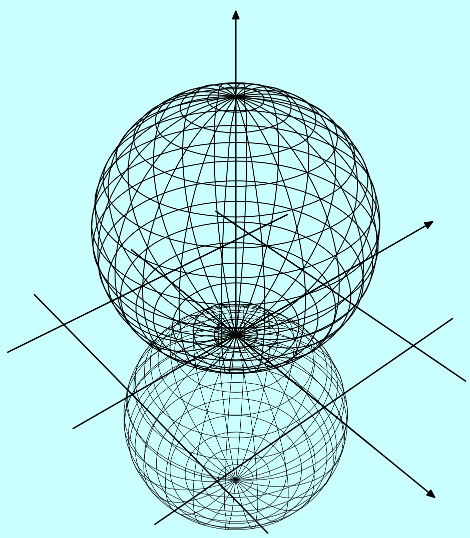
Universidad de Costa Rica

Escuela de Matemática



Serie: Cabécar

Ejercicios de integrales dobles, triples y múltiples

Editorial CIMPA

Prof. Jorge Poltronieri

2004

515.430.76

P772e Poltronieri Vargas, Jorge, 1952–

Ejercicios de integrales dobles, triples y múltiples /

Jorge Poltronieri. – [San José, C.R.: CIMPA], 2004.

243p. : il. ; 27cm (Serie cabécar)

A la cabeza de la port: Universidad de Costa Rica,

Escuela de Matemática.

ISBN 9968-9979-7-8

1. INTEGRALES – PROBLEMAS,

EJERCICIOS, ETC. I. Título.

CIP/1427

CC/SIBDI.UCR

Ejercicios de integrales dobles, triples y múltiples

Diagramación en LaTeX realizada por el autor

Diseño y concepto de carátula realizada por el autor

Impreso en Costa Rica

San José, 2004

Índice general

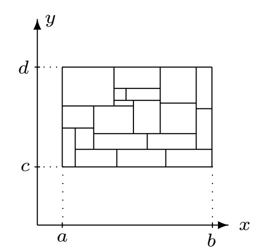
Capítulo 1

Integrales dobles, integrales triples, integrales múltiples

1.1 Particiones de rectángulos. Funciones escalonadas

Consideremos el $\mathsf{R} \subset \mathbb{R}^2$, producto cartesiano de dos intervalos cerrados $[\,a, b\,] \times [\,c, d\,]$ i.e. $\mathsf{R} = [\,a, b\,] \times [\,c, d\,] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$.

Definición 1.1.1 *Sea* $\mathsf{P} \subset \mathcal{P}(\mathsf{R})$*,* P *es una* R*, si* P *es una familia de sub-rectángulos* R_k*,* $k = 1, \ldots, m$*, de interior no vacío tales que* $\mathsf{R} = \bigcup\limits_{k=1}^{m} \mathsf{R}_k$ *y la intersección entre dos de ellos es vacía o se intersecan únicamente en la frontera.*



Cada $\mathsf{R}_k \in P$, es de la forma $\mathsf{R}_k = [\,a_k, b_k\,] \times [\,c_k, d_k\,]$.

Definición 1.1.2 *Se dice que dos partes* A *y* $B \subset \mathbb{R}^2$ *no se cruzan o no se traslapan, si su intersección es vacía o se intersecan únicamente en la frontera.*

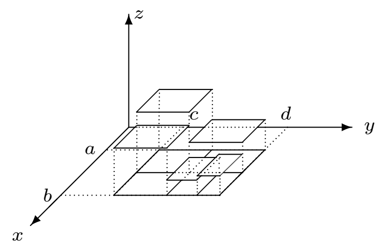
Definición 1.1.3 *Una partición* P' *de* R *se dice más fina que la partición* P*, si todo sub-rectángulo de* P' *está contenido en un sub-rectángulo de* P *y se escribe* $\mathsf{P} \leq \mathsf{P}'$*.*

Definición 1.1.4 *Sea* P *una partición de* R *i.e.* $\mathsf{R} = \bigcup\limits_{k=1}^{m} \mathsf{R}_k$*, se denomina de* P *al valor* $\max\{d(\mathsf{R}_k)/k = 1, \ldots, m\}$*, donde* $d(\mathsf{R}_k) = \sup\limits_{\substack{(x,y)\in \mathsf{R}_k \\ (x',y')\in \mathsf{R}_k}} \|(x, y) - (x', y')\|$ *y se denota* $\|\mathsf{P}\|$*.*

Definición 1.1.5 *Dado el sub-rectángulo* $\mathsf{R}_k = [\,a_k, b_k\,] \times [\,c_k, d_k\,] \in \mathsf{P}$*, llamamos sub-rectángulo abierto de* P *o de* R*, a* $\overset{\circ}{\mathsf{R}}_k = \,]\,a_k, b_k\,[\, \times \,]\,c_k, d_k\,[$ *producto cartesiano de los intervalos abiertos, o sea es un sub-rectángulo sin los lados.*

Definición 1.1.6 Definición de función escalonada *Una función* f *definida en un rectángulo* R *se dice escalonada, si existe una partición* P *de* R *tal que* f *es constante en cada uno de los sub-rectángulos abiertos de la partición* P *y escribimos* $f \in \mathcal{E}(\mathsf{R})$.

En la figura adjunta se muestra un ejemplo de función escalonada. La función tiene valores dados en cada uno de los puntos de los bordes de los sub-rectángulos, pero los valores en estos bordes no tienen influencia en el cálculo de la integral.



Proposición 1.1.1 *Sean* f*,* g *funciones escalonadas definidas sobre el rectángulo* R*, la combinación lineal* $\alpha f + \beta g$ *también es escalonada sobre* R*, o sea* $\mathcal{E}(\mathsf{R})$ *es un espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$.

Definición 1.1.7 Definición de la integral doble de una función $f \in \mathcal{E}(\mathsf{R})$
Sea f *una función escalonada sobre* R *que toma el valor* α_k *sobre el sub-rectángulo abierto* $\overset{\circ}{\mathsf{R}}_k = \,]\,x'_k, x_k\,[\, \times \,]\,y'_k, y_k\,[$ *de* R*, la integral doble de* f *sobre* R *se define por:*

$$\iint\limits_{\mathsf{R}} f = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k (x_k - x'_k)(y_k - y'_k) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \Delta x_k \Delta y_k = \iint\limits_{\mathsf{R}} f(x,y)\, dx\, dy.$$

Teorema 1.1.1 *Sean* f*,* $g \in \mathcal{E}(\mathsf{R})$*, con* $\mathsf{R} = [\,a, b\,] \times [\,c, d\,]$ *y sean* α*,* $\beta \in \mathbb{R}$*, entonces:*

i) $\displaystyle\iint\limits_{\mathsf{R}} (\alpha f + \beta g) = \alpha \iint\limits_{\mathsf{R}} f + \beta \iint\limits_{\mathsf{R}} g.$

ii) Si R *está dividido en dos rectángulos* R_1 *y* R_2*,* $\displaystyle\iint\limits_{\mathsf{R}} f = \iint\limits_{\mathsf{R}_1} f + \iint\limits_{\mathsf{R}_2} f.$

iii) Si $f(x,y) \leq g(x,y)$*,* $\forall (x,y) \in \mathsf{R}$*,* $\displaystyle\iint\limits_{\mathsf{R}} f \leq \iint\limits_{\mathsf{R}} g.$

En particular si $g(x,y) \geq 0$, $\forall\,(x,y) \in \mathsf{R}$, $\displaystyle\iint\limits_{\mathsf{R}} g \geq 0$.

1.1.1 Definición de integral doble de una función definida y acotada en un rectángulo

Sea f una función definida y acotada en un rectángulo R, de modo que $|f(x,y)| \leq M$, $\forall\,(x,y) \in \mathsf{R}$, i.e. f está acotada en R y sean s y t dos funciones escalonadas sobre R tales que $s(x,y) \leq f(x,y) \leq t(x,y)$, $\forall\,(x,y) \in \mathsf{R}$, entonces si existe un número real I único tal que:

$$\iint\limits_{\mathsf{R}} s \leq I \leq \iint\limits_{\mathsf{R}} t, \tag{2}$$

$\forall\,s$, t funciones escalonadas sobre R que satisfacen $s \leq f \leq t$, $\forall\,(x,y) \in \mathsf{R}$, se denomina a I como la de f sobre R y se denota con el símbolo:

$$I = \iint\limits_{\mathsf{R}} f = \iint\limits_{\mathsf{R}} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Cuando I existe, se dice también que la función f es integrable sobre R.

1.1.2 Integral doble superior e inferior

Sea f una función acotada sobre el rectángulo R y sean s, t dos funciones escalonadas tales que $s \leq f \leq t$ en R. Sean

$$G = \Big\{ \iint\limits_{\mathsf{R}} s / s \text{ es escalonada en } \mathsf{R},\ s \leq f \text{ en } \mathsf{R} \Big\} \text{ y}$$
$$H = \Big\{ \iint\limits_{\mathsf{R}} t / t \text{ es escalonada en } \mathsf{R},\ f \leq t \text{ en } \mathsf{R} \Big\},$$

entonces G y H son conjuntos no vacíos ya que f es acotada i.e. $|f| \leq M \Longrightarrow -M \in G$ y $M \in H$. Además, $\displaystyle\iint\limits_{\mathsf{R}} s \leq \iint\limits_{\mathsf{R}} t$, si $s \leq f \leq t$, por lo que $\forall\,a \in G$, $\forall\,b \in H$, se tiene $a \leq b$. Por consiguiente, G es acotada superiormente y H es acotada inferiormente y tenemos:

$$\iint\limits_{\mathsf{R}} s \leq \sup G \leq \inf H \leq \iint\limits_{\mathsf{R}} t, \quad \forall\,s, \forall\,t \text{ escalonadas tales que } s \leq f \leq t \text{ en } \mathsf{R}.$$

Así hemos probado que los números $\sup G$ e $\inf H$ satisfacen la ecuación (2) y se concluye que f es integrable $\Longleftrightarrow \sup G = \inf H$.

El número $\sup G$ se llama de f y se denota por $\underline{I}(f)$. El número $\inf H$ se llama de f y se denota $\overline{I}(f)$. De esta forma hemos probado el siguiente teorema.

Teorema 1.1.2 *Sea f una función acotada en un rectángulo R de modo que:*

$$\iint\limits_{\mathsf{R}} s \leq \underline{I}(f) \leq \overline{I}(f) \leq \iint\limits_{\mathsf{R}} t, \quad \forall s, \forall t, \text{ escalonadas tales que } s \leq f \leq t,$$

entonces la función f es integrable en R si y sólo si la integral superior y la integral inferior de f son iguales y tenemos:

$$\iint\limits_{\mathsf{R}} f = \underline{I}(f) = \overline{I}(f).$$

Teorema 1.1.3 *Sean f y g dos funciones acotadas e integrables sobre el rectángulo $\mathsf{R} = [\,a, b\,] \times [\,c, d\,]$ y sean α, $\beta \in \mathbb{R}$, entonces:*

i) $\displaystyle\iint\limits_{\mathsf{R}} (\alpha f + \beta g) = \alpha \iint\limits_{\mathsf{R}} f + \beta \iint\limits_{\mathsf{R}} g.$

ii) Si R se subdivide en dos rectángulos R_1 y R_2, $\displaystyle\iint\limits_{\mathsf{R}} f = \iint\limits_{\mathsf{R}_1} f + \iint\limits_{\mathsf{R}_2} f.$

iii) Si $f(x, y) \leq g(x, y)$ en R, $\displaystyle\iint\limits_{\mathsf{R}} f \leq \iint\limits_{\mathsf{R}} g.$

En particular si $g(x, y) \geq 0$ en R, $\displaystyle\iint\limits_{\mathsf{R}} g \geq 0.$

Teorema 1.1.4 Teorema de Fubini[1]

[1]**Guido Fubini (1879-1943)** Nace el 19 de enero 1879 en Venecia, Italia. Muere el 6 de junio de 1943 en New York, U.S.A. En 1896 Fubini entró a la Escuela Normal Superior de Pisa. Fue influído por por Dini y Bianchi a estudiar geometría. Presentó su tesis doctoral en paralelismo en espacios elípticos de Clifford, en 1900.

Enseñó en la Universidad de Catania, Sicilia, en el Politécnico y en la Universidad de Turín. Por diferencias con el gobierno de Mussollini, Fubini fue forzado a jubilarse de su puesto en Turín. Recibió una invitación del Instituto de Estudios Avanzados en Princeton en 1939 y emigra a los Estados Unidos Por sus problemas de la salud, muere cinco años después del corazón. Los intereses de Fubini en matemáticas eran muy diversos. Además del área del análisis, trabajó en el cálculo de variaciones donde él estudió la integral de Weierstrass reduciéndola a la integral de Lebesgue y expresa la integral de superficie en términos de dos integraciones simples. Otro tema de análisis que estudió fue las ecuaciones integrales no lineales. Fubini trabajó también en la teoría de grupos, en grupos lineales y grupos de funciones de automorfismos. Sus intereses incluyeron los grupos continuos donde trató el problema de proveer de una métrica al grupo. En espacios no euclidiano, extendió resultados de Appell y Mittag-Leffler. Sus trabajos más importantes fueron en geometría diferencial projectiva, donde usó el cálculo diferencial. El teorema de la igualdad de las integrales iteradas lleva el nombre de Fubini, quien lo probó con gran generalidad en 1907, aunque Cauchy y sus contemporáneos ya sabían que se cumplía la igualdad para funciones continuas.

Sea f una función definida acotada e integrable en un rectángulo $\mathsf{R} = [\,a, b\,] \times [\,c, d\,]$.

Si para cada y fija, $y \in [\,c, d\,]$, la integral $\displaystyle\int_a^b f(x, y)\, dx$ existe, (valor que denotamos $\alpha(y)$) y si la integral $\displaystyle\int_c^d \alpha(y)\, dy$ existe, entonces es igual a la integral doble $\displaystyle\iint_{\mathsf{R}} f$.

Además si para cada $x \in [\,a, b\,]$ fijo, la integral $\displaystyle\int_c^d f(x, y)\, dy$ existe (valor que denotaremos $\beta(x)$) y si $\displaystyle\int_a^b \beta(x)\, dx$ existe, entonces es igual a la integral doble $\displaystyle\iint_{\mathsf{R}} f$.

Finalmente escribimos:

$$\iint_{\mathsf{R}} f = \iint_{\mathsf{R}} f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy.$$

1.2 Sumas de Riemann y la integral de Riemann

Definición 1.2.1 *Sea f una función acotada en un rectángulo $\mathsf{R} = [\,a, b\,] \times [\,c, d\,]$ y sea P una partición de R, la suma $S_{\mathsf{P}}(f) = S(\mathsf{P}, f) = \sum\limits_{k=1}^{m} f(\zeta_k) A(\mathsf{R}_k)$, con $\zeta_k \in \mathsf{R}_k$, se llama de la función f asociada a la partición P.*

1.2.1 Sumas superiores y sumas inferiores

Sea f una función acotada en un rectángulo $\mathsf{R} = [\,a, b\,] \times [\,c, d\,]$ y sea P una partición arbitraria de R. Consideremos $M_k = \sup\limits_{(x,y) \in \mathsf{R}_k} f(x, y)$ y $m_k = \inf\limits_{(x,y) \in \mathsf{R}_k} f(x, y)$, $(x, y) \in \mathsf{R}_k$ y las sumas $\underline{S}_{\mathsf{P}} = \sum\limits_{\mathsf{P}} m_k\, A(\mathsf{R}_k)$ y $\overline{S}_{\mathsf{P}} = \sum\limits_{\mathsf{P}} M_k\, A(\mathsf{R}_k)$.

Las sumas $\underline{S}_{\mathsf{P}}$ y $\overline{S}_{\mathsf{P}}$ se llaman suma de Riemann inferior y suma de Riemann superior de la función f (correspondientes a la partición P) respectivamente. Para $\zeta_k \in \mathsf{R}_k$ se tiene $m_k \leq f(\zeta_k) \leq M_k$, por lo que $\sum\limits_{\mathsf{P}} m_k A(\mathsf{R}_k) \leq \sum\limits_{\mathsf{P}} f(\zeta_k) A(\mathsf{R}_k) \leq \sum\limits_{\mathsf{P}} M_k A(\mathsf{R}_k)$, es decir que $\underline{S}_{\mathsf{P}} \leq S_{\mathsf{P}} \leq \overline{S}_{\mathsf{P}}$. Además si $\mathsf{P} \leq \mathsf{P}'$, entonces $\underline{S}_{\mathsf{P}} \leq \underline{S}_{\mathsf{P}'} \leq \overline{S}_{\mathsf{P}'} \leq \overline{S}_{\mathsf{P}}$.

Consideremos P' y P'' dos particiones y sea P la superposición de P' y P'', entonces P es más fina que P' y P'' por lo que se tiene:

$$\underline{S}_{\mathsf{P}'} \leq \underline{S}_{\mathsf{P}} \leq \overline{S}_{\mathsf{P}} \leq \overline{S}_{\mathsf{P}''} \Longrightarrow \underline{S}_{\mathsf{P}'} \leq \overline{S}_{\mathsf{P}''}.$$

Si fijamos P'' y consideramos P' variable, definimos la integral inferior de Riemann de f sobre R, por la cantidad $\underline{I}(f) = \sup\limits_{\mathsf{P}} \underline{S}_{\mathsf{P}}$ y la integral inferior de superior de Riemann de f sobre R, por la cantidad $\bar{I}(f) = \inf\limits_{\mathsf{P}} \bar{S}_{\mathsf{P}}$. Se ve claramente que $\underline{I}(f) \leq \bar{I}(f)$.

De acuerdo a nuestras consideraciones, la integral inferior y superior de Riemann sobre R existen, si f es acotada en R. Así podemos establecer el siguiente resultado.

Teorema 1.2.1 *Sea $\mathsf{R} = [a,b] \times [c,d]$ y sea $f\colon \mathsf{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada en R, las siguientes propiedades son equivalentes:*

i) f es Riemann integrable.

ii) $\underline{I} = \bar{I}$.

iii) $\forall\, \epsilon > 0$, existe una partición P de R tal que $\overline{S}_{\mathsf{P}} - \underline{S}_{\mathsf{P}} < \epsilon$.

iv) $\forall\, \epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\forall\, \mathsf{P}$ partición con $\|\mathsf{P}\| < \delta$, se tiene $\overline{S}_{\mathsf{P}} - \underline{S}_{\mathsf{P}} < \epsilon$.

1.2.2 Conjuntos de contenido nulo

Definición 1.2.2 *Un conjunto $\mathsf{S} \subset \mathbb{R}^2$ se dice de , si $\forall\, \epsilon > 0$, $\exists\, \mathsf{R}_1, \ldots, \mathsf{R}_m$ rectángulos tales que $\mathsf{S} \subset \bigcup\limits_{k=1}^{m} \mathsf{R}_k$ y $\sum\limits_{k=1}^{m} A(\mathsf{R}_k) \leq \epsilon$.*
La definición nos ilustra la forma en que un conjunto tiene contenido nulo, pues debe cubrirse por una familia de rectángulos cuya área total sea todo lo pequeño que deseamos.

1.3 Integrabilidad de funciones continuas

Teorema 1.3.1 *Sea f una sucesión continua en un rectángulo $\mathsf{R} = [a,b] \times [c,d]$, entonces f es integrable y el valor de la integral se puede calcular de manera iterada así:*

$$\iint\limits_{\mathsf{R}} f = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\, dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\, dx \right] dy.$$

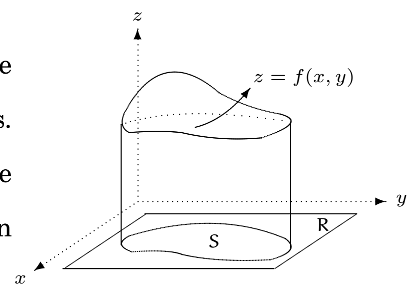
Teorema 1.3.2 *Una función f definida y acotada en $\mathsf{R} = [a,b] \times [c,d]$, si el de f en R tiene contenido nulo, entonces f es integrable sobre R.*

1.3.1 Integrales dobles sobre regiones más generales

Definición 1.3.1 *Se dice que un conjunto $\mathsf{S} \subset \mathbb{R}^2$ es medible si es acotado y su frontera (que denotamos $\partial \mathsf{S}$) es de contenido nulo.*

1.3.2 Integración sobre conjuntos medibles

Proposición 1.3.1 *Sea $\mathsf{S} \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto acotado, para que S sea medible es necesario y suficiente que $\forall\, \epsilon > 0$, existan dos conjuntos medibles S' y S'' tales que $\mathsf{S}' \subset \mathsf{S} \subset \mathsf{S}''$ y $A(\mathsf{S}'') - A(\mathsf{S}') < \epsilon$ y S es medible.*



Con base en lo anterior, el concepto de integral doble se puede extender sin dificultad a regiones más generales. Consideremos una región S medible, de modo que S que esté contenida en un rectángulo R y sea f una función definida y acotada sobre S.

Definimos una nueva función $\tilde{f}$ sobre R, de la siguiente manera:

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } (x, y) \in \mathsf{S} \\ 0 & \text{si } (x, y) \in \mathsf{R} \backslash \mathsf{S}. \end{cases} \tag{3}$$

Sea $\mathsf{S} \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto medible (i.e. acotado), entonces f es integrable si y sólo si $\forall\, \mathsf{R}$ rectángulo tal que $\mathsf{S} \subset \mathsf{R}$, $\displaystyle\iint\limits_{\mathsf{S}} f = \iint\limits_{\mathsf{R}} \tilde{f}$.

Proposición 1.3.2 *Sea $\mathsf{S} \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto medible, $f, g\colon \mathsf{S} \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones integrables sobre S tales que $f \leq g$, sobre S, entonces se tiene que $\displaystyle\iint\limits_{\mathsf{S}} f \leq \iint\limits_{\mathsf{S}} g$.*

Proposición 1.3.3 *Sea $\mathsf{S} \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto medible y sea $f\colon \mathsf{S} \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable sobre S, i.e. $|f(x, y)| \leq M$, $\forall\, (x, y) \in \mathsf{S}$, entonces $\left| \displaystyle\iint\limits_{\mathsf{S}} f(x, y)dx\, dy \right| \leq MA(\mathsf{S})$.*
En particular, si S es de contenido nulo, $\displaystyle\iint\limits_{\mathsf{S}} f = 0$.

Proposición 1.3.4 *Si S y S' son conjuntos medibles de $\mathbb{R}^2$ de modo que $\mathsf{S} \cap \mathsf{S}'$ es de contenido nulo y si f es integrable sobre $\mathsf{S} \cup \mathsf{S}'$, entonces:*

$$\iint\limits_{\mathsf{S}\cup\mathsf{S}'} f = \iint\limits_{\mathsf{S}} f + \iint\limits_{\mathsf{S}'} f.$$

Proposición 1.3.5 *Sea* $\mathsf{S} \subset \mathbb{R}^2$ *un conjunto medible,* $f,\ g\colon \mathsf{S} \longrightarrow \mathbb{R}$ *funciones que son iguales salvo en un conjunto* $D \subset \mathsf{S}$ *de contenido nulo, entonces* $\iint\limits_{\mathsf{S}} f = \iint\limits_{\mathsf{S}} g$.

Integración de funciones sobre conjuntos medibles

Teorema 1.3.3 *Sea* $\mathsf{S} \subset \mathbb{R}^2$ *medible y* $f\colon \mathsf{S} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función acotada sobre* S*, las siguientes propiedades son equivalentes:*

i) f *es Riemann integrable sobre* S

ii) $\underline{I}(f) = \bar{I}(f)$.

iii) $\forall\, \epsilon > 0$*, existe una* T *de* S *tal que* $\overline{S}_{\mathsf{T}} - \underline{S}_{\mathsf{T}} < \epsilon$.

iv) $\forall\, \epsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$ *tal que* $\forall \mathsf{T}$ *partición con* $\|\mathsf{T}\| < \delta$*, se tiene* $\overline{S}_{\mathsf{T}} - \underline{S}_{\mathsf{T}} < \epsilon$.

1.3.3 Integración sobre regiones especiales

Consideremos primeramente conjuntos S de $\mathbb{R}^2$ tales que:

$$\mathsf{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\},$$

donde φ_1 y φ_2 son funciones continuas en el intervalo $[\,a, b\,]$ que satisfacen $\varphi_1 \leq \varphi_2$.

Este tipo de regiones las llamaremos .

Otro tipo de regiones S (tipo II) se definirá así:

$$\mathsf{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / c \leq y \leq d,\ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\},$$

donde ψ_1 y ψ_2 son funciones continuas en $[\,c, d\,]$ de modo que $\psi_1 \leq \psi_2$.

Corolario 1.3.1 *Las regiones que pueden particionarse en un número finito de subregiones, cada una de las cuales es del tipo I o del tipo II son medibles.*

Teorema 1.3.4 *Sea* S *una región de tipo I, comprendida entre las gráficas* φ_1 *y* φ_2*. Sea* f *una función definida y acotada sobre* S *y continua en el interior de* S*, entonces* f *es integrable en* S *y la integral doble de* f *sobre* S *es tal que:*

$$\iint\limits_{\mathsf{S}} f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right] dx.$$

Corolario 1.3.2 *Si f está definida y acotada en S región del tipo II y es continua en el interior de S, entonces f es integrable en S y se tiene:*

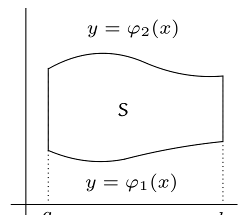
$$\iint_S f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right] dy.$$

1.3.4 Aplicaciones al cálculo de áreas y volúmenes

Sea S una región del tipo I, dada por:

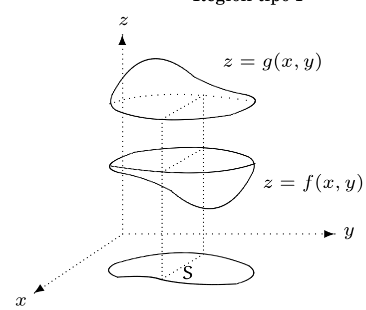
$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}.$$

Si $f(x,y) = 1$ en S, $\displaystyle\iint_S 1\,dx\,dy = \int_a^b [\,\varphi_2(x) - \varphi_1(x)\,]\,dx$, o sea $\displaystyle\iint_S dx\,dy$ es el área de la región S.



Región tipo I

De manera general, si f y g son funciones continuas en S, con $f \le g$ en S, la integral doble $\displaystyle\iint_S (g-f)$ es igual al volumen del sólido comprendido entre las gráficas de las funciones f y g.



Teorema 1.3.5 Teorema del valor medio para integrales dobles *Sea f una función real continua, definida sobre S una región del tipo I o II, entonces existe $(x_o, y_o) \in S$ tal que:*

$$\iint_S f = f(x_o, y_o) A(S),$$

donde $A(S)$ denota el área de S.

1.3.5 Aplicaciones de la integral doble

Si f es una función de dos variables sobre S, el f sobre S será:

$$\bar{f} = \frac{\displaystyle\iint_S f(x,y)\,dx\,dy}{\displaystyle\iint_S dx\,dy}.$$

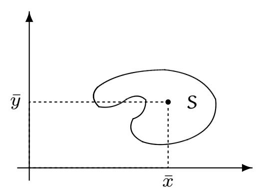
Si la región S medible es una lámina y la función f es la masa por unidad de área en el punto (x, y), la total es $m(\mathsf{S}) = \iint\limits_{\mathsf{S}} f(x,y)\,dx\,dy$ y $\bar{f}$ es la densidad media de la lámina.

Definimos los momentos estáticos m_x y m_y respecto a los ejes x y y por:

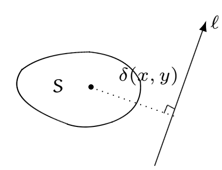
$$m_x = \iint\limits_{\mathsf{S}} y\,f(x,y)\,dx\,dy, \qquad m_y = \iint\limits_{\mathsf{S}} x\,f(x,y)\,dx\,dy,$$

Por analogía con el caso finito, definimos el por $(\bar{x}, \bar{y})$, donde:

$$\bar{x} = \frac{1}{m(\mathsf{S})} \iint\limits_{\mathsf{S}} x\,f(x,y)\,dx\,dy, \qquad \bar{y} = \frac{1}{m(\mathsf{S})} \iint\limits_{\mathsf{S}} y\,f(x,y)\,dx\,dy.$$



Si la densidad $f(x, y) = c$ en S, el punto $(\bar{x}, \bar{y})$ se llama centroide de la región S y tenemos $\bar{x} = \dfrac{1}{A(\mathsf{S})} \iint\limits_{\mathsf{S}} x\,dx\,dy$, $\bar{y} = \dfrac{1}{A(\mathsf{S})} \iint\limits_{\mathsf{S}} y\,dx\,dy$.



Si ℓ es una recta en el plano de la región S y designamos $\delta(x, y)$ la distancia desde $(x, y) \in \mathsf{S}$ a la recta ℓ, el valor I_ℓ definido por $I_\ell = \iint\limits_{\mathsf{S}} \delta^2(x,y)\,f(x,y)\,dx\,dy$, se llama de la región S respecto a la recta ℓ.
Si $f(x, y) = 1$, I_ℓ se llama momento de inercia o segundo momento de la región S respecto a ℓ. Los momentos de inercia de la región S respecto a los ejes x, y, se designan I_x, I_y respectivamente y están dados por:

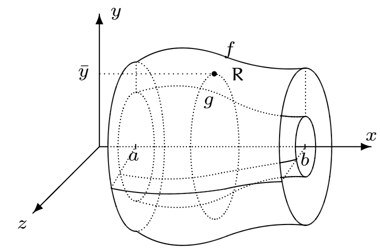
$$I_x = \iint\limits_{\mathsf{S}} y^2\,f(x,y)\,dx\,dy, \qquad I_y = \iint\limits_{\mathsf{S}} x^2\,f(x,y)\,dx\,dy.$$

La suma de estas dos expresiones se llama momento polar de inercia I_o, respecto al origen:

$$I_o = I_x + I_y = \iint\limits_{\mathsf{S}} (x^2 + y^2)\,f(x,y)\,dx\,dy.$$

1.3.6 Teorema de Guldin–Pappus

Consideremos una región R situada entre los gráficos de las funciones f y g, definidas en el intervalo $[a, b]$, siendo $0 \le g \le f$. Sea S el generado al hacer girar la región R alrededor del eje x.



Designemos $A(\mathsf{R})$ el área de R, $V(\mathsf{S})$ el volumen de S y con $\bar{y}$ la coordenada del centroide de R. Al girar R para generar S, el centroide se desplaza a lo largo de una circunferencia de radio $\bar{y}$.

El teorema de Guldin[2]–Pappus[3]establece que el volumen de S, es igual al producto de la longitud de la circunferencia de radio $\bar{y}$ por el área de R:

$$V(\mathsf{S}) = 2\pi\bar{y}A(\mathsf{R}).$$

1.4 Cambio de variable en la integral doble

Teorema 1.4.1 *Sea f una función acotada sobre R y sea $\mathbf{r}\colon \mathsf{R}' \longrightarrow \mathsf{R}$ una aplicación biyectiva de clase C^1, tal que $\mathbf{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$, con $\det J_{\mathbf{r}}(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$, entonces:*

$$\iint\limits_{\mathsf{R}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\mathsf{R}'} f(x(u,v), y(u,v))|\det J_{\mathbf{r}}(u,v)|\,du\,dv.$$

[2]**Paul Guldin (1577-1643)** Nace el 12 de junio de 1577 en Saint Gall (hoy Sant Gallen), Suiza. Muere el 3 de noviembre de 1643 en Graz, Austria. Paul Guldin se llamaba Habakkuk Guldin. El llegó a ser un orfebre y trabajó en este oficio en su juventud. De origen judío, sus padres eran protestantes, pero Guldin se convirtió al catolicismo a la edad de 20 y se une a los jesuitas. En este momento cambia su nombre a Paul. En 1609 fue mandado al Colegio Jesuita en Roma, donde estudió bajo la dirección de Clavius. Enseñó en el Colegio Jesuita en Roma y cuando volvió a Graz, fue profesor de matemáticas en Viena de 1623 hasta 1637. Guldin mantuvo correspondencia con Kepler, pero en temas religiosos, no matemática ni astronomía. Los los trabajos más importantes de Guldin están en 4 volúmenes. En el Volumen I se consideran los centros de la gravedad y en particular discute el centro de la gravedad de la Tierra. El volumen II tiene los teoremas de Guldin.

[3]**Pappus de Alejandría (260-)** Matemático griego que nace y muere en Alejandría, desconociéndose la fecha de su muerte. Junto a Zósimo y Diofanto, formó la retaguardia de la matemática griega. Fue ante todo un recopilador, que resumió toda la matemática griega en ocho libros. Personalmente no añadió nada original, pero su valía radica en que sus libros contienen casi todo lo que hoy sabemos de la matemática griega. Además comentó detalladamente el sistema astronómico.

1.4.1 Caso de coordenadas polares

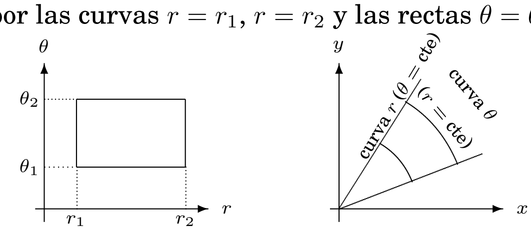
En este caso escribimos r y θ en vez de u y v y definimos la aplicación $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$. Para obtener una aplicación biyectiva supongamos que $r > 0$ y que $\theta \in [\,\theta_o, \theta_o + 2\pi\,[$. Así, la aplicación es biyectiva en $]\,0, +\infty\,[\, \times [\,\theta_o, \theta_o + 2\pi\,[$ del plano $r\theta$ y el conjunto $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. El Jacobiano es:

$$\det J(r,\theta) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\mathrm{sen}^2\theta + \cos^2\theta) = r$$

y la transformación de la integral sería:

$$\iint\limits_{\mathsf{S}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\mathsf{S}'} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) r\,dr\,d\theta.$$

Las curvas r son rectas que pasan por el origen y las curvas θ son círculos concéntricos en el origen. La imagen del rectángulo $[\,r_1, r_2\,] \times [\,\theta_1, \theta_2\,]$ es un cuadrilátero curvilíneo en el plano xy limitado por las curvas $r = r_1$, $r = r_2$ y las rectas $\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_2$.



El área en coordenadas polares

Si la región R está determinado en coordenadas polares r, θ, satisface las desigualdades $\alpha \leq \theta \leq \beta$, $\phi(\theta) \leq y \leq \psi(\theta)$, se tiene:

$$A(\mathsf{R}) = \iint\limits_{\mathsf{R}} r\,dr\,d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\phi(\theta)}^{\psi(\theta)} r\,dr\,d\theta.$$

1.5 Integrales múltiples

El concepto de integral múltiple puede extenderse sin dificultad al caso de n-dimensiones, para $n \geq 3$. El desarrollo es completamente análogo al caso $n = 2$.

Definición 1.5.1 *Se define un n-rectángulo abierto $\overset{\circ}{\mathsf{R}}$ como el producto cartesiano de n-intervalos abiertos $]\,a_k, b_k\,[$, $k = 1, \ldots, n$.*

De manera similar se define el n-rectángulo cerrado $\mathsf{R} \subset \mathbb{R}^n$, como el producto cartesiano de n-intervalos cerrados $[\,a_k, b_k\,]$, $k = 1, \ldots, n$.

Como en el caso $n = 2$, el volumen n-dimensional del n-rectángulo se escribe $V(\mathsf{R}) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$.

Definición 1.5.2 *Se dice que dos partes A y $B \subset \mathbb{R}^n$ no se cruzan, si su intersección es vacía o se intersecan únicamente en la frontera.*

Definición 1.5.3 *Sea $\mathsf{R} \subset \mathbb{R}^n$ un n-rectángulo, una P de R es una familia de m sub-rectángulos n-dimensionales R_k, de interior no vacío, tales que $\mathsf{R} = \bigcup_{k=1}^{m} \mathsf{R}_k$ y la intersección entre dos de ellos es vacía o se intersecan únicamente en la frontera.*

Definición 1.5.4 *Una partición P' de $\mathsf{R} \subset \mathbb{R}^n$ es más fina que P, si todo sub-rectángulo $\mathsf{R}'_{i'}$ de P' está contenido en un sub-rectángulo R_i de P y se escribe $\mathsf{P} \leq \mathsf{P}'$.*

Definición 1.5.5 Norma de una partición *Sea P una partición de $\mathsf{R} \subset \mathbb{R}^n$ i.e. $\mathsf{R} = \bigcup_{k \in K} \mathsf{R}_k$, donde R_k es un n-sub-rectángulo, K finito. La norma de P es $\|\mathsf{P}\| = \max\{d(\mathsf{R}_k)/k \in K\}$, donde $d(\mathsf{R}_k) = \sup_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathsf{R}_k} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ es el diámetro de R_k.*

Definición 1.5.6 *Una función f definida en R se dice escalonada, si es constante en cada uno de los sub-rectángulos abiertos de alguna partición P de R.*

El conjunto de funciones escalonadas sobre R, se denota $\mathcal{E}(\mathsf{R})$, o simplemente $\mathcal{E}$.

Definición 1.5.7 *Si f es escalonada sobre R, la integral n-múltiple de esta función se define por:*

$$\int_{\mathsf{R}} f = \int \!\cdots\! \int_{\mathsf{R}} f = \sum_k c_k V(\mathsf{R}_k),$$

donde c_k es el valor de f en el n-rectángulo abierto $\overset{\circ}{\mathsf{R}}_k$ y $V(\mathsf{R}_k)$ el volumen n-dimensional de R_k. La suma se extiende sobre todos los n-sub-rectángulos de la partición P.

Teorema 1.5.1 *Si f es escalonada sobre el n-rectángulo $\mathsf{R} = \prod_{i=1}^{n} [\, a_i, b_i \,]$, tenemos que:*

$$\underset{\mathsf{R}}{\int \cdots \int} f = \int_{a_n}^{b_n} \left(\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \cdots \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \right) dx_2 \cdots dx_{n-1} \right) dx_n.$$

Teorema 1.5.2 *Sean $f,\ g \in \mathcal{E}(\mathsf{R})$, con $\mathsf{R} \subset \mathbb{R}^n$ un n-rectángulo y sean $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, entonces:*

i) $\underset{\mathsf{R}}{\int \cdots \int} (\alpha f + \beta g) = \alpha \underset{\mathsf{R}}{\int \cdots \int} f + \beta \underset{\mathsf{R}}{\int \cdots \int} g.$

ii) Si $\mathsf{R} = \mathsf{R}_1 \cup \mathsf{R}_2$, donde R_1 y R_2 son n-rectángulos que no se cruzan:

$$\underset{\mathsf{R}}{\int \cdots \int} f = \underset{\mathsf{R}_1}{\int \cdots \int} f + \underset{\mathsf{R}_2}{\int \cdots \int} f.$$

iii) Si $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$, $\forall \mathbf{x} \in \mathsf{R}$, $\underset{\mathsf{R}}{\int \cdots \int} f \leq \underset{\mathsf{R}}{\int \cdots \int} g.$

En particular si $g(\mathbf{x}) \geq 0$, $\forall\, \mathbf{x} \in \mathsf{R}$, $\underset{\mathsf{R}}{\int \cdots \int} g \geq 0.$

Definición 1.5.8 *Sea f una función acotada sobre R y sean s y t funciones escalonadas tales que $s \leq f \leq t$ en R, si existe un único número real I tal que:*

$$\underset{\mathsf{R}}{\int \cdots \int} s \leq I \leq \underset{\mathsf{R}}{\int \cdots \int} t, \qquad \forall\, s,\ \forall\, t \in \mathcal{E},\ s \leq f \leq t \text{ en } \mathsf{R},$$

entonces se dice que f es integrable en R y el número I se llama la (n-múltiple) de f:

$$I = \underset{\mathsf{R}}{\int \cdots \int} f = \underset{\mathsf{R}}{\int \cdots \int} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \underset{\mathsf{R}}{\int \cdots \int} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n.$$

Para el caso $n = 3$, escribimos (x, y, z) en vez de (x_1, x_2, x_3), o sea:

$$\underset{\mathsf{R}}{\iiint} f = \underset{\mathsf{R}}{\iiint} f(x, y, z)\, dxdydz.$$

Teorema 1.5.3 *Sean f y g dos funciones acotadas e integrables sobre el n-rectángulo R y sean $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, entonces:*

i) $\underset{\mathsf{R}}{\int \cdots \int} (\alpha f + \beta g) = \alpha \underset{\mathsf{R}}{\int \cdots \int} f + \beta \underset{\mathsf{R}}{\int \cdots \int} g.$

ii) Si R se subdivide en dos rectángulos R_1 y R_2, $\underset{\mathsf{R}}{\int \cdots \int} f = \underset{\mathsf{R}_1}{\int \cdots \int} f + \underset{\mathsf{R}_2}{\int \cdots \int} f.$

iii) Si $f(x,y) \leq g(x,y)$ *en* R, $\underset{\mathsf{R}}{\int\cdots\int} f \leq \underset{\mathsf{R}}{\int\cdots\int} g.$

En particular si $g(x,y) \geq 0$ *en* R, $\underset{\mathsf{R}}{\int\cdots\int} g \geq 0.$

1.6 Definición de sumas de Riemann

Sea f una función acotada sobre $\mathsf{R} \subset \mathbb{R}^n$, n-rectángulo y sea P una partición de R i.e. $\mathsf{R} = \bigcup\limits_{k \in K} \mathsf{R}_k$, R_k un n-sub-rectángulo de P, los cuales no se cruzan y sea $\zeta_k \in \mathsf{R}_k$. Se llama a la expresión:

$$S_{\mathsf{P}} = S(\mathsf{P}, f) = \sum_{k \in K} f(\zeta_k) V(\mathsf{R}_k).$$

Si definimos $m_k = \inf\limits_{\mathbf{x} \in \mathsf{R}_k} f(\mathbf{x})$, $M_k = \sup\limits_{\mathbf{x} \in \mathsf{R}_k} f(\mathbf{x})$, las sumas $\underline{S}_{\mathsf{P}} = \sum\limits_{k \in K} m_k V(\mathsf{R}_k)$ y $\overline{S}_{\mathsf{P}} = \sum\limits_{k \in K} M_k V(\mathsf{R}_k)$, se llaman inferior y superior de f respectivamente, correspondientes a la partición P.

Para $\zeta_k \in \mathsf{R}_k$ se tiene $m_k V(\mathsf{R}_k) \leq f(\zeta_k) V(\mathsf{R}_k) \leq M_k V(\mathsf{R}_k)$ i.e. $\underline{S}_{\mathsf{P}} \leq S_{\mathsf{P}} \leq \overline{S}_{\mathsf{P}}$.

Teorema 1.6.1 *Sea* R *un* n*-rectángulo y sea* $f\colon \mathsf{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función acotada sobre* R*, las siguientes propiedades son equivalentes:*

i) f *es Riemann integrable sobre* R.

ii) $\underline{I} = \bar{I}$.

iii) $\forall\, \epsilon > 0$*, existe una partición* P *de* R *tal que* $\overline{S}_{\mathsf{P}} - \underline{S}_{\mathsf{P}} < \epsilon$.

iv) $\forall\, \epsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$ *tal que* $\forall\, \mathsf{P}$ *partición con* $\|\mathsf{P}\| < \delta$*, se tiene* $\overline{S}_{\mathsf{P}} - \underline{S}_{\mathsf{P}} < \epsilon$.

Teorema 1.6.2 Teorema de Fubini

Sea $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *una función integrable sobre el* n*-rectángulo* $\mathsf{R} = \mathsf{R}' \times \mathsf{R}''$*, con* $\mathbf{x} \in \mathsf{R}' \subset \mathbb{R}^p$*,* $\mathbf{y} \in \mathsf{R}'' \subset \mathbb{R}^{n-p}$*, tal que* $\forall\, \mathbf{x} \in \mathsf{R}'$*,* $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *es integrable sobre* R''.

Sea $F(\mathbf{x}) = \int_{\mathsf{R}''} f_{\mathbf{x}} = \int_{\mathsf{R}''} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}$*, entonces* F *es integrable y:*

$$\int_{\mathsf{R}' \times \mathsf{R}''} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{x}\, d\mathbf{y} = \int_{\mathsf{R}'} \left(\int_{\mathsf{R}''} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) d\mathbf{x},$$

donde la expresión $\int_{\mathsf{R}''} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}$ *se entiende como la integral de Riemann de* f *con respecto a* $\mathbf{y}$ *para* $\mathbf{x}$ *fijo, cuando existe y como un número entre la integral superior e inferior* *de* $f(\mathbf{x},\mathbf{y})$ *con respecto a* $\mathbf{y} \in \mathsf{R}''$*, cuando la integral no existe.*

La integral de F *con respecto a* $\mathbf{x} \in \mathsf{R}'$ *existe en el sentido de Riemann.*

Si además $\displaystyle\int_{\mathsf{R}'} f(\mathbf{x},\mathbf{y})d\mathbf{x}$ *existe,* $\forall\, \mathbf{x} \in \mathsf{R}'$*, la integral* $\displaystyle\int_{\mathsf{R}'\times\mathsf{R}''} f(\mathbf{x},\mathbf{y})d\mathbf{x}\, d\mathbf{y}$ *es el resultado de la integración de* f *en el sentido de Riemann primero con respecto a* $\mathbf{x} \in \mathsf{R}'$ *y luego con respecto a* $\mathbf{y} \in \mathsf{R}''$*.*

Definición 1.6.1 *Un conjunto acotado* $\mathsf{S} \subset \mathbb{R}^n$ *se dice de contenido o medida nula si* $\forall\, \epsilon > 0$*,* $\exists\, \mathsf{R}_1, \ldots, \mathsf{R}_m$ *n-rectángulos tales que* $\mathsf{S} \subset \bigcup\limits_{k=1}^{m} \mathsf{R}_k$ *y* $\sum\limits_{k=1}^{m} V(\mathsf{R}_k) < \epsilon$*.*

Definición 1.6.2 *Un conjunto acotado* $\mathsf{S} \subset \mathbb{R}^n$ *se dice medible*[4]*, si su frontera* $\partial\mathsf{S}$ *es de contenido nulo.*

Definición 1.6.3 *Sea* S *un subconjunto de* $\mathbb{R}^n$ *medible tal que* $\mathsf{S} \subset \mathsf{R}$ *n-rectángulo y sea* $f\colon \mathsf{S} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función acotada sobre* S*, extendemos la función* f *sobre* R *por:*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & si\ \mathbf{x} \in \mathsf{S} \\ 0 & si\ \mathbf{x} \in \mathsf{R}\backslash\mathsf{S}. \end{cases}$$

Así tenemos que:

$$\underset{\mathsf{R}}{\int\cdots\int} \tilde{f} = \underset{\mathsf{S}}{\int\cdots\int} f.$$

1.6.1 Integración sobre conjuntos medibles

Proposición 1.6.1 *Sea* $\mathsf{S} \subset \mathbb{R}^n$ *un conjunto medible,* $f, g\colon \mathsf{S} \longrightarrow \mathbb{R}$ *funciones integrables sobre* S *tales que* $f \leq g$*, sobre* S*, entonces se tiene que* $\underset{\mathsf{S}}{\int\cdots\int} f \leq \underset{\mathsf{S}}{\int\cdots\int} g$*.*

Proposición 1.6.2 *Sea* $\mathsf{S} \subset \mathbb{R}^n$ *un conjunto medible y sea* $f\colon \mathsf{S} \longrightarrow \mathbb{R}$ *integrable sobre* S*, i.e.* $|f(\mathbf{x})| \leq M$*,* $\forall\, \mathbf{x} \in \mathsf{S}$*, entonces* $\left| \underset{\mathsf{S}}{\int\cdots\int} f(\mathbf{x})d\mathbf{x} \right| \leq MV(\mathsf{S})$*.*

En particular, si S *es de contenido nulo,* $\underset{\mathsf{S}}{\int\cdots\int} f = 0$*.*

[4]Jordan medible

Proposición 1.6.3 *Si* S *y* S' *son conjuntos medibles de* $\mathbb{R}^n$ *de modo que* $\mathsf{S} \cap \mathsf{S}'$ *es de contenido nulo y si* f *es integrable sobre* $\mathsf{S} \cup \mathsf{S}'$*, entonces:*

$$\int \cdots \int_{\mathsf{S} \cup \mathsf{S}'} f = \int \cdots \int_{\mathsf{S}} f + \int \cdots \int_{\mathsf{S}'} f.$$

Proposición 1.6.4 *Sea* $\mathsf{S} \subset \mathbb{R}^n$ *un conjunto medible,* $f,\ g\colon \mathsf{S} \longrightarrow \mathbb{R}$ *funciones que son iguales salvo en un conjunto* $D \subset \mathsf{S}$ *de contenido nulo, entonces* $\displaystyle\int \cdots \int_{\mathsf{S}} f = \int \cdots \int_{\mathsf{S}} g.$

Teorema 1.6.3 *Sea* $\mathsf{S} \subset \mathbb{R}^n$ *medible y* $f\colon \mathsf{S} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función acotada sobre* S*, las siguientes propiedades son equivalentes:*

i) f *es Riemann integrable sobre* S

ii) $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$.

iii) $\forall\, \epsilon > 0$*, existe una partición* T *de* S *tal que* $\overline{S}_{\mathsf{T}} - \underline{S}_{\mathsf{T}} < \epsilon$.

iv) $\forall\, \epsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$ *tal que* $\forall \mathsf{T}$ *partición con* $\|\mathsf{T}\| < \delta$*, se tiene* $\overline{S}_{\mathsf{T}} - \underline{S}_{\mathsf{T}} < \epsilon$.

Teorema 1.6.4 *Si* f *es una función real y continua sobre* $\mathsf{S} \subset \mathbb{R}^n$ *cerrado y medible, entonces* f *es integrable sobre* S.

Teorema 1.6.5 *Si* f *es una función real acotada sobre* $\mathsf{S} \subset \mathbb{R}^n$ *cerrado y medible, tal que* f *es continua salvo en un conjunto* $\Gamma \subset \mathsf{S}$ *de contenido nulo, entonces* f *es integrable sobre* S.

Proposición 1.6.5 *Sea* $\mathsf{S} \subset \mathbb{R}^n$ *un conjunto medible y sea* $f\colon \mathsf{S} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función continua, entonces el gráfico* G_f *de* f *es de contenido nulo en* $\mathbb{R}^{n+1}$.

Teorema 1.6.6 *Sea* $f = (f_1, \ldots, f_n)\colon \mathsf{S} \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *de clase* C^1 *sobre* S *medible y convexo en* $\mathbb{R}^p$*,* $1 \leq p \leq n-1$*, entonces la superficie* $f(\mathsf{S})$ *es de contenido nulo en* $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.6.4 *Sea* $f\colon \mathsf{S} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función, definimos de la parte positiva de* f *y la denotamos* $f^+ = \max\{f, 0\}$.

De manera similar se define la parte negativa de f *y la denotamos* $f^- = \max\{-f, 0\}$.

Observemos que $f = f^+ - f^-$ y que cuando f es integrable sobre un conjunto S medible, f^+ y f^- son integrables sobre S y se tiene:

$$\int_{\mathsf{S}} f = \int_{\mathsf{S}} f^+ - \int_{\mathsf{S}} f^-.$$

Teorema 1.6.7 *Sea $f\colon \mathsf{S} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función, donde S es medible, entonces f es integrable si y sólo si f^+ y f^- es integrable y se tiene:*

$$\int_{\mathsf{S}} f = \int_{\mathsf{S}} f^+ - \int_{\mathsf{S}} f^-.$$

Teorema 1.6.8 *Sean f y g funciones reales acotadas e integrables sobre $\mathsf{S} \subset \mathbb{R}^n$ medible, $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces:*

i) $f(\mathbf{x}) \pm g(\mathbf{x})$ *ii)* $\alpha f(\mathbf{x})$ *iii)* $|f(\mathbf{x})|$

iv) $f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$ *v)* $\dfrac{1}{f(\mathbf{x})}$, *con* $|f(\mathbf{x})| > \delta > 0$,

son integrables sobre S. Además: $\displaystyle\int_{\mathsf{S}} (f \pm g) = \int_{\mathsf{S}} f \pm \int_{\mathsf{S}} g$, $\displaystyle\int_{\mathsf{S}} \alpha f = \alpha \int_{\mathsf{S}} f$.

Teorema 1.6.9 *Si f, g, φ son funciones reales acotadas e integrables sobre $\mathsf{S} \subset \mathbb{R}^n$ medible, que satisfacen $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$, $\varphi(\mathbf{x}) \geq 0$, $\forall\, \mathbf{x} \in \mathsf{S}$, entonces:*

$$\int_{\mathsf{S}} f(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})d\mathbf{x} \leq \int_{\mathsf{S}} g(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

Si $a \leq f(\mathbf{x}) \leq b$, $\forall\, \mathbf{x} \in \mathsf{S}$, entonces existe $c \in [\,a, b\,]$ tal que:

$$\int_{\mathsf{S}} f(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})d\mathbf{x} = c\int_{\mathsf{S}} \varphi(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

(Teorema de valor medio para integrales múltiples).

Teorema 1.6.10 *Sean $\mathsf{S}' \subset \mathbb{R}^p$, $\mathsf{S}'' \subset \mathbb{R}^{n-p}$ medibles, entonces $\mathsf{S}' \times \mathsf{S}''$, es medible en $\mathbb{R}^n$ y $V(\mathsf{S}' \times \mathsf{S}'') = V(\mathsf{S}')\cdot V(\mathsf{S}'')$*

Corolario 1.6.1 *Sean g y h funciones integrables sobre $\mathsf{S}' \subset \mathbb{R}^p$, $\mathsf{S}'' \subset \mathbb{R}^{n-p}$ conjuntos medibles respectivamente. Sea $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(\mathbf{x})h(\mathbf{y})$ definida sobre $\mathsf{S}' \times \mathsf{S}'' \subset \mathbb{R}^n$, entonces f es integrable y se tiene que:*

$$\int_{\mathsf{S}' \times \mathsf{S}''} f = \int_{\mathsf{S}'} g \int_{\mathsf{S}''} h.$$

Teorema 1.6.11 Teorema de Fubini

Sean $\mathsf{S}' \subset \mathbb{R}^p$, $\mathsf{S}'' \subset \mathbb{R}^{n-p}$ *conjuntos medibles y sea* $f\colon \mathsf{S}' \times \mathsf{S}'' \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función integrable sobre* $\mathsf{S} = \mathsf{S}' \times \mathsf{S}''$, *tal que* $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *es integrable sobre* S''. *Sea* $F(\mathbf{x}) = \displaystyle\int_{\mathsf{S}''} f_{\mathbf{x}} = \int_{\mathsf{S}''} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}$, *entonces* F *es integrable y*

$$\int_{\mathsf{S}' \times \mathsf{S}''} f = \int_{\mathsf{S}'} F = \int_{\mathsf{S}'} \left(\int_{\mathsf{S}''} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) d\mathbf{x}.$$

La expresión $\displaystyle\int_{\mathsf{S}''} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}$ *se entiende como la integral de Riemann de* f *con respecto a* $\mathbf{y}$ *para* $\mathbf{x}$ *fijo, cuando existe y como un número entre la integral superior e inferior de* $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *con respecto a* $\mathbf{y} \in \mathsf{S}''$, *cuando la integral no existe.*

La integral de F *con respecto a* $\mathbf{x} \in S'$ *existe en el sentido de Riemann.*

Si además $\forall\ \mathbf{y} \in \mathsf{S}''$, $f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *es integrable sobre* S', *entonces la función* $G(\mathbf{y}) = \displaystyle\int_{\mathsf{S}'} f_{\mathbf{y}} = \int_{\mathsf{S}'} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x}$ *es integrable y*

$$\int_{\mathsf{S}' \times \mathsf{S}''} f = \int_{\mathsf{S}''} G = \int_{\mathsf{S}''} \left(\int_{\mathsf{S}'} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} \right) d\mathbf{y}.$$

Teorema 1.6.12 Principio de Cavalieri

Sea $\mathsf{S} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *un conjunto medible, de modo que* $\mathsf{S} \subset \mathsf{R} \times [\,a, b\,]$, *donde* R *es un* n-*rectángulo de* $\mathbb{R}^n$. *Sea* $\mathsf{S}_t = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n / (\mathbf{x}, t) \in \mathsf{S}\}$ *y supongamos que* S_t *es medible para cada* $t \in [\,a, b\,]$ *y escribamos* $S(t) = V(\mathsf{S}_t)$, *entonces:*

$$V(S) = \int_a^b S(t)\, dt.$$

Teorema 1.6.13 *Sea* $\mathsf{S} \subset \mathbb{R}^n$ *un conjunto medible y sean* ϕ_1, ϕ_2 *funciones continuas sobre* S *tales que* $\phi_1 \leq \phi_2$, *entonces* $C = \{(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^{n+1} / \mathbf{x} \in \mathsf{S}, \phi_1(\mathbf{x}) \leq \mathbf{y} \leq \phi_2(\mathbf{x})\}$ *es medible y si* $f\colon C \longrightarrow \mathbb{R}$ *es continua, se tiene:*

$$\int_C f = \int_{\mathsf{S}} \left(\int_{\phi_1(\mathbf{x})}^{\phi_2(\mathbf{x})} f(\mathbf{x}, y)\, dy \right) d\mathbf{x}.$$

Corolario 1.6.2 *Sea* f *una función real continua sobre* $\mathsf{R} = \prod_{i=1}^{n} [\,a_i, b_i\,]$, *entonces:*

$$\int_{\mathsf{R}} f = \int_{a_n}^{b_n} \left(\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \cdots \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \right) \cdots dx_{n-1} \right) dx_n.$$

Teorema 1.6.14 *Sean $\mathsf{S}' \subset \mathbb{R}^p$, $\mathsf{S}'' \subset \mathbb{R}^{n-p}$ conjuntos medibles y sea $f\colon \mathsf{S}' \times \mathsf{S}'' \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua sobre $\mathsf{S} = \mathsf{S}' \times \mathsf{S}''$, entonces f es integrable sobre S y tenemos:*

$$\int_{\mathsf{S}' \times \mathsf{S}''} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{x}\, d\mathbf{y} = \int_{\mathsf{S}'} \left(\int_{\mathsf{S}''} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{y} \right) d\mathbf{x} = \int_{\mathsf{S}''} \left(\int_{\mathsf{S}'} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{x} \right) d\mathbf{y}.$$

Teorema 1.6.15 *Sea $f(\mathbf{x})$ una función real acotada e integrable sobre el n-rectángulo R, satisfaciendo que para todo $k = 1, \ldots, n-1$ y para todo conjunto de valores $(x_1, \ldots, x_k)$, la función f es integrable sobre la proyección Δ^k de R en el subespacio de puntos $\mathbf{u}^k = (x_{k+1}, \ldots, x_n)$, entonces para el n-rectángulo R se tiene:*

$$\underset{\mathsf{R}}{\int \cdots \int} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \cdots \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \ldots, x_n) dx_n \right) \cdots dx_2 \right) dx_1,$$

donde las integrales del segundo término se entienden en el sentido de Riemann.

La integral del tipo $\displaystyle\int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_n \cdots dx_1$ se llama integral iterada de f. En el caso general, la reducción de una integral múltiple a una integral iterada, se tiene con el siguiente teorema.

Sea S un conjunto medible, sea w_1 la proyección de S sobre el eje x_1 y sea $\mathsf{S}_{x_1^o}$ la sección de S en el plano $x_1 = x_1^o$ i.e. el conjunto de puntos de la forma $(x_1^o, x_2, \ldots, x_n) \in \mathsf{S}$. En este caso w_1 y S_{x_1} son acotados y si S es cerrado, w_1 y S_{x_1} son cerrados. Sin embargo debemos asegurar la integrabilidad de f sobre w_1 y S_{x_1}.

Teorema 1.6.16 *Si f una función real, acotada e integrable sobre S medible, de modo que f es integrable sobre S_{x_1}, $\forall\, x_1 \in w_1$, entonces:*

$$\begin{aligned} \int_{\mathsf{S}} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \underset{\mathsf{S}}{\int \cdots \int} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int_{w_1} \left(\int_{\mathsf{S}_{x_1}} f(x_1, \ldots, x_n) d\mathbf{u}^1 \right) dx_1. \end{aligned}$$

1.7 Cambios de variables especiales en integrales triples

En el caso tri-dimensional escribimos (x, y, z) en lugar de (x_1, x_2, x_3), (u, v, w) en lugar de (v_1, v_2, v_3). La fórmula de transformación para las integrales triples toma la forma:

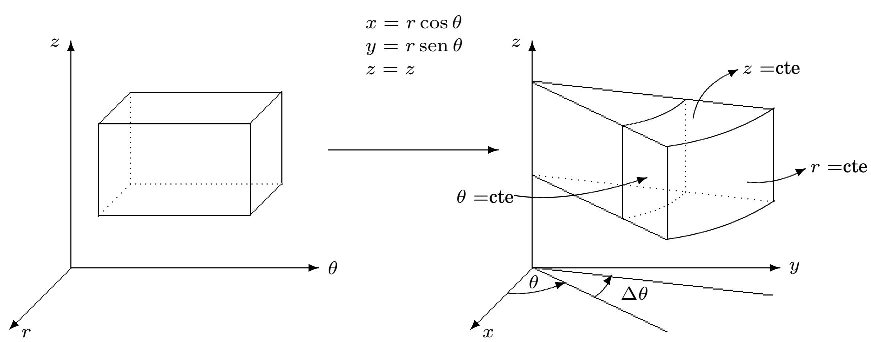
$$\underset{\mathsf{S}}{\iiint} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \underset{\mathsf{S}'}{\iiint} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |\det J(u, v, w)|\, du\, dv\, dw,$$

donde el Jacobiano $\det J(u,v,w) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$.

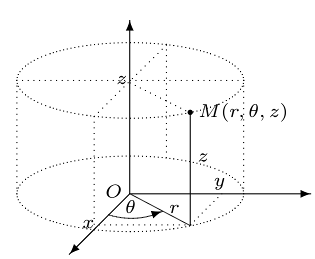
1.7.1 Caso de coordenadas cilíndricas

Consideremos las variables r, θ, z en vez de u, v, w y definimos la aplicación mediante las ecuaciones $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, $z = z$.

Observemos que reemplazamos x, y por sus coordenadas polares y no cambiamos z. Para obtener una aplicación biyectiva debemos tener $r > 0$ y limitar θ a un intervalo de la forma $\theta_o \leq \theta < \theta_o + 2\pi$. El gráfico adjunto muestra un paralelepípedo del espacio $r\theta z$. El jacobiano de la transformación es:



$$\det J(r,\theta,z) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta & 0 \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$



y la fórmula se escribe:

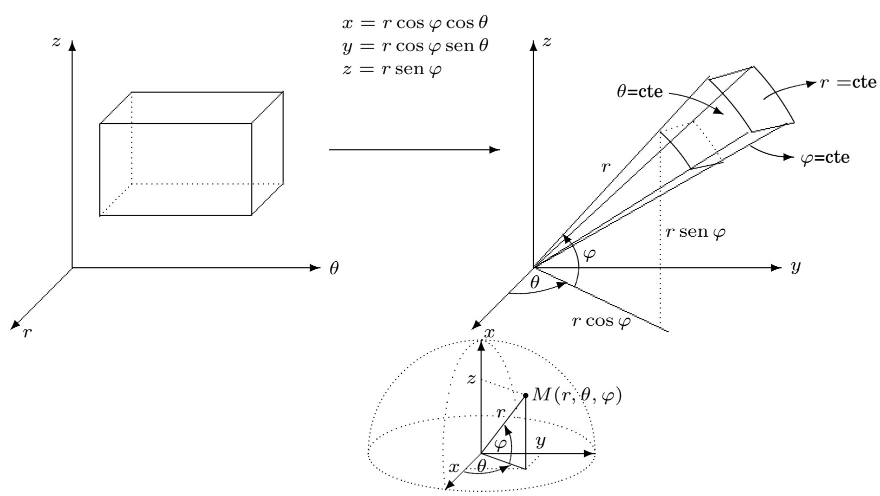
$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{V'} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, z)\,r\,dr\,d\theta\,dz.$$

El Jacobiano se anula en $r = 0$, pero esto no afecta la validez de la fórmula de la transformación, porque el conjunto de los puntos con $r = 0$, es de contenido nulo.

1.7.2 Caso de coordenadas esféricas

En el caso de coordenadas esféricas, la posición de un punto (x, y, z) en el espacio está determinada por los números r, θ, φ, donde r es la distancia del punto al origen, θ mide el ángulo que forma la proyección del punto sobre el plano xy que forma con el eje x (longitud), en ángulo φ que forma el punto sobre el plano xy (latitud).

Para obtener una aplicación biyectiva, tomamos $r > 0$, $0 \le \theta < 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} \le \varphi < \frac{\pi}{2}$. Las superficies $r =$ constante son esferas concéntricas de centro en el origen, las superficies $\theta =$ constante son planos paralelos que pasan por el eje x y las superficies $\varphi =$ constante son conos circulares cuyo eje es el eje z. De esta forma el 3-rectángulo en r, θ, φ se transforma en el sólido que se ve en la figura adjunta.



El Jacobiano de la transformación es:

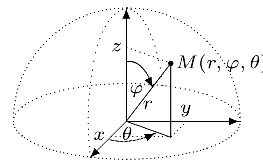
$$\det J(r,\theta,\varphi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -r\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\varphi & 0 & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r^2\cos\varphi.$$

En estas condiciones tenemos la igualdad:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{V'} F(r,\theta,\varphi)\,r^2|\cos\varphi|\,dr\,d\theta\,d\varphi,$$

donde $F(r,\theta,\varphi) = f(r\cos\theta\cos\varphi, r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi, r\,\mathrm{sen}\,\varphi)$ y la función f es acotada e integrable sobre V.

Algunos autores consideran el ángulo φ medido desde el eje z, en vez de medirlo desde el plano $z = 0$ (latitud). En este caso se tiene que $x = r \operatorname{sen} \varphi \cos \theta$, $y = r \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta$, $x = r \cos \varphi$, $r > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$:



$$\det J = -r^2 \operatorname{sen} \varphi.$$

Observemos que esta segunda fórmula del Jacobiano está acorde con el hecho que, al medir de esta manera φ tenemos en realidad $\frac{\pi}{2} - \varphi$ en la primera fórmula del Jacobiano, es decir $\cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = -\operatorname{sen} \varphi$.

1.7.3 Momento de inercia. Coordenadas del centro de gravedad

Definición 1.7.1 *El momento de inercia de un cuerpo V, de densidad $\rho(x, y, z)$ en el punto $(x, y, z) \in V$, respecto a los ejes x, y, z están dados respectivamente por:*

$$\begin{aligned}
I_{xx} &= \iiint\limits_V (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz, \\
I_{yy} &= \iiint\limits_V (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz, \\
I_{zz} &= \iiint\limits_V (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.
\end{aligned}$$

Definición 1.7.2 *Las coordenadas del centro del gravedad de un cuerpo V, de densidad $\rho(x, y, z)$ en $(x, y, z) \in V$, se expresa por las fórmulas:*

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{1}{m} \iiint\limits_V x\rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz, \\
\bar{y} &= \frac{1}{m} \iiint\limits_V y\rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz, \\
\bar{z} &= \frac{1}{m} \iiint\limits_V z\rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,
\end{aligned}$$

donde $m = \iiint\limits_V \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ es la masa del volumen V.

