$  se escogen de modo que el sistema sea ortonormal. Observemos que en el fondo este cambio de variable, es una rotación de ejes para hacer coincidir  $z'$  con el vector  $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ . En el nuevo sistema de coordenadas, la esfera se escribe  $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$  y

$$\varphi(x', y', z') = \begin{cases} 1 - x'^2 - y'^2 - z'^2 & \text{si } x'^2 + y'^2 + z'^2 \leq 1 \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$



Para simplificar la notación, escribamos  $x, y, z$  en vez de  $x', y', z'$ . Después de la rotación de los ejes, tenemos que la superficie está dada por  $\mathbf{r}(x, y) = \left(x, y, \frac{t}{\sqrt{3}}\right)$  sobre  $T = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1 - \frac{t^2}{3}\right\}$ , que es la proyección de la superficie  $S$  sobre el plano  $xy$ .

Por otro lado,  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 1)$ , entonces  $\left\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\right\| = 1$ , por lo que:

$$\iint_S (1 - x^2 - y^2 - z^2) dS = \iint_T \left(1 - \frac{t^2}{3} - x^2 - y^2\right) \left\|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\right\| dx dy =$$

$$\int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\sqrt{1 - \frac{t^2}{3}}} \left(1 - \frac{t^2}{3} - r^2\right) r dr \right) d\theta = 2\pi \left( \left(1 - \frac{t^2}{3}\right) \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^{\sqrt{1 - \frac{t^2}{3}}} =$$

$$2\pi \left( \frac{1}{2} \left(1 - \frac{t^2}{3}\right)^2 - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{t^2}{3}\right)^2 \right) = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{t^2}{3}\right)^2 = \frac{\pi}{18} (3 - t^2)^2, \text{ si } |z| = \left|\frac{t}{\sqrt{3}}\right| \leq 1 \text{ i.e. } |t| \leq \sqrt{3}.$$

Si  $|t| > \sqrt{3} \Rightarrow |z| > 1 \Rightarrow \varphi(x, y, z) = 0$ , pues si  $|z| > 1$ , está fuera de la esfera de radio 1, o sea que  $\iint_S \varphi dS = 0$ .

64. Calcular las siguientes integrales de superficie:

a)  $\oiint_S (x + y + z) dS$ ,  $S$  es el cubo  $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ .

b)  $\oiint_S (x^2 + y^2) dS$ ,  $S$  es la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ .

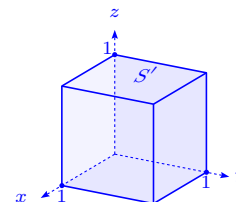
c)  $\iint_S \sqrt{x^2 + y^2} dS$ ,  $S$  es la superficie lateral del cono  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = \frac{z^2}{b^2}$ ,  $0 \leq z \leq b$ .

**Solución**

a) Es claro que por la simetría de la función  $f(x, y, z) = x + y + z$

y la simetría de los ejes  $x, y, z$  se tiene que:

$$\oiint_S (x + y + z) dS = 3 \iint_{S'} (x + y + z) dS',$$



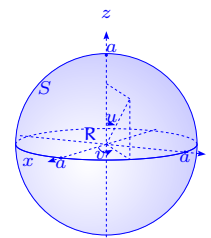
donde  $S'$  es la superficie formada por las dos caras del cubo cuando  $z = 0$  y  $z = 1$ , de representación paramétrica  $(x, y, 1), (x, y, 0), 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ , respectivamente.

$$\begin{aligned} \iint_{S'} (x + y + z) dS' &= \int_0^1 \int_0^1 (x + y + 1) dx dy + \int_0^1 \int_0^1 (x + y) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 (2x + 2y + 1) dx dy = \\ &= \int_0^1 (1 + 2y + 1) dy = 2 \left( y + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^1 = 3 \text{ i.e. } \iint_S (x + y + z) dS = 9. \end{aligned}$$

b) Sea la representación paramétrica  $\mathbf{r}(u, v) = (x, y, z) =$

$(a \cos u \cos v, a \sin u \cos v, a \sin v), (u, v) \in T = [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ,

$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| = a^2 |\cos v|$ , entonces:

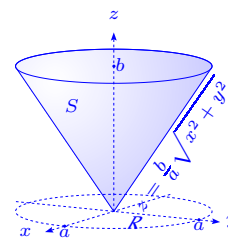


$$\begin{aligned} \oiint_S (x^2 + y^2) dS &= \iint_T a^2 \cos^2 v \cdot a^2 \cos v du dv = a^4 \int_0^{2\pi} \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 v dv \right) du \\ &= 2\pi a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 v dv = 4\pi a^4 \frac{2}{3} = \frac{8}{3} \pi a^4. \end{aligned}$$

c) Tomemos la representación cartesiana de la superficie  $z =$

$\frac{b}{a} \sqrt{x^2 + y^2}$ , con  $x^2 + y^2 \leq a^2$ ,  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{b}{a} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{b}{a} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ,

$\sqrt{1 + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2} \left( \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} \right)} =$   
 $\frac{1}{a} \sqrt{a^2 + b^2}$ , entonces:



$$\begin{aligned} \iint_S \sqrt{x^2 + y^2} dS &= \iint_R \sqrt{x^2 + y^2} \frac{1}{a} \sqrt{a^2 + b^2} dx dy = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 + b^2} \int_0^{2\pi} \left( \int_0^a r^2 dr \right) d\theta \\ &= \frac{2\pi}{a} \sqrt{a^2 + b^2} \frac{1}{3} a^3 = \frac{2}{3} a^2 \sqrt{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

### 3.4 Centro de gravedad, masa, momentos de inercia. Aplicaciones

65. Determinar los centros de gravedad de las superficies homogéneas siguientes:

a) La parte de la esfera situada en el primer octante.

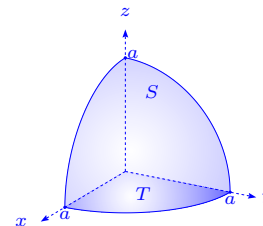
b) La parte del paraboloide  $x^2 + y^2 = 2z$  recortada por el plano  $z = 1$ .

**Solución**

a) El área de la superficie de la esfera es  $4\pi a^2$ , por lo que el área del primer octante es  $\frac{1}{2}\pi a^2$  i.e.  $m = \frac{1}{2}\pi a^2$ . Además:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{m} \iint_S x dS = \frac{1}{m} \iint_T x \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy \\ &= \frac{a}{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^a \frac{r^2 \cos \theta dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} \right) d\theta = \frac{a}{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \int_0^a \frac{r^2 dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} \\ &= \frac{a}{m} \left( -\frac{r\sqrt{a^2 - r^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \arcsen \frac{r}{a} \right) \Big|_0^a = \frac{a}{\frac{\pi}{2} a^2} \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2} a.\end{aligned}$$

Por razones de simetría tenemos que  $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = \frac{a}{2}$ .



b)  $2z = x^2 + y^2, z = 1$ .

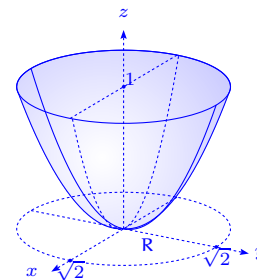
Si  $z = 1$  se tiene  $x^2 + y^2 = 2$ , es decir la intersección se proyecta sobre el plano  $xy$ , como un círculo centrado de radio  $\sqrt{2}$ . Además

$z_x = x, z_y = y$  y  $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$ , por lo que:

$$\begin{aligned}m &= \iint_S dS = \iint_R \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + r^2} r dr \right) d\theta = \frac{2\pi}{3} (1 + r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\sqrt{2}} \\ &= \frac{2\pi}{3} (3\sqrt{3} - 1). \text{ Ver ejercicio 50, página 164.}\end{aligned}$$

$$\bar{y} = \bar{x} = \frac{1}{m} \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + r^2} r^2 dr \right) \cos \theta d\theta = \frac{1}{m} \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + r^2} r^2 dr \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = 0.$$

$$\begin{aligned}\bar{z} &= \frac{1}{m} \iint_S z dS = \frac{1}{m} \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + r^2} \frac{1}{2} r^3 dr \right) d\theta = \frac{\pi}{m} \left( \frac{(1 + r^2)^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{(1 + r^2)^{\frac{3}{2}}}{3} \right) \Big|_0^{\sqrt{2}} \\ &= \frac{3\pi}{2\pi(3\sqrt{3} - 1)} \left( 3\sqrt{3} \frac{9 - 5}{15} + \frac{5 - 3}{15} \right) = \frac{1}{5} \frac{6\sqrt{3} + 1}{3\sqrt{3} + 1} = \frac{55 + 9\sqrt{3}}{130}.\end{aligned}$$



66. Calcular el momento de inercia de las partes indicadas por las superficies homogéneas (la masa de cada superficie es  $m$ ).

a) De la superficie lateral del cilindro (de radio  $a$  y altura  $h$ ) con respecto al eje que pasa por su centro de gravedad y es perpendicular al eje del cilindro.

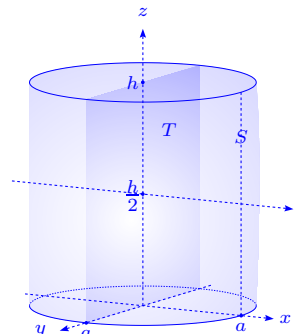
b) De la parte del paraboloide  $x^2 + y^2 = 2cz$  recortado por el plano  $z = c$ , con respecto al eje  $z$ .

c) De la superficie lateral del cono truncado (radios de la base son  $b$  y  $a$  ( $b > a$ ), altura  $h$ )

con respecto a su eje.

**Solución** Coloquemos la base del cilindro sobre el plano  $xy$ , entonces  $x^2 + y^2 = a^2$ ,  $0 \leq z \leq h$ .

a) Es claro que por las características de la superficie  $\bar{x} = \bar{y} = 0$ ,  $\bar{z} = \frac{h}{2}$  y la masa  $m = 2\pi ah$ . Por otro lado, sabemos que  $I_x = (\bar{z})^2 m + I_\ell$ , donde  $\ell$  es la recta que pasa por el centro de gravedad y es paralela al eje  $x$ .



Tmemos  $x = \pm\sqrt{a^2 - y^2}$ ,  $-a \leq y \leq a$ ,  $x_y = \mp\frac{y}{x}$ ,  $x_z = 0$ , por lo tanto  $\sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2} = \frac{a}{x}$ , con lo cual tenemos que:

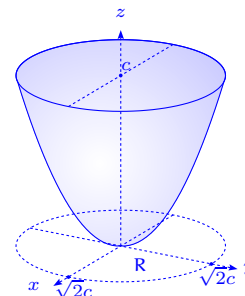
$$\begin{aligned} I_x &= \iint_S (y^2 + z^2) dS = 2 \iint_T (y^2 + z^2) \frac{a}{x} dy dz = 2a \int_0^h \left( \int_{-a}^a \left( \frac{y^2}{\sqrt{a^2 - y^2}} + \frac{z^2}{\sqrt{a^2 - y^2}} \right) dy \right) dz \\ &= 2a \int_0^h \left( -\frac{y\sqrt{a^2 - y^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \arcsen \frac{y}{a} + z^2 \arcsen \frac{y}{a} \right) \Big|_{-a}^a dz \\ &= 2a \frac{\pi}{2} \int_0^h (a^2 + 2z^2) dz = \pi a \left( a^2 h + \frac{2}{3} h^3 \right) = \pi h a \left( a^2 + \frac{2}{3} h^2 \right) = \frac{\pi}{3} a h (3a^2 + 2h^2). \end{aligned}$$

Así tenemos que:

$$\begin{aligned} I_\ell &= \frac{\pi}{3} a h (3a^2 + 2h^2) - \frac{1}{2} \pi a h h^2 = \pi a h \left( a^2 + \frac{2}{3} h^2 - \frac{1}{2} h^2 \right) = \\ &= \frac{1}{2} (2\pi a h) \left( a^2 + \frac{1}{6} h^2 \right) = \frac{1}{2} m \left( a^2 + \frac{1}{6} h^2 \right). \end{aligned}$$

b) Si  $z = c$  se tiene que  $x^2 + y^2 = 2c^2$  i.e. la intersección de las superficies proyectada sobre el plano  $xy$ , es el círculo centrado de radio  $\sqrt{2}c$ .

La superficie es  $z = \frac{x^2 + y^2}{2c}$  y las derivadas parciales  $z_x = \frac{x}{c}$ ,  $z_y = \frac{y}{c}$ ,  $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2}} = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 + x^2 + y^2}$ . Así



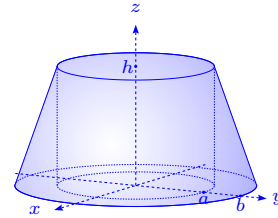
tenemos que:

$$\begin{aligned} m &= \iint_R \frac{1}{c} \sqrt{c^2 + x^2 + y^2} dx dy = \frac{1}{c} \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\sqrt{2}c} \sqrt{c^2 + r^2} r dr \right) d\theta = \frac{2\pi}{c} \frac{1}{3} (c^2 + r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\sqrt{2}c} \\ &= \frac{2\pi}{3c} (3\sqrt{3}c^3 - c^3) = \frac{2}{3} \pi c^2 (3\sqrt{3} - 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_z &= \iint_S (x^2 + y^2) dS = \frac{1}{c} \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\sqrt{2}c} \sqrt{c^2 + r^2} r^3 dr \right) d\theta \\
 &= \frac{2\pi}{c} \left( \frac{(c^2 + r^2)^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{c^2(c^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}{3} \right) \Big|_0^{\sqrt{2}c} = \frac{2\pi}{c} c^5 \left( \frac{3^3\sqrt{3} - 15\sqrt{3}}{15} + \frac{5-3}{15} \right) \\
 &= \frac{\pi c^4}{15} (24\sqrt{3} + 4) = \frac{2}{3} \pi c^2 (3\sqrt{3} - 1) \frac{3}{2} c^2 \frac{1}{15} \frac{(24\sqrt{3} + 4)}{3\sqrt{3} - 1} = \frac{m}{10} c^2 \frac{(24\sqrt{3} + 4)(3\sqrt{3} + 1)}{27 - 1} \\
 &= \frac{4(55 + 9\sqrt{3})}{5 \cdot 13 \cdot 4} mc^2 = \frac{55 + 9\sqrt{3}}{65} mc^2.
 \end{aligned}$$

c) Determinemos la ecuación del cono truncado. Del gráfico

deducimos que  $\frac{h}{b-a} = \frac{z}{b-r}$ , donde  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  i.e.  $z = \frac{h}{b-a}(b-r)$ . Así tenemos que  $z_x = \frac{xh}{\sqrt{x^2 + y^2}(b-a)}$ ,



$z_y = \frac{yh}{\sqrt{x^2 + y^2}(b-a)}$ ,  $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{1 + \frac{h^2}{(b-a)^2}} = \frac{1}{b-a} \sqrt{h^2 + (b-a)^2} = k$ , entonces:

$$m = \iint_S dS = \int_0^{2\pi} \left( \int_a^b kr dr \right) d\theta = \pi k (b^2 - a^2).$$

$$\begin{aligned}
 I_z &= \iint_S (x^2 + y^2) dS = \int_0^{2\pi} \left( \int_a^b kr^3 dr \right) d\theta = \frac{1}{2} \pi k (b^4 - a^4) = \frac{1}{2} (\pi k (b^2 - a^2))(a^2 + b^2) \\
 &= \frac{1}{2} m (a^2 + b^2).
 \end{aligned}$$

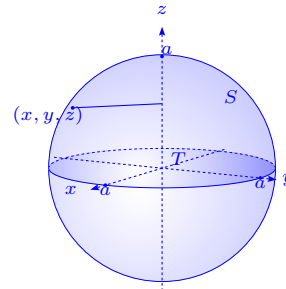
67. Calcular la masa de una esfera, si la densidad de superficie en cada punto es igual a la distancia entre el punto y un cierto diámetro fijo de la esfera.

**Solución** Se tiene la densidad  $\delta(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,

si escogemos al eje  $z$  sobre el diámetro fijo de la esfera.

Así, la masa es:

$$\begin{aligned}
 m &= \iint_S \sqrt{x^2 + y^2} dS = 2 \iint_T \frac{a\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy \\
 &= 2a \int_0^{2\pi} \left( \int_0^a \frac{r^2 dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} \right) d\theta \\
 &= 4\pi a \left( -\frac{r}{2} \sqrt{a^2 - r^2} + \frac{a^2}{2} \arctan \frac{r}{a} \right) \Big|_0^a = 4\pi a \left( \frac{a^2}{2} \frac{\pi}{2} \right) = \pi^2 a^3.
 \end{aligned}$$



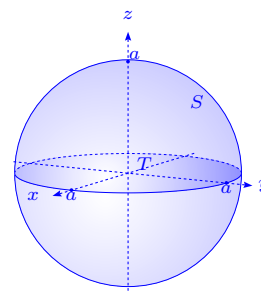
68. Hallar la masa de una esfera, si su densidad de superficie en cada punto es igual al cuadrado de la distancia entre el punto y un cierto diámetro fijo de la esfera.

**Solución** La densidad  $\delta(x, y, z) = x^2 + y^2$ , si escogemos

el eje  $z$  como el diámetro fijo de la esfera, entonces la

masa es:

$$\begin{aligned} m &= \iint_S (x^2 + y^2) dS = 2 \iint_T \frac{a(x^2 + y^2)}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy \\ &= 2a \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{r^3 dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} d\theta \\ &= 4\pi a \left( \frac{1}{3} (a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} - a^2 \sqrt{a^2 - r^2} \right) \Big|_0^a = 4\pi a \left( -\frac{a^3}{3} + a^3 \right) = \frac{8}{3} \pi a^4. \end{aligned}$$



69. Determinar el centro de la placa homogénea  $R$  de densidad 1, donde  $R$  es la superficie definida por  $x = ue^v \cos v$ ,  $y = ue^v \sin v$ ,  $z = e^v$ ,  $(u, v) \in D = [0, 1] \times [0, 1]$ .

**Solución** Se tiene que:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = (e^v \cos v, e^v \sin v, 0), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v} = (ue^v(\cos v - \sin v), ue^v(\sin v + \cos v), e^v),$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} = (e^{2v} \sin v, -e^{2v} \cos v, ue^{2v}), \quad \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| = e^{2v} \sqrt{1 + u^2}.$$

$$\text{La masa de la placa es } m = \iint_D \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| du dv = \int_0^1 \sqrt{1 + u^2} du \int_0^1 e^{2v} dv =$$

$$\frac{1}{4}(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))(e^2 - 1).$$

El centro de gravedad es  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ , donde:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{m} \int_0^1 \int_0^1 e^{2v} \sqrt{1 + u^2} ue^v \cos v du dv = \frac{1}{m} \left( \int_0^1 e^{3v} \cos v dv \right) \left( \int_0^1 u \sqrt{1 + u^2} du \right) = \\ &= \frac{1}{30m} ((3 \cos 1 + \sin 1)e^3 - 3)(2\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{m} \int_0^1 \int_0^1 e^{2v} \sqrt{1 + u^2} ue^v \sin v du dv = \frac{1}{m} \left( \int_0^1 u \sqrt{1 + u^2} du \right) \left( \int_0^1 e^{3v} \sin v dv \right) = \\ &= \frac{1}{30m} ((3 \sin 1 - \cos 1)e^3 + 1)(2\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

$$\bar{z} = \frac{1}{m} \int_0^1 \int_0^1 e^{2v} \sqrt{1 + u^2} e^v du dv = \frac{1}{m} \left( \int_0^1 e^{3v} dv \right) \left( \int_0^1 \sqrt{1 + u^2} du \right) =$$

$$\frac{1}{12m} (e^3 - 1)(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})) = \frac{(e - 1)(e^2 + e + 1)(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))}{\frac{1}{12} \frac{1}{4} (e - 1)(e + 1)(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))} = \frac{48(e^2 + e + 1)}{e + 1}.$$

70. Si  $S$  es la superficie del paraboloides  $z = 2 - (x^2 + y^2)$  sobre el plano  $xy$ , calcule:

a) Las coordenadas del centroide de esta superficie.

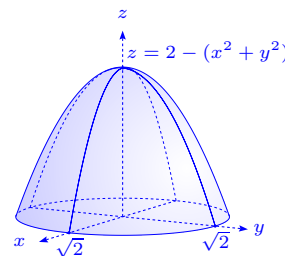
b) El momento de inercia de esta superficie con respecto al eje  $z$ , siendo la densidad de la superficie 1.

**Solución**

a) Usando las coordenadas cilíndricas tenemos

$$\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, 2 - r^2), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} =$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos \theta & \sin \theta & -2r \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = (2r^2 \cos \theta, 2r^2 \sin \theta, r),$$



$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} \perp \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \quad \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial r} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right\| = r\sqrt{4r^2 + 1}, \quad (r, \theta) \in D = [0, \sqrt{2}] \times [0, 2\pi],$$

$$\begin{aligned} m &= \iint_S dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} r\sqrt{4r^2 + 1} dr d\theta = \pi \int_0^{\sqrt{2}} 2r\sqrt{4r^2 + 1} dr = \pi \left[ \frac{1}{6} (4r^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{6} \pi ((8 + 1)^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}) = \frac{13}{3} \pi. \end{aligned}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \iint_D r \cos \theta r \sqrt{4r^2 + 1} dr d\theta = \frac{1}{m} \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r^2 \sqrt{4r^2 + 1} dr = 0,$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m} \iint_D r \sin \theta r \sqrt{4r^2 + 1} dr d\theta = \frac{1}{m} \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r^2 \sqrt{4r^2 + 1} dr = 0,$$

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{1}{m} \iint_D (2 - r^2) r \sqrt{4r^2 + 1} dr d\theta = \frac{2\pi}{m} \left[ \int_0^{\sqrt{2}} 2r\sqrt{4r^2 + 1} - \int_0^{\sqrt{2}} r^3\sqrt{4r^2 + 1} dr \right] \\ &= \frac{2\pi}{m} \left[ \frac{1}{6} (4r^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\sqrt{2}} - \int_1^9 \frac{u-1}{4} \cdot u^{\frac{1}{2}} \frac{du}{8} \right], \end{aligned}$$

donde  $u = 4r^2 + 1 \Rightarrow du = 8r dr \Rightarrow \frac{du}{8} = r dr; r^2 = \frac{u-1}{4}$ . Así:

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{2\pi}{m} \left[ \frac{1}{6} (27 - 1) - \frac{1}{32} \int_1^9 (u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}}) du \right] = \frac{2\pi}{m} \left[ \frac{26}{6} - \frac{1}{32} \left( 2\frac{u^{\frac{5}{2}}}{5} - 2\frac{u^{\frac{3}{2}}}{3} \right) \Big|_1^9 \right] \\ &= \frac{2\pi}{m} \left[ \frac{13}{3} - \frac{1}{16} \left[ \frac{3^5 - 5 \cdot 3^3 - 3 + 5}{15} \right] \right] = \frac{2\pi}{13\pi} \cdot 3 \left[ \frac{14}{3} - \frac{1}{16} \left[ \frac{3^3(27-5) + 2}{15} \right] \right] = \frac{111}{140}. \end{aligned}$$

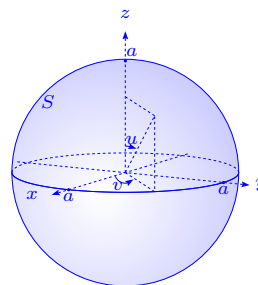
b) Como  $\delta^2 = x^2 + y^2 = r^2$ , tenemos:

$$\begin{aligned} I_z &= \iint_S \delta^2 dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} r^2 r \sqrt{4r^2 + 1} dr d\theta = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} r^3 \sqrt{4r^2 + 1} dr = 2\pi \int_1^9 \frac{u-1}{4} u^{\frac{1}{2}} \frac{du}{8} \\ &= \frac{\pi}{16} \int_1^9 (u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}}) du = \frac{\pi}{16} \left( 2\frac{u^{\frac{5}{2}}}{5} - 2\frac{u^{\frac{3}{2}}}{3} \right) \Big|_1^9 = \frac{149}{30} \pi. \end{aligned}$$

71. Demostrar que el momento de inercia de un recipiente esférico alrededor del diámetro es  $\frac{2}{3}ma^2$ , donde  $m$  es la masa del recipiente y  $a$  es su radio.