1.8 Cambio de variable en integración múltiple – Caso general

Teorema 1.8.1 Teorema del cambio de variable

Sea R un n-intervalo de $\mathbb{R}^n$ y sea la aplicación $T \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1-invertible en *un abierto contenido en* R *i.e.* $T\colon \mathsf{R} \longrightarrow T(\mathsf{R})$ *es biyectiva de clase* C^1. *Si* $f\colon T(\mathsf{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ *es una aplicación integrable sobre* $T(\mathsf{R})$ *y* $f \circ T$ *es integrable sobre* R *tenemos:*

$$\int_{T(\mathsf{R})} f = \int_{\mathsf{R}} f \circ T |\det J_T|.$$

Es útil usar la notación siguiente: si $\mathbf{y} = T(\mathbf{x})$ *la igualdad anterior se puede escribir:*

$$\int_{T(\mathsf{R})} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{\mathsf{R}} f \circ T(\mathbf{x}) |\det J_T(\mathbf{x})| d\mathbf{x}.$$

Teorema 1.8.2 *Sea* R *un* n*-intervalo de* $\mathbb{R}^n$ *y sea* $T\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *una aplicación de clase* C^1*-invertible en el interior de* R, *entonces si* f *es integrable sobre* $T(\mathsf{R})$ *y* $f \circ T$ *es integrable sobre* R:

$$\int_{T(\mathsf{R})} f = \int_{\mathsf{R}} f \circ T |\det J_T|.$$

Teorema 1.8.3 *Sea* S *un conjunto medible de* $\mathbb{R}^n$ *y sea* $T\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *una aplicación de clase* C^1*-invertible en el interior de* S, *entonces si* f *es integrable sobre* $T(\mathsf{S})$ *y* $f \circ T$ *es integrable sobre* S *se tiene:*

$$\int_{T(\mathsf{S})} f = \int_{\mathsf{S}} f \circ T |\det J_T|.$$

1.9 Integrales impropias dependiendo de un parámetro

Teorema 1.9.1 *Sea* $f\colon \mathbb{R} \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función tal que:*

- $\forall\, t \in [a, b]$, $x \longmapsto f(x, t)$ *es integrable sobre* $\mathbb{R}$, $F(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x, t)\, dx$.
- $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $t \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial t}(x, t)$ *es continua en* $[a, b]$.
- $\forall\, t \in [a, b]$, $x \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial t}(x, t)$ *es integrable sobre* $\mathbb{R}$ *y existe* $g(x) \geq 0$ *integrable sobre* $\mathbb{R}$ *tal que* $\left|\dfrac{\partial f}{\partial t}(x, t)\right| \leq g(x)$, *entonces la función* $F'(t) = \dfrac{d}{dt} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{\partial f}{\partial t}(x, t)\, dx$.

a) **Caso en que la región de integración es no acotada:**

Si la función $f(x, y)$ es continua en una región no acotada S del plano $\mathbb{R}^2$ y S_n es una región medible contenida en S, $\mathsf{S}_n \subset \mathsf{S}_{n+1}$, $\forall \mathbf{n} \in \mathbb{N}$, de modo que si $n \to \infty$, $\mathsf{S}_n \longrightarrow \mathsf{S}$, entonces si $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \iint_{\mathsf{S}_n} f(x, y)\, dx\, dy$ no depende de la elección que se haga de S_n, la integral impropia correspondiente se dice convergente y escribimos:

$$\iint_{\mathrm{S}} f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty} \iint_{\mathrm{S}_n} f(x,y)\,dx\,dy.$$

En caso contrario la integral impropia se dice divergente.

b) **Caso de una función discontinua**

Si la función $f(x,y)$ es continua en toda la región cerrada y medible S, excepto en un punto (a,b), definimos $\mathrm{S}_\varepsilon = \mathrm{S}\backslash B((a,b),\varepsilon)$, entonces si $\lim_{\varepsilon\to 0} \iint_{\mathrm{S}_\varepsilon} f(x,y)\,dx\,dy$ existe y no depende de la forma de las bolas $B((a,b),\varepsilon)$, la integral se dice convergente y escribimos:

$$\iint_{\mathrm{S}} f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{\varepsilon\to 0} \iint_{\mathrm{S}_\varepsilon} f(x,y)\,dx\,dy.$$

En caso contrario la integral se dice divergente.

c) **Integral doble impropia con singularidades en la frontera**

Proposición 1.9.1 *Sea* $(\mathrm{S}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *una sucesión creciente de abiertos medibles en* $\mathbb{R}^2$*, tales que* $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{S}_k = \mathrm{S}$ *es medible, entonces* $\lim_{k\to\infty} V(\mathrm{S}_k) = V(\mathrm{S})$.

Definición 1.9.1 *Sea* $f(x,y)$ *una función definida y continua (pero no acotada) sobre un abierto* S *(no necesariamente medible). Si el límite*

$$\lim_{k\to\infty} \iint_{\mathrm{S}_k} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\mathrm{S}} f(x,y)\,dx\,dy$$

existe, donde $(\mathrm{S}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de abiertos medibles de* $\mathbb{R}^2$*, con la propiedad* $\bar{\mathrm{S}}_k \subset \mathrm{S}$*,* $\mathrm{S}_1 \subset \mathrm{S}_2 \subset \cdots$*,* $\mathrm{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{S}_k$ *y donde* S_k *tiene frontera regular o regular a trozos, decimos que la integral impropia de* f *sobre* S *es convergente.*

La existencia del límite se entiende en el sentido que es independiente de la escogencia de la sucesión $(\mathrm{S}_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Teorema 1.9.2 *Sean* $x = \phi(u,v)$*,* $y = \psi(u,v)$*, con* $(u,v) \in \mathrm{S}$*, definiendo una transformación continuamente diferenciable sobre la cerradura* $\bar{\mathrm{S}}$ *de* S *conjunto medible, tal que* *el Jacobiano es diferente de cero sobre* S*:*

$$\det J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\phi}{\partial u} & \dfrac{\partial\phi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad (u,v) \in \mathsf{S},$$

de modo que sea uno a uno de S *en* S'.

Si la función $f(x,y)$ *es continua (pero no acotada) sobre* S' *de modo que la función* $f(\phi(u,v),\psi(u,v))|\det J(u,v)|$ *es uniformemente continua sobre* S *(y por tanto se puede extender continuamente a* $\bar{\mathsf{S}}$*), entonces:*

$$\iint\limits_{\mathsf{S}'} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\mathsf{S}} f(\phi(u,v),\psi(u,v)|\det J|du\,dv,$$

donde la integral de la izquierda se entiende en el sentido de la integral impropia.

El concepto de integral múltiple impropia, se puede extender de manera natural del concepto de integral doble impropia.

Capítulo 2

Integrales dobles

2.1 Cálculo de integrales dobles

1. Evaluar las siguientes integrales dobles:

a) $\displaystyle\iint\limits_R \frac{x^2}{1+y^2}\,dx\,dy$, $R = [\,0,1\,]\times[\,0,1\,]$

b) $\displaystyle\iint\limits_R \frac{dx\,dy}{(x+y+1)^2}$, $R = [\,0,1\,]\times[\,0,1\,]$

c) $\displaystyle\iint\limits_R \frac{y\,dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$, $R = [\,0,1\,]\times[\,0,1\,]$

d) $\displaystyle\iint\limits_R x\,\mathrm{sen}(x+y)\,dx\,dy$, $R = [0,\pi]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

e) $\displaystyle\iint\limits_R x^2 y \mathrm{e}^{xy}\,dx\,dy$, $R = [\,0,1\,]\times[\,0,2\,]$.

f) $\displaystyle\iint\limits_R x^2 y\cos(xy^2)\,dx\,dy$, $R = \left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times[\,0,2\,]$.

Solución

a) $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2}\,dx\,dy = \int_0^1 x^2\,dx\int_0^1\frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 \arctan y\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}.$

b) $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 \frac{dx\,dy}{(x+y+1)^2} = \int_0^1 -\frac{1}{x+y+1}\Big|_0^1 dy = \int_0^1\left(\frac{1}{y+1}-\frac{1}{y+2}\right)dy = \ln\frac{y+1}{y+2}\Big|_0^1 =$
$\displaystyle\ln\frac{2}{3}-\ln\frac{1}{2} = \ln\frac{4}{3}.$

c) $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 \frac{y\,dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^1 -\frac{1}{(1+x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}\Big|_0^1 dx = \int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{\sqrt{2+x^2}}\right)dx =$
$\displaystyle\left(\ln(\sqrt{x^2+1}+x)-\ln(\sqrt{2+x^2}+x)\right)\Big|_0^1 = \ln\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\ln 2 = \ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}.$

d) $\displaystyle\int_0^\pi\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\mathrm{sen}(x+y)\,dy\right)dx = \int_0^\pi -x\cos(x+y)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \int_0^\pi (x\cos x + x\,\mathrm{sen}\,x)\,dx =$
$\displaystyle((1-x)\cos x+(1+x)\,\mathrm{sen}\,x)\Big|_0^\pi = \pi-2.$

e) $\displaystyle\int_0^1\left(\int_0^2 x^2 y\mathrm{e}^{xy}\,dy\right)dx = \int_0^1 (xy-1)\mathrm{e}^{xy}\Big|_0^2 dx = \int_0^1\left(2x\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{2x}+1\right)dx =$

$\left(xe^{2x} - e^{2x} + x\right)\Big|_0^1 = 2.$

f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 x^2 y \cos(xy^2)\,dy\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} x \operatorname{sen}(xy^2)\Big|_0^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} x \operatorname{sen} 4x\,dx =$

$\displaystyle\left(\frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x - \frac{1}{8} x \cos 4x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{16}.$

2. Calcular las siguientes integrales dobles.

a) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^1 (x^2 + 2y)\,dx\,dy$

b) $\displaystyle\int_3^4 \int_1^2 \frac{dy\,dx}{(x+y)^2}$

c) $\displaystyle\int_1^2 \int_1^2 \frac{x^2\,dy\,dx}{y^2}$

d) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2\,dy\,dx}{1+y^2}$

e) $\displaystyle\int_{-3}^3 \int_{y^2-4}^5 (x + 2y)\,dx\,dy$

f) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \int_{a \operatorname{sen}\theta}^a r\,dr\,d\theta$

g) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{3\cos\theta} r^2 \operatorname{sen}^2\theta\,dr\,d\theta$

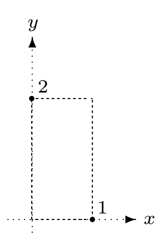
h) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dy\,dx.$

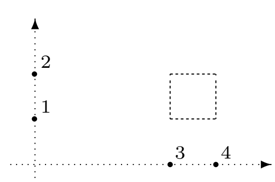
Solución

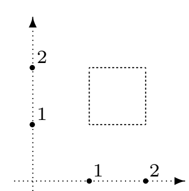
a) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^1 (x^2+2y)\,dx\,dy = \int_0^2 \left(\frac{x^3}{3} + 2yx\right)\Big|_0^1 dy = \int_0^2 \left(\tfrac{1}{3} + 2y\right) dy = \left(\tfrac{1}{3}y + y^2\right)\Big|_0^2 = \tfrac{2}{3} + 4 =$ $\tfrac{14}{3}.$

b) $\displaystyle\int_3^4 \int_1^2 \frac{dy\,dx}{(x+y)^2} = \int_3^4 \frac{-1}{x+y}\Big|_1^2 dx = \int_3^4 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) dx = \ln \frac{x+1}{x+2}\Big|_3^4 = \ln \tfrac{5}{6} - \ln \tfrac{4}{5} =$ $\ln \tfrac{25}{24}.$

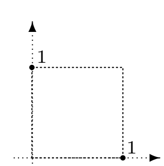
c) $\displaystyle\int_1^2 x^2\,dx \int_1^2 \frac{dy}{y^2} = \tfrac{1}{3}x^3\Big|_1^2 \left(-\tfrac{1}{y}\right)\Big|_1^2 = \tfrac{1}{3}(8-1)(1-\tfrac{1}{2}) = \tfrac{7}{6}.$







d) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2\,dy\,dx}{1+y^2} = \int_0^1 x^2 \arctan y\Big|_0^1 dx = \int_0^1 x^2 \tfrac{\pi}{4}\,dx =$ $\tfrac{\pi}{4}\tfrac{1}{3} = \tfrac{\pi}{12}.$



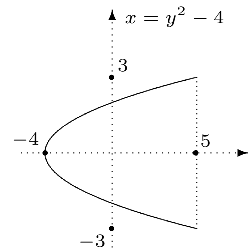
e) $\displaystyle\int_{-3}^{3}\int_{y^2-4}^{5}(x+2y)\,dx\,dy = \int_{-3}^{3}\left(\frac{x^2}{2}+2yx\right)\Big|_{x=y^2-4}^{x=5}dy =$

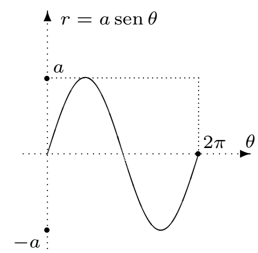
$\displaystyle\int_{-3}^{3}\left[\tfrac{25}{2}+10y-\frac{(y^2-4)^2}{2}-2y(y^2-4)\right]dy =$

$\displaystyle\int_{-3}^{3}\left[\tfrac{25}{2}+10y-\tfrac{1}{2}(y^4-8y^2+16)-2y^3+8y\right]dy =$

$\left(\tfrac{25}{2}y-\tfrac{1}{10}y^5+\tfrac{4}{3}y^3-8y\right)\Big|_{-3}^{3} \;=\; 2\left(\tfrac{75}{2}-\tfrac{243}{10}+36-24\right) \;=$

$75-\tfrac{243}{5}+24=\tfrac{252}{5}.$





f) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi}\int_{a\operatorname{sen}\theta}^{a} r\,dr\,d\theta = \int_{0}^{2\pi}\tfrac{1}{2}r^2\Big|_{a\operatorname{sen}\theta}^{a}d\theta =$

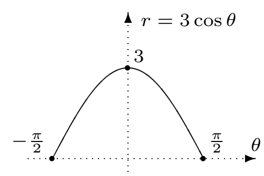
$\displaystyle\tfrac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}(a^2-a^2\operatorname{sen}^2\theta)\,d\theta \;=\; 4\tfrac{1}{2}a^2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta \;=\; 2a^2\tfrac{1}{2}\tfrac{\pi}{2} \;=$

$\tfrac{1}{2}\pi a^2.$

g) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{3\cos\theta} r^2\operatorname{sen}^2\theta\,dr\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^2\theta\frac{r^3}{3}\Big|_{0}^{3\cos\theta}d\theta =$

$\displaystyle 9\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^2\theta\cos^3\theta\,d\theta = 9\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^3\theta-\cos^5\theta)\,d\theta =$

$\displaystyle 18\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^3\theta-\cos^5\theta)\,d\theta = 18\left(\tfrac{2}{3}-\tfrac{4}{5}\tfrac{2}{3}\right) = 18\tfrac{10-8}{15} = \tfrac{12}{5}.$

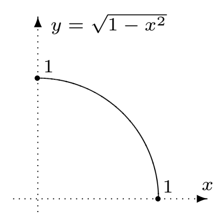


h) $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2-y^2}\,dy\,dx \underset{y=\sqrt{1-x^2}\cos t}{=}$

$\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sqrt{1-x^2-(1-x^2)\cos^2 t}\sqrt{1-x^2}(-\operatorname{sen}t)\,dt\,dx =$

$\displaystyle\int_{0}^{1}(1-x^2)\,dx\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^2 t\,dt = \int_{0}^{1}(1-x^2)\,dx\frac{\pi}{2}\frac{1}{2} =$

$\displaystyle\frac{\pi}{4}\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{0}^{1} = \frac{\pi}{4}\frac{2}{3} = \frac{\pi}{6}.$



3. Dar las ecuaciones de las curvas que limitan las regiones de las integrales dobles y dibujarlas.

a) $\displaystyle\int_{-6}^{2}\int_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x,y)\,dx\,dy$

b) $\displaystyle\int_{1}^{3}\int_{x^2}^{x+9} f(x,y)\,dy\,dx$

c) $\displaystyle\int_{0}^{4}\int_{y}^{10-y} f(x,y)\,dx\,dy$

d) $\displaystyle\int_{1}^{3}\int_{\frac{x}{3}}^{2x} f(x,y)\,dy\,dx$

e) $\displaystyle\int_{0}^{3}\int_{0}^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)\,dx\,dy$

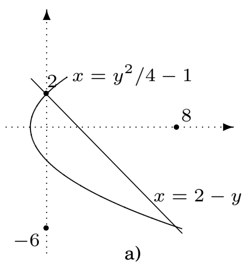
f) $\displaystyle\int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+2} f(x,y)\,dy\,dx.$

Solución

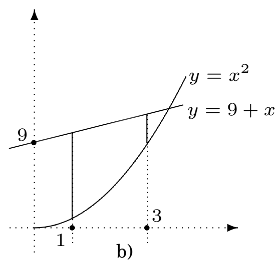
a) $\displaystyle\int_{-6}^{2}\int_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x,y)\,dx\,dy$; $x=2-y$, $x=\dfrac{y^2}{4}-1$, $y=2$, $y=-6$.

b) $\displaystyle\int_{1}^{3}\int_{x^2}^{x+9} f(x,y)\,dy\,dx$; $y=x+9$, $y=x^2$, $x=1$, $x=3$.

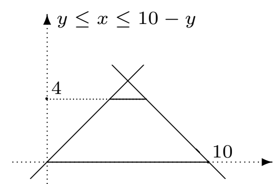
c) $\displaystyle\int_{0}^{4}\int_{y}^{10-y} f(x,y)\,dx\,dy$, $y=0$, $y=4$, $x=10-y$, $x=y$.



a)



b)

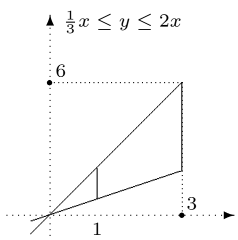


c)

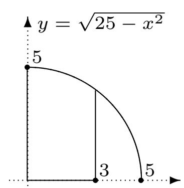
d) $\displaystyle\int_{1}^{3}\int_{\frac{x}{3}}^{2x} f(x,y)\,dy\,dx$, $x=1$, $x=3$, $y=2x$, $y=\dfrac{1}{3}x$.

e) $\displaystyle\int_{0}^{3}\int_{0}^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx$, $x=0$, $x=3$, $y=0$, $y=\sqrt{25-x^2}$.

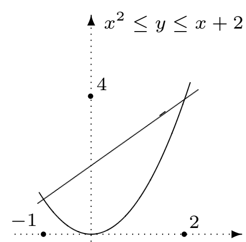
f) $\displaystyle\int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+2} f(x,y)\,dy\,dx$, $x=-1$, $x=2$, $y=x^2$, $y=x+2$.



d)



e)



f)

4. Calcular las integrales dobles por integración iterada:

a) $\displaystyle\iint\limits_{R} xy(x+y)dxdy$, $R=[\,0,1\,]\times[\,0,1\,]$

b) $\displaystyle\iint\limits_{R} (x^3+3x^2y+y^3)dxdy$, $R=[\,0,1\,]\times[\,0,1\,]$

c) $\displaystyle\iint\limits_{R} (\sqrt{y}+x-3xy^2)dxdy$, $R=[\,0,1\,]\times[\,1,3\,]$

d) $\displaystyle\iint\limits_{R} \operatorname{sen}^2 x\operatorname{sen}^2 y\,dxdy$, $R=[\,0,\pi\,]\times[\,0,\pi\,]$

e) $\displaystyle\iint_{R} \operatorname{sen}(x+y)dxdy$, $R = [\,0, \frac{\pi}{2}\,] \times [\,0, \frac{\pi}{2}\,]$

f) $\displaystyle\iint_{R} |\cos(x+y)|dxdy$, $R = [\,0, \pi\,] \times [\,0, \pi\,]$

g) $\displaystyle\iint_{R} f(x+y)dxdy$, $R = [\,0, 2\,] \times [\,0, 2\,]$, $f(t) = [\![t]\!]$

h) $\displaystyle\iint_{R} y^{-3}e^{\frac{tx}{y}}$, $R = [\,0, t\,] \times [\,1, t\,]$, $t > 0$.

Solución

a) $\displaystyle\iint_{R} xy(x+y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^1 xy(x+y)dx\right) dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{3}x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2\right)\Big|_0^1 dy =$

$\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y\right) dy = \left(\frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{6}y^2\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$

b) $\displaystyle\iint_{R} (x^3+3x^2y+y^3)dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^1 (x^3 + 3x^2y + y^3)dx\right) dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{4}x^4 + x^3y + y^3x\right)\Big|_0^1 dy =$

$\displaystyle\int_0^1 \left(y^3 + y + \frac{1}{4}\right) dy = \left(\frac{y^4}{4} + \frac{y^2}{2} + \frac{y}{4}\right)\Big|_0^1 = 1.$

c) $\displaystyle\iint_{R} (\sqrt{y} + x - 3xy^2)dxdy = \int_1^3 \Big(\int_0^1 (\sqrt{y} + x - 3xy^2)dx\Big)dy = \int_1^3 \Big(-\tfrac{3}{2}x^2y^2 + \tfrac{1}{2}x^2 +$

$\displaystyle x\sqrt{y}\Big)\Big|_0^1 dy = \int_1^3 \left(-\tfrac{3}{2}y^2 + \sqrt{y} + \tfrac{1}{2}\right) dy = \left(-\tfrac{1}{2}y^3 + \tfrac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{2}y\right)\Big|_1^3 = (2\sqrt{3} - 12) - \frac{2}{3} =$

$\displaystyle 2\sqrt{3} - \frac{38}{3}.$

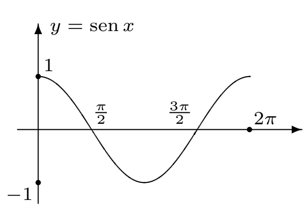
d) $\displaystyle\iint_{R} \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen}^2 y dy = \int_0^\pi \left(\int_0^\pi \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen}^2 y dx\right) dy = \int_0^\pi \operatorname{sen}^2 y \, dy \int_0^\pi \operatorname{sen}^2 y \, dy =$

$\displaystyle 4\left(\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}$ por la fórmula de Wallis.

e) $\displaystyle\iint_{R} \operatorname{sen}(x+y)dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(x+y)dx\right) dy =$

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos(x+y))\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos(\frac{\pi}{2} + y) + \cos y)dy =$

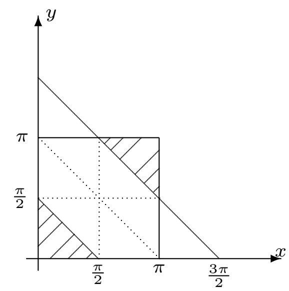
$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos y + \operatorname{sen} y)dy = (\operatorname{sen} y - \cos y)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - (-1) = 2.$



f) $\displaystyle\iint_{R} |\cos(x+y)|\,dxdy = \int_0^\pi \int_0^\pi |\cos(x+y)|\,dxdy.$

En este caso debemos saber cuando $\cos(x+y)$ es positivo y cuando $\cos(x+y)$ es negativo. Así tenemos que $0 \le x+y \le 2\pi$ por lo que:

$$\cos(x+y)\begin{cases} \ge 0 & \text{si } 0 \le x+y \le \frac{\pi}{2} \text{ ó } \frac{3}{2}\pi \le x+y \le 2\pi, \\ \le 0 & \text{si } \frac{\pi}{2} \le x+y \le \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$



Debemos considerar tres regiones y cuatro integrales, es decir:

$$\iint_R |\cos(x+y)|\,dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}-y}\cos(x+y)dx\right)dy + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_{\frac{\pi}{2}-y}^{\pi} -\cos(x+y)dx\right)dy +$$

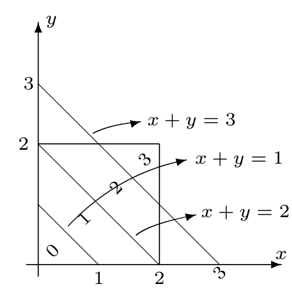
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\int_0^{\frac{3\pi}{2}-y} -\cos(x+y)dx\right)dy + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\int_{\frac{3\pi}{2}-y}^{\pi}\cos(x+y)dx\right)dy =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(x+y)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}-y} dy - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(x+y)\Big|_{\frac{\pi}{2}-y}^{\pi} dy - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \operatorname{sen}(x+y)\Big|_0^{\frac{3\pi}{2}-y} dy + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \operatorname{sen}(x+y)\Big|_{\frac{3\pi}{2}-y}^{\pi} dy =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\operatorname{sen} y)dy - \int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\operatorname{sen} y - 1)dy - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-1-\operatorname{sen} y)dy + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(-\operatorname{sen} y - (-1)\right)dy =$$

$$\int_0^{\pi}(1-\operatorname{sen} y)dy + \int_0^{\pi}(1+\operatorname{sen} y)dy = \int_0^{\pi} 2dy = 2\pi.$$

g) En este caso $0 \le x+y \le 4$, por lo que partimos la integral en cuatro regiones, pero la integral de la primera región vale 0, pues $0 \le x+y < 1$ y se tiene $[\![x+y]\!] = 0$.



De esta manera tenemos 5 integrales:

$$\iint_R [\![x+y]\!]dxdy = \int_0^1\left(\int_{1-y}^{2-y} 1dx\right)dy + \int_1^2\left(\int_0^{2-y} 1dx\right)dy + \int_0^1\left(\int_{2-y}^{2} 2dx\right)dy +$$

$$\int_1^2\left(\int_{2-y}^{3-y} 2dx\right)dy + \int_1^2\left(\int_{3-y}^{2} 3dx\right)dy =$$

$$\int_0^1 dy + \int_1^2 (2-y)dy + \int_0^1 2ydy + \int_1^2 2dy + \int_1^2 3(y-1)dy =$$

$$1+\left(2y-\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_1^2 + y^2\Big|_0^1 + 2y\Big|_1^2 + 3\left(\frac{1}{2}y^2 - y\right)\Big|_1^2 = 1+4-2-(2-\tfrac{1}{2})+1+4-2+3\left(0-\frac{1}{2}+1\right) =$$

6.

h) $$\iint_R y^{-3}e^{\frac{tx}{y}}dxdy = \int_1^t\left(\int_0^t y^{-3}e^{\frac{tx}{y}}dx\right)dy = \int_1^t \frac{e^{\frac{tx}{y}}}{ty^2}\Big|_0^t dy = \int_1^t\left(\frac{e^{\frac{t^2}{y}}}{ty^2} - \frac{1}{ty^2}\right)dy =$$

$$\left(-\frac{e^{\frac{t^2}{y}}}{t^3}+\frac{1}{ty}\right)\Bigg|_1^t = \frac{1}{t^2}-\frac{e^t}{t^3}+\frac{e^{t^2}}{t^3}-\frac{1}{t} = t^{-3}(e^{t^2}-e^t)+t^{-2}-t^{-1}.$$

5. Sea $\mathsf{R} \subset \mathbb{R}^2$ un rectángulo, $\mathsf{R} = [\,a,b\,]\times[\,c,d\,]$ y sean $f\colon[\,a,b\,] \longrightarrow \mathbb{R}$, $g\colon[\,c,d\,] \longrightarrow \mathbb{R}$, funciones integrables en los intervalos respectivos. Supongamos que $h(x,y)=f(x)g(x)$ es integrable sobre R, probar que $\displaystyle\iint_{\mathsf{R}} f(x)g(x)dxdy = \left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_c^d g(y)dy\right)$.

Solución Dado que h es integrable, $\displaystyle\iint_{\mathsf{R}} h(x,y)dxdy = \int_a^b\left(\int_c^d h(x,y)dy\right)dx =$
$\displaystyle\int_a^b\left(\int_c^d f(x)g(y)dy\right)dx = \int_a^b f(x)\left(\int_c^d g(y)dy\right)dx = \left(\int_c^d g(y)dy\right)\left(\int_a^b f(x)dx\right).$

6. Calcular las siguientes integrales y dibujar las regiones de integración:

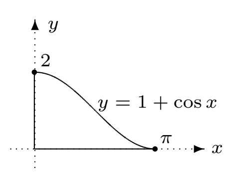
a) $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{1+\cos x} y^2\operatorname{sen} x\,dy\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{\cos x}^{1} y^4 dy\,dx$ c) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{3\cos y} x^2\operatorname{sen}^2 y dx\,dy.$

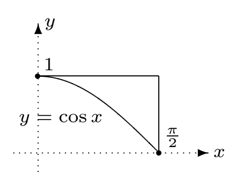
Solución

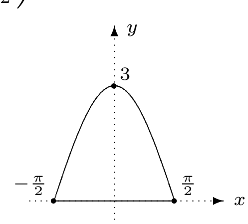
a) $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{1+\cos x} y^2\operatorname{sen} x\,dy\,dx = \int_0^{\pi}\frac{1}{3}(1+\cos x)^3\operatorname{sen} x\,dx = -\frac{1}{3}\int_0^{\pi}(1+\cos x)^3(-\operatorname{sen} x)\,dx =$
$\displaystyle-\frac{1}{3}\,\frac{(1+\cos x)^4}{4}\bigg|_0^{\pi} = \frac{1}{12}\cdot 2^4 = \frac{4}{3}.$

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{\cos x}^{1} y^4\,dy\,dx = \frac{1}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^5 y)\,dy = \frac{1}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dy - \frac{1}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 y\,dy = \frac{\pi}{10}-\frac{1}{5}\cdot\frac{4\cdot 2}{5\cdot 3} =$
$\displaystyle\frac{15\pi-16}{5\cdot5\cdot3\cdot2} = \frac{15\pi-16}{150}.$

c) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{3\cos y} x^2\operatorname{sen}^2 y\,dx\,dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}(3\cos y)^3\operatorname{sen}^2 y\,dy = 9\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 y\operatorname{sen}^2 y\cos y\,dy =$
$\displaystyle 9\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\operatorname{sen}^2 y)\operatorname{sen}^2 y(\cos y\,dy) = 9\left(\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 y\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 y\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right) = 9\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{5}\right) = \frac{12}{5}.$







7. Calcular las siguientes integrales dobles.

a) $\displaystyle\iint_{\mathsf{R}} xy^2 dx\,dy$, R está limitada por la parábola $y^2=2px$ y la recta $x=p$.

b) $\displaystyle\iint_{\mathsf{R}}\frac{dx\,dy}{\sqrt{2a-x}}$, R es un círculo de radio a, tangente a los ejes de coordenadas y se encuentra en el primer cuadrante.

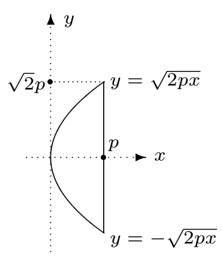
Solución

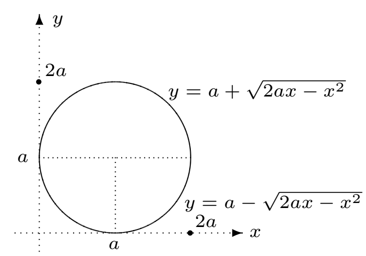
a) $\displaystyle\iint_{R} xy^2\,dx\,dy = \int_0^p \int_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}} xy^2\,dy\,dx = 2\int_0^p \frac{x}{3}(2px)^{\frac{3}{2}}\,dx = 2\frac{(2p)^{\frac{3}{2}}}{3}\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}\Big|_0^p = \frac{8\sqrt{2}p^5}{21}.$

b) La región R está dada por $(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$ i.e. $y = a \pm \sqrt{2ax - x^2}$.

Así tenemos que: $\displaystyle\iint_{R} \frac{dx\,dy}{\sqrt{2a-x}} = \int_0^{2a} \int_{a-\sqrt{2ax-x^2}}^{a+\sqrt{2ax-x^2}} \frac{dy\,dx}{\sqrt{2a-x}} = \int_0^{2a} \frac{2\sqrt{2ax-x^2}}{\sqrt{2a-x}}\,dx =$

$\displaystyle\int_0^{2a} 2\sqrt{x}\,dx = 2\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{2a} = \frac{4}{3}2^{\frac{3}{2}}a^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3}a\sqrt{2a}.$





8. Dibujar las regiones cuyas áreas se expresan por las siguientes integrales. Calcular el área y cambiar el orden de integración en a) y b).

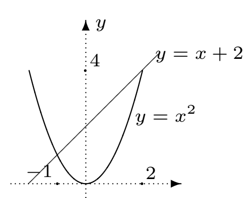
a) $\displaystyle\int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+2} dy\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^a \int_{a-y}^{\sqrt{a^2-y^2}} dx\,dy$

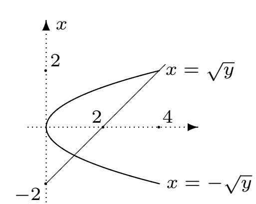
c) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2}\int_0^{3\sec\theta} r\,dr\,d\theta$ d) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_a^{a(1+\cos\theta)} r\,dr\,d\theta.$

Solución

a) $\displaystyle\int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+2} dy\,dx = \int_{-1}^{2}(x+2-x^2)\,dx = \left(\tfrac{1}{2}x^2 + 2x - \tfrac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-1}^{2} = \frac{9}{2} = \int_0^1\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx\,dy +$

$\displaystyle\int_1^4\int_{y-2}^{\sqrt{y}} dx\,dy = \int_0^1 2\sqrt{y}\,dy + \int_1^4 (\sqrt{y} - y + 2)\,dy = \frac{4}{3} + \left(\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}y^2 + 2y\right)\Big|_1^4 = \frac{9}{2}.$

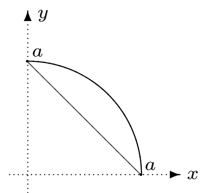


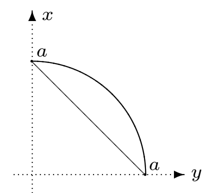


b) $\displaystyle\int_0^a\int_{a-y}^{\sqrt{a^2-y^2}} dx\,dy =$

$\displaystyle\int_0^a (\sqrt{a^2-y^2} - a + y)\,dy = \left(\frac{1}{2}y\sqrt{a^2-y^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}\frac{y}{a} - ay + \frac{1}{2}y^2\right)\Big|_0^a =$

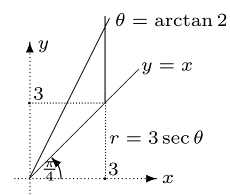
$$\frac{a^2}{2}\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \int_0^a \int_{a-x}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy\,dx.$$

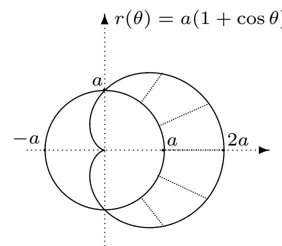




c) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2}\int_0^{3\sec\theta} r\,dr\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2} r^2\Big|_0^{3\sec\theta} d\theta =$

$\displaystyle\frac{9}{2}\int_{\arctan 1}^{\arctan 2} \sec^2\theta\,d\theta = \frac{9}{2}\tan\theta\Big|_{\arctan 1}^{\arctan 2} = \frac{9}{2}(2-1) = \frac{9}{2}.$



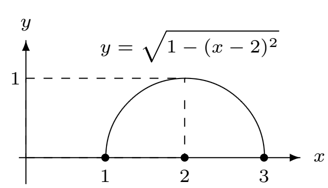


d) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_a^{a(1+\cos\theta)} r\,dr\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (a^2(1+\cos\theta)^2 - a^2)\,d\theta =$

$\displaystyle a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\theta + 2\cos\theta)\,d\theta = a^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{1}{2} + 2\right) = a^2\left(\frac{\pi}{4} + 2\right).$

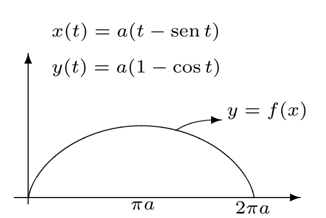
9. Calcular la integral $\displaystyle\iint_{\mathsf{R}} xy\,dxdy$, donde R es la región limitada por el eje x y la semicírculo superior $(x-2)^2 + y^2 = 1$.

Solución La integral $\displaystyle\iint_{\mathsf{R}} xydxdy =$
$\displaystyle\int_1^3\int_0^{\sqrt{-x^2+4x-3}} xydydx = \frac{1}{2}\int_1^3 xy^2\Big|_0^{\sqrt{-x^2+4x-3}} dx =$
$\displaystyle\frac{1}{2}\int_1^3 (-x^3 + 4x^2 - 3x)dx = \frac{4}{3}.$



10. Calcular la integral $\displaystyle\iint_{\mathsf{R}} y\,dxdy$, donde R es la región limitada por el eje x y el cicloide $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1-\cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

Solución $\displaystyle\iint_{\mathsf{R}} ydxdy = \int_0^{2\pi a}\int_0^{f(x)} ydydx = \int_0^{2\pi a} H(x)dx,$
donde $f(x)$ es la función de la curva de cicloide y $H(x) = \displaystyle\int_0^{f(x)} ydy$. Realizando el cambio de variable de $y = f(x)$ a t, con $0 \le t \le 2\pi$, se tiene:

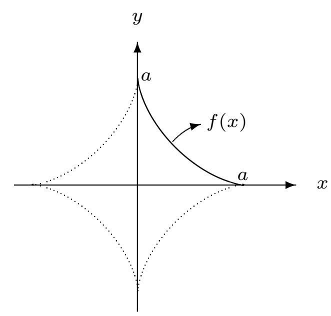


$$\iint\limits_{\mathrm{R}} ydxdy = \int_0^{2\pi a} a(1-\cos t)\left[\int_0^{a(1-\cos t)} ydy\right]dt = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^3(1-\cos t)^3 dt =$$

$$\tfrac{1}{2}a^3\int_0^{2\pi}(1-\cancel{3\cos t}+3\cos^2 t-\cancel{\cos^3 t})dt = \tfrac{1}{2}a^3\Big(2\pi - 0 + 3{\cdot}4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt - 0\Big) =$$

$$\tfrac{1}{2}a^3\big(2\pi + 3{\cdot}4\tfrac{1}{2}\tfrac{\pi}{2}\big) = \tfrac{5}{2}\pi a^3.$$

11. Calcular la integral $\iint\limits_{\mathrm{R}} xy\,dx\,dy$, donde R es la región limitada por los ejes coordenados y el arco de astroide $x = a\,\mathrm{sen}^3 t$, $y = a\cos^3 t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.



Solución $\iint\limits_{\mathrm{R}} xy\,dx\,dy = \int_0^a \left[\int_0^{f(x)} ydy\right]x\,dx = \int_0^a xH(x)dx$, donde $f(x)$ es la función de la curva de astroide y $H(x) = \int_0^{f(x)} ydy$, es decir:

$$\iint\limits_{\mathrm{R}} xydxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\,\mathrm{sen}^3 t\left[\int_0^{a\cos^3 t} ydy\right] 3a\,\mathrm{sen}^2 t\cos t dt = \tfrac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^4\,\mathrm{sen}^5 t\cos^7 t dt =$$

$\frac{3}{4}\beta(3,4)a^4 = \frac{3}{4}a^4\frac{2!3!}{6!} = \frac{1}{80}a^4$, pues $\beta(n,m) = \dfrac{(n-1)!(m-1)!}{(n+m-1)!} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{sen}^{2n-1} t\cos^{2m-1} t dt.$

12. Calcular las integrales $\iint\limits_{\mathrm{R}} f(x,y)dxdy$, donde:

a) $\mathrm{R} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/0\le x\le 1,\ 0\le y\le x\}$, $f(x,y) = \dfrac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}$.

b) $\mathrm{R} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x^2\le 2p(y+1),\ x^2\le -2p(y-1)\}$, $f(x,y) = x^2-2py$, $p>0$.

c) $\mathrm{R} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/0\le x\le\pi,\ |y|\le\mathrm{sen}\,x\}$, $f(x,y) = y^2\,\mathrm{sen}\,x$.

d) $\mathrm{R} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x\ge 0,\ y^2+2x\le 1\}$, $f(x,y) = x^2+y^2$.

e) $\mathrm{R} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x^2+y\le 0,\ y-x\ge 0\}$, $f(x,y) = \sqrt{y-x}$.

f) $\mathrm{R} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x\ge 0,\ y\ge 0,\ x+y\le 1\}$, $f(x,y) = a^x b^y$, $a>1$, $b>1$.

g) $\mathrm{R} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/0\le x\le 1,\ x^2\le y\le x\}$, $f(x,y) = \dfrac{1}{x+y+1}$.

h) $\mathrm{R} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/0\le x\le 2,\ y^2\le 2x\}$, $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$.

i) $\mathrm{R} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/y\ge 0,\ (x+y)^2\le 2x\}$, $f(x,y) = \sqrt{xy}$.

j) $\mathrm{R} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x\ge 0,\ y\ge 0,\ x^2+y^2\le 1\}$, $f(x,y) = x+y$.

k) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \leq 1\}$, $f(x,y) = \dfrac{1}{1+x^2+y^2}$.

l) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \leq c^2\}$, $f(x,y) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$, a, b, $c > 0$.

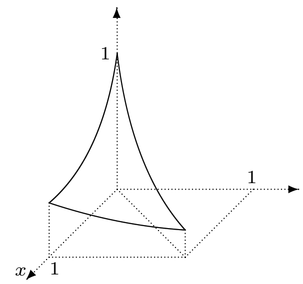
m) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+xy+y^2 \leq 1\}$, $f(x,y) = e^{-(x^2+xy+y^2)}$.

n) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq a^2\}$, $f(x,y) = \dfrac{y}{x^2+a^2}$, $a > 0$.

o) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 4 \leq x^2+y^2 \leq 16\}$, $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+xy+y^2}$.

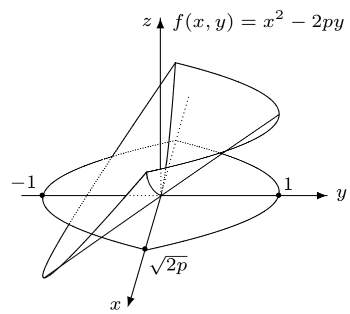
p) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ x^2+y^2 \geq 1\}$, $f(x,y) = \dfrac{xy}{(1+x^2+y^2)^2}$.

Solución



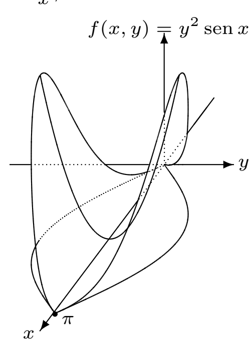
a) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\}$, $f(x,y) = \dfrac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}$.

$$\int_0^1 \int_0^x \frac{dy}{1+y^2} \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^1 \arctan x \frac{dx}{1+x^2} = \tfrac{1}{2} \arctan^2 x \Big|_0^1 = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\pi}{4}\right)^2 = \tfrac{1}{32}\pi^2.$$



b) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 \leq 2p(y+1),\ x^2 \leq -2p(y-1)\}$, $f(x,y) = x^2 - 2py$, $p > 0$.

$$\int_{-\sqrt{2p}}^{\sqrt{2p}} \int_{\frac{x^2}{2p}-1}^{-\frac{x^2}{2p}+1} (x^2-2py)\,dy\,dx = \int_{-\sqrt{2p}}^{\sqrt{2p}} \Big(-\frac{x^4}{p} + 2x^2\Big) dx = \Big(-\frac{2x^5}{5p} + \frac{4x^3}{3}\Big)\Big|_0^{\sqrt{2p}} = -\frac{2(2p)^2\sqrt{2p}}{5p} + \frac{8}{3}p\sqrt{2p} = \frac{16}{15}p\sqrt{2p}.$$

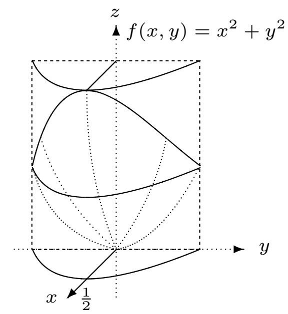


c) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq \pi,\ -\operatorname{sen} x \leq y \leq \operatorname{sen} x\}$, $f(x,y) = y^2 \operatorname{sen} x$.

$$\int_0^\pi \int_{-\operatorname{sen} x}^{\operatorname{sen} x} y^2 \operatorname{sen} x\,dy\,dx = \int_0^\pi \tfrac{1}{3} y^3 \Big|_{-\operatorname{sen} x}^{\operatorname{sen} x} \operatorname{sen} x\,dx = \tfrac{2}{3} \int_0^\pi \operatorname{sen}^4 x\,dx = \tfrac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^4 x\,dx = \tfrac{4}{3} \tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4} \tfrac{\pi}{2} = \tfrac{\pi}{4}.$$

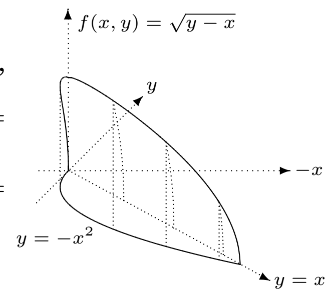
d) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0,\ y^2+2x \leq 1\}$, $f(x,y) = x^2+y^2$.

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\int_{-\sqrt{1-2x}}^{\sqrt{1-2x}}(x^2+y^2)dydx = \int_{-1}^{1}\int_0^{\frac{1}{2}(1-y^2)}(x^2+y^2)dxdy =$$
$$\int_{-1}^{1}(\tfrac{1}{3}x^3+y^2x)\Big|_0^{\frac{1}{2}(1-y^2)}dy = \int_{-1}^{1}\left[\tfrac{1}{24}(1-y^2)^3+\tfrac{1}{2}y^2(1-y^2)\right]dy =$$
$$\tfrac{1}{24}\int_{-1}^{1}(1-3y^2+3y^4-y^6+12y^2-12y^4)dy =$$
$$\tfrac{1}{24}\int_{-1}^{1}(1+9y^2-9y^4-y^6)dy = \tfrac{2}{24}(1+3-\tfrac{9}{5}-\tfrac{1}{7}) = \tfrac{72}{12}\tfrac{1}{35} = \tfrac{6}{35}.$$



e) $\mathsf{R} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x^2+y\le 0,\ y-x\ge 0\}$, $f(x,y)=\sqrt{y-x}$.

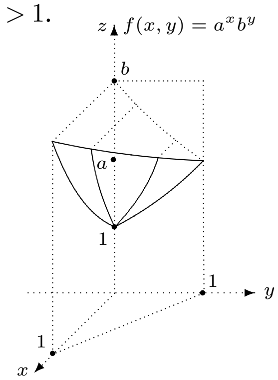
Haciendo el cambio de variables $u = y-x$, $du = dy$, tenemos $\displaystyle\int_{-1}^{0}\int_{x}^{-x^2}\sqrt{y-x}\,dy\,dx = \int_{-1}^{0}\int_{0}^{-x^2-x}\sqrt{u}\,du\,dx =$
$$\int_{-1}^{0}\tfrac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{-x^2-x}dx = \tfrac{2}{3}\int_{-1}^{0}(-x^2-x)^{\frac{3}{2}}dx = -\tfrac{2}{3}\int_{1}^{0}(-t^2+t)^{\frac{3}{2}}dt =$$
$$\tfrac{2}{3}\int_0^1 t^{\frac{3}{2}}(1-t)^{\frac{3}{2}}dt = \tfrac{2}{3}\beta(\tfrac{5}{2},\tfrac{5}{2}) = \frac{\frac{2}{3}\Gamma(\frac{5}{2})^2}{\Gamma(5)} = \tfrac{\pi}{64}.$$



f) $\mathsf{R} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x\ge 0,\ y\ge 0,\ x+y\le 1\}$, $f(x,y)=a^xb^y$, $a>1$, $b>1$.

Si $a\neq b$, $\displaystyle\int_0^1\int_0^{1-x}a^xb^y\,dy\,dx = \int_0^1 a^x\frac{b^y}{\ln b}\Big|_0^{1-x}dx =$
$$\frac{1}{\ln b}\int_0^1\left[\left(\frac{a}{b}\right)^x b-a^x\right]dx = \frac{1}{\ln b}\left[\frac{b}{\ln(a/b)}\left(\frac{a}{b}-1\right)-\frac{1}{\ln a}(a-1)\right] =$$
$$\frac{1}{\ln b}\frac{1}{\ln a}\frac{1}{\ln a-\ln b}\Big((a-1)\ln b-(b-1)\ln a\Big) =$$
$$\frac{(a-1)\ln b-(b-1)\ln a}{\ln a\ln b(\ln a-\ln b)}.$$

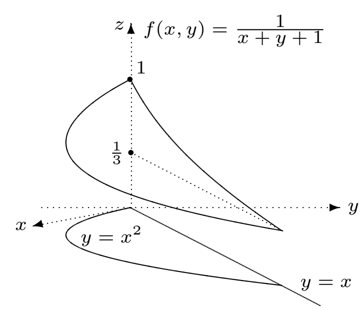
Si $a=b$, la integral vale $\dfrac{a\ln a-a+1}{(\ln a)^2}$.



g) $\mathsf{R} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/0\le x\le 1,\ x^2\le y\le x\}$, $f(x,y)=\dfrac{1}{x+y+1}$.

$$\int_0^1\int_{x^2}^{x}\frac{1}{x+y+1}dydx = \int_0^1\ln(x+y+1)\Big|_{y=x^2}^{y=x}dx =$$
$$\int_0^1(\ln(2x+1)-\ln(x^2+x+1))dx.$$

Recordemos que salvo constantes, $\displaystyle\int\ln x dx = x\ln x-x$ y $\displaystyle\int\ln(x^2+a^2)dx = x\ln(x^2+a^2)-2x+2a\arctan\frac{x}{a}$, por



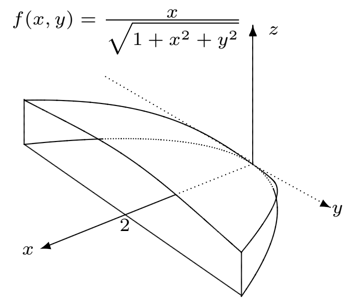
lo que $\displaystyle\int_0^1 \ln(2x+1)dx = \frac{1}{2}\int_1^3 \ln u du = \frac{1}{2}(u\ln u - u)\Big|_1^3 = \frac{3}{2}\ln 3 - 1$ y también:

$\displaystyle\int_0^1 \ln((x+\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{3}{4})dx = (x+\tfrac{1}{2})\ln(x^2+x+1) - 2(x+\tfrac{1}{2}) + 2\tfrac{\sqrt{3}}{2}\arctan\tfrac{2}{\sqrt{3}}(x+\tfrac{1}{2})\Big|_0^1 =$ $\frac{3}{2}\ln 3 - 2 + \sqrt{3}\arctan\sqrt{3} - \sqrt{3}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{2}\ln 3 - 2 + \sqrt{3}(\frac{1}{3}\pi - \frac{1}{6}\pi) = \frac{3}{2}\ln 3 - 2 + \frac{\sqrt{3}}{6}\pi.$

Finalmente, $\displaystyle\iint_R f(x,y)dxdy = 1 - \frac{\sqrt{3}}{6}\pi = 1 - \frac{1}{2\sqrt{3}}\pi.$

h) $R = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/0\le x\le 2,\ y^2\le 2x\}$, $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$.

Consideremos el cambio de variable $x^2 + (1+y^2) = u$, $2xdx = du$, entonces: $\displaystyle\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\int_{\frac{1}{2}y^2}^{2}\frac{2x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}dxdy = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\int_{\frac{1}{4}y^4+y^2+1}^{y^2+5}\frac{du}{\sqrt{u}}dy = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}2\sqrt{u}\Big|_{\frac{1}{4}y^4+y^2+1}^{y^2+5}dy = \int_{-2}^{2}\big(\sqrt{y^2+5} - \tfrac{1}{2}\sqrt{y^4+4y^2+4}\big)dy = \int_{-2}^{2}\big(\sqrt{y^2+5} - \tfrac{1}{2}(y^2+2)\big)dy = 2\int_0^2\big(\sqrt{y^2+5} - \tfrac{1}{2}(y^2+2)\big)dy.$



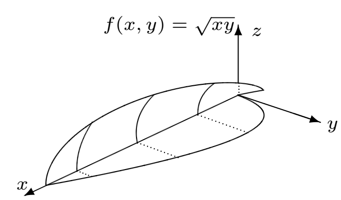
Recordemos que $\displaystyle\int\sqrt{x^2+a^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2} + \frac{1}{2}a^2\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$; así se tiene:

$$\iint_R f(x,y)dxdy = 2\big(\tfrac{1}{2}y\sqrt{y^2+5} + \tfrac{5}{2}\ln(y+\sqrt{y^2+5}) - \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{3}y^3+2y)\big)\Big|_0^2 =$$

$2\big(\frac{1}{2}2\cdot 3 + \frac{5}{2}\ln 5 - \frac{1}{2}(\frac{8}{3}+4) - \frac{5}{2}\ln\sqrt{5}\big) = 2\big(\frac{5}{4}\ln 5 - \frac{1}{3}\big) = \frac{5}{2}\ln 5 - \frac{2}{3}.$

i) $R = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/y\ge 0,\ (x+y)^2\le 2x\}$, $f(x,y) = \sqrt{xy}$.

Observemos que $y = -x\pm\sqrt{2x}\ge 0$, $y\ge 0 \iff -x+\sqrt{2x}\ge 0 \iff \sqrt{2x}\ge x\ge 0 \iff 2x\ge x^2 \iff x(2-x)\ge 0 \iff 0\le x\le 2$.



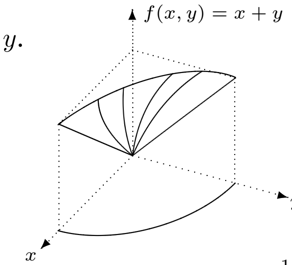
De esta manera $\displaystyle\int_0^2\int_0^{\sqrt{2x}-x}\sqrt{xy}dydx = \frac{2}{3}\int_0^2\sqrt{x}(\sqrt{2x}-x)^{\frac{3}{2}}dx = \frac{4}{3}\int_0^{\sqrt{2}}(u\sqrt{2}-u^2)^{\frac{3}{2}}u^2du$, con $\sqrt{x} = u$, $dx = 2udu$, es decir si se cambia a $v = \sqrt{2}u - 1$, $u\sqrt{2} - u^2 = \frac{1}{2}(1-v^2)$, $u^2 = \frac{1}{2}(v+1)^2$, se tiene que $\displaystyle\frac{4}{3}\int_{-1}^{1}\frac{(1-v^2)^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{3}{2}}}\frac{(v+1)^2}{2}\frac{dv}{\sqrt{2}} = \frac{1}{6}\int_{-1}^{1}(1-v^2)^{\frac{3}{2}}(1+v)^2dv = \frac{1}{6}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta(1+\operatorname{sen}^2\theta+2\operatorname{sen}\theta)\cos\theta d\theta = \frac{1}{6}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta(1+\operatorname{sen}^2\theta)d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos^4\theta d\theta - \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\theta d\theta = \frac{\pi}{8} - \frac{5\pi}{96} = \frac{7\pi}{96}.$

Se pudo notar antes que existía una función beta que habría simplificado los cálculos.

En efecto:

$\frac{4}{3}\int_0^{\sqrt{2}}(u\sqrt{2}-u^2)^{\frac{3}{2}}u^2du = \frac{4}{3}\int_0^{\sqrt{2}}(\sqrt{2}-u)^{\frac{3}{2}}u^{\frac{7}{2}}du = \frac{2^5}{3}\int_0^{\sqrt{2}}\big(1-\frac{u}{\sqrt{2}}\big)^{\frac{3}{2}}\big(\frac{u}{\sqrt{2}}\big)^{\frac{7}{2}}\frac{du}{\sqrt{2}} =$ $\frac{2^5}{3}\beta(\frac{5}{2},\frac{9}{2}) = \frac{32}{3}\frac{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})\frac{7}{2}\frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{6!} = \frac{7\pi}{96}$. Recuerde que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

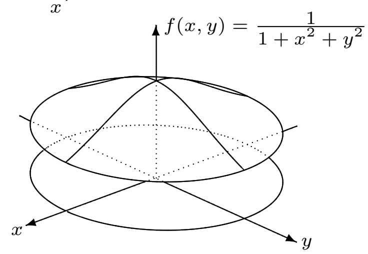
j) $\mathsf{R} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x\geq 0,\ y\geq 0,\ x^2+y^2\leq 1\}$, $f(x,y)=x+y$.



Pasando a coordenadas polares tenemos que:

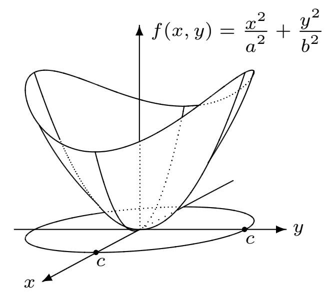
$\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}(x+y)dydx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r^2(\operatorname{sen}\theta+\cos\theta)drd\theta =$ $\frac{1}{3}(\operatorname{sen}\theta-\cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$.

k) $\mathsf{R} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x^2+y^2\leq 1\}$, $f(x,y) = \dfrac{1}{1+x^2+y^2}$.



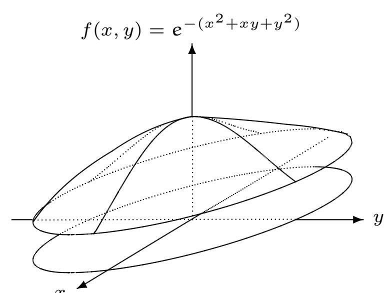
Usando coordenadas polares $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, $|J| = r$, la integral se transforma en $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^1\frac{r}{1+r^2}drd\theta = \pi\ln(1+r^2)\Big|_0^1 = \pi\ln 2$.

l) $\mathsf{R} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x^2+y^2\leq c^2\}$, $f(x,y) = \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$, a, b, $c>0$.



Las coordenadas polares $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, $|J| = r$, transforman la integral en: $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^c r^3\big(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{b^2}\big)drd\theta = c^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\big(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{b^2}\big)d\theta = c^4\big(\frac{\pi}{4a^2}+\frac{\pi}{4b^2}\big) = \frac{\pi c^4}{4}\big(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\big)$.

m) $\mathsf{R} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x^2+xy+y^2\leq 1\}$, $f(x,y) = \mathrm{e}^{-(x^2+xy+y^2)}$.

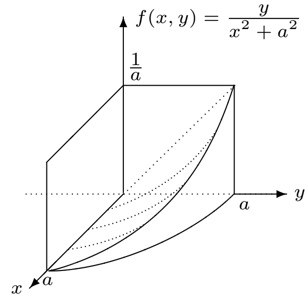


Tenemos que $x^2+xy+y^2 = \big(x+\frac{1}{2}y\big)^2+\big(\frac{\sqrt{3}}{2}y\big)^2$ y se efectúa el cambio de variable $u = x+\frac{1}{2}y$, $v = \frac{\sqrt{3}}{2}y \Longrightarrow y = \frac{2}{\sqrt{3}}v$, $x = u-\frac{1}{\sqrt{3}}v$, el Jacobiano es $J = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{3}}\end{vmatrix} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ y la integral en la región $\mathsf{R}' = \{(u,v)\in\mathbb{R}^2/u^2+v^2\leq 1\}$ es:

$\frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\mathrm{e}^{-r^2}drd\theta = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\Big(-\mathrm{e}^{-r^2}\Big|_0^1\Big) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}(1-\frac{1}{\mathrm{e}})$.

n) $\mathsf{R}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x\geq 0,\ y\geq 0,\ x^2+y^2\leq a^2\}$, $f(x,y)=\dfrac{y}{x^2+a^2}$, $a>0$.

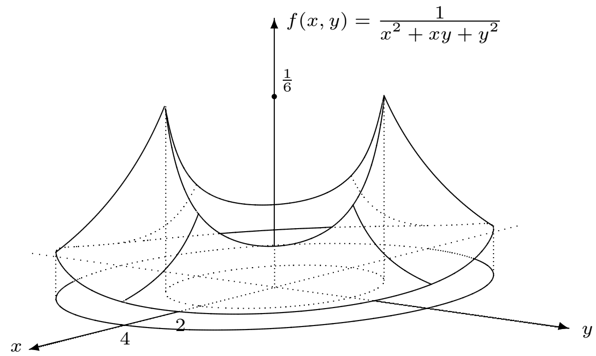
Un cambio a coordenadas polares nos lleva a:



$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a \frac{r^2\operatorname{sen}\theta}{a^2+r^2\cos^2\theta}drd\theta = \int_0^1\int_0^a\frac{r^2dr}{a^2+r^2u^2}du =$$
$$\int_0^a\frac{r}{a}\int_0^1\frac{r/adu}{1+(ru/a)^2}dr = \int_0^a\frac{r}{a}\arctan\frac{ru}{a}\Big|_0^1 dr =$$
$$\int_0^a\frac{r}{a}\arctan\frac{r}{a}dr = a\int_0^1 x\arctan x dx =$$
$$\tfrac{1}{2}(a(x^2+1)\arctan x - x)\Big|_0^1=\tfrac{1}{4}a(\pi-2).$$

o) $\mathsf{R}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/4\leq x^2+y^2\leq 16\}$, $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+xy+y^2}$.

Usando coordenadas polares se tiene:



$$\int_0^{2\pi}\int_2^4\frac{rdr}{r^2(1+\operatorname{sen}\theta\cos\theta)}d\theta =$$
$$\ln r\Big|_2^4\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+\operatorname{sen}\theta\cos\theta}=$$
$$\ln 2\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+\operatorname{sen}\theta\cos\theta}=$$
$$2\ln 2\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\operatorname{sen}2\theta}=$$

$\ln 2\displaystyle\int_0^{4\pi}\frac{du}{2+\operatorname{sen}u}=4\ln 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{du}{2+\operatorname{sen}u}$. Observe que la función $\dfrac{1}{2+\operatorname{sen}u}$ es periódica.

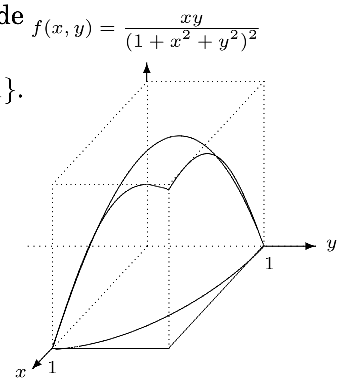
Si consideramos $x=\tan\frac{u}{2}$, $du=\dfrac{2}{1+x^2}dx$, $\operatorname{sen}u=\dfrac{2x}{1+x^2}$, por lo que se tiene:

$$4\ln 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{du}{2+\operatorname{sen}u}=4\ln 2\int_{-1}^1\frac{\frac{2}{1+x^2}dx}{2+\frac{2x}{1+x^2}}=4\ln 2\int_{-1}^1\frac{dx}{x^2+x+1}=$$
$$4\ln 2\int_{-1}^1\frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}=4\ln 2\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{3}}\Big|_{-1}^1=\frac{8}{\sqrt{3}}\ln 2\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big|_{-1}^1=$$
$$\frac{8}{\sqrt{3}}\ln 2\arctan\big(\sqrt{3}-\arctan\frac{-1}{\sqrt{3}}\big)=\frac{8}{\sqrt{3}}\ln 2\big(\frac{\pi}{3}-\big(-\frac{\pi}{6}\big)\big)=\frac{8}{\sqrt{3}}\ln 2\frac{\pi}{2}=\frac{4}{\sqrt{3}}\pi\ln 2.$$

p) $\mathsf{R}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1,\ x^2+y^2\geq 1\}$, $f(x,y)=\dfrac{xy}{(1+x^2+y^2)^2}$.

Dada la definición de la región R, se tiene que:

$$\iint\limits_{R} f(x,y)dxdy \;=\; \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy \;-\; \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy,$$ donde $D_1 = [0,1]^2$ y $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 1\}$.



De esta manera:

$$\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy = \int_0^1 x \int_0^1 \frac{y}{(1+x^2+y^2)^2} dydx =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{x}{1+x^2} - \frac{x}{2+x^2}\right)dx = \frac{1}{4}(2\ln 2 - \ln 3).$$

Por otra parte, usando coordenadas polares:

$$\iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \operatorname{sen}\theta d\theta \int_0^1 \frac{\rho^3 d\rho}{(1+\rho^2)^2} = \tfrac{1}{2}\int_0^1 \frac{\rho^3 d\rho}{(1+\rho^2)^2} =$$

$$\tfrac{1}{8}\int_0^1 \frac{4\rho^3+4\rho-4\rho}{(1+\rho^2)^2}d\rho = \tfrac{1}{8}\int_0^1 \frac{4\rho^3+4\rho}{1+2\rho^2+\rho^4}d\rho - \tfrac{1}{4}\int_0^1 \frac{2\rho}{(1+\rho^2)^2}d\rho =$$

$\tfrac{1}{8}\ln(1+2\rho^2+\rho^4)\Big|_0^1 + \tfrac{1}{4}\dfrac{1}{1+\rho^2}\Big|_0^1 = \tfrac{1}{8}\ln 4 + \tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{2}-1) = \tfrac{1}{8}\ln 4 - \tfrac{1}{8}$ y finalmente, $\displaystyle\iint\limits_{R} f(x,y)dxdy =$ $\tfrac{1}{4}\ln 2 - \tfrac{1}{4}\ln 3 + \tfrac{1}{8}$.

2.2 Colocación de límites

13. Colocar los límites de integración en la integral doble $\displaystyle\iint\limits_{R} f(x,y)\,dx\,dy$ y dibujar la región R en cada caso:

a) R es el paralelogramo cuyos lados están sobre la recta $x=3$, $x=5$, $3x-2y+4=0$, $3x-2y+1=0$.

b) El triángulo cuyos lados están sobre las rectas $x=0$, $y=0$, $x+y=2$.

c) $x^2+y^2 \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

d) $x+y \leq 1$, $x-y \leq 1$, $x \geq 0$.

e) $y \geq x^2$, $y \leq 4-x^2$.

f) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \leq 1$.

g) $(x-2)^2 + (y-3)^2 \leq 4$.

h) R está limitado por las parábolas $y = x^2$, $x = \sqrt{y}$.

i) R es el triángulo con los lados sobre $y = x$, $y = 2x$, $x + y = 6$.

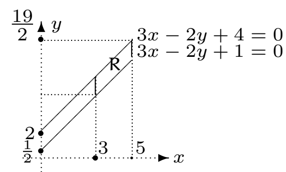
j) R es el paralelogramo con los lados sobre $y = x$, $y = x + 3$, $y = -2x + 1$, $y = -2x + 5$.

k) $y - 2x \leq 0$, $2y - x \geq 0$, $xy \leq 2$.

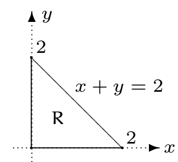
l) $y^2 \leq 8x$, $y \leq 2x$, $y + 4x - 24 \leq 0$.

m) R está limitado por la hipérbola $y^2 - x^2 = 1$ y por la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$.

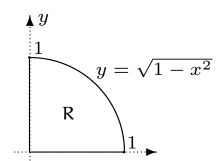
Solución



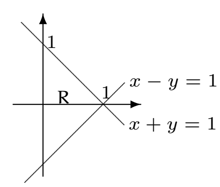
a) $$\iint_{R} f(x,y)\,dx\,dy = \int_3^5 \left(\int_{\frac{3x+1}{2}}^{\frac{3x+4}{2}} f(x,y) \right) dy\,dx.$$



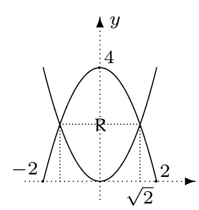
b) $$\iint_{R} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2 \left(\int_0^{2-x} f(x,y)\,dy \right) dx.$$



c) $$\iint_{R} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

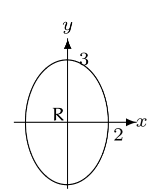


d) $$\iint_{R} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{x-1}^{1-x} f(x,y)\,dy \right) dx.$$



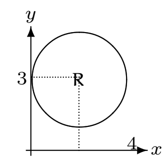
e) Las parábolas se intersecan cuando $y = x^2 = 4 - x^2 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{2}$. Así se tiene que:

$$\iint_{R} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\int_{x^2}^{4-x^2} f(x,y)\,dy \right) dx.$$



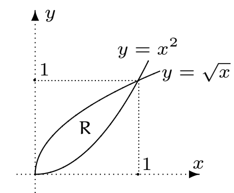
f) Aquí $y = \pm 3\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$ y tenemos $\iint_{R} f(x,y)\,dx\,dy =$

$$\int_{-2}^{2} \left(\int_{-3\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}^{3\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} f(x,y) \right) dy\,dx.$$

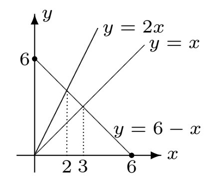


g) Se tiene que $y = 3 \pm \sqrt{4x - x^2}$, por lo que:

$$\iint\limits_{\mathsf{R}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^4 \left(\int_{3-\sqrt{4x-x^2}}^{3+\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)\,dy \right) dx.$$



h) Las curvas se intersecan cuando $y = x^2 = \sqrt{x} \Longrightarrow x^4 = x$ i.e. $x(x^3 - 1) = 0$, es decir $x = 0$, $x = 1$, con lo cual tenemos $\displaystyle\iint\limits_{\mathsf{R}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy \right) dx.$

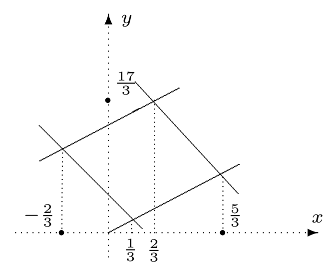


i) Las rectas $y = x$, $y = 2x$ se cortan en $x = 0$.

Las rectas $y = x$, $x + y = 6$ se cortan en $x = 3$.

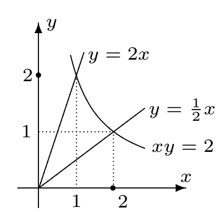
Las rectas $y = 2x$, $y + x = 6$ se cortan en $x = 2$.

Finalmente tenemos $\displaystyle\iint\limits_{\mathsf{R}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2 \left(\int_x^{2x} f(x,y)\,dy \right) dx + \int_2^3 \left(\int_x^{6-x} f(x,y)\,dy \right) dx.$



j) La recta $y = x$ se corta con $y = -2x + 5$ en $x = \frac{5}{3}$, $y = x$ se corta con $y = -2x + 1$ en $x = \frac{1}{3}$, $y = x + 3$ se corta con $y = -2x + 5$ en $x = \frac{2}{3}$, $y = x + 3$ se corta con $y = -2x + 1$ en $x = -\frac{2}{3}$. Así tenemos que:

$$\iint\limits_{\mathsf{R}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{1}{3}} \left(\int_{-2x+1}^{x+3} f(x,y)\,dy \right) dx + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \left(\int_x^{x+3} f(x,y)\,dy \right) dx$$
$$+ \int_{\frac{2}{3}}^{\frac{5}{3}} \left(\int_x^{-2x+5} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

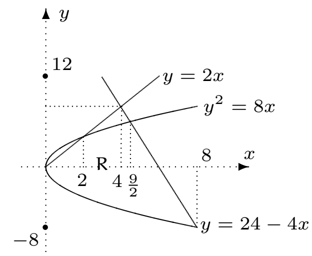


k) La recta $y = 2x$ se corta con $xy = 2$, si $2x^2 = 2$ i.e. $x = 1$.

La recta $y = \dfrac{1}{2}x$ se corta con $xy = 2$, en $x = 2$.

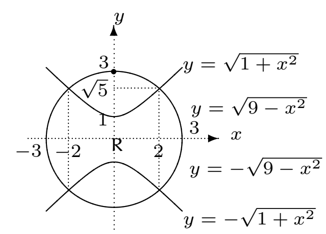
La recta $y = 2x$ se corta con $y = \dfrac{1}{2}x$, en $x = 0$.

Así tenemos: $\displaystyle\iint\limits_{\mathsf{R}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{\frac{1}{2}x}^{2x} f(x,y)\,dy \right) dx + \int_1^2 \left(\int_{\frac{1}{2}x}^{\frac{2}{x}} f(x,y)\,dy \right) dx.$



l) La parábola $y^2 = 8x$ se corta con $y = 2x$, cuando $4x^2 = 8x \Longrightarrow x = 0$, $x = 2$ y se corta con $y = -4x + 24$, cuando $(4x - 24)^2 = 8x \Longleftrightarrow 8(2x^2 - 25x + 72) = 0 \Longleftrightarrow x = 8$, $x = \frac{9}{2}$. Así se tiene que:

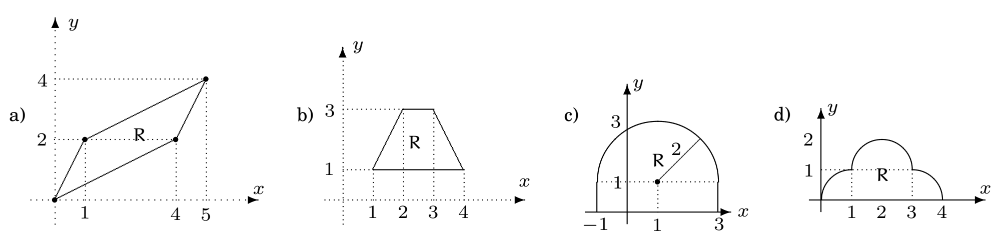
$$\iint\limits_{\mathsf{R}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2 \left(\int_{-\sqrt{8x}}^{2x} f(x,y)\,dy \right) dx + \int_2^{\frac{9}{2}} \left(\int_{-\sqrt{8x}}^{\sqrt{8x}} f(x,y)\,dy \right) dx$$
$$+ \int_{\frac{9}{2}}^{8} \left(\int_{-\sqrt{8x}}^{24-4x} f(x,y)\,dy \right) dx$$



m) Se tiene que las curvas se intersecan cuando $y^2 = 1 + x^2$ y $x^2 + y^2 = 9 \Longrightarrow 2x^2 = 8 \Longrightarrow x = \pm 2$. Así tenemos:

$$\iint\limits_{\mathsf{R}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-3}^{-2} \left(\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)\,dy \right) dx + \int_{-2}^{2} \left(\int_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} f(x,y)\,dy \right) dx$$
$$+ \int_2^3 \left(\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

14. Expresar la integral doble $\iint\limits_{\mathsf{R}} f(x,y)\,dx\,dy$, donde R representan regiones en las siguientes gráficas. En c) y d) las curvas son arcos de circunferencias.



Solución

a) Las ecuaciones de las rectas satisfacen:

$$\frac{y-2}{x-1} = \frac{1}{2} \Longrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}, \qquad \frac{y-4}{x-5} = 2 \Longrightarrow y = 2x + 3,$$
$$\frac{y-2}{x-1} = 2 \Longrightarrow y = 2x, \qquad \frac{y-2}{x-4} = \frac{1}{2} \Longrightarrow y = \frac{1}{2}x.$$

Así tenemos que integrando con respecto a x primeramente y luego con respecto a y:

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2 \left(\int_{\frac{1}{2}y}^{2y} f(x,y)\,dx \right) dy + \int_2^4 \left(\int_{2y-3}^{\frac{y+6}{2}} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

b) Es necesario determinar las ecuaciones de dos rectas e integrar de último respecto a y, para obtener una integral más compacta.

$\dfrac{y-1}{x-1} = 2 \Longrightarrow y = 2x-1$, $\dfrac{y-3}{x-3} = -2 \Longrightarrow y = -2x+9$, es decir:

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_1^3 \left(\int_{\frac{y+1}{2}}^{-\frac{y-9}{2}} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

c) La ecuación de la parte superior de la circunferencia es $(y-1)^2 + (x-1)^2 = 4$ i.e. $y = 1 + \sqrt{2x - x^2 + 3}$, por lo que:

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^3 \left(\int_0^{1+\sqrt{2x-x^2+3}} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

d) Determinemos las ecuaciones de las circunferencias (parte superior):

$$\begin{array}{lll} (x-1)^2 + y^2 = 1 & \text{i.e.}\quad x = 1 - \sqrt{1-y^2}, & 0 \le y \le 1 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1 & \text{i.e.}\quad x = 2 \pm \sqrt{2y-y^2}, & 1 \le y \le 2 \\ (x-3)^2 + y^2 = 1 & \text{i.e.}\quad x = 3 + \sqrt{1-y^2}, & 0 \le y \le 1. \end{array}$$

Integrando respecto a x y luego respecto a y se tiene:

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{3+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx \right) dy + \int_1^2 \left(\int_{2-\sqrt{2y-y^2}}^{2+\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

15. Calcular las siguientes integrales dobles:

a) $\displaystyle\int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{x}} dy \right) dx.$

b) $\displaystyle\int_2^4 \left(\int_x^{2x} \frac{y}{x}\,dy \right) dx.$

c) $\displaystyle\int_1^2 \left(\int_0^{\ln y} \mathrm{e}^x\,dx \right) dy.$

d) $\displaystyle\iint_R x^3 y^2\,dx\,dy$, R : $x^2 + y^2 \le a^2$.

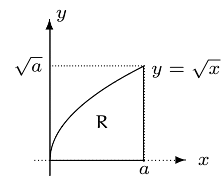
e) $\displaystyle\iint_R (x^2+y)\,dx\,dy$, R : acotado por $y = x^2$, $x = y^2$.

f) $\displaystyle\iint_R \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy$, R : acotado por $x = 2$, $y = x$, $xy = 1$.

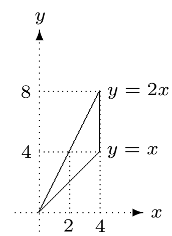
g) $\displaystyle\iint_{R} \cos(x+y)\,dx\,dy$, R : acotado por $x=0$, $y=x$, $y=\pi$.

h) $\displaystyle\iint_{R} x^2y^2\sqrt{1-x^3-y^3}\,dx\,dy$, R : acotado por $x^3+y^3=1$, $x=0$, $y=0$.

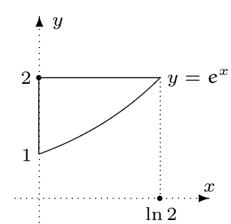
Solución



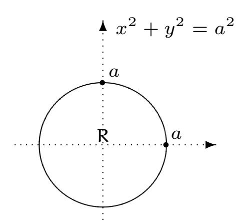
a) $$\int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{x}} dy\right) dx = \int_0^a \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^9 = \frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}}.$$



b) $$\int_2^4 \left(\int_x^{2x} \frac{y}{x}\,dy\right) dx = \int_2^4 \frac{1}{2}\frac{y^2}{x}\Big|_x^{2x} dx =$$
$$\int_2^4 \frac{1}{2}(4x-x)\,dx = \int_2^4 \frac{3}{2}x\,dx = \frac{3}{4}x^2\Big|_2^4 = \frac{3}{4}(16-4) = 9.$$

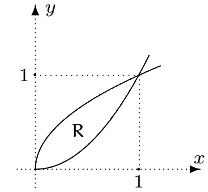


c) $$\int_1^2 \left(\int_0^{\ln y} e^x\,dx\right) dy = \int_1^2 \left(e^{\ln y}-1\right) dy =$$
$$\int_1^2 (y-1)\,dy = \left(\frac{1}{2}y^2-y\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{2}y(y-2)\Big|_1^2 = \frac{1}{2}.$$



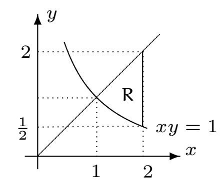
d) $$\iint_{R} x^3y^2\,dx\,dy = \int_{-a}^{a}\left(\int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} x^3y^2\,dx\right) dy =$$
$$\frac{1}{4}\int_{-a}^{a} x^4\Big|_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} y^2\,dy = \frac{1}{4}\int_{-a}^{a} 0\cdot y^2\,dy = 0.$$

e) $$\iint_{R}(x^2+y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2+y)\,dy\right) dx =$$
$$\int_0^1 (x^2y+\tfrac{1}{2}y^2)\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \left(-\frac{3}{2}x^4 + x^{\frac{5}{2}} + \frac{x}{2}\right) dx =$$
$$\left(-\frac{3}{10}x^5 + \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + \frac{1}{4}x^2\right)\Big|_0^1 = \frac{33}{140}.$$



f) $\displaystyle\iint\limits_{R} \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy = \int_1^2 \left(\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2}\,dy\right) dx =$

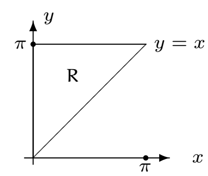
$\displaystyle\int_1^2 -\frac{x^2}{y}\Big|_{\frac{1}{x}}^{x} dx = \int_1^2 (x^3 - x)\,dx = \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_1^2 = \frac{9}{4}.$



g) $\displaystyle\iint\limits_{R} \cos(x + y)\,dx\,dy = \int_0^{\pi} \left(\int_x^{\pi} \cos(x+y)\,dy\right) dx =$

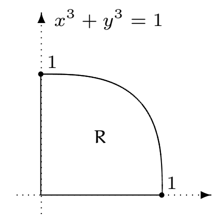
$\displaystyle\int_0^{\pi} -\operatorname{sen}(x+4)\Big|_x^{\pi} dx = -\int_0^{\pi} (\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} x)\,dx =$

$\displaystyle\left(\frac{1}{2}\cos 2x + \cos x\right)\Big|_0^{\pi} = -2.$



h) $\displaystyle\iint\limits_{R} x^2y^2\sqrt{1 - x^3 - y^3}\,dx\,dy =$

$\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt[3]{1-x^3}} x^2y^2\sqrt{1 - x^3 - y^3}\,dy\right) dx =$



$\displaystyle-\frac{2}{9}\int_0^1 x^2(1 - x^3 - y^3)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt[3]{1-x^3}} dx = \frac{2}{9}\int_0^1 x^2(1 - x^3)^{\frac{3}{2}}\,dx = -\frac{4}{135}(1 - x^3)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^1 = \frac{4}{135}.$

16. Colocar los límites de integración en uno y otro orden en las siguientes integrales dobles.

a) R es el rectángulo de vértice $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,1)$, $(0,1)$.

b) R es el triángulo cuyos vértices son $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$.

c) R es el trapecio cuyos vértices son $(0,0)$, $(2,0)$ $(1,1)$, $(0,1)$.

d) R es el paralelogramo cuyos vértices son $(1,2)$, $(2,4)$, $(2,7)$, $(1,5)$.

e) R es el sector circular OAB con centro $(0,0)$, cuyo arco tiene sus extremos en $A(1,1)$ y $B(-1,1)$.

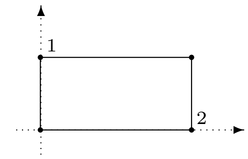
f) R es un segmento parabólico recto AOB, limitado por la parábola BOA y por el segmento de recta AB, que une entre sí los puntos $B(-1,2)$ y $A(1,2)$.

g) R es el anillo circular limitado por las circunferencias cuyos radios son $r = 1$, $r = 2$ y cuyo centro en común es $(0,0)$.

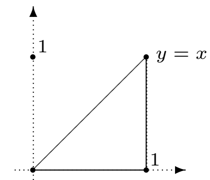
h) R está limitado por la hipérbola $y^2 - x^2 = 1$ y por la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ (se considera la región que comprende el origen de coordenadas).

Solución

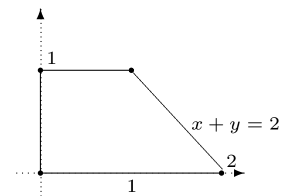
a) $\displaystyle\int_0^2\int_0^1 f(x,y)\,dy\,dx=\int_0^1\int_0^2 f(x,y)\,dx\,dy.$



b) $\displaystyle\int_0^1\int_0^x f(x,y)\,dy\,dx=\int_0^1\int_y^1 f(x,y)\,dx\,dy.$



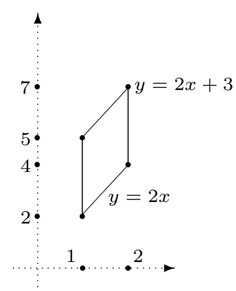
c) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{2-y} f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dy\,dx+$
$\displaystyle\int_1^2\int_0^{2-x} f(x,y)\,dy\,dx.$



d) La ecuación de la recta que pasa por $(1,5)$ y $(2,7)$ es $y=2x+3$. Similarmente la recta que pasa por $(1,2)$ y $(2,4)$ es $y=2x$. Así tenemos:

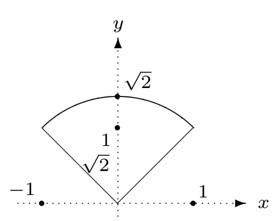
$$\iint\limits_{R} f(x,y)\,dx\,dy=\int_1^2\int_{2x}^{2x+3} f(x,y)\,dy\,dx=$$

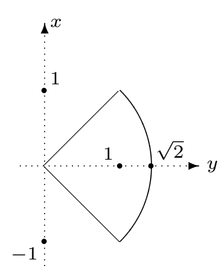
$$\int_2^4\int_1^{\frac{y}{2}} f(x,y)\,dx\,dy+\int_4^5\int_1^2 f(x,y)\,dx\,dy+\int_5^7\int_{\frac{y-3}{2}}^2 f(x,y)\,dx\,dy.$$



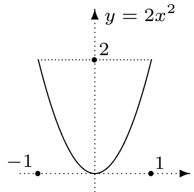
e) $\displaystyle\int_{-1}^0\int_{-x}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx+\int_0^1\int_x^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx=$

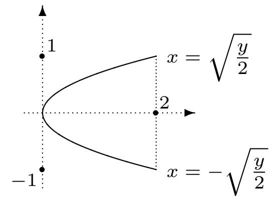
$$\int_0^1\int_{-y}^{y} f(x,y)\,dx\,dy+\int_1^{\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy.$$





f) $\displaystyle\int_{-1}^1\int_{2x^2}^2 f(x,y)\,dy\,dx=\int_0^2\int_{-\sqrt{\frac{y}{2}}}^{\sqrt{\frac{y}{2}}} f(x,y)\,dy\,dx.$



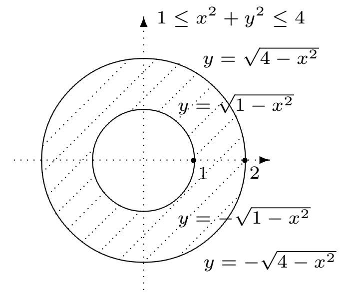


g) $\displaystyle\int_{-2}^{-1}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx + \int_{-1}^{1}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx +$

$\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx + \int_{1}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx =$

$\displaystyle\int_{-2}^{1}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy \;+\; \int_{-1}^{1}\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy \;+$

$\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{1}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy.$

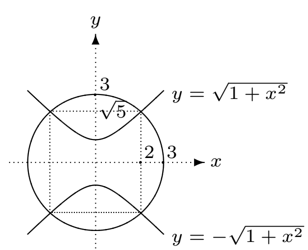


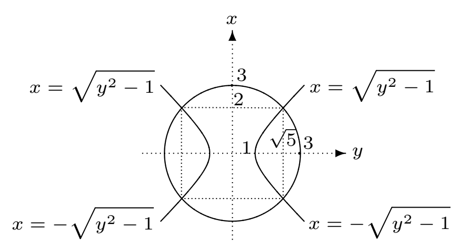
h) Las curvas se intersecan en los puntos que satisfacen ambas ecuaciones: $y^2 - x^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 9 \Longrightarrow 9 - x^2 - x^2 = 1 \Longrightarrow 8 = 2x^2 \Longrightarrow x = \pm 2$. Así tenemos que:

$\displaystyle\int_{-3}^{-2}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx + \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} f(x,y)\,dy\,dx + \int_{2}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx =$

$\displaystyle\int_{-\sqrt{5}}^{-1}\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{-\sqrt{y^2-1}} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{-\sqrt{5}}^{-1}\int_{\sqrt{y^2-1}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy +$

$\displaystyle\int_{1}^{\sqrt{5}}\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{-\sqrt{y^2-1}} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{1}^{\sqrt{5}}\int_{\sqrt{y^2-1}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy.$





17. Determinar los límites de integración de la integral doble $\displaystyle\iint_{\mathsf{R}} f(x,y)\,dx\,dy$ en uno y otro orden, si la región R está dada por:

a) $x \ge 0$, $y \ge 0$, $x + y \le 1$

b) $x^2 + y^2 \le a^2$

c) $x^2 + y^2 \le x$

d) $y \ge x$, $x \ge -1$, $y \le 1$

e) $y \le x \le y + 2a$, $0 \le y \le a$.

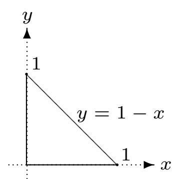
Solución

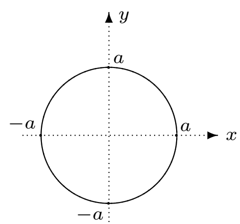
a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{1-x} f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^{1-y} f(x,y)\,dx\,dy.$

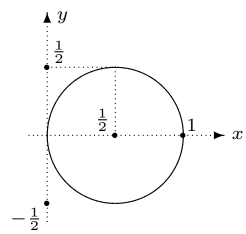
b) $\displaystyle\int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy.$

c) $x^2+y^2 \le x \iff x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 \le \frac{1}{4} \iff \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \le \frac{1}{4}.$

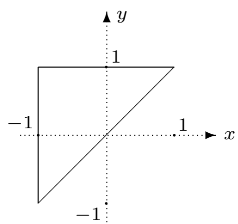
$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{\frac{1-\sqrt{1-4y^2}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{1-4y^2}}{2}} f(x,y)\,dx\,dy.$$

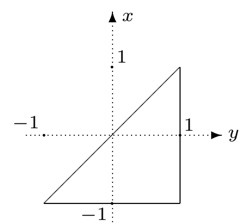




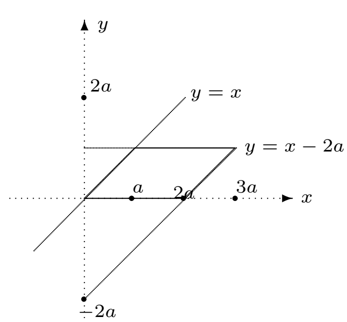


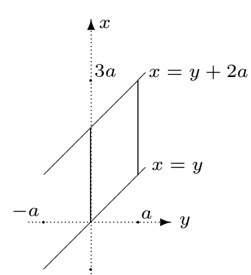
d) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \int_{x}^{1} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{y} f(x,y)\,dx\,dy.$





e) $\displaystyle\int_0^a \int_0^x f(x,y)\,dy\,dx + \int_a^{2a} \int_0^a f(x,y)\,dy\,dx + \int_{2a}^{3a} \int_{x-2a}^{a} f(x,y)\,dy\,dx =$
$\displaystyle\int_0^a \int_y^{y+2a} f(x,y)\,dx\,dy.$





18. Calcular las siguientes integrales dobles:

a) $\displaystyle\iint\limits_R x\,dx\,dy$, R es el triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$.

b) $\displaystyle\iint\limits_R x\,dx\,dy$, R está limitado por la recta que pasa por $(2,0)$, $(0,2)$ y por la circunferencia de radio 1 que tiene su centro en $(0,1)$.

c) $\displaystyle\iint\limits_R \frac{dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$, R es el círculo de radio a y centro $(0,0)$, situado en el primer cuadrante.

d) $\displaystyle\iint\limits_R \sqrt{x^2-y^2}\,dx\,dy$, R es el triángulo con los vértices en $(0,0)$, $(1,-1)$ y $(1,1)$.

e) $\displaystyle\iint\limits_R \sqrt{xy-y^2}\,dx\,dy$, R es el triángulo con los vértices en $(0,0)$, $(10,1)$ y $(1,1)$.

f) $\displaystyle\iint\limits_R \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\,dx\,dy$, R es la región limitada por la parábola $y^2=x$, $x=0$, $y=1$.

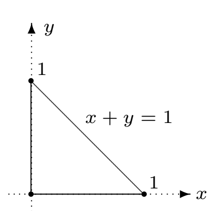
g) $\displaystyle\iint\limits_R \frac{x\,dx\,dy}{x^2+y^2}$, R es la región limitada por la parábola $y=\dfrac{x^2}{2}$, $y=x$.

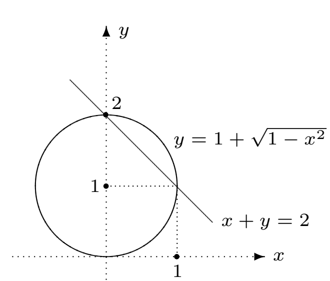
Solución

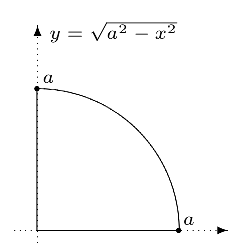
a) $\displaystyle\iint\limits_R x\,dx\,dy=\int_0^1\int_0^{1-x} x\,dy\,dx=\int_0^1 x(1-x)\,dx=(\tfrac{1}{2}x^2-\tfrac{1}{3}x^3)\Big|_0^1=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}=\tfrac{1}{6}.$

b) $\displaystyle\iint\limits_R x\,dx\,dy=\int_0^1\int_{2-x}^{1+\sqrt{1-x^2}} x\,dy\,dx=\int_0^1 xy\Big|_{2-x}^{1+\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^1 x(x+\sqrt{1-x^2}-1)\,dx=$
$\displaystyle\Big(\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{2}\big(-\tfrac{2}{3}\big)(1-x^2)^{\frac{3}{2}}-\tfrac{1}{2}x^2\Big)\Big|_0^1=\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{6}.$

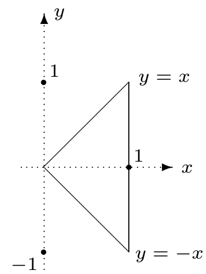
c) $\displaystyle\iint\limits_R \frac{dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=\int_0^a\left(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\frac{dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)dx\underset{a^2-x^2=u^2}{=}$
$\displaystyle\int_0^a\left(\int_0^u\frac{dy}{\sqrt{u^2-y^2}}\right)dx=\int_0^a \operatorname{arcsen}\frac{y}{u}\Big|_0^u dx=\int_0^a\frac{\pi}{2}\,dx=\frac{\pi}{2}a.$







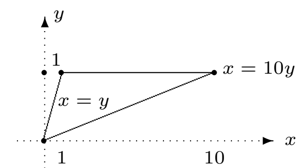
d) $\displaystyle\iint\limits_{R} \sqrt{x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_0^1 \int_{-x}^{x} \sqrt{x^2-y^2}\,dy\,dx =$



$\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{y}{2}\sqrt{x^2-y^2} + \frac{x^2}{2}\operatorname{arcsen}\frac{y}{x} \right)\Big|_{-x}^{x} dx =$

$\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{\pi}{4}x^2 + \frac{\pi}{4}x^2 \right) dx = \frac{\pi}{2}\int_0^1 x^2\,dx = \frac{\pi}{6}.$

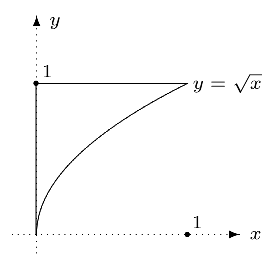
e) $\displaystyle\iint\limits_{R} \sqrt{xy-y^2}\,dx\,dy = \int_0^1 \int_{y}^{10y} \sqrt{xy-y^2}\,dx\,dy =$

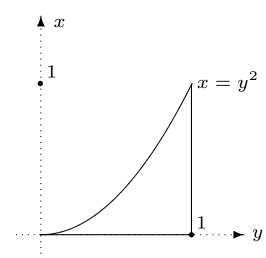


$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{y}\left(xy-y^2\right)^{\frac{3}{2}}\frac{2}{3}\Big|_{x=y}^{x=10y} dy = \int_0^1 18y^2\,dy = 6.$

f) $\displaystyle\iint\limits_{R} \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\,dx\,dy = \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^{1} \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\,dy\,dx = \int_0^1 y \int_0^{y^2} \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\,\frac{dx}{y}\,dy = \int_0^1 y\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\Big|_0^{y^2} dy = \int_0^1 y(\mathrm{e}^y-1)\,dy =$

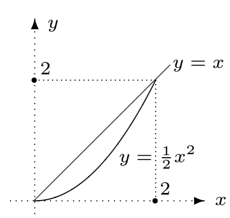
$\displaystyle y\mathrm{e}^y\Big|_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^y\,dy - \int_0^1 y dy = \mathrm{e} - (\mathrm{e}-1) - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}.$

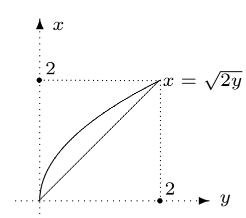




g) $\displaystyle\iint\limits_{R} \frac{x\,dx\,dy}{x^2+y^2} = \int_0^2 \int_{y}^{\sqrt{2y}} \frac{x\,dx\,dy}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\int_0^2 \ln(x^2+y^2)\Big|_{x=y}^{x=\sqrt{2y}} dx = \frac{1}{2}\int_0^2 (\ln(2y+y^2) -$

$\displaystyle \ln 2y^2)\,dy = \frac{1}{2}\int_0^2 (\ln(2+y) - \ln 2y)\,dy.$





Pero, $\displaystyle\int_0^2 \ln(y+2)\,dy = \int_2^4 \ln u\,du = (u\ln u - u)\Big|_2^4 = 6\ln 2 - 2$ y además $\displaystyle\int_0^2 \ln 2y\,dy =$ $\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^4 \ln u\,du = \frac{1}{2}(u\ln u - u)\Big|_0^4 = 4\ln 2 - 2.$

Finalmente, $\displaystyle\iint\limits_{R} \frac{x\,dx\,dy}{x^2+y^2} = \tfrac{1}{2}(6\ln 2 - 2 - 4\ln 2 + 2) = \ln 2.$

2.3 Inversión de límites

19. Graficar la región e invertir el orden de integración en las siguientes integrales dobles:

a) $\displaystyle\int_0^4 \int_{3x^2}^{12x} f(x,y)\,dy\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^1 \int_{2x}^{3x} f(x,y)\,dy\,dx$

c) $\displaystyle\int_0^a \int_{\frac{a^2-x^2}{2a}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx$

d) $\displaystyle\int_{\frac{a}{2}}^a \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx$

e) $\displaystyle\int_0^{2a} \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{4ax}} f(x,y)\,dy\,dx$

f) $\displaystyle\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,dx\,dy$

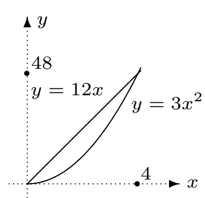
g) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy$

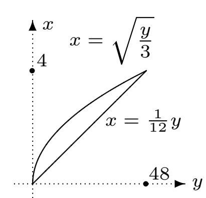
h) $\displaystyle\int_0^\pi \int_0^{\operatorname{sen} x} f(x,y)\,dy\,dx$

i) $\displaystyle\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} \int_0^x f(x,y)\,dy\,dx + \int_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^R \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx.$

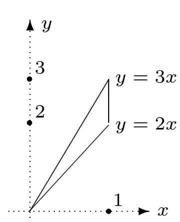
Solución

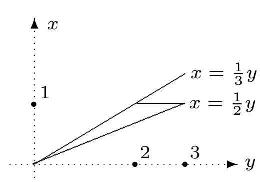
a) $\displaystyle\int_0^4 \int_{3x^2}^{12x} f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^{48} \int_{\frac{y}{12}}^{\sqrt{\frac{y}{3}}} f(x,y)\,dx\,dy.$



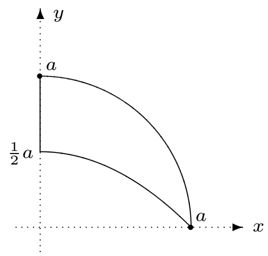


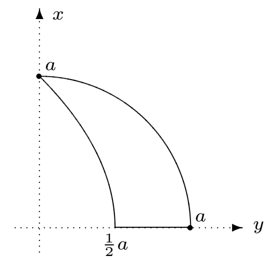
b) $\displaystyle\int_0^1 \int_{2x}^{3x} f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^2 \int_{\frac{1}{3}y}^{\frac{1}{2}y} f(x,y)\,dx\,dy + \int_2^3 \int_{\frac{1}{3}y}^{1} f(x,y)\,dx\,dy.$





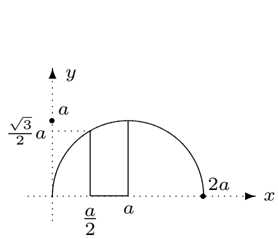
c) $\displaystyle\int_0^a \int_{\frac{a^2-x^2}{2a}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^{\frac{a}{2}} \int_{\sqrt{a^2-2ay}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{\frac{a}{2}}^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy.$

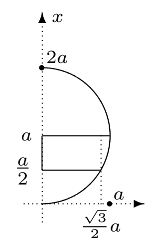




d) $$\int_{\frac{a}{2}}^{a}\int_{0}^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}\int_{\frac{a}{2}}^{a} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}a}^{a}\int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{a} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Observemos que $x^2-2ax+y^2=0 \Longrightarrow (x-a)^2=a^2-y^2$ i.e. $x=a\pm\sqrt{a^2-y^2}$. Además, cuando $x=\dfrac{a}{2}$ entonces $\dfrac{a^2}{4}-a^2+y^2=0 \Longrightarrow y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$, pues $y\geq 0$.





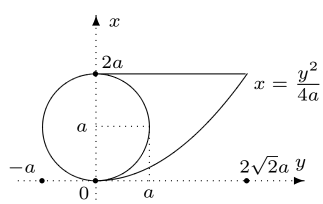
e) Tenemos que $y^2+x^2-2ax=0 \Longrightarrow y^2+(x-a)^2=a^2$.

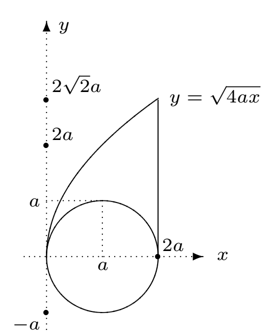
Por otro lado, $y=\sqrt{4ax}$, $y=\sqrt{2ax-x^2}$, por lo que las curvas se intersecan si $\sqrt{4ax}=\sqrt{2ax-x^2} \Longrightarrow 4ax=2ax-x^2 \Longrightarrow 2ax+x^2=0 \Longrightarrow x=0$, $x=-2a$, pero se elimina la solución $x=-2a$, pues x es siempre ≥ 0. Además, cuando $x=2a$ tenemos que $y=2\sqrt{2}a$.

Finalmente:

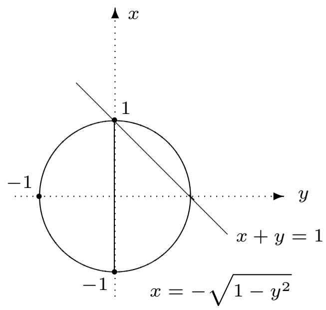
$$\int_{0}^{2a}\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{4ax}} f(x,y)\,dy\,dx =$$

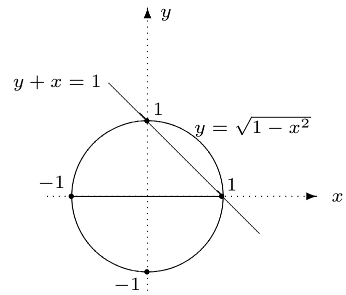
$$\int_{0}^{a}\int_{\frac{y^2}{4a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{0}^{a}\int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{a}^{2\sqrt{2a}}\int_{\frac{y^2}{4a}}^{2a} f(x,y)\,dx\,dy.$$





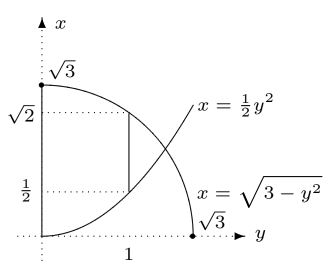
f) $\displaystyle\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^0 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx + \int_0^1 \int_0^{1-x} f(x,y)\,dy\,dx.$

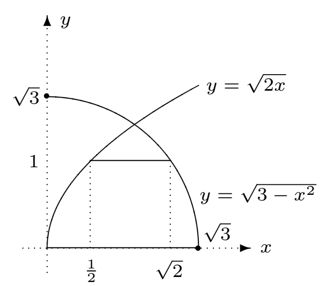




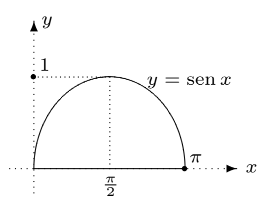
g) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy =$

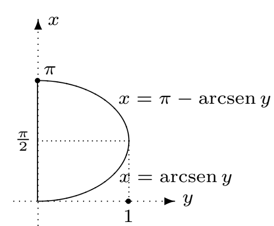
$$\int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\sqrt{2x}} f(x,y)\,dy\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} \int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \int_0^{\sqrt{3-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx.$$



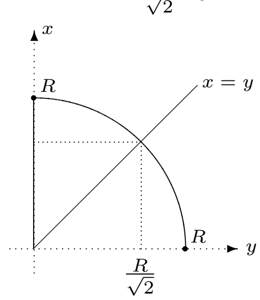


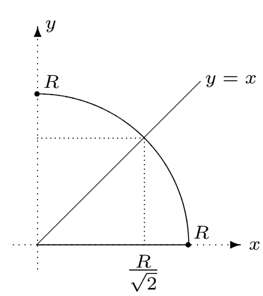
h) $\displaystyle\int_0^{\pi} \int_0^{\operatorname{sen} x} f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1 \int_{\operatorname{arcsen} y}^{\pi-\operatorname{arcsen} y} f(x,y)\,dx\,dy.$





i) $\displaystyle\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} \int_0^x f(x,y)\,dy\,dx + \int_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^{R} \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} \int_y^{\sqrt{R^2-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy.$





20. Se supone que f es integrable en una cierta región $\mathtt{R}$ dada, representada por los límites de integración. En cada caso representar $\mathtt{R}$ e invertir el orden de integración:

a) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^y f(x,y)dx\right) dy.$

b) $\displaystyle\int_0^2 \left(\int_{y^2}^{2y} f(x,y)dx\right) dy.$

c) $\displaystyle\int_1^4 \left(\int_{\sqrt{x}}^{2} f(x,y)dy\right) dx.$

d) $\displaystyle\int_1^2 \left(\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy\right) dx.$

e) $\displaystyle\int_{-6}^2 \left(\int_{\frac{1}{4}(x^2-4)}^{2-x} f(x,y)dy\right) dx.$

f) $\displaystyle\int_1^{e} \left(\int_0^{\ln x} f(x,y)dy\right) dx.$

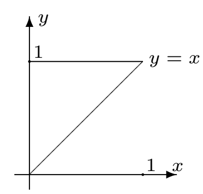
g) $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy\right) dx.$

h) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{x^3}^{x^2} f(x,y)dy\right) dx.$

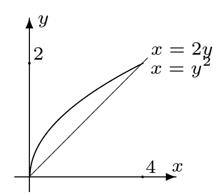
i) $\displaystyle\int_0^{\pi} \left(\int_{-\operatorname{sen}\frac{x}{2}}^{\operatorname{sen} x} f(x,y)dy\right) dx.$

j) $\displaystyle\int_0^4 \left(\int_{-\sqrt{4-y}}^{\frac{(y-4)}{2}} f(x,y)dx\right) dy.$

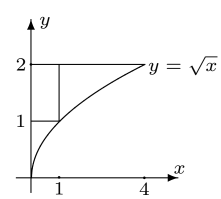
Solución



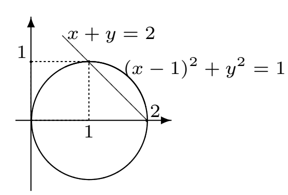
a) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^y f(x,y)dx\right) dy = \int_0^1 \left(\int_x^1 f(x,y)dy\right) dx.$



b) $\displaystyle\int_0^2 \left(\int_{y^2}^{2y} f(x,y)dx\right) dy = \int_0^4 \left(\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy\right) dx.$



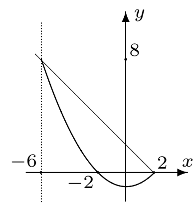
c) $\displaystyle\int_1^4 \left(\int_{\sqrt{x}}^{2} f(x,y)dy\right) dx = \int_1^2 \left(\int_1^{y^2} f(x,y)dx\right) dy.$



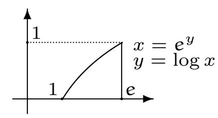
d) $\displaystyle\int_1^2 \Big(\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy\Big)dx = \int_0^1 \Big(\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx\Big)dy.$

e) $\displaystyle\int_{-6}^{2}\left(\int_{\frac{1}{4}(x^2-4)}^{2-x} f(x,y)dy\right)dx =$

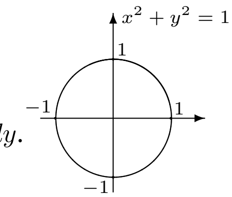
$\displaystyle\int_{0}^{8}\left(\int_{-2\sqrt{y+1}}^{2-y} f(x,y)dx\right)dy + \int_{-1}^{0}\left(\int_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}} f(x,y)dx\right)dy.$



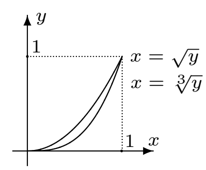
f) $\displaystyle\int_{1}^{e}\left(\int_{0}^{\ln x} f(x,y)dy\right)dx = \int_{0}^{1}\left(\int_{e^y}^{e} f(x,y)dx\right)dy.$



g) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy\right)dx = \int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx\right)dy.$

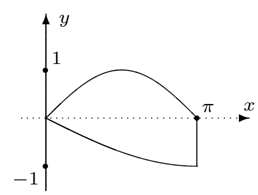


h) $\displaystyle\int_{0}^{1}\left(\int_{x^3}^{x^2} f(x,y)dy\right)dx = \int_{0}^{1}\left(\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx\right)dy.$

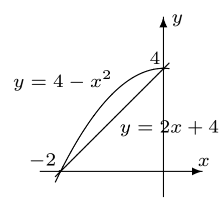


i) $\displaystyle\int_{0}^{\pi}\left(\int_{-\operatorname{sen}\frac{x}{2}}^{\operatorname{sen} x} f(x,y)dy\right)dx =$

$\displaystyle\int_{-1}^{0}\left(\int_{-2\operatorname{arcsen} y}^{\pi} f(x,y)dx\right)dy + \int_{0}^{1}\left(\int_{\operatorname{arcsen} x}^{\pi-\operatorname{arcsen} x} f(x,y)dx\right)dy.$



j) $\displaystyle\int_{0}^{4}\left(\int_{-\sqrt{4-y}}^{\frac{y-4}{2}} f(x,y)dx\right)dy = \int_{-2}^{0}\left(\int_{2x+4}^{4-x^2} f(x,y)dy\right)dx.$



21. a) Al calcular el volumen V situado debajo del paraboloide $z = x^2 + y^2$ y limitado por la región R del plano xy, se ha llegado a que:

$$V = \int_{0}^{1}\left(\int_{0}^{y}(x^2+y^2)dx\right)dy + \int_{1}^{2}\left(\int_{0}^{2-y}(x^2+y^2)dx\right)dy.$$

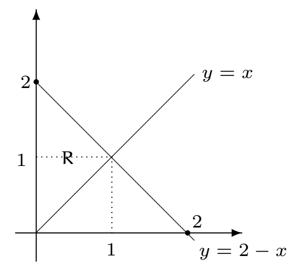
Dibujar R y expresar el volumen en el orden invertido y calcularlo.

En los casos b) y c), dibujar R y expresar la integral en el orden invertido.

b) $\displaystyle V = \int_{0}^{a\operatorname{sen} c}\left(\int_{\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{b^2-y^2}} f(x,y)dx\right)dy + \int_{a\operatorname{sen} c}^{b\operatorname{sen} c}\left(\int_{y\cot c}^{\sqrt{b^2-y^2}} f(x,y)dx\right)dy,\ 0<a<b,\ 0<c<\tfrac{\pi}{2}.$

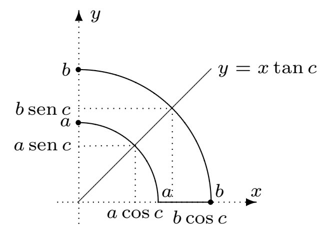
c) $V = \displaystyle\int_1^2 \left(\int_x^{x^3} f(x,y)dy \right) dx + \int_2^8 \left(\int_x^8 f(x,y)dy \right) dx.$

Solución

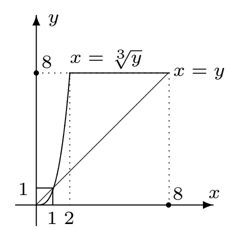


a) Es claro que con el orden invertido, el volumen es:

$$V = \int_0^1 \left(\int_x^{2-x} (x^2+y^2)dy \right) dx = \int_0^1 (x^2y + \frac{1}{3}y^3)\Big|_x^{2-x} dx = \int_0^1 -\frac{4}{3}(2x^3 - 3x^2 + 3x - 2)dx = \left(-\frac{2}{3}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{8}{3}x \right) \Big|_0^1 = \frac{4}{3}.$$



b) $$V = \int_{a\cos c}^{a} \left(\int_{\sqrt{a^2-x^2}}^{x\tan c} f(x,y)dy \right) dx + \int_a^{b\cos c} \left(\int_0^{x\tan c} f(x,y)dy \right) dx + \int_{b\cos c}^{b} \left(\int_0^{\sqrt{b^2-x^2}} f(x,y)dy \right) dx.$$



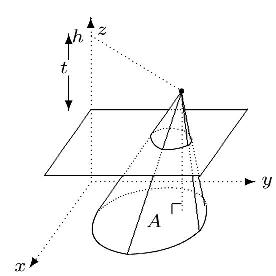
c) $$V = \int_1^2 \left(\int_x^{x^3} f(x,y)dy \right) dx + \int_2^8 \left(\int_x^8 f(x,y)dy \right) dx = \int_1^8 \left(\int_{\sqrt[3]{y}}^{y} f(x,y)dx \right) dy.$$

22. Un cono se obtiene uniendo todos los puntos de una región plana A, con un punto no situado en el plano de A. Designando con A el área de A y con h la altura del cono, demuestre que:

a) El área de la sección al cortarla con un plano paralelo a la base y a distancia t del vértice es $(\frac{t}{h})^2 A$, si $0 \le t \le h$.

b) El volumen del cono es $\frac{1}{3}Ah$.

Solución



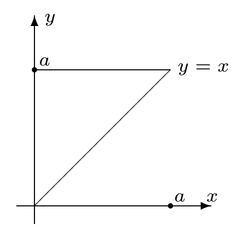
a) Esta relación sale del hecho que al duplicar la altura t, se cuadriplica el área de la figura i.e. $A(2t) = 4A(t) = 2^2A(t)$, $A(4t) = 16A(t) = 4^2A(t)$, o sea $A(t) = t^2A(1)$. Así, $\dfrac{A(t)}{A(h)} = \dfrac{t^2A(1)}{h^2A(1)} = \dfrac{t^2}{h^2}$, por lo que $A(t) = \dfrac{t^2}{h^2}A(h) = \dfrac{t^2}{h^2}A.$

b) Por el principio de Cavalieri, el volumen es $V = \int_0^h A(t)\,dt = A\int_0^h \frac{t^2}{h^2}\,dt = \frac{1}{3}A\frac{t^3}{h^2}\Big|_0^h = \frac{1}{3}Ah.$

23. Invertir el orden de integración para verificar que ($a > 0$, $m \in \mathbb{R}$):

$$\int_0^a \left(\int_0^y \mathrm{e}^{m(a-x)} f(x)dx\right) dy = \int_0^a (a-x)\mathrm{e}^{m(a-x)} f(x)dx = \int_0^a x\mathrm{e}^{mx} f(a-x)dx.$$

Solución $\int_0^a \left(\int_0^y \mathrm{e}^{m(a-x)} f(x)dx\right) dy =$
$\int_0^a \left(\int_x^a \mathrm{e}^{m(a-x)} f(x)dy\right) dx = \int_0^a (a-x)\mathrm{e}^{m(a-x)} f(x)dx \underset{v=a-x}{=}$
$\int_a^0 v\mathrm{e}^{mv} f(a-v)(-dv) = \int_0^a x\mathrm{e}^{mx} f(a-x)dx.$



24. Cambiar el orden de integración de las siguientes integrales dobles:

a) $\int_0^1 \left(\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\right) dy.$

b) $\int_{-1}^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\right) dx.$

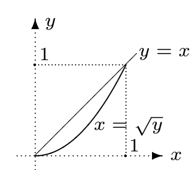
c) $\int_0^r \left(\int_x^{\sqrt{2rx-x^2}} f(x,y)\,dy\right) dx.$

d) $\int_{-2}^2 \left(\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy\right) dx.$

e) $\int_1^2 \left(\int_x^{2x} f(x,y)\,dy\right) dx.$

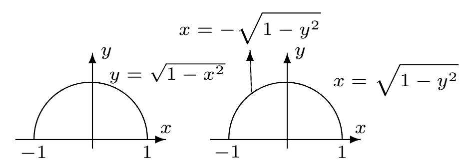
f) $\int_0^2 \left(\int_{2x}^{6-x} f(x,y)\,dy\right) dx.$

Solución

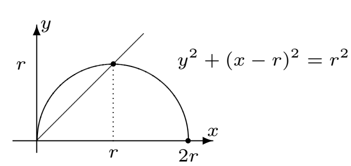


a) $\int_0^1 \left(\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\right) dy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} f(x,y)\,dy\right) dx.$

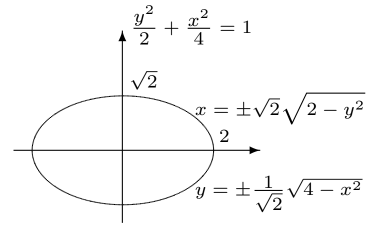
b) $\int_{-1}^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\right) dx =$
$\int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx\right) dy.$



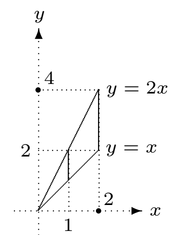
c) $\int_0^r \left(\int_x^{\sqrt{2rx-x^2}} f(x,y)\,dy\right) dx =$
$\int_0^r \left(\int_{r-\sqrt{r^2-y^2}}^{y} f(x,y)\,dx\right) dy.$

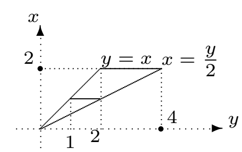


d) $$\int_{-2}^{2}\left(\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy\right)dx =$$
$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(\int_{-\sqrt{2}\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2}\sqrt{2-y^2}} f(x,y)\,dx\right)dy.$$

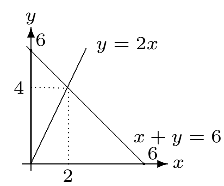


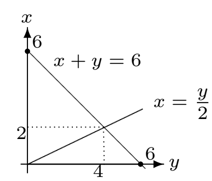
e) $$\int_{1}^{2}\left(\int_{x}^{2x} f(x,y)\,dy\right)dx =$$
$$\int_{1}^{2}\left(\int_{1}^{y} f(x,y)\,dx\right)dy + \int_{2}^{4}\left(\int_{\frac{y}{2}}^{2} f(x,y)\,dx\right)dy.$$





f) $$\int_{0}^{2}\left(\int_{2x}^{6-x} f(x,y)\,dy\right)dx =$$
$$\int_{0}^{4}\left(\int_{0}^{\frac{1}{2}y} f(x,y)\,dx\right)dy + \int_{4}^{6}\left(\int_{0}^{6-y} f(x,y)\,dx\right)dy.$$





25. Cambiar el orden de integración en las siguientes integrales dobles:

a) $$\int_{0}^{1}\left(\int_{0}^{x} f(x,y)\,dy\right)dx + \int_{1}^{2}\left(\int_{0}^{2-x} f(x,y)\,dy\right)dx.$$

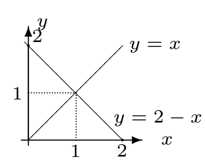
b) $$\int_{0}^{1}\left(\int_{0}^{2} f(x,y)\,dy\right)dx + \int_{1}^{3}\left(\int_{0}^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x,y)\,dy\right)dx.$$

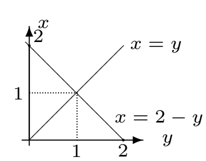
c) $$\int_{0}^{1}\left(\int_{0}^{x^2} f(x,y)\,dy\right)dx + \int_{1}^{3}\left(\int_{0}^{\frac{3-x}{2}} f(x,y)\,dy\right)dx.$$

d) $$\int_{0}^{1}\left(\int_{0}^{x^{\frac{2}{3}}} f(x,y)\,dy\right)dx + \int_{1}^{2}\left(\int_{0}^{1-\sqrt{4x-x^2-3}} f(x,y)\,dy\right)dx.$$

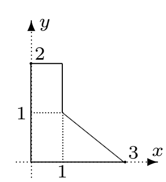
Solución

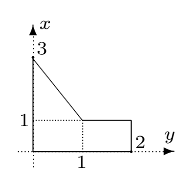
a) $$\int_{0}^{1}\left(\int_{0}^{x} f(x,y)\,dy\right)dx + \int_{1}^{2}\left(\int_{0}^{2-x} f(x,y)\,dy\right)dx =$$
$$\int_{0}^{1}\left(\int_{y}^{2-y} f(x,y)\,dy\right)dx.$$





b) $$\int_{0}^{1}\left(\int_{0}^{2} f(x,y)\,dy\right)dx + \int_{1}^{3}\left(\int_{0}^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x,y)\,dy\right)dx =$$
$$\int_{0}^{1}\left(\int_{0}^{3-2y} f(x,y)\,dx\right)dy + \int_{1}^{2}\left(\int_{0}^{1} f(x,y)\,dx\right)dy.$$

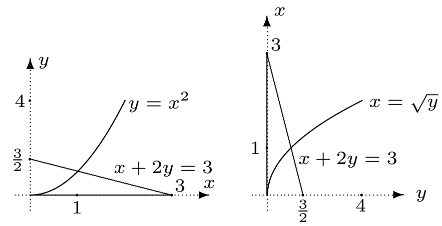




c) $\displaystyle\int_0^1 \Big(\int_0^{x^2} f(x,y)\,dy\Big)\,dx +$

$\displaystyle\int_1^3 \Big(\int_0^{\frac{3-x}{2}} f(x,y)\,dy\Big)\,dx =$

$\displaystyle\int_0^1 \Big(\int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)\,dx\Big)\,dy.$



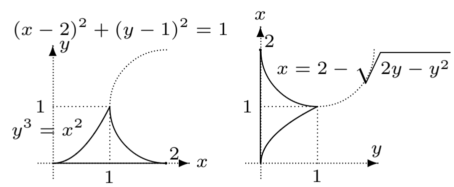
d) Se tiene que $y = 1-\sqrt{4x-x^2-3} \Longrightarrow (y-1)^2 = 1+4x^2-x^2-4 \Longrightarrow (y-1)^2+(x-2)^2 = 1,$

es decir:

$\displaystyle\int_0^1 \Big(\int_0^{x^{\frac{2}{3}}} f(x,y)\,dy\Big)\,dx +$

$\displaystyle\int_1^2 \Big(\int_0^{1-\sqrt{4x-x^2-3}} f(x,y)\,dy\Big)\,dx =$

$\displaystyle\int_0^1 \Big(\int_{y^{\frac{3}{2}}}^{2-\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)\,dx\Big)\,dy.$



2.4 Cambio de variable

26. Hacer el cambio a coordenadas polares en las siguientes integrales dobles $\displaystyle\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$:

a) R es el círculo $x^2+y^2 \le a^2$.

b) R es el círculo $x^2+y^2 \le ax$.

c) R es el círculo $x^2+y^2 \le by$.

d) R está limitado por las circunferencias $x^2+y^2 = 4x$, $x^2+y^2 = 8x$ y las rectas $y = x$, $y = 2x$.

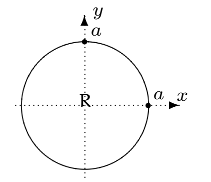
e) R es la parte común de los círculos $x^2+y^2 \le ax$, $x^2+y^2 \le by$.

f) R está limitado por las rectas $y = x$, $y = 0$, $x = 1$.

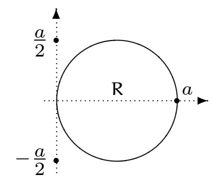
g) R es el menor de los segmentos circulares, en que es cortado el círculo $x^2+y^2 \le 4$ por la recta $x+y = 2$.

h) R está determinado por $x \ge 0$, $y \ge 0$, $(x^2+y^2)^3 = 4a^2x^2y^2$.

Solución

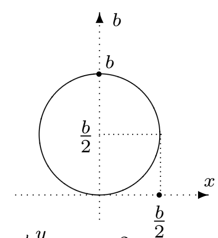


a) $\displaystyle\iint_{\mathsf{R}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^a f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\,r\,dr\right)d\theta.$



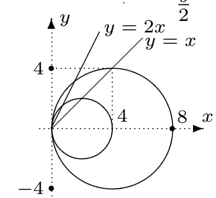
b) Si $x^2+y^2 \le ax$, entonces $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + y^2 \le \frac{a^2}{4}$ y la frontera se escribe $r = a\cos\theta$, $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. Así:

$$\iint_{\mathsf{R}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{a\cos\theta} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\,r\,dr\right)d\theta.$$



c) Si $x^2+y^2 \le bx$, entonces $x^2 + \left(y-\frac{b}{2}\right)^2 \le \frac{b^2}{4}$ y la frontera es $r = b\operatorname{sen}\theta$, $0 \le \theta \le \pi$, i.e. $\displaystyle\iint_{\mathsf{R}} f(x,y)\,dx\,dy =$

$$\int_0^{\pi}\left(\int_0^{b\operatorname{sen}\theta} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\,r\,dr\right)d\theta.$$



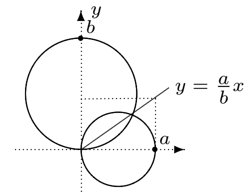
d) $x^2+y^2 = 4x$ se escribe $(x-2)^2+y^2 = 4$. $x^2+y^2 = 8x$ se escribe $(x-4)^2+y^2 = 16$. Las intersecciones de las rectas con los círculos se determinan igualando:

$$y = \sqrt{8x-x^2} = 2x \quad\Longrightarrow\quad 8x = 5x^2 \quad \text{i.e.} \quad x = 0, \quad x = \tfrac{8}{5}$$

$$y = \sqrt{4x-x^2} = 2x \quad\Longrightarrow\quad 4x = 5x^2 \quad \text{i.e.} \quad x = 0, \quad x = \tfrac{4}{5},$$

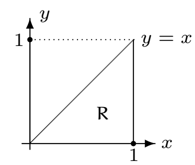
con lo cual concluimos que $4\cos\theta \le r \le 8\cos\theta$, para θ variando desde $x = y$, i.e. $\tan\theta = 1$ a $x = 2y$ i.e. $\tan\theta = 2$, es decir $\frac{\pi}{4} \le \theta \le \arctan 2$. Finalmente tenemos que:

$$\iint_{\mathsf{R}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2}\left(\int_{4\cos\theta}^{8\cos\theta} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\,r\,dr\right)d\theta.$$



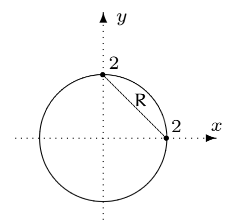
e) Los círculos se escriben: $x^2 + y^2 = ax$ para $r = a\cos\theta$, $x^2 + y^2 = by$ para $r = b\,\mathrm{sen}\,\theta$ y se intersecan en la recta $y = \frac{a}{b}x$, es decir $\tan\theta = \frac{a}{b} \Longrightarrow \theta = \arctan\frac{a}{b}$. Así:

$$\iint\limits_{\mathsf{R}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{\arctan\frac{a}{b}} \left(\int_0^{b\,\mathrm{sen}\,\theta} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\,r\,dr \right) d\theta$$
$$+ \int_{\arctan\frac{a}{b}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{a\cos\theta} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\,r\,dr \right) d\theta.$$



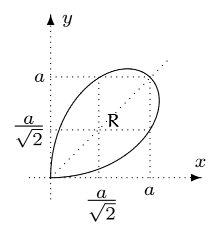
f) Si $x = 1$, $r\cos\theta = 1$ i.e. $r = \dfrac{1}{\cos\theta}$ y tenemos:

$$\iint\limits_{\mathsf{R}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\,r\,dr \right) d\theta.$$



g) La recta $x+y = 2$ en polares se escribe $r(\cos\theta + \mathrm{sen}\,\theta) = 2$, o sea $r = \dfrac{2}{\mathrm{sen}\,\theta + \cos\theta}$ y la integral es:

$$\iint\limits_{\mathsf{R}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\frac{2}{\mathrm{sen}\,\theta + \cos\theta}}^{2} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\,r\,dr \right) d\theta.$$



h) Si usamos coordenadas polares, la ecuación $(x^2 + y^2)^3 = 4a^2x^2y^2$, se escribe $(r^2)^3 = 4a^2r^4\,\mathrm{sen}^2\,\theta\cos^2\theta = r^4a^2\,\mathrm{sen}^2\,2\theta$, o sea $r = a\,\mathrm{sen}\,2\theta$, para $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, pues $x \ge 0$, $y \ge 0$, por lo que:

$$\iint\limits_{\mathsf{R}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{a\,\mathrm{sen}\,2\theta} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\,r\,dr \right) d\theta.$$

27. Transformar las integrales dobles siguientes a coordenadas polares:

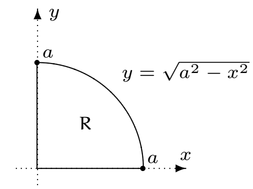
a) $\displaystyle\int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)\,dy \right) dx.$

b) $\displaystyle\int_{\frac{a}{2}}^{2a} \left(\int_0^{\sqrt{2ay-y^2}} f(x,y)\,dx \right) dy.$

c) $\displaystyle\int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x^2+y^2)\,dy \right) dx.$

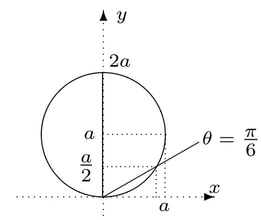
d) $\displaystyle\int_0^{\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}} \left(\int_0^{ax} f\left(\frac{x}{y}\right) dy \right) dx + \int_{\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}}^{a} \left(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} f\left(\frac{x}{y}\right) dy \right) dx.$

Solución



a) $\displaystyle\int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)\,dy \right) dx =$

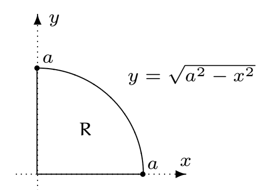
$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^a f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\,r\,dr \right) d\theta.$



b) Se tiene que $x = \sqrt{2ay - y^2}$ i.e. $x^2 + (y-a)^2 = a^2$. Cuando $y = \frac{a}{2}$ se tiene que $r = \frac{a}{2}\sec\theta$, por lo que r varía de $\frac{a}{2}\sec\theta$ hasta $x = 2a\,\mathrm{sen}\,\theta$ y el ángulo varía de $\frac{\pi}{6}$ a $\frac{\pi}{2}$, pues $x^2 + \left(\frac{a}{2} - a\right)^2 = a^2 \Longrightarrow x^2 = \frac{3}{4}a^2$, $x = \frac{\sqrt{3}}{2}a$,

$\therefore\ \tan\theta = \dfrac{\frac{1}{2}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Longrightarrow \theta = \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}.$

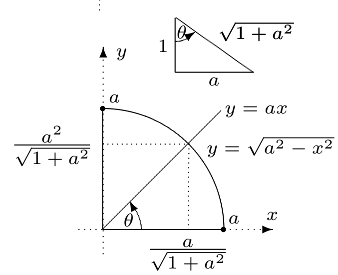
Finalmente, $\displaystyle\int_{\frac{a}{2}}^{2a} \left(\int_0^{\sqrt{2ay-y^2}} f(x,y)\,dx \right) dy = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\frac{a}{2}\sec\theta}^{2a\,\mathrm{sen}\,\theta} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\,r\,dr \right) d\theta.$



c) Usando a) tenemos $\displaystyle\int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x^2+y^2)\,dy \right) dx =$

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^a f(r^2)\,r\,dr \right) d\theta = \frac{\pi}{2}\int_0^a f(r^2)\,r\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{4}F(a^2),$

donde $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(u)\,du.$



d) Es claro que el punto $\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}(1,a)$ es la intersección entre la circunferencia $x^2+y^2 = a^2$ y la recta $y = ax$. El ángulo es $\tan\theta = a$ i.e.

$$\int_0^{\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}} \left(\int_0^{ax} f\left(\frac{x}{y}\right) dy \right) dx + \int_{\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}}^{a} \left(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} f\left(\frac{x}{y}\right) dy \right) dx =$$

$$\int_0^{\arctan a} \left(\int_0^a f(\tan\theta)\,r\,dr \right) d\theta = \int_0^a r\,dr \int_0^{\arctan a} f(\tan\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}a^2 \int_0^{\arctan a} f(\tan\theta)\,d\theta.$$

28. Calcular las siguientes integrales dobles, pasando a coordenadas polares:

a) $\displaystyle\int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)\,dy \right) dx.$

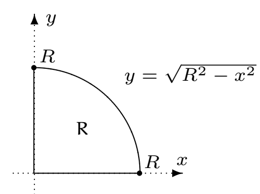
b) $\displaystyle\iint\limits_{\mathsf{R}} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,dx\,dy$, $\mathsf{R}: x^2+y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0.$

c) $\displaystyle\iint\limits_{\mathsf{R}} (h-2x-2y)\,dx\,dy$, $\mathsf{R}: x^2+y^2 \le a^2.$

d) $\displaystyle\iint\limits_{\mathsf{R}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy$, $\mathsf{R}: x^2+y^2 \le ax.$

e) $\displaystyle\iint\limits_{\mathsf{R}} \arctan\frac{y}{x}\,dx\,dy$, $\mathsf{R}: x^2+y^2 \ge 1,\ x^2+y^2 \le 9,\ y \ge \frac{x}{\sqrt{3}},\ y \le x\sqrt{3}.$

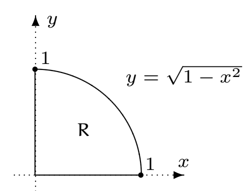
Solución



a) $$\int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)\,dy\right) dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^a \ln(1+r^2)2r\,dr\right) d\theta = \frac{\pi}{4}(1+r^2)(\ln(1+r^2)-1)\Big|_0^a =$$

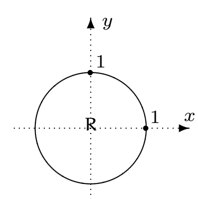
$$\frac{\pi}{4}\big((1+a^2)(\ln(1+a^2)-1)+1\big) = \frac{\pi}{4}\big((1+a^2)\ln(1+a^2)-a^2\big).$$



b) $$\iint\limits_{\mathsf{R}} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 \sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}2r\,dr\right) d\theta =$$

$$\frac{\pi}{4}\int_0^1 \sqrt{\frac{1-u}{1+u}}du = \frac{\pi}{4}\left(\sqrt{(1-u)(1+u)}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}\right) =$$

$$\frac{\pi}{4}\left(-1+\operatorname{arcsen} u\Big|_0^1\right) = \frac{\pi}{4}\left(-1+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{8}\pi(\pi-2).$$

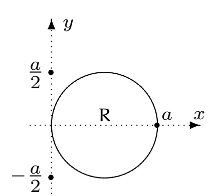


c) $$\iint\limits_{\mathsf{R}} (h-2x-3y)\,dx\,dy =$$

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^a (h-2r\cos\theta-2r\operatorname{sen}\theta)r\,dr\right) d\theta =$$

$$\int_0^a \left(\int_0^{2\pi} (h-2r\cos\theta-2r\operatorname{sen}\theta)\,d\theta\right) r\,dr = \int_0^a (2\pi h-0-0)r\,dr = \pi h r^2\Big|_0^a = \pi a^2 h.$$

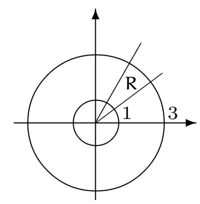
d) Si $x^2+y^2=ax$, tenemos que $r=a\cos\theta$, con $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$
y que $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{4}$ y por lo tanto:



$$\iint\limits_{\mathsf{R}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{a\cos\theta} \sqrt{a^2-r^2}\,2r\,dr\right) d\theta =$$

$\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{2}{3}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{a\cos\theta} d\theta = -\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(a^3\cos^3\theta - a^3)\,d\theta = \frac{2}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^3\theta)\,d\theta =$
$\dfrac{2}{3}a^3\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{1}{9}a^3(3\pi-4).$

e) Cuando $y = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$, se tiene $\tan\theta = \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ i.e. $\theta = \frac{\pi}{6}$.
Si $y = \sqrt{3}x$ se tiene $\tan\theta = \dfrac{y}{x} = \sqrt{3}$ i.e. $\theta = \frac{\pi}{3}$, entonces:



$$\iint_{\mathrm{R}} \arctan\frac{y}{x}\,dx\,dy = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\int_1^3 \arctan(\tan\theta)\,r\,dr\right)d\theta =$$

$$\frac{1}{2}r^2\Big|_1^3 \frac{1}{2}\theta^2\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}(9-1)\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{3^2}-\frac{\pi^2}{3^2.2^2}\right) = \frac{2\pi^2}{3^2}.\frac{3}{4} = \frac{\pi^2}{6}.$$

29. Transformar las siguientes integrales dobles pasando a coordenadas polares:

a) $\displaystyle\iint_{\mathrm{R}} f(x,y)\,dx\,dy$, R está limitado por la elipse $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

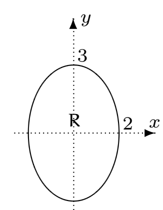
b) $\displaystyle\iint_{\mathrm{R}} f(x,y)\,dx\,dy$, R está limitado por la curva $\left(x^2+\dfrac{y^2}{3}\right)^2 = x^2y$.

c) $\displaystyle\iint_{\mathrm{R}} f\left(\sqrt{4-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\right)dx\,dy$, R está limitado por las elipses $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $\dfrac{x^2}{4a^2}+\dfrac{y^2}{4b^2}=1$.

d) $\displaystyle\iint_{\mathrm{R}} xy\,dx\,dy$, R está limitado por la elipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $x=0$, $y=0$.

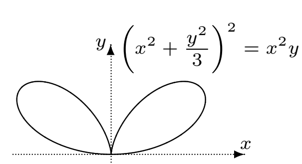
e) $\displaystyle\iint_{\mathrm{R}} \sqrt{xy}\,dx\,dy$, R está limitado por la curva $\left(\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}\right)^4 = \dfrac{xy}{\sqrt{6}}$, $x=0$, $y=0$.

Solución Recordemos que si se hace el cambio de variable $x = ar\cos\theta$, $y = br\,\mathrm{sen}\,\theta$, el Jacobiano es abr.



a) $\displaystyle\iint_{\mathrm{R}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 f(2r\cos\theta, 3r\,\mathrm{sen}\,\theta)6\,r\,dr\right)d\theta.$

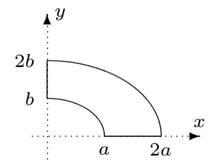
b) Si usamos coordenadas polares en $\left(x^2+\dfrac{y^2}{3}\right)^2 = x^2y$, con $x = r\cos\theta$, $y = \sqrt{3}r\,\mathrm{sen}\,\theta$, $0 \le \theta \le \pi$, se tiene $r^4 = \sqrt{3}r^3\,\mathrm{sen}\,\theta\cos^2\theta$, o sea $r = \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos^2\theta$, por lo tanto:



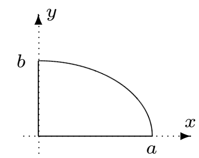
$$\iint_{\mathrm{R}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{\pi}\left(\int_0^{\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos^2\theta} f(r\cos\theta, \sqrt{3}r\,\mathrm{sen}\,\theta)\sqrt{3}\,r\,dr\right)d\theta.$$

c) $\displaystyle\iint\limits_{R} f\Big(\sqrt{4-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\Big)\,dx\,dy =$

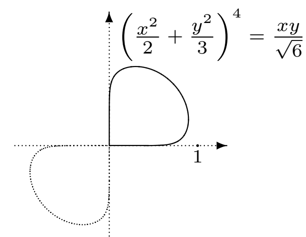
$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_1^2 f(\sqrt{4-r^2})ab\,r\,dr\Big)\,d\theta = \frac{1}{2}\pi ab\int_1^2 f(\sqrt{4-r^2})\,r\,dr.$



d) $\displaystyle\iint\limits_{R} xy\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_0^1 a^2b^2r^3\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,dr\Big)\,d\theta =$
$\displaystyle a^2b^2\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}r^4\Big|_0^1 = \frac{1}{8}a^2b^2.$



e) La ecuación $\displaystyle\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}\right)^4 = \frac{xy}{\sqrt{6}}$ se transforma usando $x = \sqrt{2}r\cos\theta,\ y = \sqrt{3}r\operatorname{sen}\theta,$ con $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, en $r^6 = \operatorname{sen}\theta\cos\theta$, i.e. $r = \sqrt[6]{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}$, por lo que $\displaystyle\iint\limits_{R}\sqrt{xy}\,dx\,dy =$



$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_0^{\sqrt[6]{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}}\sqrt[4]{6}r\sqrt{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}\sqrt{6}\,r\,dr\Big)\,d\theta =$$
$$\frac{1}{3}\sqrt{6}\sqrt[4]{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}\;r^3\Big|_0^{\sqrt[6]{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}}d\theta = \frac{1}{3}6^{\frac{3}{4}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,d\theta = \frac{6^{\frac{3}{4}}}{6}\operatorname{sen}^2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{6}}.$$

30. Evaluar las siguientes integrales dobles.

a) $\displaystyle\iint\limits_{R}(x+y+10)\,dx\,dy$, R es el círculo $x^2+y^2\le 4$.

b) $\displaystyle\iint\limits_{R}(x^2+4y^2+9)\,dx\,dy$, R es el círculo $x^2+y^2\le 4$.