**Solución** Tomemos la representación paramétrica de la esfera de radio  $a$ :

$$\mathbf{r}(u, v) = (x, y, z) = (a \operatorname{sen} u \cos v, a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, a \cos u), \quad 0 \leq u \leq \pi, \\ 0 \leq v \leq 2\pi \text{ i.e. } S = \mathbf{r}(T), \text{ con } T = [0, \pi] \times [0, 2\pi].$$



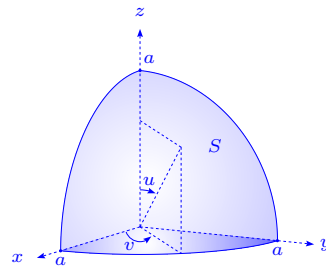
Consideremos que la densidad de la superficie  $f(x, y, z) = c$ , por lo que la masa  $m = 4\pi a^2 c$ .

Además  $\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| = a^2 |\operatorname{sen} u|$ . Así tenemos que:

$$I_y = \iint_S (x^2 + z^2) c dS = \iint_T ca^2 (\operatorname{sen}^2 u \cos^2 v + \cos^2 u) \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| du dv \\ = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi ca^4 (\operatorname{sen}^3 u \cos^2 v + \operatorname{sen} u \cos^2 u) du dv \\ = ca^4 \left[ 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3 u du \cdot 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 v dv + 2\pi \int_0^\pi \cos^2 u \operatorname{sen} u du \right] \\ = ca^4 \left( 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \pi \cdot \frac{2}{3} \right) = \frac{8}{3} \pi a^4 c = \frac{2}{3} m a^2.$$

72. Determinar el centro de gravedad de la porción de superficie esférica homogénea dada por  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ , situada sobre el primer octante.

**Solución** Consideremos la parametrización de la esfera  $x = a \operatorname{sen} u \cos v$ ,  $y = a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$ ,  $z = a \cos u$ , donde  $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$  y la densidad  $f(x, y, z) = c$ . Además  $\mathbf{r}(u, v) = (a \operatorname{sen} u \cos v, a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, a \cos u)$ ,  $S = \mathbf{r}(T)$ ,  $T = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ .



Se tiene que  $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z}$  por razones de simetría, por lo que:

$$m = \frac{4\pi a^2 c}{8} = \frac{1}{2} \pi a^2 c \\ \bar{x} = \frac{1}{m} \iint_S x c dS = \frac{1}{m} \iint_T ca \operatorname{sen} u \cos v (a^2 \operatorname{sen} u) du dv \\ = \frac{1}{m} ca^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 u du \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos v dv = \frac{1}{m} \cdot c \cdot a^3 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{\frac{1}{4} ca^3 \pi}{\frac{1}{2} ca^2 \pi} = \frac{a}{2},$$

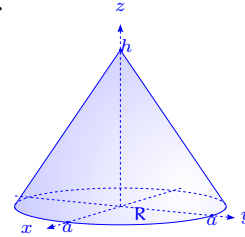
ya que  $\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| = a^2 \sin u$ .

73. Calcular la masa de una lámina superficial  $S$ , dada por  $z = 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2}$  entre los planos  $z = 0, z = 4$ , si la densidad es proporcional a la distancia al eje  $z$ .

**Solución** La densidad es  $\rho(x, y, z) = c\sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $z_x = \frac{-2x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ,  $z_y = \frac{-2y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ,  $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{5}$ .

La masa  $m$  es:

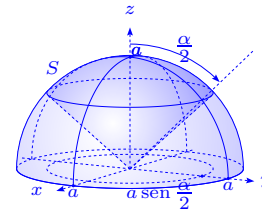
$$\begin{aligned} m &= \iint_S \rho(x, y, z) dS = \iint_R c\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{5} dx dy \\ &= c\sqrt{5} \int_0^{2\pi} \left( \int_0^2 r^2 dr \right) d\theta = 2\pi\sqrt{5}c \frac{8}{3} = \frac{16}{3}\sqrt{5}c\pi. \end{aligned}$$



74. Un recipiente esférico homogéneo de radio  $a$ , está cortado por una hoja de un cono circular recto, cuyo vértice está en el centro de la esfera. Si el ángulo en el vértice del cono es  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < \pi$ , determinar el centro de gravedad de la porción del recipiente esférico que es interior al cono.

**Solución** Es claro que por razones de simetría  $\bar{x} = \bar{y} = 0$ , al considerar el origen de coordenadas en el centro de la esfera.

Tomando la representación paramétrica de la porción de la esfera  $\mathbf{r}(u, v) = (x, y, z) = (a \cos u \cos v, a \sin u \cos v, a \sin v)$ ,



$0 \leq u \leq 2\pi$ ,  $\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| = a^2 |\cos v|$ . Supongamos que la densidad es  $f(x, y, z) = c$ , entonces la masa es:

$$\begin{aligned} m &= \iint_S c dS = c \iint_T a^2 |\cos v| du dv = a^2 c \int_{\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{2\pi} du \right) \cos v dv = 2\pi a^2 c \sin v \Big|_{\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= 2\pi a^2 c (1 - \cos \frac{\alpha}{2}). \text{ Además:} \end{aligned}$$

$$\bar{z} = \frac{1}{m} \iint_S z dS = \frac{1}{m} \iint_T ca \sin v a^2 \cos v du dv = \frac{1}{4m} \int_{\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{2\pi} ca^3 du \right) \sin 2v dv =$$

$$\frac{\pi a^3 c}{2m} (-\cos 2v) \Big|_{\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^3 c (1 + \cos(\pi - \alpha))}{4\pi a^2 c (1 - \cos \frac{\alpha}{2})} = \frac{a(1 - \cos \alpha)}{4(1 - \cos \frac{\alpha}{2})}.$$

75. Una hoja de papel rectangular homogénea de base  $2\pi a$  y altura  $h$  se enrolla formando una superficie cilíndrica  $S$  de radio  $a$ .

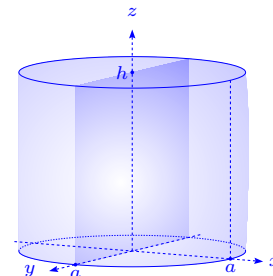
a) Calcular el momento de inercia de  $S$ , alrededor de un eje que contiene un diámetro de

la base circular.

b) Calcular el momento de inercia de  $S$ , alrededor de un eje que está en el plano de la base y es tangente al borde circular de la base.

### Solución

a) Si colocamos la base del cilindro sobre el plano  $xy$ , podemos tomar el momento de inercia  $S$  alrededor de cualquier eje en el plano  $xy$ , por ejemplo el eje  $x$  o el eje  $y$ .



Tomemos por ejemplo el eje  $y$ , entonces  $\delta(x, y, z)$  la distancia de un punto a  $(x, y, z)$  al eje  $y$  es  $\sqrt{x^2 + z^2}$ , la densidad  $f(x, y, z) = c$  y la representación paramétrica es  $\mathbf{r}(\theta, z) = (a \cos \theta, a \sin \theta, z)$ ,  $T : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq h$ .

$$\text{Así tenemos que } \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a \sin \theta & a \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (a \cos \theta, a \sin \theta, 0), \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \right\| = a,$$

por lo que (ver ejercicio 66, página 183):

$$I_y = \iint_S \delta^2(x, y, z) c dS = \iint_T (a^2 \cos^2 \theta + z^2) c a d\theta dz = ac \int_0^h \left( 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2 \theta d\theta + 2\pi z^2 \right) dz =$$

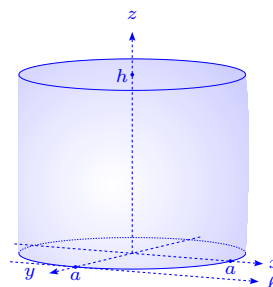
$$ac \int_0^h \left( 4a^2 \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} + 2\pi z^2 \right) dz = ac \left( \pi a^2 h + \frac{2}{3} \pi h^3 \right) = \pi a^3 h c + \frac{2}{3} \pi a h^3 c.$$

b) Si tomamos la recta  $\ell$  paralela al eje  $y$  pasando por  $(a, 0)$ , se tiene que la distancia de un punto  $(x, y, z)$  a la recta  $\ell$  es  $\delta(x, y, z) = \sqrt{(a + y)^2 + z^2}$ , entonces:

$$I_\ell = \iint_S ((a + y)^2 + z^2) c dS = \iint_T (a^2 (1 + \cos^2 \theta) + z^2) a c d\theta dz =$$

$$ac \int_0^h \int_0^{2\pi} (a^2 (1 + \cos^2 \theta) + z^2) d\theta dz = ac \int_0^h \left( 2\pi a^2 + 4a^2 \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} + 2\pi z^2 \right) dz =$$

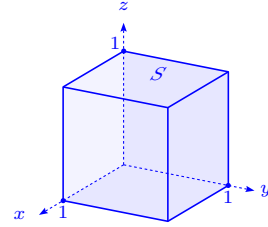
$$ac \int_0^h (3\pi a^2 + 2\pi z^2) dz = 3\pi a^3 h c + \frac{2}{3} \pi a h^3 c.$$



76. Calcular la masa de la superficie del cubo  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ , si la densidad superficial en el punto  $(x, y, z)$  es igual a  $xyz$ .

**Solución** Por razones de simetría se tiene que si  $S'$  es la superficie del cubo  $\iint_{S'} xyz \, dS' = 3 \iint_S xyz \, dS$ , donde  $S$  es la unión de las superficies del cubo  $z = 1, z = 0$ , entonces:

$$\iint_S xyz \, dS = \iint_{z=1} xy \, dS.$$

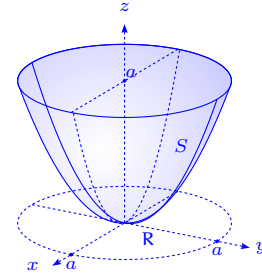


Así tenemos que la cara del cubo es la superficie  $z = 1, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ , en la cual  $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = 1$ , por lo que:

$$\iint_{S'} xyz \, dS' = 3 \int_0^1 \int_0^1 xy \, dx \, dy = 3 \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{3}{4}.$$

77. Determinar las coordenadas del centro de gravedad de la cápsula parabólica homogénea  $az = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq a$ .

**Solución** Dado que la cápsula parabólica es homogénea se tiene que  $\bar{x} = \bar{y} = 0$ . Así  $z = \frac{1}{a}(x^2 + y^2)$ , con  $x^2 + y^2 \leq a^2, z_x = \frac{2x}{a}, z_y = \frac{2y}{a}, \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{1 + \frac{4}{a^2}(x^2 + y^2)}$ , la densidad es  $f(x, y, z) = c$  y la masa es:



$$\begin{aligned} m &= \iint_S c \, dS = c \iint_R \sqrt{1 + \frac{4}{a^2}(x^2 + y^2)} \, dx \, dy = c \frac{a^2}{8} \int_0^{2\pi} \left( \int_0^a \sqrt{1 + \frac{4}{a^2}r^2} \frac{8}{a^2} r \, dr \right) d\theta \\ &= 2\pi c \frac{a^2}{8} \left( 1 + \frac{4}{a^2}r^2 \right)^{\frac{3}{2}} \frac{2}{3} \Big|_0^a = \frac{\pi}{6} a^2 (5\sqrt{5} - 1) c. \end{aligned}$$

Además:

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{1}{m} \iint_S cz \, dS = \frac{1}{m} c \iint_R \frac{1}{a}(x^2 + y^2) \sqrt{1 + \frac{4}{a^2}(x^2 + y^2)} \, dx \, dy \\ &= \frac{c}{ma} \int_0^{2\pi} \left( \int_0^a r^2 \sqrt{1 + \frac{4}{a^2}r^2} r \, dr \right) d\theta = \frac{2\pi c}{ma} \int_0^a r^2 \sqrt{1 + \frac{4}{a^2}r^2} r \, dr. \end{aligned}$$

Tomemos en la integral  $b = \frac{2}{a}, x = b^2 r^2, dx = 2b^2 r^2 \, dr$ , entonces:

$$\begin{aligned} \int r^2 \sqrt{1 + b^2 r^2} \, dr &= \frac{1}{2b^4} \int b^2 r^2 \sqrt{1 + b^2 r^2} 2b^2 r \, dr = \frac{1}{2b^4} \int x \sqrt{1 + x} \, dx \\ &= \frac{1}{2b^4} \frac{2(3x - 2)}{15} (1 + x)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{2b^4} \frac{2(3b^2 r^2 - 2)}{15} (1 + b^2 r^2)^{\frac{3}{2}} + C, \end{aligned}$$

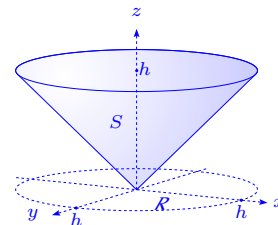
por lo tanto:

$$\begin{aligned} \int_0^a r^2 \sqrt{1 + \frac{4}{a^2} r^2} r dr &= \frac{1}{2 \left(\frac{2}{a}\right)^4} \frac{2 \left(3 \left(\frac{2}{a}\right)^2 r^2 - 2\right)}{15} \left(1 + \frac{4}{a^2} r^2\right)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^a \\ &= \frac{a^4}{2 \cdot 16} \left( \frac{2(10)}{15} 5^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{15} \right) = \frac{a^4}{2 \cdot 4} \frac{25\sqrt{5} + 1}{5 \cdot 3}. \end{aligned}$$

$$\text{Finalmente, } \bar{z} = \frac{\frac{a^4(25\sqrt{5} + 1)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{2\pi c}{a}}{\frac{\pi}{6} a^2 (5^{\frac{3}{2}} - 1)} = \frac{a}{10} \frac{25\sqrt{5} + 1}{5\sqrt{5} - 1}.$$

78. Hallar el momento de inercia de la parte de la superficie del cono  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $0 \leq z \leq h$ , con respecto al eje  $z$ .

**Solución** La superficie es  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $0 \leq z \leq h$ ,  $z_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ,  $z_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ,  $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}} = \sqrt{2}$ . Así tenemos que el momento de inercia  $I_z$  es:



$$\begin{aligned} I_z &= \iint_S \delta^2(x, y) dS = \iint_S (x^2 + y^2) dS = \iint_R (x^2 + y^2) \sqrt{2} dx dy \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left( \int_0^h r^3 dr \right) d\theta = \sqrt{2} 2\pi \frac{r^4}{4} \Big|_0^h = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi h^4. \end{aligned}$$

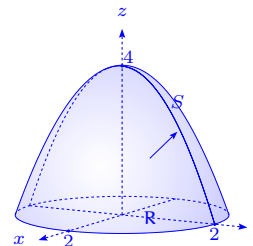
### 3.5 Integrales de superficie de campos vectoriales

79. Sea  $S$  la superficie dada por el paraboloide  $z = 4 - x^2 - y^2$  situada sobre el plano  $xy$ , orientado por un vector unitario hacia arriba. El fluido de densidad  $\rho(x, y, z) = c$  fluye a través de la superficie  $S$ , por el campo de velocidades  $\mathbf{f}(x, y, z) = (x, y, z)$ . Determinar la razón de flujo de masa a través de  $S$ .

**Solución** Sea  $z(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ ,  $z_x = -2x$ ,  $z_y = -2y$ ,

$$\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}, \quad \boldsymbol{\eta} = \frac{(2x, 2y, 1)}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}},$$

entonces:



$$\begin{aligned} \iint_S \rho \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS &= c \iint_R (2x^2 + 2y^2 + z(x, y)) \, dx \, dy = c \iint_R (4 + x^2 + y^2) \, dx \, dy \\ &= c \int_0^{2\pi} \left( \int_0^2 (4 + r^2) r \, dr \right) d\theta = 2\pi c \left( 2r^2 + \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^2 = 24\pi c. \end{aligned}$$

80. Sean  $u$  y  $v$  dos campos escalares de clase  $C^2$  en un conjunto abierto  $R$  de  $\mathbb{R}^3$ .

a) Demostrar que existe un campo vectorial  $\mathbf{f}$  tal que  $\nabla u \times \nabla v = \text{rot } \mathbf{f}$  en  $R$ .

b) Determinar si cualquiera de los tres campos vectoriales siguientes pueden o no ser utilizados como  $\mathbf{f}$  en la parte a): i)  $\nabla(uv)$ , ii)  $u\nabla v$ , iii)  $v\nabla u$ .

c) Si  $u(x, y, z) = x^3 - y^3 + z^3$ ,  $v(x, y, z) = x + y + z$ , calcular la integral de superficie:

$$\iint_S \nabla u \times \nabla v \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS,$$

en donde  $S$  es la semiesfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $z \geq 0$  y  $\boldsymbol{\eta}$  es la normal unitaria con componente  $z$  no negativa.

**Solución**

a) Sabemos que  $\text{div}(\nabla u \times \nabla v) = 0$ , entonces existe  $\mathbf{f}$  de clase  $C^1$  tal que  $\text{rot } \mathbf{f} = \nabla u \times \nabla v$ .

b) Se tiene que:

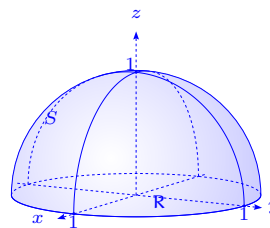
i)  $\text{rot}(\nabla(uv)) = 0$  no sirve.

ii)  $\text{rot}(u\nabla v) = u \text{rot}(\nabla v) + \nabla u \times \nabla v = \nabla u \times \nabla v$  sí sirve.

iii)  $\text{rot}(v\nabla u) = v \text{rot}(\nabla u) + \nabla v \times \nabla u = -\nabla u \times \nabla v$  y se usa  $-v\nabla u$ .

c) En este caso  $\nabla u = (3x^2, -3y^2, 3z^2)$ ,  $\nabla v = (1, 1, 1)$ , entonces:

$$\begin{aligned}\nabla u \times \nabla v &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3x^2 & -3y^2 & 3z^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-3y^2 - 3z^2, -3x^2 + 3z^2, 3x^2 + 3y^2).\end{aligned}$$



La esfera se representa por  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ ,  $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \frac{1}{z}$  y  $\boldsymbol{\eta} = (x, y, z)$  por lo que:

$$\begin{aligned}\iint_S \nabla u \times \nabla v \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS &= \\ \iint_S (-3xy(x+y) + (3x^2 + 3y^2)\sqrt{1-x^2-y^2} - (3x-3y)(1-x^2-y^2)) \, dS &= \\ \iint_R \left( \frac{-3xy(x+y)}{\sqrt{1-x^2-y^2}} - (3x-3y)\sqrt{1-x^2-y^2} + 3x^2 + 3y^2 \right) \, dx \, dy &= \\ \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left( \frac{-3r^2(\sin\theta + \cos\theta)r}{\sqrt{1-r^2}} - 3r\sqrt{1-r^2}\cos\theta - 3r\sqrt{1-r^2}\sin\theta + 3r^2 \right) r \, dr \, d\theta &= \\ 0 - 0 - 0 + 2\pi \frac{3}{4} r^4 \Big|_0^1 &= \frac{3}{2}\pi.\end{aligned}$$

Otra manera se puede usar para el cálculo de la integral. Dado que  $u\nabla v$  es tal que

$\text{rot}(u\nabla v) = \nabla u \times \nabla v$ , entonces si  $\Gamma$  es el círculo  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = 0$ :

$$\begin{aligned}\iint_S \text{rot}(u\nabla v) \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS &= \oint_{\Gamma} u\nabla v \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\Gamma} (x^3 - y^3 + z^3)(1, 1, 1) \cdot (dx, dy, dz) = \\ \oint_{\Gamma} (x^3 - y^3 + z^3) \, dx + (x^3 - y^3 + z^3) \, dy + (x^3 - y^3 + z^3) \, dz &= \\ \int_{\Gamma} (x^3 - y^3) \, dx + (x^3 - y^3) \, dy &= \int_0^{2\pi} (\cos^3\theta - \sin^3\theta)(-\sin\theta + \cos\theta) \, d\theta = \\ -0 + \int_0^{2\pi} \sin^4\theta \, d\theta + \int_0^{2\pi} \cos^4\theta \, d\theta - 0 &= 2 \int_0^{2\pi} \cos^4\theta \, d\theta = \\ 2 \cdot 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta \, d\theta &= 2 \cdot 4 \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}.\end{aligned}$$

81. Sea  $S$  la semiesfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $z \geq 0$ , sea  $\mathbf{f}(x, y, z) = (x, y, 0)$  y sea  $\boldsymbol{\eta}$  el vector normal unitario exterior a  $S$ . Calcular el valor de la integral de superficie  $\iint_S \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS$ , empleando:

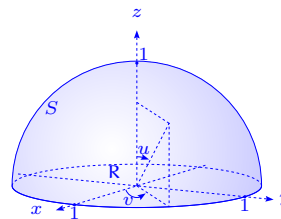
a) La representación vectorial  $\mathbf{r}(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$ .

b) La representación explícita  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ .

**Solución**

a) Es claro que  $S = \mathbf{r}(T)$ , con  $T = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [0, \pi]$ , entonces:

$$\iint_S \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS = \iint_T \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| \, du \, dv = \iint_T \mathbf{f} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \, du \, dv.$$



Por otro lado:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos u \cos v & \cos u \sin v & -\sin u \\ -\sin u \sin v & \sin u \cos v & 0 \end{vmatrix} = (\sin^2 u \cos v, \sin^2 u \sin v, \sin u \cos u)$$

y  $\mathbf{f}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \sin^3 u \cos^2 v + \sin^3 u \sin^2 v = \sin^3 u$ , por lo que:

$$\iint_S \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^\pi \sin^3 u \, du \right) \, dv = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 u \, du = 2\pi \frac{2}{3} = \frac{4\pi}{3}.$$

b) Si la fórmula está dada explícitamente,  $\boldsymbol{\eta} = (x, y, z)$ ,  $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \frac{1}{z}$ , entonces:

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS &= \iint_S \mathbf{f} \cdot (x, y, z) \, dS = \iint_R (x^2 + y^2 + 0) \frac{1}{z} \, dx \, dy \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 \frac{r^3 \, dr}{\sqrt{1-r^2}} \right) \, d\theta = 2\pi \left( \frac{r^2}{3} - \frac{2}{3} \right) \sqrt{1-r^2} \Big|_0^1 = 2\pi \frac{2}{3} = \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

82. Sea  $S$  la porción del plano limitada por el triángulo de vértices  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ ,

sea  $\mathbf{f}(x, y, z) = (x, y, z)$  y sea  $\boldsymbol{\eta}$  la normal unitaria a  $S$  que tiene componente  $z$  no negativa.

Calcular la integral de superficie  $\iint_S \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS$  usando:

a) La representación vectorial  $\mathbf{r}(u, v) = (u + v, u - v, 1 - 2u)$ .

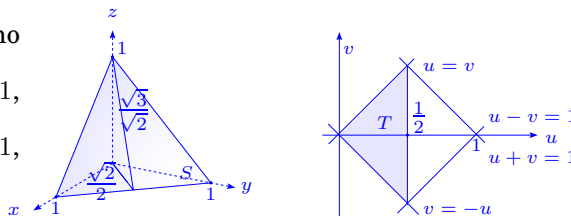
b) Una representación explícita de la forma  $z = f(x, y)$ .

**Solución**

a) En este caso  $-\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| = - \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (2, 2, 2)$  y  $\boldsymbol{\eta} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ .

Debemos determinar la variación de  $u$  y de  $v$  para el cálculo de la integral.

Lo primero que observamos es que el plano es  $x + y + z = 1$ , con  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 1$ , o sea  $0 \leq u + v \leq 1$ ,  $0 \leq 1 - 2u \leq 1$ , por lo que  $0 \leq 2u \leq 1 \implies 0 \leq u \leq \frac{1}{2}$ .



Además,  $0 \leq u + v \leq 1 \implies -u \leq v \leq 1 - u$  y  $0 \leq u - v \leq 1 \implies u - 1 \leq v \leq u$  y como  $0 \leq u \leq \frac{1}{2} \implies -u \leq v \leq u$ , con  $0 \leq u \leq \frac{1}{2}$ . De esta manera tenemos que  $T = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / -u \leq v \leq u, 0 \leq u \leq \frac{1}{2}\}$ .

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS &= \iint_T \mathbf{f} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) \, du \, dv = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{-u}^u 2(x + y + z) \, dv \, du \\ &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{-u}^u \, dv \, du = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} 2u \, du = 2u^2 \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

b) Ya sabemos que  $z = 1 - x - y$ ,  $\boldsymbol{\eta} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ , entonces  $\mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} = \frac{1}{\sqrt{3}}(x + y + z) = \frac{1}{\sqrt{3}}$  sobre  $S$ , por lo que:

$$\iint_S \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS = \iint_S \frac{1}{\sqrt{3}} \, dS = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{Área}(S) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

ya que  $\text{Área}(S) = \frac{1}{2} \text{base} \times \text{altura} = \frac{1}{2} \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{3}$ .

83. Sea  $S$  una superficie parametrizada de la forma  $z = f(x, y)$ ,  $f$  de clase  $C^1$ , de modo que  $(x, y) \in T$ , siendo  $T$  una región plana, proyección de  $S$  sobre el plano  $xy$ .

a) Sea  $\mathbf{f} = (P, Q, R)$ , con  $P, Q, R$  continuas y  $\boldsymbol{\eta}$  la normal unitaria a  $S$ , de componente  $z$  no negativa. Usar la representación paramétrica  $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$  para demostrar que:

$$\iint_S \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS = \iint_T \left( -P \frac{\partial f}{\partial x} - Q \frac{\partial f}{\partial y} + R \right) \, dx \, dy,$$

donde  $P, Q$  y  $R$  se evalúan en  $(x, y, f(x, y))$ .

b) Sea  $\varphi$  un campo escalar, demostrar que:

$$\text{i) } \iint_S \varphi(x, y, z) \, dS = \iint_T \varphi(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2} \, dx \, dy.$$

$$\text{ii) } \iint_S \varphi(x, y, z) dy \wedge dz = - \iint_T \varphi(x, y, f(x, y)) \frac{\partial f}{\partial x} dx dy.$$

$$\text{iii) } \iint_S \varphi(x, y, z) dz \wedge dx = - \iint_T \varphi(x, y, f(x, y)) \frac{\partial f}{\partial y} dx dy.$$

**Solución** Es claro que por hipótesis  $S = \mathbf{r}(T)$ , además:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = \left( -\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right), \quad \boldsymbol{\eta} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right\|}.$$

a) Por otro lado sabemos que:

$$\iint_{\mathbf{r}(T)} f dS = \iint_T f(\mathbf{r}(x, y)) \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right\| dx dy,$$

entonces definiendo  $f = \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta}$  se concluye que:

$$\iint_{\mathbf{r}(T)} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} dS = \iint_T \left( -P \frac{\partial f}{\partial x} - Q \frac{\partial f}{\partial y} + R \right) dx dy,$$

ya que  $(\mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta})(\mathbf{r}(x, y)) \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right\| = \left( \mathbf{f} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right) (\mathbf{r}(x, y))$ .

b)-i) Usando el hecho que si  $S = \mathbf{r}(T)$ ,

$$\iint_S \varphi dS = \iint_T \varphi(\mathbf{r}(x, y)) \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right\| dx dy,$$

con  $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$ ,  $\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right\| = \sqrt{1 + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2}$ , tenemos que:

$$\iint_S \varphi(x, y, z) dS = \iint_T \varphi(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2} dx dy.$$

ii) Recordemos que  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \left( \left| \frac{\partial(Y, Z)}{\partial(x, y)} \right|, \left| \frac{\partial(Z, X)}{\partial(x, y)} \right|, \left| \frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)} \right| \right) = \left( -\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right)$ , donde  $\mathbf{r}(x, y) = (X(x, y), Y(x, y), Z(x, y))$ , entonces:

$$\iint_S \varphi(x, y, z) dy \wedge dz = \iint_T \varphi(x, y, f(x, y)) \left| \frac{\partial(Y, Z)}{\partial(x, y)} \right| dx dy = - \iint_T \varphi(x, y, f(x, y)) \frac{\partial f}{\partial x} dx dy.$$

iii) De manera similar:

$$\iint_S \varphi(x, y, z) dz \wedge dx = \iint_T \varphi(x, y, f(x, y)) \left| \frac{\partial(Z, X)}{\partial(x, y)} \right| dx dy = - \iint_T \varphi(x, y, f(x, y)) \frac{\partial f}{\partial y} dx dy.$$

Observemos que  $\iint_S \varphi(x, y, z) dx \wedge dy = \iint_T \varphi(x, y, f(x, y)) dx dy$ .

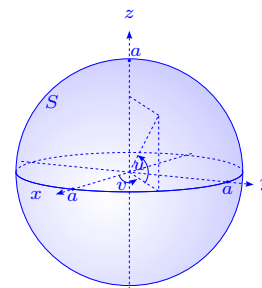
84. Si  $S$  es la superficie de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ , calcular el valor de las integrales de superficie:

a)  $\oiint_S xz dy \wedge dz + yz dz \wedge dx + x^2 dx \wedge dy$ .

b)  $\oiint_S xz dy \wedge dz + yz dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy$ .

Se debe elegir una representación para que el producto vectorial fundamental tenga la dirección de la normal exterior.

**Solución** Consideremos la representación paramétrica de la superficie  $\mathbf{r}(u, v) = (x, y, z) = (a \cos u \cos v, a \sin u \cos v, a \sin v)$ ,  $\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| = a^2 |\cos v|$ ,  $0 \leq u \leq 2\pi$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$ , por lo tanto:



a)  $T = [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\mathbf{r}(T) = S$ ,  $\mathbf{f} = (P, Q, R) = (xz, yz, x^2)$ ,  $\boldsymbol{\eta} = \frac{(2x, 2y, 2z)}{2a} = \frac{(x, y, z)}{a}$  y

$$\oiint_S xz dy \wedge dz + yz dz \wedge dx + x^2 dx \wedge dy = - \oiint_S \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} dS = - \oiint_S \frac{1}{a} (x^2 z + y^2 z + x^2 z) dS =$$

$$- \oiint_S \frac{1}{a} (2x^2 + y^2) z dS = -a^4 \iint_T (\cos^2 u + 1) \cos^2 v \sin v |\cos v| du dv =$$

$$-a^4 \int_0^{2\pi} (\cos^2 u + 1) du \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin v \cos^2 v dv = a^4 \int_0^{2\pi} (\cos^2 u + 1) du \frac{1}{4} \cos^4 v \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0.$$

b)  $T = [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\mathbf{r}(T) = S$ ,  $\mathbf{f} = (P, Q, R) = (xz, yz, z^2)$ ,  $\boldsymbol{\eta} = \frac{(x, y, z)}{a}$ ,

$$\oiint_S xz dy \wedge dz + yz dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy = - \oiint_S \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} dS = - \oiint_S \frac{1}{a} (x^2 z + y^2 z + z^2 z) dS =$$

$$- \oiint_S a^2 z \frac{1}{a} dS = - \oiint_S a z dS = -a \iint_T a \sin v (a^2 |\cos v|) du dv = a^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \sin v |\cos v| du dv =$$

$$2\pi a^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin v \cos v dv = \pi a^4 \sin^2 v \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0.$$

85. Calcular las siguientes integrales de superficie:

a)  $\iint_S yz dy \wedge dz + xz dz \wedge dx + xy dx \wedge dy$ ,  $S$  es la cara exterior de la superficie del tetraedro

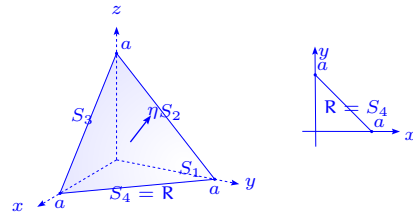
limitado por  $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = a$ .

b)  $\iint_S z \, dx \wedge dy$ ,  $S$  es la cara exterior del elipsoide  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .

c)  $\iint_S x^2 \, dy \wedge dz + y^2 \, dz \wedge dx + z^2 \, dx \wedge dy$ ,  $S$  es la cara exterior de la superficie de la semiesfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0$ .

**Solución**

a) Sea  $\mathbf{f} = (yz, xz, xy)$ ; la superficie  $S$  está formada de cuatro superficies  $S_1$ , con vector normal  $\boldsymbol{\eta}_1 = \frac{(1, 1, 1)}{\sqrt{3}}$ ,  $S_2$  con vector normal  $\boldsymbol{\eta}_2 = (-1, 0, 0)$ ,  $S_3$  con vector normal  $\boldsymbol{\eta}_3 = (0, -1, 0)$  y  $S_4$  con vector normal  $\boldsymbol{\eta}_4 = (0, 0, -1)$ .



$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS_1 &= \iint_{S_1} \frac{xy + (x+y)z}{\sqrt{3}} \, dS_1 = \iint_R (xy + (x+y)(a-x-y)) \, dx \, dy = \\ &= \int_0^a \left( \int_0^{a-x} (xy + (x+y)(a-x-y)) \, dy \right) dx = \int_0^a \left( -x^2y + x \left( ay - \frac{y^2}{2} \right) - \frac{y^2(2y-3a)}{6} \right) \Big|_0^{a-x} dx = \\ &= \int_0^a \left( \frac{5}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2a + \frac{1}{2}xa^2 + \frac{a^3}{6} \right) dx = \left( \frac{5}{24}x^4 - \frac{1}{2}ax^3 + \frac{1}{4}a^2x^2 + \frac{1}{6}a^3x \right) \Big|_0^a = \frac{1}{8}a^4. \end{aligned}$$

Por razones de simetría:

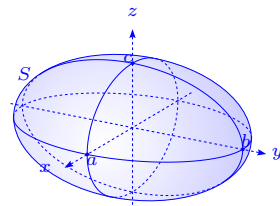
$$\begin{aligned} \iint_{S_2} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta}_2 \, dS_2 &= \iint_{S_3} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta}_3 \, dS_3 = \iint_{S_4} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta}_4 \, dS_4 = - \iint_{S_2} yz \, dS_2 \\ &= - \int_0^a \left( \int_0^{a-y} yz \, dz \right) dy = - \int_0^a y \frac{(y-a)^2}{2} dy = - \frac{a^4}{24}, \end{aligned}$$

por lo tanto  $\iint_S \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS = \frac{1}{8}a^4 - 3 \frac{1}{24}a^4 = 0$ .

b) Sea la representación paramétrica del elipsoide

$$\mathbf{r}(u, v) = (a \cos u \cos v, b \sin u \cos v, c \sin v).$$

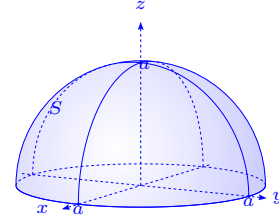
$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (bc \cos u \cos^2 v, ac \sin u \cos^2 v, ab \sin v \cos v),$$



$0 \leq u \leq 2\pi$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$  i.e.  $T = [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Si definimos  $\mathbf{f} = (0, 0, z)$  se tiene que:

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS &= \iint_T \mathbf{f} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \, du \, dv = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{2\pi} abc \, \text{sen}^2 v \, \text{cos} v \, du \right) dv \\ &= 2\pi abc \frac{\text{sen}^3 v}{3} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3} \pi abc. \end{aligned}$$

c) Sea  $\mathbf{r}(u, v) = (a \cos u \cos v, a \text{sen} u \cos v, a \text{sen} v)$ , la representación paramétrica con  $(u, v) \in T = [0, 2\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = a^2(\cos u \cos^2 v, \text{sen} u \cos^2 v, \text{sen} v \cos v)$  y  $\mathbf{f} = (x^2, y^2, z^2)$ , entonces:



$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS &= \iint_T \mathbf{f} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \, du \, dv \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{2\pi} (a^4 \cos^3 u \cos^4 v + a^4 \text{sen}^3 u \cos^4 v + a^4 \text{sen}^3 v \cos v) \, du \right) dv \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{2\pi} a^4 \text{sen}^3 v \cos v \, du \right) dv = 2\pi a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^3 v \cos v \, dv = \frac{1}{2} \pi a^4. \end{aligned}$$

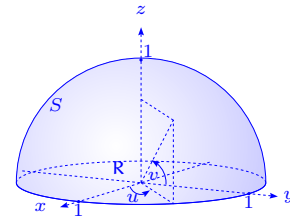
86. Un flujo de fluido tiene como densidad de flujo el vector  $\mathbf{f}(x, y, z) = (x, -2x - y, z)$ , sea  $S$  el hemisferio  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $z \geq 0$  y sea  $\boldsymbol{\eta}$  la normal unitaria orientada hacia el exterior de la esfera.

a) Calcular la masa de fluido que atraviesa  $S$  por unidad de tiempo en la dirección  $\boldsymbol{\eta}$ .

b) Calcular la masa de fluido que atraviesa  $S$ , si  $S$  también contiene la base plana del hemisferio. En la base inferior la normal es  $-\mathbf{k}$ .

### Solución

a) Tomamos la representación paramétrica  $\mathbf{r}(u, v) = (x, y, z) = (\cos u \cos v, \text{sen} u \cos v, \text{sen} v)$ ,  $0 \leq u \leq 2\pi$ ,  $0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (\cos u \cos^2 v, \text{sen} u \cos^2 v, \text{sen} v \cos v)$ , entonces la masa de fluido que atraviesa  $S$  es:



$$\iint_S \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS = \iint_T \mathbf{f} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \, du \, dv = \iint_T ((\cos 2u - \text{sen} 2u) \cos^3 v + \text{sen}^2 v \cos v) \, du \, dv =$$

$$\int_0^{2\pi} (\cos 2u - \operatorname{sen} 2u) du \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 v du + 2\pi \frac{\operatorname{sen}^3 v}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 + \frac{2}{3} \pi = \frac{2}{3} \pi.$$

b) Sobre la superficie  $S' : z = 0, x^2 + y^2 \leq 1, \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} = 0$ , es decir  $\iint_{S'} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} dS = 0$  y tenemos que

$$\oiint_S \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} dS = \frac{2}{3} \pi.$$

87. Calcular las siguientes integrales de superficie:

a)  $\oiint_S x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy$ ,  $S$  es el lado positivo del cubo formado por los planos  $x = 0, y = 0, z = 0, x = 1, y = 1, z = 1$ .

b)  $\oiint_S x^2 y^2 z dx \wedge dy$ ,  $S$  es el lado positivo de la mitad inferior de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ .

c)  $\oiint_S z dx \wedge dy$ ,  $S$  es la cara exterior del elipsoide  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .

d)  $\oiint_S z^2 dx \wedge dy$ ,  $S$  es la cara exterior del elipsoide  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .

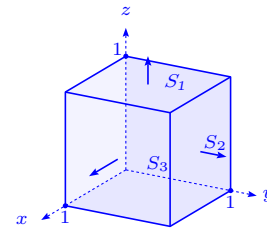
e)  $\oiint_S xz dx \wedge dy + xy dy \wedge dz + yz dz \wedge dx$ ,  $S$  es la cara exterior de la pirámide formada por los planos  $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$ .

f)  $\oiint_S yz dx \wedge dy + xz dy \wedge dx + xy dz \wedge dx$ ,  $S$  es la cara exterior de la superficie situada en el primer octante y formada por el cilindro  $x^2 + y^2 = a^2$  y los planos  $x = 0, y = 0, z = 0, z = h$ .

g)  $\oiint_S y^2 z dx \wedge dy + xz dy \wedge dz + x^2 y dz \wedge dx$ ,  $S$  es la cara exterior de la superficie situada en el primer octante y formada por el paraboloide de revolución  $z = x^2 + y^2$ , por el cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  y los planos de coordenadas.

**Solución**

a) Representamos  $S_1, S_2$  y  $S_3$  las caras del cubo donde  $z = 1, y = 1$  y  $x = 1$  respectivamente y con  $S_4, S_5, S_6$  las caras del cubo donde  $z = 0, y = 0$  y  $x = 0$  respectivamente, entonces:



$$\iint_{S_1} x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy = \iint_{S_1} dx \wedge dy = \int_0^1 \int_0^1 1 dx dy = 1,$$

$$\iint_{S_2} x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy = \iint_{S_2} dz \wedge dx = \int_0^1 \int_0^1 1 dz dx = 1,$$

$$\iint_{S_3} x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy = \iint_{S_3} dy \wedge dz = \int_0^1 \int_0^1 1 dy dz = 1.$$

Las integrales sobre las caras  $S_4$ ,  $S_5$  y  $S_6$  son nulas. Basta verificar una de ellas por razones de simetría:

$$\iint_{S_4} x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy = \iint_{S_4} 0 dx \wedge dy = 0.$$

Finalmente tenemos que:

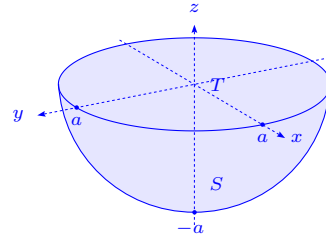
$$\oiint_S x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy = 1 + 1 + 1 + 0 + 0 + 0 = 3.$$

b) Observemos que en este caso  $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$

y que  $\eta = (x, y, z)\frac{1}{a}$ , tiene la componente  $z$  negativa,

$\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \frac{a}{z}$ , entonces:

$$\begin{aligned} \oiint_S x^2 y^2 z dx \wedge dy &= \oiint_S (0, 0, x^2 y^2 z) \cdot \eta dS = \iint_S x^2 y^2 \frac{z^2}{a} dS = \\ &= \iint_T x^2 y^2 \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^a \cos^2 \theta \sin^2 \theta r^4 \sqrt{a^2 - r^2} (r dr) \right) d\theta = \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 \theta - \cos^4 \theta) d\theta \frac{1}{2} \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2} (2r dr) (r^2)^2 = \\ &= \frac{1}{2} 4 \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{4}\right) a^7 \int_0^a \sqrt{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2} \left(\left(\frac{r}{a}\right)^2\right)^2 \frac{r}{a} \frac{dr}{a} = \\ &= \frac{1}{8} \pi a^7 \int_0^1 (1-u)^{\frac{1}{2}} u^2 du = \frac{1}{8} \pi a^7 \beta\left(\frac{3}{2}, 3\right) = \frac{\pi}{8} a^7 \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) 2}{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)} = \frac{\pi}{8} a^7 \frac{2\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\frac{7}{2} \frac{5}{2} \frac{3}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{2\pi}{105} a^7. \end{aligned}$$

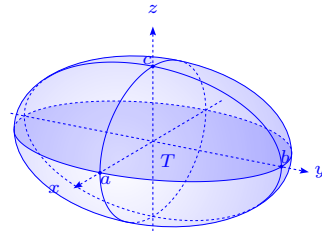


c) Se tiene que  $z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ , tiene normal  $\eta$ , con

componente  $z$  positiva y que  $z = -c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$  tiene

normal  $-\eta$ , por lo tanto si  $S_1$  es la parte superior de la superficie y  $S_2$  la parte inferior del elipsoide:

$$\oiint_S z dx \wedge dy = \oiint_S (0, 0, z) \cdot \eta dS = \iint_{S_1} (0, 0, z) \cdot \eta dS + \iint_{S_2} (0, 0, -z) \cdot (-\eta) dS =$$

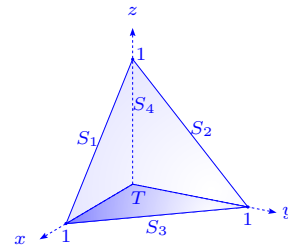


$$2 \iint_T c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy = 2c \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 \sqrt{1 - r^2} rab dr \right) d\theta = 4\pi abc \left( -\frac{1}{3} (1 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^1 = \frac{4}{3} \pi abc.$$

d) Observemos que la superficie  $S$  es tal que la componente  $z$  de la normal, es positiva en la parte superior del elipsoide  $S_1$  y negativa en la parte inferior  $S_2$  del mismo, por lo tanto:

$$\oiint_S z^2 dx \wedge dy = \iint_{S_1} (0, 0, z^2) \cdot \boldsymbol{\eta} dS + \iint_{S_2} (0, 0, z^2) \cdot (-\boldsymbol{\eta}) dS = \iint_T z^2 dx dy - \iint_T z^2 dx dy = 0.$$

e) Sean  $S_1, S_2, S_3 (= T)$  las caras de la pirámide sobre los planos  $y = 0, x = 0$  y  $z = 0$  respectivamente. Sea  $S_4$  la cara sobre el plano  $x + y + z = 1$ . Se tiene que las integrales sobre las caras  $S_i, i = 1, 2, 3$ , son nulas.