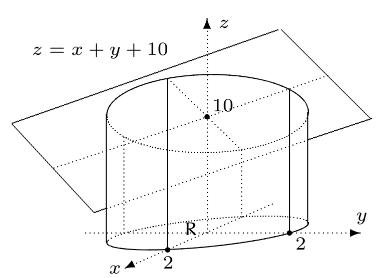
c) $\displaystyle\iint\limits_{R}(x+y+1)\,dx\,dy$, R es el rectángulo $0\le x\le 1$, $0\le y\le 2$.

Solución

a) $\displaystyle\iint\limits_{R}(x+y+10)\,dx\,dy =$

$\displaystyle\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^2(r\cos\theta+r\operatorname{sen}\theta+10)\,r\,dr\Big)\,d\theta =$

$\displaystyle\int_0^2(0+0+20\pi)\,r\,dr = 10\pi r^2\Big|_0^2 = 40\pi.$



b) $\displaystyle\iint_{R}(x^2+4y^2+9)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^2 (r^2+3r^2\operatorname{sen}^2\theta+9)\,r\,dr\Big)\,d\theta =$

$\displaystyle\int_0^{2\pi}\Big(\frac{r^4}{4}+\frac{3}{4}r^4\operatorname{sen}^2\theta+9r\Big)\Big|_0^2 d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4+12\operatorname{sen}^2\theta+18)\,d\theta = 4\Big(11\pi+12\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\Big) = 56\pi.$

c) $\displaystyle\iint_{R}(x+y+1)\,dx\,dy = \int_0^1\Big(\int_0^2 (x+y+1)\,dy\Big)\,dx = \int_0^1\Big((x+1)y+\frac{1}{2}y^2\Big)\Big|_0^2 dx =$

$\displaystyle\int_0^1 (2x+4)\,dx = (x^2+4x)\Big|_0^1 = 5.$

31. Pasar a coordenadas polares y colocar los límites de integración.

a) $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dy\,dx.$

b) $\displaystyle\int_0^2\int_0^x f(\sqrt{x^2+y^2})\,dy\,dx.$

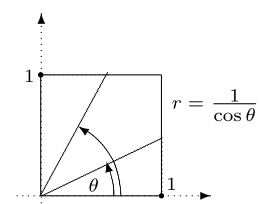
c) $\displaystyle\int_{R} f(x,y)\,dx\,dy$, R es el triángulo limitado por las rectas $y=x$, $y=-x$, $y=1$.

d) $\displaystyle\int_{-1}^1\int_{x^2}^1 f\big(\frac{y}{x}\big)\,dy\,dx.$

Solución

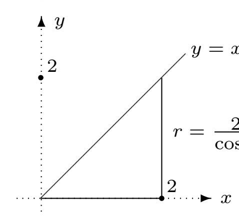
a) Se tiene que $x = 1 \iff r\cos\theta = 1$ i.e. $r = \dfrac{1}{\cos\theta}$.

Similarmente, $y = 1 \iff r = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}$.

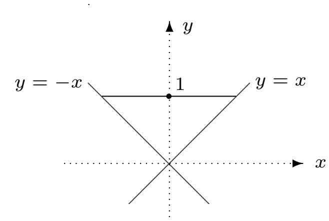


$\displaystyle\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)r\,dr\,d\theta +$

$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)r\,dr\,d\theta.$



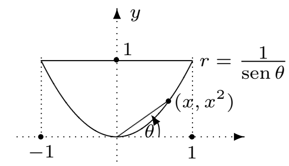
b) $\displaystyle\int_0^2\int_0^x f(\sqrt{x^2+y^2})\,dy\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{2}{\cos\theta}} f(r)r\,dr\,d\theta.$



c) $\displaystyle\iint_{R} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\int_0^{\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)r\,dr\,d\theta.$

d) Observemos que r varía de $(0,0)$ al punto (x, x^2), con ángulo θ, por lo que $\tan\theta = \dfrac{x^2}{x} = x = r\cos\theta \Longrightarrow$

$$r = \frac{\tan\theta}{\cos\theta} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}.$$



Finalmente, $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} f\left(\frac{y}{x}\right)\, dy\, dx =$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}} f(\tan\theta) r\, dr\, d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\int_0^{\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}} f(\tan\theta) r\, dr\, d\theta + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\int_0^{\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta}} f(\tan\theta) r\, dr\, d\theta.$$

32. Calcular las siguientes integrales dobles.

a) $\displaystyle\iint_{\mathsf{R}} y\, dx\, dy$, R es un semicírculo de diámetro a, con centro $(\frac{1}{2}a, 0)$.

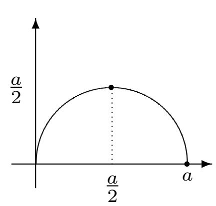
b) $\displaystyle\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dy\, dx.$

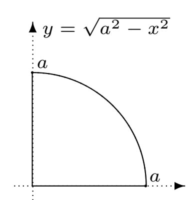
Solución

a) La región R satisface $(x - \frac{1}{2}a)^2 + y^2 = \frac{1}{4}a^2 \Longleftrightarrow x^2 - ax + y^2 = 0 \Longleftrightarrow r^2 - ar\cos\theta = 0$ i.e. $r = a\cos\theta$. Así tenemos que:

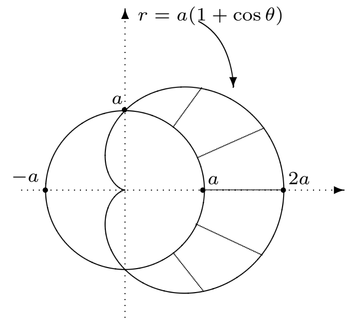
$$\iint_{\mathsf{R}} y\, dx\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\cos\theta} r\operatorname{sen}\theta\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3}(a\cos\theta)^3 \operatorname{sen}\theta\, d\theta = -\frac{a^3}{3}\frac{\cos^4\theta}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^3}{3}\frac{1}{4} = \frac{a^3}{12}.$$

b) $\displaystyle\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dy\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r^2\, dr\, d\theta = \frac{1}{3}a^3\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}a^3.$





33. Calcular la integral doble de la función $f(r,\theta) = r$, sobre la región limitada por la cardioide $r = a(1+\cos\theta)$ y la circunferencia $r = a$. Se considera el recinto que no contiene el polo.



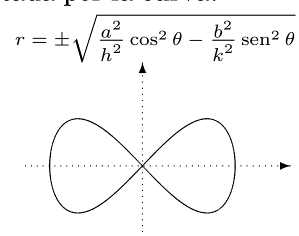
Solución En este caso tenemos que:

$$\iint_{\mathsf{R}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{a}^{a(1+\cos\theta)} r^2\,dr\,d\theta =$$

$$\tfrac{1}{3}a^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3\cos\theta + 3\cos^2\theta + \cos^3\theta)\,d\theta =$$

$$\tfrac{2}{3}a^3\big(3 + 3\tfrac{1}{2}\tfrac{\pi}{2} + \tfrac{2}{3}\big) = \tfrac{2}{3}a^3\big(\tfrac{11}{3} + \tfrac{3}{2}\tfrac{\pi}{2}\big) = a^3\big(\tfrac{22}{9} + \tfrac{\pi}{2}\big).$$

34. Calcular la integral doble $\displaystyle\iint_{\mathsf{R}} dx\,dy$, donde R es la región limitada por la curva:



$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2}{h^2} - \frac{y^2}{k^2}.$$

Solución Efectuando el cambio de variable $x = ar\cos\theta$, $y = br\operatorname{sen}\theta$, tenemos que:

$$(r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta)^2 = r^4 = \frac{a^2r^2\cos^2\theta}{h^2} - \frac{b^2r^2\operatorname{sen}^2\theta}{k^2} \Longrightarrow r^2 = \frac{a^2}{h^2}\cos^2\theta - \frac{b^2}{k^2}\operatorname{sen}^2\theta \Longrightarrow$$

$r = \sqrt{\dfrac{a^2}{h^2}\cos^2\theta - \dfrac{b^2}{k^2}\operatorname{sen}^2\theta}$, donde $\dfrac{a^2}{h^2}\cos^2\theta - \dfrac{b^2}{k^2}\operatorname{sen}^2\theta \geq 0 \Longrightarrow 0 \leq |\tan\theta| \leq \dfrac{ak}{bh}$.

Así tenemos que (nos restringimos al primer cuadrante):

$$\iint_{\mathsf{R}} dx\,dy = 4\int_0^{\arctan\frac{ak}{bh}} \int_0^{\sqrt{\frac{a^2}{h^2}\cos^2\theta - \frac{b^2}{k^2}\operatorname{sen}^2\theta}} abr\,dr\,d\theta =$$

$$2ab\int_0^{\arctan\frac{ak}{bh}} \left(\frac{a^2}{h^2}\cos^2\theta - \frac{b^2}{k^2}\operatorname{sen}^2\theta\right) d\theta =$$

$$2ab\left[\frac{1}{2}(\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta)\frac{a^2}{h^2} - \frac{1}{2}(\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta)\frac{b^2}{k^2}\right]\Big|_0^{\arctan\frac{ak}{bh}}$$, puesto que

$$\int \operatorname{sen}^2\theta\,d\theta = \frac{\theta}{2} - \frac{\operatorname{sen}2\theta}{4} = \frac{1}{2}(\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta),\ \int \cos^2\theta\,d\theta = \frac{\theta}{2} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{4} = \frac{1}{2}(\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta).$$

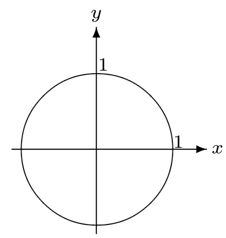
Además, $\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \operatorname{tg}\theta\cos^2\theta = \dfrac{\operatorname{tg}\theta}{\sec^2\theta} = \dfrac{\operatorname{tg}\theta}{1+\operatorname{tg}^2\theta}$, entonces:

$$\iint_{\mathsf{R}} dx\,dy = 2ab\left[\frac{1}{2}\frac{a^2}{h^2}\left(\arctan\frac{ak}{bh} + \frac{\frac{ak}{bh}}{1+\left(\frac{ak}{bh}\right)^2}\right) - \frac{1}{2}\frac{b^2}{k^2}\left(\arctan\frac{ak}{bh} - \frac{\frac{ak}{bh}}{1+\left(\frac{ak}{bh}\right)^2}\right)\right] =$$

$$ab\left[\left(\frac{a^2}{h^2} - \frac{b^2}{k^2}\right)\arctan\frac{ak}{bh} + \left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}\right)\frac{\frac{ak}{bh}}{1+\left(\frac{ak}{bh}\right)^2}\right] = ab\left[\left(\frac{a^2}{h^2} - \frac{b^2}{k^2}\right)\arctan\frac{ak}{bh} + \frac{ab}{hk}\right].$$

35. Calcular la integral $\iint\limits_{R} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy$, donde R es la región $x^2+y^2 \leq 1$.

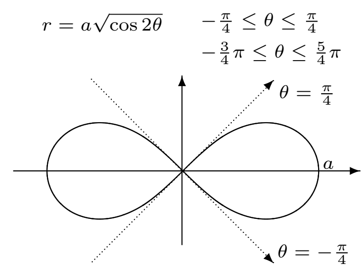
Solución Cambiando a coordenadas polares, la región es $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $\iint\limits_{R} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1-r^2}\,dr\,d\theta = \frac{1}{2}2\pi(-\frac{2}{3})(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}\pi$, i.e. es la mitad del volumen de una esfera de radio 1. ¿Porqué?



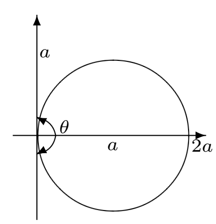
36. Efectuar el cambio de variable a coordenadas polares de $\iint\limits_{R} f(x,y)dxdy$, donde R es la región limitada por la lemniscata $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$.

Solución Usando coordenadas polares, la fórmula $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ cambia a $r = a\sqrt{\cos 2\theta}$, con $\theta \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi\right[$ y se tiene:

$$\iint\limits_{R} f(x,y)dxdy = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)rdrd\theta + \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}\int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)rdrd\theta.$$



37. Calcular la integral $\iint\limits_{R} (x^2+y^2)dxdy$, donde R está limitada por la circunferencia $x^2+y^2 = 2ax$.



Solución Usando coordenadas polares, la circunferencia se escribe $r^2 = 2ar\cos\theta$, es decir $r = 2a\cos\theta$, con $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$; entonces la integral será:

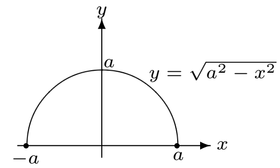
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2a\cos\theta} r^3drd\theta = \frac{16}{4}a^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta = 8{\cdot}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta = 8{\cdot}a^4\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi a^4.$$

38. Determinar $\iint\limits_{R} \sqrt{a^2-x^2-y^2}dxdy$, donde:

a) R es el semicírculo de radio a con centro en el origen, situado sobre el eje x.

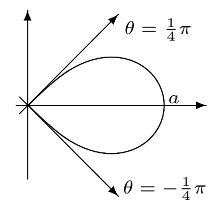
b) R es la hoja de lemniscata $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$, $x \geq 0$.

Solución



a) Usando coordenadas polares $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \theta \leq \pi$ y tenemos:

$$\iint_{\mathsf{R}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy = \int_0^{\pi}\int_0^{a} \sqrt{a^2 - r^2}\, r\, dr\, d\theta = -\frac{\pi}{2}\frac{2}{3}(a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a = \frac{1}{3}\pi a^3.$$



b) Usando coordenadas polares, la hoja de lemniscata es $r = a\sqrt{\cos 2\theta}$, $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ y tenemos:

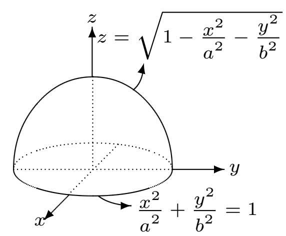
$$\iint_{\mathsf{R}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}dxdy = -\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2}{3}(a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta =$$

$$-\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^3((1 - \cos 2\theta)^{\frac{3}{2}} - 1)d\theta = \frac{2}{3}a^3(\frac{\pi}{4} - 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}^3\theta d\theta) =$$

$$\frac{2}{3}a^3(\frac{\pi}{4} - 2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\operatorname{sen}\theta - \cos^2\theta\operatorname{sen}\theta)d\theta) = \frac{2}{3}a^3(\frac{\pi}{4} - 2\sqrt{2}(-\cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{3}\cos^3\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}) =$$

$$\frac{1}{2}a^3(\frac{\pi}{3} - \frac{16\sqrt{2}}{9} + \frac{20}{9}).$$

39. Calcular $\displaystyle\iint_{\mathsf{R}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}dxdy$, en la región limitada por la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.



Solución Haciendo el cambio a coordenadas polares generalizadas, se tiene que $x = ar\cos\theta$, $y = br\cos\theta$, $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y la integral es:

$$\iint_{\mathsf{R}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1 - r^2}abrdrd\theta =$$

$$-2\pi ab\frac{1}{2}\frac{2}{3}(1 - r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}\pi ab.$$

40. En cada uno de los ejercicios siguientes, dibujar la región S y expresar la integral doble $\displaystyle\iint_S f(x,y)\, dx\, dy$ como una integral iterada y luego hacerlo en coordenadas polares.

a) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq a^2\}$, $a > 0$

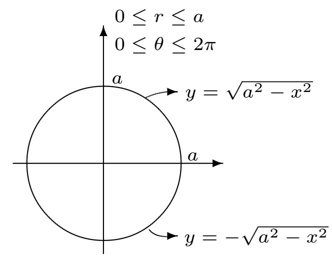
b) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 2x\}$

c) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}$, $0 < a < b$

d) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq y \leq 1 - x,\ 0 \leq x \leq 1\}$

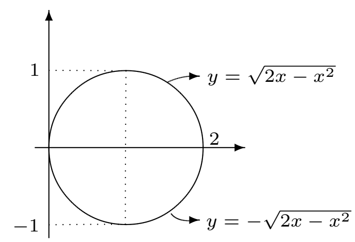
e) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 \leq y \leq 1,\ -1 \leq x \leq 1\}$.

Solución



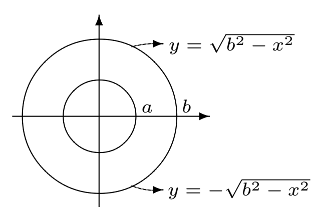
a) Es claro que $x^2 + y^2 = a^2 \Longrightarrow r^2 = a^2 \Longrightarrow r = a$, $0 \le \theta < 2\pi$. Así tenemos que:

$$\iint\limits_S f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-a}^{a}\left(\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)\,dy\right)dx = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^a f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)r dr\right)d\theta.$$



b) Como $x^2+y^2 = 2x \Longrightarrow x^2-2x+1+y^2 = (x-1)^2+y^2 = 1$ i.e. es un círculo de radio 1, centrado en $(1,0)$. Además $y = \pm\sqrt{2x-x^2}$, con $0 \le x \le 2$. Por otro lado, $r^2 = x^2 + y^2 = 2r\cos\theta \Longrightarrow r = 2\cos\theta$, para $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. Finalmente:

$$\iint\limits_S f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2\left(\int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy\right)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)r\,dr\right)d\theta.$$

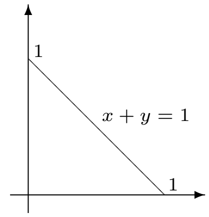


c) Es claro que S es una corona; es la región entre el círculo de radio a y el círculo de radio b, ambos centrados en $(0,0)$ con $0 < a < b$. Pasando a coordenadas polares tenemos $a^2 \le r^2 \le b^2$, o sea $a \le r \le b$, con $0 \le \theta < 2\pi$.

Además la integral se escribe:

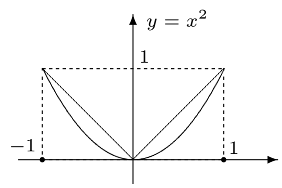
$$\begin{aligned}\iint\limits_S f(x,y)\,dx\,dy &= \int_{-b}^{-a}\left(\int_{-\sqrt{b^2-x^2}}^{\sqrt{b^2-x^2}} f(x,y)\,dy\right)dx + \int_{-a}^{a}\left(\int_{-\sqrt{b^2-x^2}}^{-\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)\,dy\right)dx \\ &\quad + \int_{-a}^{a}\left(\int_{\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{b^2-x^2}} f(x,y)\,dy\right)dx + \int_a^b\left(\int_{-\sqrt{b^2-x^2}}^{\sqrt{b^2-x^2}} f(x,y)\,dy\right)dx \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\int_a^b f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)r\,dr\right)d\theta.\end{aligned}$$

d) Al usar coordenadas polares $x+y=1$, se transforma en $r\cos\theta + r\operatorname{sen}\theta = r(\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)=1 \Longrightarrow r = \dfrac{1}{\cos\theta+\operatorname{sen}\theta}$, por lo que la región se recorre al considerar $0\le r\le \dfrac{1}{\cos\theta+\operatorname{sen}\theta}$, con $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$. Así:



$$\iint\limits_{R} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_0^{1-x} f(x,y)\,dy\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\operatorname{sen}\theta}} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)r\,dr\right)d\theta.$$

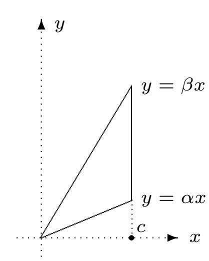
e) Usando coordenadas polares tenemos $x^2=y \Longrightarrow r^2\cos^2\theta = r\operatorname{sen}\theta \Longrightarrow r=\tan\theta\sec\theta$, con $0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$ o $\frac{3\pi}{4}\le\theta\le\pi$. Además $y=1\Longrightarrow r=\dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}$, con $\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{3\pi}{4}$. De esta manera tenemos que:



$$\iint\limits_{R} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^1\left(\int_{x^2}^{1} f(x,y)\,dy\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^{\tan\theta\sec\theta} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)r\,dr\right)d\theta$$
$$+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\left(\int_0^{\csc\theta} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)rdr\right)d\theta + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\left(\int_0^{\tan\theta\sec\theta} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)rdr\right)d\theta.$$

41. Transformar la integral $\displaystyle\int_0^c\int_{\alpha x}^{\beta x} f(x,y)\,dy\,dx$, $(0<\alpha<\beta,\ c>0)$ introduciendo las nuevas variables $u=x+y$, $uv=y$.

Solución Sea $u=x+y$, $uv=y$, entonces $x=u-y=u-uv=u(1-v)$, $y=uv$, por lo que $J=\begin{vmatrix}1-v & -u\\ v & u\end{vmatrix} = (1-v)u+uv=u$. Por otro lado, $0\le u(1-v)\le c\Longrightarrow 0\le u\le\dfrac{c}{1-v}$, $v\neq 1$ y también $\alpha x\le uv\le\beta x\Longrightarrow$
$\dfrac{\alpha x}{u}\le v\le\dfrac{\beta x}{u}\Longleftrightarrow\dfrac{\alpha x}{x+y}\le v\le\dfrac{\beta x}{x+y}$.



De esta forma, como $\frac{y}{x}$ varía de α a β tenemos que v varía desde $\dfrac{\alpha}{1+\alpha}$ hasta $\dfrac{\beta}{1+\beta}$.

En efecto recordemos que si $y=\alpha x\Longleftrightarrow\dfrac{y}{x}=\alpha\Longleftrightarrow\dfrac{uv}{u(1-v)}=\alpha\Longleftrightarrow v=\alpha-\alpha v\Longleftrightarrow v(1+\alpha)=\alpha\Longleftrightarrow v=\dfrac{\alpha}{1+\alpha}$.

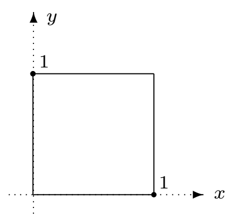
Finalmente, $\displaystyle\int_0^c\int_{\alpha x}^{\beta x} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{\frac{\alpha}{1+\alpha}}^{\frac{\beta}{1+\beta}}\int_0^{\frac{c}{1-v}} f(u(1-v),uv)u\,du\,dv.$

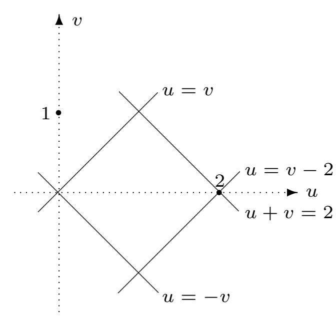
42. Efectuar el cambio de variable $u=x+y$, $v=x-y$, en la integral $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dy\,dx$.

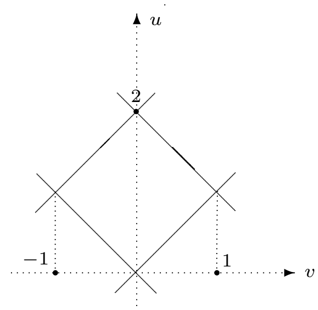
Solución Sea $u = x + y$, $v = x - y$, entonces como $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, se tiene que $0 \le u \le 2$, $-1 \le v \le 1$, con $u + v = 2x$, o sea $0 \le x = \frac{1}{2}(u+v) \le 1$, $0 \le y = \frac{1}{2}(u-v) \le 1$. Así tenemos que $y = 0 \iff u = v$, $y = 1 \iff u - v = 2$.

Por otro lado, $J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$. Finalmente tenemos:

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy =$$
$$\frac{1}{2}\int_0^1 \int_{-u}^{u} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) dv\,du + \frac{1}{2}\int_1^2 \int_{2+u}^{2-u} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) dv\,du =$$
$$\frac{1}{2}\int_{-1}^0 \int_{-v}^{2+v} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) du\,dv + \frac{1}{2}\int_0^1 \int_{v}^{2-v} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) du\,dv.$$







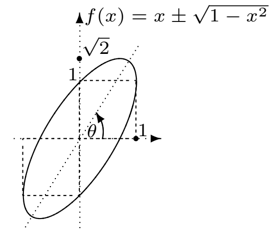
43. Calcular el área limitada por:

a) $(y - x)^2 + x^2 = 1$.

b) $r = a(1 + \cos\psi)$, $r = a\cos\psi$, $a > 0$.

c) $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$.

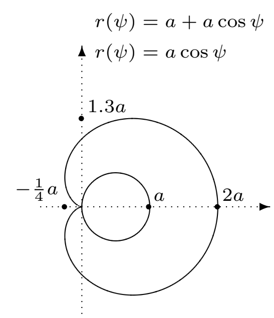
Solución



a) El área de la región es $\iint\limits_{R} dxdy = \int_{-1}^{1}\int_{x-\sqrt{1-x^2}}^{x+\sqrt{1-x^2}} dydx = \int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2}dx = \pi.$

Otra forma de resolver el problema es la siguiente. Si definimos $u = x - y$, $v = y$, la región es $u^2 + v^2 = 1$ y la matriz Jacobiana de la transformación es $J = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$

La integral es $\iint\limits_{R} dxdy = \iint\limits_{R'} |J|dudv = \iint\limits_{R'} dudv = \pi$, pues es el área de un círculo de radio 1.



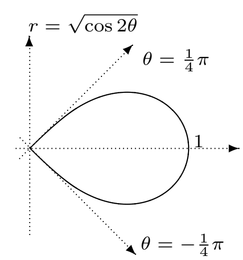
b) En coordenadas polares, para el círculo $r = a\cos\psi$, $-\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$. Para el cardioide $r = a(1+\cos\psi)$, $0 \leq \psi \leq 2\pi$. Así tenemos que el área de la región es:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{a\cos\psi}^{a(1+\cos\psi)} rdrd\psi + 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_{0}^{a(1+\cos\psi)} rdrd\psi =$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(a^2(1+\cos\psi)^2 - a^2\cos^2\psi)d\psi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} a^2(1+\cos\psi)^2 d\psi =$$

$$a^2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1+2\cos\psi)d\psi + a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1+2\cos\psi+\cos^2\psi)d\psi = a^2\left(\frac{\pi}{2} + 2\operatorname{sen}\psi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) +$$

$$a^2\left(\frac{\pi}{2} - 2\right) + a^2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\psi d\psi = a^2\pi + \frac{1}{4}\pi a^2 = \frac{5}{4}\pi a^2.$$

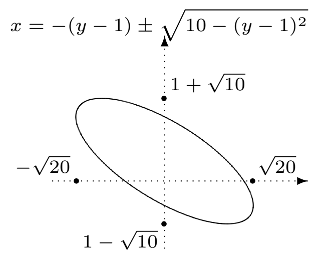


c) La ecuación $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ en coordenadas polares generalizadas ($x = ar\cos\theta$, $y = br\cos\theta$, $J = abr$), se escribe $(r^2)^2 = r^2(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) \implies r^2 = \cos 2\theta$. El área es $\iint\limits_{R} dxdy = 2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_{0}^{\sqrt{\cos 2\theta}} abrdrd\theta =$

$$ab\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta d\theta = \frac{1}{2}ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta = \frac{1}{2}ab(1-(-1)) = ab.$$

44. Hallar el área limitada por la elipse $(x - 2y + 3)^2 + (3x + 4y - 1)^2 = 100$.

Solución Sea $u = x - 2y$, $v = 3x + 4y$, entonces $x = \frac{1}{5}(2u+v)$, $y = \frac{1}{10}(v-3u)$ y el Jacobiano es $\frac{1}{10}$. Así tenemos que $(u+3)^2+(v-1)^2 = 100$ y si definimos $x = u+3$, $y = v-1$, $x^2 + y^2 = 100$, $J = 1$, es decir $\iint_{R} dxdy = \iint_{R'} |J| dudv = \frac{1}{10}\iint_{R''} dxdy = \frac{1}{10}\int_0^{2\pi}\int_0^{10} r dr d\theta = \pi\frac{(10)^2}{10} = 10\pi$.



45. Hallar el área del cuadrilátero curvo limitado por:

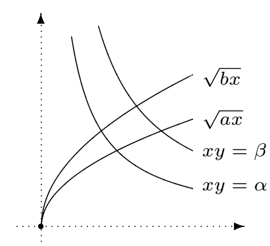
a) las curvas $y^2 = ax$, $y^2 = bx$, $xy = \alpha$, $xy = \beta$, con $0 < a < b$ y $0 < \alpha < \beta$,

b) las parábolas $x^2 = ay$, $x^2 = by$, $y^2 = \alpha x$, $y^2 = \beta x$, con $0 < a < b$ y $0 < \alpha < \beta$.

Solución

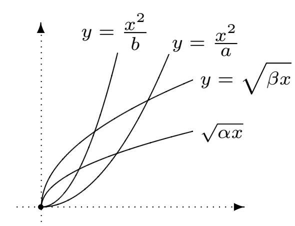
a) Si se define $u = xy$, $v = \frac{y^2}{x}$, tenemos $x = u^{\frac{2}{3}}v^{-\frac{1}{3}}$, $y = u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}}$. El Jacobiano está dado por:
$J = \begin{vmatrix} \frac{2}{3}u^{-\frac{1}{3}}v^{-\frac{1}{3}} & -\frac{1}{3}u^{\frac{2}{3}}v^{-\frac{4}{3}} \\ \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{2}{3}} \end{vmatrix} = \frac{1}{3}v^{-1}$, con $\alpha \leq u \leq \beta$, $a \leq v \leq b$, entonces el área es:

$$\iint_{R} dxdy = \iint_{R'} |J| dudv = \int_\alpha^\beta\int_a^b \frac{1}{3}v^{-1} dvdu = \frac{1}{3}(\beta-\alpha)\ln\frac{b}{a}.$$



b) Consideremos $u = \frac{x^2}{y}$, $v = \frac{y^2}{x}$, $x^2 = vy$, $y^2 = vx$, entonces $xy = uv$, $x^3 = xyu = u^2v$, $y^3 = yvx = uv^2$, lo que implica que $x = u^{\frac{2}{3}}v^{\frac{1}{3}}$, $y = u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}}$ y así el Jacobiano
$J = \begin{vmatrix} \frac{2}{3}u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}u^{\frac{2}{3}}v^{-\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{\frac{2}{3}} & \frac{2}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{1}{3}} \end{vmatrix} = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$, de manera que

$$\iint_{R} dxdy = \int_a^b\int_\alpha^\beta \frac{1}{3} dudv = \frac{1}{3}(b-a)(\beta-\alpha).$$



46. Calcular el área de las siguientes regiones:

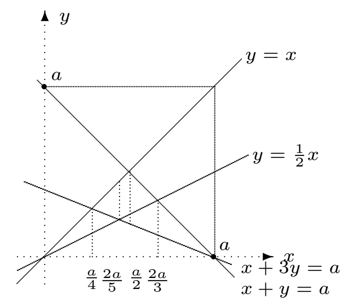
a) área limitada por $x = y$, $x = 2y$, $x + y = a$, $x + 3y = a$, $a > 0$.

b) área limitada por el eje x, la parábola $y^2 = 4ax$ y la recta $x + y = 3a$.

c) área limitada por las parábolas $y^2 = 10x + 25$, $y^2 = -6x + 9$.

Solución

a) Determinemos los puntos donde las rectas se cortan:



$x = y$, $x + y = a \Longrightarrow 2x = a$, $x = \dfrac{a}{2}$.

$x = y$, $x + 3y = a \Longrightarrow 4x = a$, $x = \dfrac{a}{4}$.

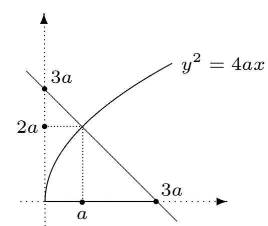
$x + y = a$, $y = \dfrac{1}{2}x \Longrightarrow \dfrac{3}{2}x = a$, $x = \dfrac{2}{3}a$.

$x + 3y = a$, $y = \dfrac{1}{2}x \Longrightarrow x + \dfrac{3}{2}x = a$, $x = \dfrac{2}{5}a$.

Así tenemos que el área es:

$$\int_{\frac{a}{4}}^{\frac{2}{5}a} \int_{\frac{a-x}{3}}^{x} dy\,dx + \int_{\frac{2}{5}a}^{\frac{a}{2}} \int_{\frac{1}{2}x}^{x} dy\,dx + \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{2}{3}a} \int_{\frac{1}{2}x}^{a-x} dy\,dx =$$

$$\int_{\frac{a}{4}}^{\frac{2}{5}a} \frac{4x - a}{3}\,dx + \int_{\frac{2}{5}a}^{\frac{a}{2}} \frac{1}{2}x\,dx + \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{2}{3}a} \left(a - \frac{3}{2}x\right) dx = \frac{3a^2}{200} + \frac{9a^2}{400} + \frac{a^2}{48} = \frac{7a^2}{120}.$$



b) Se tiene que si $y^2 = 4ax$, $x + y = 3a \Longrightarrow x + 2\sqrt{ax} = 3a \Longrightarrow$

$(\sqrt{x})^2 + 2\sqrt{a}(\sqrt{x}) - 3a = 0 \Longrightarrow \sqrt{x} = \dfrac{-2\sqrt{a} \pm 4\sqrt{a}}{2} = \sqrt{a}, -3\sqrt{a}$

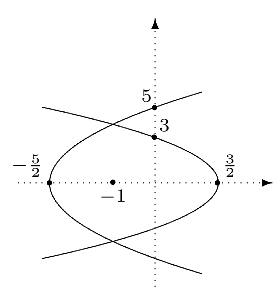
y se elimina la solución negativa.

Así tenemos $\sqrt{x} = \sqrt{a} \Longrightarrow x = a$, por lo que el área es:

$$\int_0^a \int_0^{2\sqrt{ax}} dy\,dx + \int_a^{3a} \int_0^{3a-x} dy\,dx = \int_0^a 2\sqrt{a}\sqrt{x}\,dx + \int_a^{3a} (3a - x)\,dx =$$

$$2\sqrt{a}\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a + \left(3ax - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_a^{3a} = \frac{4}{3}a^2 + 3a(3a) - \frac{9}{2}a^2 - 3a^2 + \frac{1}{2}a^2 = \left(\frac{4}{3} + \frac{9}{2} - \frac{5}{2}\right) a^2 = \frac{10}{3}a^2.$$

c) Igualando las ecuaciones $y^2 = 10x + 25 = -6x + 9 \Longrightarrow 16x + 16 = 0 \Longrightarrow x = -1$.



El área es $\displaystyle\int_{-\frac{5}{2}}^{-1} \int_{-\sqrt{10x+25}}^{\sqrt{10x+25}} dy\,dx + \int_{-1}^{\frac{3}{2}} \int_{-\sqrt{9-6x}}^{\sqrt{9-6x}} dy\,dx =$

$$\int_{-\frac{5}{2}}^{-1} 2\sqrt{10x + 25}\,dx + \int_{-1}^{\frac{3}{2}} 2\sqrt{9 - 6x}\,dx =$$

$$\frac{2}{10}\frac{2}{3}(10x + 25)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-\frac{5}{2}}^{-1} - \frac{2}{6}\frac{2}{3}(9 - 6x)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^{\frac{3}{2}} =$$

$$\frac{2}{15}(15)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{9}(15)^{\frac{3}{2}} = 2{\cdot}15\sqrt{15}\left(\frac{1}{15} + \frac{1}{9}\right) = \frac{16}{3}\sqrt{15}.$$

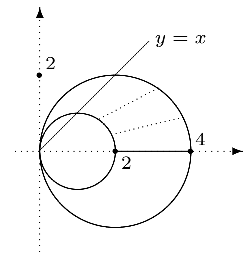
47. Determinar el área de las siguientes regiones:

a) limitada por $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $y = x$, $y = 0$.

b) limitada por la recta $r\cos\theta = 1$ y la circunferencia $r = 2$. (se considera la superficie que no contiene el polo).

Solución

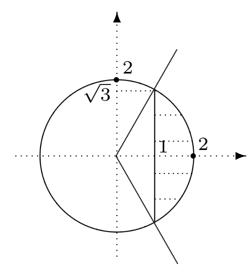
a) Se tiene que $x^2 + y^2 = 2x \Longrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4x \Longrightarrow (x-2)^2 + y^2 = 4$.



Pasando a coordenadas polares tenemos $x^2+y^2 = 2x \Longrightarrow r^2 = 2r\cos\theta$, $r = 2\cos\theta$. También $x^2+y^2 = 4x \Longrightarrow r^2 = 4r\cos\theta$, $r = 4\cos\theta$. El área es:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{2\cos\theta}^{4\cos\theta} r\,dr\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2\Big|_{2\cos\theta}^{4\cos\theta} d\theta = 6\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta\,d\theta = 3\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 2\theta)\,d\theta =$$

$$3\left(\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 3\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}(\pi + 2).$$



b) Área $= \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{2} r\,dr\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (4 - \sec^2\theta)\,d\theta =$ $\displaystyle\frac{1}{2}(4\theta - \tan\theta)\Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}.$

48. Determinar el área de las regiones que se indican usando integrales dobles:

a) Región limitada por $(x^2+y^2)^2 = 2ax^3$.

b) Región limitada por $(x^2+y^2)^2 = x^4 + y^4$.

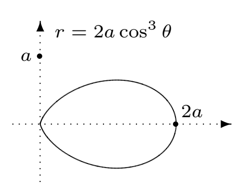
c) Región limitada por la curva $(x+y)^3 = xy$, situada en el primer cuadrante (lazo).

d) Región limitada por la curva $(x+y)^5 = x^2y^2$, situada en el primer cuadrante (lazo).

e) Región limitada por la curva $\displaystyle\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{xy}{c^2}$.

f) Región limitada por la curva $\displaystyle\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right)^2 = \frac{x^2+y^2}{25}$.

Solución



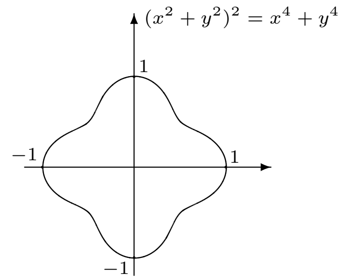
a) Usando coordenadas polares, la ecuación $(x^2+y^2)^2 = 2ax^3$ se escribe $r^4 = 2ar^3\cos^3\theta$, o sea $r = 2a\cos^3\theta$, $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. Así el área se determina por:

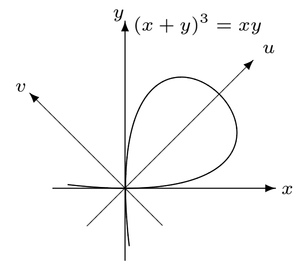
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2a\cos^3\theta} r\,dr\right)d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4a^2\cos^6\theta d\theta = 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\theta d\theta = 4a^2\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{\pi}{2} = \frac{5}{8}\pi a^2.$$

b) Transformando la ecuación $(x^2+y^2)^3 = x^4+y^4$ a coordenadas polares tenemos, $r^6 = r^4(\cos^4\theta+\operatorname{sen}^4\theta)$, o sea $r=\sqrt{\cos^4\theta+\operatorname{sen}^4\theta}$, $0\le\theta\le 2\pi$ y el área es:

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\sqrt{\cos^4\theta+\operatorname{sen}^4\theta}} r\,dr\right)d\theta =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\cos^4\theta+\operatorname{sen}^4\theta)\,d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,d\theta = 4\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{\pi}{2} = \frac{3}{4}\pi.$$





c) Realicemos un cambio de variable que simplifique la forma de la ecuación. Sea $u=x+y$, $v=x-y$, entonces $x=\frac{1}{2}(u+v)$, $y=\frac{1}{2}(u-v)$ y la fórmula se transforma en $u^3=\frac{1}{4}(u^2-v^2)$.

El Jacobiano es: $J=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix} = -\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}$. Así:

$$\text{Área (R)} = \iint_{R} dx\,dy = \iint_{R'}\frac{1}{2}\,du\,dv.$$

Pasando a coordenadas polares en el sistema (u,v), tenemos que $4u^3=u^2-v^2$ se transforma en $4r^3\cos^3\theta = r^2(\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta) \Longrightarrow r=\dfrac{\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta}{4\cos^3\theta} = \frac{1}{4}(\sec\theta-\tan^2\theta\sec\theta)$.

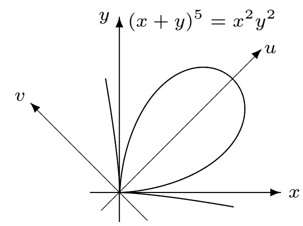
El área es:

$$\iint_{R} dx\,dy = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^{\frac{1}{4}(\sec\theta-\tan^2\theta\sec\theta)} r dr\right)d\theta = \frac{1}{64}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sec^2\theta(1-\tan^2\theta)^2 d\theta \underset{v=\tan\theta}{=}$$

$$\frac{1}{64}\int_{-1}^{1}(1-u^2)^2du = \frac{1}{32}\int_0^1(1-2u^2+u^4)du = \frac{1}{32}\left(u-\frac{2}{3}u^3+\frac{1}{5}u^5\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{32}\left(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{60}.$$

Observemos que con el cambio de variable, rotamos en realidad los ejes $45°$, aunque falta normalizar las variables para que la transformación fuera ortogonal, es decir se debió hacer el cambio $u=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$, $v=\frac{1}{\sqrt{2}}(x-y)$, pues así $x=\frac{1}{\sqrt{2}}(u+v)$, $y=\frac{1}{\sqrt{2}}(u-v)$

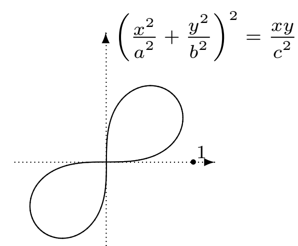
y el Jacobiano sería $J = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$ i.e. $|J| = 1$.



d) En este caso realizamos el mismo cambio de variable que en el ejercicio anterior, $u = x+y$, $v = x-y \Longrightarrow x = \frac{1}{2}(u+v)$, $y = \frac{1}{2}(u-v)$, $|J| = \frac{1}{2}$. La ecuación se escribe $16u^5 = (u^2-v^2)^2$ y usando polares en el sistema (u,v) se tiene:

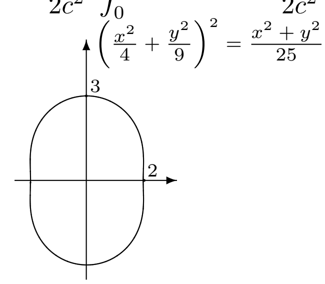
$r^5\cos^5\theta = \frac{1}{16}r^4(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)^2 \Longrightarrow r = \frac{1}{16}(1-\tan^2\theta)^2\sec\theta$. Así, finalmente tenemos que el área es:

$$\iint\limits_{R} dx\,dy = \iint\limits_{R'} \frac{1}{2}du\,dv = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \Big(\int_0^{\frac{1}{16}(1-\tan^2\theta)^2\sec\theta} r\,dr\Big)d\theta = \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1-\tan^2\theta)^4}{256}\sec^2\theta d\theta =$$
$$\frac{1}{1024}\int_{-1}^{1}(1-u^2)^4\,du = \frac{1}{512}\int_0^1 \frac{1}{2}u^{-1}(1-u^2)^4 2u\,du \underset{u^2=t}{=} \frac{1}{1024}\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^4dt = \frac{1}{1024}\beta(\tfrac{1}{2},5) =$$
$$\frac{1}{1024}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})4!}{\Gamma(\frac{11}{2})} = \frac{1}{1024}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})2\cdot3\cdot4}{\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{1}{2\cdot2\cdot5\cdot7\cdot9} = \frac{1}{1260}.$$



e) Usemos el cambio de variable $x = ar\cos\theta$, $y = br\operatorname{sen}\theta$, $J = abr$, entonces la ecuación se transforma en $(r^2)^2 = r^2\frac{ab}{c^2}\operatorname{sen}\theta\cos\theta \Longrightarrow r = \sqrt{\frac{ab}{2c^2}\operatorname{sen}2\theta}$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, $\pi \le \theta \le \frac{3\pi}{2}$.
El área es dos veces el área del primer cuadrante:

$$\text{Área}= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_0^{\sqrt{\frac{ab}{2c^2}\operatorname{sen}2\theta}} abr\,dr\Big)d\theta = \frac{2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^2b^2}{2c^2}\operatorname{sen}2\theta\,2d\theta = \frac{a^2b^2}{2c^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}u\,du = \frac{a^2b^2}{2c^2}.$$



f) Definiendo $x = 2\cos\theta$, $y = 3\operatorname{sen}\theta$, tenemos que el Jacobiano de la transformación es $6r$ y la ecuación se transforma en $r^4 = r^2\frac{(4\cos^2\theta + 9\operatorname{sen}^2\theta)}{25} \Longrightarrow r = \frac{1}{5}\sqrt{4\cos^2\theta+9\operatorname{sen}^2\theta}$, con $0 \le \theta \le 2\pi$. El área es:

$$\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{\frac{1}{5}\sqrt{4\cos^2\theta+9\operatorname{sen}^2\theta}} 6r\,dr\Big)\,d\theta = 3\int_0^{2\pi}\frac{1}{25}(4\cos^2\theta+9\operatorname{sen}^2\theta)\,d\theta = 3\cdot\frac{1}{25}\int_0^{2\pi}13\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta =$$
$$3\cdot13\cdot\frac{4}{25}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^2\theta d\theta = \frac{39}{25}\cdot4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{39}{25}\pi.$$

2.5 Cálculo de volúmenes

49. Calcular los volúmenes de los cuerpos limitados por las superficies que se indican en cada caso:

a) Por los planos coordenados, los planos $x = 4$, $y = 4$ y el paraboloide $z = x^2 + y^2 + 1$.

b) Por los planos coordenados, los planos $x = a$, $y = b$ y el paraboloide $z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$.

c) Por el plano $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ y los planos coordenados.

d) Por los planos $y = 0$, $z = 0$, $3x + y = 6$, $3x + 2y = 12$, $x + y + z = 6$.

e) Por el paraboloide $z = x^2 + y^2$, los planos coordenados y el plano $x + y = 1$.

f) Por el paraboloide $z = x^2 + y^2$, los planos $z = 0$, $y = 1$, $y = 2x$, $y = 6 - x$.

g) Por los planos coordenados, el plano $2x + 3y = 12$ y el cilindro $z = \frac{y^2}{2}$.

h) Por el cilindro $z = 9 - y^2$, los planos coordenados y el plano $3x + 4y = 12$, $y \geq 0$.

i) Por el cilindro $z = 4 - x^2$, los planos coordenados y el plano $2x + y = 4$, $x \geq 0$.

j) Por el cilindro $2y^2 = x$, los planos $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1$ y $z = 0$.

k) Por el cilindro circular de radio r de eje y, los planos coordenados y por el plano $\frac{x}{r} + \frac{y}{a} = 1$.

l) Por el cilindro elíptico $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, los planos $z = 12 - 3x - 4y$ y $z = 1$.

m) Por los cilindros $x^2 + y^2 = a^2$ y $x^2 + z^2 = a^2$.

n) Por los cilindros $z = 4 - y^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$ y el plano $z = 0$.

o) Por los cilindros $x^2 + y^2 = b^2$, $z = \frac{x^3}{a^2}$ y el plano $z = 0$, $x \geq 0$.

p) Por el paraboloide hiperbólico $z = x^2 - y^2$ y los planos $z = 0$, $x = 3$, $x = 0$.

q) Por el paraboloide hiperbólico $z = xy$, el cilindro $y = \sqrt{x}$ y los planos $x + y = 2$, $y = 0$ y $z = 0$.

r) Por el paraboloide $z = x^2 + y^2$, el cilindro $y = x^2$ y los planos $y = 1$ y $z = 0$.

s) Por el paraboloide $z = \frac{1}{a}(a^2 - x^2 - 4y^2)$ y el plano $z = 0$.

t) Por los cilindros $y = \mathrm{e}^x$, $y = \mathrm{e}^{-x}$, $z = \mathrm{e}^2 - y^2$ y el plano $z = 0$.

u) Por los cilindros $y = \ln x$, $y = \ln^2 x$ y los planos $z = 0$, $y + z = 1$.

v) Por los cilindros $z = \ln x$, $z = \ln y$ y los planos $z = 0$, $x + y = 2e$, $x \geq 1$.

w) Por los cilindros $y = x + \operatorname{sen} x$, $y = x - \operatorname{sen} x$, $z = \frac{1}{4}(x+y)^2$ y el plano $z = 0$ ($0 \leq x \leq \pi$, $y \geq 0$).

x) Por la superficie cónica $z^2 = xy$, el cilindro $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ y el plano $z = 0$.

y) Por la superficie cónica $4y^2 = x(2 - z)$ y los planos $z = 0$, $x + z = 2$.

z) Por la superficie $z = \cos x \cos y$ y los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y $x + y = \frac{\pi}{2}$.

a') Por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$, los planos $z = 0$ y $z = x + y + 10$.

b') Por el cilindro $x^2 + y^2 = 2x$, los planos $2x - z = 0$ y $4x - z = 0$.

c') Por el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, el paraboloide $az = 2a^2 + x^2 + y^2$ y el plano $z = 0$.

d') Por el cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$, el paraboloide $z = \frac{1}{a}(x^2 + y^2)$ y el plano $z = 0$.

e') Por el paraboloide hiperbólico $z = \frac{1}{a}xy$, el cilindro $x^2 + y^2 = ax$ y el plano $z = 0$, ($x \geq 0$, $y \geq 0$).

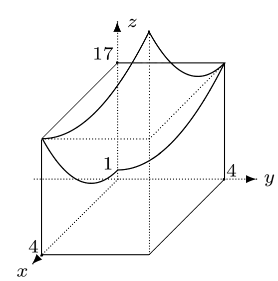
f') Por los cilindros $x^2 + y^2 = x$, $x^2 + y^2 = 2x$, el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y los planos $x + y = 0$, $x - y = 0$ y $z = 0$.

g') Por los cilindros $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 2y$ y por los planos $z = x + 2y$ y $z = 0$.

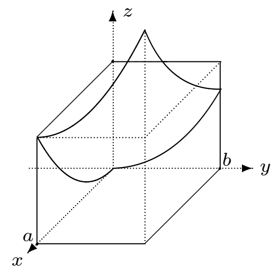
h') Por la superficie cónica $z^2 = xy$ y el cilindro $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

i') Por el helicoide (escalera de caracol) $z = h \arctan \frac{y}{x}$, el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ y los planos $x = 0$, $z = 0$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$).

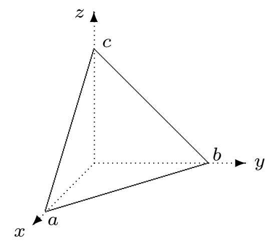
Solución



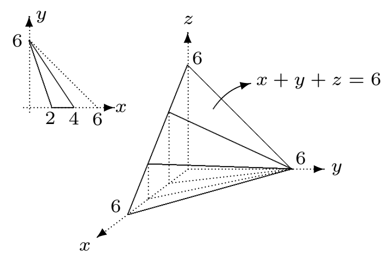
a) $\displaystyle\int_0^4 \left(\int_0^4 (x^2 + y^2 + 1)\, dx \right) dy =$
$\displaystyle\int_0^4 \left((y^2 + 1)x + \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_0^4 dy = \int_0^4 \frac{4}{3}(3y^2 + 9)\, dy =$
$\displaystyle\left(\frac{4}{3}y^3 + \frac{76}{3}y \right) \Big|_0^4 = \frac{560}{3}.$



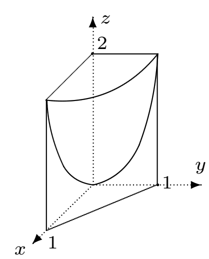
b) $\displaystyle\int_0^b \left(\int_0^a \left(\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}\right)dx\right)dy = \int_0^b \left(\frac{x^3}{6p}+\frac{y^2}{2q}x\right)\Big|_0^a dy =$
$\displaystyle\int_0^b \left(\frac{a}{2q}y^2+\frac{a^3}{6p}\right)dy = \left(\frac{ay^3}{6q}+\frac{a^3y}{6p}\right)\Big|_0^b = \frac{ab}{6}\left(\frac{a^2}{p}+\frac{b^2}{q}\right).$



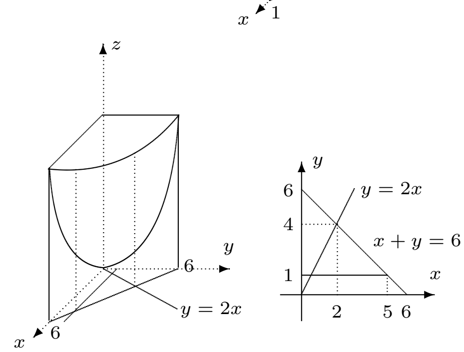
c) $\displaystyle\int_0^a \left(\int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)dy\right)dx =$
$\displaystyle-\int_0^a c\left(y-\frac{1}{a}xy-\frac{1}{2b}y^2\right)\Big|_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} dx = -\int_0^a \frac{b(x-a)^2}{2a^2}\,dx =$
$\displaystyle-\frac{b(x-a)^3}{6a^2}\Big|_0^a = \frac{1}{6}abc.$



d) $\displaystyle\int_0^6 \left(\int_{2-\frac{y}{3}}^{4-\frac{2}{3}y} (6-x-y)\,dx\right)dy =$
$\displaystyle\int_0^6 \left((6-y)x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{2-\frac{y}{3}}^{4-\frac{2}{3}y} dy = \int_0^6 \frac{(y-6)^2}{6}\,dy =$
$\displaystyle\frac{1}{18}(y-6)^3\Big|_0^6 = 12.$

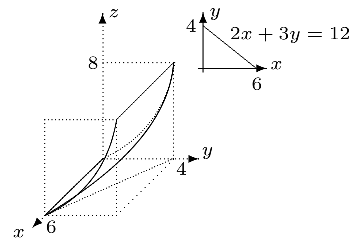


e) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (x^2+y^2)\,dy\right)dx = \int_0^1 \left(x^2(1-x)+\frac{1}{3}(1-x)^3\right)dx =$
$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{3}(x-1)(-4x^2+2x-1)\,dx = \int_0^1 \left(-\frac{4}{3}x^3+2x^2-x+\frac{1}{3}\right)dx =$
$\displaystyle\left(-\frac{1}{3}x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$

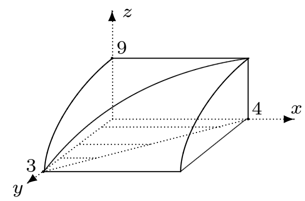


f) $\displaystyle\int_1^4 \left(\int_{\frac{y}{2}}^{6-y} (x^2+y^2)\,dx\right)dy =$
$\displaystyle\int_1^4 \left(\frac{x^3}{3}+y^2x\right)\Big|_{\frac{y}{2}}^{6-y} dy =$
$\displaystyle\int_1^4 \left(-\frac{15}{8}y^3+12y^2-36y+72\right)dy =$
$\displaystyle\left(-\frac{15}{32}y^4+4y^3-18y^2+72y\right)\Big|_1^4 = \frac{2511}{32}.$

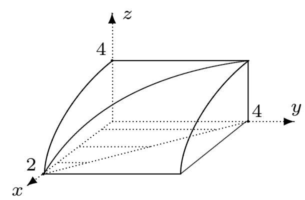
g) $$\int_0^6 \left(\int_0^{4-\frac{2}{3}x} \frac{y^2}{2}\,dy\right) dx = \int_0^6 \frac{1}{6}\left(4-\frac{2}{3}x\right)^3 dx =$$
$$-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{6}\int_0^6 \left(4-\frac{2}{3}x\right)^3\left(-\frac{2}{3}\,dx\right) = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\left(4-\frac{2}{3}x\right)^4\Big|_0^6 =$$
$$-\frac{1}{16}(-(4)^4) = 16.$$



h) $$\int_0^4 \left(\int_0^{3-\frac{3}{4}x} (9-y^2)\,dy\right) dx = \int_0^4 \left(9y - \frac{1}{3}y^3\right)\Big|_0^{3-\frac{3}{4}x} dx =$$
$$\int_0^4 \left(-\frac{9}{64}x^3 - \frac{27}{16}x^2 + 18\right) dx = \left(\frac{9}{256}x^4 - \frac{9}{16}x^3 + 18x\right)\Big|_0^4 = 45.$$

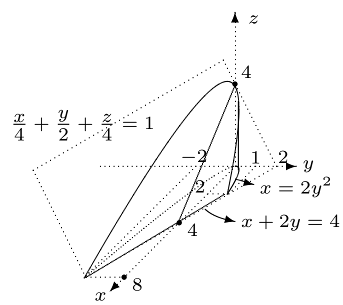


i) $$\int_0^2 \Big(\int_0^{4-2x} (4-x^2)\,dy\Big)\,dx = \int_0^2 (4-x^2)(4-2x)\,dx =$$
$$\int_0^2 (2x^3 - 4x^2 - 8x + 16)\,dx = \left(\frac{1}{2}x^4 - \frac{4}{3}x^3 - 4x^2 + 16x\right)\Big|_0^2 = \frac{40}{3}.$$



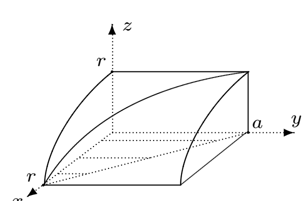
j) Debemos determinar los puntos en que se intersecan el plano y el cilindro.

Si $z=0$, $y = 2 - \frac{1}{2}x \Longrightarrow 4\left(2-\frac{1}{2}x\right)^2 = 2x \Longrightarrow (4-x)^2 = 2x \Longrightarrow x^2 - 10x + 16 = 0$, o sea $x = 2, 8$, por lo que si $z=0$, $y=1$, $y=-2$, entonces:



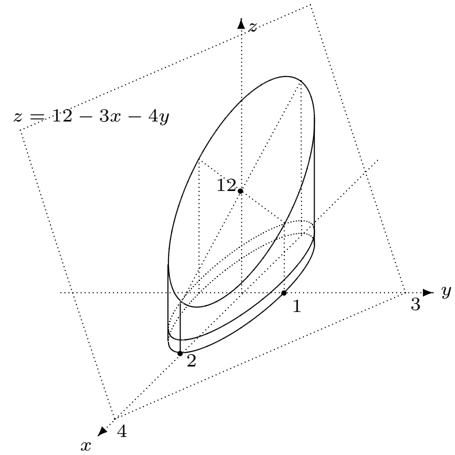
$$\int_{-2}^1 \left(\int_{2y^2}^{4-2y} (4-x-2y)\,dx\right) dy = \int_{-2}^1 \left((4-2y)x - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{2y^2}^{4-2y} dy =$$
$$\int_{-2}^1 \left(\tfrac{1}{2}(4-2y)^2 - (4-2y)y^2 + 4y^4\right) dy = 2\int_{-2}^1 (y^4 + 2y^3 - 3y^2 - 4y + 4)\,dy =$$
$$2\left(\frac{1}{5}y^4 + \frac{1}{2}y^4 - y^3 - 2y^2 + 4y\right)\Big|_{-2}^1 = \frac{81}{5}.$$

k) $$\int_0^r \left(\int_0^{a\left(1-\frac{x}{r}\right)} \sqrt{r^2-x^2}\,dy\right) dx = \int_0^r \frac{a}{r}(r-x)\sqrt{r^2-x^2}\,dx =$$
$$a\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx - \frac{a}{r}\int_0^r x\sqrt{r^2-x^2}\,dx =$$
$$a\left(\frac{1}{2}x\sqrt{r^2-x^2} + \frac{1}{2}r^2 \operatorname{arcsen}\frac{x}{r}\right)\Big|_0^r + \frac{a}{2r}\cdot\frac{2}{3}(r^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^r =$$



$a\cdot\dfrac{r^2}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{a}{3r}r^3=ar^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{3}\right).$

l) Como el volumen va desde $z=1$, hasta $z=12-3x-4y$ y la superficie está por encima del plano $z=1$, se tiene que debemos restar 1 a $12-3x-4y$ para determinar el volumen. Así tenemos que el volumen es:

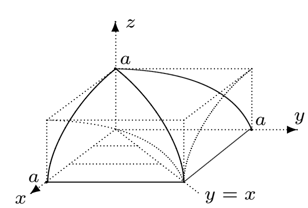


$$\int_{-2}^{2}\Big(\int_{-\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}(11-3x-4y)\,dy\Big)\,dx=$$

$$\int_{-2}^{2}((11-3x)y-2y^2)\Big|_{-\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}dx=$$

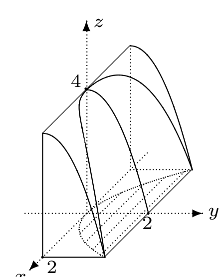
$$\int_{-2}^{2}(11-3x)\sqrt{4-x^2}\,dx=11\Big(\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}+\frac{4}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x}{2}\Big)\Big|_{-2}^{2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-2}^{2}=$$
$$11\Big(2\frac{\pi}{2}-2\Big(-\frac{\pi}{2}\Big)\Big)+0=22\pi.$$

m) Por razones de simetría tenemos que el volumen es 8 veces la región del primer octante, integrando sobre el cuadrado $[\,0,a\,]\times[\,0,a\,]$ las superficies $x=\sqrt{a^2-y^2}$ y $z=\sqrt{a^2-x^2}$, sobre cada mitad de este cuadrado (son iguales). El volumen es:



$$8\int_0^a\Big(\int_0^x\sqrt{a^2-x^2}\,dy\Big)\,dx+8\int_0^a\Big(\int_x^a\sqrt{a^2-x^2}\,dy\Big)\,dx=16\int_0^a\Big(\int_0^x\sqrt{a^2-x^2}\,dy\Big)\,dx=$$
$$16\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx=-8\cdot\frac{2}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a=\frac{16}{3}a^3.$$

n) $\displaystyle\int_0^2\Big(\int_{-\sqrt{2y}}^{\sqrt{2y}}(4-y^2)\,dx\Big)\,dy=2\int_0^2(4-y^2)\sqrt{2y}\,dy=$

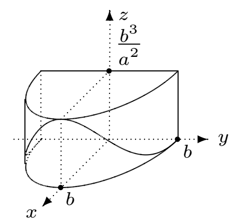


$$2\sqrt{2}\Big(4\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{7}y^{\frac{7}{2}}\Big)\Big|_0^2=2\sqrt{2}\Big(\frac{16}{3}\sqrt{2}-\frac{16}{7}\sqrt{2}\Big)=$$
$$2\cdot2\cdot16\Big(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\Big)=64\cdot\frac{7-3}{21}=\frac{256}{21}.$$

o) $\displaystyle\int_0^b \Big(\int_{-\sqrt{b^2-x^2}}^{\sqrt{b^2-x^2}} \frac{x^3}{a^2}\,dy\Big)\,dx = \frac{2}{a^2}\int_0^b x^3\sqrt{b^2-x^2}\,dx =$

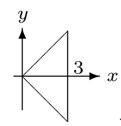
$$\frac{2b^3}{a^2}\int_0^b \Big(\frac{x}{b}\Big)^3 b^2\Big(1-\Big(\frac{x}{b}\Big)^2\Big)^{\frac12}\frac{dx}{b} = \frac{2b^5}{a^2}\int_0^1 u^3(1-u^2)^{\frac12}\,du \underset{u^2=v}{=}$$

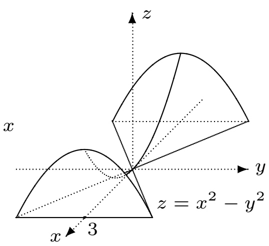
$$\frac{b^5}{a^2}\int_0^1 v(1-v)^{\frac12}\,dv = \frac{b^5}{a^2}\beta(2,\tfrac32) = \frac{b^5}{a^2}\cdot\frac{\Gamma(\frac32)}{\frac52\cdot\frac32\Gamma(\frac32)} = \frac{4b^5}{15a^2}.$$



p) $\displaystyle\int_0^3 \Big(\int_{-x}^{x}(x^2-y^2)\,dy\Big)\,dx = \int_0^3 \Big(x^2y-\frac13 y^3\Big)\Big|_{-x}^{x}\,dx =$

$$2\int_0^3 \frac23 x^3\,dx = \frac43\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_0^3 = 27.$$

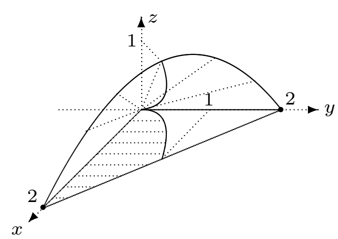




q) $\displaystyle\int_0^1 \Big(\int_{y^2}^{2-y} xy\,dx\Big)\,dy = \frac12\int_0^1 yx^2\Big|_{y^2}^{2-y}\,dy =$

$$\frac12\int_0^1 (y(2-y)^2-y^5)\,dy = \frac12\int_0^1 (4y-4y^2+y^3-y^5)\,dy =$$

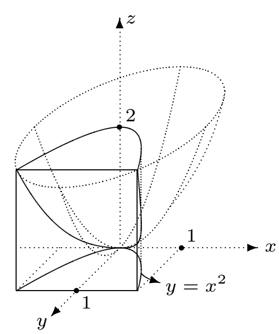
$$\frac12\Big(2y^2-\frac43y^3+\frac14y^4-\frac16y^6\Big)\Big|_0^1 = \frac12\Big(2-\frac43+\frac14-\frac16\Big) = \frac38.$$



r) $\displaystyle\int_{-1}^1 \Big(\int_{x^2}^{1}(x^2+y^2)\,dy\Big)\,dx = \int_{-1}^1 \Big(x^2y+\frac13y^3\Big)\Big|_{x^2}^{1}\,dx =$

$$2\int_0^1 \Big(x^2+\frac13-x^4-\frac13x^6\Big)\,dx =$$

$$2\Big(\frac13x^3+\frac13x-\frac15x^5-\frac1{21}x^7\Big)\Big|_0^1 = 2\Big(\frac23-\frac15-\frac1{21}\Big) = \frac{88}{105}.$$

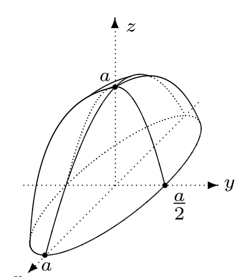


s) Cuando $z = 0 = \dfrac1a(a^2-x^2-4y^2)$, se tiene $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{\left(\frac a2\right)^2} = 1$

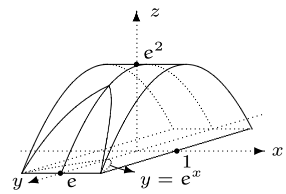
y haciendo el cambio de variable $x = ar\cos\theta$, $y = \dfrac a2 r\operatorname{sen}\theta$,

$J = \dfrac{a^2}{2}r$, tenemos que el volumen es:

$$\int_{-a}^{a}\Big(\int_{-\frac a2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{\frac a2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \frac{a^2-x^2-4y^2}{a}\,dy\Big)\,dx =$$



$$\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^1 \frac{a^2-a^2r^2}{a}\cdot\frac{a^2}{2}\,r\,dr\Big)\,d\theta = \pi a^3\int_0^1 (r-r^3)\,dr = \pi a^3\Big(\frac12-\frac14\Big) = \frac14\pi a^3.$$

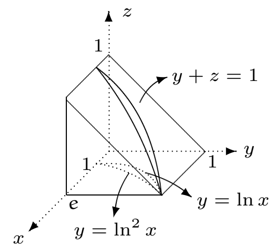


t) $\displaystyle\int_{-1}^{0}\Big(\int_{e^{-x}}^{e}(e^2-y^2)\,dy\Big)\,dx+\int_{0}^{1}\Big(\int_{e^{x}}^{e}(e^2-y^2)\,dy\Big)\,dx=$

$\displaystyle 2\int_{0}^{1}\Big(\int_{e^{x}}^{e}(e^2-y^2)\,dy\Big)\,dx=2\int_{0}^{1}\Big(\frac{2}{3}e^3+\frac{1}{3}e^{3x}-e^{x+2}\Big)\,dx=$

$\displaystyle 2\Big(\frac{2}{3}e^3x+\frac{1}{9}e^{3x}-e^{x+2}\Big)\Big|_0^1=2\Big(e^2-\frac{1}{9}-\frac{2}{9}e^3\Big)=$

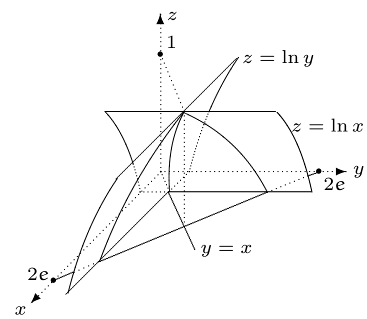
$\displaystyle 2\Big(e^2-\frac{2e^3+1}{9}\Big).$



u) $\displaystyle\int_{1}^{e}\Big(\int_{\ln^2 x}^{\ln x}(1-y)\,dy\Big)\,dx=\int_{1}^{e}\Big(y-\tfrac{1}{2}y^2\Big)\Big|_{\ln^2 x}^{\ln x}dx=$

$\displaystyle\int_{1}^{e}(\tfrac{1}{2}\ln^4 x-\tfrac{3}{2}\ln^2 x+\ln x)\,dx=$

$\displaystyle(\tfrac{1}{2}x\ln^4 x-2x\ln^3 x+\tfrac{9}{2}x\ln^2 x-8x\ln x+8x)\Big|_1^e=3e-8.$

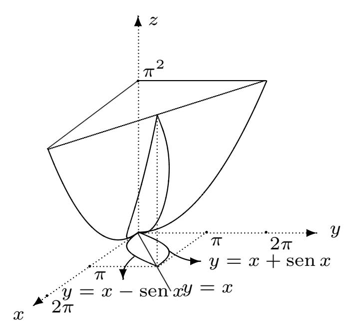


v) Las superficies se intersecan cuando $z=\ln x=\ln y$ i.e. $x=y$, $x\geq 1$, $y\geq 1$. Así tenemos que el volumen está dado por:

$\displaystyle\int_{1}^{e}\Big(\int_{y}^{2e-y}\ln y\,dx\Big)\,dy+\int_{1}^{e}\Big(\int_{x}^{2e-x}\ln x\,dy\Big)\,dx=$

$\displaystyle 2\int_{1}^{e}\Big(\int_{x}^{2e-x}\ln y\,dx\Big)\,dy=2\int_{1}^{e}(2e-2y)\ln y\,dy=$

$\displaystyle 4\int_{1}^{e}(e-y)\ln y\,dy=\Big(e(4y\ln y-4y)-2y^2\ln y+y^2\Big)\Big|_1^e=-e^2-(1-4e)=4e-e^2-1.$



w) El volumen está dado por:

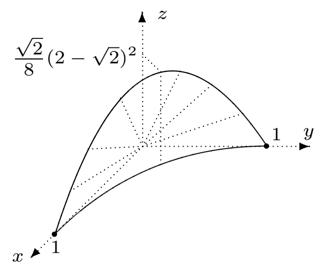
$\displaystyle\frac{1}{4}\int_{0}^{\pi}\Big(\int_{x-\operatorname{sen}x}^{x+\operatorname{sen}x}(x+y)^2\,dy\Big)\,dx=\frac{1}{12}\int_{0}^{\pi}(x+y)^3\Big|_{x-\operatorname{sen}x}^{x+\operatorname{sen}x}dx=$

$\displaystyle\int_{0}^{\pi}\Big(\frac{1}{6}\operatorname{sen}^3 x+2x^2\operatorname{sen}x\Big)\,dx=$

$\displaystyle\frac{1}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^3 x\,dx+(4x\operatorname{sen}x-2(x^2-2)\cos x)\Big|_0^{\pi}=$

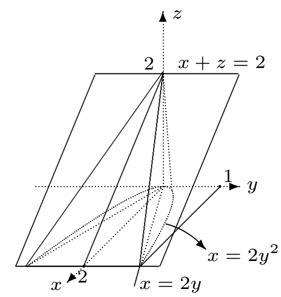
$\displaystyle\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+2(\pi^2-2)=2\Big(\pi^2-\frac{35}{9}\Big).$

x) La curva $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ se escribe $y=(1-\sqrt{x})^2=1-2\sqrt{x}+x$, por lo que el volumen está dado por:



$$\int_0^1\Big(\int_0^{1-x-2\sqrt{x}}\sqrt{xy}\,dy\Big)\,dx=\frac{2}{3}\int_0^1\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^3\,dx\underset{x=u^2}{=}$$
$$\frac{2}{3}\int_0^1 u(1-u)^3 2u\,du=\frac{4}{3}\int_0^1 u^2(1-u)^3\,du=\frac{4}{3}\beta(3,4)=$$
$$\frac{4}{3}\cdot\frac{2!3!}{6!}=\frac{1}{45}.$$

y) $4y^2=x(2-z)$, $z=0$, $x+z=2$. Las superficies se intersecan en los puntos en que $4y^2=x^2$ i.e. $2y=\pm x$. Cuando $z=0$, $4y^2=2x$ i.e. $y=\pm\sqrt{\frac{x}{2}}$, por lo que el volumen es el volumen entre las rectas $y=\pm\frac{1}{2}x$ y el plano $z=2-x$, más el volumen entre $y=\pm\frac{1}{2}x$ y



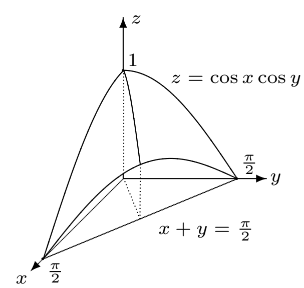
$y=\pm\sqrt{\frac{x}{2}}$ y la superficie $z=2-\dfrac{4y^2}{x}$, por lo tanto (por simetría):

$$2\int_0^2\Big(\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{\frac{x}{2}}}\Big(2-\frac{4y^2}{x}\Big)\,dy\Big)\,dx=2\int_0^2\Big(2y-\frac{4}{3}y^3\Big)\Big|_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{\frac{x}{2}}}=2\int_0^2\Big(\frac{2}{3}\sqrt{2x}-x+\frac{x^2}{6}\Big)\,dx=$$
$$2\Big(\frac{4}{9}\sqrt{2}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{18}\Big)\Big|_0^2=2\frac{2}{9}=\frac{4}{9}.$$

Además, $2\displaystyle\int_0^2\Big(\int_{-\frac{x}{2}}^{\frac{x}{2}}(2-x)\,dy\Big)\,dx=2\int_0^2(2-x)x\,dx=\Big(x^2-\frac{x^3}{3}\Big)\Big|_0^2=4-\frac{8}{3}=\frac{4}{3}$.

Finalmente el volumen es $\frac{4}{9}+\frac{4}{3}=\frac{16}{9}$.

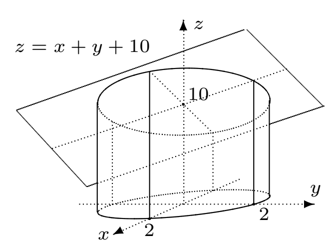
z) $z=\cos x\cos y$, $x+y=\frac{\pi}{2}$, $y=0$, $z=0$.



El volumen está dado por:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}\cos x\cos y\,dy\Big)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\operatorname{sen} y\Big|_0^{\frac{\pi}{2}-x}dx=$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4}.$$

a’) $x^2+y^2=4$, $z=0$, $z=x+y+10$.

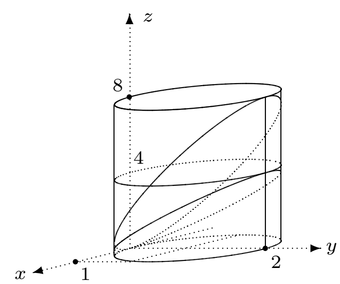


El volumen en este caso es:

$$\int_{-2}^2\Big(\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}(x+10+y)\,dy\Big)\,dx=\int_{-2}^2(2(x+10)\sqrt{4-x^2}+0)\,dx=$$
$$\int_{-2}^2 2x\sqrt{4-x^2}\,dx+20\int_{-2}^2\sqrt{4-x^2}\,dx=$$

$\frac{2}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-2}^{2}+20\Big(\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}+2\operatorname{arcsen}\frac{x}{2}\Big)\Big|_{-2}^{2}=20\Big(0+2\Big(\frac{\pi}{2}-\Big(-\frac{\pi}{2}\Big)\Big)\Big)=40\pi.$

b') $x^2+y^2=2x$, $2x-z=0$, $4x-z=0$.



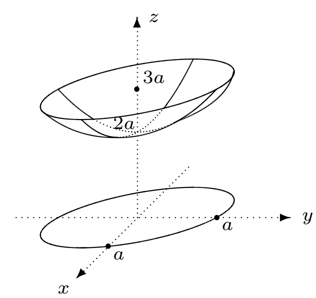
El volumen viene dado por:

$\int_0^2\Big(\int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}}(4x-2x)\,dy\Big)\,dx=\int_0^2 2xy\Big|_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}}dx=$

$4\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\,dx=2^{\frac{3}{2}}\cdot 8\int_0^2\Big(\frac{x}{2}\Big)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{x}{2}}\,\frac{dx}{2}\underset{u=\frac{x}{2}}{=}$

$32\int_0^1 u^{\frac{3}{2}}(1-u)^{\frac{1}{2}}\,du=32\beta(\frac{5}{2},\frac{3}{2})=32\frac{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{3!}=2\Gamma(\frac{1}{2})^2=2\pi$, ya que $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$.

c') $x^2+y^2=a^2$, $az=2a^2+x^2+y^2$, $z=0$.



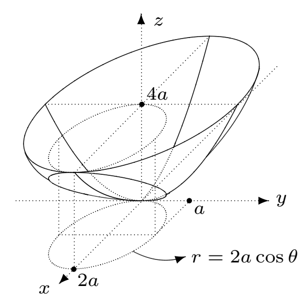
La intersección de las superficies sucede cuando $az=2a^2+a^2\Longrightarrow z=3a$, por lo que el volumen es:

$\frac{1}{a}\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}(2a^2+x^2+y^2)\,dy\,dx=$

$\frac{1}{a}\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^a(2a^2+r^2)\,r\,dr\Big)\,d\theta=$

$\frac{2\pi}{a}\Big(a^2r^2+\frac{1}{4}r^4\Big)\Big|_0^a=\frac{2\pi}{a}\frac{5}{4}a^4=\frac{5}{2}\pi a^3.$

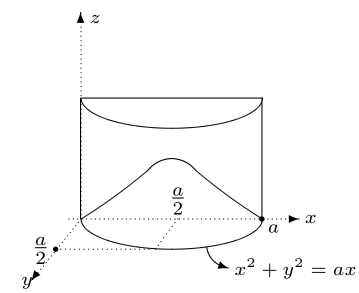
d') $x^2+y^2=2ax$, $z=\dfrac{x^2+y^2}{a}$, $z=0$.



El volumen se calcula desde $z=0$ a $z=\frac{1}{a}(x^2+y^2)$, sobre la región de integración que es el círculo $x^2+y^2=2ax$. Observemos que la intersección de las superficies está sobre el plano $z=\dfrac{2ax}{a}=2x$. Así tenemos que el volumen es: (pasando a coordenadas polares):

$\frac{1}{a}\int_0^{2a}\Big(\int_{-\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax-x^2}}(x^2+y^2)\,dy\Big)\,dx=\frac{1}{a}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_0^{2a\cos\theta}r^3\,dr\Big)\,d\theta=\frac{1}{a}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}4a^4\cos^4\theta\,d\theta=$

$8a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,d\theta=8a^3\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{2}\pi a^3.$



e') $z = \frac{xy}{a}$, $x^2 + y^2 = ax$, $z = 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. El volumen se determina por la superficie $z = \frac{xy}{a}$ integrada sobre el semicírculo $x^2 + y^2 = ax$ (i.e. $x \geq 0$). Usando coordenadas polares y considerando que el círculo se escribe $0 \leq r \leq a\cos\theta$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, entonces el volumen es:

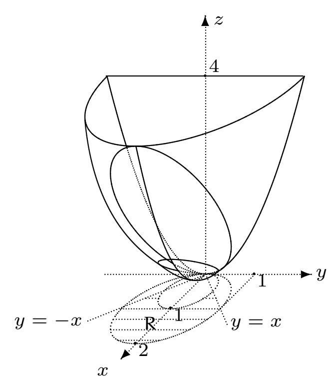
$$\frac{1}{a}\int_0^a \Big(\int_0^{\sqrt{ax-x^2}} xy\,dy\Big)\,dx = \frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^{a\cos\theta} r^3 \operatorname{sen}\theta\cos\theta\,dr\Big)\,d\theta = \frac{1}{a}\frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\theta\operatorname{sen}\theta\,d\theta =$$

$$-\frac{a^3}{4}\frac{\cos^6\theta}{6}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^3}{24}.$$

Otra manera que se puede calcular la integral es:

$$\frac{1}{a}\int_0^a \Big(\int_0^{\sqrt{ax-x^2}} xy\,dy\Big)\,dx = \frac{1}{2a}\int_0^a x(ax - x^2)\,dx = \frac{1}{2a}\int_0^a (ax^2 - x^3)\,dx = \frac{1}{2a}\Big(\frac{ax^3}{3} - \frac{x^4}{4}\Big)\Big|_0^a = \frac{1}{2a}a^4\Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\Big) = \frac{a^3}{24}.$$

f') $x^2 + y^2 = x$, $x^2 + y^2 = 2x$, $z = x^2 + y^2$, $x + y = 0$, $x - y = 0$, $z = 0$.



El volumen se extiende sobre la región R dibujada en la gráfica, desde el plano $z = 0$ hasta $z = x^2 + y^2$. Pasando a coordenadas polares tenemos:

$$\iint\limits_{R}(x^2 + y^2)\,dx\,dy = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \Big(\int_{\cos\theta}^{2\cos\theta} r^3\,dr\Big)\,d\theta =$$

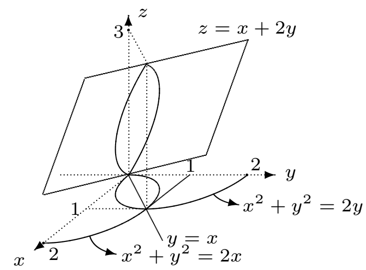
$$\frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r^4\Big|_{\cos\theta}^{2\cos\theta}\,d\theta = \frac{15}{4}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^4\theta\,d\theta =$$

$$\frac{15}{4}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \Big(\frac{\cos 2\theta + 1}{2}\Big)^2\,d\theta = \frac{15}{16}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 2\theta + 2\cos 2\theta + 1)\,d\theta =$$

$$\frac{15}{16}\Big(\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\theta\, 2\,d\theta + \operatorname{sen} 2\theta\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} + \frac{\pi}{2}\Big) = \frac{15}{16}\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\,du + 2 + \frac{\pi}{2}\Big) = \frac{15}{16}\Big(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + 2 + \frac{\pi}{2}\Big) =$$

$$\frac{15}{16}\Big(\frac{3}{4}\pi + 2\Big) = \frac{45\pi}{64} + \frac{15}{8}.$$

g’) $x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=2y$, $z=0$, $z=x+2y$.



Usando coordenadas polares se tiene que las circunferencias se escriben $r = 2\cos\theta$, $r = 2\operatorname{sen}\theta$ y el plano $z = x+2y = r(\cos\theta + 2\operatorname{sen}\theta)$. Así:

$$\int_0^1 \Big(\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{1-\sqrt{1-x^2}} (x+2y)\Big)\,dy\,dx =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \Big(\int_0^{2\operatorname{sen}\theta} r^2(\cos\theta + 2\operatorname{sen}\theta)\,dr\Big)\,d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^{2\cos\theta} r^2(\cos\theta + 2\operatorname{sen}\theta)\,dr\Big)\,d\theta =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{8}{3}(\operatorname{sen}^3\theta\cos\theta + 2\operatorname{sen}^4\theta)\,d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{8}{3}(\cos^4\theta + 2\cos^3\theta\operatorname{sen}\theta)\,d\theta =$$

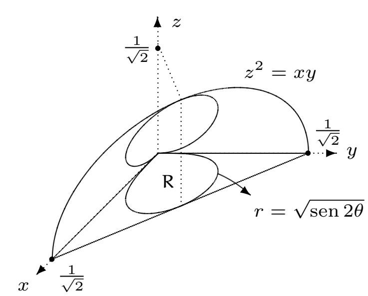
$$\frac{8}{3}\Big[\frac{1}{4}\operatorname{sen}^4\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\Big(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\Big)^2 d\theta - \frac{1}{2}\cos^4\theta\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\Big(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\Big)^2 d\theta\Big] =$$

$$\frac{8}{3}\Big(\frac{1}{16} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1 - 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta)\,d\theta + \frac{1}{8} + \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1 + 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta)\,d\theta\Big) =$$

$$\frac{8}{3}\Big(\frac{3}{16} + \frac{1}{2}\Big(\frac{\pi}{4} - \operatorname{sen}2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 u\,du\Big) + \frac{1}{4}\Big(\frac{\pi}{4} + \operatorname{sen}2\theta\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^2 u\,du\Big)\Big) =$$

$$\frac{8}{3}\Big(\frac{3}{16} + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{16} - \frac{1}{4} + \frac{\pi}{32}\Big) = \frac{8}{3}\Big(-\frac{9}{10} + \frac{9\pi}{32}\Big) = \frac{3\pi}{4} - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}\Big(\frac{\pi}{2} - 1\Big).$$

h’) $z^2 = xy$, $(x^2+y^2)^2 = 2xy$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

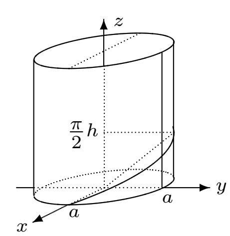


Usando coordenadas polares, $r^2 = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \operatorname{sen}2\theta$ i.e. $r = \sqrt{\operatorname{sen}2\theta}$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Así, el volumen es:

$$\iint_{\mathsf{R}} \sqrt{xy}\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_0^{\sqrt{\operatorname{sen}2\theta}} r^2\sqrt{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}\,dr\Big)\,d\theta =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3}(\operatorname{sen}2\theta)^{\frac{3}{2}}\frac{(\operatorname{sen}2\theta)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}\,d\theta = \frac{1}{3\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^2 2\theta\,d\theta = \frac{1}{3\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^2 u\,du = \frac{1}{3\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{24}.$$

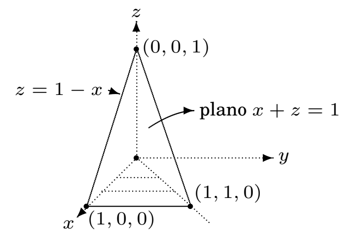
i’) $z = h\arctan\frac{y}{x}$, $x^2+y^2=a^2$, $x=0$, $z=0$, $x\geq 0$, $y \geq 0$.



Pasando a coordenadas polares tenemos $z = h\arctan(\tan\theta) = h\theta$, por lo que:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_0^a h\theta\, r\,dr\Big)\,d\theta = h\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\big(\frac{\pi}{2}\big)^2}{2} = \frac{h\pi^2a^2}{16}.$$

50. Dar el volumen de una pirámide cuyos vértices son $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$, $(0,0,1)$.



Solución $V = \int_0^1 \int_0^x z\, dy\, dx = \int_0^1 \int_0^x (1-x)\, dx\, dy = \int_0^1 x(1-x)\, dy\, dx = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{6}$.

51. Calcular los volúmenes que expresan las siguientes integrales dobles sin integrar. Hacer los gráficos respectivos.

a) $\int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y)\, dy\, dx$

b) $\int_0^2 \int_0^{2-x} (4-x-y)\, dy\, dx$

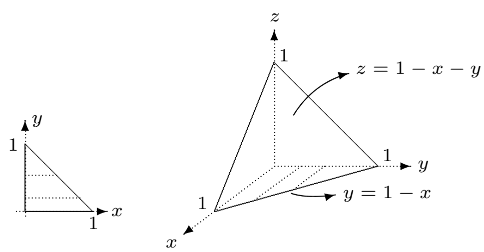
c) $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1-x)\, dy\, dx$

d) $\int_0^2 \int_{2-x}^{2} (4-x-y)\, dy\, dx$

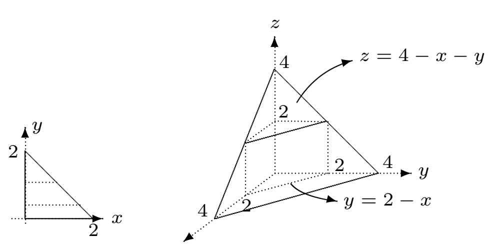
e) $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\, dy\, dx$.

Solución

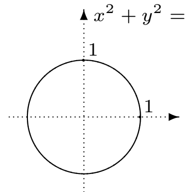
a) $V = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y)\, dy\, dx = \frac{1}{6}$ (volumen de una pirámide).

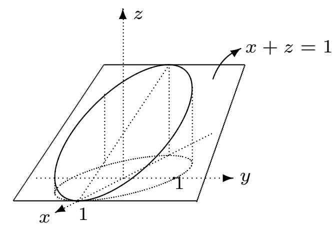


b) $\int_0^2 \int_0^{2-x} (4-x-y)\, dy\, dx = +\frac{1}{3}\,\frac{2\cdot 2\cdot 2}{2} + 2\left(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\right) = \frac{4}{3} + 4 = \frac{16}{3}$, pues es el volumen de una pirámide (superior) y un cilindro de base triangular de altura 2.

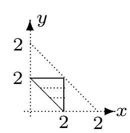


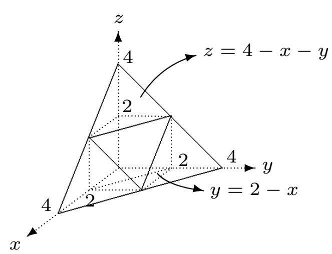
c) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1-x)\,dy\,dx = \frac{1}{2}(\pi 1^2)1 = \frac{\pi}{2}$, pues es la mitad de un cilindro de base π y altura 1.



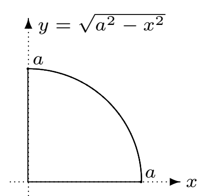


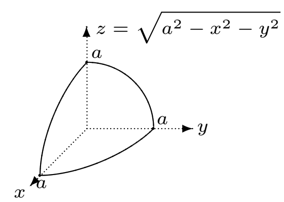
d) $\displaystyle\int_0^2 \int_{2-x}^2 (4-x-y)\,dy\,dx = \left(\frac{1}{2}(2\cdot 2)2\right)\frac{1}{2} = 2$, pues es la mitad del volumen de un cuerpo de base triangular de altura 2.





e) $\displaystyle\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dy\,dx = \frac{1}{8}\frac{4}{3}\pi a^2 = \frac{1}{6}\pi a^2$, pues es un octavo de una esfera de radio a.





52. Determinar el volumen limitado por las superficies siguientes:

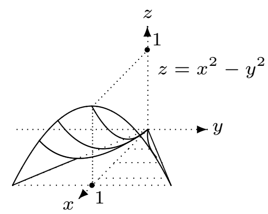
a) $z = x^2 - y^2$, $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$.

b) $x^2 + z^2 = a^2$, $y = 0$, $z = 0$, $y = x$.

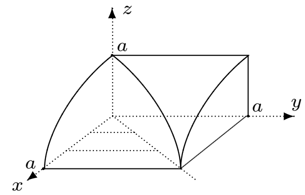
c) $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $x + z = 6$, $z = 0$.

d) $x + y + z = a$, $3x + y = a$, $\dfrac{3}{2}x + y = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Solución

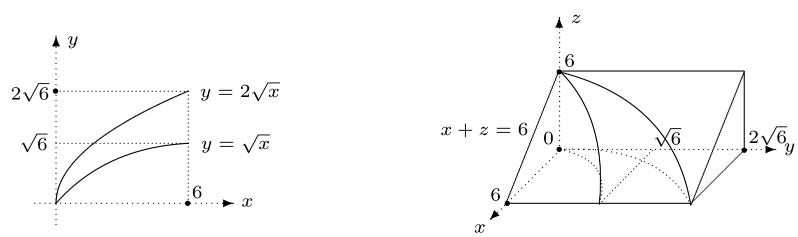


a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x (x^2 - y^2)\,dy\,dx = \int_0^1 \left(x^2 y - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^x dx =$
$\displaystyle\frac{2}{3}\int_0^1 x^3\,dx = \frac{2}{3}\frac{1}{4}x^4\Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$

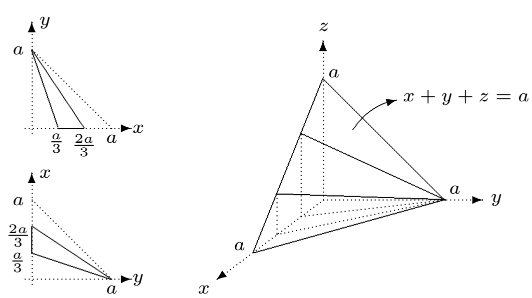


b) $\displaystyle\int_0^a \int_0^x \sqrt{a^2 - x^2}\,dy\,dx = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,x\,dx =$
$\displaystyle -\frac{1}{2}(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\frac{2}{3}\Big|_0^a = \frac{1}{3}a^3.$

c) $\displaystyle\int_0^6 \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} (6 - x)\,dy\,dx = \int_0^6 (6 - x)\sqrt{x}\,dx = \left(6\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right)\Big|_0^6 = \frac{72\sqrt{6}}{3} - \frac{72\sqrt{6}}{5} = \frac{48\sqrt{6}}{5}.$



d) $\displaystyle V = \int_0^a \int_{\frac{a-y}{3}}^{\frac{2a-y}{3}} (a - x - y)\,dx\,dy = \int_0^a \left(ax - yx - \tfrac{1}{2}x^2\right)\Big|_{x=\frac{a-y}{3}}^{x=\frac{2}{3}(a-y)} dy =$
$\displaystyle\int_0^a \left(\frac{1}{3}(a-y)^2 - \frac{1}{2}\frac{(a-y)^2}{3}\right) dy = \tfrac{1}{6}\int_0^a (a-y)^2\,dy = \tfrac{1}{6}\int_0^a u^2\,du = \tfrac{1}{18}a^3.$



53. Determinar el volumen de los cuerpos limitados por las superficies siguientes:

a) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, $y = \dfrac{b}{a}x$, $y = 0$, $z = 0$

b) $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + y^2 + a^2 = z^2$

c) $2(x^2 + y^2) - z^2 = 0$, $x^2 + y^2 + a^2 = z^2$

d) $2az = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$, (volumen dentro del paraboloide)

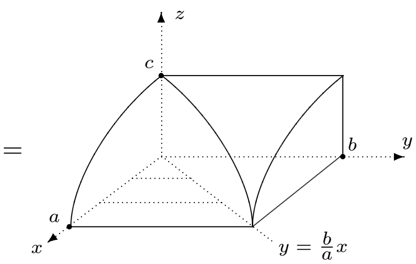
e) $x^2 + y^2 = 2ax$, $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 0$.

f) $z = a\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$, $x^2 + y^2 = b^2$, $z = 0$.

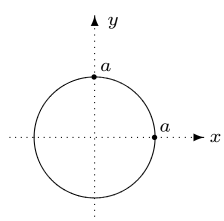
g) $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2\dfrac{x}{a}$, $z = 0$.

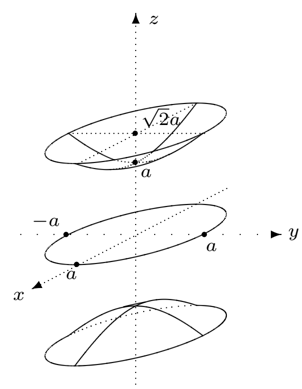
Solución

a) $\displaystyle\int_0^a \int_0^{\frac{b}{a}x} c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,dy\,dx = \frac{1}{2}abc\int_0^a 2\frac{x}{a}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,dx = -\frac{1}{2}abc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{2}{3}\Big|_0^a = \frac{1}{3}abc.$



b) Las superficies se intersecan en $z = \pm\sqrt{2}a$. En efecto, sustituyendo la ecuación $x^2 + y^2 = a^2$ en $x^2 + y^2 + a^2 = z^2$ se tiene $z^2 = 2a^2$. El volumen es:
$V = 2\displaystyle\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2 + a^2}\,dy\,dx = 2\int_0^{2\pi}\int_0^a \sqrt{r^2 + a^2}\,r\,dr\,d\theta = 2\pi(r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}\frac{2}{3}\Big|_0^a = \frac{4}{3}\pi\left[(2a^2)^{\frac{3}{2}} - (a^2)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{4}{3}\pi a^3(2\sqrt{2} - 1).$



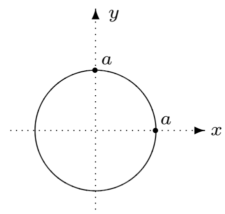


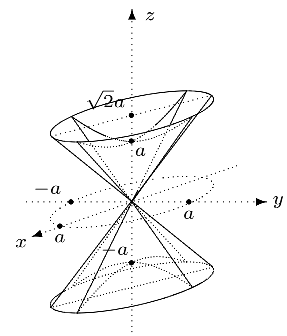
c) Sustituyendo $x^2 + y^2 + a^2 = z^2$ en $2(x^2 + y^2) - z^2 = 0$, tenemos $z^2 = 2a^2 \Longrightarrow z = \pm\sqrt{2}a$, entonces al proyectar la intersección de las superficies sobre el plano $z = 0$, se tiene que $x^2 + y^2 = a^2$.

Así, $V = 2\displaystyle\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \left(\sqrt{x^2 + y^2 + a^2} - \sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2}\right)dy\,dx =$

$2\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^a \left(\sqrt{r^2 + a^2} - \sqrt{2}r\right)r\,dr\,d\theta = 2\pi\int_0^a \sqrt{a^2 + r^2}\,2r\,dr - 4\pi\sqrt{2}\int_0^a r^2\,dr =$

$2\pi(r^2+a^2)^{\frac{3}{2}}\dfrac{2}{3}\Big|_0^a - 4\pi\sqrt{2}\dfrac{r^3}{3}\Big|_0^a = \dfrac{4\pi}{3}((2a^2)^{\frac{3}{2}} - a^3) - \dfrac{4\pi}{3}\sqrt{2}a^3 = \dfrac{4\pi}{3}a^3(2\sqrt{2}-1-\sqrt{2}) =$
$\dfrac{4\pi}{3}a^3(\sqrt{2}-1)$.



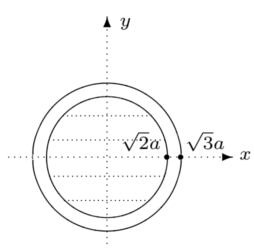


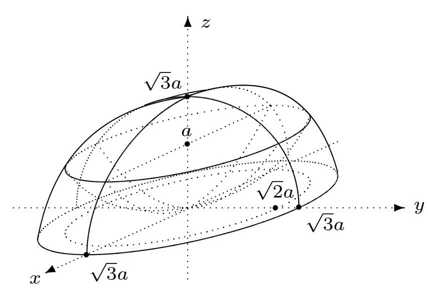
d) Como $2az = x^2+y^2$, $x^2+y^2+z^2 = 3a^2 \Longrightarrow z^2+2az-3a^2 = 0 \Longrightarrow (z-a)(z+3a) = 0$, es decir que las superficies se intersecan en $z = a$, por lo que al proyectar esta intersección sobre el plano $z = 0$, se tiene $x^2+y^2 = 2a^2$. El volumen es:

$$V = \int_{-\sqrt{2}a}^{\sqrt{2}a}\int_{-\sqrt{2a^2-x^2}}^{\sqrt{2a^2-x^2}}\left(\sqrt{3a^2-x^2-y^2} - \frac{x^2+y^2}{2a}\right)dy\,dx =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}a}\left(\sqrt{3a^2-r^2} - \frac{r^2}{2a}\right)r\,dr\,d\theta = -\pi\int_0^{\sqrt{2}a}(3a^2-r^2)^{\frac{1}{2}}(-2r\,dr) - \frac{\pi}{a}\int_0^{\sqrt{2}a} r^3\,dr =$$

$$\frac{2}{3}\pi((3a^2)^{\frac{3}{2}} - (a^2)^{\frac{3}{2}}) - \frac{\pi}{4a}(4a^4) = \pi a^3\left(2\sqrt{3} - \frac{2}{3} - 1\right) = \pi a^3\frac{6\sqrt{3}-5}{3}.$$

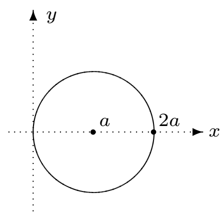


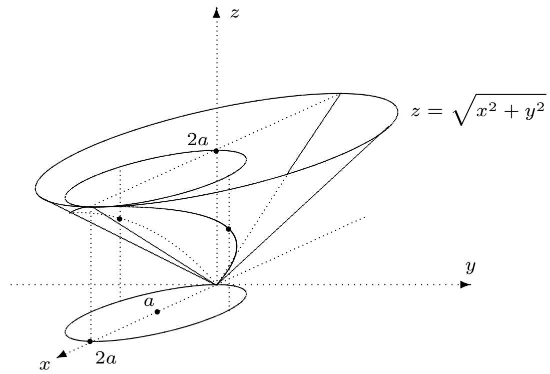


e) Puesto que $z = \sqrt{x^2+y^2}$ y la región es el círculo de centro $(a,0)$ y radio a, entonces el volumen está dado por:

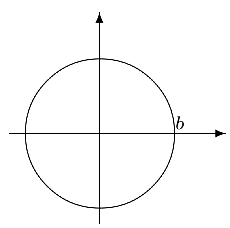
$$V = \int_0^{2a}\int_{-\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2a\cos\theta} r^2\,dr\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}(2a\cos\theta)^3 d\theta =$$

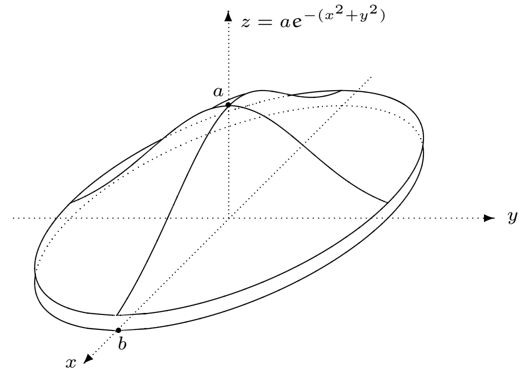
$$\frac{8a^3}{3}2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\,d\theta = \frac{16a^3}{3}\frac{2}{3} = \frac{32}{9}a^3.$$





f) $\displaystyle\int_{-b}^{b}\int_{-\sqrt{b^2-x^2}}^{\sqrt{b^2-x^2}} a\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}dy\,dx = a\int_0^{2\pi}\int_0^{b}\mathrm{e}^{-r^2}r\,dr\,d\theta = -a\pi\int_0^{b}\mathrm{e}^{-r^2}(-2r\,dr) =$
$\displaystyle -a\pi\mathrm{e}^{-r^2}\Big|_0^b = a\pi(1-\mathrm{e}^{-b^2})$.





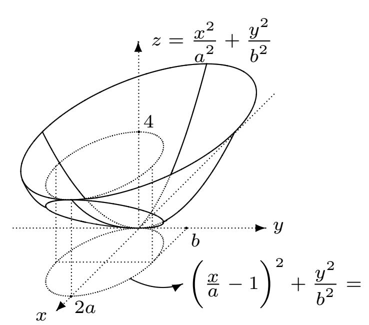
g) Observemos que $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} = 2\dfrac{x}{a} \iff \left(\dfrac{x-a}{a}\right)^2 + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ i.e. $\left(\dfrac{x}{a}-1\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 = 1$.

En este caso las superficies se intersecan en $z = 2\dfrac{x}{a}$, $0 \leq x \leq 2a$ y cuando $x = 2a$ se tiene $z = 4$.

El volumen es $V = \displaystyle\int_0^{2a}\int_{-b\sqrt{2\frac{x}{a}-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{2\frac{x}{a}-\frac{x^2}{a^2}}}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dy\,dx =$

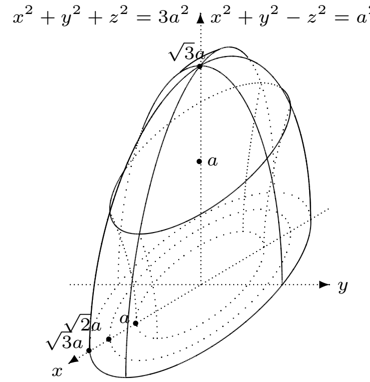
$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta} abr^2\,r\,dr\,d\theta = \frac{16}{4}ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,d\theta =$

$\displaystyle 8ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,d\theta = 8ab\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi ab$, usando el cambio de variable $\dfrac{x}{a} = r\cos\theta$, $\dfrac{y}{b} = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, con Jacobiano $J = abr$.



54. Determinar la razón en que el hiperboloide $x^2+y^2-z^2 = a^2$, divide el volumen de la esfera $x^2+y^2+z^2 \leq 3a^2$.

Solución Las superficies se intersecan en $z = \pm a$. El volumen de la esfera menos el recorte del elipsoide es:



$V^* = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{a\sqrt{2}} \sqrt{3a^2-r^2}\,r\,dr\,d\theta -$
$2\int_0^{2\pi}\int_a^{a\sqrt{2}} \sqrt{r^2-a^2}\,r\,dr\,d\theta =$
$2\pi(-\dfrac{2}{3})(3a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{a\sqrt{2}} - 2\pi(\dfrac{2}{3})(r^2-a^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_a^{a\sqrt{2}} =$
$\frac{4}{3}\pi a^3(3\sqrt{3}-1) - \frac{4}{3}\pi a^3 = \frac{4}{3}\pi a^3(3\sqrt{3}-2)$.

El volumen del elipsoide es el cilindro de base $\sqrt{2}a$ y altura $2a$ menos el recorte del elipsoide que es $\frac{4}{3}\pi a^3$, es decir $2a\pi 2a^2 - \frac{4}{3}\pi a^3 = \frac{8}{3}\pi a^3$. Así la razón es:

$$V^*/\,[\,\tfrac{8}{3}\pi a^3\,] = \frac{3\sqrt{3}-2}{2}.$$

55. Calcular el volumen $V = \iint\limits_{R} f$ en los siguientes casos:

a) $f(x,y) = \begin{cases} 1-x-y & \text{si } x+y\le 1, \\ 0 & \text{en los otros puntos de } R=[\,0,1\,]\times[\,0,1\,]. \end{cases}$

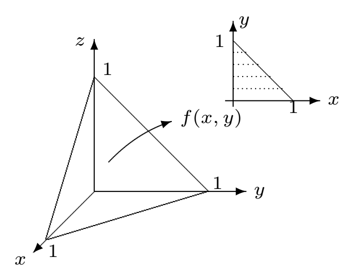
b) $f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{si } x^2\le y\le 2x^2, \\ 0 & \text{en los demás puntos de } R=[\,0,1\,]\times[\,0,1\,]. \end{cases}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & \text{si } x^2+y^2\le 1, \\ 0 & \text{en los demás puntos de } R=[\,-1,1\,]\times[\,-1,1\,]. \end{cases}$

d) $f(x,y) = \begin{cases} (x+y)^{-2} & \text{si } x\le y\le 2x, \\ 0 & \text{en los demás puntos de } R=[\,1,2\,]\times[\,1,4\,]. \end{cases}$

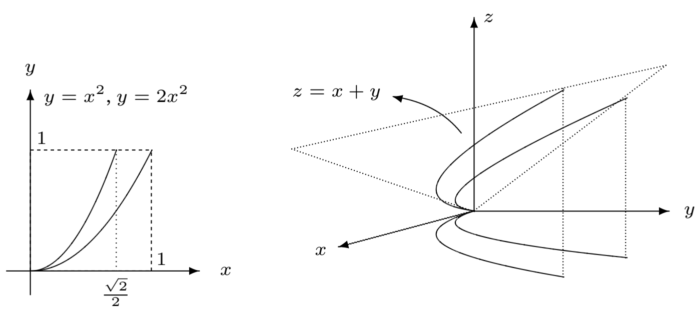
Solución

a) Se sabe que:

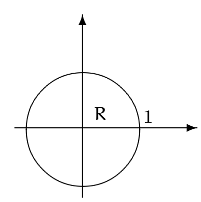


$V = \iint\limits_{R} f(x,y)dxdy = \int_0^1\left(\int_0^{1-x}(1-x-y)dy\right)dx =$
$\int_0^1 (-xy - \frac{1}{2}y^2 + y)\Big|_0^{1-x} dx = \dfrac{1}{2}\int_0^1 (x^2-2x+1)dx =$
$\left(\dfrac{1}{6}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}x\right)\Big|_0^1 = \dfrac{1}{6}.$

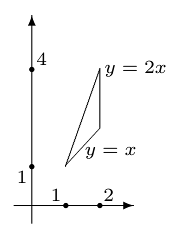
b) Tenemos que $V = \iint\limits_{R} f(x,y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{\frac{y}{2}}}^{\sqrt{y}} (x+y)dx \right) dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2 + xy\right)\Big|_{\sqrt{\frac{y}{2}}}^{\sqrt{y}} dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}y + y^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}y - \frac{1}{\sqrt{2}}y^{\frac{3}{2}}\right)dy = \int_0^1 \left(y^{\frac{3}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}y^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{4}y\right)dy = \left(\frac{\sqrt{2}}{5}(\sqrt{2}-1)y^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{8}y^2\right)\Big|_0^1 = \frac{21}{40} - \frac{\sqrt{2}}{5}$.



c) $\iint\limits_{R} f(x,y)dxdy = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2)dy \right) dx = \int_{-1}^{1} (x^2y + \frac{1}{3}y^3)\Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^{1} (\frac{4}{3}x^2\sqrt{1-x^2} + \frac{2}{3}\sqrt{1-x^2})dx = (\frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x + \frac{1}{3}x^3\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{6}x\sqrt{1-x^2}\Big|_{-1}^{1} = \operatorname{arcsen} 1 = \frac{\pi}{2}$.



d) $\iint\limits_{R} f(x,y)dxdy = \int_1^2 \left(\int_x^{2x} \frac{1}{(x+y)^2} dy \right) dx = \int_1^2 -\frac{1}{x+y}\Big|_x^{2x} dx = \int_1^2 \left(-\frac{1}{3x} + \frac{1}{2x}\right) dx = \int_1^2 \frac{1}{6x} dx = \frac{1}{6}\ln 2$.

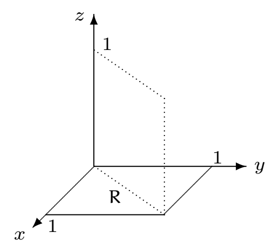


56. Sea f una función definida en el rectángulo $R = [0,1] \times [0,1]$ del siguiente modo:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

Demostrar la existencia de la integral doble $\iint\limits_{R} f$ y que es igual a cero.

Solución Dado que f es continua salvo en un conjunto de contenido nulo, i.e. $A = \{(x,x)/0 \leq x \leq 1\}$, entonces f es integrable. Así tenemos que $\displaystyle\iint_R f(x,y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dx\right)dy$, pero $\displaystyle\int_0^1 f(x,y)dx = 0$, ya que $f(x,y) = 0$, $\forall x \in [0,1]$, salvo para $f(y,y) = 1$, entonces $\displaystyle\iint_R f(x,y)dxdy = \int_0^1 0dy = 0$.



57. Calcular la integral doble y dibuje la región de integración R.

a) $\displaystyle\iint_R x\cos(x+y)dxdy$, R es el triángulo de vértices $(0,0)$, $(\pi,0)$, (π,π).

b) $\displaystyle\iint_R (1+x)\operatorname{sen} y dxdy$, R es el trapezoide $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,2)$, $(0,1)$.

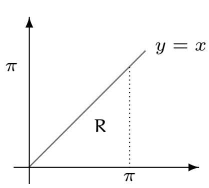
c) $\displaystyle\iint_R e^{x+y}dxdy$, $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/|x|+|y| \leq 1\}$.

d) $\displaystyle\iint_R x^2y^2dxdy$, R es la parte acotada del primer cuadrante situada entre las hipérbolas $xy = 1, xy = 2$ y las rectas $y = x$, $y = 4x$.

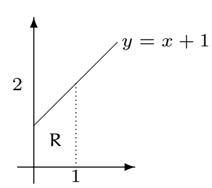
e) $\displaystyle\iint_R (x^2-y^2)dxdy$, R es la región limitada por $y = \operatorname{sen} x$ en el intervalo $[0,\pi]$.

Solución

a) $\displaystyle\iint_R x\cos(x+y)dxdy = \int_0^\pi \left(\int_0^x x\cos(x+y)dy\right)dx = \int_0^\pi x\operatorname{sen}(x+y)\Big|_0^x dx = \int_0^\pi x(\operatorname{sen}2x - \operatorname{sen}x)dx = \left(-\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\operatorname{sen}2x + x\cos x - \operatorname{sen}x\right)\Big|_0^\pi = -\frac{3\pi}{2}$.



b) $\displaystyle\iint_R (1+x)\operatorname{sen} y dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{x+1} (1+x)\operatorname{sen} y dy\right)dx = -\int_0^1 (1+x)\left(\cos(x+1)-1\right)dx = \int_0^1 (1+x)dx - \int_0^1 (1+x)\cos(x+1)dx = \left(x+\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^1 - \left(\cos(x+1)+(x+1)\operatorname{sen}(x+1)\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{2} - \cos 2 - 2\operatorname{sen}2 + \cos 1 + \operatorname{sen}1$.



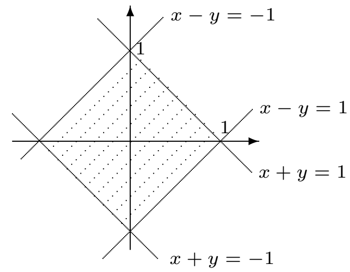
c) $\displaystyle\iint_R e^{x+y}dxdy = \int_{-1}^0 \left(\int_{-1-x}^{1+x} e^{x+y}dy\right)dx + \int_0^1 \left(\int_{x-1}^{1-x} e^{x+y}dy\right)dx =$

$$\int_{-1}^{0} \mathrm{e}^{x+y}\Big|_{-1-x}^{1+x} dx + \int_{0}^{1} \mathrm{e}^{x+y}\Big|_{x-1}^{1-x} dx =$$

$$\int_{-1}^{0} (\mathrm{e}^{2x+1} - \mathrm{e}^{-1})dx + \int_{0}^{1} (\mathrm{e} - \mathrm{e}^{2x-1})dx =$$

$$\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x+1} - \mathrm{e}^{-1}x\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(\mathrm{e}x - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x-1}\right)\Big|_{0}^{1} =$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{e} - \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}}{2} + \frac{\mathrm{e}^{-1}}{2} = \mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1}.$$



d) $$\iint_R x^2y^2 dxdy = A = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\int_{\frac{1}{x}}^{4x} x^2y^2 dy\right) dx +$$

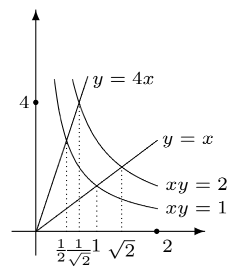
$$\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \left(\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} x^2y^2 dy\right) dx + \int_{1}^{\sqrt{2}} \left(\int_{x}^{\frac{2}{x}} x^2y^2 dy\right) dx =$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{3}x^2y^3\Big|_{\frac{1}{x}}^{4x} dx + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{1}{3}x^2y^3\Big|_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} dx + \int_{1}^{\sqrt{2}} \frac{1}{3}x^2y^3\Big|_{x}^{\frac{2}{x}} dx =$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{64x^5}{3} - \frac{1}{3x}\right) dx + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{7}{3x} dx + \int_{1}^{\sqrt{2}} \left(\frac{8}{3x} - \frac{x^5}{3}\right) dx =$$

$$\left(\frac{32}{9}x^6 - \frac{1}{3}\ln x\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{7}{3}\ln x\Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} + \left(\frac{8}{3}\ln x - \frac{x^6}{18}\right)\Big|_{1}^{\sqrt{2}} = \frac{7}{18} - \frac{\ln 2}{6} + \frac{\ln 128}{6} + \frac{4}{3}\ln 2 - \frac{7}{18} =$$

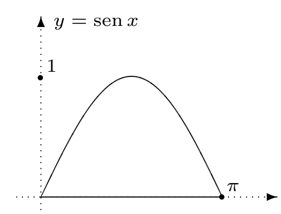
$$\frac{7}{3}\ln 2.$$



e) $$\iint_R (x^2 - y^2)dxdy = \int_{0}^{\pi} \left(\int_{0}^{\operatorname{sen} x} (x^2 - y^2)dy\right) dx =$$

$$\int_{0}^{\pi} (x^2y - \frac{1}{3}y^3)\Big|_{0}^{\operatorname{sen} x} dx = \int_{0}^{\pi} (x^2 \operatorname{sen} x - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x)dx =$$

$$\left(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{9} - \frac{9x^2 - 20}{9}\right)\cos x + 2x \operatorname{sen} x\Big|_{0}^{\pi} = \frac{9\pi^2 - 40}{9} = \pi^2 - \frac{40}{9}.$$



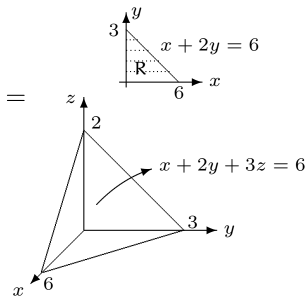
58. Una pirámide está determinada por los tres planos coordenados y el plano $x+2y+3z = 6$. Representar el sólido y calcular el volumen por integral doble.

Solución El volumen de la pirámide es:

$$V = \iint_R \frac{1}{3}(6-x-2y)dxdy = \frac{1}{3}\int_0^6 \Big(\int_0^{\frac{1}{2}(6-x)} (6-x-2y)dy\Big)dx =$$

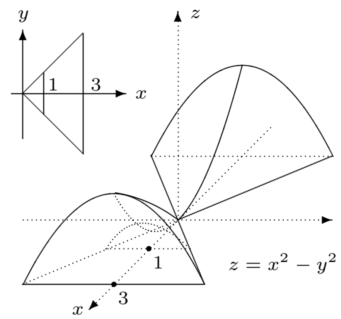
$$\frac{1}{3}\int_0^6 ((6-x)y-y^2)\Big|_0^{\frac{1}{2}(6-x)} dx = \frac{1}{12}\int_0^6 (x-6)^2 dx =$$

$$\frac{1}{36}x(x^2-18x+108)\Big|_0^6 = 6.$$



59. Un sólido está limitado por la superficie $z = x^2 - y^2$, el plano xy y los planos $x = 1$, $x = 3$.

Representar el sólido y calcular su volumen por integración doble.



Solución El volumen está comprendido entre las rectas $y = \pm x$, para $x \in [1,3]$, entonces:

$$V = \int_1^3 \int_{-x}^{x} zdydx = \int_1^3 \int_{-x}^{x} (x^2-y^2)dydx =$$

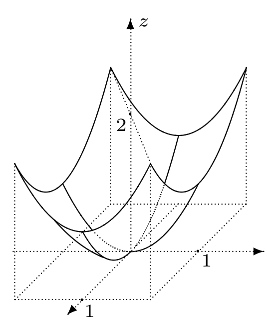
$$\int_1^3 (x^2y - \frac{1}{3}y^3)\Big|_{-x}^{x} dx = \int_1^3 \frac{4}{3}x^3 dx = \frac{1}{3}x^4\Big|_1^3 = \frac{80}{3}.$$

60. Calcular el volumen determinado por la función $f(x,y)$ en la región R:

a) $f(x,y) = x^2+y^2$, $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |x| \le 1, \, |y| \le 1\}$.

b) $f(x,y) = 3x+y$, $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 4x^2+9y^2 \le 36, \; x \ge 0, \; y \ge 0\}$.

c) $f(x,y) = 2x+y+20$, $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \le 16\}$.



Solución

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(x^2+y^2)dxdy = \int_{-1}^{1}\Big(\frac{x^3}{3}+y^2x\Big)\Big|_{-1}^{1}dy = \int_{-1}^{1}\Big(2y^2+\frac{2}{3}\Big)dy = \Big(\frac{2}{3}y^3+\frac{2}{3}y\Big)\Big|_{-1}^{1} = \frac{8}{3}.$

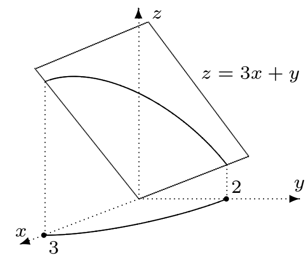
b) La región está limitada por el plano $3x+y-z=0$ y el primer cuadrante de la elipse $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4} = 1$ y aquí $f(x,y) \ge 0$.

$V = \int_0^3 \int_0^{2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}} f(x,y)dydx =$

$\int_0^3 \int_0^{\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}} (3x + y)dydx = \int_0^3 (3xy + \frac{1}{2}y^2)\Big|_0^{\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}} dx =$

$\int_0^3 \left(2x\sqrt{9-x^2} + \frac{2}{9}(9-x^2)\right) dx =$

$\left(-\frac{2}{3}(9-x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{27}x^3 + 2x\right)\Big|_0^3 = 22.$

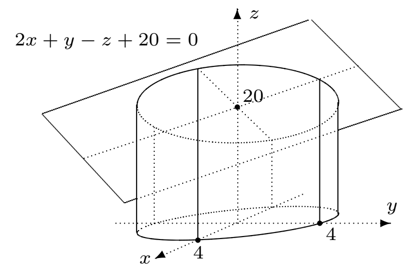


c) Se observa que en el círculo de radio 4 y centro $(0,0)$, $f(x,y)$ es siempre positiva. Así:

$V = \int_{-4}^4 \int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} f(x,y)dydx =$

$\int_{-4}^4 \int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} (2x + y + 20)dydx =$

$\int_{-4}^4 (2xy + \frac{1}{2}y^2 + 20y)\Big|_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} dx =$



$\int_{-4}^4 4(x+10)\sqrt{16-x^2}dx = 4\left((\frac{1}{2}x\sqrt{16-x^2} + 8 \operatorname{arcsen}\frac{x}{4})10 - \frac{1}{3}(16-x^2)^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_{-4}^4 =$

$320\,(\operatorname{arcsen} 1 - (-\operatorname{arcsen} 1)) = 320\pi.$

2.6 Masa, centro de gravedad, momentos de inercia, aplicaciones

Recordemos que los momentos estáticos están dados por $m_x = \iint_R y\,dx\,dy$, $m_y = \iint_R x\,dx\,dy$.

La masa está dada por $m = \iint_R dx\,dy$.

Los centros de gravedad están dados por $\bar{x} = \frac{m_y}{m}$, $\bar{y} = \frac{m_x}{m}$. Los momentos de inercia respecto al eje x es $I_x = \iint_R y^2\,dx\,dy$ y respecto al eje y, $I_y = \iint_R x^2\,dx\,dy$.

61. Usando integración doble, calcular los momentos estáticos de las figuras planas homogéneas siguientes:

a) del rectángulo de lados a y b, con respecto al lado a.

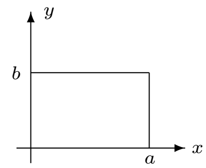
b) del semicírculo con respecto al diámetro.

c) del círculo respecto a una tangente.

d) del triángulo de base a y b, respecto a la base.

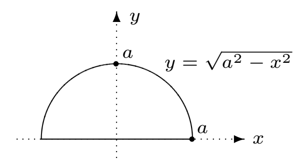
Solución

a) En este caso tenemos que el momento que buscamos es:



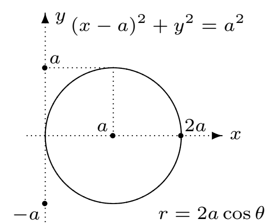
$$m_x = \int_0^b \Big(\int_0^b y\,dy \Big)\,dx = \frac{1}{2}ab^2.$$

b) El momento que buscamos es:



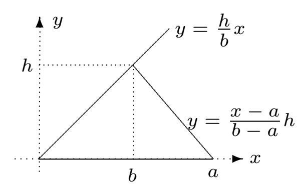
$$m_x = \int_{-a}^{a} \Big(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} y\,dy \Big)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} \big(a^2 - x^2\big)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\big(a^2x - \tfrac{1}{3}x^3\big)\Big|_{-a}^{a} = a^3 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}a^3.$$

c) Tomando el círculo $(x-a)^2 + y^2 = a^2$, el momento de inercia respecto a una tangente (eje y) es:



$$m_y = \int_0^{2a} \Big(\int_{-\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax-x^2}} x\,dy \Big)\,dx$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^{2a\cos\theta} \cos\theta\, r^2\,dr \Big)\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 8\frac{a^3}{3}\cos^4\theta\,d\theta$$
$$= \frac{16}{3}a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\,d\theta = \frac{16}{3}a^3 \cdot \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{\pi}{2} = \pi a^3.$$

d) Tomando como base el eje x, el momento es:



$$m_y = \int_0^b \Big(\int_0^{\frac{h}{b}x} x\,dy \Big)\,dx + \int_b^a \Big(\int_0^{\frac{x-a}{b-a}h} x\,dy \Big)\,dx$$
$$= \int_0^b \frac{h}{b}x^2\,dx - \int_b^a h\frac{x(x-a)}{b-a}\,dx$$
$$= \frac{1}{3}hb^2 + \frac{h\big(a^2 + ab - 2b^2\big)}{6} = \frac{ah(a+b)}{6}.$$

62. Usando integración doble, determinar los centros de gravedad de las figuras planas homogéneas siguientes:

a) la figura limitada por mitad superior de la elipse la cual se apoya en el eje mayor.

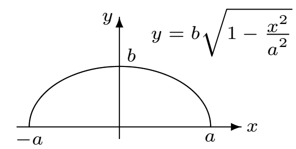
b) la figura limitada por la sinusoide $y = \operatorname{sen} x$, el eje x y la recta $x = \frac{\pi}{4}$.

c) del segmento circular correspondiente al ángulo central 2α, radio a.

d) de la figura limitada por la curva cerrada $y^2 = x^2 - x^4$, $x \geq 0$.

Solución

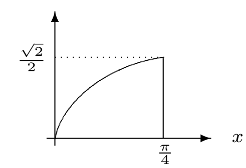
a) Sabemos que $m = \frac{1}{2}\pi ab$. Además:



$$\bar{y} = \frac{1}{m}\int_{-a}^{a}\Big(\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} y\,dy\Big)\,dx = \frac{1}{m}\int_0^{\pi}\Big(\int_0^1 ab^2r^2\,dr\Big)\operatorname{sen}\theta\,d\theta$$
$$= \frac{\frac{1}{3}ab^2}{\frac{1}{2}\pi ab}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}\theta\,d\theta = \frac{4b}{3\pi}.$$

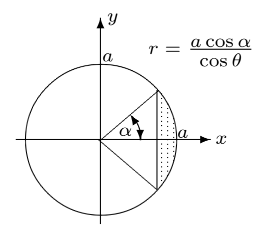
$$\bar{x} = \frac{1}{m}\int_{-a}^{a}\Big(\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} x\,dy\Big)\,dx = 0.$$

b) Se tiene que:



$$m = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\Big(\int_0^{\operatorname{sen}x} dy\Big)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{sen}x\,dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2},$$
$$\bar{y} = \frac{1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\Big(\int_0^{\operatorname{sen}x} y\,dy\Big)\,dx = \frac{1}{2m}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{1}{2m}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\Big(\frac{1-\cos 2x}{2}\Big)\,dx$$
$$= \frac{1}{2m}\Big(\frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen}2x}{2}\Big)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2-\sqrt{2}}\Big(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\Big) = \frac{1}{8}\Big(\frac{\pi}{2} - 1\Big)(2+\sqrt{2}).$$
$$\bar{x} = \frac{1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\Big(\int_0^{\operatorname{sen}x} x\,dy\Big)\,dx = \frac{1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\operatorname{sen}x\,dx = \frac{1}{m}(\operatorname{sen}x - x\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$= \frac{2}{2-\sqrt{2}}\Big(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\Big) = \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\Big(1 - \frac{\pi}{4}\Big) = (\sqrt{2}+1)\Big(1 - \frac{\pi}{4}\Big).$$

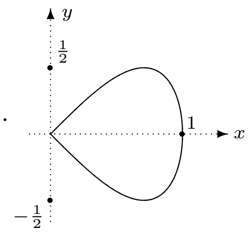
c) Tenemos que:



$$m = \int_{a\cos\alpha}^{a}\Big(\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy\Big)\,dx = \int_{-\alpha}^{\alpha}\Big(\int_{a\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}}^{a} r\,dr\Big)\,d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-\alpha}^{\alpha}\big(a^2 - a^2\cos^2\theta\sec^2\theta\big)\,d\theta$$
$$= \frac{a^2}{2}(\theta - \cos^2\alpha\tan\theta)\Big|_{-\alpha}^{\alpha} = a^2(\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha).$$
$$\bar{x} = \frac{1}{m}\int_{-\alpha}^{\alpha}\Big(\int_{a\frac{\cos\alpha}{\cos\theta}}^{a}\cos\theta\,r^2\,dr\Big)\,d\theta = \frac{1}{3m}\int_{-\alpha}^{\alpha}\Big(a^3 - \frac{a^3\cos^3\alpha}{\cos^3\theta}\Big)\cos\theta\,d\theta$$
$$= \frac{a^3}{3m}\int_{-\alpha}^{\alpha}\big(\cos\theta - \cos^3\alpha\sec^2\theta\big)\,d\theta = \frac{a^3}{3m}\big(\operatorname{sen}\theta - \cos^3\alpha\tan\theta\big)\Big|_{-\alpha}^{\alpha}$$
$$= \frac{2a^3\cdot\operatorname{sen}^3\alpha}{3a^2(\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)} = \frac{2a\operatorname{sen}^3\alpha}{3(\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)}.$$

$\bar{y} = 0$ por simetría.

d) Podemos escribir $y = \pm x\sqrt{1-x^2}$, $0 \le x \le 1$, i.e.



$$m = \int_0^1 \Big(\int_{-x\sqrt{1-x^2}}^{x\sqrt{1-x^2}} dy\Big)\, dx = 2\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\, dx = -\frac{2}{3}\big(1-x^2\big)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\int_0^1 \Big(\int_{-x\sqrt{1-x^2}}^{x\sqrt{1-x^2}} x\, dy\Big)\, dx = \frac{2}{m}\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\, dx$$

$$\underset{x^2=u}{=} \frac{1}{m}\int_0^1 \sqrt{u}\sqrt{1-u}\, du = \frac{3}{2}\beta(\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2}) = \frac{3}{2}\,\frac{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{2!} = \frac{3}{16}\pi, \text{ pues } \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

$\bar{y} = 0$ por simetría.

63. Determinar los momentos de inercia de las figuras planas homogéneas siguientes:

a) círculo de radio a respecto a una tangente.

b) elipse respecto a su centro.

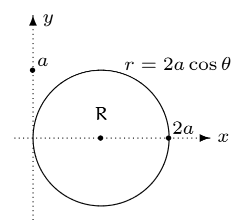
c) del rectángulo de lados a y b, con respecto al punto de intersección de las diagonales.

d) del triángulo isósceles, de base a y la altura h, con respecto a su vértice.

e) del círculo de radio a, respecto al punto situado sobre su circunferencia.

Solución

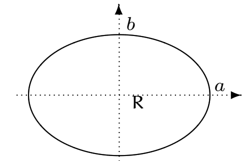
a) Tomando el círculo $(x-a)^2 + y^2 = a^2$ (i.e. $r = 2a\cos\theta$, $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$), calculemos:



$$I_y = \iint_R x^2\, dx\, dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^{2a\cos\theta} r^3\cos^2\theta\, dr\Big) d\theta$$

$$= \frac{16}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^4\cos^6\theta\, d\theta = 8a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6\theta\, d\theta = 4a^4\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{\pi}{2} = \frac{5}{4}\pi a^4.$$

b) Tomamos el centro de la figura en el origen de coordenadas, entonces debemos calcular $I_0 = \iint_R \big(x^2+y^2\big)\, dx\, dy$. Es suficiente determinar:

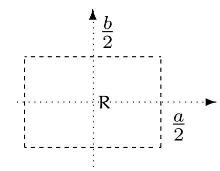


$$\iint_R x^2\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^1 a^2 r^3\cos^2\theta\, ab\, dr\Big) d\theta$$

$$= a^3 b\int_0^1 r^3\, dr \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta = a^3 b\frac{1}{4}4\frac{\pi}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}a^3 b\pi,$$

i.e. $\iint_R y^2\, dx\, dy = \frac{1}{4}ab^3\pi$ por razones de simetría. Así, $I_0 = \frac{1}{4}ab\big(a^2+b^2\big)\pi$.

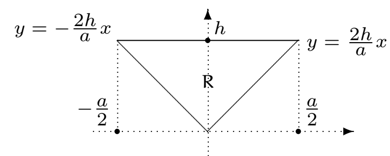
c) Tomemos el origen en el centro del rectángulo, entonces:



$$\iint\limits_{R} y^2\,dx\,dy = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \Big(\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2\,dx \Big)\,dy = \frac{1}{12}ab^3.$$

Por simetría $\iint\limits_{R} x^2\,dx\,dy = \frac{1}{12}a^3b$, por lo que $I_0 = \iint\limits_{R} (x^2+y^2)\,dx\,dy = \frac{1}{12}ab\big(a^2+b^2\big)$.

d) Tomando el origen en el vértice del triángulo (ver el dibujo adjunto) tenemos que:

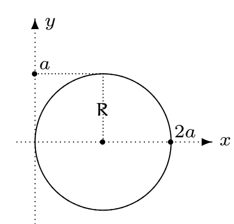


$$\iint\limits_{R} y^2\,dx\,dy \;=\; \int_0^h \Big(\int_{-\frac{a}{2h}y}^{\frac{a}{2h}y} y^2\,dx \Big)\,dy \;=\; \int_0^h \frac{a}{h}y^3\,dy \;=\; \frac{1}{4}\frac{a}{h}y^4\Big|_0^h = \frac{1}{4}ah^3.$$

$$\iint\limits_{R} x^2\,dx\,dy = \int_0^h \Big(\int_{-\frac{a}{2h}y}^{\frac{a}{2h}y} x^2\,dx \Big)\,dy = \int_0^h \frac{2}{3}\frac{a^3y^3}{3{\cdot}8h^3}\,dy = \frac{1}{12}\frac{a^3}{h^3}\frac{1}{4}h^4 = \frac{1}{48}ha^3.$$

Y finalmente $I_0 = \frac{ah}{48}\big(a^2+12h^2\big)$.

e) Colocando el centro del círculo de radio a en $(0,a)$ i.e. $(x-a)^2+y^2 = a^2$, debemos calcular I_0:

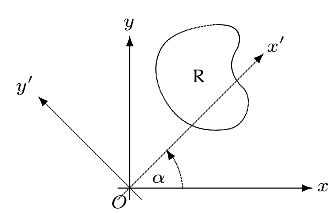


$$I_0 = \iint\limits_{R} (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^{2a\cos\theta} r^3\,dr \Big)\,d\theta$$

$$= 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^4\cos^4\theta\,d\theta = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^4\cos^4\theta\,d\theta = 8a^4\frac{1{\cdot}3}{2{\cdot}4}\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi a^4.$$

64. Demostrar que la suma de los momentos de inercia de una figura plana R, con respecto a la cualquier par de ejes perpendiculares entre sí, que están en el mismo plano que R y que pasan por un punto fijo O, es constante.

Solución Tomemos como origen del sistema de coordenadas el punto O y la figura R sobre el plano. Sea el sistema x, y un sistema ortogonal en el plano y consideremos el sistema x', y' otro sistema ortogonal, resultante de una rotación α del primero i.e.



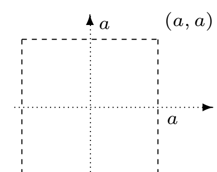
$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha + y\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ y' &= y\cos\alpha - x\,\mathrm{sen}\,\alpha \end{aligned}\right\} \longrightarrow \quad \begin{aligned} x &= x'\cos\alpha + y'\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ y &= x'\,\mathrm{sen}\,\alpha - y'\cos\alpha, \end{aligned}$$

el Jacobiano de la transformación es $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \mathrm{sen}\,\alpha \\ -\mathrm{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = 1$, entonces:

$$\begin{aligned} \iint\limits_{R} \left(x'^2 + y'^2\right) dx'\,dy' &= \iint\limits_{R} \left((x\cos\alpha + y\,\mathrm{sen}\,\alpha)^2 + (y\cos\alpha - x\,\mathrm{sen}\,\alpha)^2\right) dx\,dy \\ &= \iint\limits_{R} \left(x^2 + y^2\right) dx\,dy = I_0, \end{aligned}$$

es decir I_0 es el mismo para cualquier sistema de coordenadas perpendiculares entre sí.

65. Determinar la masa de una lámina cuadrada de lado $2a$, si la densidad del material de la misma es proporcional al cuadrado de distancia a partir del punto de intersección de las diagonales y en las esquinas del cuadrado igual a 1.

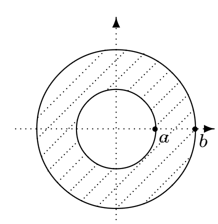


Solución La densidad es $\delta(x,y) = k\big(x^2+y^2\big)$ y $\delta(a,a) = k2a^2 = 1$ $\Longrightarrow k = \dfrac{1}{2a^2}$, entonces:

$$m = \int_{-a}^{a}\left(\int_{-a}^{a} \frac{1}{2a^2}(x^2+y^2)\,dy\right)dx = \frac{2}{2a^2}\int_{-a}^{a}\left(x^2y + \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^a dx$$

$$= \frac{1}{a}\int_{-a}^{a}\left(x^2 + \tfrac{1}{3}a^2\right)dx = \frac{1}{a}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}a^2x\right)\Big|_{-a}^{a} = \frac{2}{a}\left(\frac{a^3}{3} + \frac{a^3}{3}\right) = \frac{4}{3}a^2.$$

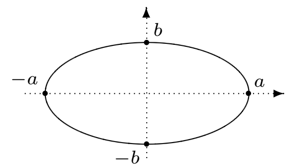
66. Un anillo plano limitado por las circunferencias concéntricas de radio a y b, $b > a$, tiene densidad inversamente proporcional a la distancia al centro de las circunferencias. Determinar la masa del anillo, si la densidad sobre la circunferencia interior es igual a 1.