En efecto, calculamos la integral sobre  $S_1$ :

$$\iint_{S_1} xz dx \wedge dy + xy dy \wedge dz + yz dz \wedge dx = \iint_{S_1} xz dx \wedge 0 = 0.$$

Además, 
$$\iint_{S_4} xz dx \wedge dy + xy dy \wedge dz + yz dz \wedge dx = \iint_{S_4} (xz, xy, yz) \cdot \boldsymbol{\eta} \frac{(1, 1, 1)}{\sqrt{3}} dS =$$

$$\iint_T (xz + xy + yz) dx dy = \iint_T (x(1 - x - y) + xy + y(1 - x - y)) dx dy =$$

$$\iint_T (x - x^2 - xy + xy + y - xy - y^2) dx dy = \iint_T (x + y - xy - x^2 - y^2) dx dy =$$

$$\int_0^1 \left( \int_0^{1-x} (x + y - xy - x^2 - y^2) dy \right) dx = \int_0^1 \left( xy + \frac{y^2}{2} - \frac{xy^2}{2} - x^2y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^{1-x} dx =$$

$$\int_0^1 \frac{1}{6} (1 - x)(1 - 4x - 5x^2) dx = \left( \frac{5}{24} x^4 - \frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{6} x \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{8}.$$

Finalmente, 
$$\oiint_S xz dx \wedge dy + xy dy \wedge dz + yz dz \wedge dx = \frac{1}{8} + 0 + 0 + 0 = \frac{1}{8}.$$

Recordemos que 
$$\iint_S \varphi(x, y, z) dy \wedge dz = - \iint_T \varphi(x, y, f(x, y)) \frac{\partial f}{\partial x} dx dy,$$

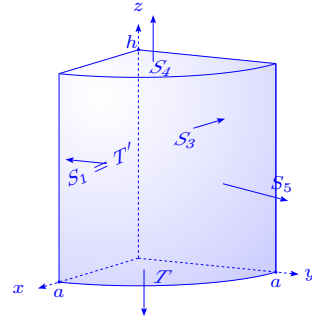
$$\iint_S \varphi(x, y, z) dz \wedge dx = - \iint_T \varphi(x, y, f(x, y)) \frac{\partial f}{\partial y} dx dy,$$

por lo que si  $f(x, y) = z = 1 - x - y$ :

$$\iint_{S_4} xz dx \wedge dy + xy dy \wedge dz + yz dz \wedge dx =$$

$\iint_T x(1-x-y) dx dy - \iint_T xy(-1) dx dy - \iint_T xy(1-x-y)(-1) dx dy$ , lo que nos lleva al mismo resultado. Ver ejercicio 83, página 196.

f) Sean  $S_1 = T'$ ,  $S_2 = T$  y  $S_3$  los lados de la superficie sobre los planos  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $x = 0$ . Sean  $S_4$  el lado de la superficie cuando  $z = h$  y  $S_5$  la superficie sobre el cilindro entre  $z = 0$ ,  $z = h$  de modo que  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ , entonces tenemos que la integral sobre  $S_1$ ,  $S_2$  y  $S_3$  valen 0. Verifiquemos por ejemplo para  $S_1$ :



$$\iint_{S_1} yz dx \wedge dy + xz dy \wedge dz + xy dz \wedge dx = \iint_{S_1} xz(0 \wedge dz) = 0.$$

$$\text{Sobre } S_4, \iint_{S_4} yz dx \wedge dy + xz dy \wedge dz + xy dz \wedge dx = \iint_{S_4} yz dx \wedge dy = \iint_T hy dx dy =$$

$$h \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a r \sin \theta r dr d\theta = h \cdot 1 \cdot \frac{a^3}{3} = \frac{1}{3} ha^3.$$

Sobre  $S_5$  tenemos  $x^2 + y^2 = a^2$ ,  $y(x, z) = \sqrt{a^2 - x^2}$ ,  $\sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ , por lo que

$\iint_{S_5} yz dx \wedge dy + xz dy \wedge dz + xy dz \wedge dx$  se escribe por separado así (ver ejercicio 83, página 196):

$$\iint_{S_5} yz dx \wedge dy = - \iint_{T'} yz \frac{\partial y}{\partial z} dx dz = - \iint_{T'} yz \cdot 0 \cdot dx dz = 0,$$

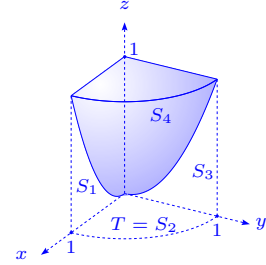
$$\iint_{S_5} xz dy \wedge dz = - \iint_{T'} xz \frac{\partial y}{\partial x} dx dz = - \iint_{T'} \frac{x^2 z}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx dz = \int_0^h z dz \int_0^a \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx =$$

$$\frac{h^2}{2} \cdot \left( -\frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2} a^2 \arcsen \frac{x}{a} \right) \Big|_0^a = \frac{h^2}{2} \cdot \frac{a^2 \pi}{2} = \frac{1}{8} \pi h^2 a^2.$$

$$\iint_{S_5} xy dz \wedge dx = \iint_{T'} x \sqrt{a^2 - x^2} dx dz = h \int_0^a x \sqrt{a^2 - x^2} dx = h \left( -\frac{1}{3} (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^a = \frac{1}{3} ha^3.$$

$$\text{Finalmente, } \oiint_S yz dx \wedge dy + xz dy \wedge dz + xy dz \wedge dx = \frac{2}{3} ha^3 + \frac{1}{8} \pi h^2 a^2 = a^2 h \left( \frac{2}{3} a + \frac{1}{8} \pi h \right).$$

g) Sean  $S_1, S_2 = T, S_3$  las caras de la figura adjunta, sobre el plano  $y = 0, z = 0, x = 0$  respectivamente. Sea  $S_4$  la superficie  $z = x^2 + y^2$  en el primer octante acotada por  $z = 1$  y sea  $S_5$  la superficie  $x^2 + y^2 = 1$  en el primer octante acotada por  $z = 1$ , entonces tenemos que la integral sobre  $S_1, S_2$  y  $S_3$  es nula. Verifiquemos el resultado para una de ellas. En efecto:



$$\iint_{S_1} y^2 z \, dx \wedge dy + xz \, dy \wedge dz + x^2 y \, dz \wedge dx = \iint_{S_1} xz \cdot 0 \wedge dz = 0.$$

Sobre  $S_4, z = x^2 + y^2$ , por lo que  $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \frac{\partial z}{\partial y} = 2y$ , entonces:

$$\begin{aligned} \iint_{S_4} x^2 z \, dx \wedge dy + xz \, dy \wedge dz + x^2 y \, dz \wedge dx = \\ \iint_T x^2(x^2 + y^2) \, dx \, dy - \iint_T 2x^2(x^2 + y^2) \, dx \, dy - \iint_T 2x^2 y^2 \, dx \, dy = \\ \iint_T (-x^4 - 3x^2 y^2) \, dx \, dy = \int_0^1 \left( \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^4 - 3x^2 y^2) \, dy \right) dx = \end{aligned}$$

$$- \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} \, dx = - \left( -\frac{1}{4} x(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{8} x \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{8} \arcsen x \right) \Big|_0^1 = -\frac{\pi}{16}.$$

Sobre  $S_5, x^2 + y^2 = 1$ , i.e.  $y(x, z) = \sqrt{1-x^2}$  sobre  $R = [0, 1] \times [0, 1]$ , con lo cual tenemos  $y_x = -\frac{x}{y}, y_z = 0, \boldsymbol{\eta} = (x, y, 0), \sqrt{1+y_x^2+y_z^2} = \frac{1}{y}$ , o sea:

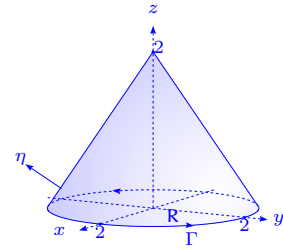
$$\begin{aligned} \iint_{S_5} x^2 z \, dx \wedge dy + xz \, dy \wedge dz + x^2 y \, dz \wedge dx = \\ - \iint_R x^2 z \frac{\partial y}{\partial z} \, dx \, dz - \iint_R xz \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \, dz + \iint_R x^2 \sqrt{1-x^2} \, dx \, dz = \\ 0 + \int_0^1 z \, dz \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx + \int_0^1 dz \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} \, dx = \\ \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsen x \right) \Big|_0^1 + 1 \cdot \left( -\frac{1}{4} x(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{8} x \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{8} \arcsen x \right) \Big|_0^1 = \\ \frac{1}{4} \frac{\pi}{2} + \frac{1}{8} \frac{\pi}{2} = \frac{3}{16} \pi, \end{aligned}$$

$$\text{Finalmente, } \oiint_S x^2 z \, dx \wedge dy + xz \, dy \wedge dz + x^2 y \, dz \wedge dx = -\frac{1}{16} \pi + \frac{3}{16} \pi = \frac{\pi}{8}.$$

### 3.6 Fórmula de Stokes

88. Usando el teorema de Stokes, evaluar  $\iint_S \text{rot } \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS$ , donde  $\mathbf{f} = (x - z, x^3 + yz, -3xy^2)$  y  $S$  es la superficie del cono  $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$  sobre el plano  $xy$  y  $\boldsymbol{\eta}$  es la normal unitaria exterior a  $S$ .

**Solución** La frontera de este cono es un círculo  $x^2 + y^2 = 4$ , recorrido en el sentido positivo, entonces  $\iint_S \text{rot } \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS = \oint_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$ . Parametrizando  $\Gamma$  se tiene que  $\mathbf{r}(\theta) = (2 \cos \theta, 2 \sin \theta, 0)$ , entonces  $\mathbf{f} = (2 \cos \theta, 8 \cos^3 \theta, -24 \cos \theta \sin^2 \theta)$ ,  $d\mathbf{r} = (-2 \sin \theta, 2 \cos \theta, 0) d\theta$  y tenemos:



$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} (2 \cos \theta, 8 \cos^3 \theta, -24 \cos \theta \sin^2 \theta) \cdot (-2 \sin \theta, 2 \cos \theta, 0) d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} (-4 \sin \theta \cos \theta + 16 \cos^4 \theta) d\theta = 16 \int_0^{2\pi} \cos^4 \theta d\theta = 16 \cdot 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta = 16 \cdot 4 \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{\pi}{2} = 12\pi. \end{aligned}$$

89. Verificar el teorema de Stokes para el campo vectorial  $\mathbf{f} = (3y, -xz, yz^2)$ , donde  $S$  es la superficie del paraboloides  $2z = x^2 + y^2$ , limitado por  $z = 2$ .

**Solución**  $\text{rot } \mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3y & -xz & yz^2 \end{vmatrix} = (z^2 + x, 0, -z - 3),$

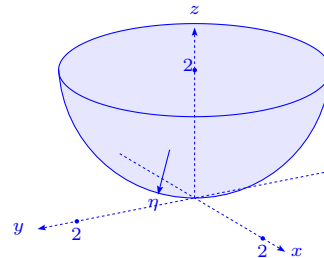
$$\boldsymbol{\eta} = -\frac{(-2x, -2y, 2)}{2\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} = \frac{(x, y, -1)}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}, \quad \Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, \frac{r^2}{2}) \implies$$

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{(-r \cos \theta, -r \sin \theta, 1)}{\sqrt{r^2 + 1}}, \quad (r, \theta) \in D = [0, 2] \times [0, 2\pi],$$

$$\text{rot } \mathbf{f} = \left( \frac{r^4}{4} + r \cos \theta, 0, -\frac{r^2}{2} - 3 \right),$$

$$\text{rot } \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} = \frac{\frac{r^5}{4} \cos \theta + r^2 \cos^2 \theta + \frac{r^2}{2} + 3}{\sqrt{r^2 + 1}},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos \theta & \sin \theta & r \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = (-r^2 \cos \theta, -r^2 \sin \theta, r) \implies dS = r\sqrt{r^2 + 1} dr d\theta$$



$$\begin{aligned} \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS &= - \int_0^2 \int_0^{2\pi} \left( \cos \theta \frac{r^5}{4} + r^2 \cos^2 \theta + \frac{r^2}{2} + 3 \right) r \frac{\sqrt{r^2+1}}{\sqrt{r^2+1}} \, dr \, d\theta = \\ &= 0 - \int_0^2 r^3 \, dr \cdot 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \, d\theta - 2\pi \int_0^2 \left( \frac{r^2}{2} + 3 \right) r \, dr = -\pi \frac{r^4}{4} \Big|_0^2 - 2\pi \left( \frac{r^4}{8} + 3 \frac{r^2}{2} \right) \Big|_0^2 = \\ &= -4\pi - 2\pi(2+6) = -20\pi. \end{aligned}$$

Por otro lado,  $\mathbf{r}(\theta) = (2 \cos \theta, 2 \sin \theta, 2) \implies \mathbf{r}'(\theta) = (-2 \sin \theta, 2 \cos \theta, 0)$  y como el campo vectorial  $\mathbf{f} = (6 \sin \theta, -4 \cos \theta, 8 \sin \theta)$ , se tiene que:

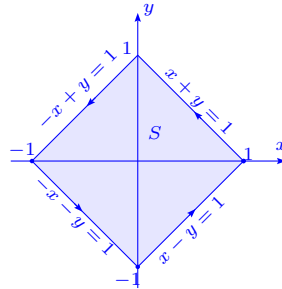
$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} (6 \sin \theta, -4 \cos \theta, 8 \sin \theta) \cdot (-2 \sin \theta, 2 \cos \theta, 0) \, d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} (-12 \sin^2 \theta - 8 \cos^2 \theta) \, d\theta = - \int_0^{2\pi} (4 \sin^2 \theta + 8(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)) \, d\theta = \\ &= - \int_0^{2\pi} 4 \sin^2 \theta \, d\theta - 8 \int_0^{2\pi} d\theta = -16 \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} - 16\pi = -20\pi. \end{aligned}$$

$$\text{Luego } \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS = \oint_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}.$$

90. Usando el teorema de Stokes en el plano, calcular  $\oint_{\Gamma} \frac{dx - dy}{x + y + 2}$ , tomada a lo largo del contorno del cuadrado que tiene sus vértices en los puntos  $A(1, 0)$ ,  $B(0, 1)$ ,  $C(-1, 0)$  y  $D(0, -1)$ , recorrido en sentido contrario de las manecillas del reloj.

**Solución** Como  $\oint_{\Gamma} \frac{dx - dy}{x + y + 2} = \oint_{\Gamma} \frac{dx}{x + y + 2} - \frac{dy}{x + y + 2}$ , sea  $\mathbf{f} = \left( \frac{1}{x + y + 2}, -\frac{1}{x + y + 2}, 0 \right)$ ,  $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, 0)$ , en-

$$\text{tonces } \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 1), \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right\| = 1.$$



$$\text{Por otro lado, } \operatorname{rot} \mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{x+y+2} & \frac{-1}{x+y+2} & 0 \end{vmatrix} = \left( 0, 0, \frac{2}{(x+y+2)^2} \right) \implies$$

$$\oint_{\Gamma} \frac{dx - dy}{x + y + 2} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS = \iint_S \left( 0, 0, \frac{2}{(x+y+2)^2} \right) \cdot (0, 0, 1) \, dy \, dx =$$

$$2 \iint_S \frac{2}{(x+y+2)^2} \, dy \, dx = 2 \left( \int_{-1}^0 \int_{-x-1}^{1+x} \frac{1}{(x+y+2)^2} \, dy \, dx + \int_0^1 \int_{x-1}^{1-x} \frac{1}{(x+y+2)^2} \, dy \, dx \right) =$$

$$2 \left[ \int_{-1}^0 \left[ -\frac{1}{(x+y+2)^2} \right]_{y=-x-1}^{y=x+1} dx + \int_0^1 \left[ \frac{1}{(x+y+2)^2} \right]_{y=x-1}^{y=-x+1} dx \right] =$$

$$2 \left[ \int_{-1}^0 \left( -\frac{1}{2x+3} + \frac{1}{1} \right) dx + \int_0^1 \left( -\frac{1}{3} + \frac{1}{2x+1} \right) dx \right] = 2 \left( 1 - \frac{1}{2} \log 3 + \frac{1}{2} \log 3 - \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3}.$$

91. Usar el Teorema de Stokes para verificar que las integrales de línea tienen los valores indicados. Explicar el sentido en el que se recorre  $\Gamma$  para llegar al resultado.

a)  $\oint_{\Gamma} y dx + z dy + x dz = \pi a^2 \sqrt{3}$ ,  $\Gamma$  es la curva intersección de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  y el plano  $x + y + z = 0$ .

b)  $\oint_{\Gamma} (y+z) dx + (z+x) dy + (x+y) dz = 0$ ,  $\Gamma$  es la curva intersección del cilindro  $x^2 + y^2 = 2y$  y el plano  $z = y$ .

c)  $\oint_{\Gamma} y^2 dx + xy dy + xz dz = 0$ ,  $\Gamma$  es la curva de b).

d)  $\oint_{\Gamma} (y-z) dx + (z-x) dy + (x-y) dz = 2\pi a(a+b)$ ,  $\Gamma$  es la curva de intersección del cilindro  $x^2 + y^2 = a^2$  y el plano  $\frac{x}{a} + \frac{z}{b} = 1$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$ .

e)  $\oint_{\Gamma} (y^2 + z^2) dx + (x^2 + z^2) dy + (x^2 + y^2) dz = 2\pi ab^2$ ,  $\Gamma$  es la curva de intersección del hemisferio  $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$ ,  $z > 0$  y el cilindro  $x^2 + y^2 = 2bx$ ,  $0 < b < a$ .

f)  $\oint_{\Gamma} (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz = \frac{9}{2}a^3$ ,  $\Gamma$  es la curva de intersección del cubo  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq a$ ,  $0 \leq z \leq a$  y el plano  $x + y + z = \frac{3}{2}a$ .

### Solución

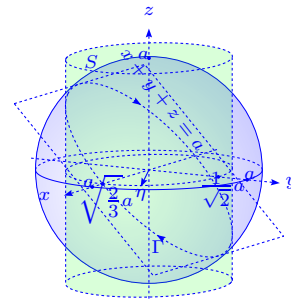
a) Sea  $\mathbf{f} = (y, z, x)$ ,  $\text{rot } \mathbf{f} = (-1, -1, -1)$  y tomemos  $\boldsymbol{\eta} =$

$\frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, -1)$  de modo que el sentido de  $\Gamma$  sea el que

aparece en la gráfica, entonces

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} dS = \iint_S \sqrt{3} dS = \sqrt{3} \text{Área}(S) = \sqrt{3} \pi a^2,$$

ya que la intersección  $S$  es un círculo de radio  $a$ .



Realizando el cambio de variable  $u = x + y$ ,  $v = x - y$ , en las ecuaciones originales,

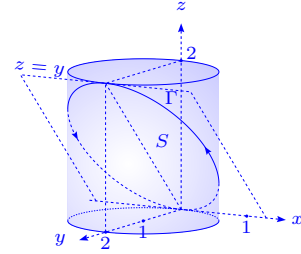
obtenemos el cilindro  $\frac{3}{2}u^2 + \frac{1}{2}v^2 = a^2$ , que aparece en la figura.

b) Sea  $\mathbf{f} = (y + z, z + x, x + y)$ ,  $\text{rot } \mathbf{f} = \mathbf{0}$ ,  $\boldsymbol{\eta} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1)$ ,

entonces:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS = \iint_S 0 \, dS = 0.$$

Aquí no interesa mucho la orientación de la curva  $\Gamma$ , pues para cualquier orientación  $\oint_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0$ .



c) Sea  $\mathbf{f} = (y^2, xy, xz)$ ,  $\text{rot } \mathbf{f} = (0, -z, -y)$ ,  $\boldsymbol{\eta} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1)$ , por lo que:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \frac{z-y}{\sqrt{2}} \, dS = \iint_S 0 \, dS = 0.$$

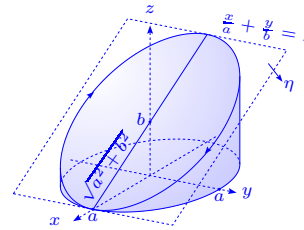
d) Sea  $\mathbf{f} = (y-z, z-x, x-y)$ ,  $\text{rot } \mathbf{f} = -2(1, 1, 1)$ ,  $\frac{z}{b} + \frac{x}{a} = 1$ ,

es decir tomamos  $\boldsymbol{\eta} = \frac{(-\frac{1}{a}, 0, -\frac{1}{b})}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} = -\frac{(b, 0, a)}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  para

tener la orientación de  $\Gamma$  que se muestra en el gráfico.

Así se tiene:  $\oint_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS = \iint_S \frac{2(a+b)}{\sqrt{a^2 + b^2}} \, dS =$

$\frac{2(a+b)}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{Área}(S) = \frac{2(a+b)}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} a\pi = 2a(a+b)\pi$ , ya que la superficie  $S$  es una elipse de eje mayor  $2\sqrt{a^2 + b^2}$  y eje menor  $2a$ .



e) Sea  $\mathbf{f} = (y^2 + z^2, x^2 + z^2, x^2 + y^2)$ ,  $\text{rot } \mathbf{f} = 2(y-z, z-x, x-y)$ .

Se tiene que la superficie intersección es  $z^2 + 2bx = 2ax$ , o sea

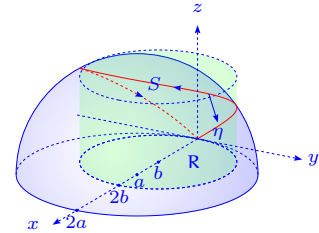
$z^2 = 2(a-b)x$  recortada por el cilindro  $x^2 + y^2 = 2bx$ .

Para simplificar llamemos  $\alpha = a - b$ , entonces  $z^2 = 2\alpha x$  i.e.

$z^2 - 2\alpha x = 0$ , por lo que escogemos  $\boldsymbol{\eta} = \frac{(-\alpha, 0, -z)}{\sqrt{\alpha^2 + z^2}}$ , para tener la orientación de  $\Gamma$  en la gráfica,  $z_x = \sqrt{\frac{\alpha}{2x}}$ ,  $z_y = 0$ ,  $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{\frac{2x + \alpha}{2x}}$ . De esta manera tenemos que:

$$\text{rot } \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} = \frac{-2(y-z)\alpha + 2(x-y)z}{\sqrt{\alpha^2 + z^2}} = \frac{-2(y - \sqrt{2\alpha x})\alpha + 2(x-y)\sqrt{2\alpha x}}{\sqrt{\alpha}\sqrt{\alpha + 2x}},$$

esto evaluando este producto en la parametrización de la superficie  $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, \sqrt{2\alpha x})$ .



De esta manera tenemos que:

$$\begin{aligned}
 \oint_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS = \iint_R \operatorname{rot} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \, dx \, dy \\
 &= \iint_R \left( \frac{-2\alpha(y - \sqrt{2\alpha x})}{\sqrt{2\alpha x}} + 2(x - y) \right) dx \, dy \\
 &= \int_0^{2b} \left( \int_{-\sqrt{2bx-x^2}}^{\sqrt{2bx-x^2}} -2\alpha \frac{(y - \sqrt{2\alpha x})}{\sqrt{2\alpha x}} + 2(x - y) \, dy \right) dx \\
 &= \int_0^{2b} 4(x + \alpha)\sqrt{2bx - x^2} \, dx = 4 \int_0^{2b} (x - b + b + \alpha)\sqrt{b^2 - (x - b)^2} \, dx \\
 &= 4 \left( -\frac{1}{3}(b^2 - (x - b)^2)^{\frac{3}{2}} + (b + \alpha)(x - b) \frac{\sqrt{b^2 - (x - b)^2}}{2} + (b + \alpha) \frac{b^2}{2} \arcsen \frac{x - b}{b} \right) \Big|_0^{2b} \\
 &= 4 \left( 0 + 0 + a \frac{b^2}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right) \right) = 2\pi ab^2,
 \end{aligned}$$

ya que  $b + \alpha = a$ .

f) Tomemos  $\mathbf{f} = (y^2 - z^2, z^2 - x^2, x^2 - y^2)$ ,  $\operatorname{rot} \mathbf{f} = -2(y + z, z + x, x + y)$ . La superficie que tomamos es  $x + y + z = \frac{3}{2}a$  y consideremos  $\boldsymbol{\eta} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, -1)$  para que la curva se oriente como en la figura adjunta. Así se tiene que:

$$\operatorname{rot} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} = \frac{2}{\sqrt{3}}(2x + 2y + 2z) = \frac{2}{\sqrt{3}}3a = 2\sqrt{3}a, \text{ entonces:}$$

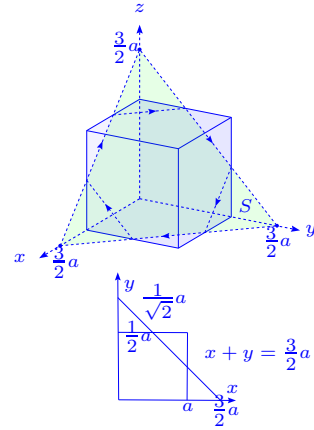
$$\oint_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S 2\sqrt{3}a \, dS = 2\sqrt{3}a \text{Área}(S).$$

El área de  $S$  es el área del triángulo equilátero de lado  $\frac{3}{\sqrt{2}}a$ , menos tres veces el área del triángulo equilátero  $\frac{1}{\sqrt{2}}a$ . Pero el área de un triángulo equilátero de lado  $\ell$  es  $\frac{\sqrt{3}}{4}\ell^2$ , entonces:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 2\sqrt{3}a \left( \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{9}{2} a^2 - 3 \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{a^2}{2} \right) = \frac{6\sqrt{3}}{8} a^2 \cdot 2\sqrt{3}a = \frac{9}{2} a^3.$$

92. Si  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ,  $\mathbf{f} = (P, Q, R) = \mathbf{a} \times \mathbf{r}$ , donde  $\mathbf{a}$  es un vector constante, demostrar que  $\oint_{\Gamma} P \, dx + Q \, dy + R \, dz = 2 \iint_S \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS$ ,  $\Gamma$  es una curva que limita la superficie paramétrica  $S$  y  $\boldsymbol{\eta}$  es la normal adecuada de  $S$ .