Solución En este caso la densidad es $\delta(x,y) = \dfrac{k}{\sqrt{x^2+y^2}}$ y $\delta(0,a) = \dfrac{k}{a} = 1$ i.e. $k = a$, entonces $\delta(x,y) = \dfrac{a}{\sqrt{x^2+y^2}}$ y tenemos:

$$m = \int_0^{2\pi}\left(\int_a^b \frac{a}{r}r\,dr\right)d\theta = 2\pi a(b-a).$$

67. Una figura limitada por una elipse de semiejes a y b, tiene una masa de modo que su densidad es proporcional a la distancia desde el eje mayor, siendo igual a γ a la distancia unidad del mismo eje. Determinar la masa.



Solución Tomando $a > b$ tenemos que $\delta(x,y) = k|y|$, $\delta(0,1) = \gamma = k1$ i.e. $k = \gamma$. Así, ($x = ar\cos\theta$, $y = br \operatorname{sen}\theta$):

$$m = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 kab^2 r|\operatorname{sen}\theta| r\,dr\right)d\theta = ab^2\gamma\frac{1}{3}r^3\Big|_0^1 \cdot 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}\theta\,d\theta = \frac{4}{3}ab^2\gamma.$$

68. Determinar el centroide de la región R, dada por:

a) $y = x^2$, $x + y = 2$

b) $y^2 = x + 3$, $y^2 = 5 - x$

c) $x - 2y + 8 = 0$, $x + 3y + 5 = 0$, $x = -2$, $x = 4$

d) $y = \operatorname{sen}^2 x$, $y = 0$, $0 \le x \le \pi$

e) $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$

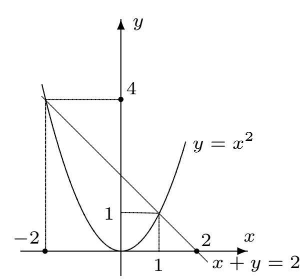
f) $y = \ln x$, $y = 0$, $1 \le x \le a$

g) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$, $x = 0$, $y = 0$ en el primer cuadrante

h) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$, $x = 0$, $y = 0$.

Solución

a) El área es $\displaystyle\iint_R dxdy = \int_{-2}^{1}\left(\int_{x^2}^{2-x} dy\right)dx =$



$$\int_{-2}^{1}(2 - x - x^2)dx = (2x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3)\Big|_{-2}^{1} = \frac{9}{2},$$

$$\iint_R xdydx = \int_{-2}^{1} x(2-x-x^2)dx = \int_{-2}^{1}(2x - x^2 - x^3)dx =$$

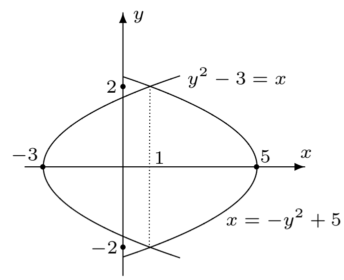
$$(x^2 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x^4)\Big|_{-2}^{1} = -\frac{9}{4}.$$

$$\iint_R ydydx = \int_{-2}^{1}\frac{1}{2}y^2\Big|_{x^2}^{2-x}dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{1}\left((2-x)^2 - x^4\right)dx = (2x - x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{10}x^5)\Big|_{-2}^{1} = \frac{36}{5}.$$

Así $\bar{x} = \dfrac{-\frac{9}{4}}{\frac{9}{2}} = -\dfrac{1}{2}$, $\bar{y} = \dfrac{\frac{36}{5}}{\frac{9}{2}} = \dfrac{8}{5}$.

b) El área es: $\displaystyle\iint\limits_R dxdy = \int_{-2}^{2}\left(\int_{y^2-3}^{5-y^2} dx\right)dy =$

$\displaystyle\int_{-2}^{2}(8-2y^2)dy = (8y-\frac{2}{3}y^3)\Big|_{-2}^{2} = \frac{64}{3},$

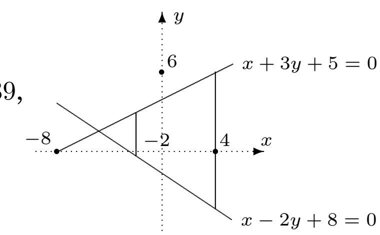


$\displaystyle\iint\limits_R xdxdy = \int_{-2}^{2}\left(\int_{y^2-3}^{5-y^2} xdx\right)dy = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} x^2\Big|_{y^2-3}^{5-y^2}dy =$

$\displaystyle -2\int_{-2}^{2}(y^2-4)dy = \frac{64}{3},$

$\displaystyle\iint\limits_R ydydx = \int_{-2}^{2}\left(\int_{y^2-3}^{5-y^2} ydx\right)dy = \int_{-2}^{2} y(8-2y^2)dy = 0$, pues la función $g(y) = y(8-2y^2)$ es impar.

Finalmente $\bar{x} = \dfrac{\frac{64}{3}}{\frac{64}{3}} = 1$, $\bar{y} = 0$. El valor de $\bar{y} = 0$ era previsible desde que hay simetría respecto al eje x.

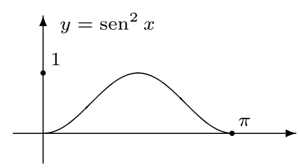


c) Área = $\displaystyle\int_{-2}^{4}\left(\int_{\frac{1}{2}(x+8)}^{\frac{1}{3}(-5-x)} dy\right)dx = -\int_{-2}^{4}\frac{5x+34}{6}dx = -39,$

$\displaystyle\iint\limits_R xdydx = -\int_{-2}^{4}(\frac{5}{6}x^2+\frac{17}{3}x)dx = -54,$

$\displaystyle\iint\limits_R ydydx = \int_{-2}^{4}\frac{1}{2}y^2\Big|_{\frac{1}{2}(x+8)}^{\frac{1}{3}(-5-x)}dx = -\int_{-2}^{4}\frac{5x^2+104x+476}{72}dx = -\frac{1}{72}(\frac{5}{3}x^3+52x^2+476x)\Big|_{2}^{4} =$ -50, por lo que $\bar{x} = \frac{18}{13}$, $\bar{y} = \frac{50}{39}$.

d) Área= $\displaystyle\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^2 xdx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^2 xdx = 2\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2},$



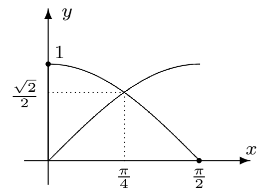
$\displaystyle\iint\limits_R xdydx = \int_0^{\pi}\left(x\int_0^{\operatorname{sen}^2 x} dy\right)dx = \int_0^{\pi} x\operatorname{sen}^2 xdx =$

$\displaystyle(-\frac{1}{2}x\operatorname{sen}x\cos x+\frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 x+\frac{1}{4}x^2)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{4},$

$\displaystyle\iint\limits_R ydydx = \int_0^{\pi}\left(\int_0^{\operatorname{sen}^2 x} ydy\right)dx = \int_0^{\pi}\frac{1}{2}\operatorname{sen}^4 xdx = \frac{1}{2}2\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{16}$, por lo cual tenemos

$\bar{x} = \dfrac{\frac{\pi^2}{4}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$, $\bar{y} = \dfrac{\frac{3\pi}{16}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{8}.$

e) Área= $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_{\operatorname{sen}x}^{\cos x} dy\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\operatorname{sen}x)dx = (\operatorname{sen}x+\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}-1,$

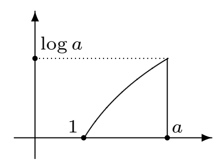


$$\iint_R x dy dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x(\cos x - \operatorname{sen} x)dx =$$

$$((x+1)\cos x + (x-1)\operatorname{sen} x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi - 1,$$

$$\iint_R y dy dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}y^2\Big|_{\operatorname{sen} x}^{\cos x} dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x dx = \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$\frac{1}{4} \Longrightarrow \bar{x} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}\pi - 1}{\sqrt{2}-1} = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\pi - 1\right)(\sqrt{2}+1),\ \bar{y} = \frac{1}{4(\sqrt{2}-1)} = \frac{1}{4}(\sqrt{2}+1).$$



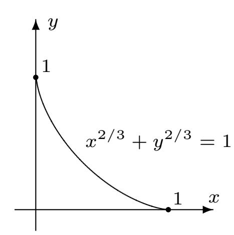
f) Área= $\displaystyle\int_1^a \left(\int_0^{\ln x} dy\right) dx = \int_1^a \ln x dx =$

$$(x\ln x - x)\Big|_1^a = a\ln a - a + 1,$$

$$\iint_R x dy dx = \int_1^a x\ln x dx = \left(\frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2\right)\Big|_1^a = \frac{1}{2}a^2\ln a - \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4},$$

$$\iint_R y dy dx = \int_1^a \frac{1}{2}\ln^2 x dx = \left(\frac{1}{2}x\ln^2 x - x\ln x + x\right)\Big|_1^a = \frac{1}{2}a\ln^2 a - a\ln a + a - 1,$$

entonces $\bar{x} = \dfrac{2a^2\ln a - a^2 + 1}{4a\ln a - 4a + 4}$, $\bar{y} = \dfrac{a\ln^2 a}{2(a\ln a - a + 1)} - 1.$



g) Área= $\displaystyle\iint_R dx dy = \int_0^1 \int_0^{(1-x^{2/3})^{3/2}} dy dx = \int_0^1 (1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} dx.$

Sea $x = \operatorname{sen}^3 t$, $dx = 3\operatorname{sen}^2 t\cos t dt$, entonces:

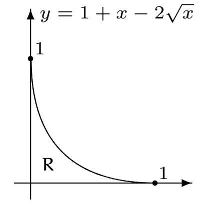
$$\int_0^1 (1 - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t(3\operatorname{sen}^2 t\cos t)dt =$$

$$3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t(1-\cos^2 t)dt = 3\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 t dt\right) = 3\left(\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} - \frac{5}{6}\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{16},$$

$$\iint_R x dx dy = \int_0^1 \frac{1}{2}y^2\Big|_0^{(1-x^{2/3})^{3/2}} dx = \int_0^1 \frac{1}{2}(1-x^{\frac{2}{3}})^3 dx = \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 t(\operatorname{sen}^2 t\cos t dt) =$$

$$\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7 t\operatorname{sen}^2 t dt = \frac{3}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^7 t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^9 t dt\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{7} - \frac{2}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{7}\frac{8}{9}\right) = \frac{16}{315}.$$

Por razones de simetría $\displaystyle\iint_R x dx dy = \iint_R y\, dx\, dy$, por lo que $\bar{x} = \bar{y} = \dfrac{256}{315\pi}$.



h) Área= $\displaystyle\iint\limits_{R} dxdy = \int_0^1 \int_0^{1+x-2\sqrt{x}} dydx = \int_0^1 (1+x-2\sqrt{x})dx =$
$\displaystyle\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + x\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{6},$

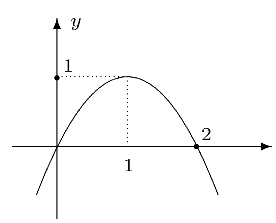
$$\iint\limits_{R} xdxdy = \int_0^1 x(1+x-2\sqrt{x})dx = \int_0^1 (x^2 - 2x^{\frac{3}{2}} + x)dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{4x^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{30},$$

$$\iint\limits_{R} ydxdy = \int_0^1 \frac{1}{2}y^2\Big|_0^{1+x-2\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1+x-2\sqrt{x})^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-\sqrt{x})^4 dx =$$
$$\left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + x\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{30}.$$

Al igual que en el caso anterior, se pudo prever que $\displaystyle\iint\limits_{R} xdxdy = \iint\limits_{R} y\,dx\,dy$, por razones de simetría. Así, $\bar{x} = \bar{y} = \dfrac{\frac{1}{30}}{\frac{1}{6}} = \dfrac{1}{5}$.

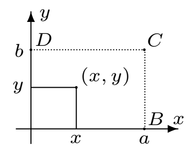
69. Una lámina delgada está limitada por el arco de parábola $y = 2x - x^2$, $0 \leq x \leq 2$. Determinar la masa, si la densidad en cada punto (x,y) es $f(x,y) = \dfrac{1-y}{1+x}$.

Solución La masa está dad por $m = \displaystyle\iint\limits_{R} f(x,y)dxdy =$



$$\int_0^2 \left(\int_0^{2x-x^2} \frac{1-y}{1+x}dy\right)dx = \int_0^2 \frac{2y-y^2}{2(1+x)}\Big|_0^{2x-x^2} dx =$$
$$-\int_0^2 \frac{x(x-2)(x^2-2x+2)}{2(x+1)}dx =$$
$$\int_0^2 \left(-\frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{11}{2}x + \frac{15}{2} - \frac{15}{4(x+1)}\right)dx =$$
$$\left(-\frac{1}{8}x^4 + \frac{5}{6}x^3 - \frac{11}{4}x^2 + \frac{15}{2}x - \frac{15}{2}\ln(1+x)\right)\Big|_0^2 = \frac{26}{3} - \frac{15}{2}\ln 3.$$

70. Determinar el centro de gravedad de una lámina delgada rectángular $ABCD$ si la densidad en todos sus puntos es el producto de sus distancias a los lados AB y AD.



Solución Tomando el punto A en el origen, tenemos que la densidad se traduce en $f(x,y) = xy$, entonces:

$$\text{Área} = \iint\limits_{R} xydxdy = \int_0^a xdx \int_0^b ydy = \frac{1}{4}a^2b^2$$
$$\iint\limits_{R} xf(x,y)dxdy = \int_0^a x^2dx \int_0^b ydy = \frac{1}{6}a^3b^2$$
$$\iint\limits_{R} yf(x,y)dxdy = \int_0^a xdx \int_0^b y^2dy = \frac{1}{6}a^2b^3,$$

i.e $\bar{x} = \frac{2}{3}a$, $\bar{y} = \frac{2}{3}b$.

71. Determinar los momentos de inercia I_x, I_y de una lámina delgada R del plano y determinada por las curvas siguientes ($f(x,y)$ es la densidad).

a) $y = \operatorname{sen}^2 x$, $y = -\operatorname{sen}^2 x$, $-\pi \leq x \leq \pi$, $f(x,y) = 1$.

b) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, $\frac{x}{c} + \frac{y}{b} = 1$, $y = 0$, $0 < c < a$, $b > 0$, $f(x,y) = 1$.

c) $(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$, $x = 0$, $y = 0$, $0 \leq x \leq r$, $0 \leq y \leq r$, $f(x,y) = 1$.

d) $xy = 1$, $xy = 2$, $x = 2y$, $y = 2x$, $x > 0$, $y > 0$, $f(x,y) = 1$.

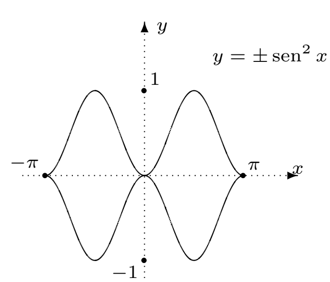
e) $y = e^x$, $y = 0$, $0 \leq x \leq a$, $f(x,y) = xy$.

f) $y = \sqrt{2x}$, $y = 0$, $0 \leq x \leq 2$, $f(x,y) = |x - y|$.

Solución

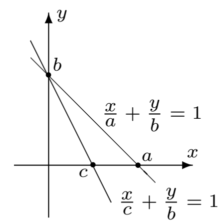
a) $I_x = \iint\limits_{R} y^2dydx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\operatorname{sen}^2 x}^{\operatorname{sen}^2 x} y^2dy \right) dx =$

$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{2}{3}\operatorname{sen}^6 xdx = 4\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^6 xdx = \frac{8}{3}\cdot\frac{5\cdot3\cdot1}{6\cdot4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{12},$



$I_y = \iint\limits_{R} x^2dydx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(x^2 \int_{-\operatorname{sen}^2 x}^{\operatorname{sen}^2 x} dy \right) dx =$

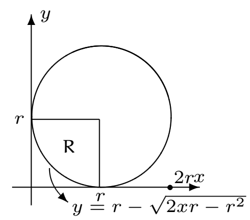
$\int_{-\pi}^{\pi} 2x^2 \operatorname{sen}^2 xdx = \left(-\frac{1}{2}(2x^2-1)\operatorname{sen} x\cos x + x\operatorname{sen}^2 x + \frac{1}{6}x(2x^2-3) \right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{3}\pi(2\pi^2-3).$



b) $I_x = \iint\limits_{\mathsf{R}} y^2 dydx = \int_0^b \left(\int_{c(1-\frac{y}{b})}^{a(1-\frac{y}{b})} y^2 dx \right) dy =$

$\int_0^b y^2(y-b)\frac{a-c}{b} dy = \frac{a-c}{b}\left(\frac{1}{4}y^4 - b\frac{1}{3}y^3\right)\Big|_0^b = \frac{1}{12}b^3(a-c),$

$I_y = \int_0^b \left(\int_{c(1-\frac{y}{b})}^{a(1-\frac{y}{b})} x^2 dx \right) dy = \int_0^b \frac{1}{3}x^3\Big|_{c(1-\frac{y}{b})}^{a(1-\frac{y}{b})} dy = \int_0^b \frac{(a^3-c^3)}{3b^3}(b-y)^3 dy = \frac{1}{12}b(a^3-c^3).$



c) $I_x = \iint\limits_{\mathsf{R}} y^2 dydx = \int_0^r \Big(\int_{r-\sqrt{2xr-x^2}}^{r} y^2 dy \Big) dx =$

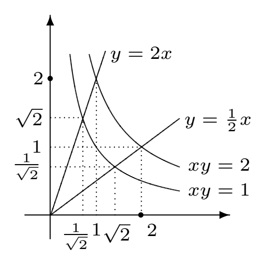
$\frac{1}{3}\int_0^r [\, x^{\frac{3}{2}}(2r-x)^{\frac{3}{2}} + 3r^2\sqrt{x}\sqrt{2r-x} + 3rx(x-2r)\,]\, dx =$

$\Big(\frac{5}{4}r^4 \arctan\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2r-x}} - \frac{\sqrt{x}}{24}(2x^3 - 6rx^2 - 11r^2x + 15r^3)\sqrt{2r-x} + \frac{1}{3}rx^2(x-3r)\Big)\Big|_0^r = \frac{5}{16}r^4\pi - \frac{2}{3}r^4,$

$I_y = \iint\limits_{\mathsf{R}} x^2 dydx = \int_0^r x^2\sqrt{2xr - x^2}\, dx =$

$\Big[\frac{5}{4}r^4 \arctan\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2r-x}} + \Big(\frac{1}{4}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{12}rx^{\frac{5}{2}} - \frac{5}{24}r^2x^{\frac{3}{2}} - \frac{5}{8}r^3\sqrt{x}\Big)\sqrt{2r-x}\Big]\Big|_0^r = \frac{5}{16}r^4\pi - \frac{2}{3}r^4.$

En este caso se podía prever que $I_x = I_y$, dada la simetría de la región R y la uniformidad de la densidad $f(x,y) = 1$. Es claro que si $f(x,y)$ no fuera constante, en general $I_x \neq I_y$ a pesar de la simetría de la región R.



d) $I_x = \iint\limits_{\mathsf{R}} y^2 dydx = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \left(\int_{\frac{1}{x}}^{2x} y^2 dy \right) dx +$

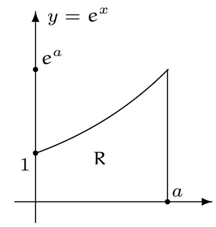
$\int_1^{\sqrt{2}} \left(\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} y^2 dy \right) dx + \int_{\sqrt{2}}^2 \left(\int_{\frac{1}{2}x}^{\frac{2}{x}} y^2 dy \right) dx =$

$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{1}{3}y^3\Big|_{\frac{1}{x}}^{2x} dx + \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{3}y^3\Big|_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} dx + \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{3}y^3\Big|_{\frac{1}{2}x}^{\frac{2}{x}} dx = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \left(\frac{8}{3}x^3 - \frac{1}{3x^3}\right) dx + \int_1^{\sqrt{2}} \frac{7}{3x^3} dx +$

$\int_{\sqrt{2}}^2 \left(\frac{8}{3x^3} - \frac{x^3}{24}\right) dx = \left(\frac{2}{3}x^4 + \frac{1}{6x^2}\right)\Big|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 - \frac{7}{6x^2}\Big|_1^{\sqrt{2}} - \left(\frac{4}{3x^2} + \frac{x^4}{96}\right)\Big|_{\sqrt{2}}^2 = \frac{1}{3} + \frac{7}{12} + \frac{5}{24} = \frac{9}{8}.$

Observamos que como $f(x,y) = 1$ y la región R es simétrica respecto al eje $y = x$, entonces como $I_x = I_y = \frac{9}{8}$.

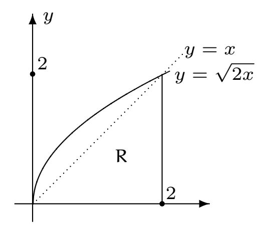
e) $I_x = \iint\limits_{\mathsf{R}} xy^3 dy\, dx = \int_0^a \left(\int_0^{e^x} xy^3 dy \right) dx = \int_0^a \frac{x}{4} y^4 \Big|_0^{e^x} dx =$



$\frac{1}{4} \int_0^a x e^{4x} dx = \frac{1}{64}(4x-1)e^{4x}\Big|_0^a = \frac{1}{64}(4a-1)e^{4a} + \frac{1}{64},$

$I_y = \iint\limits_{\mathsf{R}} x^3 y\, dy\, dx = \int_0^a \left(\int_0^{e^x} x^3 y\, dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^a x^3 e^{2x} dx =$

$\left(\frac{1}{4}x^3 e^{2x} - \frac{3}{8}x^2 e^{2x} + \frac{3}{8} x e^{2x} - \frac{3}{16} e^{2x} \right) \Big|_0^a = \frac{1}{16}(4a^3 - 6a^2 + 6a - 3)e^{2a} + \frac{3}{16}.$



f) $I_x = \iint\limits_{\mathsf{R}} |x-y| y^2 dy dx = \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{2x}} |x-y| y^2 dy \right) dx =$

$\int_0^2 \left(\int_0^x (x-y) y^2 dy \right) dx + \int_0^2 \left(\int_x^{\sqrt{2x}} (y-x) y^2 dy \right) dx =$

$\int_0^2 \frac{1}{12} x^4 dx + \int_0^2 \left(\frac{1}{4} y^4 - \frac{x}{3} y^3 \right) \Big|_x^{\sqrt{2x}} dx = \frac{8}{15} + \int_0^2 \left(\frac{x^4}{12} - \frac{2\sqrt{2}}{3} x^{\frac{5}{2}} + x^2 \right) dx =$

$\frac{8}{15} + \left(\frac{x^5}{60} - \frac{4\sqrt{2}}{21} x^{\frac{7}{2}} + \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^2 = \frac{8}{15} + \frac{16}{105} = \frac{72}{105}.$

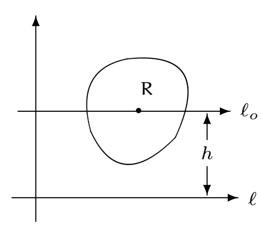
$I_y = \iint\limits_{\mathsf{R}} x^2 |x-y| dy\, dx = \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{2x}} x^2 |x-y| dy \right) dx = \int_0^2 \left(\int_0^x (x-y) x^2 dy \right) dx +$

$\int_0^2 \left(\int_x^{\sqrt{2x}} (y-x) x^2 dy \right) dx = \int_0^2 \left(x^3 y - \frac{1}{2} x^2 y^2 \right) \Big|_0^x dx + \int_0^2 \left(\frac{1}{2} x^2 y^2 - x^3 y \right) \Big|_x^{\sqrt{2x}} dx =$

$\int_0^2 \frac{1}{2} x^4 dx + \int_0^2 \left(\frac{1}{2} x^4 - \sqrt{2} x^{\frac{7}{2}} + x^3 \right) dx = \frac{1}{10} x^5 \Big|_0^2 + \left(\frac{1}{10} x^5 - \frac{2\sqrt{2}}{9} x^{\frac{9}{2}} + \frac{1}{4} x^4 \right) \Big|_0^2 = \frac{16}{5} + \frac{4}{45} = \frac{148}{45}.$

72. **Teorema de Steiner** Sea R una lámina delgada de masa m y sean ℓ_0 y ℓ rectas paralelas en el plano R, pasando ℓ_0 por el centro de gravedad de R. Demostrar que $I_\ell = I_{\ell_0} + mh^2$, donde h es la distancia entre las dos rectas ℓ_0 y ℓ.

Solución Sin perder generalidad, podemos suponer que ℓ_0 es eje x. Sabemos que $I_{\ell_0} = \iint\limits_{\mathsf{R}} y^2 dy dx$ y si ℓ es una recta paralela a ℓ_0 situada a una distancia h, se tiene que:

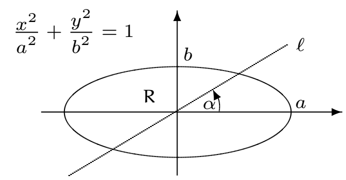


$$I_\ell = \iint\limits_{\mathsf{R}} (y+h)^2 dy dx = \iint\limits_{\mathsf{R}} y^2 dy dx + 2 \iint\limits_{\mathsf{R}} yh dy dx + \iint\limits_{\mathsf{R}} h^2 dy dx = I_{\ell_0} + 2hm\overline{y} + mh^2.$$

Notemos que por hipótesis, ℓ_0 pasa por el centro de gravedad de la lámina R y se tiene que $\bar{y}=0$, por lo tanto, $I_l = I_{l_0} + mh^2$.

73. El contorno de una lámina delgada es una elipse de semi-ejes a y b, ℓ representa una recta en el plano de la lámina, que pasa por el centro de la elipse y forma un ángulo α con el eje de la longitud $2a$. Si la densidad es constante y la masa m, demostrar que el momento de inercia I_ℓ es igual a $\frac{1}{4}m(a^2\operatorname{sen}^2\alpha + b^2\cos^2\alpha)$.

Solución $I_\ell = \iint\limits_{R} \delta(x,y)c\,dx\,dy$, donde δ es la distancia de un punto (x,y) de la elipse a la recta ℓ. Así, la recta ℓ tiene por ecuación $\operatorname{sen}\alpha x - \cos\alpha y = 0$ y la distancia de un punto (x,y) a ℓ es $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha x - \cos\alpha y}{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha} = \operatorname{sen}\alpha x - \cos\alpha y$.



Si $f(x,y)$ es la densidad, $f(x,y)=c$ y la masa de la elipse es $m = abc\pi$. Así tenemos que si $x = ar\cos\theta$, $y = ar\operatorname{sen}\theta$, $J = abr$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le r \le 1$, entonces:

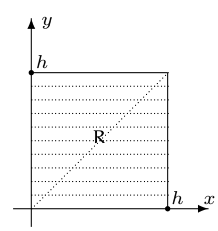
$$I_\ell = \iint\limits_{R} c(\operatorname{sen}\alpha x - \cos\alpha y)^2 dxdy = c\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 r^2(a\operatorname{sen}\alpha\cos\theta - b\cos\alpha\operatorname{sen}\theta)^2 abrdr\right)d\theta =$$

$$\frac{1}{4}r^4\Big|_0^1 cab\Big(\int_0^{2\pi} a^2\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\theta d\theta + \int_0^{2\pi} b^2\cos^2\alpha\operatorname{sen}^2\theta d\theta - 2ab\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}\theta\cos\theta d\theta\Big) =$$

$$\frac{1}{4}abc(a^2\operatorname{sen}^2\alpha\, 4\tfrac{\pi}{2}\tfrac{1}{2} + b^2\cos^2\alpha\, 4\tfrac{\pi}{2}\tfrac{1}{2} + 0) = \frac{1}{4}m(a^2\operatorname{sen}^2\alpha + b^2\cos^2\alpha).$$

74. Encontrar la distancia media desde el vértice de un cuadrado de lado h a los puntos interiores de los mismos.

Solución En este caso $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, entonces la distancia media es:



$$\frac{1}{\text{Área(R)}}\iint\limits_{R}\sqrt{x^2+y^2}dxdy = \frac{1}{h^2}\iint\limits_{R}\sqrt{x^2+y^2}dxdy =$$

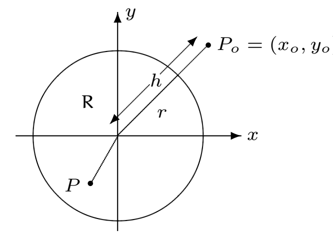
$$\frac{2}{h^2}\int_0^h\left(\int_0^x\sqrt{x^2+y^2}dy\right)dx = \frac{2}{h^2}\int_0^h\Big(\frac{1}{2}y\sqrt{x^2+y^2} + \frac{x^2}{2}\ln(y+\sqrt{x^2+y^2})\Big|_0^x dx =$$

$$\frac{2}{h^2}\int_0^h\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}x^2 + \frac{x^2}{2}\ln\big(x(\sqrt{2}+1)\big) - \frac{x^2}{2}\ln x\Big)dx = \frac{2}{h^2}\int_0^h\Big(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}+1)\Big)x^2dx =$$

$$\frac{1}{h^2}\big(\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)\big)\frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}\big(\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)\big)h.$$

75. Sea δ la distancia desde un punto arbitrario P interior a un círculo de radio r a un punto

fijo P_0 cuya distancia al centro del círculo es h. Calcular el valor medio de la función δ^2 en la región limitada por el círculo.



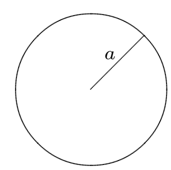
Solución Sin pérdida de generalidad en el problema, tomemos el origen en el centro del círculo. Sea $P_o = (x_o, y_o)$, con $h = \sqrt{x_o^2 + y_o^2}$, entonces $\delta^2 = (x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = x^2 + y^2 - 2x_o x - 2y_o y + h^2$, con lo cual se tiene:

$$\iint\limits_{\mathsf{R}} \delta^2(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^r (\rho^2 - 2x_o\rho\cos\theta - 2y_o\rho\,\mathrm{sen}\,\theta + h^2)\rho d\rho\right)d\theta =$$

$\frac{1}{4}r^4\,2\pi - 0 - 0 + h^2\frac{\rho^2}{2}\Big|_0^r 2\pi = \frac{1}{2}r^4\pi + h^2r^2\pi.$

Como el área del círculo es πr^2, el valor medio es $\dfrac{1}{|\mathsf{R}|}\displaystyle\iint\limits_{\mathsf{R}}\delta^2(x,y)dxdy = \frac{1}{2}r^2 + h^2.$

76. Hallar la masa de una lámina circular de radio a, si su densidad es proporcional a la distancia desde el punto al centro e igual a δ en el borde de la lámina.



Solución Se tiene que $\rho = kr$, donde r es la distancia del punto (x,y) al origen i.e. $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y como $\rho(a) = \delta \Longrightarrow k = \frac{\delta}{a} \Longrightarrow \rho = \frac{\delta}{a}r$. Finalmente tenemos:

$$m = \iint\limits_{\mathsf{R}} \rho dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{\delta}{a}r^2\,dr\,d\theta = 2\pi\frac{\delta}{a}\frac{a^3}{3} = \frac{2}{3}\pi\delta a^2.$$

77. Una lámina tiene la forma de un triángulo rectángulo con catetos $\overline{OB} = a$, $\overline{OA} = b$; su densidad en cualquier punto es igual a la distancia desde esta al cateto $\overline{OA}$. Determinar los momentos estáticos de la lámina con respecto a los catetos $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$.

Solución En este caso tenemos que $\rho(x,y) = y$. El segmento $\overline{AB}$ está dado por la recta $y = a - \frac{a}{b}x$. Así tenemos:

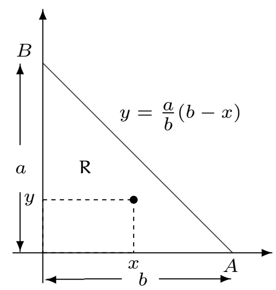
$$m_x = \iint\limits_{\mathsf{R}} y^2 dx\,dy = \int_0^b\int_0^{a - \frac{a}{b}x} y^2\,dy\,dx = \int_0^b \frac{1}{3}y^3\Big|_0^{a-\frac{a}{b}x} dx = \frac{1}{3}\int_0^b\left(a - \frac{a}{b}x\right)^3 dx =$$

$$-\frac{b}{12a}\left(a-\frac{a}{b}x\right)^4\Big|_0^b=\frac{1}{12}a^4\frac{b}{a}=\frac{1}{12}a^3b.$$

$$m_y=\iint\limits_R xy\,dx\,dy=\int_0^b\int_0^{a-\frac{a}{b}x}y\,dy\,x\,dx=$$

$$\int_0^b\frac{1}{2}\left(a-\frac{a}{b}x\right)^2x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^b\left(a^2x-2\frac{a^2}{b}x^2+\frac{a^2}{b^2}x^3\right)dx=$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a^2b^2-\frac{2}{3}a^2b^2+\frac{1}{4}a^2b^2\right)=\frac{1}{24}a^2b^2.$$

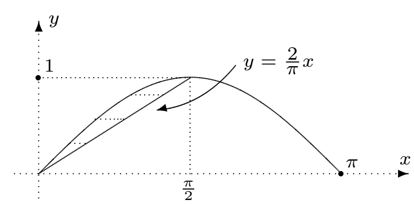


78. Calcular las coordenadas del centro de gravedad de la figura limitada por la curva $y=\operatorname{sen}x$, la recta $\overline{OA}$ que pasa por el origen y por el vértice $A=\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ de la sinusoide.

Solución Se tiene que $m=\iint\limits_R 1dx\,dy=$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{2}{\pi}x}^{\operatorname{sen}x}dy\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{sen}x-\tfrac{2}{\pi}x\right)dx=$$

$$\left(-\cos x-\frac{2}{\pi}\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=0-\frac{\pi^2}{4\pi}+1=\frac{4-\pi}{4}.$$



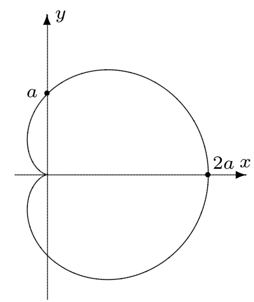
$$m_x=\iint\limits_R y\,dx\,dy=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{2}{\pi}x}^{\operatorname{sen}x}y\,dy\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{sen}^2x-\frac{4}{\pi^2}x^2\right)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}-\frac{4}{3\pi^2}\frac{\pi^3}{8}\right)=$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{24}\Longrightarrow\bar{y}=\frac{\pi}{6(4-\pi)}.$$

$$m_y=\iint\limits_R x\,dx\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{2}{\pi}x}^{\operatorname{sen}x}x\,dy\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(x\operatorname{sen}x-\frac{2}{\pi}x^2\right)dx=$$

$$\left(\operatorname{sen}x-x\cos x-\frac{2}{3\pi}x^3\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\left(1-\frac{2}{3\pi}\frac{\pi^3}{8}\right)=\frac{12-\pi^2}{12}\Longrightarrow\bar{x}=\frac{12-\pi^2}{12}\frac{4}{4-\pi}=\frac{12-\pi^2}{3(4-\pi)}.$$

79. Determinar las coordenadas del centro de gravedad de la figura limitada por la cardioide $r=a(1+\cos\theta)$.



Solución Es claro que por razones de simetría $\bar{y} = 0$.

$$m = \iint\limits_{R} dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^{a(1+\cos\theta)} r\,dr\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(1+\cos\theta)^2 d\theta =$$

$$\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta = \frac{a^2}{2}\Big(2\pi + 2\,\mathrm{sen}\,\theta\Big|_0^{2\pi} + 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta\Big) =$$

$$\frac{a^2}{2}\big(2\pi + 4\tfrac{\pi}{4}\big) = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

$$m_x = \iint\limits_{R} y\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^{a(1+\cos\theta)} r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,dr\,d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} a^3(1+\cos\theta)^3\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta =$$

$$-\frac{a^3}{3}\frac{(1+\cos\theta)^4}{4}\Big|_0^{2\pi} = 0 \text{ i.e. } \bar{y} = 0.$$

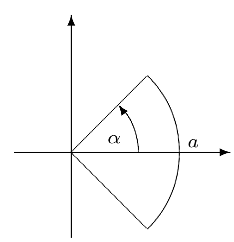
$$m_y = \iint\limits_{R} x\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^{a(1+\cos\theta)} r^2\cos\theta\,dr\,d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} a^3(1+\cos\theta)^3\cos\theta\,d\theta =$$

$$\frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi}(1+3\cos\theta+3\cos^2\theta+\cos^3\theta)\cos\theta\,d\theta = \frac{1}{3}a^3\int_0^{2\pi}(\cos\theta+3\cos^2\theta+3\cos^3\theta+\cos^4\theta)d\theta =$$

$$\frac{4}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3\cos^2\theta+\cos^4\theta)d\theta = \frac{4}{3}a^3\Big(3\frac{\pi}{2}\frac{1}{2} + \frac{\pi}{2}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\Big) = \frac{5}{4}\pi a^3 \Longrightarrow \bar{x} = \frac{5}{6}a.$$

80. Determinar las coordenadas del centro de gravedad de un sector circular de radio a, cuyo ángulo central es igual a 2α.

Solución En este caso también $\bar{y} = 0$ por la simetría de la figura, como verificaremos. Así:



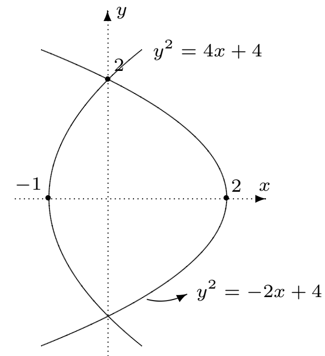
$$m = \iint\limits_{R} dx\,dy = \int_{-\alpha}^{\alpha}\int_0^{a} r\,dr\,d\theta = 2\alpha\frac{1}{2}a^2 = \alpha a^2.$$

$$m_x = \iint\limits_{R} y\,dx\,dy = \int_{-\alpha}^{\alpha}\int_0^{a} r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,dr\,d\theta = -\,\frac{1}{3}r^3\Big|_0^a\cos\theta\Big|_{-\alpha}^{\alpha} = 0 \Longrightarrow$$

$\bar{y} = 0$.

$$m_y = \iint\limits_{R} x\,dx\,dy = \int_{-\alpha}^{\alpha}\int_0^{a} r^2\cos\theta\,dr\,d\theta = \int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\theta\,d\theta\int_0^{a} r^2\,dr = \frac{2}{3}a^3\,\mathrm{sen}\,\alpha \Longrightarrow \bar{x} = \frac{2a\,\mathrm{sen}\,\alpha}{3\alpha}.$$

81. Calcular las coordenadas del centro de gravedad de la figura limitada por las parábolas $y^2 = 4x + 4$, $y^2 = -2x + 4$.



Solución De antemano que observa que $\bar{y} = 0$.

Además:

$m = \iint\limits_{R} dx\,dy = \int_{-2}^{2}\int_{\frac{y^2-4}{4}}^{\frac{4-y^2}{2}} dx\,dy = \int_{-2}^{2}(3 - \frac{3}{4}y^2)dy =$

$\big(3y - \frac{1}{4}y^3\big)\Big|_{-2}^{2} = 8.$

$m_x = \iint\limits_{R} y\,dy\,dx = \int_{-2}^{2} y(3 - \frac{3}{4}y^2)dy = \big(\frac{3y^2}{2} - \frac{3}{16}y^4\big)\Big|_{-2}^{2} =$

0 i.e $\bar{y} = 0$.

$m_y = \iint\limits_{R} x\,dy\,dx = \int_{-2}^{2}\int_{\frac{y^2-4}{4}}^{\frac{4-y^2}{2}} x\,dx\,dy = \int_{-2}^{2}\frac{1}{2}x^2\Big|_{\frac{y^2-4}{4}}^{\frac{4-y^2}{2}} dy =$

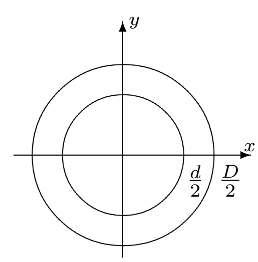
$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\big(\frac{(4-y^2)^2}{4} - \frac{(y^2-4)^2}{16}\big)\,dy = \frac{3}{32}\int_{-2}^{2}(4-y^2)^2dy = \frac{3}{32}\big(16y - \frac{8}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5\big)\Big|_{-2}^{2} =$

$\frac{3}{16}\big(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5}\big) = \frac{16}{15} \Longrightarrow \bar{x} = \frac{2}{15}.$

82. Calcular el momento de inercia de un anillo circular de diámetro d y D $(d < D)$:

a) con respecto a su propio centro

b) con respecto al diámetro.



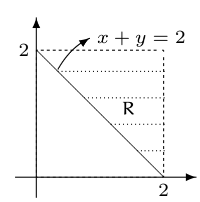
Solución $I_0 = \iint\limits_{R}(x^2 + y^2)dy\,dx = \int_{0}^{2\pi}\int_{d/2}^{D/2} r^3\,dr\,d\theta =$

$\frac{2\pi}{4}r^4\Big|_{d/2}^{D/2} = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4).$

Por simetría tenemos que $I_x = \iint\limits_{R} x^2\,dx\,dy = \iint\limits_{R} y^2\,dx\,dy =$

$I_y \Longrightarrow I_x = I_y = \frac{1}{2}I_0 = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4).$

83. Calcular el momento de inercia del triángulo limitado por las rectas $x + y = 2$, $x = 2$, $y = 2$, con respecto al eje x.



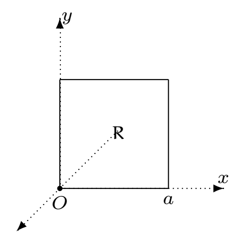
Solución En este caso tenemos:

$I_x = I_y = \iint\limits_{R} x^2\,dx\,dy = \int_{0}^{2} x^2\int_{2-x}^{2} dy\,dx = \int_{0}^{2} x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4\Big|_{0}^{2} = 4.$

84. Calcular el momento de inercia de un cuadrado de lado a con respecto al eje que,

pasando por uno de sus vértices, es perpendicular al plano del cuadrado.

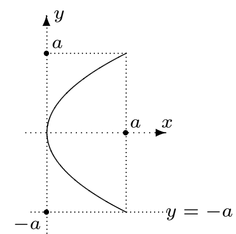
Solución Se entiende que es el momento de inercia respecto al vértice O i.e.



$$I_O = \iint_{R}(x^2 + y^2)dx\,dy = \int_0^a\int_0^a (x^2 + y^2)dx\,dy = \int_0^a\int_0^a x^2\,dx\,dy + \int_0^a\int_0^a y^2\,dx\,dy = 2a\frac{x^3}{3}\Big|_0^a = \frac{2}{3}a^4.$$

85. Calcular el momento de inercia de la región interceptada por la parábola $y^2 = ax$, por la recta $x = a$, respecto a la recta $y = -a$.

Solución El problema es equivalente a trasladar al eje x a la recta $y = -a$. Así tenemos:

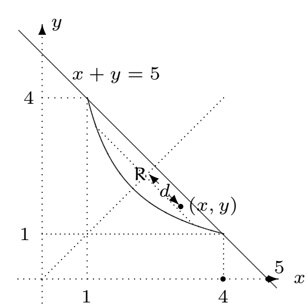


$$I_x = \int_0^a\int_{a-\sqrt{ax}}^{a+\sqrt{ax}} y^2\,dy\,dx = \int_{-a}^a\int_{\frac{y^2}{a}}^a y^2\,dx\,dy = \int_{-a}^a y^2\big(a - \frac{y^2}{a}\big)dy = \big(ay^3 - \frac{y^5}{5a}\big)\Big|_0^a = 2\big(a^4 - \frac{a^4}{5}\big) = \frac{8}{5}a^4.$$

86. Calcular el momento de inercia de la superficie limitada por la hipérbola $xy = 4$ y la recta $x + y = 5$, con respecto a la recta $x = y$.

Solución Las curvas se intersecan cuando $xy = 4$, $x + y = 5 \implies y(5-y) = 4 \implies y^2 - 5y + 4 = 0 \implies y = 1, 4$ i.e. en $(1,4), (4,1)$.

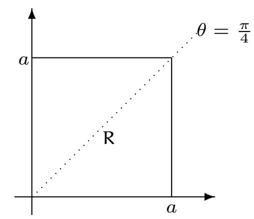
La distancia desde el punto (x,y) a la recta $x = y$ es igual a $d = \dfrac{x-y}{\sqrt{2}}$, entonces:



$$I_\ell = \iint_{R} d^2dx\,dy = \frac{1}{2}\int_1^4\int_{\frac{4}{x}}^{5-x}(x^2 - 2xy + y^2)\,dy\,dx = -\frac{1}{2}\int_1^4 \frac{7x^6 - 60x^5 + 162x^4 - 125x^3 - 48x^2 + 64}{6x^3}dx = 16\ln 2 - \frac{75}{8}.$$

87. En una lámina cuadrada de lado a, la densidad es proporcional a la distancia hasta uno de sus vértices. Calcular el momento de inercia de dicha lámina respecto a los lados que pasan por el vértice.

Solución Sin pérdida de generalidad, colocaremos el vértice en el origen. Así $\rho = k\sqrt{x^2+y^2}$, entonces:



$$I_x = I_y = k\iint\limits_{\mathrm{R}} x^2\rho(x,y)dx\,dy = k\int_0^a\int_0^a x^2\sqrt{x^2+y^2}dx\,dy =$$

$$k\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{a\sec\theta} r^4\operatorname{sen}^2\theta\,dr\,d\theta + k\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\csc\theta} r^4\operatorname{sen}^2\theta\,dr\,d\theta =$$

$$\frac{k}{5}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^5\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^5\theta}d\theta + \frac{k}{5}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} a^5\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}^5\theta}d\theta = \frac{k}{5}a^5\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2\theta\sec^3\theta\,d\theta + \frac{k}{5}a^5\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{cosec}^3\theta\,d\theta =$$

$$\frac{k}{5}a^5\Big[\Big(\frac{1}{8}\ln\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta+1} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{8\cos^2\theta} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^4\theta}\Big)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \Big(-\frac{1}{2}\operatorname{cosec}\theta\operatorname{cotg}\theta + \frac{1}{2}\ln\tan\frac{\theta}{2}\Big)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\Big] =$$

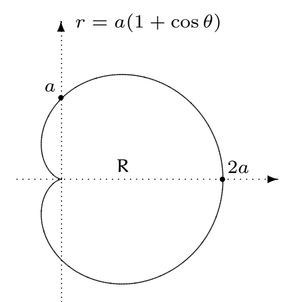
$$\frac{k}{5}a^5\Big[\frac{1}{8}\ln\frac{\sqrt{2}k}{\frac{\sqrt{2}}{2}+1} - \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{8\frac{1}{2}} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{4}} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2(\frac{\sqrt{2}}{2})^2} + \frac{1}{2}\ln\tan\frac{\pi}{8}\Big] =$$

$$\frac{k}{40}a^5\big(3\sqrt{2} - \ln(\sqrt{2}+1) + 4\ln(\sqrt{2}+1) + 4\sqrt{2}\big) = \frac{k}{40}a^5\big(7\sqrt{2} + 3\ln(\sqrt{2}+1)\big).$$

Recuerde que $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}$.

88. Determinar el momento de inercia de la cardioide $r = a(1+\cos\theta)$ con respecto al polo.

Solución Se tiene que $I_o = \iint\limits_{\mathrm{R}}(x^2+y^2)\,dx\,dy =$



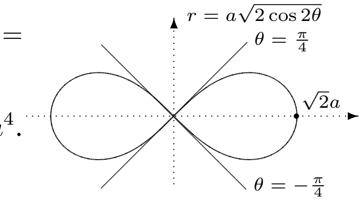
$$\int_0^{2\pi}\int_0^{a(1+\cos\theta)} r^3\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{1}{4}a^4(1+\cos\theta)^4\,d\theta =$$

$$\frac{1}{4}a^4\int_0^{2\pi}(1+\cancel{4\cos\theta}+6\cos^2\theta+\cancel{4\cos^3\theta}+\cos^4\theta)\,d\theta =$$

$$a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+6\cos^2\theta+\cos^4\theta)\,d\theta = a^4\Big(\frac{\pi}{2}+6\frac{\pi}{4}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{\pi}{2}\Big) = a^4\pi\frac{35}{16}.$$

89. Calcular el momento de inercia de la superficie de la lemniscata $r^2 = 2a^2\cos 2\theta$ con respecto al eje, perpendicular al plano de la misma que pasa por el polo.

Solución Se busca la inercia respecto al polo, por lo que:



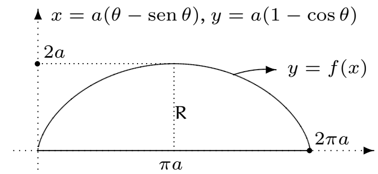
$$I_0 = \iint\limits_{\mathrm{R}}(x^2+y^2)\,dx\,dy = 2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{2a^2\cos 2\theta}} r^3\,dr\,d\theta =$$

$$2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{4a^4}{4}\cos^2 2\theta\,d\theta = a^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\psi\,d\psi = 2a^4\frac{\pi}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\pi a^4.$$

90. Calcular el momento de inercia de una lámina homogénea limitada por un arco de la

cicloide $x=a(\theta-\operatorname{sen}\theta)$, $y=a(1-\cos\theta)$ y el eje x, con respecto al eje x y al eje y.

Solución Se tiene que (ver ejercicio 10, página 35):



$$I_x=\iint\limits_{\mathsf{R}} y^2\,dx\,dy=\int_0^{2\pi a}\int_0^{f(x)} y^2\,dy\,dx=$$

$$\int_0^{2\pi} a(1-\cos\theta)\,\frac{1}{3}a^3(1-\cos\theta)^3\,d\theta=$$

$$\frac{1}{3}a^4\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^4\,d\theta=\frac{1}{3}a^4\int_0^{2\pi}(1-\cancel{4\cos\theta}+6\cos^2\theta-\cancel{4\cos^3\theta}+\cos^4\theta)\,d\theta=$$

$$\frac{4}{3}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+6\cos^2\theta+\cos^4\theta)\,d\theta=\frac{4}{3}a^4\frac{35}{16}\pi=\frac{35}{12}\pi a^4.$$

$$I_y=\iint\limits_{\mathsf{R}} x^2 dx\,dy=\int_0^{2\pi a}\int_0^{y=f(x)} x^2 dy\,dx=\int_0^{2\pi a} x^2 y(x)\,dx=\int_0^{2\pi} a^2(\theta-\operatorname{sen}\theta)^2 a^2(1-\cos\theta)^2 d\theta=$$

$$a^4\int_0^{2\pi}(\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta-2\theta\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta+\theta^2\cos^2\theta-2\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta+4\theta\operatorname{sen}\theta\cos\theta-2\theta^2\cos\theta+$$
$$\operatorname{sen}^2\theta-2\theta\operatorname{sen}\theta+\theta^2)\,d\theta=$$

$$a^4\Big[\big(-\frac{1}{4}\operatorname{sen}\theta\cos^3\theta+\frac{1}{8}\operatorname{sen}\theta\cos\theta+\frac{1}{8}\theta\big)-\big(\frac{2}{3}\theta\cos^3\theta+\frac{2}{9}\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta+\frac{4}{9}\operatorname{sen}\theta\big)+\frac{1}{4}\big(2\theta^2-$$
$$1)\operatorname{sen}\theta\cos\theta-\frac{1}{2}\theta\operatorname{sen}^2\theta+\frac{1}{12}\theta(2\theta^2+3)-\frac{2}{3}\operatorname{sen}^3\theta+\operatorname{sen}\theta\cos\theta+2\theta\operatorname{sen}^2\theta-\theta-(4\theta\cos\theta+$$
$$2(\theta^2-2)\operatorname{sen}\theta\big)+\frac{1}{2}(\theta-\operatorname{sen}\theta\cos\theta)-(\operatorname{sen}\theta-2\theta\cos\theta)+\frac{1}{3}\theta^3\Big]\Big|_0^{2\pi}=\frac{\pi(48\pi^2-35)}{12}a^4.$$

Recuerde que el valor medio de una función $f(x,y)$ en una región R es:

$$\bar{f}=\frac{1}{|\mathsf{R}|}\iint\limits_{\mathsf{R}} f(x,y)\,dx\,dy,$$

donde $|\mathsf{R}|$ en el área de R.

91. En cada caso determinar el valor medio de la función $f(x,y)$ en la región indicada:

a) $f(x,y)=2x+y$, R : limitada por $x=0$, $y=0$, $x+y=3$.

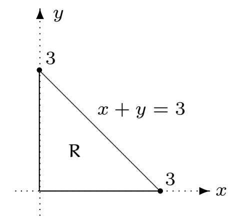
b) $f(x,y)=x+6y$, R : limitado por $y=x$, $y=5x$, $x=1$.

c) $f(x,y)=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, R : $x^2+y^2\le a^2$.

d) $f(x,y)=12-2x-3y$, R : limitada por $x=0$, $y=0$, $12-2x-3y=0$.

Solución

a) El área de R es $\frac{1}{2}3{\cdot}3 = \frac{9}{2}$. Así tenemos que:

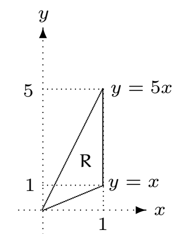


$$\overline{f} = \frac{1}{|\mathsf{R}|}\iint\limits_{\mathsf{R}} f\,dx\,dy = \frac{2}{9}\int_0^3\Big(\int_0^{3-x}(2x + y)\,dy\Big)\,dx =$$

$$\frac{2}{9}\int_0^3\Big(2xy + \frac{1}{2}y^2\Big)\Big|_0^{3-x}dx = \frac{2}{9}\int_0^3\Big(-\frac{3}{2}x^2 + 3x + \frac{9}{2}\Big)\,dx =$$

$$\frac{2}{9}\Big(-\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x\Big)\Big|_0^3 = \frac{2}{9}\cdot\frac{27}{2} = 3.$$

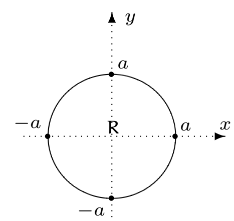
b) El área de R es $|\mathsf{R}| = \displaystyle\int_0^1\int_x^{5x} dy\,dx = \int_0^1 4x\,dx = 2x^2\Big|_0^1 = 2.$



$$\overline{f} = \frac{1}{|\mathsf{R}|}\int_0^1\int_x^{5x}(x + 6y)\,dy\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1(4x^2 + 3(25x^2 - x^2))\,dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 76x^2\,dx = \frac{38}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{38}{3}.$$

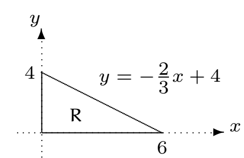
c) El área de R es $|\mathsf{R}| = \pi a^2$ y tenemos:



$$\overline{f} = \frac{1}{|\mathsf{R}|}\iint\limits_{\mathsf{R}}\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dx = \frac{1}{\pi a^2}\int_0^{2\pi}\int_0^a\sqrt{a^2 - r^2}\,r\,dr\,d\theta =$$

$$-\frac{1}{3\pi a^2}2\pi(a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a = \frac{2}{3a^2}a^3 = \frac{2}{3}a.$$

d) El área de R es $|\mathsf{R}| = \frac{1}{2}{\cdot}6{\cdot}4 = 12$ y se tiene que:



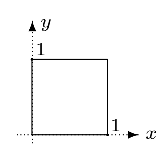
$$\overline{f} = \frac{1}{12}\int_0^6\left(\int_0^{-\frac{2}{3}x+4}(12 - 2x - 3y)\,dy\right)dx =$$

$$-\frac{1}{12}\int_0^6\Big(12y - 2xy - \frac{3}{2}y^2\Big)\Big|_0^{-\frac{2}{3}x+4}dx = \frac{1}{12}\int_0^6\Big(\frac{2}{3}x^2 - 8x + 24\Big)\,dx =$$

$$\frac{1}{12}\Big(\frac{2}{9}x^3 - 4x^2 + 24x\Big)\Big|_0^6 = \frac{48}{12} = 4.$$

92. Hallar el valor medio de la función $f(x,y) = xy^2$ en la región $\mathsf{R} = [\,0,1\,]\times[\,0,1\,]$.

Solución Dado que $|\mathsf{R}| = \displaystyle\iint\limits_{\mathsf{R}} dx\,dy = \int_0^1 dx\int_0^1 dy = 1$, $\displaystyle\iint\limits_{\mathsf{R}} xy^2\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 xy^2\,dx\,dy = \frac{1}{6}$. En conclusión $\overline{f} = \displaystyle\frac{1}{|\mathsf{R}|}\iint\limits_{\mathsf{R}} f(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{6}$.



93. Hallar el valor medio del cuadrado de la distancia del punto (x, y) del círculo $(x-a)^2 + y^2 \leq b^2$, al origen de coordenadas.

Solución La función $f(x,y) = x^2 + y^2$, entonces:

$$\int_{-b}^{b}\int_{a-\sqrt{b^2-y^2}}^{a+\sqrt{b^2-y^2}} (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_{-b}^{b}\left(\tfrac{1}{3}x^3 + y^2x\right)\Big|_{x=a-\sqrt{b^2-y^2}}^{x=a+\sqrt{b^2-y^2}} dy =$$

$$\int_{-b}^{b}\left(\frac{1}{3}(a+\sqrt{b^2-y^2})^3 + y^2(a+\sqrt{b^2-y^2}) - \frac{1}{3}(a-\sqrt{b^2-y^2})^3 - y^2(a-\sqrt{b^2-y^2})\right) dy =$$

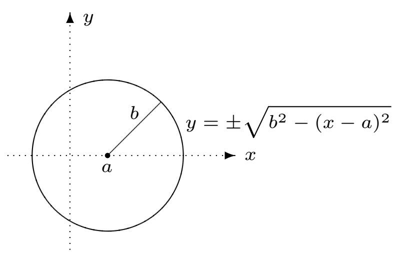
$$\int_{-b}^{b}\left(\frac{2}{3}(3a^2\sqrt{b^2-y^2} + (b^2-y^2)^{\frac{3}{2}}) + 2y^2\sqrt{b^2-y^2}\right) dy =$$

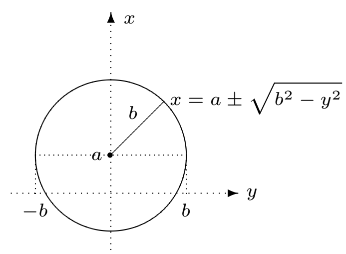
$$\Big[2a^2\Big(\frac{y\sqrt{b^2-y^2}}{2} + \frac{b^2}{2}\operatorname{arcsen}\frac{y}{b}\Big) + \frac{2}{3}\Big(\frac{y(b^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}{4} + \frac{3b^2y(b^2-y^2)^{\frac{1}{2}}}{8} + \frac{3}{8}b^4\operatorname{arcsen}\frac{y}{b}\Big) +$$

$$2\Big(-\frac{y(b^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}{4} + \frac{3b^2y(b^2-y^2)^{\frac{1}{2}}}{8} + \frac{b^4}{8}\operatorname{arcsen}\frac{y}{b}\Big)\Big]_{-b}^{b} =$$

$$2a^2b^2\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\frac{3}{8}2b^4\frac{\pi}{2} + 2\frac{b^4}{8}2\frac{\pi}{2} = a^2\pi b^2 + \frac{1}{2}\pi b^4.$$

Además, $|\mathsf{R}| = \displaystyle\iint_{\mathsf{R}} dx\,dy = \pi b^2 \Longrightarrow \bar{f} = a^2 + \tfrac{1}{2}b^2.$





2.7 Ejercicios especiales

94. a) Para $(m, \epsilon) \in \mathbb{R} \times\,]\,0,1\,[$, calcular $I_{m,\epsilon} = \displaystyle\iint_{[\,\epsilon,1\,]^2} \frac{dxdy}{(x+y)^m}$.

b) Estudiar, para m fijo, el límite de $I_{m,\epsilon}$, cuando $\epsilon \to 0^+$.

Solución

a) $\displaystyle\int_{\epsilon}^{1}\int_{\epsilon}^{1}\frac{dxdy}{(x+y)^m} = \int_{\epsilon}^{1}\frac{1}{m-1}\frac{1}{(x+y)^{m-1}}\Big|_{\epsilon}^{1} dy = \int_{\epsilon}^{1}\frac{1}{m-1}\left(\frac{1}{(1+y)^{m-1}} - \frac{1}{(\epsilon+y)^{m-1}}\right)dy =$

$$\frac{1}{(m-1)(m-2)}\,[\,2^{-m+2} - 2(1+\epsilon)^{-m+2} + (2\epsilon)^{-m+2}\,], \text{ si } m \neq 1,\ m \neq 2.$$

$I_{1,\epsilon} = 2\ln 2 - 2(1+\epsilon)\ln(1+\epsilon) + 2\epsilon\ln 2\epsilon$, $I_{2,\epsilon} = -\ln 2 + 2\ln(1+\epsilon) - \ln 2\epsilon$.

b) Si $m \in\,]-\infty, 1\,[\, \cup\,]\,1,2\,[$, $I_{m,\epsilon} \longrightarrow \dfrac{2^{2-m}-2}{(m-1)(m-2)}$, cuando $\epsilon \to 0$.

— $m \in]\,2, \infty\,[$, $I_{m,\epsilon} \longrightarrow +\infty$, cuando $\epsilon \to 0$,

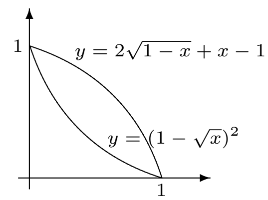
— $m = 1$, $I_{1,\epsilon} \longrightarrow 2\ln 2$, cuando $\epsilon \to 0$,

— $m = 2$, $I_{2,\epsilon} \longrightarrow +\infty$, cuando $\epsilon \to 0$.

95. a) Calcular el área de $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 1,\ \sqrt{1-x} + \sqrt{1-y} \geq 1\}$.

b) Calcular el área de $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2} / \alpha \leq \frac{y}{x} \leq \beta,\ a \leq xy \leq b\}$, para $\alpha, \beta, a, b \in \mathbb{R}$, tales que $0 < \alpha < \beta$, $0 < a < b$.

Solución



a) Debemos tener $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, por lo que:

$\sqrt{y} \geq 1 - \sqrt{x} \Longrightarrow y \geq 1 + x - 2\sqrt{x}$; $\sqrt{1-y} \geq 1 - \sqrt{1-x} \Longrightarrow$ $y \leq 2\sqrt{1-x} - 1 + x$.

El área es $\displaystyle\iint\limits_{R} dxdy = \int_0^1 \int_{(1-\sqrt{x})^2}^{1-(1-\sqrt{1-x})^2} dydx = 2\int_0^1 (\sqrt{1-x} + \sqrt{x} - 1)dx = \tfrac{2}{3}$.

b) Si se efectúa el cambio de variable $u = \frac{y}{x}$, $v = xy \Longrightarrow y = \sqrt{uv}$, $x = \sqrt{\frac{v}{u}}$, $\alpha \leq u \leq \beta$, $a \leq v \leq b$, el Jacobiano es $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{v^{\frac{1}{2}}}{2u^{3/2}} & \frac{1}{2u^{1/2}v^{1/2}} \\ \frac{v^{1/2}}{2u^{1/2}} & \frac{u^{1/2}}{2v^{1/2}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2u}$ y el área es:

$$\iint\limits_{\Delta} dxdy = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2u} \int_a^b dv\, du = \frac{1}{2}(b-a)\ln\frac{\beta}{\alpha}.$$

96. Establecer, para $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{1}{i} \binom{n}{i} \left(\sum\limits_{j=1}^{i} \frac{1}{j} \right)$.

Solución $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \displaystyle\int_0^1 \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} x^{k-1}y^{k-1} dxdy = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1-(xy)^n}{1-xy} dx\, dy$. Efectuando el cambio de variable $u = 1 - xy$, (para y fijo) tenemos:

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1-(xy)^n}{1-xy} dx = \frac{1}{y} \int_{1-y}^1 \frac{1-(1-u)^n}{u} du = \frac{1}{y} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \binom{n}{i} \frac{1}{i}(1-(1-y)^i)$.

Así, efectuando el cambio de variable $1 - y = z$ se tiene:

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \binom{n}{i} \frac{1}{i} \int_0^1 \frac{1-(1-y)^i}{y} dy = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \binom{n}{i} \frac{1}{i} \int_0^1 \frac{1-z^i}{1-z} dz =$
$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \binom{n}{i} \frac{1}{i} \int_0^1 (1 + z + \cdots + z^{i-1}) dz = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \binom{n}{i} \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{j}$.

97. Para $a > 0$, sea $D_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq a^2\}$, $\Delta_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| \leq a,\ |y| \leq a\}$,

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2},\ I_a = \iint\limits_{D_a} f(x,y)dxdy,\ J_a = \iint\limits_{\Delta_a} f(x,y)dxdy.$$

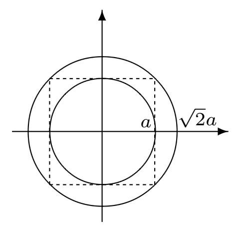
a) Calcular I_a.

b) Probar que $I_a \leq J_a \leq I_{a\sqrt{2}}$.

c) Deducir $\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

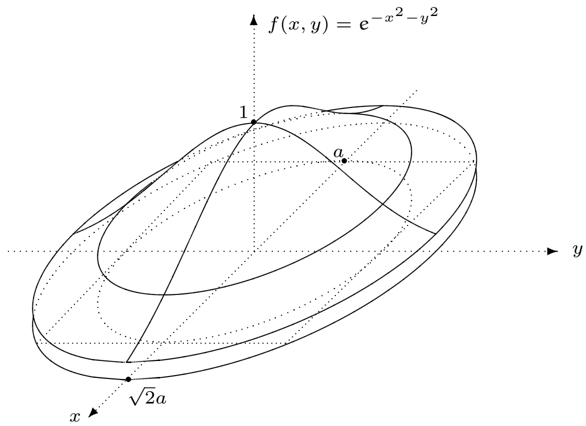
Solución

a) Pasando de coordenadas cartesianas a coordenadas polares: $I_a = \int_0^{2\pi} \int_0^a \mathrm{e}^{-r^2} r dr = \pi(1-\mathrm{e}^{-a^2})$. Ver ejercicio 53f), página 96.



b) Como $D_a \subset \Delta_a \subset D_{a\sqrt{2}}$ y $f \geq 0$, se tiene $I_a \leq J_a \leq I_{a\sqrt{2}}$.

c) $J_a = \left(\int_{-a}^{a} \mathrm{e}^{-x^2} dx\right)^2 = 4\left(\int_0^a \mathrm{e}^{-x^2} dx\right)^2$, por lo tanto $\pi(1-\mathrm{e}^{-a^2}) \leq J_a \leq \pi(1-\mathrm{e}^{-2a^2})$, o sea $J_a \longrightarrow \pi$, cuando $a \to \infty$ y $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.



98. a) Probar que $\forall x \in [0,1]$, $\ln(1+x) = \int_0^1 \frac{xdy}{1+xy}$.

b) Deducir el valor de $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$.

Solución

a) Es inmediato.

b) Sea $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx = \iint\limits_D \frac{x\,dx\,dy}{(1+x^2)(1+xy)}$, donde $D = [0,1]^2$. Cambiando x por y se tiene que $I = \iint\limits_D \frac{y\,dy\,dx}{(1+y^2)(1+xy)}$, por lo tanto sumando tenemos:

$$2I = \iint\limits_D \frac{x+y+xy^2+yx^2}{(1+x^2)(1+xy)(1+y^2)}dxdy = \iint\limits_D \frac{(x+y)\cancel{(1+xy)}}{(1+x^2)\cancel{(1+xy)}(1+y^2)}dxdy =$$

$2\iint\limits_D \frac{x}{(1+x^2)(1+y^2)}dxdy = 2\int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2}\int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = \ln(1+x^2)\Big|_0^1 \arctan y\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}\ln 2$, o sea $I = \frac{1}{8}\pi \ln 2$.

99. Sean a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$ y consideremos el conjunto $E = \{f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+^*/f$ es continua$\}$. Calcular $\inf\limits_{f\in E}\left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b \frac{dx}{f(x)}\right)$ y encontrar las funciones f que dan el mínimo.

Solución Sea $\mathsf{R} = [a,b]^2$, $I(f) = \iint\limits_{\mathsf{R}} \frac{f(x)}{f(y)}dxdy$ i.e. $I(f) = \frac{1}{2}\iint\limits_{\mathsf{R}} \left[\frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)}\right]dxdy =$

$$\frac{1}{2}\iint\limits_{\mathsf{R}} \frac{f^2(x)+f^2(y)}{f(x)f(y)}dxdy = \frac{1}{2}\iint\limits_{\mathsf{R}} \frac{2f(x)f(y)+(f(x)-f(y))^2}{f(y)f(x)}dxdy =$$

$\iint\limits_{\mathsf{R}} dxdy + \frac{1}{2}\iint\limits_{\mathsf{R}} \frac{(f(x)-f(y))^2}{f(x)f(y)}dxdy = (b-a)^2 + \frac{1}{2}\iint\limits_{\mathsf{R}} \frac{(f(x)-f(y))^2}{f(x)f(y)}dxdy$, por lo tanto

$\inf\limits_{f\in E}\iint\limits_{\mathsf{R}} \frac{f(x)}{f(y)}dxdy = \inf\limits_{f\in E}\int_a^b f(x)dx\int_a^b \frac{1}{f(y)}dy = (b-a)^2$, por lo que las funciones que minimizan la expresión son las funciones constantes estrictamente positivas.

100. Sea $K = [-1,1]^2$, Γ el borde de K y sea E el espacio vectorial real de aplicaciones de K en $\mathbb{R}$ de clase C^∞ que se anulan, así como sus derivadas parciales sucesivas sobre Γ.

a) Se denota $\Phi\colon E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la aplicación definida por $\Phi(f,g) = \iint\limits_K f(x,y)g(x,y)dxdy$. Verificar que Φ es un producto escalar sobre E.

b) Demostrar que las aplicaciones d_x y d_y de E en E, definidas por $d_xf = \frac{\partial f}{\partial x}$ y $d_yf = \frac{\partial f}{\partial y}$ son endomorfismos anti-simétricos de (E,Φ).

c) Deducir que el Laplaciano $\Delta\colon E \longrightarrow E$, con $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ es un endomorfismo simétrico de (E,Φ).

Solución

a) Φ es un producto escalar, pues es bilineal y simétrica y $\Phi(f,f) = \iint\limits_K f(x,y)f(x,y)dxdy \geq 0$ y $\Phi(f,f) > 0$ para $f \neq \mathbf{0}$.

b) $d_x\colon E \longrightarrow E$ está bien definida, pues si f es C^∞, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ es C^∞, por lo que es un endomorfismo, ya que f y f_x se anulan sobre Γ. Ahora $\Phi(d_x(f), g) = \iint\limits_K \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)g(x,y)dxdy =$
$\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(f(x,y)g(x,y)\Big|_{x=-1}^{x=1} - \int_{-1}^{1} f(x,y)\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)dx\right)dy = -\iint\limits_K f(x,y)\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)dxdy =$
$-\,\Phi(f, d_x(g))$, ya que f y g se anulan en el borde Γ.

c) El Laplaciano $\Delta\colon E \longrightarrow E$ está bien definido, pues si $f \in E$, $f \in C^\infty$ y se anula fuera de $K \Longrightarrow \Delta f \in C^\infty$ y se anula fuera de K.

Además, $\Phi(\Delta f, g) = \iint\limits_K \Delta f(x,y)g(x,y)dxdy = \iint\limits_K f(x,y)\Delta g(x,y)dxdy = \Phi(f, \Delta g)$, pues
$\displaystyle\iint\limits_K \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)g(x,y)dxdy = -\iint\limits_K \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)dxdy = \iint\limits_K f(x,y)\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y)dxdy.$

101. Sea $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ y sean f, $g\colon [\,a,b\,] \longrightarrow \mathbb{R}$ aplicaciones continuas a trozos. Estudiando la integral $\iint\limits_{[\,a,b\,]^2} (f(x)g(y) - f(y)g(x))^2 dxdy$, encontrar la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Estudiar el caso de igualdad para f y g continuas.

Solución Es claro que tenemos $\displaystyle\iint\limits_{[\,a,b\,]^2} (f(x)g(y) - f(y)g(x))^2 dxdy = 2\int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(y)dy$
$\displaystyle -2\int_a^b\int_a^b f(x)g(x)g(y)f(y)dxdy = 2\int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx - 2\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \geq 0 \Longrightarrow$
$|\,\langle f, g\rangle\,| \leq \|f\|\,\|g\|$.

En caso de igualdad $f(x)g(y) - f(y)g(x) = 0$, por lo tanto si $f \neq 0$, $\exists\, y_0 \in [\,a,b\,]$ tal que $f(y_0) \neq 0 \Longrightarrow f(x)\dfrac{g(y_0)}{f(y_0)} = g(x)$, $\forall\, x \in [\,a,b\,]$, es decir $f = \lambda g$.

102. Sean f, g_1, $g_2\colon [\,0,1\,] \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $f \geq 0$, continua y g_1, g_2 son crecientes. Estudiando $\iint\limits_{[\,0,1\,]^2} f(x)f(y)\big(g_1(x) - g_1(y)\big)\big(g_2(x) - g_2(y)\big)dxdy$, demostrar que:
$$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)\left(\int_0^1 f(x)g_1(x)g_2(x)dx\right) \geq \left(\int_0^1 f(x)g_1(x)dx\right)\left(\int_0^1 f(x)g_2(x)dx\right).$$
Solución Sabemos que $f(x)f(y)(g_1(x) - g_1(y))(g_2(x) - g_2(y)) \geq 0$, $\forall\, x$, $\forall\, y \in [\,0,1\,]$, es decir $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 f(x)f(y)(g_1(x)g_2(x) + g_1(y)g_2(y) - g_1(y)g_2(x) - g_1(x)g_2(y))dxdy =$
$\displaystyle 2\int_0^1\int_0^1 f(x)f(y)g_1(x)g_2(x)dxdy - 2\int_0^1\int_0^1 f(x)f(y)g_1(y)g_2(x)dxdy =$

$$2\left(\int_0^1 f(x)dx\right)\left(\int_0^1 f(x)g_1(x)g_2(x)dx\right) - 2\left(\int_0^1 f(x)g_1(x)dx\right)\left(\int_0^1 f(x)g_2(x)dx\right) \geq 0.$$

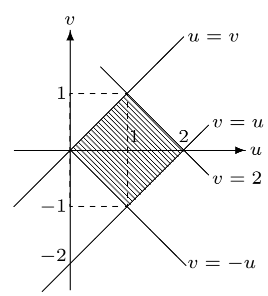
103. Calcular $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ estudiando $\displaystyle\iint\limits_{[0,1]^2} \frac{dx\,dy}{1-xy}$.

Solución Sea $I = \displaystyle\iint\limits_{[0,1]^2} \frac{dx\,dy}{1-xy} = -\int_0^1 \frac{\ln(1-y)}{y}dy = -\int_0^1 \frac{\ln z}{1-z}dz = -\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}dt.$

Por otro lado, sabemos que $\dfrac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots \Longrightarrow \displaystyle\int_0^t \frac{dx}{1-x} = -\ln(1-t) =$ $t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 + \cdots + \frac{1}{n}t^n + \cdots \Longrightarrow -\dfrac{\ln(1-t)}{t} = 1 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{3}t^2 + \cdots + \frac{1}{n}t^{n-1} + \cdots \Longrightarrow$ $-\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}dt = t + \frac{1}{2^2}t^2 + \frac{1}{3^2}t^3 + \cdots + \frac{1}{n^2}t^n + \cdots\Big|_0^1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$

Ahora, $I = \displaystyle\int_0^1\int_0^1 \frac{dydx}{1-xy} = \frac{1}{2}\int_0^1\int_{-u}^{u} \frac{4dvdu}{4-u^2+v^2} + \frac{1}{2}\int_1^2\int_{u-2}^{2-u} \frac{4dvdu}{4-u^2+v^2}$, pues al hacer el cambio $u = x+y$, $v = x-y$ tenemos que $x = \frac{1}{2}(u+v)$, $y = \frac{1}{2}(u-v)$, $J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$.

Aquí $0 \leq u+v \leq 2$, $0 \leq u-v \leq 2 \Longrightarrow v \leq u$, $-2 \leq v-u \leq 0 \Longrightarrow -1 \leq v \leq 1$, $0 \leq u \leq 2$. Así $0 < x < 1$, $0 < y < 1 \Longrightarrow 0 \leq u+v \leq 2$, $0 \leq u-v \leq 2$ es la región limitada por $-u = v$, $v = 2-u$, $u = v$, $u+2 = v$. Ahora, $I = 4\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-u^2}} \arctan\frac{u}{\sqrt{4-u^2}}du +$ $4\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{4-u^2}} \arctan\frac{2-u}{\sqrt{4-u^2}}du.$



Para la primera integral tomemos $u = 2\operatorname{sen}\theta$, $\theta = \operatorname{arcsen}\frac{1}{2}u$, $du = 2\cos\theta d\theta$, $\sqrt{4-u^2} =$ $2\cos\theta$, $\arctan\left(\dfrac{2\operatorname{sen}\theta}{2\cos\theta}\right) = \theta$. Así tenemos $4\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-u^2}} \arctan\frac{u}{\sqrt{4-u^2}}du =$

$4\displaystyle\int_0^{\frac{1}{6}\pi} \frac{1}{2\cos\theta}\theta 2\cos\theta d\theta = 2(\tfrac{1}{6}\pi)^2 = \tfrac{1}{18}\pi^2.$

Para la segunda integral tomemos $x = 2-u$, $4-(2-u)^2 = 2x-x^2$, $dx = -du$, entonces se tiene $4\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{4-x}} \arctan\frac{x}{\sqrt{x}\sqrt{4-x}}dx = 4\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{4-x}} \arctan\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4-x}}dx$. Consideremos el cambio $x = 4\operatorname{sen}^2\theta$, $\sqrt{x} = 2\operatorname{sen}\theta$, $dx = 8\operatorname{sen}\theta\cos\theta d\theta$, $\sqrt{4-x} = 2\cos\theta$ i.e. la integral igual a $4\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2\operatorname{sen}\theta 2\cos\theta} \arctan\left(\frac{2\operatorname{sen}\theta}{2\cos\theta}\right) 8\operatorname{sen}\theta\cos\theta d\theta = 8\int_0^{\frac{\pi}{6}} \theta d\theta = \tfrac{1}{9}\pi^2$. Finalmente, $I = \frac{1}{18}\pi^2 + \frac{1}{9}\pi^2 = \frac{1}{6}\pi^2$.

104. Calcular $\displaystyle\int_0^{\infty}\left(\int_x^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} t}{t}dt\right)dx$.

Solución Sea $\Phi\colon [\,0,+\infty\,[\longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $\Phi(x)=\displaystyle\int_x^{\infty}\frac{\operatorname{sen} t}{t}dt$ (integral convergente); entonces integrando por partes dos veces tenemos:

$$\Phi(x)=\int_x^{\infty}\frac{\operatorname{sen} t}{t}dt=-\frac{\cos t}{t}\Big|_x^{\infty}-\int_x^{\infty}\frac{\cos t}{t^2}dt=\frac{\cos x}{x}-\left[\frac{\operatorname{sen} t}{t^2}\Big|_x^{\infty}+2\int_x^{\infty}\frac{\operatorname{sen} t}{t^3}dt\right]=$$

$\displaystyle\frac{\cos x}{x}+\frac{\operatorname{sen} x}{x^2}-2\int_x^{\infty}\frac{\operatorname{sen} t}{t^3}dt$. De este modo:

$$\int_\epsilon^{+\infty}\Phi(x)dx=\int_\epsilon^{\infty}\int_x^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt\,dx=\int_\epsilon^{\infty}\frac{\cos x}{x}dx+\int_\epsilon^{\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x^2}dx-2\int_\epsilon^{\infty}\int_x^{\infty}\frac{\operatorname{sen} t}{t^3}\,dt\,dx,$$

pero:

$$2\int_\epsilon^{\infty}\int_x^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} t}{t^3}dtdx=2\int_\epsilon^{+\infty}\int_\epsilon^{t}\frac{\operatorname{sen} t}{t^3}dx\,dt=2\int_\epsilon^{+\infty}(t-\epsilon)\frac{\operatorname{sen} t}{t^3}\,dt=$$

$\displaystyle 2\int_\epsilon^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} t}{t^2}\,dt-2\epsilon\int_\epsilon^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} t}{t^3}\,dt$, con lo cual se tiene:

$$\int_\epsilon^{+\infty}\Phi(x)dx=\int_\epsilon^{+\infty}\frac{\cos x}{x}dx+\int_\epsilon^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x^2}dx-2\int_\epsilon^{\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x^2}dx+2\epsilon\int_\epsilon^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x^3}\,dx=$$

$$\int_\epsilon^{+\infty}\frac{\cos x}{x}dx-\int_\epsilon^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x^2}dx-2\epsilon\int_\epsilon^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x^3}\,dx=$$

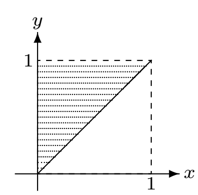
$$\int_\epsilon^{+\infty}\frac{\cos x}{x}dx-\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\Big|_\epsilon^{+\infty}+\int_\epsilon^{+\infty}\frac{\cos x}{x}dx\right)+2\epsilon\int_\epsilon^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x^3}\,dx=$$

$\displaystyle\frac{\operatorname{sen}\epsilon}{\epsilon}+2\epsilon\int_\epsilon^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x^3}\,dx\longrightarrow 1$, cuando $\epsilon\to 0$, es decir:

$$\int_0^{\infty}\left(\int_x^{+\infty}\frac{\operatorname{sen} t}{t}dt\right)dx=1.$$

105. Sea $\lambda>\frac{1}{2}$, demostrar que no existe aplicación continua $f\colon[\,0,1\,]\longrightarrow\mathbb{R}$, tal que $\forall\, x\in[\,0,1\,]$, $f(x)=1+\lambda\displaystyle\int_x^1 f(y)f(y-x)dy$.

Solución Suponiendo que exista f, tenemos $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = x\Big|_0^1+\lambda\int_0^1\int_x^1 f(y)f(y-x)dydx = 1+\lambda\int_0^1\int_0^y f(y-x)dx\,f(y)dy = 1+\lambda\int_0^1\int_0^y f(z)dz\,f(y)dy=1+\lambda\int_0^1 F(y)F'(y)dy=1+\tfrac{1}{2}\lambda F(1)^2$,



donde $F(y)=\displaystyle\int_0^y f(z)dz$ y por lo tanto $\alpha=F(1)=1+\frac{1}{2}\lambda\alpha^2\Longrightarrow\frac{1}{2}\lambda\alpha^2-\alpha+1=0\Longrightarrow$ $\alpha=\dfrac{1\pm\sqrt{1-2\lambda}}{\lambda}$ y si $\lambda>\frac{1}{2}$, $\alpha\notin\mathbb{R}$, que es una contradicción. Así no puede existir una función f que satisfaga la propiedad enunciada.

106. Sean a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$ y sea $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación continua tal que $\forall\, t \in \mathbb{R} \setminus [\,a, b\,]$, $f(t) = 0$. Para $h > 0$ se denota $f_h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f_h(x) = \dfrac{1}{2h} \displaystyle\int_{x-h}^{x+h} f(t)dt$. Demostrar que $\forall\, h > 0$, $\displaystyle\int_a^b |f_h(t)|dt \leq \int_a^b |f(t)|dt$.

Solución Sabemos que $\displaystyle\int_a^b |f_h(t)|dt = \int_a^b \left|\frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} f(x)dx\right| dt \leq \int_a^b \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} |f(x)|dx\, dt =$

$$\int_{a-h}^{b+h} \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} |f(x)|dt\, dx = \int_{a-h}^{b+h} |f(x)|dx = \int_a^b |f(t)|dt.$$

Capítulo 3

Integrales triples y múltiples

3.1 Integrales triples

1. Calcular las siguientes integrales triples:

a) $\displaystyle\int_0^1 \Big(\int_0^2 \Big(\int_0^3 dz\Big)dy\Big)dx.$

b) $\displaystyle\int_0^a \Big(\int_0^b \Big(\int_0^c (x+y+z)dz\Big)dy\Big)dx.$

c) $\displaystyle\int_0^a \Big(\int_0^x \Big(\int_0^y xyzdz\Big)dy\Big)dx.$

d) $\displaystyle\int_0^a \Big(\int_0^x \Big(\int_0^{xy} x^3y^2zdz\Big)dy\Big)dx.$

Solución

a) $\displaystyle\int_0^1 \Big(\int_0^2 \Big(\int_0^3 dz\Big)dy\Big)dx = \int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_0^3 dz = 1{\cdot}2{\cdot}3 = 6.$

b) $\displaystyle\int_0^a \Big(\int_0^b \Big(\int_0^c (x+y+z)dz\Big)dy\Big)dx = \int_0^a \Big(\int_0^b \Big((x+y)z + \frac{z^2}{2}\Big)\Big|_0^c dy\Big)dx =$
$\displaystyle\int_0^a \Big(\int_0^b \frac{1}{2}c(2x+2y+c)dy\Big)dx = \int_0^a \frac{1}{2}c((2x+c)y+y^2)\Big|_0^b dx = \int_0^a \frac{1}{2}bc(2x+b+c)dx =$
$\displaystyle\frac{1}{2}bcx(x+b+c)\Big|_0^a = \frac{1}{2}abc(a+b+c).$

c) $\displaystyle\int_0^a \Big(\int_0^x \Big(\int_0^y xyzdz\Big)dy\Big)dx = \int_0^a \Big(\int_0^x xy\frac{z^2}{2}\Big|_0^y dy\Big)dx = \int_0^a \Big(\int_0^x \frac{1}{2}xy^3dy\Big)dx =$
$\displaystyle\int_0^a \frac{1}{8}xy^4\Big|_0^x dx = \int_0^a \frac{1}{8}x^5dx = \frac{1}{48}x^6\Big|_0^a = \frac{1}{48}a^6.$

d) $\displaystyle\int_0^a \Big(\int_0^x \Big(\int_0^{xy} x^3y^2zdz\Big)dy\Big)dx = \int_0^a \Big(\int_0^x \frac{1}{2}x^3y^2z^2\Big|_0^{xy} dy\Big)dx = \int_0^a \Big(\int_0^x \frac{1}{2}x^5y^4dy\Big)dx =$
$\displaystyle\int_0^a \frac{1}{10}x^5y^5\Big|_0^x dx = \int_0^a \frac{1}{10}x^{10}dx = \frac{1}{110}x^{11}\Big|_0^a = \frac{a^{11}}{110}.$

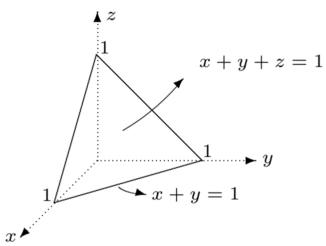
2. Calcular las siguientes integrales triples en el volumen indicado:

a) $\displaystyle\iiint_V \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3}$, V es el volumen limitado por $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$.

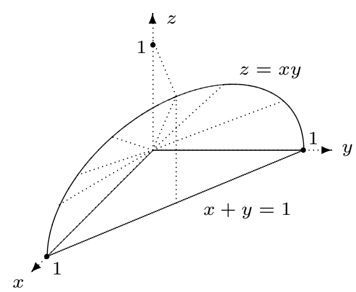
b) $\displaystyle\iiint_V xy\,dxdydz$, V es el volumen limitado por $z=xy$, $x+y=1$, $z=0$, $(z\geq 0)$.

c) $\displaystyle\iiint_V y\cos(z+x)dxdydz$, V es el volumen limitado por $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $z=0$, $x+z=\frac{\pi}{2}$.

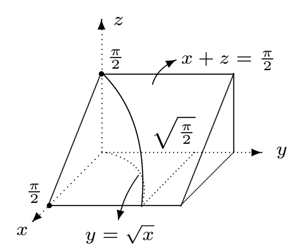
Solución



a) $$\iiint_V \frac{1}{(x+y+z+1)^3}dxdydz=$$
$$\int_0^1\Big(\int_0^{1-x}\Big(\int_0^{1-x-y}\frac{1}{(x+y+z+1)^3}dz\Big)dy\Big)dx=$$
$$\int_0^1\Big(\int_0^{1-x}-\frac{1}{(x+y+z+1)^2}\Big|_0^{1-x-y}dy\Big)dx=$$
$$\int_0^1\Big(\int_0^{1-x}\Big(-\frac{1}{8}+\frac{1}{2(x+y+1)^2}\Big)dy\Big)dx=\int_0^1\Big(-\frac{1}{8}y-\frac{1}{2(x+y+1)}\Big)\Big|_0^{1-x}dx=$$
$$\int_0^1\Big(\frac{1}{2(x+1)}+\frac{x-3}{8}\Big)dx=\Big(\frac{1}{2}\ln(x+1)+\frac{1}{8}\Big(\frac{x^2}{2}-3x\Big)\Big)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\Big(\ln 2-\frac{5}{8}\Big).$$



b) $$\iiint_V xydxdydz=\int_0^1\Big(\int_0^{1-x}\Big(\int_0^{xy}xydz\Big)dy\Big)dx=$$
$$\int_0^1\Big(\int_0^{1-x}x^2y^2dy\Big)dx=\int_0^1\frac{1}{3}x^2(1-x)^3dx=\frac{1}{3}\beta(3,4)=$$
$$\frac{1}{3}\frac{2!\cdot 3!}{6!}=\frac{1}{180}.$$



c) $$\iiint_V y\cos(z{+}x)dxdydz=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_0^{\sqrt{x}}\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}y\cos(z{+}x)dz\Big)dy\Big)dx=$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_0^{\sqrt{x}}y\,\mathrm{sen}(x+z)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}-x}dy\Big)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_0^{\sqrt{x}}y(1-\mathrm{sen}\,x)dy\Big)dx=$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}x(1-\mathrm{sen}\,x)dx=\Big(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,x+\frac{1}{2}x\cos x\Big)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}.$$

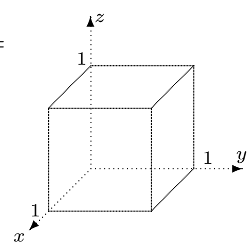
3. Calcular las siguientes integrales y dibujar la región de integración:

a) $\displaystyle\int_0^1\int_0^1\int_0^1\frac{dz}{\sqrt{x+y+z+1}}$ b) $\displaystyle\int_0^2\int_0^{2\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{\frac{4x-y^2}{2}}}x\,dz\,dy\,dx.$

c) $\displaystyle\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\frac{dz}{\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}}$ d) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y}x\,y\,z\,dz\,dy\,dx.$

Solución

a) $\displaystyle\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{dz\,dy\,dx}{\sqrt{x+y+z+1}} = \int_0^1\int_0^1 2\sqrt{x+y+z+1}\Big|_{z=0}^{z=1} dy\,dx =$



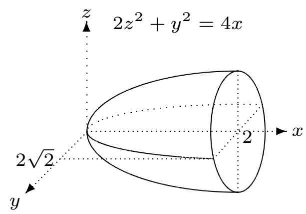
$\displaystyle\int_0^1\int_0^1 2\left(\sqrt{x+y+2}-\sqrt{x+y+1}\right) dy\,dx =$

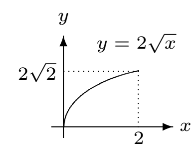
$\displaystyle\int_0^1 \frac{4}{3}\left((x+y+2)^{\frac{3}{2}}-(x+y+1)^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_{y=0}^{y=1} dx =$

$\displaystyle\int_0^1 \frac{4}{3}\left((x+3)^{\frac{3}{2}}-2(x+2)^{\frac{3}{2}}+(x+1)^{\frac{3}{2}}\right) dx = \frac{8}{15}\left((x+3)^{\frac{5}{2}}-2(x+2)^{\frac{5}{2}}+(x+1)^{\frac{5}{2}}\right)\Big|_0^1 =$

$\displaystyle\frac{8}{15}(32-27\sqrt{3}+12\sqrt{2}-1) = \frac{8}{15}(31-27\sqrt{3}+12\sqrt{2}).$

b) $\displaystyle\int_0^2\int_0^{2\sqrt{x}}\int_0^{\sqrt{\frac{4x-y^2}{2}}} x\,dz\,dy\,dx =$





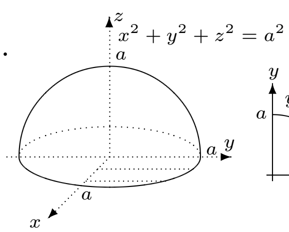
$\displaystyle\int_0^2\int_0^{2\sqrt{x}} x\sqrt{\frac{4x-y^2}{2}}\,dy\,dx =$

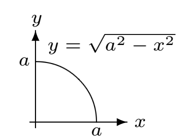
$\displaystyle\int_0^2 \left(\sqrt{2}x^2 \arctan\frac{y}{\sqrt{4x-y^2}} + \sqrt{2}\frac{yx\sqrt{4x-y^2}}{4}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=2\sqrt{x}} dx = \int_0^2 \sqrt{2}\frac{\pi}{2}x^2\,dx = \sqrt{2}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 8 =$

$\displaystyle\frac{4\pi\sqrt{2}}{3}$, ya que $\displaystyle\lim_{y\to\sqrt{2x}}\left(\sqrt{2}x^2\arctan\frac{y}{\sqrt{4x-y^2}}\right) = \sqrt{2}x^2\frac{\pi}{2}.$

c) $\displaystyle I = \int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \frac{dz\,dy\,dx}{\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}}.$

La integral se efectúa sobre una región que es un $\frac{1}{8}$ de la esfera de radio a y centro $(0,0,0)$. Así pasando a coordenadas esféricas tenemos:

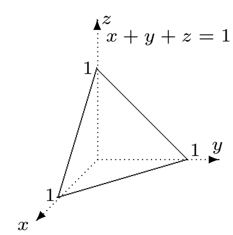


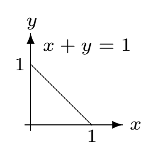


$\displaystyle I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a \frac{r^2\cos\psi}{\sqrt{a^2-r^2}}dr\,d\psi\,d\varphi = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\,d\psi\int_0^a\frac{r^2\,dr}{\sqrt{a^2-r^2}} =$

$\displaystyle\frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2}r\sqrt{a^2-r^2}+\frac{1}{2}a^2\operatorname{arcsen}\frac{r}{a}\right)\Big|_0^a = \frac{\pi}{2}\left(0+\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2a^2}{8}.$

d) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} xyz\,dz\,dy\,dx =$





$\displaystyle\int_0^1\int_0^{1-x}\frac{1}{2}xy(1-x-y)^2dy\,dx =$

$\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^{1-x} x((1-x)^2y-2(1-x)y^2+y^3)\,dy\,dx =$

$\displaystyle\frac{1}{24}\int_0^1 x(1-x)^2(x^2-2x+1)\,dx = \frac{1}{24}\int_0^1 x(1-x)^4\,dx = \frac{1}{24}\beta(2,5) = \frac{1}{24}\cdot\frac{\Gamma(2)\Gamma(5)}{\Gamma(7)} = \frac{1}{24}\frac{4!}{6!} =$

$\displaystyle\frac{1}{720}.$

3.2 Cambio de variable

4. Calcular las siguientes integrales en la región indicada.

a) $\displaystyle\iiint\limits_V (x+y+z)^2\,dx\,dy\,dz$, V en la parte común del paraboloide $2az \geq x^2+y^2$ y la esfera $x^2+y^2+z^2 \leq 3a^2$.

b) $\displaystyle\iiint\limits_V z^2\,dx\,dy\,dz$, V es la intersección de las esferas $x^2+y^2+z^2 \leq a^2$, $x^2+y^2+z^2 \leq 2az$.

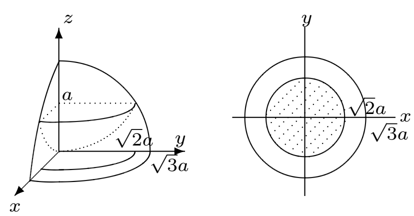
c) $\displaystyle\iiint\limits_V z\,dx\,dy\,dz$, V está limitado por el plano $z=0$ y la mitad superior del elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

d) $\displaystyle\iiint\limits_V \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dx\,dy\,dz$, V es el interior del elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

e) $\displaystyle\iiint\limits_V z\,dx\,dy\,dz$, V es la región limitada por el cono $z^2=\dfrac{h^2}{a^2}(x^2+y^2)$ y el plano $z=h$.

Solución

a) La intersección se da en $z^2+2az-3a^2=0=(z-a)(z+3a)$, es decir $z=a$ ya que se elimina la solución $z=-3a$, pues $z\geq 0$ en el paraboloide $2az \geq x^2+y^2$.



Si $z=a$ tenemos $x^2+y^2=2a^2$, curva de intersección de las superficies y la integral es:

$$\iiint\limits_V (x+y+z)^2\,dx\,dy\,dz = \int_{-\sqrt{2}a}^{\sqrt{2}a}\int_{-\sqrt{2a^2-x^2}}^{\sqrt{2a^2-x^2}}\int_{\frac{x^2+y^2}{2a}}^{\sqrt{3a^2-x^2-y^2}} (x+y+z)^2\,dz\,dy\,dx.$$

Efectuando el cambio a coordenadas esféricas tenemos $x=r\cos\psi\cos\varphi$, $y=r\cos\psi\operatorname{sen}\varphi$, $z=r\operatorname{sen}\psi$, $J=r^2\cos\psi$, de modo que la integral se parte en dos integrales; donde r varía así:

$$\begin{array}{ll} 0\leq r\leq 2a\tan\psi\sec\psi, & 0\leq\varphi\leq 2\pi,\ 0\leq\psi\leq\arctan\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ 0\leq r\leq\sqrt{3}a, & 0\leq\varphi\leq 2\pi,\ \arctan\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leq\psi\leq\dfrac{\pi}{2}. \end{array}$$

La primera integral es:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_0^{2a\tan\psi\sec\psi} r^4(1+\cos^2\psi\operatorname{sen}2\varphi+\operatorname{sen}2\psi\cos\varphi+\operatorname{sen}2\psi\operatorname{sen}\varphi)\cos\psi\,dr\,d\psi\,d\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{32}{5}a^5\tan^5\psi\sec^5\psi(1+\cos^2\psi\cancel{\operatorname{sen}2\varphi}+\operatorname{sen}2\psi\cancel{\cos\varphi}+\operatorname{sen}2\psi\cancel{\operatorname{sen}\varphi})\cos\psi\,d\psi\,d\varphi =$$

$$2\pi\frac{32}{5}a^5\int_0^{\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}}\tan^5\psi\sec^4\psi\,d\psi=\frac{64}{5}\pi a^5\int_0^{\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}}(\tan^5\psi+\tan^7\psi)\sec^2\psi\,d\psi=$$

$$\frac{64}{5}a^5\big(\frac{1}{6}\tan^6\psi+\frac{1}{8}\tan^8\psi\big)\Big|_0^{\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{64}{5}a^5\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{16}\right)=\frac{11}{30}\pi a^5.$$

Observemos que en el cálculo de la integral anterior las expresiones $\cancel{\operatorname{sen}2\varphi}$, $\cancel{\cos\varphi}$, $\cancel{\operatorname{sen}\varphi}$ no significan que se anulan o eliminan, sino que la integral de la expresión como tal vale 0. En efecto, al calcular la integral de $[\,0,2\pi\,]$, ésta se anula en los tres casos.

Observamos además que $(x+y+z)^2=1+\cos^2\psi\operatorname{sen}2\varphi+\operatorname{sen}2\psi\cos\varphi+\operatorname{sen}2\psi\operatorname{sen}\varphi$.

La segunda integral es:

$$\int_0^{2\pi}\int_{\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt{3}a}r^4(1+\cos^2\cancel{\psi\operatorname{sen}2\varphi}+\operatorname{sen}2\psi\cancel{\cos\varphi}+\operatorname{sen}2\psi\cancel{\operatorname{sen}\varphi})\cos\psi\,dr\,d\psi\,d\varphi=$$

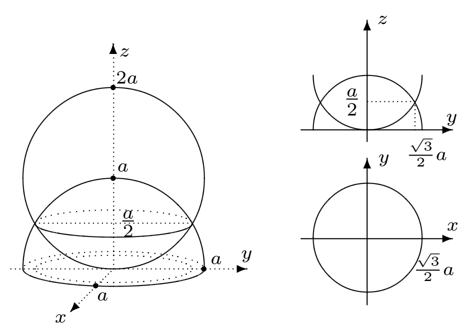
$$2\pi\int_{\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{5}r^5\Big|_0^{\sqrt{3}a}\cos\psi\,d\psi=\frac{2}{5}\pi a^5 9\sqrt{3}\operatorname{sen}\psi\Big|_{\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{18}{5}\sqrt{3}\pi a^5\big(1-\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\big)=$$

$$\frac{18}{5}\sqrt{3}\pi a^5\left(1-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Se usó el hecho que $\operatorname{sen}\psi=\dfrac{\tan\psi}{\sec\psi}=\dfrac{\tan\psi}{\sqrt{1+\tan^2\psi}}$. Finalmente la integral es:

$$\frac{\pi a^5}{5}(18\sqrt{3}-18)+\frac{\pi a^5}{5}\frac{11}{6}=\frac{\pi a^5}{5}\left(18\sqrt{3}-18+\frac{11}{6}\right)=\frac{\pi a^5}{5}\left(18\sqrt{3}-\frac{97}{6}\right).$$

b) Las superficies $x^2+y^2+z^2=a^2$ y $x^2+y^2+z^2=2az$ se intersecan cuando $a^2=2az$ i.e. $z=\frac{a}{2}$. Así, cuando $z=\frac{a}{2}$, tenemos que $x^2+y^2=\dfrac{3a^2}{4}$ (curva de intersección). Vamos a cambiar a coordenadas esféricas, por lo que necesitamos describir en la región acotada, las superficies en estas nuevas coordenadas. En efecto:



Si $0\le\psi\le\frac{\pi}{6}$, $x^2+y^2+z^2=2az$ se escribe $r^2=2ar\operatorname{sen}\psi\Longrightarrow 0\le r\le 2a\operatorname{sen}\psi$, $0\le\varphi\le 2\pi$.

Si $\frac{\pi}{6}\le\psi\le\frac{\pi}{2}$, $x^2+y^2+z^2=a^2$ se escribe $r=a\Longrightarrow 0\le r\le a$, $0\le\varphi\le 2\pi$. Así tenemos que:

$$\iiint\limits_V z^2\,dx\,dy\,dz=\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}a}^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}\int_{-\sqrt{\frac{3a^2}{4}-x^2}}^{\sqrt{\frac{3a^2}{4}-x^2}}\int_{a-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}z^2\,dz\,dy\,dx=$$

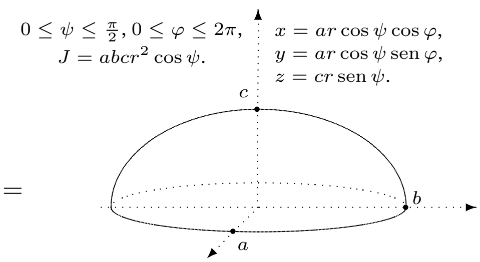
$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_0^{2a\,\mathrm{sen}\,\psi} r^4\,\mathrm{sen}^2\psi\cos\psi\,dr\,d\psi\,d\varphi + \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a} r^4\,\mathrm{sen}^2\psi\cos\psi\,dr\,d\psi\,d\varphi =$$

$$2\pi\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{5}(2a\,\mathrm{sen}\,\psi)^5\,\mathrm{sen}^2\psi\,\cos\psi\,d\psi + 2\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{5}a^5\,\mathrm{sen}^2\psi\cos\psi\,d\psi =$$

$$\frac{2\pi}{5}32a^5\frac{\mathrm{sen}^8\psi}{8}\bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{2\pi a^5}{5}\frac{\mathrm{sen}^3\psi}{3}\bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{5}\pi a^5\frac{1}{256} + \frac{2\pi}{5}a^5\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{8}\right) = \frac{\pi a^5}{5\cdot 32} + \frac{7\pi a^5}{3\cdot 5\cdot 4} =$$

$$\frac{3+56}{3\cdot 5\cdot 32}\pi a^5 = \frac{59}{480}\pi a^5.$$

c) $\displaystyle\iiint_V z\,dx\,dy\,dz =$

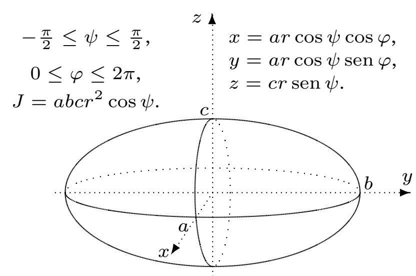


$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 abc^2r^3\,\mathrm{sen}\,\psi\cos\psi\,dr\,d\psi\,d\varphi =$$

$$abc^2\frac{1}{4}2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{sen}\,\psi\cos\psi\,d\psi = \frac{\pi}{2}abc^2\frac{\mathrm{sen}^2\psi}{2}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

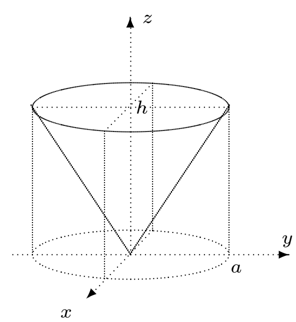
$$\frac{\pi}{4}abc^2.$$

d) $\displaystyle\iiint_V\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)dx\,dy\,dz =$



$$\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 abcr^2\cos\psi\,dr\,d\psi\,d\varphi =$$

$$2\pi abc\frac{1}{3}2 = \frac{4}{3}\pi abc.$$



e) Si $z = h \Longrightarrow x^2+y^2 = a^2$ i.e. es la curva de intersección, pues $z^2 = \dfrac{h^2}{a^2}(x^2+y^2)$. Usando coordenadas cilíndricas tenemos $x^2+y^2 = r^2$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le r \le a$, $\frac{h}{a}r \le z \le h$, por lo que:

$$\iiint_V z\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^a\int_{\frac{h}{a}r}^{h} z\,dz\,r\,dr\,d\theta = 2\pi\int_0^a\frac{1}{2}\left(h^2-\frac{h^2}{a^2}r^2\right)r\,dr =$$

$$\pi\left(\frac{1}{2}h^2r^2-\frac{h^2}{a^2}\frac{r^4}{4}\right)\bigg|_0^a = \pi h^2a^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}\pi h^2a^2.$$

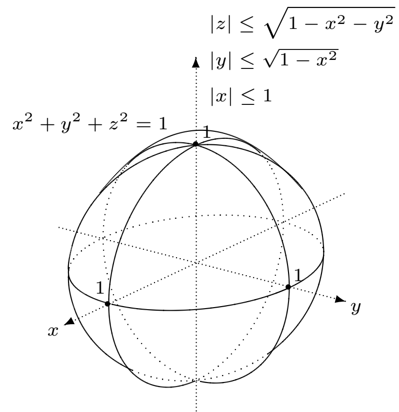
5. Calcular $\displaystyle\iiint_V x^2\,dx\,dy\,dz$ en la región V limitada por el elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

Solución Realizando el cambio de variable $x' = \frac{x}{a}$, $y' = \frac{y}{b}$, $z' = \frac{z}{c}$, tenemos:

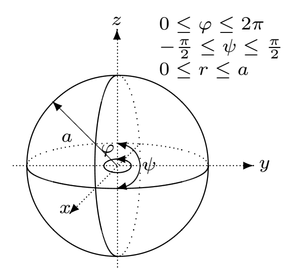
$$\iiint\limits_V x^2\,dx\,dy\,dz = abc \iiint\limits_{x'^2+y'^2+z'^2\le 1} a^2x'^2\,dx'\,dy'\,dz' = a^3bc \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1} x^2\,dx\,dy\,dz.$$

Así tenemos que la integral es:

$$a^3bc\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2}\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} x^2\,dz\,dy\,dx =$$
$$2a^3bc\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x^2\sqrt{1-x^2-y^2}\,dy\,dx =$$
$$2a^3bc\int_0^1\int_0^{2\pi} r^2\cos^2\theta\sqrt{1-r^2}(rdr)d\theta \underset{u=r^2}{=}$$
$$a^3bc\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta\int_0^1 u\sqrt{1-u}\,du =$$
$$a^3bc\beta(2,\tfrac{3}{2})\cdot 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta =$$
$$a^3bc\frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{7}{2})}\cdot 4\tfrac{1}{2}\tfrac{\pi}{2} = a^3bc\frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\frac{5}{2}\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2})}\pi =$$
$$\tfrac{4}{15}a^3bc\pi.$$



6. Calcular $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$, si V es la región limitada por $x^2+y^2+z^2=a^2$.



Solución Usando coordenadas esféricas tenemos:

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r^3\cos\psi dr\,d\psi d\varphi$$
$$= 2\pi\tfrac{1}{4}a^4 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\,d\psi = \pi a^4.$$

7. Colocar los límites de integración, en la integral $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ para las regiones dadas por:

a) V es el tetraedro limitado por los planos $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

b) V está limitada por las superficies $x^2+y^2=a^2$, $z=0$, $z=h$.

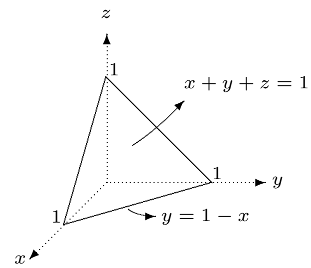
c) V está limitada por las superficies $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$, $z=c$.

d) V es el volumen limitado por las superficies $z=1-x^2-y^2$, $z=0$.

Solución

a) V es el tetraedro limitado por los planos $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

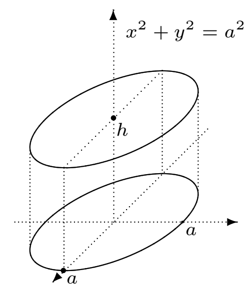
$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx.$$



b) V está limitada por las superficies $x^2+y^2=a^2$, $z=0$, $z=h$.

La integral de f sobre V está dada por:

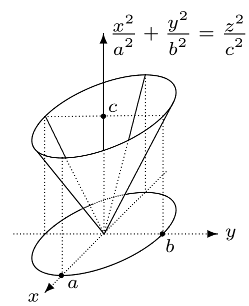
$$\int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^h f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx =.$$



c) V está limitada por las superficies $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2}$, $z=c$.

La integral $\displaystyle\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$

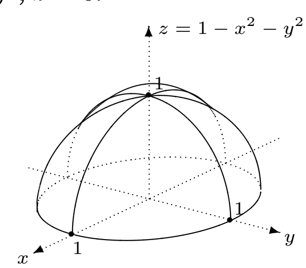
$$\int_{-a}^{a} \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \int_{c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}^{c} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx.$$



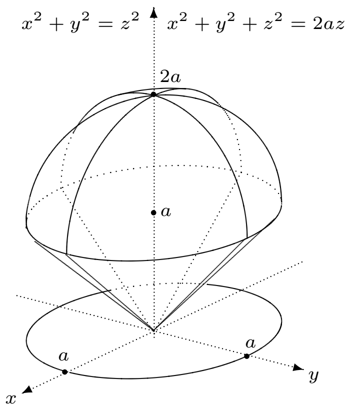
d) V es el volumen limitado por las superficies $z=1-x^2-y^2$, $z=0$.

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{1-x^2-y^2} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx.$$

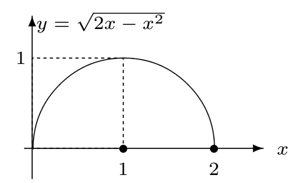


8. Calcular la integral $\displaystyle\iiint_V dx\,dy\,dz$ en la región limitada por las superficies $x^2+y^2+z^2=2az$, $x^2+y^2=z^2$ que contiene el punto $(0,0,a)$.



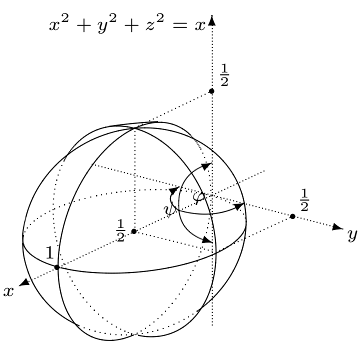
Solución La superficie $x^2+y^2+(z-a)^2=a^2$ es una esfera de radio a, centrada en $(0,0,a)$. Además, las superficies se intersecan en $z=a$. Así:
$$\iiint_V dx\,dy\,dz = \int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{a+\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dz\,dy\,dx =$$
$$\int_0^{2\pi}\int_0^a\int_r^{a+\sqrt{a^2-r^2}} dzrdrd\theta = 2\pi\int_0^a (a+\sqrt{a^2-r^2}-r)rdr =$$
$$2\pi(a\tfrac{1}{2}r^2-\tfrac{1}{3}r^3-\tfrac{1}{2}\tfrac{2}{3}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}})\Big|_0^a = 2\pi(\tfrac{1}{2}a^3-\tfrac{1}{3}a^3+\tfrac{1}{3}a^3)=\pi a^3.$$

9. Calcular la integral $\displaystyle\int_0^2\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}\int_0^a z\sqrt{x^2+y^2}\,dz\,dy\,dx.$



Solución Realizando el cambio de variable $z=z$, $x=r\cos\theta$, $y=r\operatorname{sen}\theta$, la curva $y=\sqrt{2x-x^2}$, con $0\le x\le 2$, es $r=2\cos\theta$, con $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ y la integral se transforma en:
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta}\int_0^a z\,dzr^2drd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^2}{2}\frac{r^3}{3}\Big|_0^{2\cos\theta}d\theta = \tfrac{1}{6}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 8\cos^3\theta d\theta = \tfrac{4}{3}a^3\tfrac{2}{3} = \tfrac{8}{9}a^2.$$

10. Calcular la integral $\displaystyle\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$ en la región limitada por $x^2+y^2+z^2=x$.



Solución La región de integración es una esfera de centro $(\frac{1}{2},0,0)$ y radio $\frac{1}{2}$, o sea satisface $(x-\frac{1}{2})^2+y^2+z^2=\frac{1}{4}$. Si hacemos el cambio a coordenadas esféricas $x=r\cos\psi\cos\varphi$, $y=r\cos\psi\operatorname{sen}\varphi$, $z=r\operatorname{sen}\psi$, $J=r^2\cos\psi$, la esfera es representa por $r=\cos\psi\operatorname{sen}\varphi$, con $-\frac{\pi}{2}\le\psi\le\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$ y la integral es:
$$\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\cos\psi\cos\varphi} r^3\cos\psi dr\,d\psi d\varphi =$$
$$2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tfrac{1}{4}\cos^5\psi\cos^4\varphi\,d\psi d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\psi\cos^4\varphi\,d\psi d\varphi =$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\psi\,d\psi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi d\varphi = \tfrac{2\cdot 4}{1\cdot 3\cdot 5}\tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\tfrac{\pi}{2} = \tfrac{\pi}{10}.$$

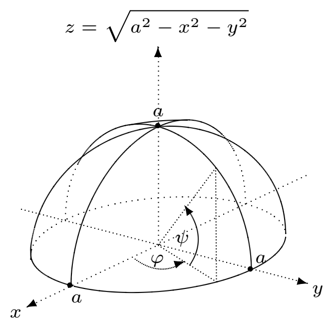
11. Calcular las integrales:

a) $I = \displaystyle\int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2)\,dz\,dy\,dx.$

b) $I = \displaystyle\int_0^{2a} dx \int_{-\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}} dz.$

Solución

a) $I = \displaystyle\int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2)\,dz\,dy\,dx.$

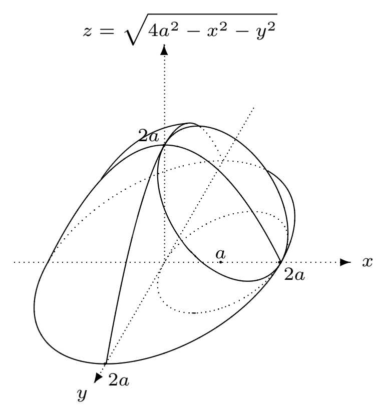


Pasando a coordenadas esféricas, $x = r\cos\psi\cos\varphi$, $y = r\cos\psi\operatorname{sen}\varphi$, $z = r\operatorname{sen}\psi$, el Jacobiano es $J = r^2\cos\psi$ y $0 \le r \le a$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \psi \le \frac{\pi}{2}$, $x^2+y^2 = r^2\cos^2\psi$.

De esta forma tenemos que:

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a} r^4\cos^3\psi\, dr\,d\psi\,d\varphi = \tfrac{2}{5}\pi a^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\psi\,d\psi = \tfrac{4}{15}\pi a^5.$$

b) $I = \displaystyle\int_0^{2a} \int_{-\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax-x^2}} \int_0^{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}} dz\,dy\,dx.$



Las variaciones de x, y y z son $0 \le x \le 2a$, $y^2+x^2 \le 2ax$ (i.e. $(x-a)^2+y^2 \le a^2$), $0 \le z \le \sqrt{4a^2-x^2-y^2}$, es decir $x^2+y^2+z^2 \le 4a^2$, $z \ge 0$. Si $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ y $r^2 \le 2ar\cos\theta$, o sea $0 \le r \le 2a\cos\theta$. Así tenemos: $I = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2a\cos\theta} \int_0^{\sqrt{4a^2-r^2}} dz\,r\,dr\,d\theta =$

$\displaystyle\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2a\cos\theta} \sqrt{4a^2-r^2}\,2r\,dr\,d\theta =$

$\displaystyle\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{3}(4a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{2a\cos\theta} d\theta = -\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [(4a^2-4a^2\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}} - 8a^3]\,d\theta =$

$\displaystyle\frac{8}{3}\pi a^3 - \frac{8}{3}a^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}d\theta = \frac{8}{3}\pi a^3 - \frac{8}{3}a^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\operatorname{sen}^3\theta|\,d\theta =$

$\displaystyle\frac{8}{3}a^3\Big(\pi - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3\theta\,d\theta\Big) = \frac{8}{3}a^3(\pi - 2\cdot\tfrac{2}{3}) = \frac{8}{3}a^3(\pi - \tfrac{4}{3}).$

12. Calcular las integrales triples cuando:

a) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le xy\}$, $f(x,y,z) = x^2y^3z$.

b) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2+y^2 \le 2pz,\ 0 \le z \le a\}$, $f(x,y,z) = |xyz|$, $p > 0$, $a > 0$.

c) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2+y^2 \le b^2z^2,\ 0 \le z \le a\}$, $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$.

d) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4\}$, $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

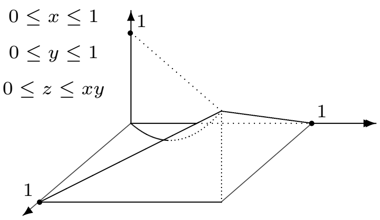
e) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} \le 1\}$, $f(x,y,z) = x^2y^2z^2$, a, b, $c > 0$.

f) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2+y^2+z^2 \le a^2\}$, $f(x,y,z) = \cos(\alpha x + \beta y + \gamma z)$, $a > 0$, α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$.

g) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ x+y+z \le 1\}$, $f(x,y,z) = x^py^qz^r(1-x-y-z)^s$, p, q, r, $s \in \mathbb{R}^*$.

Solución

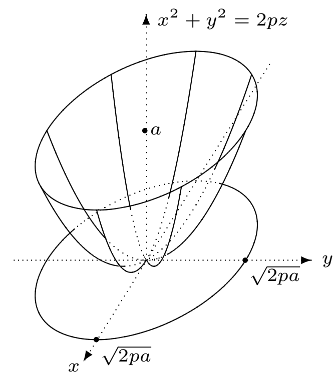
a) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le xy\}$, $f(x,y,z) = x^2y^3z$.



$$\int_0^1\int_0^1\int_0^{xy} x^2y^3z\,dz\,dy\,dx =$$
$$\int_0^1\int_0^1 \tfrac{1}{2}x^2y^2x^2y^3\,dy\,dx = \tfrac{1}{2}\int_0^1 x^4\,dx\int_0^1 y^5\,dy =$$
$$\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{5}x^5\Big|_0^1\tfrac{1}{6}y^6\Big|_0^1 = \tfrac{1}{60}.$$

b) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2+y^2 \le 2pz,\ 0 \le z \le a\}$, $f(x,y,z) = |xyz|$, $p > 0$, $a > 0$.

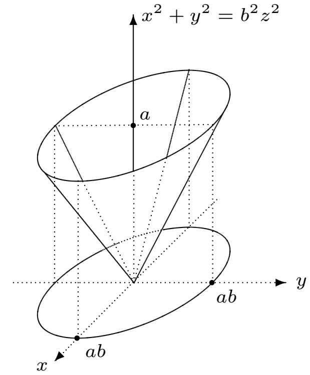
Pasando a coordenadas cilíndricas tenemos que $0 \le z \le a$, $0 \le r \le \sqrt{2pz}$, $0 \le \theta \le 2\pi$, la integral se transforma en:



$$\int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^{\sqrt{2pz}} |r^3||\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta|dr\,z\,dz d\theta =$$
$$\int_0^{2\pi}|\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta|d\theta\int_0^a\int_0^{\sqrt{2pz}} r^3dr\,z\,dz =$$
$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta d\theta\int_0^a\int_0^{\sqrt{2pz}} r^3dr\,z\,dz =$$
$$2\,\mathrm{sen}^2\,\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\tfrac{1}{4}\int_0^a 4p^2z^3\,dz = 2p^2\tfrac{1}{4}z^4\Big|_0^a = \tfrac{1}{2}p^2a^4.$$

c) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2+y^2 \le b^2z^2,\ 0 \le z \le a\}$, $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$.

Usando coordenadas cilíndricas se tiene que $0 \le r \le bz$, $0 \le z \le a$, $0 \le \theta \le 2\pi$ y la integral:



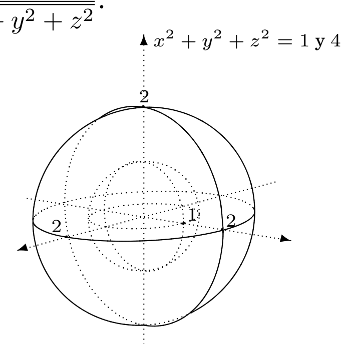
$$\iiint_V (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^{bz}(r^2+z^2)r\,dr\,dz\,d\theta = 2\pi\int_0^a \left(\tfrac{1}{4}r^4+\tfrac{1}{2}r^2z^2\right)\Big|_0^{bz} dz =$$

$$\pi(\tfrac{1}{2}b^4+b^2)\int_0^a z^4\,dz = \tfrac{1}{10}\pi(b^4+2b^2)a^5.$$

d) $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/1\le x^2+y^2+z^2\le 4\}$, $f(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Usando coordenadas esféricas tenemos $x=r\cos\psi\cos\varphi$, $y=r\cos\psi\,\mathrm{sen}\,\varphi$, $z=r\,\mathrm{sen}\,\psi$, $J=r^2\cos\psi$, $-\frac{\pi}{2}<\psi<\frac{\pi}{2}$, $0\le\varphi\le 2\pi$, $1\le r\le 2$ y la integral es:

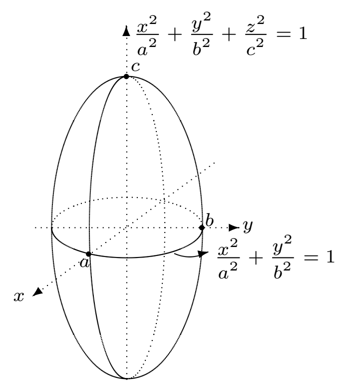


$$\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_1^2 \frac{r^2}{r}\cos\psi\,dr\,d\varphi\,d\psi = 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\,d\psi\int_1^2 r\,dr =$$

$$2{\cdot}2\pi{\cdot}\tfrac{1}{2}r^2\Big|_1^2 = 2\pi(4-1)=6\pi.$$

e) $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1\}$, $f(x,y,z)=x^2y^2z^2$, a, b, $c>0$.

Usando coordenadas esféricas generalizadas se tiene $0\le r\le 1$, $-\frac{\pi}{2}\le\psi\le\frac{\pi}{2}$, $0\le\varphi\le 2\pi$, $J=abcr^2\cos\psi$ y la integral es:



$$\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 a^3b^3c^3r^6\cos^5\psi\,\mathrm{sen}^2\,\psi|J|\cos^2\varphi\,\mathrm{sen}^2\,\varphi\,dr\,d\psi\,d\varphi =$$

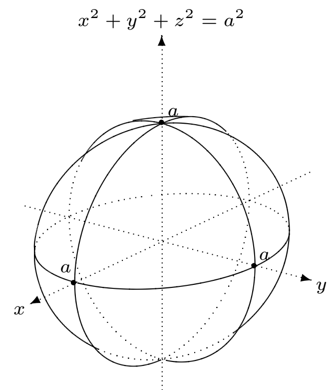
$$a^3b^3c^3\int_0^1 r^8dr\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\psi\,\mathrm{sen}^2\,\psi\,d\psi\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,\mathrm{sen}^2\,\varphi\,d\varphi =$$

$$\tfrac{2}{9}a^3b^3c^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^5\psi-\cos^7\psi)\,d\psi{\cdot}4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2\varphi-\cos^4\varphi)d\varphi =$$

$$\tfrac{8}{9}a^3b^3c^3(\tfrac{2\cdot4}{3\cdot5}-\tfrac{2\cdot4\cdot6}{3\cdot5\cdot7})(\tfrac{1}{2}\tfrac{\pi}{2}-\tfrac{1}{2}\tfrac{3}{4}\tfrac{\pi}{2}) = \tfrac{8}{9}a^3b^3c^3\tfrac{2\cdot4}{3\cdot8}(1-\tfrac{6}{7})\tfrac{1}{2}\tfrac{\pi}{2}(1-\tfrac{3}{4}) = \tfrac{4}{945}a^3b^3c^3\pi.$$

f) $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/x^2+y^2+z^2\le a^2\}$, $f(x,y,z)=\cos(\alpha x+\beta y+\gamma z)$, $a>0$, α, β, $\gamma\in\mathbb{R}$.

Sabemos que $\exists P = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ \frac{\alpha}{w} & \frac{\beta}{w} & \frac{\gamma}{w} \end{pmatrix}$ matriz ortogonal, con $w = \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$. Así la transformación lineal $\begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \\ \mathrm{z} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ define un cambio de variable, de modo que el Jacobiano es $\left|\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})}\right| = |P| = 1$ y la integral satisface: $\displaystyle\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_V \cos(w\mathrm{z})|\mathrm{P}|\mathrm{dxdydz}$,



pues la región V es invariante por transformación ortogonal, o sea:

$$x^2+y^2+z^2 = (x,y,z)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \\ \mathrm{z} \end{pmatrix}' PP' \begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \\ \mathrm{z} \end{pmatrix} = \mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2+\mathrm{z}^2 \le a^2.$$

Usando coordenadas esféricas, la integral es entonces:

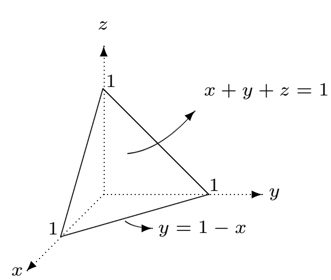
$$\int_0^{2\pi}\int_0^a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(wr\,\mathrm{sen}\,\psi)r(rw\cos\psi)\,d\psi\,dr\,d\varphi = 2\pi\int_0^a r\,\mathrm{sen}(wr\,\mathrm{sen}\,\psi)\Big|_{\psi=-\frac{\pi}{2}}^{\psi=\frac{\pi}{2}} dr =$$
$$\frac{2\pi}{w}\int_0^a 2r\,\mathrm{sen}(wr)dr = \frac{4\pi}{w^3}\int_0^a wr\,\mathrm{sen}(wr)drw = \frac{4\pi}{w^3}(\mathrm{sen}\,wa - wa\cos wa),$$

puesto que $\displaystyle\int x\,\mathrm{sen}\,x\,dx = \mathrm{sen}\,x - x\cos x + C$.

Observemos que la transformación simplemente realizó una rotación del eje z al eje $\mathrm{z} = \frac{1}{w}(\alpha,\beta,\gamma)$, con el objeto de simplificar el cálculo que involucra $\cos(\alpha x+\beta y+\gamma z)$.

g) $V = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ x+y+z\le 1\}$, $f(x,y,z) = x^p y^q z^r(1-x-y-z)^s$, $p, q, r, s \in \mathbb{R}^*$.

Es claro que $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1-x$, $0\le z\le 1-x-y$ y como $\displaystyle\int_0^a t^\alpha(a-t)^\beta dt = \beta(\alpha+1,\beta+1)a^{\alpha+\beta+1}$, la integral $\displaystyle\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} x^p y^q z^r(1-x-y-z)^s\,dz\,dy\,dx =$
$\displaystyle\int_0^1\Big(\int_0^{1-x}\beta(r+1,s+1)(1-x-y)^{r+s+1}y^q\,dy\Big)x^p\,dx =$
$\displaystyle\beta(r+1,s+1)\beta(r+s+2,q+1)\int_0^1(1-x)^{r+s+q+2}x^p\,dx =$



$\beta(r+1,s+1)\beta(r+s+2,q+1)\beta(r+s+q+3,p+1) =$

$\dfrac{\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(r+s+2)}\dfrac{\Gamma(r+s+2)\Gamma(q+1)}{\Gamma(r+s+q+3)}\dfrac{\Gamma(r+s+q+3)\Gamma(p+1)}{\Gamma(r+s+q+p+4)} =$

$\dfrac{\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)\Gamma(q+1)\Gamma(p+1)}{\Gamma(r+s+q+p+4)}.$

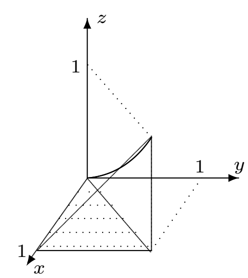
13. En cada una de las siguientes integrales representar la región V de integración y calcularla.

a) $\displaystyle\iiint_V xy^2z^3\,dx\,dy\,dz$, V es la región limitada por la superficie $z = xy$ y los planos $x = y$, $x = 1$, $z = 0$.

b) $\displaystyle\iiint_V xyz\,dx\,dy\,dz$, V es el primer octante de la esfera $x^2+y^2+z^2 = 1$.

c) $\displaystyle\iiint_V \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$, V es la hoja superior del cono $z^2 = x^2+y^2$ y el plano $z = 1$.

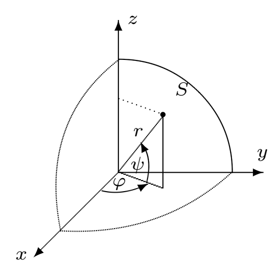
Solución



a) La región considerada es $0 \le z \le xy$, $0 \le y \le x$, $0 \le x \le 1$, por lo que:

$$\iiint_V xy^2z^3\,dx\,dy\,dz = \int_0^1\left(\int_0^x\left(\int_0^{xy} xy^2z^3\,dz\right)dy\right)dx =$$

$$\int_0^1\left(\int_0^x \frac{1}{4}x^5y^6\,dy\right)dx = \int_0^1 \frac{1}{28}x^5y^7\Big|_0^x\,dx = \int_0^1 \frac{1}{28}x^{12}\,dx = \frac{x^{13}}{28{\cdot}13}\Big|_0^1 = \frac{1}{364}.$$



b) En la región se tiene $0 \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}$, $0 \le y \le \sqrt{1-x^2}$, $0 \le x \le 1$ y usando coordenadas esféricas tenemos:

$$\iiint_V xyz\,dx\,dy\,dz = \int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz\,dz\right)dy\right)dx =$$

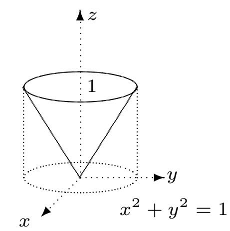
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r^2\cos\psi\, r^3\cos^2\psi\,\mathrm{sen}\,\psi\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi\,dr\,d\varphi\,d\psi =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\psi\,\mathrm{sen}\,\psi\,d\psi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi\,d\varphi\int_0^1 r^5\,dr = -\tfrac{1}{4}\cos^4\psi\Big|_0^{\pi/2}\tfrac{1}{2}\,\mathrm{sen}^2\,\varphi\Big|_0^{\pi/2}\tfrac{1}{6}r^6\Big|_0^1 =$$

$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{48}$.

c) La región está dada por $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1$,

$-\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}$, $-1 \le x \le 1$ y usando coordenadas cilíndricas:



$$\iiint_V \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy\, dz =$$

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}\sqrt{x^2+y^2}\, dz\right) dy\right) dx = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\left(\int_r^1 r\, dz\right) r\, dr\right) d\theta =$$

$$2\pi \int_0^1 r^2(1-r)\, dr = 2\pi \left(\tfrac{1}{3}r^3 - \tfrac{1}{4}r^4\right)\Big|_0^1 = 2\pi\left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}\right) = \tfrac{\pi}{6}.$$

14. En las siguientes integrales iteradas de una función $f(x,y,z)$ positiva, dibujar la región de integración S y expresar la integral efectuando la primera integración respecto a y.

a) $\displaystyle\int_0^1\left(\int_0^{1-x}\left(\int_0^{x+y} f(x,y,z)\, dz\right) dy\right) dx.$

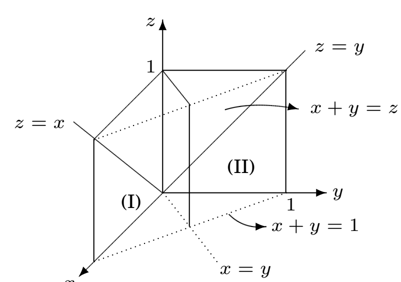
b) $\displaystyle\int_{-1}^1\left(\int_{-x}^{x}\left(\int_{\sqrt{x^2-y^2}}^{1} f(x,y,z)\, dz\right) dy\right) dx.$

c) $\displaystyle\int_0^1\left(\int_0^{1}\left(\int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\, dz\right) dy\right) dx.$

Solución

a) Al proyectar sobre el plano xz observamos que la región se parte en dos regiones con ayuda del plano $x=y$.

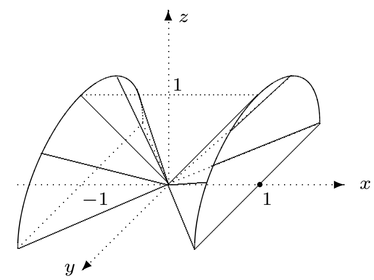
La región (I) se puede determinar así: si $0 \le x \le 1$, se tiene que z varía de 0 a x i.e. $0 \le z \le x$ (ver gráfico) y finalmente para (x,z) fijo, la variable y varía del plano $y=0$ al plano $x+y=1$ i.e. $0 \le y \le 1-x$.



En la región (II) para $0 \le x \le 1$, se tiene que z varía de $z=x$ a $z=1$ y para (x,z) fijo la variable y va desde el plano $x+y=z$ al plano $x+y=1$, o sea $z-x \le y \le 1-x$. Finalmente se tiene:

$$\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{x+y} f(x,y,z)\, dz \right) dy \right) dx =$$
$$\int_0^1 \left(\int_0^{x} \left(\int_0^{1-x} f(x,y,z)\, dy \right) dz \right) dx + \int_0^1 \left(\int_x^{1} \left(\int_{z-x}^{1-x} f(x,y,z)\, dy \right) dz \right) dx.$$

b) Al proyectar sobre el plano xz se tiene que para $0 \le z \le 1$, x varía de $z = -x$ a $z = x$ i.e. $-z \le x \le z$ y para (x, z) fijo, y varía dentro de la superficie $z^2 = x^2 - y^2$, o sea $-\sqrt{x^2 - z^2} \le y \le \sqrt{x^2 - z^2}$.



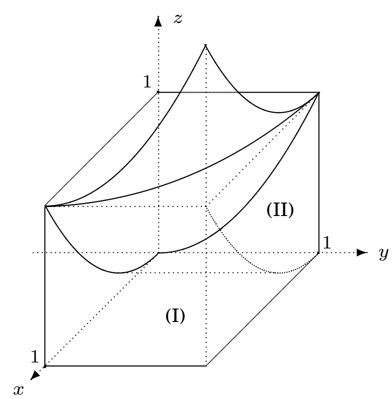
De esta manera tenemos que:

$$\int_{-1}^1 \left(\int_{-x}^{x} \left(\int_{\sqrt{x^2-y^2}}^{1} f(x,y,z)\, dz \right) dy \right) dx =$$
$$\int_0^1 \left(\int_{-z}^{z} \left(\int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} f(x,y,z)\, dy \right) dx \right) dz.$$

c) Al proyectar la superficie sobre el plano xz, la región se parte en dos de acuerdo con $0 \le x \le 1$, en $0 \le z \le x^2$, $x^2 \le z \le x^2 + 1$.

En la región (I), $0 \le x \le 1$, $0 \le z \le x^2$, $0 \le y \le 1$.

En la región (II), $0 \le x \le 1$, $x^2 \le z \le x^2 + 1$, la variable y varía desde la superficie $y = \sqrt{z - x^2}$ hasta el plano $y = 1$, o sea $\sqrt{z - x^2} \le y \le 1$. La integral queda así:



$$\int_0^1 \left(\int_0^{1} \left(\int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\, dz \right) dy \right) dx =$$
$$\int_0^1 \left(\int_0^{x^2} \left(\int_0^{1} f(x,y,z)\, dy \right) dz \right) dx + \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{1+x^2} \left(\int_{\sqrt{z-x^2}}^{1} f(x,y,z)\, dy \right) dz \right) dx.$$

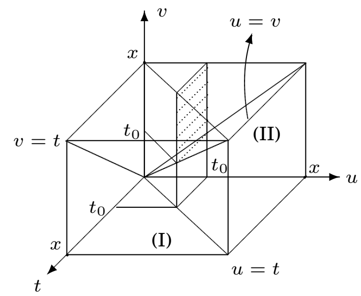
15. Verificar que $\displaystyle\int_0^x \left(\int_0^{v} \left(\int_0^{u} f(t)\, dt \right) du \right) dv = \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 f(t) dt$, donde f es una función integrable sobre todo intervalo $[\,0, x\,]$.