**Solución** Este resultado es típico del Teorema de Stokes. En efecto, con las hipótesis



dadas  $\oint_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} dS.$

Calculemos  $\mathbf{f} = \mathbf{a} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (a_2z - a_3y, a_3x - a_1z, a_1y - a_2x),$  entonces

$\text{rot } \mathbf{f} = (2a_1, 2a_2, 2a_3) = 2\mathbf{a},$  es decir:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S 2\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\eta} dS = 2 \iint_S \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\eta} dS.$$

93. Sea  $\mathbf{f} = (P, Q, R),$  donde  $P = -\frac{y}{x^2 + y^2}, Q = \frac{x}{x^2 + y^2}, R = z.$  Sea  $D$  el toro generado por la rotación de la circunferencia  $(x - 2)^2 + z^2 = 1, y = 0,$  alrededor de eje  $z.$  Demostrar que  $\text{rot } \mathbf{f} = \mathbf{0},$  pero que  $\oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz$  no es cero, si la curva  $\Gamma$  es la circunferencia  $x^2 + y^2 = 4, z = 0.$

**Solución** Calculando el rotacional tenemos:

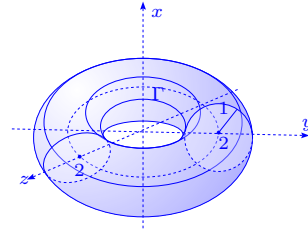
$$\text{rot } \mathbf{f} = \left(0, 0, \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2}\right) = (0, 0, 0),$$

si  $(x, y, z) \neq (0, 0, z).$

Por otro lado; parametricemos la curva  $\Gamma$  por  $x = 2 \cos \theta,$

$y = 2 \sin \theta, z = 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi,$  entonces:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz &= \oint_{\Gamma} P dx + Q dy = \int_0^{2\pi} \left( \frac{-2 \sin \theta}{4} (-2 \sin \theta) + \frac{2 \cos \theta}{4} 2 \cos \theta \right) d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi. \end{aligned}$$



En este caso el Teorema de Stokes no se puede aplicar, pues  $P$  y  $Q$  no son de clase  $C^1$  en la región  $R$  (círculo de radio 2) cuya frontera es  $\Gamma.$

94. Usando el teorema de Stokes, transformar las integrales:

a)  $\oint_{\Gamma} (x^2 - yz) dx + (y^2 + zx) dy + (z^2 - xy) dz.$

b)  $\oint_{\Gamma} y dx + z dy + x dz.$

**Solución** En estos ejercicios necesitamos la fórmula:

$$\oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz = \iint_S \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cdot \boldsymbol{\eta} dS,$$

donde  $P, Q, R$  son funciones de clase  $C^1$ ,  $\Gamma$  es una curva cerrada que limita la superficie  $S$  y  $\eta$  es un vector normal a la superficie en el punto  $(x, y, z)$ .

**Solución**

$$\text{a) } \oint_{\Gamma} (x^2 - yz) dx + (y^2 - zx) dy + (z - xy) dz = \iint_S \mathbf{0} \cdot \boldsymbol{\eta} dS = 0.$$

$$\text{b) } \oint_{\Gamma} y dx + z dy + x dz = \iint_S (-1, -1, -1) \cdot \boldsymbol{\eta} dS = - \iint_S (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) dS, \text{ donde}$$

$\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  son los cosenos directores de la normal  $\boldsymbol{\eta}$  a la superficie  $S$  i.e.  $\boldsymbol{\eta} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ .

95. Usando la fórmula de Stokes calcular las integrales de línea y comprobar el resultado calculándolas directamente.

$$\text{a) } \oint_{\Gamma} (y+z) dx + (z+x) dy + (x+y) dz, \Gamma \text{ es la circunferencia } x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x+y+z=0.$$

$$\text{b) } \oint_{\Gamma} (y-z) dx + (z-x) dy + (x-y) dz, \Gamma \text{ es la elipse } x^2 + y^2 = 1, x+z=1.$$

$$\text{c) } \oint_{\Gamma} x dx + (x+y) dy + (x+y+z) dz, \Gamma \text{ es la curva } x = a \sin t, y = a \cos t, z = a(\sin t + \cos t),$$

$$0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$\text{d) } \oint_{\Gamma} y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz, \text{ donde } \Gamma \text{ es el borde del triángulo } ABC \text{ con los vértices en los puntos } A(a, 0, 0), B(0, a, 0), C(0, 0, a).$$

**Solución**

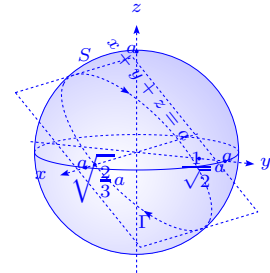
$$\text{a) } \oint_{\Gamma} (y+z) dx + (z+x) dy + (x+y) dz = \iint_S (1-1, 1-1, 1-1) \cdot \boldsymbol{\eta} dS = 0.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} (y+z) dx + (z+x) dy + (x+y) dz &= - \oint_{\Gamma} x dx + y dy + z dz = \\ &= - \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} d\varphi = 0, \text{ donde } \varphi = x^2 + y^2 + z^2. \end{aligned}$$

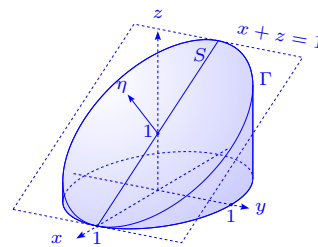
$$\text{b) } \oint_{\Gamma} (y-z) dx + (z-x) dy + (x-y) dz = \iint_S (-1-1, -1-1, -1-1) \cdot \boldsymbol{\eta} dS =$$

$$-2 \iint_S (1, 1, 1) \cdot (1, 0, 1) \frac{1}{\sqrt{2}} dS = - \frac{4}{\sqrt{2}} |S| = - \frac{4}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2}(1)\pi = -4\pi,$$



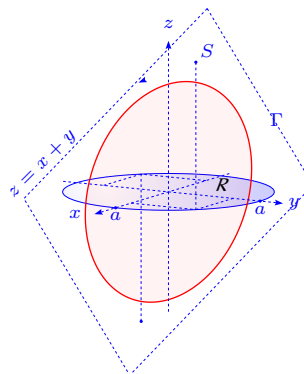
ya que el vector normal a la superficie  $S$  es normal al plano  $x + z = 1$  y el área de la elipse de eje mayor  $2\sqrt{2}$  y eje menor 2 es  $\sqrt{2} \cdot 1 \cdot \pi = \sqrt{2}\pi$ .

Además usando la parametrización para  $\Gamma : x = \cos \theta, y = \sin \theta, z = 1 - x = 1 - \cos \theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi$  se tiene que:



$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz &= \\ \int_0^{2\pi} [(\sin \theta - \cos \theta)(-\sin \theta) + (1 - 2 \cos \theta) \cos \theta + (\cos \theta - \sin \theta) \sin \theta] d\theta &= \\ \int_0^{2\pi} (\cos \theta \sin \theta - \sin^2 \theta + \cos \theta - 2 \cos^2 \theta + \sin \theta \cos \theta - \sin^2 \theta) d\theta &= \\ \int_0^{2\pi} (\cos \theta + 2 \cos \theta \sin \theta - 2) d\theta = 0 + 0 - 4\pi = -4\pi. \end{aligned}$$

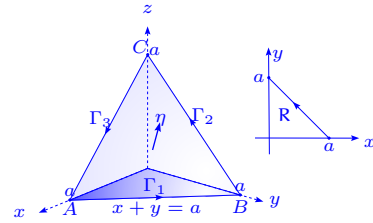
c)  $\oint_{\Gamma} x dx + (x + y) dy + (x + y + z) dz = \iint_S (1, -1, 1) \cdot \mathbf{n} dS =$   
 $\iint_S (1, -1, 1) \cdot \frac{(1, 1, -1)}{\sqrt{3}} dS = -\frac{1}{\sqrt{3}} \iint_R \sqrt{3} dx dy = -|R| =$   
 $-\pi a^2$ , ya que la curva  $\Gamma (a \sin t, a \cos t, a(\sin t + \cos t))$  está en el plano  $z = x + y$ , i.e. el vector normal a la superficie es  $\frac{(1, 1, -1)}{\sqrt{3}}$ .



De esta manera vemos que la curva  $\Gamma$  es una elipse, proyección del círculo  $(a \sin t, a \cos t, 0)$  sobre el plano  $z = x + y$ . Además:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} x dx + (x + y) dy + (x + y + z) dz &= \\ \int_0^{2\pi} a^2 (\sin t \cos t + (\sin t + \cos t)(-\sin t) + 2(\sin t + \cos t)(\cos t - \sin t)) dt &= \\ a^2 \int_0^{2\pi} (\cancel{\sin t \cos t} - \sin^2 t - \cancel{\sin t \cos t} + 2 \cos^2 t - 2 \sin^2 t) dt &= \\ 2a^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt - 3a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt &= \\ -a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = -a^2 4 \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} = -\pi a^2, \text{ ya que } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt. \end{aligned}$$

d)  $\oint_{\Gamma} y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz = \int_{\Gamma_1} y^2 dx + \int_{\Gamma_2} z^2 dy + \int_{\Gamma_3} x^2 dz =$   
 $3 \int_{\Gamma_1} y^2 dx = 3 \int_a^0 (a-x)^2 dx = (a-x^3) \Big|_0^a = -a^3$ , ya que por  
razones de simetría  $\int_{\Gamma_1} y^2 dx = \int_{\Gamma_2} z^2 dy = \int_{\Gamma_3} x^2 dz$  y puesto  
que  $\int_{\Gamma_1} y^2 dx = \int_a^0 (a-x)^2 dx$ , ya que sobre  $\Gamma_1$ ,  $x+y=a$ , o  
sea  $y = a-x$ , con  $0 \leq x \leq a$ . Por otro lado:



$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz &= \iint_S (-2z, -2x, -2y) \cdot \eta dS = -2 \iint_S (z, x, y) \cdot \frac{(1, 1, 1)}{\sqrt{3}} dS = \\ &= -\frac{2}{\sqrt{3}} \iint_S (x+y+z) dS = -\frac{2}{\sqrt{3}} \iint_S a dS = -\frac{2a}{\sqrt{3}} \iint_R \sqrt{3} dx dy = -2a|R| = -2a \frac{a^2}{2} = -a^3. \end{aligned}$$

96. ¿Cuáles son las condiciones que se deben dar para que la integral de línea  $\oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz = 0$ , para cualquier curva cerrada  $\Gamma$ ?

**Solución** Por el teorema de Stokes tenemos que si  $P, Q, R$  son de clase  $C^1$  sobre la superficie  $S$  regular, cuya frontera es  $\Gamma$  una curva de Jordan regular a trozos, entonces:

$$\oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz = \iint_S \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cdot \eta dS = 0,$$

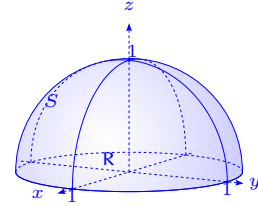
donde  $\eta$  es el vector normal a la superficie  $S$  en el punto  $(x, y, z)$ , por lo que si se da para toda superficie  $S$ , debemos tener que  $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \forall (x, y, z) \in S$ .

97. En los siguientes ejercicios calcular y transformar la integral de superficie  $\iint_S \text{rot } \mathbf{f} \cdot \eta dS$ , en una integral de línea usando el teorema de Stokes y calcular la integral de línea.
- $\mathbf{f}(x, y, z) = (y^2, xy, z)$ ,  $S$  es el hemisferio  $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$  y  $\eta$  es la normal unitaria con componente  $z$  no negativa.
  - $\mathbf{f}(x, y, z) = (y, z, x)$ ,  $S$  es la parte de la paraboloides  $z = 1 - x^2 - y^2$ , con  $z \geq 0$  y  $\eta$  es la normal unitaria con componente  $z$  no negativa.
  - $\mathbf{f}(x, y, z) = (y-x, yz, -xz)$ ,  $S$  consta de cinco caras del cubo  $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 2$ , no situadas en el plano  $xy$ ,  $\eta$  es la normal unitaria exterior.
  - $\mathbf{f}(x, y, z) = (xz, -y, x^2y)$ ,  $S$  consta de las tres caras no situadas en el plano  $xz$  del tetrae-

dro limitado por los tres planos coordenados y el plano  $3x + y + 3z = 6$ . La normal  $\eta$  es la normal exterior del tetraedro.

**Solución** Recordemos que si  $\mathbf{f} = (P, Q, R)$ ,  $\text{rot } \mathbf{f} = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$ .

a) En este caso  $\text{rot } \mathbf{f} = (0, -z, -y)$  y la superficie  $S$  se da por  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ , con  $x^2 + y^2 \leq 1$ ,  $z_x = -\frac{x}{z}$ ,  $z_y = -\frac{y}{z}$ ,  $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \frac{1}{z}$ ,  $\eta = (x, y, z)$ ,  $\text{rot } \mathbf{f} \cdot \eta = -2yz$ , entonces:

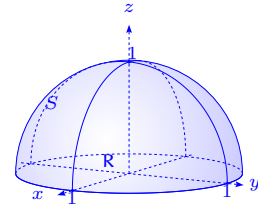


$$\iint_S \text{rot } \mathbf{f} \cdot \eta \, dS = -2 \iint_S yz \, dS = -2 \iint_R y \, dx \, dy = -2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \, dr \, d\theta = 0.$$

Por otro lado,  $\iint_S \text{rot } \mathbf{f} \cdot \eta \, dS = \oint_{\Gamma} y^2 dx + xy dy + z dz = \oint_{\Gamma} y^2 dx + xy dy$ , donde  $\Gamma$  es el círculo  $x^2 + y^2 = 1$ . Así, si  $x = \cos \theta$ ,  $y = \sin \theta$ ,  $dx = -\sin \theta \, d\theta$ ,  $dy = \cos \theta \, d\theta$  y tenemos:

$$\oint_{\Gamma} y^2 dx + xy dy = \int_0^{2\pi} (-\sin^3 \theta + \sin \theta \cos^2 \theta) d\theta = -0 + 0 = 0.$$

b) Aquí tenemos que  $\mathbf{f} = (y, z, x)$  y  $\text{rot } \mathbf{f} = (-1, -1, -1)$ . La superficie  $S$  se escribe  $z = 1 - x^2 - y^2$ , con  $x^2 + y^2 \leq 1$ , por lo que  $z_x = -2x$ ,  $z_y = -2y$ ,  $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}$ ,  $\eta = \frac{(2x, 2y, 1)}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}$ , entonces:



$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot } \mathbf{f} \cdot \eta \, dS &= - \iint_S \frac{2x + 2y + 1}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} \, dS = - \iint_R (2x + 2y + 1) \, dx \, dy \\ &= - \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 (2r \cos \theta + 2r \sin \theta + 1) r \, dr \right) d\theta \\ &= 0 + 0 - 2\pi \int_0^1 r \, dr = 0 + 0 - \pi = -\pi. \end{aligned}$$

Además,  $\iint_S \text{rot } \mathbf{f} \cdot \eta \, dS = \oint_{\Gamma} y dx + z dy + x dz$ , donde  $\Gamma$  es el círculo  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = 0$ .

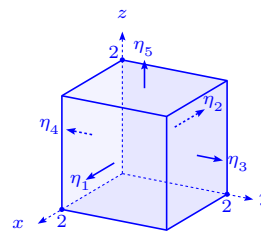
Si  $x = \cos \theta$ ,  $y = \sin \theta$ , tenemos que:

$$\oint_{\Gamma} y dx + z dy + x dz = \oint_{\Gamma} y dx = - \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \, d\theta = -4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \, d\theta = -4 \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} = -\pi.$$

c) Sea  $\mathbf{f} = (y - x, yx, -xz)$ , entonces  $\text{rot } \mathbf{f} = (-y, z - 1, -1)$ .

En este caso tenemos que  $S$  es la superficie formada por cinco superficies:

$S_1$  la cara del cubo cuando  $x = 2$ ;  $\boldsymbol{\eta}_1 = (1, 0, 0)$  vector normal a la superficie  $S_1$ , entonces



$$x_y = x_z = 0 \implies \sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2} = 1, \quad 0 \leq y \leq 2, \quad 0 \leq z \leq 2.$$

Así tenemos:

$$\iint_{S_1} \text{rot } \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta}_1 dS = \iint_{S_1} -y dS = \int_0^2 \int_0^2 -y dy dz = -2 \frac{y^2}{2} \Big|_0^2 = -4.$$

$S_2$  la cara del cubo cuando  $x = 0$ ,  $\boldsymbol{\eta}_2 = (-1, 0, 0)$  vector normal a  $S_2$ ,  $\sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2} = 1$ ,  $0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 2$ , entonces:

$$\iint_{S_2} \text{rot } \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta}_2 dS = \iint_{S_2} y dS = \int_0^2 \left( \int_0^2 y dy \right) dz = 2 \frac{y^2}{2} \Big|_0^2 = 4.$$

$S_3$  la cara del cubo cuando  $y = 2$ ,  $\boldsymbol{\eta}_3 = (0, 1, 0)$  vector normal a  $S_3$ , entonces  $y_x = y_z = 0 \implies \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} = 1, 0 \leq x \leq 2, 0 \leq z \leq 2$ . Así se tiene que:

$$\iint_{S_3} \text{rot } \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta}_3 dS = \iint_{S_3} (z - 1) dS = \int_0^2 \left( \int_0^2 (z - 1) dx \right) dz = 2 \left( \frac{z^2}{2} - z \right) \Big|_0^2 = 0.$$

$S_4$  la cara del cubo cuando  $y = 0$ ,  $\boldsymbol{\eta}_4 = (0, -1, 0)$  vector normal a  $S_4$ , entonces  $x_y = x_z = 0 \implies \sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2} = 1, 0 \leq x \leq 2, 0 \leq z \leq 2$ , es decir:

$$\iint_{S_4} \text{rot } \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta}_4 dS = - \iint_{S_4} (z - 1) dS = - \int_0^2 \left( \int_0^2 (z - 1) dx \right) dz = 0.$$

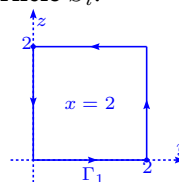
$S_5$  la cara del cubo cuando  $z = 2$ ,  $\boldsymbol{\eta}_5 = (0, 0, 1)$  vector normal a  $S_5$ , entonces  $z_x = z_y = 0 \implies \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = 1, 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$ . Así tenemos que:

$$\iint_{S_5} \text{rot } \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta}_5 dS = \iint_{S_5} -1 dS = -|S_5| = -4.$$

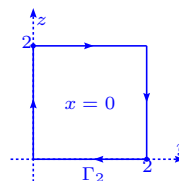
Finalmente  $\iint_S \text{rot } \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} dS = -4 + 4 + 0 + 0 - 4 = -4$ .

Consideremos ahora  $\Gamma_i$  la frontera orientada de la superficie  $S_i$  orientada. Cada integral de línea la calculamos siguiendo la trayectoria  $\Gamma_i$  saliendo de  $(0,0)$ . Cada trayectoria  $\Gamma_i$  tiene una orientación que es coherente con la orientación de la superficie  $S_i$ .

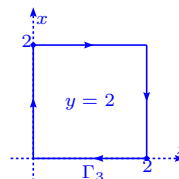
$$\begin{aligned} - \text{ Cuando } x = 2 \text{ tenemos: } \oint_{\Gamma_1} (y-z)dx + yzdz - xzdz &= \int_{\Gamma_1} yzdy - \\ 2zdz &= \int_0^2 0 \cdot ydy + \int_0^2 -2zdz + \int_2^0 2ydy + \int_2^0 -2zdz = 0 - 4 - \\ &4 + 4 = -4. \end{aligned}$$



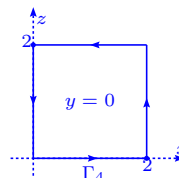
$$\begin{aligned} - \text{ Cuando } x = 0: \oint_{\Gamma_2} (y-z)dx + yzdy - xzdz &= \int_{\Gamma_2} yzdy = \\ 0 + \int_0^2 2ydy + 0 + \int_2^0 0ydy &= 4. \end{aligned}$$



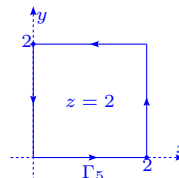
$$\begin{aligned} - \text{ Cuando } y = 2: \oint_{\Gamma_3} (y-z)dz + yzdy - xzdz &= 0 + \int_0^2 (2-2)dx + \\ \int_2^0 -2zdz + \int_2^0 2dx &= -4 + 4 = 0. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} - \text{ Cuando } y = 0: \oint_{\Gamma_4} (y-z)dz + yzdy - xzdz &= 0 + \int_0^2 -2zdz + \\ \int_2^0 (0-2)dx + 0 &= -4 + 4 = 0. \end{aligned}$$



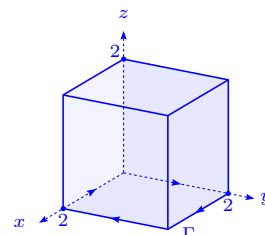
$$\begin{aligned} - \text{ Cuando } z = 2: \oint_{\Gamma_5} (y-z)dz + yzdy - xzdz &= \int_0^2 (0-2)dx + \\ \int_0^2 2 \cdot ydy + \int_2^0 (0-0)dx + \int_2^0 2ydy &= -4 + 4 + 0 - 4 = -4. \end{aligned}$$



$$\text{ Finalmente tenemos } \oint_{\Gamma} (y-z)dx + yzdy - xzdz = -4 + 4 + 0 + 0 - 4 = -4.$$

Notemos que los bordes en las integrales en línea se anulan quedando únicamente el borde  $\Gamma$ , es decir  $\Gamma$  se reduce al borde cuadrado de lado 2 en el plano  $xy$ , que es la frontera de la superficie  $S$  y era suficiente calcular la integral de línea sobre este borde. En efecto:

$$\oint_{\Gamma} (y-z)dx + yzdy - xzdz = \int_{\Gamma} ydx = 0 + \int_2^0 2dx + 0 + \int_2^0 0dx = 0 - 4 + 0 + 0 = -4.$$



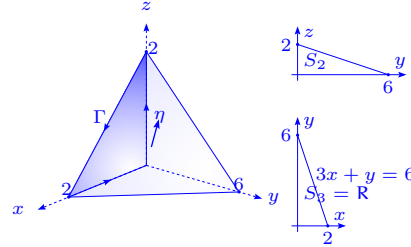
d) Sea  $\mathbf{f} = (xz, -y, x^2y)$ , entonces  $\text{rot } \mathbf{f} = (x^2, x(1-2y), 0)$ . La superficie  $S$  consta de tres caras:

$S_1$  cara del tetraedro cuando  $3x+y+3z=6$ , de vector

normal  $\boldsymbol{\eta}_1 = \frac{1}{\sqrt{19}}(3, 1, 3)$ , entonces  $z = 2 - \frac{1}{3}y - x$ ,

$z_x = -1, z_y = -\frac{1}{3}, \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} = \frac{\sqrt{19}}{3}, (x, y) \in \mathbb{R}$  y se

tiene:



$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \text{rot } \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta}_1 dS &= \frac{1}{\sqrt{19}} \iint_{S_1} (3x^2 + x - 2xy) dS = \frac{1}{\sqrt{19}} \int_0^2 \left( \int_0^{6-3x} (3x^2 + x - 2xy) \frac{\sqrt{19}}{3} dy \right) dx \\ &= \frac{1}{3} \int_0^2 ((3x^2 + x)y - xy^2) \Big|_0^{6-3x} dx = \frac{1}{3} \int_0^2 (-18x^3 + 51x^2 - 30x) dx = \\ &= \frac{1}{3} \left( -\frac{9}{2}x^4 + \frac{51}{3}x^3 - 14x^2 \right) \Big|_0^2 = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

$S_2$  cara del tetraedro cuando  $x=0$ , de vector normal  $\boldsymbol{\eta}_2 = (-1, 0, 0)$ , entonces  $x_y = x_z = 0$ ,

$$\sqrt{1+x_y^2+x_z^2} = 1, 0 \leq y \leq 6, 0 \leq z \leq 2 - \frac{1}{3}y,$$

$$\iint_{S_2} \text{rot } \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta}_2 dS = \iint_{S_2} \mathbf{0} \cdot \boldsymbol{\eta}_2 dS = 0.$$

$S_3$  cara del tetraedro cuando  $z=0$ , de vector normal  $\boldsymbol{\eta}_3 = (0, 0, -1)$ , entonces  $z_x = z_y = 0$ ,

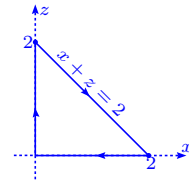
$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2} = 1, (x, y) \in \mathbb{R}, \text{ con lo cual tenemos:}$$

$$\iint_{S_3} \text{rot } \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta}_3 dS = \iint_{S_3} 0 dS = 0.$$

$$\text{Finalmente } \iint_S \text{rot } \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} dS = \frac{4}{3} + 0 + 0 = \frac{4}{3}.$$

Notemos que la frontera de  $S$  es  $\Gamma$  en el plano  $xz$ , por lo que:

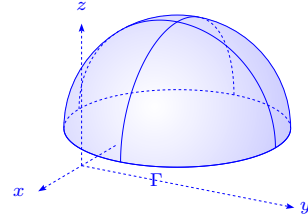
$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} xz dx - y dy + x^2 y dz &= \oint_{\Gamma} xz dx = 0 + \int_0^2 x(2-x) dx + 0 \\ &= \left( x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$



98. Transformar la integral de línea  $\oint_{\Gamma} (x^2 + y^2) dx + (x^2 + z^2) dy + (x^2 + y^2) dz$  tomada a lo largo de cierto contorno cerrado, en la integral de superficie tendida sobre este contorno, aplicando la fórmula de Stokes.

**Solución** Usando la fórmula de Stokes tenemos:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} (x^2 + y^2) dx + (x^2 + z^2) dy + (x^2 + y^2) dz &= \\ \iint_S [(2y - 2z) \cos \alpha + (2z - 2x) \cos \beta + (2x - 2y) \cos \gamma] dS &= \\ 2 \iint_S (y - z, z - x, x - y) \cdot \boldsymbol{\eta} dS &= 2 \iint_S (y - z) dy \wedge dz + (z - x) dz \wedge dx + (x - y) dx \wedge dy. \end{aligned}$$



99. Calcular la integral  $\oint_{\Gamma} x^2 y^3 dx + dy + z dz$ , donde  $\Gamma$  es la circunferencia  $x^2 + y^2 = a^2, z = 0$ :

a) directamente, a lo largo de la curva  $\Gamma$  en el sentido positivo,

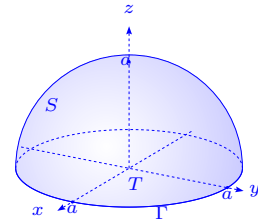
b) aplicando la fórmula de Stokes y considerando la semiesfera  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$  como superficie.

**Solución**

a) Parametrizaremos la circunferencia con  $x = a \cos \theta, y =$

$a \sin \theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ , entonces:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} x^2 y^3 dx + dy + z dz &= \\ \int_0^{2\pi} (a^5 \cos^2 \theta \sin^3 \theta a (-\sin \theta) + a \cos \theta + 0) d\theta &= \\ -a^6 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^4 \theta d\theta + a \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta &= -4a^6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 \theta - \sin^6 \theta) d\theta + 0 = \\ -4a^6 \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} \frac{3}{4} (1 - \frac{5}{6}) &= -a^6 \frac{\pi}{4} \frac{3}{4} \frac{1}{6} = -\frac{1}{8} \pi a^6. \end{aligned}$$



b) Por otro lado, sea  $\mathbf{f} = (x^2 y^2, 1, z)$ , la ecuación paramétrica de la semiesfera  $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}), 0 \leq x^2 + y^2 \leq a^2$ , nos permite escribir:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \\ 0 & 1 & -\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \end{vmatrix} = \left( \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, 1 \right).$$

Además:

$$\text{rot}(x^2 y^3, 1, z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 y^3 & 1 & z \end{vmatrix} = (0, 0, -3x^2 y^2),$$

por lo tanto:

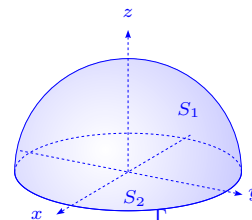
$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} x^2 y^3 dx + dy + z dz &= \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} dS = \iint_T \operatorname{rot} \mathbf{f} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} dx dy = - \iint_T 3x^2 y^2 dx dy \\ &= - \int_0^{2\pi} \int_0^a 3r^5 \sin^2 \theta \cos^2 \theta dr d\theta = - \frac{3}{6} r^6 \Big|_0^a \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} 4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta 2d\theta \\ &= - \frac{1}{16} a^6 \int_0^{4\pi} \sin^2 u du = - \frac{1}{16} 8a^6 \sin^2 u \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = - \frac{1}{2} a^6 \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} = - \frac{1}{8} \pi a^6. \end{aligned}$$

### 3.7 Fórmula de Gauss–Ostrogradski

100. Verificar el teorema de la divergencia para el sólido limitado por las superficies  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$  y  $z = 0$ , donde el campo vectorial es  $\mathbf{f} = (xz^2, x^2y - z^3, 2xy + y^2z)$ .

**Solución** Como  $\operatorname{div} \mathbf{f} = z^2 + x^2 + y^2 \implies \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{f} dV =$

$$\begin{aligned} \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a r^2 r^2 \cos \psi dr d\psi d\varphi = \\ \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{r^5}{5} \cos \psi \right]_0^a d\psi d\varphi &= \frac{a^5}{5} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \psi d\psi d\varphi = \\ \frac{2\pi a^5}{5} (-\sin \psi) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} &= \frac{2}{5} \pi a^5. \end{aligned}$$



Por otro lado,  $\oiint_S \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} dS = \iint_{S_1} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} dS + \iint_{S_2} \mathbf{f} \cdot (-\mathbf{k}) dS$ , donde  $S_1$  y  $S_2$  se aprecian en la gráfica.

$$\iint_{S_2} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} dS = - \iint_{x^2 + y^2 \leq a^2} 2xy dx dy = -2 \int_0^a r^3 dr \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta = 0.$$

Parametrizando  $S_1$ :  $\Phi(\varphi, \psi) = (a \sin \psi \cos \varphi, a \sin \psi \sin \varphi, a \cos \psi)$  y usando el ejercicio 40, página 157, tenemos que  $dS = a^2 \sin \psi d\psi d\varphi$  y  $\boldsymbol{\eta} = (\sin \psi \cos \varphi, \sin \psi \sin \varphi, \cos \psi)$ , por lo que:

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= (a^3 \sin \psi \cos^2 \psi \cos \varphi, a^3 \sin^3 \psi \sin \varphi \cos^2 \varphi - a^3 \cos^3 \psi, 2a^2 \sin^2 \psi \sin \varphi \cos \varphi + \\ &\quad a^3 \sin^2 \psi \cos \psi \sin^2 \varphi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} &= a^3 \sin^2 \psi \cos^2 \psi \cos^2 \varphi + a^3 \sin^4 \psi \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi - a^3 \sin \psi \cos^3 \psi \sin \varphi + \\ &\quad a^3 \sin^2 \psi \cos^2 \psi \sin^2 \varphi + 2a^2 \sin^2 \psi \cos \psi \sin \varphi \cos \varphi \end{aligned}$$

$$= a^3 \sin^2 \psi \cos^2 \psi + a^3 \sin^4 \psi \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi - a^3 \sin \psi \cos^3 \psi \sin \varphi + 2a^2 \sin^2 \psi \sin \varphi \cos \varphi,$$

y tenemos:

$$\begin{aligned}
\iint_{S_1} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} [a^5 \operatorname{sen}^3 \psi \cos^2 \psi + a^5 \operatorname{sen}^5 \psi \operatorname{sen}^2 \varphi \cos^2 \varphi - a^5 \operatorname{sen}^2 \psi \cos^3 \psi \operatorname{sen} \varphi + \\
&\quad 2a^4 \operatorname{sen}^3 \psi \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi] \, d\varphi \, d\psi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} a^5 \operatorname{sen}^3 \psi \cos^2 \psi \, d\varphi \, d\psi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} a^5 \operatorname{sen}^5 \psi \operatorname{sen}^2 \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi \, d\psi - 0 + 0 \\
&= 2\pi a^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 \psi) \cos^2 \psi \operatorname{sen} \psi \, d\psi + a^5 \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^5 \psi \, d\psi \right) \left( \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi \right) \\
&= 2\pi a^5 \int_1^0 (1 - u^2) u^2 (-du) + a^5 \left( \int_1^0 (1 - u^2)^2 (-du) \right) \left( \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 2\varphi \, d\varphi \right) \\
&= 2\pi a^5 \int_0^1 [u^2 - u^4] \, du + a^5 \int_0^1 (1 - 2u^2 + u^4) \, du \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 4\varphi}{8} \, d\varphi \\
&= 2\pi a^5 \left( \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} \right) \Big|_0^1 + a^5 \left( u - \frac{2u^3}{3} + \frac{u^5}{5} \right) \Big|_0^1 \cdot \frac{2\pi}{8} \\
&= 2\pi a^5 \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \frac{1}{4} \pi a^5 \left( 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) = \frac{2}{5} \pi a^5.
\end{aligned}$$

Se pudo usar la fórmula de Wallis para simplificar los cálculos.

101. Usar el teorema de la divergencia para evaluar la integral  $\oiint_S (x^2 + y + z) \, dS$ , donde  $S$  es la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

**Solución** Para utilizar el teorema de Gauss, debemos determinar un campo vectorial  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$  sobre la bola sólida  $V: x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , tal que  $\mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} = x^2 + y + z$ , donde  $\boldsymbol{\eta}$  es la normal a la superficie  $S$ .

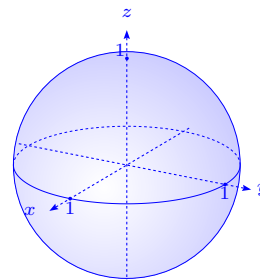
En todo punto de  $S$ , la normal  $\boldsymbol{\eta} = (x, y, z)$ , por lo que  $\mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} =$

$$f_1 x + f_2 y + f_3 z \implies f_1 x = x^2, \quad f_2 y = y, \quad f_3 z = z \implies \mathbf{f} =$$

$(x, 1, 1)$ . Calculando la divergencia de  $\mathbf{f}$ ,  $\operatorname{div} \mathbf{f} = 1 + 0 + 0 = 1$

y de esta forma el teorema de Gauss permite escribir:

$$\oiint_S (x^2 + y + z) \, dS = \iiint_V dV = \operatorname{vol}(V) = \frac{4}{3} \pi.$$



102. Evaluar  $\oiint_S \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS$  usando el teorema de la divergencia, donde  $\mathbf{f} = (xy^2, x^2y, y)$  y  $S$  es la

superficie del cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ , acotado por los planos  $z = 1$ ,  $z = -1$ , incluyendo las porciones  $x^2 + y^2 \leq 1$ , cuando  $z = \pm 1$ .

**Solución** Es claro que  $S$  es la frontera de la región  $\Omega$ , dada por  $x^2 + y^2 \leq 1$ ,  $-1 \leq z \leq 1$  y

$\operatorname{div} \mathbf{f} = x^2 + y^2 + 0$ , por lo que:

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS &= \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz = \int_{-1}^1 \left( \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) \, dx \, dy \right) dz = \\ &= 2 \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) \, dx \, dy = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \, dr \, d\theta = \pi. \end{aligned}$$

103. Evaluar  $\iint_S \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS$  en los siguientes casos:

a)  $\mathbf{f} = (xyz, xyz, xyz)$ ,  $S$  es la superficie del cubo  $[0, 1]^3$ .

b)  $\mathbf{f} = ((x+y)z^2, (y+z)x^2, (z+x)y^2)$ ,  $S$  es la superficie  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

c)  $\mathbf{f} = (1 - x^2, \frac{1}{2}y^2, z(2x - y))$ ,  $S$  es la superficie  $x^2 + y^2 = 1$  y  $0 \leq z \leq 1$ .

d)  $\mathbf{f} = (xy^2z(z-1), x^2yz(z-1), z^3 - z^2)$ ,  $S$  es la superficie  $x^2 + y^2 = 1$  y  $0 \leq z \leq 1$ .

**Solución**

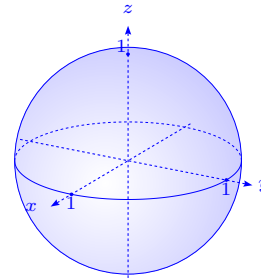
a) Denotando  $V$  el cubo  $[0, 1]^3$ , el teorema de Gauss permite escribir:

$$\iint_S \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{f} \, dx \, dy \, dz = \iiint_{[0,1]^3} (yz + xz + xy) \, dx \, dy \, dz = 3 \left( \int_0^1 x \, dx \right)^2 = \frac{3}{4}.$$

b) Denotando  $V$  la bola de centro  $0$  y radio  $1$ , el teorema de

Gauss permite escribir:

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS &= \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{f} \, dx \, dy \, dz = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz = \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^4 \cos \psi \, d\psi \, d\varphi \, dr = \frac{4}{5}\pi. \end{aligned}$$



c) Sea  $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$ , tenemos

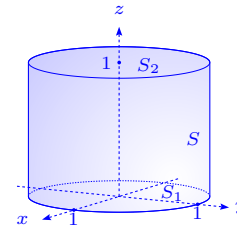
que  $\partial V = S \cup S_1 \cup S_2$ , donde:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = 1, 0 < z < 1\},$$

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\} \text{ y}$$

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq 1, z = 1\}.$$

Es claro que  $\operatorname{div} \mathbf{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = -2x + y + 2x - y = 0$ , entonces se tiene que



$$\oiint_{\partial V} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS = 0, \text{ por lo que } \iint_S \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS = - \iint_{S_1} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS - \iint_{S_2} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS.$$

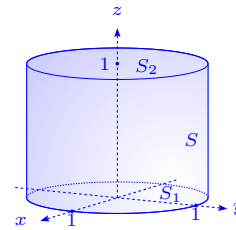
Por otro lado,  $\iint_{S_1} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} 0 \, dx \, dy = 0$ . Además,  $\iint_{S_2} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (2x - y) \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (2 \cos \theta - \sin \theta) r^2 \, d\theta \, dr = 0$ .

Finalmente,  $\oiint_S \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS = 0$ .

d) Usando la misma notación que en c), se observa que  $\mathbf{f}$  se anula sobre  $S_1$  y  $S_2$  (las componentes de  $\mathbf{f}$  contiene el factor

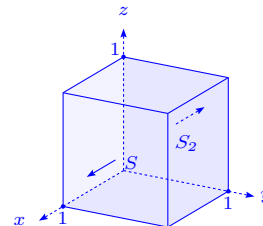
$z(z - 1)$ , por lo que  $\iint_{S_1} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS = \iint_{S_2} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS = 0$ ). De esta manera  $\oiint_S \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS = \iint_{\partial V} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{f} \, dx \, dy \, dz =$

$$\begin{aligned} & \iiint_V (y^2 z(z - 1) + x^2 z(z - 1) + (3z^2 - 2z)) \, dx \, dy \, dz = \\ & \iiint_{[0, 2\pi] \times [0, 1] \times [0, 1]} r(r^2 z(z - 1) + (3z^2 - 2z)) \, d\theta \, dr \, dz = \\ & 2\pi \left( \int_0^1 r^3 \, dr \right) \left( \int_0^1 z(z - 1) \, dz \right) + 2\pi \left( \int_0^1 r \, dr \right) \left( \int_0^1 (3z^2 - 2z) \, dz \right) = \\ & 2\pi \left( \frac{1}{4} \right) \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) + 2\pi \left( \frac{1}{2} \right) (1 - 1) = -\frac{1}{12} \pi. \end{aligned}$$



104. Sea  $S$  la superficie del cubo  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 1$  y sea  $\boldsymbol{\eta}$  la normal unitaria exterior a  $S$ . Si  $\mathbf{f}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$  emplear el teorema de la divergencia para calcular la integral de superficie  $\oiint_S \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS$ . Comprobar el resultado calculando la integral de superficie directamente.

**Solución** Sea  $S$  la superficie del cubo  $[0, 1]^3$ ,  $\boldsymbol{\eta}$  es la normal exterior a  $S$ ,  $\mathbf{f} = (x^2, y^2, z^2)$ ,  $\operatorname{div} \mathbf{f} = 2x + 2y + 2z$ , entonces:



$$\oiint_S \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS = 2 \iiint_V (x + y + z) \, dx \, dy \, dz = 2 \cdot 3 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 x \, dx \, dy \, dz = 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 3.$$

Por otro lado:

$$\text{- Si } x = 1, \boldsymbol{\eta}_1 = (1, 0, 0), \iint_{S_1} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta}_1 dS = \iint_{S_1} 1 dS = \int_0^1 \int_0^1 dx dy = 1.$$

$$\text{- Si } x = 0, \boldsymbol{\eta}_2 = (-1, 0, 0), \iint_{S_2} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta}_2 dS = \iint_{S_2} 0 dS = 0.$$

Sumando las otras integrales sobre las caras paralelas ( $y = 0, y = 1$ ), ( $z = 0, z = 1$ ),

$$\text{entonces } \iint_S \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} dS = 1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 = 3.$$

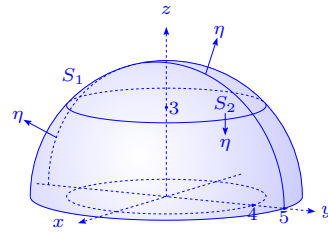
105. Se corta la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$  por el plano  $z = 3$ . La parte menor es un sólido  $V$  limitado por una superficie  $S_0$  constituida por dos partes, una esférica  $S_1$  y otra plana  $S_2$ . Si la normal unitaria exterior a  $V$  es  $\boldsymbol{\eta} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ , calcular la integral de superficie  $\iint_S (xz \cos \alpha + yz \cos \beta + \cos \gamma) dS$ , si:

- $S$  es el casquete esférico  $S_1$ .
- $S$  es la base plana  $S_2$ .
- $S$  es la frontera completa  $S_0 = S_1 \cup S_2$ .

Resolver la parte c) con los resultados de las partes a) y b) y también usando el teorema de la divergencia.

**Solución** Cuando  $z = 3$ , la ecuación  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$  se transforma en  $x^2 + y^2 = 25 - 9 = 16$ . Así:

$$\iint_S (xz \cos \alpha + yz \cos \beta + \cos \gamma) dS = \iint_S (xz, yz, 1) \cdot \boldsymbol{\eta} dS.$$



- a) Si  $S = S_1$ ,  $\boldsymbol{\eta} = \frac{1}{5}(x, y, z)$ , con  $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq 16, 3 \leq z \leq \sqrt{25 - x^2 - y^2}\}$ , por lo que:

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} (xz, yz, 1) \cdot \boldsymbol{\eta} dS &= \frac{1}{5} \iint_{S_1} (x^2 + y^2 + 1)z dS = \iint_{x^2 + y^2 \leq 16} (x^2 + y^2 + 1) dx dy = \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^4 (r^2 + 1)r dr \right) d\theta = 2\pi \left( \frac{r^4}{4} + \frac{r^2}{2} \right) \Big|_0^4 = 2\pi(64 + 8) = 144\pi, \end{aligned}$$

ya que  $z_x = -\frac{x}{z}$ ,  $z_y = -\frac{y}{z}$ ,  $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \frac{5}{z}$ .

$$\text{b) Sobre } S_2, \boldsymbol{\eta} = (0, 0, -1), \iint_{S_2} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS = \iint_{S_2} (-1) \, dS = -\text{Área}(S_2) = -16\pi.$$

$$\text{c) } \oiint_{S_0} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS = \iint_{S_1} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS + \iint_{S_2} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS = 144\pi - 16\pi = 128\pi.$$

Además:

$$\begin{aligned} \oiint_{S_0} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS &= \iiint_{V_0} \operatorname{div} \mathbf{f} \, dx \, dy \, dz = \iiint_{V_0} (z + z) \, dx \, dy \, dz = \\ &= \int_{-4}^4 \left( \int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} \left( \int_3^{\sqrt{25-x^2-y^2}} 2z \, dz \right) dy \right) dx = \int_{-4}^4 \left( \int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} (16 - x^2 - y^2) dy \right) dx = \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^4 (16 - r^2)r \, dr \right) d\theta = 2\pi \left( 16 - \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^4 = 2\pi \frac{1}{4} 4^4 = 128\pi. \end{aligned}$$

106. Sea  $\boldsymbol{\eta} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$  la normal unitaria exterior a una superficie cerrada  $S$ , que limita un sólido homogéneo  $V$  del tipo descrito en el teorema de la divergencia. Supongamos que el centro de gravedad  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  y el volumen  $|V|$  de  $V$  son conocidos. Calcular las siguientes integrales de superficie en función de  $|V|$  y de  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ .

$$\text{a) } \oiint_S (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) \, dS$$

$$\text{b) } \oiint_S (xz \cos \alpha + 2yz \cos \beta + 3z^2 \cos \gamma) \, dS$$

$$\text{c) } \oiint_S (y^2 \cos \alpha + 2xy \cos \beta - xz \cos \gamma) \, dS$$

d) Expresar  $\oiint_S (x^2 + y^2)(x, y, 0) \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS$  en función del volumen  $|V|$  y un momento de inercia del sólido.

**Solución**

$$\text{a) } \oiint_S (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) \, dS = \oiint_S (x, y, z) \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{f} \, dx \, dy \, dz = 3|V|.$$

$$\text{b) } \oiint_S (xz, 2yz, 3z^2) \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS = \iiint_V (z + 2z + 6z) \, dx \, dy \, dz = 9 \iiint_V z \, dx \, dy \, dz = 9\bar{z}|V|.$$

$$\text{c) } \oiint_S (y^2, 2xy, -xz) \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS = \iiint_V (2x - x) \, dx \, dy \, dz = \bar{x}|V|.$$

$$\text{d) } \oiint_S ((x^2 + y^2)x, (x^2 + y^2)y, 0) \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS = \iiint_V (3x^2 + y^2 + 3y^2 + x^2) \, dx \, dy \, dz$$

$$= 4 \iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz = 4I_z.$$

107. Verificar las siguientes identidades, donde  $f$  y  $g$  son campos escalares de clase  $C^1$ ,  $\eta$  es la normal exterior unitaria a la superficie cerrada  $S$ , que limita un sólido  $V$  descrito en el teorema de la divergencia,  $\frac{\partial f}{\partial \eta} = \nabla f \cdot \eta$ ,  $\frac{\partial g}{\partial \eta} = \nabla g \cdot \eta$ .

$$a) \oint_S \frac{\partial f}{\partial \eta} dS = \iiint_V \nabla^2 f dx dy dz.$$

$$b) \oint_S \frac{\partial f}{\partial \eta} dS = 0, \text{ siempre que } f \text{ sea armónica en } V.$$

$$c) \oint_S f \frac{\partial g}{\partial \eta} dS = \iiint_V f \nabla^2 g dx dy dz + \iiint_V \nabla f \cdot \nabla g dx dy dz.$$

$$d) \oint_S \left( f \frac{\partial g}{\partial \eta} - g \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) dS = \iiint_V (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) dx dy dz.$$

$$e) \oint_S f \frac{\partial g}{\partial \eta} dS = \oint_S g \frac{\partial f}{\partial \eta} dS, \text{ si } f \text{ y } g \text{ son ambas armónicas en } V.$$

$$f) \oint_S f \frac{\partial f}{\partial \eta} dS = \iiint_V \|\nabla f\|^2 dx dy dz, \text{ si } f \text{ es armónica en } V.$$

### Solución

$$a) \oint_S \frac{\partial f}{\partial \eta} dS = \oint_S \nabla f \cdot \eta dS = \iiint_V \operatorname{div}(\nabla f) dx dy dz = \iiint_V \nabla^2 f dx dy dz.$$

$$b) \text{ Usando a) se tiene que si } \nabla^2 f = 0, \text{ entonces } \oint_S \frac{\partial f}{\partial \eta} dS = 0.$$

$$c) \oint_S f \frac{\partial g}{\partial \eta} dS = \oint_S f \nabla g \cdot \eta dS = \iiint_V \operatorname{div}(f \nabla g) dx dy dz = \\ \iiint_V (f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g) dx dy dz = \iiint_V f \nabla^2 g dx dy dz + \iiint_V \nabla f \cdot \nabla g dx dy dz,$$

$$\text{ya que } \nabla(f \nabla g) = \operatorname{div}(f \nabla g) = f \operatorname{div} \nabla g + \nabla f \cdot \nabla g = f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g.$$

$$d) \oint_S \left( f \frac{\partial g}{\partial \eta} - g \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) dS = \oint_S (f \nabla g - g \nabla f) \cdot \eta dS = \iiint_V \nabla(f \nabla g - g \nabla f) dx dy dz =$$

$$\iiint_V (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) dx dy dz,$$

$$\text{pues } \nabla(f \nabla g - g \nabla f) = \nabla f \cdot \nabla g + f \nabla^2 g - \nabla g \cdot \nabla f - g \nabla^2 f = f \nabla^2 g - g \nabla^2 f.$$

e) Si  $f$  y  $g$  son armónicas,  $\nabla^2 f = \nabla^2 g = 0$ , entonces por d):

$$\iint_S \left( f \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\eta}} - g \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\eta}} \right) dS = \iiint_V 0 \, dx \, dy \, dz = 0 \text{ i.e. } \iint_S f \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\eta}} dS = \iint_S g \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\eta}} dS.$$

f) Si  $f$  es armónica y cuando en c)  $f = g$ , se tiene:

$$\iint_S f \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\eta}} dS = \iiint_V f \nabla^2 f \, dx \, dy \, dz + \iiint_V \nabla f \cdot \nabla f \, dx \, dy \, dz = \iiint_V \|\nabla f\|^2 \, dx \, dy \, dz.$$

108. Demostrar que  $\nabla^2 f(\mathbf{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{|V(t)|} \iint_{S(t)} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\eta}} dS$ , donde  $V(t)$  es una esfera de radio  $t$  y centro  $\mathbf{a}$ ,  $S(t)$  es la superficie de  $V(t)$  y  $|V(t)|$  es el volumen de  $V(t)$ .

**Solución** Se sabe que  $\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{|V(t)|} \iint_{S(t)} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS$ , entonces como  $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\eta}} = \nabla f \cdot \boldsymbol{\eta}$  y si definimos  $\mathbf{f} = \nabla f$ , se tiene que:

$$\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{a}) = \nabla(\nabla f)(\mathbf{a}) = \nabla^2 f(\mathbf{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{|V(t)|} \iint_{S(t)} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\eta}} dS.$$

109. Sean  $V$  una región convexa de  $\mathbb{R}^3$  cuya frontera es una superficie cerrada  $S$  y  $\boldsymbol{\eta}$  la normal unitaria exterior a  $S$ . Sean  $\mathbf{f}$  y  $\mathbf{g}$  dos campos vectoriales de clase  $C^1$ , tales que  $\operatorname{rot} \mathbf{f} = \operatorname{rot} \mathbf{g}$ ,  $\operatorname{div} \mathbf{f} = \operatorname{div} \mathbf{g}$  en todo  $V$ , y que satisfacen  $\mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\eta} = \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta}$  en todo punto de la superficie  $S$ . Demostrar que  $\mathbf{f} = \mathbf{g}$  en  $V$ . **Sugerencia** Sea  $\mathbf{h} = \mathbf{f} - \mathbf{g}$ , encontrar un campo escalar  $f$  de clase  $C^2$  tal que  $\mathbf{h} = \nabla f$  y usar una identidad adecuada para demostrar que  $\iiint_V \|\nabla f\|^2 \, dx \, dy \, dz = 0$ . De esto se deduce que  $\mathbf{h} = \mathbf{0}$  en  $V$ .

**Solución** Sea  $\mathbf{h} = \mathbf{f} - \mathbf{g}$ , entonces  $\operatorname{rot} \mathbf{h} = \mathbf{0}$ , lo que implica que existe un escalar  $f$  de clase  $C^2$  tal que  $\mathbf{h} = \nabla f$  i.e.  $\mathbf{f} = \mathbf{g} + \nabla f$ . Además  $f$  es armónica, pues  $\operatorname{div} \mathbf{h} = \nabla^2 f = 0$  y usando el ejercicio 107f), página 226, tenemos:

$$\iint_S f \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\eta}} dS = \iint_S f \nabla f \cdot \boldsymbol{\eta} dS = \iiint_V \|\nabla f\|^2 \, dx \, dy \, dz,$$

pero  $f \nabla f \cdot \boldsymbol{\eta} = f \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} - f \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\eta}$ , por lo que:

$$\begin{aligned} \iint_S f \nabla f \cdot \boldsymbol{\eta} dS &= \iint_S f \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} dS - \iint_S f \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\eta} dS \\ &= \iiint_V \operatorname{div}(f \mathbf{f}) \, dx \, dy \, dz - \iiint_V \operatorname{div}(f \mathbf{g}) \, dx \, dy \, dz. \end{aligned}$$

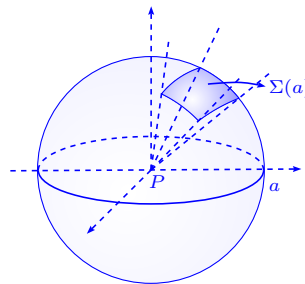
Por otro lado,  $\operatorname{div}(f\mathbf{f}) = f \operatorname{rot} \mathbf{f} + \nabla f \times \mathbf{f} = f \operatorname{rot} \mathbf{g} + (\mathbf{f} - \mathbf{g}) \times \mathbf{f} = f \operatorname{rot} \mathbf{g} - \mathbf{g} \times \mathbf{f} =$   
 $f \operatorname{rot} \mathbf{g} + \mathbf{f} \times \mathbf{g} = f \operatorname{rot} \mathbf{g} + (\mathbf{f} - \mathbf{g}) \times \mathbf{g} = f \operatorname{rot} \mathbf{g} + \nabla f \times \mathbf{g} = \operatorname{div}(f\mathbf{g}) \implies$   
 $\operatorname{div}(f\mathbf{f}) = \operatorname{div}(f\mathbf{g})$  i.e.

$$\oiint_S f \nabla f \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS = \iiint_V \|\nabla f\|^2 \, dx \, dy \, dz = 0,$$

lo que implica  $\|\nabla f\| = 0$  en  $V \implies \nabla f = \mathbf{f} - \mathbf{g} = 0$  en  $V$ , o sea  $\mathbf{f} = \mathbf{g}$  en  $V$ .

110. Sea  $S$  una superficie paramétrica regular con la propiedad de que cada semi-recta que sale de  $P$ , corta a  $S$  una vez a lo sumo. Representemos por  $\Omega(S)$  el conjunto de rectas que pasan por  $P$  y atraviesan  $S$  (ver figura). El conjunto  $\Omega(S)$  se llama ángulo sólido de vértice en  $P$  subtendido por  $S$ . Sea  $\Sigma(a)$  la intersección de  $\Omega(S)$  en la superficie de la esfera de radio  $a$  y centro  $P$ . El cociente  $\frac{\text{área de } \Sigma(a)}{a^2}$ , que se representa por  $|\Omega(S)|$ , se utiliza como medida del ángulo sólido  $\Omega(S)$ .

a) Demostrar que este cociente es igual a la integral de superficie  $\iint_S \frac{\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\eta}}{r^3} \, dS$ , donde  $\mathbf{r}$  es el vector que une  $P$  a un punto cualquiera de  $S$  y  $r = \|\mathbf{r}\|$ . El vector  $\boldsymbol{\eta}$  es la normal unitaria a  $S$  en la dirección de alejamiento de  $P$ .



Esto demuestra que el cociente  $|\Omega(S)|$  es independiente del radio  $a$ , por lo que el ángulo sólido puede ser medido por el área de la intersección de  $\Omega(S)$  y la esfera unidad entorno a  $P$ .

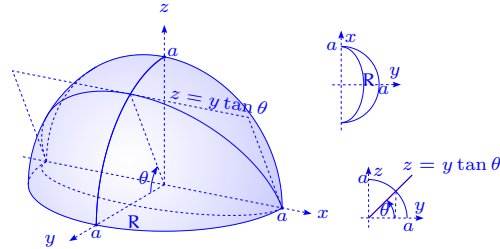
b) Dos planos se cortan a lo largo de un diámetro de una esfera con centro en  $P$ . El ángulo de intersección de los planos es  $\theta$ , siendo  $0 < \theta < \pi$ . Sea  $S$  la parte menor de la superficie de la esfera interceptada por los dos planos. Demostrar que  $|\Omega(S)| = 2\theta$ .

**Solución**

a) Se tiene que  $\frac{1}{r^3} \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\eta} = \frac{1}{r^3} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \frac{1}{r} = \frac{1}{r^2} = \frac{1}{a^2}$  sobre  $S$ , por lo que:

$$\iint_{\Sigma(a)} \frac{\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\eta}}{r^3} dS = \iint_{\Sigma(a)} \frac{1}{r^2} dS = \frac{1}{a^2} \text{Área}(\Sigma(a)).$$

b) Para simplificar, consideremos que un plano está en el eje  $xy$  y el otro plano forma un ángulo  $\theta$ ,  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  entre ambos (ver gráfico). La superficie que buscamos, es la superficie de la esfera de radio  $a$  que se proyecta en la región  $R$  sobre el plano  $xy$ .



La ecuación del plano que forma el ángulo  $\theta$  con el plano  $xy$  es  $z = y \tan \theta$ , por lo que la intersección del plano y la esfera es  $z = y \tan \theta$ ,  $x^2 + y^2 \sec^2 \theta = a^2$ . Como la superficie de la esfera tiene ecuación  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ ,  $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \frac{a}{z}$  y el área buscada es:

$$\frac{1}{a^2} \iint_{\Sigma(a)} dS = \frac{1}{a} \iint_R \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy.$$

En coordenadas polares la región  $R$  se escribe:  $\frac{a}{\sqrt{1 + \cos^2 \varphi \tan^2 \theta}} \leq r \leq a$ ,  $0 \leq \varphi \leq \pi$ , entonces:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} \iint_{\Sigma(a)} dS &= \frac{1}{a} \int_0^\pi \int_{\frac{a}{\sqrt{1 + \cos^2 \varphi \tan^2 \theta}}}^a \frac{r dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} d\varphi = \frac{1}{a} \int_0^\pi \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{1 + \cos^2 \varphi \tan^2 \theta}} d\varphi \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \varphi \tan \theta d\varphi}{\sqrt{\sec^2 \theta - \sin^2 \varphi \tan^2 \theta}} \stackrel{u = \sin \varphi \tan \theta}{=} 2 \int_0^{\tan \theta} \frac{du}{\sqrt{\sec^2 \theta - u^2}} \\ &= 2 \operatorname{arcsen} \frac{u}{\sec \theta} \Big|_0^{\tan \theta} = 2 \operatorname{arcsen} \frac{\tan \theta}{\sec \theta} = 2 \operatorname{arcsen} \sin \theta = 2\theta. \end{aligned}$$

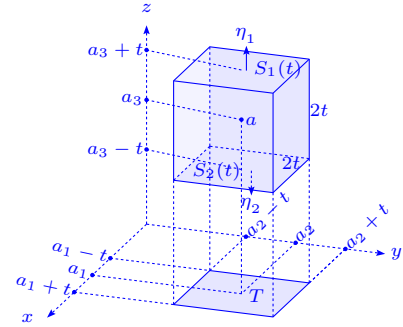
111. Sean  $V(t)$  un cubo de arista  $2t$  y centro en  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ ,  $S(t)$  la frontera del cubo  $V(t)$ ,  $\boldsymbol{\eta}$  la normal unitaria exterior a  $S(t)$  y  $|V(t)|$  el volumen de cubo. Para un campo vectorial dado  $\mathbf{f}$  de clase  $C^1$  en un abierto de  $\mathbf{a}$ , se supone que existe  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{|V(t)|} \oiint_{S(t)} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} dS$  y emplearlo como definición de  $\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{a})$ .

Se toman como ejes coordenados  $xyz$ , ejes paralelos a las aristas de  $V(t)$ , sean  $P$ ,  $Q$  y  $R$  los componentes de  $\mathbf{f}$  relativos a ese sistema de coordenadas. Demostrar que  $\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{a}) = \frac{\partial P}{\partial x}(\mathbf{a}) + \frac{\partial Q}{\partial y}(\mathbf{a}) + \frac{\partial R}{\partial z}(\mathbf{a})$ .

**Sugerencia** Expresar la integral de superficie como una suma de seis integrales dobles tomadas sobre las caras del cubo. Demostrar que  $\frac{1}{|V(t)|}$  multiplicado por la suma de las dos integrales dobles sobre las caras perpendiculares al eje  $z$ , tiendan a  $\frac{\partial R}{\partial z}(\mathbf{a})$  cuando  $t \rightarrow 0$ .

**Solución** Se define  $\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{|V(t)|} \iint_{S(t)} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} dS$  y vamos a demostrar que si sumamos las dos integrales dobles sobre las caras perpendiculares al eje  $z$  y las dividimos por  $|V(t)|$ , el cociente tiende a  $\frac{\partial R}{\partial z}(\mathbf{a})$ , cuando  $t \rightarrow 0$ .

En efecto, llamando  $S_1(t)$  y  $S_2(t)$  las caras superior e inferior del cubo perpendicular al eje  $z$ ,  $\boldsymbol{\eta}_1$  y  $\boldsymbol{\eta}_2$  las normales



a  $S_1(t)$  y  $S_2(t)$ , denotando  $T$  la región que resulta de la proyección de cualquiera de estos casos sobre el plano  $xy$ , se tiene  $\mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta}_1 = R$ ,  $\mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta}_2 = -R$ , y

$$\begin{aligned} \frac{1}{|V(t)|} \left( \iint_{S_1(t)} R dS - \iint_{S_2(t)} R dS \right) &= \frac{1}{8t^3} \iint_T (R(a_1, a_2, a_3 + t) - R(a_1, a_2, a_3 - t)) dx dy = \\ \frac{1}{8t^3} (R(a_1, a_2, a_3 + t) - R(a_1, a_2, a_3 - t)) \iint_T dx dy &= \frac{1}{2t} (R(a_1, a_2, a_3 + t) - R(a_1, a_2, a_3 - t)) = \\ \frac{1}{2t} (R(a_1, a_2, a_3 + t) - R(a_1, a_2, a_3) - [R(a_1, a_2, a_3 - t) - R(a_1, a_2, a_3)]) &= \\ \frac{1}{2} \frac{R(a_1, a_2, a_3 + t) - R(a_1, a_2, a_3)}{t} + \frac{1}{2} \frac{R(a_1, a_2, a_3 - t) - R(a_1, a_2, a_3)}{-t} &\rightarrow \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial z}(\mathbf{a}) + \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial z}(\mathbf{a}) = \\ \frac{\partial R}{\partial z}(\mathbf{a}). \end{aligned}$$

De manera similar se tiene que las otras parejas de superficies perpendiculares al eje  $x$  y al eje  $y$ , tienden a  $\frac{\partial P}{\partial x}(\mathbf{a})$  y  $\frac{\partial Q}{\partial y}(\mathbf{a})$  respectivamente y se concluye que:

$$\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{a}) = \frac{\partial P}{\partial x}(\mathbf{a}) + \frac{\partial Q}{\partial y}(\mathbf{a}) + \frac{\partial R}{\partial z}(\mathbf{a}).$$

112. Un campo escalar  $\varphi$  tiene la propiedad  $\|\nabla\varphi\|^2 = 4\varphi$  y  $\operatorname{div}(\varphi\nabla\varphi) = 10\varphi$ .

Calcular la integral de superficie  $\iint_S \frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{\eta}} dS$ , donde  $S$  es la superficie de la esfera unidad con centro en el origen y  $\frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{\eta}}$  es la derivada direccional de  $\varphi$  en la dirección de la normal unitaria exterior a  $S$ .

**Solución** Se tiene que  $\operatorname{div}(\varphi\nabla\varphi) = \nabla\varphi \cdot \nabla\varphi + \varphi\nabla^2\varphi = \|\nabla\varphi\|^2 + \varphi\nabla^2\varphi = 4\varphi + \varphi\nabla^2\varphi = 10\varphi \implies \varphi\nabla^2\varphi = 6\varphi$  i.e.  $\nabla^2\varphi = 6$ . Así tenemos que si  $V$  es la esfera de radio 1:

$$\iint_S \frac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{\eta}} dS = \iint_S \nabla\varphi \cdot \boldsymbol{\eta} dS = \iiint_V \nabla^2\varphi dx dy dz = \iiint_V 6 dx dy dz = 6\operatorname{Vol}(V) = 6\frac{4}{3}\pi = 8\pi.$$

113. Usando la fórmula de Gauss–Ostrogradski transformar las siguientes integrales de superficie, sobre las superficies cerradas  $S$  que limitan el volumen  $V$ , donde  $\cos\alpha$ ,  $\cos\beta$ ,  $\cos\gamma$  son los cosenos directores de la normal exterior  $\boldsymbol{\eta}$  a la superficie  $S$ .

a)  $\iint_S yz dy \wedge dz + zx dz \wedge dx + xy dx \wedge dy.$

b)  $\iint_S x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy.$

c)  $\iint_S \frac{x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dS.$

d)  $\iint_S \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma \right) dS$ ,  $u$  es de clase  $C^2$ .

**Solución**

a)  $\iint_S yz dy \wedge dz + zx dz \wedge dx + xy dx \wedge dy = \iint_S \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} dS = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{f} dx dy dz = 0$ , pues  $\mathbf{f} = (yz, zx, xy)$  y  $\operatorname{div} \mathbf{f} = 0 + 0 + 0 = 0$ .

b) Sea  $\mathbf{f} = (x^2, y^2, z^2)$ ,  $\operatorname{div} \mathbf{f} = 2(x + y + z)$ , entonces:

$$\iint_S x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy = \iint_S \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} dS = 2 \iiint_V (x + y + z) dx dy dz.$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \iint_S \frac{x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dS &= \iint_S \frac{1}{r}(x, y, z) \cdot \boldsymbol{\eta} dS = \iiint_V \operatorname{div} \left( \frac{1}{r}(x, y, z) \right) dx dy dz \\ &= 2 \iiint_V \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \end{aligned}$$

ya que  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{r} \right) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$  y por lo tanto se tiene  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{z}{r} \right) = \frac{2(x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ .

$$\text{d) } \iint_S \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right) dS = \iint_S \nabla u \cdot \boldsymbol{\eta} dS = \iiint_V \operatorname{div}(\nabla u) dx dy dz = \iiint_V \nabla^2 u dx dy dz = \iiint_V \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) dx dy dz.$$

114. Usando la fórmula de Gauss–Ostrogradski calcular las siguientes integrales de superficie:

a)  $\iint_S x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy$ ,  $S$  es la cara exterior de la superficie del cubo:  $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a$ .

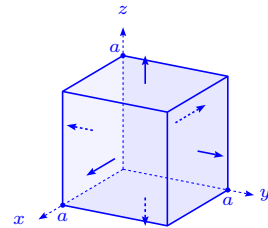
b)  $\iint_S x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy$ ,  $S$  es la cara exterior de la pirámide limitada por las superficies  $x + y + z = a, x = 0, y = 0, z = 0$ .

c)  $\iint_S x^3 dy \wedge dz + y^3 dz \wedge dx + z^3 dx \wedge dy$ ,  $S$  es la cara exterior de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ .

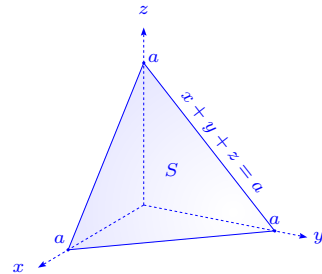
d)  $\iint_S (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS$ ,  $S$  es la superficie exterior total del cono  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0, 0 \leq z \leq b$ .

### Solución

$$\begin{aligned} \text{a) } \iint_S x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy &= \\ \int_0^a \left( \int_0^a \left( \int_0^a (2x + 2y + 2z) dx \right) dy \right) dz &= \\ 3 \int_0^a \int_0^a \int_0^a 2x dx dy dz = 3a \cdot a \cdot x^2 \Big|_0^a &= 3a^4. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{b) } \iint_S x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy &= \iiint_V 3 dx dy dz = \\ 3|V| &= \frac{1}{2}a^3, \text{ donde } |V| \text{ es el volumen de la pirámide i.e.} \\ |V| &= \frac{1}{3} \text{base} \times \text{altura} = \frac{1}{3} \frac{1}{2} a^2 \cdot a = \frac{1}{6} a^3. \end{aligned}$$



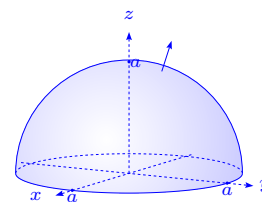
Verifiquemos este resultado. En efecto:

$$\int_0^a \int_0^a \int_0^a dx dy dz = \int_0^a \left( \int_0^{a-x} \left( \int_0^{a-x-y} dz \right) dy \right) dx = \int_0^a \left( \int_0^{a-x} (a-x-y) dy \right) dx = \int_0^a \left( (a-x)y - \frac{1}{2}y^2 \right) \Big|_0^{a-x} dx = \int_0^a \frac{1}{2}(a-x)^2 dx = -\frac{1}{6}(a-x)^3 \Big|_0^a = \frac{1}{6}a^3.$$

$$c) \oint_S x^3 dy \wedge dz + y^3 dx \wedge dz + z^3 dx \wedge dy =$$

$$3 \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz =$$

$$3 \int_0^{2\pi} \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^a r^4 dr \right) \cos \psi d\psi \right) d\varphi = 3 \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{r^5}{5} \Big|_0^a = \frac{12}{5} \pi a^5.$$



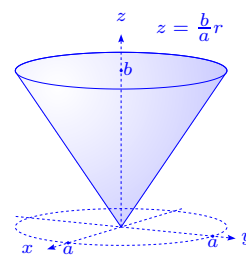
$$d) \oint_S (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS =$$

$$\oint_S (x^2, y^2, z^2) \cdot \boldsymbol{\eta} dS = 2 \iiint_V (x + y + z) dx dy dz =$$

$$2 \int_{-a}^a \left( \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \left( \int_b^{\frac{b}{a}\sqrt{x^2+y^2}} (x+y+z) dz \right) dy \right) dx =$$

$$2 \int_0^{2\pi} \left( \int_0^a \left( \int_{\frac{b}{a}r}^b (r \cos \theta + r \sin \theta + z) dz \right) r dr \right) d\theta = 2 \cdot (0 + 0 + 2\pi \int_0^a \left( \int_{\frac{b}{a}r}^b z dz \right) r dr) =$$

$$4\pi \int_0^a \left( \frac{b^2}{2} - \frac{b^2 r^2}{2a^2} \right) \Big|_0^a r dr = 4\pi \left( \frac{b^2}{4} r^2 - \frac{b^2}{a^2} \frac{r^4}{8} \right) \Big|_0^a = \frac{1}{2} \pi a^2 b^2.$$



115. Demostrar que si  $S$  es una superficie cerrada y  $\ell$  cualquier dirección constante, la integral

$$\iint_S \cos(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\ell}) dS = 0, \text{ donde } \boldsymbol{\eta} \text{ es la normal exterior a la superficie } S.$$

**Solución** Sabemos que  $\cos(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\ell}) = \boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\ell}$ , entonces:

$$\iint_S \cos(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\ell}) dS = \iint_S \boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{\eta} dS = \iiint_V \operatorname{div}(\boldsymbol{\ell}) dx dy dz = 0,$$

ya que  $\operatorname{div}(\boldsymbol{\ell}) = 0$ .

116. Demostrar que el volumen de  $V$ , limitado por la superficie  $S$  es igual a:

$$|V| = \frac{1}{3} \iint_S (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS,$$

donde  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  son los cosenos directores de la normal exterior  $\boldsymbol{\eta}$  a la superficie.

**Solución**  $\frac{1}{3} \iint_S (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS = \frac{1}{3} \iint_S (x, y, z) \cdot \boldsymbol{\eta} dS = \frac{1}{3} \iiint_V \operatorname{div}(x, y, z) dx dy dz =$   
 $\frac{1}{3} \iiint_V 3 dx dy dz = |V|.$

117. a) Usando el Teorema de Gauss–Ostrogradski, demostrar que el flujo del vector  $\mathbf{f} = \mathbf{r}$ , a través de una superficie cerrada que limita un volumen arbitrario  $V$  es igual al triple del volumen.

b) Determinar el flujo del vector  $\mathbf{r}$  a través de la superficie total del cilindro  $x^2 + y^2 \leq a^2$ ,  $0 \leq z \leq h$ .

**Solución**

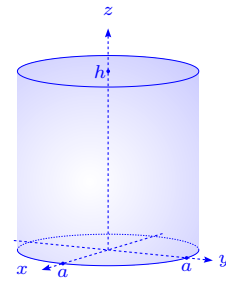
a) Sabemos que el flujo del campo vectorial  $\mathbf{f}$  es:

$$\oiint_S \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\eta} dS = \iiint_V \operatorname{div}(\mathbf{r}) dx dy dz = 3|V|,$$

pues  $\operatorname{div}(\mathbf{r}) = 3$ , donde  $|V|$  es el volumen de  $V$ .

b) Usando la parte a) tenemos que:

$$\oiint_S \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\eta} dS = 3|V| = 3\pi a^2 h.$$



118. Calcular el flujo del vector  $\mathbf{f}(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3)$  a través de:

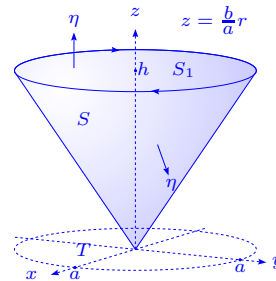
a) la superficie lateral del cono  $\frac{x^2 + y^2}{a^2} \leq \frac{z^2}{h^2}$ ,  $0 \leq z \leq h$ .

b) la superficie total de este mismo cono.

**Solución**

a) La superficie del cono se representa por  $\mathbf{r}(x, y) = \left(x, y, \frac{h}{a} \sqrt{x^2 + y^2}\right)$ ,  $x^2 + y^2 \leq a^2$ . Así tenemos que  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = \left(1, 0, \frac{h}{a} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$ ,  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \left(0, 1, \frac{h}{a} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$ ,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \frac{h}{a} \frac{x}{r} \\ 0 & 1 & \frac{h}{a} \frac{y}{r} \end{vmatrix} = \left(-\frac{h}{a} \frac{x}{r}, -\frac{h}{a} \frac{y}{r}, 1\right), \text{ con } r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$



Usaremos  $-\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}$  para que su dirección coincida con la normal exterior  $\boldsymbol{\eta}$ , por lo tanto si  $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq a^2\}$  y usando el cambio de variable  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ,  $0 \leq r \leq a$ , tenemos:

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS &= - \iint_T \mathbf{f} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \, dx \, dy = \iint_T \left( \frac{h}{a} \frac{x^4}{r} + \frac{h}{a} \frac{y^4}{r} - z^3 \right) \, dx \, dy = \\ &= \iint_T \left( \frac{h}{a} \frac{x^4}{r} + \frac{h}{a} \frac{y^4}{r} - \frac{h^3}{a^3} (x^2 + y^2)^{3/2} \right) \, dx \, dy = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^a \left( \frac{h}{a} r^3 \cos^4 \theta + \frac{h}{a} r^3 \sin^4 \theta - \frac{h^3}{a^3} r^3 \right) r \, dr \, d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{h}{a} \cos^4 \theta + \frac{h}{a} \sin^4 \theta - \frac{h^3}{a^3} \right) d\theta \int_0^a r^4 \, dr = \frac{1}{5} a^5 \cdot 4 \cdot \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{h}{a} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) d\theta - \frac{h^3}{a^3} \frac{\pi}{2} \right] = \\ &= \frac{4}{5} a^4 h \left[ -\frac{h^2}{a^2} \frac{\pi}{2} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta \, d\theta \right] = \frac{4}{5} a^4 h \left[ -\frac{h^2}{a^2} \frac{\pi}{2} + 2 \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{\pi}{2} \right] = \frac{1}{10} \pi a^2 h (3a^2 - 4h^2). \end{aligned}$$

b) Para esta parte del problema, nos falta calcular la integral de superficie sobre la tapa del cono. Tomando  $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{k}$  la normal exterior a la superficie  $S_1$  en la tapa, tenemos:

$$\iint_{S_1} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS = \iint_{S_1} z^3 \, dS = h^3 \text{Area}(S_1) = h^3 \pi a^2,$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} \oiint_{S \cup S_1} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS &= \frac{1}{10} \pi a^2 h (3a^2 - 4h^2) + h^3 \pi a^2 \\ &= \frac{1}{10} \pi a^2 h (3a^2 + 6h^2) = \frac{3}{10} \pi a^2 h (a^2 + 2h^2). \end{aligned}$$

119. Calcular la divergencia y el flujo de la fuerza de atracción  $\mathbf{f} = -\frac{m}{r^3} \mathbf{r}$  de un punto de masa  $m$ , situado en el origen de coordenadas a través de una superficie cerrada arbitraria, que rodea dicho punto.

**Solución** Por el ejercicio 7, página 133, tenemos que:

$$\mathbf{f} = -m \frac{1}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}, \operatorname{div} \mathbf{f} = -m \left( f'(r) + f(r) \frac{2}{r} \right), \text{ con } f(r) = \frac{1}{r^2} \text{ i.e. } \operatorname{div} \mathbf{f} = -m \left( -2 \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^2} \frac{2}{r} \right) = 0, \text{ en todo punto salvo } (0, 0, 0).$$

Tomemos una esfera  $V_\epsilon$  de radio  $\epsilon$  de superficie  $S_\epsilon$  ( $|S_\epsilon| = 4\pi\epsilon^2$ ), de modo que  $V_\epsilon$  esté totalmente contenida en el volumen  $V$  de superficie cerrada  $S$ . Así se tiene que para todo

$(x, y, z) \in V \setminus V_\epsilon$ ,  $\operatorname{div} \mathbf{f} = 0$ , por lo tanto:

$$\iint_{S \setminus S_\epsilon} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS = \iiint_{V \setminus V_\epsilon} \operatorname{div} \mathbf{f} \, dx \, dy \, dz = 0 \implies \iint_S \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS = - \iint_{S_\epsilon} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS,$$

es decir que si  $\boldsymbol{\eta}$  es el vector normal exterior a  $S_\epsilon$ ,  $\boldsymbol{\eta} = \frac{1}{\epsilon}(x, y, z)$  i.e.

$$- \iint_{S_\epsilon} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS = - \iint_{S_\epsilon} -m \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\mathbf{r}}{\epsilon} \cdot \frac{\mathbf{r}}{\epsilon} \, dS = m \frac{1}{\epsilon^2} \iint_{S_\epsilon} dS = m \frac{1}{\epsilon^2} |S_\epsilon| = m \frac{1}{\epsilon^2} 4\pi\epsilon^2 = 4\pi m.$$

120. Aplicando la fórmula de Gauss–Ostrogradski, transformar la integral sobre la superficie cerrada, en una integral triple sobre el volumen del cuerpo limitado por esta superficie (cara exterior)  $\iint_S \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) \, dS$ . Calcular la integral si  $S$  es la esfera de radio  $a$ , con centro en el origen de coordenadas.

### Solución

a) Usando la fórmula de Gauss–Ostrogradski se tiene que:

$$\iint_S \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) \, dS = \iiint_V \frac{x + y + z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \, dx \, dy \, dz.$$

b) Haciendo un cambio a coordenadas esféricas tenemos:

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{x + y + z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \, dx \, dy \, dz &= \\ \int_0^1 \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r (\cos \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi + \sin \psi)}{r} r \cos^2 \psi \, dr \right) d\psi \right) d\varphi &= \\ \frac{1}{2} r^2 \Big|_0^a \left[ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \psi \, d\psi \int_0^{2\pi} \cos \varphi \, d\varphi + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \psi \, d\psi \int_0^{2\pi} \sin \varphi \, d\varphi + 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \psi \sin \psi \, d\psi \right] &= \\ \frac{1}{2} a^2 \left( 0 + 0 + 2\pi \left( -\frac{1}{3} \cos^3 \psi \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \right) &= \frac{1}{2} a^2 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

121. Usando la fórmula de Gauss–Ostrogradski, calcular las integrales de superficie del ejercicio 87, página 201.

### Solución

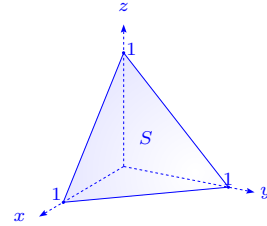
$$\begin{aligned} \text{a) La integral } \iint_S x \, dy \wedge dz + y \, dz \wedge dx + z \, dx \wedge dy &= \iint_S (x, y, z) \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS = \\ \iiint_V \operatorname{div} (x, y, z) \, dx \, dy \, dz &= \iiint_V 3 \, dx \, dy \, dz = 3 \operatorname{Vol}(V) = 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \iint_S x^2 y^2 z \, dx \wedge dy &= \iint_S (0, 0, x^2 y^2 z) \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS = \iiint_V \operatorname{div} (0, 0, x^2 y^2 z) \, dx \, dy \, dz = \\ &= \iiint_V x^2 y^2 \, dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \int_0^a r^4 \cos^2 \varphi \cos^2 \psi \sin^2 \varphi \cos^2 \psi r^2 \cos \psi \, dr \, d\psi \, d\varphi = \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 \varphi - \cos^4 \varphi) \, d\varphi \int_0^a r^6 \, dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \psi \, d\psi = \frac{1}{7} a^7 4 \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{4}\right) \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{2\pi}{105} a^7. \end{aligned}$$

$$\text{c) } \iint_S z \, dx \wedge dy = \iint_S (0, 0, z) \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS = \iiint_V \operatorname{div} (0, 0, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_V dx \, dy \, dz = \operatorname{Vol}(V) = \frac{4}{3} \pi abc.$$

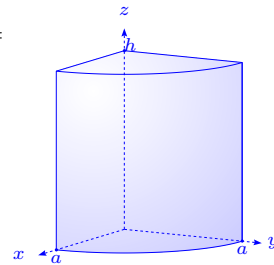
$$\begin{aligned} \text{d) } \iint_S z^2 \, dx \wedge dy &= \iint_S (0, 0, z^2) \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS = \iiint_V \operatorname{div} (0, 0, z^2) \, dx \, dy \, dz = \iiint_V 2z \, dx \, dy \, dz = \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^1 2cr \sin \psi \, abc \, r^2 \cos \psi \, dr \right) d\psi \right) d\varphi = 4\pi abc^2 \int_0^1 r^3 \, dr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \psi \cos \psi \, d\psi = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \iint_S xz \, dx \wedge dy + xy \, dy \wedge dz + yz \, dz \wedge dx &= \iint_S (xy, yz, xz) \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS = \\ &= \iiint_V \operatorname{div} (xy, yz, xz) \, dx \, dy \, dz = \iiint_V (y + z + x) \, dx \, dy \, dz = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \int_0^1 \left( \int_0^{1-x} \left( \int_0^{1-x-y} (x + y + z) \, dz \right) dy \right) dx &= \int_0^1 \left( \int_0^{1-x} -\frac{1}{2}(x + y - 1)(x + y - 1) \, dy \right) dx = \\ &= \frac{1}{6} \int_0^1 (-3x^2 y + x(3y^2 - 1) + y(y^2 - 3)) \Big|_0^{1-x} dx = \frac{1}{6} \int_0^1 (x^3 - 3x + 2) \, dx = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \iint_S yz \, dx \wedge dy + xz \, dy \wedge dz + xy \, dz \wedge dx &= \iint_S (xz, xy, yz) \cdot \boldsymbol{\eta} \, dS = \\ &= \iiint_V (z + x + y) \, dx \, dy \, dz = \end{aligned}$$



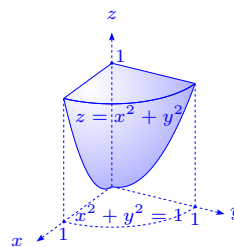
$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^a \left( \int_0^h (r \cos \theta + r \sin \theta + z) \, dz \right) r \, dr \right) d\theta &= \\ \frac{1}{3} a^3 h \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta + \sin \theta) \, d\theta + \frac{\pi}{2} \frac{h^2}{2} \frac{a^2}{2} &= \frac{2}{3} ha^3 + \frac{\pi}{8} h^2 a^2 = a^2 h \left( \frac{2}{3} a + \frac{\pi}{8} h \right). \end{aligned}$$

$$g) \oint_S y^2 z dx \wedge dy + xz dy \wedge dz + x^2 y dz \wedge dx =$$

$$\oint_S (xz, x^2 y, y^2 z) \cdot \boldsymbol{\eta} dS = \iiint_V (z + x^2 + y^2) dx dy dz =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^1 \left( \int_0^{r^2} (z + r^2) dz \right) r dr \right) d\theta =$$

$$\frac{\pi}{2} \int_0^1 \left( \frac{z^2}{2} + r^2 z \right) \Big|_0^{r^2} r dr = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \left( \frac{r^4}{2} + r^4 \right) r dr = \frac{3\pi}{4} \int_0^1 r^5 dr = \frac{3\pi}{4 \cdot 6} = \frac{\pi}{8}.$$



## Bibliografía

- [1] Archinard Gabriel, Guerrien Bernard 1988 *Analyse mathématique pour économistes*, 3<sup>a</sup> édition, Editorial Economica, Paris.
- [2] Apostol Tom 1977 *Análisis Matemático*, Editorial Reverté, Barcelona.
- [3] Apostol Tom, 1967 *Calculus*, Volumen II, Blaisdell Publishing Company, Massachusetts.
- [4] Attali P., Guillard J., Tissier A. 1995 *Analyse 2: Collection exercices et problèmes*, Editions Breal, Rosny.
- [5] Attali P., Guillard J., Tissier A. 1993 *Géométrie 1: Collection exercices et problèmes*, Editions Breal, Rosny.
- [6] Attali P., Guillard J., Tissier A. 1992 *Géométrie 2: Collection exercices et problèmes*, Editions Breal, Rosny.
- [7] Bass J. 1970 *Curso de matemáticas*, Tomo I, Editorial Toray–Masson, Barcelona
- [8] Berman G.N. 1983 *Problemas y ejercicios de análisis matemático*, 2<sup>a</sup> edición, Editorial MIR, Moscú.
- [9] Bronshtein I., Semendiaev K. 1982 *Manual de matemáticas para ingenieros y estudiantes*, 4<sup>a</sup> edición, Editorial MIR, Moscú.
- [10] Cartan Henri 1997 *Cours de Calcul différentiel*, Editorial Hermann, Paris.
- [11] Churchill R.V., Brown G.H. 1992 *Variable compleja y aplicaciones*, 5<sup>a</sup> edición, McGraw-Hill, Madrid

- [12] De Castro Korgi, Rodrigo 2003 *El universo L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X*, Editorial Panamericana, Bogotá, Colombia.
- [13] Del Castillo F. 1980 *Análisis matemático*, Vol.2, Editorial Alhambra, Madrid.
- [14] Demidovich Boris P. 1976 *5000 Problemas de Análisis Matemático* Editorial Paraninfo, Madrid.
- [15] Demidovich Boris P. 1973 *Problemas y ejercicios de análisis matemático*, 4<sup>a</sup> edición, Editorial MIR, Moscú.
- [16] Dixmier J. 1976 *Cours de Mathématiques*, Editorial Dunod, Paris
- [17] Douchet Jacques, Zwahlen Bruno 1983 *Calcul différentiel et intégral. Fonctions réelles d'une variable réelle*, Vol.1, Editorial Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, Suisse.
- [18] Douchet Jacques, Zwahlen Bruno 1987 *Calcul différentiel et intégral. Fonctions réelles d'une variable réelle, Exercices résolus*, Vol.3, Editorial Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, Suisse.
- [19] Douchet Jacques, Zwahlen Bruno 1986 *Calcul différentiel et intégral. Fonctions réelles de plusieurs variables réelles*, Vol.2, Editorial Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, Suisse.
- [20] Douchet Jacques, Zwahlen Bruno 1989 *Calcul différentiel et intégral. Fonctions réelles de plusieurs variables réelles, Exercices résolus*, Vol.4, Editorial Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, Suisse.
- [21] Doneddu A. 1981 *Fonctions vectorielles. Series. Équations différentielles*, Tome 5, 2<sup>a</sup> édition, Vuibert, Paris.
- [22] Doneddu A. 1981 *Géométrie différentielle. Intégrales multiples*, Tome 6, 2<sup>a</sup> édition, Vuibert, Paris.
- [23] Efimov A., Demidovich Boris 1983 *Problemas de las matemáticas superiores*, Vol.1, Editorial MIR, Moscú.

- [24] Edwards Jr., C.H. 1973 *Advanced calculus of several variables*, Dover, New York.
- [25] Efimov A., Demidovich Boris 1983 *Problemas de las matemáticas superiores*, Vol.2, Editorial MIR, Moscú.
- [26] Fogiel M. 1994 *Handbook of Mathematical, Scientific and Engineering*, New Jersey.
- [27] Goossens Michel, Mittelbach Frank, Samarin Alexander 1994, *The L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X Companion*, Addison Wesley Publishing Company.
- [28] Goossens Michel, Rahtz Sebastian 1999, *The L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X Web Companion*, Addison Wesley Publishing Company.
- [29] Hobby John 1997, *The MetaPost System*.
- [30] Hobby John 1997, *Drawing Graphs with MetaPost*.
- [31] Hobby John 1998, *A User's Manual for MetaPost*.
- [32] Knuth, Donald 1986, *The METAFONTbook*, Addison Wesley Publishing Company.
- [33] Knuth, Donald 1995, *The T<sub>E</sub>Xbook*, Addison Wesley Publishing Company.
- [34] Krée P. 1969 *Introduction aux mathématiques et a leurs applications fondamentales*, Editorial Dunod, Paris.
- [35] Kreysig Erwin 1993 *Matemáticas avanzadas para ingeniería*, Vol 1, Limusa, México.
- [36] Lamport, Leslie 1994 *L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X: A document preparation system*, Addison Wesley Publishing Company, 2<sup>a</sup> Edition.
- [37] Lang Serge 1990 *Introducción al Análisis Matemático*, Addison–Wesley Iberoamericana, Delaware.
- [38] Lang Serge 1994 *Calculus of several variables*, Sringer–Verlag.
- [39] Lelong–Ferrand Jaqueline 1963 *Géométrie différentielle*, Masson, Paris.
- [40] Liret F., Zisman M. 1984 *Maths*, Tome 2, Editorial Dunod, Paris
- [41] Liret F., Zisman M. 1987 *Maths*, Tome 3, Editorial Dunod, Paris

- [42] Marsden J, Tromba A. 1991 *Cálculo vectorial*, 3ª edición, Addison Wesley Iberoamericana, Delaware.
- [43] Nikolsky S.M. 1977 *A course of Mathematical Analysis*, Vol.1, Editorial MIR, Moscú.
- [44] Nikolsky S.M. 1977 *A course of Mathematical Analysis*, Vol.2, Editorial MIR, Moscú.
- [45] Monier J.M. 1990 *Analyse: Exercices résolus*, Tome 1, Dunod, Paris.
- [46] Monier J.M. 1990 *Analyse: Exercices résolus*, Tome 2, Dunod, Paris.
- [47] Monier J.M. 1993 *Géométrie: Exercices résolus*, Dunod, Paris.
- [48] Monier J.M. 1997 *Analyse*, Tome 4, Dunod, Paris.
- [49] Monier J.M. 1997 *Géométrie*, Tome 7, Dunod, Paris.
- [50] Ohl Thorsten 1997, *EMP: Encapsulated METAPOST for L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X*.
- [51] Piskunov N. 1978 *Cálculo diferencial e integral*, Vol I, Editorial MIR,
- [52] Piskunov N. 1978 *Cálculo diferencial e integral*, Vol II, Editorial MIR, Moscú.
- [53] Quinet J. 1978 *Cours élémentaire de mathématiques supérieures, Géométrie, Tomo 5*, 6ª edición, Dunod, Paris.
- [54] Quinet J. 1996 *Cours élémentaire de mathématiques supérieures, Calcul intégral et séries, Tomo 3*, 6ª edición, Dunod, Paris.
- [55] Restrepo G. 1997 *Análisis en  $\mathbb{R}^n$* , Editorial Universidad del Valle, Cali.
- [56] Reckdahl Keith *Using Imported Graphics un L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X2e*.
- [57] Ríbnikov K. 1987 *Historia de las matemáticas*, Editorial MIR, Moscú.
- [58] Ruskeepää, Heikki 1999, *Mathematica Navigator*, Academic Press.
- [59] Spiegel M.R. 1992 *Manual de fórmulas y tablas matemáticas*, Editorial McGraw-Hill, México.
- [60] Taylor A., Mann W. Robert 1989 *Fundamentos de cálculo avanzado*, Editorial Limusa, Mexico.
- [61] Tauvel, Patrice 1999 *Analyse complexe*, Dunod, Paris.