Solución Es claro que $0 \le t \le u \le v \le x$, por lo tanto si integramos primero respecto a u $(t \le u \le v)$; luego respecto a v $(t \le v \le x)$ y luego respecto a t $(0 \le t \le x)$ se tiene:

$$\int_0^x \left(\int_0^v \left(\int_0^u f(t)\,dt\right)du\right)dv = \int_0^x \left(\int_t^x \left(\int_t^v du\right)dv\right)f(t)\,dt =$$

$$\int_0^x \left(\int_t^v (v-t)\,dv\right) f(t)\,dt = \int_0^x \frac{1}{2}(v-t)^2\Big|_{v=t}^{v=x} f(t)\,dt =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 f(t)\,dt.$$



Es importante aclarar cómo se obtuvieron los límites de interpretación geométricamente, para verificar que están acordes con el estudio analítico que se hizo de los mismos.

Primeramente veamos que todas las variables oscilan entre 0 y x, con $0 \le t \le u \le v \le x$.

Para t fijo, se tiene que u varía de t a x.

Para determinar la variación de v, para t fijo (ya no depende de u) v varía desde el plano $v = t$ al plano $v = x$.

16. Calcular las integrales siguientes pasando a coordenadas cilíndricas:

a) $\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$, V es el sólido limitado por la superficie $x^2+y^2 = 2z$ y el plano $z = 2$.

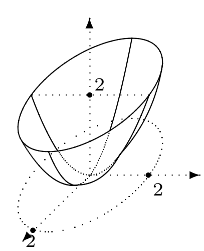
b) $\iiint\limits_V dx\,dy\,dz$, V es el sólido limitado por los tres planos coordenados, $z = x^2+y^2$, $x+y \le 1$.

c) $\iiint\limits_V (y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$, V es el cono recto de revolución de altura h, de base en el plano xy de radio a, cuyo eje es el eje z.

Solución

a) $$\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^2\left(\int_{\frac{1}{2}r^2}^2 r^2\,dz\right) r\,dr\right)d\theta =$$

$$2\pi\int_0^2 r^3\left(2-\frac{1}{2}r^2\right)dr = 2\pi\left(2\frac{r^4}{4}-\frac{1}{12}r^6\right)\Big|_0^2 = 2\pi\cdot\frac{8}{3} = \frac{16}{3}\pi.$$



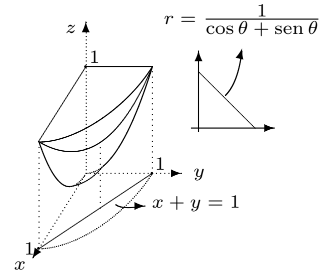
b) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^{1-x}\left(\int_0^{x^2+y^2} dz\right) dy\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\operatorname{sen}\theta}}\left(\int_0^{r^2} dz\right) r\,dr\right) d\theta =$

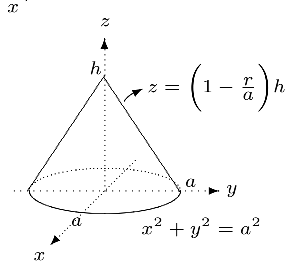
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\operatorname{sen}\theta}} r^3\,dr\right) d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)^4}\,d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^4\theta\,d\theta}{(1+\tan\theta)^4} =$$

$$\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+\tan^2\theta)\sec^2\theta\,d\theta}{(1+\tan\theta)^4} = \frac{1}{4}\int_0^{\infty}\frac{(1+u^2)\,du}{(1+u)^4} =$$

$$\frac{1}{4}\int_0^{\infty}\left(\frac{2}{(1+u)^4} - \frac{2}{(1+u)^3} + \frac{1}{(1+u)^2}\right) du =$$

$$\frac{1}{4}\left(-\frac{2}{3(1+u)^3} + \frac{1}{(1+u)^2} - \frac{1}{u+1}\right)\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3} - 1 + 1\right) = \frac{1}{6}.$$





c) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{a}\left(\int_0^{\frac{a-r}{a}h} (r^2\operatorname{sen}^2\theta + z^2)\,dz\right) r\,dr\right) d\theta =$

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{a}\left(\frac{hr^2(a-r)\operatorname{sen}^2\theta}{a} + \frac{h^3(a-r)^3}{3a^3}\right) r\,dr\right) d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{hr^4(5a-4r)\operatorname{sen}^2\theta}{20a} + \frac{h^3r^2(10a^3 - 10a^2r + 15ar^2 - 4r^3)}{60a^3}\right)\Bigg|_0^a d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{a^4h\operatorname{sen}^2\theta}{20} + \frac{a^2h^3}{60}\right) d\theta = \frac{2\pi a^2h^3}{60} + \frac{4a^4h}{20}\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta =$$

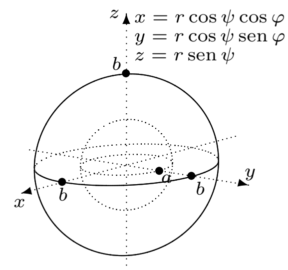
$$\frac{\pi a^2h^3}{30} + \frac{1}{5}a^4h\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\pi}{60}a^2h(3a^2 + 2h^2).$$

17. Calcular las siguientes integrales pasando a coordenadas esféricas.

a) $\displaystyle\iiint_V dx\,dy\,dz$, V es el sólido limitado entre dos esferas de radio a y b ($0 < a < b$).

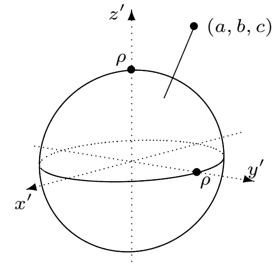
b) $\displaystyle\iiint_V \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}\,dx\,dy\,dz$, V es una esfera de radio ρ centrada en el origen y el punto (a,b,c) es un punto exterior a la esfera.

Solución



a) $\displaystyle\iiint\limits_V dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_a^b r^2|\cos\psi|\,dr\right)d\psi\right)d\varphi =$

$$2\pi\, 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos\psi|\,d\psi\ \frac{1}{3}r^3\Big|_a^b = \frac{4}{3}\pi(b^3-a^3).$$



b) Rotando los ejes x', y', z' de modo que (a,b,c) quede sobre el eje z en el sistema x, y, z, a una distancia $\alpha = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ del origen, entonces:

$$\iiint\limits_V \frac{dx'\,dy'\,dz'}{\sqrt{(x'-a)^2+(y'-b)^2+(z'-c)^2}} =$$

$$\iiint\limits_V \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-\alpha)^2}}\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\rho}\frac{r^2\cos\psi\,dr}{\sqrt{r^2-2\alpha r\,\mathrm{sen}\,\psi+\alpha^2}}\right)d\psi\right)d\varphi =$$

$$2\pi\int_0^{\rho}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{-2r\alpha\cos\psi\,d\psi}{\sqrt{r^2-2\alpha r\,\mathrm{sen}\,\psi+\alpha^2}}\right)\left(-\frac{1}{2\alpha}r\,dr\right) = -\frac{\pi}{\alpha}\int_0^{\rho}2\sqrt{r^2-2\alpha r\,\mathrm{sen}\,\psi+\alpha^2}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}r\,dr =$$

$$-\frac{2\pi}{\alpha}\int_0^{\rho}(|r-\alpha|-(r+\alpha))\,r\,dr = -\frac{2\pi}{\alpha}\int_0^{\rho}(\alpha-r-r-\alpha)\,r\,dr = \frac{4\pi}{\alpha}\int_0^{\rho}r^2\,dr = \frac{4\pi}{\alpha}\frac{1}{3}a^3 = \frac{4\pi\rho^3}{3\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

18. Se puede definir la transformación $x = a\rho\cos^m\varphi\,\mathrm{sen}^n\,\psi$, $y = b\rho\,\mathrm{sen}^m\,\varphi\,\mathrm{sen}^n\,\psi$, $z = c\rho\cos^n\psi$, donde a, b, c, m, n son constantes positivas. Demostrar que el Jacobiano es igual a $-abcmn\rho^2\cos^{m-1}\varphi\,\mathrm{sen}^{m-1}\,\varphi\cos^{n-1}\psi\,\mathrm{sen}^{2n-1}\,\psi$.

Solución Se tiene que:

$$J = \begin{vmatrix} a\cos^m\varphi\,\mathrm{sen}^n\,\psi & -ma\rho\cos^{m-1}\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}^n\,\psi & na\rho\cos^m\varphi\,\mathrm{sen}^{n-1}\,\psi\cos\psi \\ b\,\mathrm{sen}^m\,\varphi\,\mathrm{sen}^n\,\psi & mb\rho\,\mathrm{sen}^{m-1}\,\varphi\cos\varphi\,\mathrm{sen}^n\,\psi & nb\rho\,\mathrm{sen}^m\,\varphi\,\mathrm{sen}^{n-1}\,\psi\cos\psi \\ c\cos^n\psi & 0 & -c\rho n\cos^{n-1}\psi\,\mathrm{sen}\,\psi \end{vmatrix}$$

$= c\cos^n\psi(-abnm\rho^2\cos^{m-1}\varphi\,\mathrm{sen}^{m+1}\,\varphi\,\mathrm{sen}^{2n-1}\,\psi\cos\psi - nmab\rho^2\,\mathrm{sen}^{m-1}\,\varphi\cos^{m+1}\varphi$
$\mathrm{sen}^{2n-1}\,\psi\cos\psi) - c\rho n\cos^{n-1}\psi\,\mathrm{sen}\,\psi(abm\rho\cos^{m+1}\varphi\,\mathrm{sen}^{m-1}\,\varphi\,\mathrm{sen}^{2n}\,\psi + abm\rho\cos^{m-1}\varphi$
$\mathrm{sen}^{n+1}\,\varphi\,\mathrm{sen}^{2n}\,\psi)$

$= -abcmn\rho^2\cos^{m-1}\varphi\,\mathrm{sen}^{m-1}\,\varphi\,\mathrm{sen}^{2n-1}\,\psi\cos\psi(\mathrm{sen}^2\,\varphi+\cos^2\varphi)$

$$- abcmn\rho^2 \cos^{m-1}\varphi \operatorname{sen}^{m-1}\varphi \operatorname{sen}^{2n}\psi(\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi)$$
$$= -abcmn\rho^2 \cos^{m-1}\varphi \operatorname{sen}^{m-1}\varphi \cos^{n-1}\psi \operatorname{sen}^{2n-1}\psi(\cos^2\psi + \operatorname{sen}^2\psi)$$
$$= -abcmn\rho^2 \cos^{m-1}\varphi \operatorname{sen}^{m-1}\varphi \cos^{n-1}\psi \operatorname{sen}^{2n-1}\psi.$$

19. Colocar los límites de integración pasando a coordenadas cilíndricas o coordenadas esféricas en la integral triple $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$.

a) V es el volumen situado en el primer octante y limitado por el cilindro $x^2+y^2=a^2$ y los planos $z=0$, $z=1$, $y=x$, $y=\sqrt{3}x$.

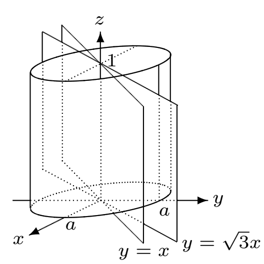
b) V es el volumen limitado por el cilindro $x^2+y^2=2x$, el plano $z=0$ y el paraboloide $z=x^2+y^2$.

c) V es la parte de la esfera $x^2+y^2+z^2 \le a^2$ situada en el primer octante.

d) V es una parte de la esfera $x^2+y^2+z^2 \le a^2$ situada dentro del cilindro $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$, $x \ge 0$.

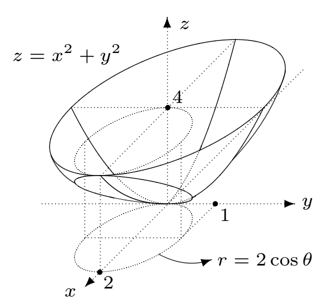
e) V es la parte común de las esferas $x^2+y^2+z^2 \le a^2$ y $x^2+y^2+(z-a)^2 \le a^2$.

Solución



a) Usando coordenadas cilíndricas tenemos $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, $0 \le z \le 1$ y como $\tan\theta = \frac{y}{x} = \sqrt{3} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$ y como $\tan\theta = \frac{y}{x} = 1 \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$, por lo que $\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{3}$. Además $0 \le r \le a$ y así tenemos que:

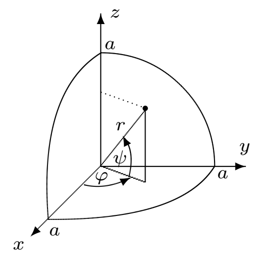
$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int_0^1 \Big(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \Big(\int_0^a f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z)rdr\Big)d\theta\Big)dz.$$



b) Usando coordenadas cilíndricas el círculo se escribe $r^2 = 2r\cos\theta$ i.e. $r = 2\cos\theta$, $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, $J = r$, $z = x^2+y^2 = r^2$, por lo que $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz =$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^{2\cos\theta} \Big(\int_0^{r^2} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z)dz\Big)rdr\Big)d\theta.$$

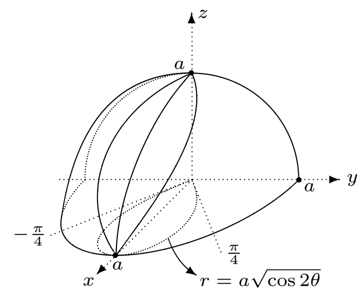
c) La esfera en el primer octante se escribe $x = r\cos\psi\cos\varphi$, $y = r\cos\psi\operatorname{sen}\varphi$, $z = r\operatorname{sen}\psi$, $0 \le r \le a$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le \psi \le \frac{\pi}{2}$, $J = r^2\cos\psi$ y tenemos:



$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz =$$

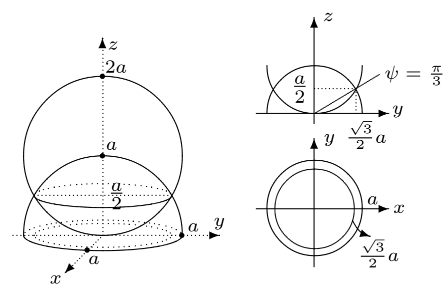
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_0^a f(r\cos\psi\cos\varphi, r\cos\psi\operatorname{sen}\varphi, r\operatorname{sen}\psi)r^2dr\Big)\cos\psi d\psi\Big)d\varphi.$$

d) En coordenadas cilíndricas, el cilindro $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$, $x \ge 0$, se escribe $r^2 = a^2\cos 2\theta$ i.e. $r = a\sqrt{\cos 2\theta}$, $z \in \mathbb{R}$, que es una lemniscata de Bernoulli, $-\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}$, pues $x \ge 0$, $J = r$. Además $z = \sqrt{a^2-r^2}$ y la integral triple se escribe:



$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\Big(\int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}}\Big(\int_{-\sqrt{a^2-r^2}}^{\sqrt{a^2-r^2}} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z)dz\Big)rdr\Big)d\theta.$$

e) Para determinar donde se intersecan las superficies, usamos las ecuaciones $x^2+y^2+z^2 = a^2$, $x^2+y^2+(z-a)^2 = a^2 \implies a^2 - z^2 + (z-a)^2 = a^2 \implies z = \dfrac{a}{2}$, es decir se intersecan sobre el plano $z = \dfrac{a}{2}$, lo que determina el círculo $x^2+y^2 = \dfrac{3}{4}a^2$, que es la proyección de la intersección de las superficies sobre el plano $z = 0$. De esta manera tenemos que $a - \sqrt{a^2-x^2-y^2} \le z \le \sqrt{a^2-x^2-y^2}$, $J = r$. Pasando a coordenadas cilíndricas tenemos que $0 \le r \le \frac{\sqrt{3}}{2}a$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $a - \sqrt{a^2-r^2} \le z \le \sqrt{a^2-r^2}$, con lo cual la integral triple se escribe:



$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}\Big(\int_{a-\sqrt{a^2-r^2}}^{\sqrt{a^2-r^2}} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z)dz\Big)rdr\Big)d\theta.$$

Si usamos coordenadas esféricas, la expresión es un tanto más complicada.

Tomando $x = r\cos\psi\cos\varphi$, $y = r\cos\psi\operatorname{sen}\varphi$, $z = r\operatorname{sen}\psi$, $J = r^2\cos\psi$. Cuando $z = \frac{a}{2}$ sobre la esfera tenemos $z = \frac{a}{2} = a\operatorname{sen}\psi \implies \psi = \frac{\pi}{3}$, entonces si $0 \le \psi \le \frac{\pi}{3}$, el valor de r varía de 0 a la esfera de centro $(0,0,a)$ y radio a, en tanto que si $\frac{\pi}{3} \le \psi \le \frac{\pi}{2}$, el valor de r varía de 0 a la esfera de centro $(0, 0, 0)$ y radio a. El ángulo φ en ambos casos varía de 0 a 2π. En el primer caso $0 \leq r \leq 2a \operatorname{sen} \psi$ y en el segundo caso $0 \leq r \leq a$. Así la integral triple se transforma en $\displaystyle\iiint_V f(x, y, z)dxdydz =$

$$\int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \Big(\int_0^{2a \operatorname{sen} \psi} f(r \cos\psi \cos\varphi, r\cos\psi \operatorname{sen}\varphi, r \operatorname{sen}\psi) r^2 dr \Big) \cos\psi d\psi \Big) d\varphi +$$

$$\int_0^{2\pi} \Big(\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^{a} f(r \cos\psi \cos\varphi, r\cos\psi \operatorname{sen}\varphi, r \operatorname{sen}\psi) r^2 dr \Big) \cos\psi d\psi \Big) d\varphi.$$

20. Calcular las siguientes integrales triples pasando a coordenadas esféricas o cilíndricas:

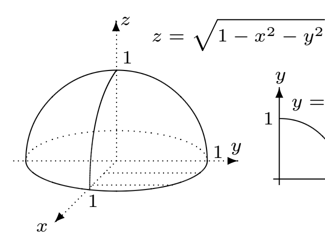
a) $\displaystyle\int_0^1 \Big(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \Big(\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dz \Big) dy \Big) dx.$

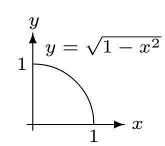
b) $\displaystyle\iiint_V (x^2+y^2)dxdydz$, V es el volumen dado por $a^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq b^2$, $z \geq 0$.

c) $\displaystyle\iiint_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}$, V es la esfera $x^2+y^2+z^2 \leq 1$.

d) $\displaystyle\iiint_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}$, V es el cilindro $x^2+y^2 \leq 1$, $-1 \leq z \leq 1$.

Solución

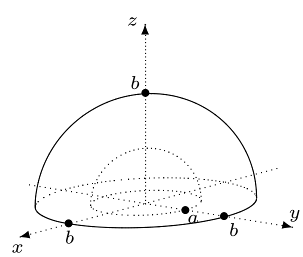




a) Usando coordenadas esféricas $x = r\cos\psi\cos\varphi$, $y = r\cos\psi \operatorname{sen}\varphi$, $z = r \operatorname{sen}\psi$, $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, entonces:

$$\int_0^1 \Big(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \Big(\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dz \Big) dy \Big) dx =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^1 r^3 dr \Big) \cos\psi d\psi \Big) d\varphi = \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}.$$

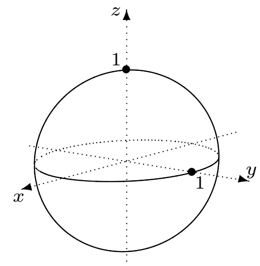


b) En este caso, para generar la parte superior de la esfera, tomamos $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$ y para $a^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq b^2$, se tiene $a \leq r \leq b$, es decir pasando a coordenadas esféricas tenemos:

$$\iiint_V (x^2+y^2)dxdydz = \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_a^b r^4 \cos^3\psi dr \Big) d\psi \Big) d\varphi = \frac{1}{5}(b^5-a^5) \cdot \frac{2}{3} \cdot 2\pi =$$

$$\frac{4}{15}\pi(b^5-a^5).$$

c) Por el uso de las coordenadas esféricas tenemos que $0 \le r \le 1$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} \le \psi \le \frac{\pi}{2}$, entonces:

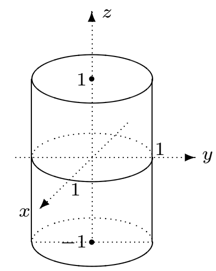


$$\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}} =$$

$$\int_0^{2\pi}\Big(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_0^1 \frac{r^2\cos\psi dr}{\sqrt{r^2-4r\,\mathrm{sen}\,\psi+4}}\Big)d\psi\Big)d\varphi =$$

$$2\pi\int_0^1\Big(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-4r\cos\psi d\psi}{\sqrt{r^2-4r\,\mathrm{sen}\,\psi+4}}\Big)\Big(-\frac{1}{4}r\Big)dr = -\frac{\pi}{2}\int_0^1 2\sqrt{r^2-4r\,\mathrm{sen}\,\psi+4}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} rdr =$$

$$-\pi\int_0^1 (2-r-(r+2))rdr = \pi\int_0^1 2r^2dr = \frac{2}{3}\pi r^3\Big|_0^1 = \frac{2}{3}\pi.$$



d) Haciendo uso de coordenadas cilíndricas tenemos $0 \le r \le 1$, $-1 \le z \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$ y $\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}$ se transforma en $\sqrt{r^2+(z-2)^2}$, por lo tanto la integral triple es $\displaystyle\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}} =$

$$\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^1\Big(\int_{-1}^1 \frac{dz}{\sqrt{r^2+(z-2)^2}}\Big)rdr\Big)d\theta = 2\pi\int_{-1}^1\Big(\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2rdr}{\sqrt{r^2+(z-2)^2}}\Big)dz =$$

$$2\pi\int_{-1}^1 \sqrt{r^2+(z-2)^2}\Big|_0^1 dz = 2\pi\int_{-1}^1\Big(\sqrt{z^2-4z+5}-(2-z)\Big)dz =$$

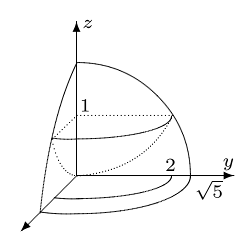
$$2\pi\Big(\frac{1}{2}\ln\Big(\sqrt{z^2-4z+5}+z-2\Big)+\frac{1}{2}(z-2)\sqrt{z^2-4z+5}+\frac{z^2}{2}-2z\Big)\Big|_{-1}^1 =$$

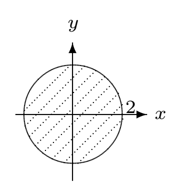
$$\pi\Big(\ln(\sqrt{2}-1)-\sqrt{2}-4-(\ln(\sqrt{10}-3)-3\sqrt{10}+4)\Big) = \pi\Big(3\sqrt{10}+\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{10}-3}-\sqrt{2}-8\Big).$$

3.3 Cálculo de volúmenes

21. Calcular el volumen de un sólido limitado por dentro de la esfera $x^2+y^2+z^2=5$ y dentro del paraboloide $x^2+y^2=4z$.

Solución Las superficies se intersecan en un plano que es solución del sistema $z^2+4z-5=0 \Longrightarrow z=1$, $z=-5$ y la última solución se elimina.





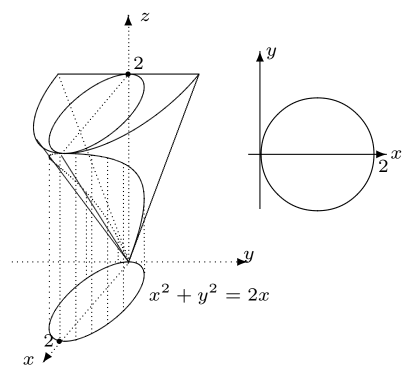
Así tenemos que el volumen es:

$$V=\int_{-2}^{2}\left(\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\left(\int_{\frac{x^2+y^2}{4}}^{\sqrt{5-x^2-y^2}}dz\right)dy\right)dx=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^2\left(\int_{\frac{1}{4}r^2}^{\sqrt{5-r^2}}dz\right)r\,dr\right)d\theta=$$
$$2\pi\int_0^2\left(\sqrt{5-r^2}-\frac{1}{4}r^2\right)r\,dr=\pi\left(-\frac{2}{3}(5-r^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^2=\pi\left(\frac{2}{3}\left(5^{\frac{3}{2}}-1\right)-2\frac{3}{3}\right)=$$
$$\frac{2}{3}\pi(5^{\frac{3}{2}}-1-3)=\frac{2}{3}\pi(5\sqrt{5}-4).$$

22. Calcular el volumen de un sólido limitado por el plano xy, el cilindro $x^2+y^2=2x$ y el cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

Solución La intersección del cilindro $(x-1)^2+y^2=1$ y el cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$, es la curva $z=\sqrt{2x}$, $y=\pm\sqrt{2x-x^2}$, $0\le x\le 2$. Así tenemos que:

$$V=\iiint_V dx\,dy\,dz=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2\cos\theta}\left(\int_0^r dz\right)r\,dr\right)d\theta=$$
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2\cos\theta}r^2\,dr\right)d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}(2\cos\theta)^3\,d\theta=\frac{16}{3}\cdot\frac{1\cdot 2}{1\cdot 3}=$$
$$\frac{32}{9}.$$



23. Calcular el volumen de la región limitada por:

a) el elipsoide $4x^2+y^2+16z^2=16$.

b) la esfera $x^2+y^2+z^2=16$ y el cilindro $x^2+y^2=7$.

c) paraboloide elíptico $z=2x^2+y^2+1$, el plano $x+y=1$ y los planos coordenados.

d) $az=y^2$, $x^2+y^2=b^2$, $z=0$.

e) $z=x^2+y^2$, $y=x^2$, $y=1$, $z=0$.

f) $x^2+y^2=2ax$, $z=\alpha x$, $z=\beta x$, $\alpha>\beta$.

g) $2az=x^2+y^2$, $x^2+y^2-z^2=a^2$, $z=0$.

h) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

i) $z=x+y$, $xy=1$, $xy=2$, $y=x$, $y=2x$, $z=0$, $x>0$, $y>0$.

j) $z=2-x-2y$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

k) por el paraboloide $x^2+4y^2+z=4$ y el plano xy.

l) $z=1-x^2-y^2$, el plano $z=1-y$, $z=0$, $x=0$, $y=0$.

m) $y^2 = 4a^2 - 3ax$, $y^2 = ax$, $z = \pm h$.

n) la parte del cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$ comprendida entre el paraboloide $x^2 + y^2 = 2az$ y el plano xy.

o) la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y el cono $z^2 = x^2 + y^2$ (parte exterior respecto al cono).

p) la superficie $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}$.

q) las superficies $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, $z \geq 0$.

Solución

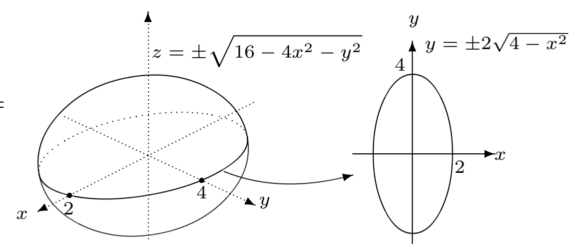
a) el elipsoide $4x^2 + y^2 + 16z^2 = 16$.

Dada la simetría del elipsoide con respecto a los ejes cartesianos, el volumen es ocho veces el volumen del primer octante, es decir:

$$V = 8\int_0^2 \int_0^{2\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\frac{1}{4}\sqrt{16-4x^2-y^2}} dz\, dy\, dx = 2\int_0^2 \int_0^{2\sqrt{4-x^2}} \sqrt{16-4x^2-y^2}\,dy\, dx =$$

$$\int_0^2 \left[y\sqrt{16-4x^2-y^2} + (16-4x^2)\operatorname{arcsen}\frac{y}{\sqrt{16-4x^2}} \right]_0^{2\sqrt{4-x^2}} dx =$$

$$\int_0^2 (0 - 0 + (16 - 4x^2)\tfrac{1}{2}\pi - 0)dx = \tfrac{1}{2}\pi(16\cdot 2 - \tfrac{32}{3}) = \tfrac{32}{3}\pi.$$



b) la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 7$.

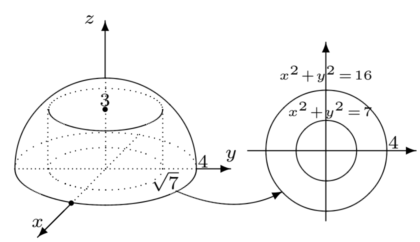
La esfera y el cilindro se intersecan en $7 + z^2 = 16$

i.e $z = \pm 3$, por lo que el volumen es:

$$V = 2\int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} \int_{-\sqrt{7-x^2}}^{\sqrt{7-x^2}} \sqrt{16-x^2-y^2}dydx =$$

$$2\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{7}} \sqrt{16-r^2}rdrd\theta = -2\pi\tfrac{2}{3}(16-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{7}} =$$

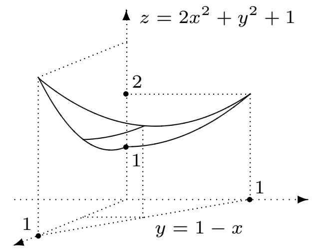
$$-\tfrac{4}{3}\pi(27-64) = \tfrac{148}{3}\pi.$$



c) paraboloide elíptico $z = 2x^2 + y^2 + 1$, el plano $x + y = 1$ y los planos coordenados.

La región de integración se reduce al triángulo que aparece en la gráfica, por lo que:

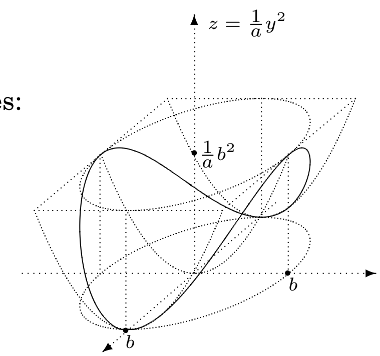
$V=\displaystyle\int_0^1\int_0^{1-x}(2x^2+y^2+1)dydx=\int_0^1(2x^2y+\tfrac{1}{3}y^3+y)\Big|_0^{1-x}dx=$ $\displaystyle\int_0^1(-\tfrac{7}{3}x^3+3x^2-2x+\tfrac{4}{3})dx=\Big(-\tfrac{7}{12}x^4+x^3-x^2+\tfrac{4}{3}x\Big)\Big|_0^1=$ $-\tfrac{7}{12}+1-1+\tfrac{4}{3}=\tfrac{3}{4}.$



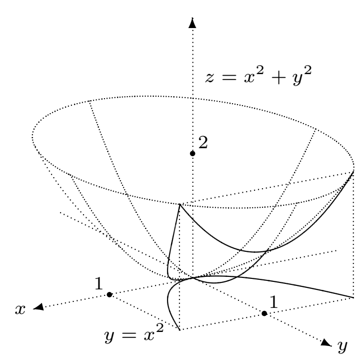
d) $az=y^2$, $x^2+y^2=b^2$, $z=0$.

Solución Dada la simetría de la superficie, el volumen es:

$V=\displaystyle\int_{-b}^{b}\int_{-\sqrt{b^2-x^2}}^{\sqrt{b^2-x^2}}\frac{y^2}{a}dydx=\frac{4}{a}\int_0^b\int_0^{\sqrt{b^2-x^2}}y^2dydx=$ $\displaystyle\frac{4}{3a}\int_0^b(b^2-x^2)^{\frac{3}{2}}dx=\frac{4}{3a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}b^3(1-\operatorname{sen}^2\theta)^{\frac{3}{2}}b\cos\theta d\theta=$ $\displaystyle\frac{4b^4}{3a}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^4\theta d\theta=\frac{\pi b^4}{4a}.$



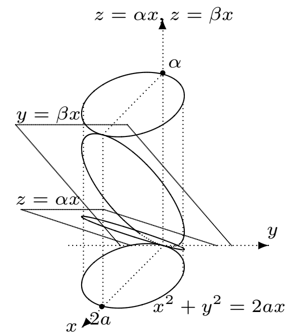
e) $z=x^2+y^2$, $y=x^2$, $y=1$, $z=0$.



Claramente tenemos que el volumen es:

$V=\displaystyle\int_0^1\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}(x^2+y^2)dxdy=2\int_0^1(y^2x+\tfrac{1}{3}x^3)\Big|_0^{\sqrt{y}}dy=$ $\displaystyle 2\int_0^1(\tfrac{1}{3}y^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{5}{2}})dy=(\tfrac{1}{3}\tfrac{4}{5}y^{\frac{5}{2}}+\tfrac{4}{7}y^{\frac{7}{2}})\Big|_0^1=\tfrac{4}{15}+\tfrac{4}{7}=\tfrac{88}{105}.$

f) $x^2+y^2=2ax$, $z=\alpha x$, $z=\beta x$, $\alpha>\beta$.



Es claro que el volumen es:

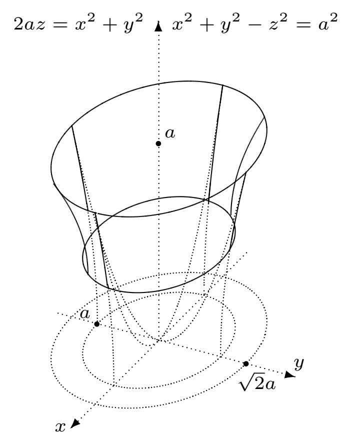
$$V=\int_0^{2a}\int_{-\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax-x^2}}(\alpha-\beta)xdydx=2\int_0^{2a}(\alpha-\beta)x\sqrt{2ax-x^2}dx=$$

$$2(\alpha-\beta)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(a+a\cos\theta)a^2\operatorname{sen}^2\theta d\theta=2(\alpha-\beta)a^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^2\theta d\theta+0=$$

$$4(\alpha-\beta)a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^2\theta d\theta=(\alpha-\beta)a^3\pi.$$

g) $2az=x^2+y^2$, $x^2+y^2-z^2=a^2$, $z=0$.

Las superficies se intersecan en $2az-z^2=a^2$ i.e. $z=a$, por lo que si definimos $\Delta_a=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/a^2\le x^2+y^2\le 2a^2\}$, el volumen es:



$$V=\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_0^{\frac{x^2+y^2}{2a}}dzdydx+\iiint_{\Delta_a}\int_{\sqrt{x^2+y^2-a^2}}^{\frac{x^2+y^2}{2a}}dz\,dy\,dx=$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^a\frac{r^2}{2a}rdrd\theta+\int_0^{2\pi}\int_a^{\sqrt{2}a}\Big(\frac{r^2}{2a}-\sqrt{r^2-a^2}\Big)rdrd\theta=$$

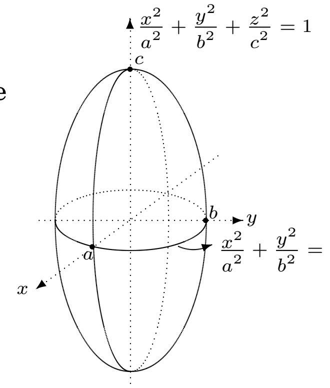
$$\frac{\pi}{a}\int_0^a r^3dr+2\pi\int_a^{\sqrt{2}a}\Big(\frac{r^3}{2a}-\frac{1}{2}\sqrt{r^2-a^2}2r\Big)dr=$$

$$\frac{\pi}{a}\frac{a^4}{4}+\pi\Big(\frac{r^4}{4a}-\frac{2}{3}(r^2-a^2)^{\frac{3}{2}}\Big)\Big|_a^{\sqrt{2}a}=$$

$$\frac{\pi}{4}a^3+\pi\big(a^3-\frac{2}{3}a^3-\frac{1}{4}a^3\big)=\frac{\pi}{3}a^3.$$

h) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

Realizando el cambio de variable $x'=\frac{x}{a}$, $y'=\frac{y}{b}$, $z'=\frac{z}{c}$, el Jacobiano $J^{-1}=\begin{vmatrix}\frac{1}{a}&0&0\\0&\frac{1}{b}&0\\0&0&\frac{1}{c}\end{vmatrix}\Longrightarrow J=abc$ y se tiene $x'^2+y'^2+z'^2=1$. Usando coordenadas esféricas tenemos:



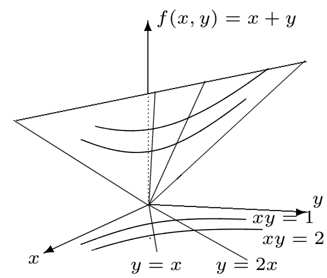
$$\iiint_V dxdydz=\int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 abcr^2\cos\psi\,dr\,d\psi\,d\varphi=$$

$$2\pi abc\tfrac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi d\psi=\tfrac{4}{3}\pi abc,$$

i) $z = x + y$, $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$, $y = 2x$, $z = 0$, $x > 0$, $y > 0$.

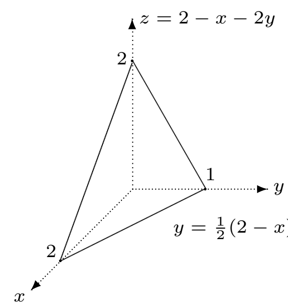
$V = \iint\limits_{R} z dxdy = \iint\limits_{R} (x+y)dxdy$. Sea $u = xy$, $v = \frac{y}{x}$, $x = u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}}$, $y = u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}$, entonces:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{3}{2}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4v} - \frac{1}{4v} = -\frac{1}{2v},$$



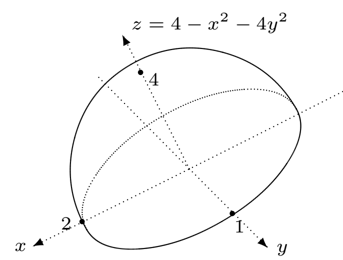
por lo que $V = \frac{1}{2}\int_1^2\int_1^2 \frac{1}{v}\left[\left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{1}{2}} + (uv)^{\frac{1}{2}}\right]dudv = \frac{1}{2}\int_1^2\int_1^2 u^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{v^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{v^{\frac{3}{2}}}\right)dudv = \frac{1}{3}(4 - \sqrt{2}) = \frac{1}{3}\sqrt{2}(2\sqrt{2} - 1)$.

j) $z = 2 - x - 2y$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.



$$V = \int_0^2\int_0^{\frac{2-x}{2}} (2 - x - 2y)dydx = \int_0^2 \left((2-x) - \frac{x(2-x)}{2} - \left(\frac{2-x}{2}\right)^2\right)dx = \int_0^2 \left(1 - x + \tfrac{1}{4}x^2\right)dx = \left(x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{12}x^3\right)\Big|_0^2 = 2 - 2 + \tfrac{8}{12} = \tfrac{2}{3}.$$

k) por el paraboloide $x^2 + 4y^2 + z = 4$ y el plano xy.



El volumen claramente es:

$V = \int_{-2}^{2}\int_{-\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}} (4 - x^2 - 4y^2)dydx = \frac{2}{3}\int_{-2}^{2}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}dx = \frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 16\cos^4\theta d\theta = 4\pi$, realizando el cambio de variable $x = 2\operatorname{sen}\theta$.

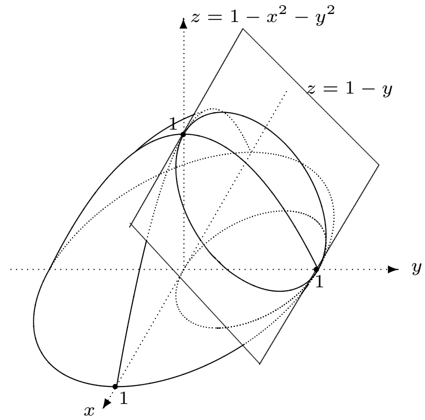
l) $z = 1 - x^2 - y^2$, el plano $z = 1 - y$, $z = 0$, $x = 0$, $y = 0$.

Las superficies se intersecan sobre el cilindro $x^2 + y^2 - y = 0$. El volumen es:

$$V = \int_0^1 \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} \int_{1-y}^{1-x^2-y^2} dz\,dx\,dy =$$

$$\frac{4}{3}\int_0^1 (y-y^2)^{\frac{3}{2}} dy = \frac{1}{6}\int_0^1 (1-(2y-1)^2)^{\frac{3}{2}})dy =$$

$\frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta = \frac{1}{6}\frac{3}{16}\pi = \frac{1}{32}\pi$, haciendo el cambio de variable $2y - 1 = \operatorname{sen}\theta$.



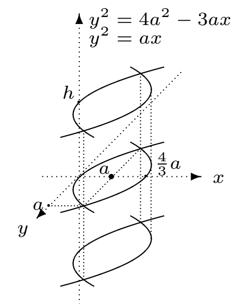
m) $y^2 = 4a^2 - 3ax$, $y^2 = ax$, $z = \pm h$.

El volumen está dado por:

$$V = \int_{-a}^{a} \int_{\frac{y^2}{a}}^{\frac{4a^2-y^2}{3a}} \int_{-h}^{h} dz\,dx\,dy = \int_{-a}^{a} 2hx\Big|_{\frac{y^2}{a}}^{\frac{4a^2-y^2}{3a}} dy =$$

$$2h\int_{-a}^{a} (\frac{4a^2-y^2}{3a} - \frac{3y^2}{3a})dy = 2h\int_{-a}^{a} (\frac{4a^2-4y^2}{3a})dy =$$

$$\frac{4h}{3a}(4a^2y - \frac{4}{3}y^3)\Big|_0^a = \frac{4h}{3a}(4a^3 - \frac{4}{3}a^3) = \frac{32}{9}a^2h.$$



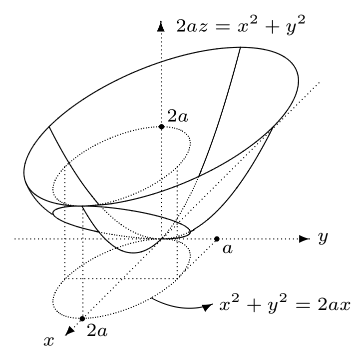
n) la parte del cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$ comprendida entre el paraboloide $x^2 + y^2 = 2az$ y el plano xy.

Igualando las ecuaciones de las superficies, vemos que se intersecan sobre el plano $z = x$, de modo que el volumen es $V = \int_0^{2a} \int_{-\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax-x^2}} \int_0^{\frac{x^2+y^2}{2a}} dzdydx =$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2a\cos\theta} \int_0^{\frac{r^2}{2a}} dzrdrd\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2a\cos\theta} \frac{r^3}{2a} drd\theta =$$

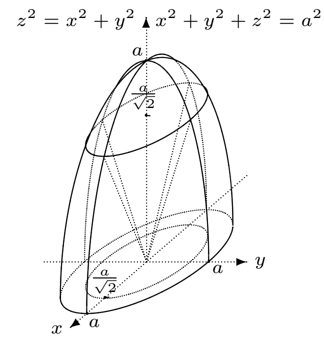
$$\frac{1}{4a}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (2a\cos\theta)^4 d\theta = 4a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta = 4a^3\frac{3}{16}\pi =$$

$\frac{3}{4}\pi a^3$.



o) la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y el cono $z^2 = x^2 + y^2$ (parte exterior respecto al cono).

Las superficies se intersecan en $z = \pm\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ y el volumen es la parte exterior del cono dentro del cilindro $x^2 + y^2 = \dfrac{a^2}{2}$, más la parte dentro de la esfera exterior a este mismo cilindro. El volumen es dos veces el volumen cuando $z \geq 0$, por lo que si tomamos coordenadas cilíndricas tenemos:

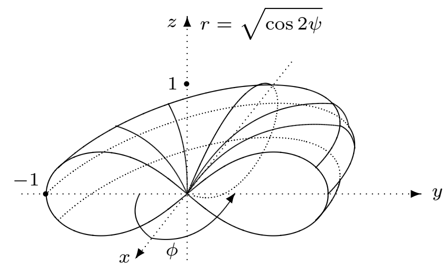


$$V = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}}\int_0^r dz\, r\, dr\, d\theta + 2\int_0^{2\pi}\int_{\frac{a}{\sqrt{2}}}^{a}\int_0^{\sqrt{a^2-r^2}} \sqrt{a^2-r^2}\, dz\, r\, dr\, d\theta =$$

$$\frac{4\pi}{3}\frac{a^3}{2\sqrt{2}} + (-2)\pi\frac{2}{3}(a^2-r^2)\Big|_{a\sqrt{2}}^{a} = \frac{4\pi}{3}a^3\sqrt{2} + \frac{\pi}{3}a^3\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi a^3.$$

p) la superficie $\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}\right)^2 = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2}$.

Usando a coordenadas esféricas generalizadas, $x = ar\cos\psi\cos\varphi$, $y = br\cos\psi\,\mathrm{sen}\,\varphi$, $z = cr\,\mathrm{sen}\,\psi$, $J = abcr^2\cos\psi$, la ecuación de la superficie es $r^4 = r^2\cos^2\psi - r^2\,\mathrm{sen}^2\,\psi = r^2\cos 2\psi$, es decir $r = \sqrt{\cos 2\psi}$. La superficie se puede generar de dos maneras distintas:



$r = \sqrt{\cos 2\psi}$, $-\frac{\pi}{4} \leq \psi \leq \frac{\pi}{4}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$,

$r = \sqrt{\cos 2\psi}$, $-\frac{\pi}{4} \leq \psi \leq \frac{\pi}{4}$ o $-\frac{3\pi}{4} \leq \psi \leq \frac{5\pi}{4}$, $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Así tenemos que el volumen es:

$$V = abc\int_0^{\pi}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{\cos 2\psi}} r^2\cos\psi dr d\psi d\varphi + abc\int_0^{\pi}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{\cos 2\psi}} r^2 dr\cos\psi\, d\psi\, d\varphi =$$

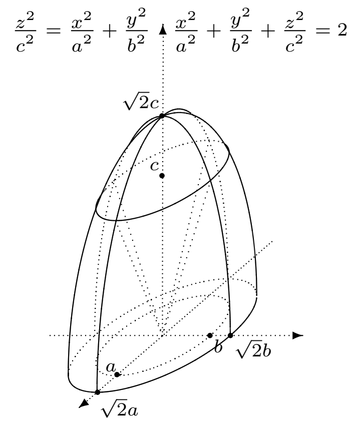
$$\frac{1}{3}\pi abc\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\cos 2\psi)^{\frac{3}{2}}\cos\psi d\psi + \frac{1}{3}\pi abc\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(\cos 2\psi)^{\frac{3}{2}}\cos\psi d\psi =$$

$$\frac{1}{3}\pi abc\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(1-2\,\mathrm{sen}^2\,\psi)^{\frac{3}{2}}\cos\psi d\psi + \frac{1}{3}\pi abc\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(1-2\,\mathrm{sen}^2\,\psi)^{\frac{3}{2}}\cos\psi d\psi \underset{u=\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\,\psi}{=}$$

$$\frac{2}{3}\pi abc\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}(1-u^2)^{\frac{3}{2}}du \underset{u=\mathrm{sen}\,\theta}{=} \frac{2}{3}\pi abc\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\mathrm{sen}^2\,\theta)^{\frac{3}{2}}\cos\theta\, d\theta =$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}}\pi\frac{abc}{3}2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}\cos\theta d\theta = \frac{4abc}{3\sqrt{2}}\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta = \frac{4abc}{3\sqrt{2}}\frac{3}{2\cdot 4}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2 abc}{4\sqrt{2}}.$$

q) las superficies $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=2$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$, $z\ge 0$.



Las superficies se intersecan en el plano $z=c$. Por otro lado, si se hace el cambio de variable $\frac{x}{a}=x'$, $\frac{y}{b}=y'$, $\frac{z}{c}=z' \Longrightarrow \iiint\limits_V dxdydz = abc\iiint\limits_{V'} dx'dy'dz'$, donde V' es el volumen determinado por $x'^2+y'^2+z'^2=2$, $x'^2+y'^2-z'^2=0$, $z'\ge 0$. Usando coordenadas cilíndricas se tiene que:

$V=abc\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} dzdydx=\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\big(\sqrt{2-x^2-y^2}-\sqrt{x^2+y^2}\big)dydx=$
$abc\int_0^1\int_0^{2\pi}(\sqrt{2-r^2}-r)rdrd\theta=2\pi abc\int_0^1\big(\sqrt{2-r^2}r-r^2\big)dr=2\pi abc\big(-\frac{1}{2}(2-r^2)^{\frac{3}{2}}\frac{2}{3}-\frac{1}{3}r^3\big)\Big|_0^1=2\pi abc\big(-\frac{1}{3}1^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}2^{\frac{3}{2}}\big)=2\pi abc\big(\frac{2}{3}\sqrt{2}-\frac{2}{3}\big)=\frac{4}{3}\pi abc(\sqrt{2}-1)$.

24. Calcular el volumen de los cuerpos limitados por las superficies dadas, efectuando integración triple:

a) Por los cilindros $z=4-y^2$, $z=y^2+2$ y por los planos $x=-1$, $x=2$.

b) Por los paraboloides $z=x^2+y^2$, $z=x^2+2y^2$ y los planos $y=x$, $y=2x$, $x=1$.

c) Por los paraboloides $z=x^2+y^2$, $z=2x^2+2y^2$, el cilindro $y=x^2$ y el plano $y=x$.

d) Por los cilindros $z=\ln(x+2)$, $z=\ln(6-x)$ y los planos $x=0$, $x+y=2$, $x-y=2$.

e) Por el paraboloide $(x-1)^2+y^2=z$ y el plano $2x+z=2$.

f) Por el paraboloide $z=x^2+y^2$ y el plano $z=x+y$.

g) Por la esfera $x^2+y^2+z^2=4$ y el paraboloide $x^2+y^2=3z$.

h) Por la esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$ y el paraboloide $x^2+y^2=a(a-2z)$, $z\ge 0$.

i) Por el paraboloide $z=x^2+y^2$ y el cono $z^2=xy$.

j) Por la esfera $x^2+y^2+z^2=4az-3a^2$ y el cono $z^2=4(x^2+y^2)$ (tomando en cuenta la parte de la esfera dentro del cono).

k) $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3x$, o bien $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3z$.

l) $(x^2+y^2+z^2)^2 = axyz$.

m) $(x^2+y^2+z^2)^3 = a^2z^4$.

n) $(x^2+y^2+z^2)^3 = \dfrac{a^6z^2}{x^2+y^2}$.

o) $(x^2+y^2+z^2)^3 = a^2(x^2+y^2)^2$.

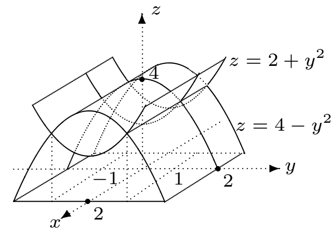
p) $(x^2+y^2)^2+z^4 = a^3z$.

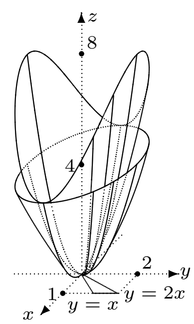
q) $x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2+z^2=16$, $z^2=x^2+y^2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.

Solución

a) $z=4-y^2$, $z=y^2+2$, $x=-1$, $x=2$. Las superficies se intersecan cuando $z=4-y^2=y^2+2 \Longrightarrow y=\pm 1$. El volumen está dado por $V=\int_{-1}^{2}\Big(\int_{-1}^{1}\Big(\int_{y^2+2}^{4-y^2}dz\Big)dy\Big)dx =$

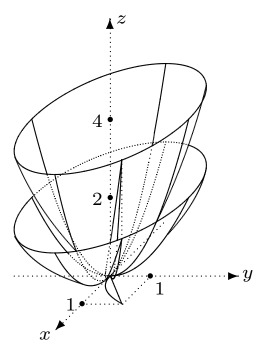
$$\int_{-1}^{2}\Big(\int_{-1}^{1}(2-2y^2)dy\Big)dx = 2{\cdot}3{\cdot}2\Big(y-\frac{1}{3}y^3\Big)\Big|_0^1 = 12{\cdot}\frac{2}{3} = 8.$$





b) $z=x^2+y^2$, $z=x^2+2y^2$, $y=x$, $y=2x$, $x=1$. En este caso $0\le x\le 1$, $x\le y\le 2x$, $x^2+y^2\le z\le x^2+2y^2$, por lo que $V=\int_0^1\Big(\int_x^{2x}\Big(\int_{x^2+y^2}^{x^2+2y^2}dz\Big)dy\Big)dx =$

$$\int_0^1\Big(\int_x^{2x}y^2dy\Big)dx = \frac{1}{3}\int_0^1(8x^3-x^3)dx = \frac{7}{3}{\cdot}\frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{7}{12}.$$



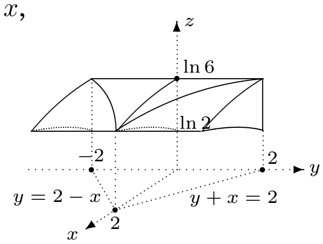
c) $z=x^2+y^2$, $z=2x^2+2y^2$, $y=x^2$, $y=x$. Los cilindros $y=x^2$, $y=x$ se intersecan en $x=0$, $x=1$, por lo que $0\le x\le 1$, $x^2\le y\le x$, $x^2+y^2\le z\le 2x^2+2y^2$, o sea:

$$V=\int_0^1\Big(\int_{x^2}^{x}\Big(\int_{x^2+y^2}^{2x^2+2y^2}dz\Big)dy\Big)dx =$$

$$\int_0^1\Big(\int_{x^2}^{x}(x^2+y^2)dy\Big)dx = \int_0^1\Big(x^2y+\frac{1}{3}y^3\Big)\Big|_{x^2}^{x}dx =$$

$$\int_0^1\Big(\frac{4}{3}x^3-x^4-\frac{1}{3}x^6\Big)dx = \Big(\frac{1}{3}x^4-\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{21}x^7\Big)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{21} = \frac{3}{35}.$$

d) $z = \ln(z+2)$, $z = \ln(6-x)$, $x = 0$, $x+y = 2$, $x-y = 2$.



En estas condiciones tenemos que $0 \leq x \leq 2$, $x-2 \leq y \leq 2-x$,

$\ln(x+2) \leq z \leq \ln(6-x)$, entonces:

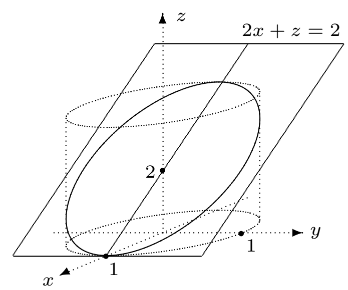
$V = \int_0^2 \Big(\int_{x-2}^{2-x} \Big(\int_{\ln(x+2)}^{\ln(6-x)} dz \Big) dy \Big) dx =$

$\int_0^2 \Big(\int_{x-2}^{2-x} (\ln(6-x) - \ln(x+2)) dy \Big) dx =$

$\int_0^2 (4-2x)(\ln(6-x) - \ln(x+2)) dx = \Big((x^2-4x-12)\ln(x+2) + (-x^2+4x-12)\ln(6-x) + 8x \Big)\Big|_0^2 =$

$4(4 - 3\ln 3)$, ya que $\int x \ln x dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$, $\int \ln x dx = x\ln x - x + C$.

e) $(x-1)^2 + y^2 = z$, $2x + z = 2$.



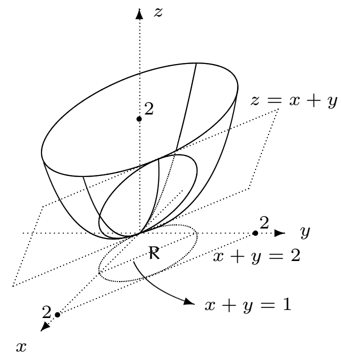
Las superficies se intersecan cuando $(x-1)^2 + y^2 = 2 - 2x \Longrightarrow x^2 + y^2 = 1$, es decir la proyección de la intersección sobre el plano xy, es una circunferencia centrada de radio 1.

El volumen está determinado por las desigualdades $-1 \leq x \leq 1$, $-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$, $y^2 + (x-1)^2 \geq z \geq 2 - 2x$, es decir:

$V = \int_{-1}^1 \Big(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \Big(\int_{2-2x}^{(x-1)^2+y^2} dz \Big) dy \Big) dx = \int_{-1}^1 \Big(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2) dy \Big) dx =$

$\int_0^{2\pi} \Big(\int_0^1 (1-r^2) r\, dr \Big) d\theta = 2\pi \Big(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \Big)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$.

f) $z = x^2 + y^2$, $z = x + y$.



La intersección de las superficies está dada por la ecuación $z = x^2 + y^2 = x + y \Longrightarrow (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$, o sea que el corte de la superficie $z = x^2 + y^2$ con el plano $z = x + y$, es tal que al proyectarse sobre el plano xy nos da una circunferencia de centro $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y radio $\frac{1}{\sqrt{2}}$, por lo que $x^2 + y^2 \le z \le x + y$. El volumen es:

$$\iint\limits_{R} \Big(\int_{x^2+y^2}^{x+y} dz \Big) dx\, dy = \iint\limits_{R} (x + y - x^2 - y^2) dx\, dy.$$

Efectuando el cambio de variable $u = x - \frac{1}{2}$, $v = y - \frac{1}{2}$, $J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, por lo que:

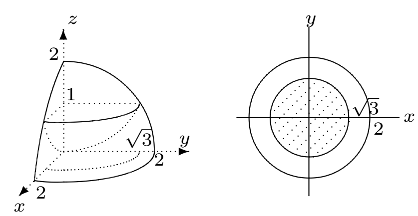
$$\iint\limits_{R} (x + y - x^2 - y^2) dx\, dy = \iint\limits_{C} (u + \tfrac{1}{2} + v + \tfrac{1}{2} - (u + \tfrac{1}{2})^2 - (v + \tfrac{1}{2})^2) du\, dv =$$

$\displaystyle\iint\limits_{C} (\tfrac{1}{2} - u^2 - v^2) du\, dv$, donde $C = C((0,0), \frac{1}{\sqrt{2}})$ es el círculo de centro $(0,0)$ y radio $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Pasando a coordenadas polares tenemos que:

$$\iint\limits_{C} (\tfrac{1}{2} - u^2 - v^2) du\, dv = \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (\tfrac{1}{2} - r^2) r\, dr \Big) d\theta = 2\pi \Big(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \Big) \Big|_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{\pi}{2} \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \Big) = \frac{\pi}{8}.$$

g) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 3z$.



Determinemos los puntos en que las superficies se intersecan $z^2 + 3z - 4 = (z - 1)(z + 4) = 0$ y como se elimina $z = -4$, tenemos que $z = 1$.

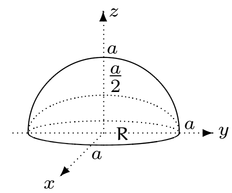
Si $z = 1$ tenemos la circunferencia $x^2 + y^2 = 3$. Pasando a coordenadas cilíndricas se tiene que el volumen es:

$$V = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \Big(\int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}} \Big(\int_{\frac{x^2+y^2}{3}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz \Big) dy \Big) dx = \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{\sqrt{3}} \Big(\sqrt{4 - r^2} - \frac{1}{3} r^2 \Big) r dr \Big) d\theta =$$

$$2\pi \Big(-\frac{1}{3}(4 - r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{12} r^4 \Big) \Big|_0^{\sqrt{3}} = 2\pi \Big(-\frac{1}{3} + \frac{8}{3} - \frac{9}{12} \Big) = \frac{19}{6}\pi.$$

El volumen de la región complementaria es $\frac{4}{3}\pi(2)^3 - \dfrac{19}{6}\pi = \dfrac{15}{2}\pi$.

h) $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2=a^2-2az$, $z\geq 0$.



Las superficies se intersecan cuando $a^2-2az+z^2=a^2 \implies z(z-2a)=0$ i.e. $z=0$, pues $z=2a$ no satisface la ecuación de la esfera.

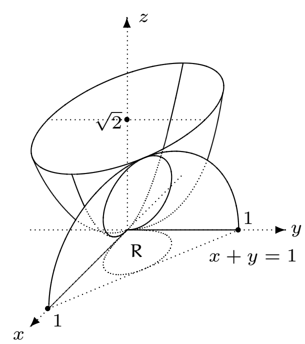
Cuando $z=0$ tenemos la circunferencia $x^2+y^2=a^2$ y $\dfrac{a^2-x^2-y^2}{2a}\leq z\leq\sqrt{a^2-x^2-y^2}$.

Así el volumen es (usando coordenadas cilíndricas):

$$V=\int_{-a}^{a}\Big(\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\Big(\int_{\frac{a^2-x^2-y^2}{2a}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dz\Big)dy\Big)dx=\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^a\Big(\sqrt{a^2-r^2}-\frac{a^2-r^2}{2a}\Big)r\,dr\Big)d\theta=$$

$$2\pi\Big(-\frac{1}{3}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2a}\Big(a^2\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\Big)\Big)\Big|_0^a=2\pi\Big(\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2a}\frac{a^4}{4}\Big)=2\pi\Big(\frac{1}{3}-\frac{1}{8}\Big)a^3=\frac{5}{12}\pi a^3.$$

i) $z=x^2+y^2$, $z^2=xy$.



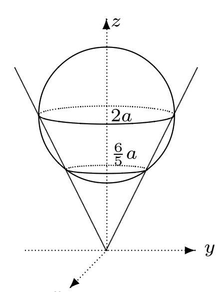
Debemos determinar la intersección de las superficies $z=x^2+y^2=\sqrt{xy}$. Pasando a coordenadas polares tenemos $r=\sqrt{\frac{1}{2}\operatorname{sen}2\theta}$, con $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$, $\pi\leq\theta\leq\frac{3\pi}{2}$. Además $x^2+y^2\leq z\leq\sqrt{xy}$, por lo que el volumen es dos veces el volumen de la región del primer octante, es decir:

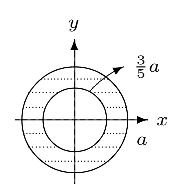
$$V=2\iint_{R}\Big(\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{xy}}dz\Big)dxdy=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}\operatorname{sen}2\theta}}\Big(r\sqrt{\frac{1}{2}\operatorname{sen}2\theta}-r^2\Big)rdr\Big)d\theta=$$

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\frac{1}{3}r^2\sqrt{\frac{1}{2}\operatorname{sen}2\theta}-\frac{1}{4}r^4\Big)\Big|_0^{\sqrt{\frac{1}{2}\operatorname{sen}2\theta}}d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\frac{1}{12}\operatorname{sen}^2 2\theta-\frac{1}{16}\operatorname{sen}^2 2\theta\Big)d\theta=$$

$$\frac{2}{3{\cdot}4^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^2 2\theta d\theta=\frac{2}{3{\cdot}4^2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{sen}^2 2\theta 2d\theta=\frac{2}{3{\cdot}4^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{sen}^2 u du=\frac{2}{3{\cdot}4^2}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{96}.$$

j) $x^2+y^2+(z-2a)^2=a^2$, $z^2=4(x^2+y^2)$.





La intersección de las superficies ocurren cuando $\dfrac{z^2}{4}+z^2-4az+3a^2=\dfrac{1}{4}(z-2a)(5z-6a)=0$ i.e. $z=2a$, $z=\dfrac{6}{5}a$.

Cuando $z=\dfrac{6}{5}a$ se tiene que $x^2+y^2=\dfrac{9}{25}a^2$, o sea $r=\dfrac{3}{5}a$.

Cuando $z=2a$ se tiene que $x^2+y^2=a^2$, o sea $r=a$.

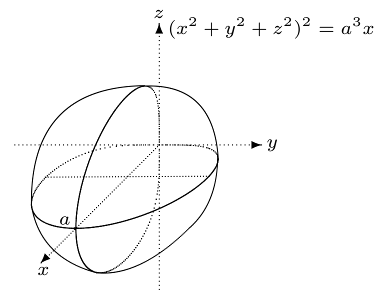
Para simplificar, determinemos el volumen del cono fuera de la esfera, ya que el volumen buscado es el volumen de la esfera menos el volumen del cono fuera de la esfera. Para calcular el volumen del cono fuera de la esfera, usando coordenadas cilíndricas tenemos $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $\frac{3}{5}a \leq r \leq a$, $2a - \sqrt{a^2 - r^2} \leq z \leq 2r$:

$$\int_0^{2\pi} \Big(\int_{\frac{3}{5}a}^{a} \Big(\int_{2a-\sqrt{a^2-r^2}}^{2r} dz \Big) r dr \Big) d\theta = 2\pi \int_{\frac{3}{5}a}^{a} \Big(2r - 2a + \sqrt{a^2 - r^2} \Big) r dr =$$

$$2\pi \Big(\frac{2}{3} r^3 - ar^2 - \frac{1}{3}(a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \Big) \Big|_{\frac{3}{5}a}^{a} = 2\pi \Big(\frac{2}{3} - 1 - 0 - \Big(\frac{2}{3}\frac{3^3}{5^3} - \frac{3^2}{5^2} - \frac{1}{3}\frac{4^3}{5^3} \Big) \Big) a^3 = \frac{8}{75}\pi a^3.$$

Finalmente el volumen es $\frac{4}{3}\pi a^3 - \frac{8}{75}\pi a^3 = \frac{92}{75}\pi a^3$.

k) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z$, o bien $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 x$.



Se observa que por razones de simetría los volúmenes de ambas regiones son iguales. Verifiquemos esto.

Consideremos la región $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z$, lo primero que vemos es que $z \geq 0$. Pasando a coordenadas esféricas $x = r \cos\varphi \cos\psi$, $y = r \operatorname{sen}\varphi \cos\psi$, $z = r \operatorname{sen}\psi$, se tiene que $r^4 = a^3 r \operatorname{sen}\psi$ i.e. $r = a\sqrt[3]{\operatorname{sen}\psi}$, con $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq r \leq a\sqrt[3]{\operatorname{sen}\psi}$.

Así tenemos que el volumen es:

$$V = \iiint\limits_V dxdydz = \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^{a\sqrt[3]{\operatorname{sen}\psi}} r^2 \cos\psi dr \Big) d\psi \Big) d\varphi = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} a^3 \operatorname{sen}\psi \cos\psi d\psi =$$

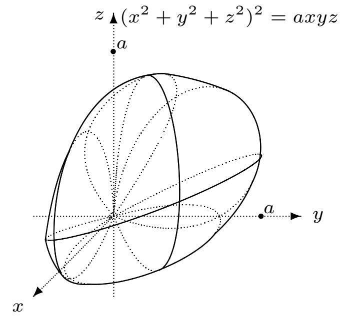
$$\frac{2}{3}\pi a^3 \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2\psi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{3} a^3.$$

Usando la otra ecuación tenemos que $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 x$, $x \geq 0$, se transforma en $r^3 = a^3 \cos\varphi \cos\psi$ i.e. $r = a\sqrt[3]{\cos\varphi\cos\psi}$, con $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$. Así se tiene que el volumen es:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^{a\sqrt[3]{\cos\varphi\cos\psi}} r^2 \cos\psi dr \Big) d\psi \Big) d\varphi = \frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^3 \cos\varphi \cos^2\psi d\psi \Big) d\varphi =$$

$$\frac{4}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\psi d\psi = \frac{4}{3} a^3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3} a^3.$$

l) $(x^2+y^2+z^2)^2 = axyz$.



Usando coordenadas esféricas la ecuación se transforma en $r^4 = ar^3\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi\cos^2\psi\operatorname{sen}\psi \geq 0$, es decir $r = a\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi\cos^2\psi\operatorname{sen}\psi$, donde los ángulos φ y ψ varían en $(\varphi,\psi)\in[\,0,\frac{\pi}{2}\,]\times[\,0,\frac{\pi}{2}\,]$, $(\varphi,\psi)\in[\,\pi,\frac{3\pi}{2}\,]\times[\,0,\frac{\pi}{2}\,]$, $(\varphi,\psi)\in[\,\frac{\pi}{2},\pi\,]\times[\,\pi,\frac{3\pi}{2}\,]$, $(\varphi,\psi)\in[\,\frac{3\pi}{2},2\pi\,]\times[\,\pi,\frac{3\pi}{2}\,]$.

De esta manera tenemos que el volumen es 4 veces el volumen de la figura en el primer octante. Notemos que pareciera que es 8 veces el volumen, pero se genera la misma figura en $[\,\pi,\frac{3\pi}{2}\,]\times[\,0,\frac{\pi}{2}\,]$ y en $[\,0,\frac{\pi}{2}\,]\times[\,\frac{\pi}{2},\pi\,]$.

Finalmente tenemos que el volumen es:

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_0^{a\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi\cos^2\psi\operatorname{sen}\psi} r^2\cos\psi\,dr\Big)d\psi\Big)d\varphi =$$

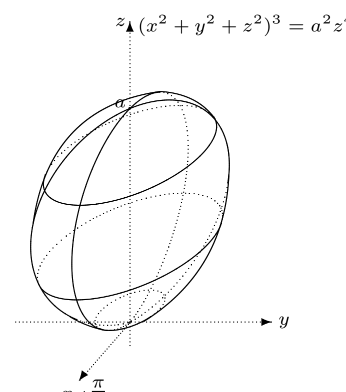
$$\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3\cos^3\varphi\operatorname{sen}^3\varphi\cos^7\psi\operatorname{sen}^3\psi d\psi\Big)d\varphi =$$

$$\frac{4}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi(1-\operatorname{sen}^2\varphi)\cos\varphi d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos^7\psi(1-\cos^2\psi)(-\operatorname{sen}\psi)d\psi =$$

$$\frac{4}{3}a^3\int_0^1 x^3(1-x^2)dx\int_0^1 y^7(1-y^2)dy = \frac{4}{3}a^3\Big(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{6}x^6\Big)\Big|_0^1\Big(\frac{1}{8}y^8-\frac{1}{10}y^{10}\Big)\Big|_0^1 =$$

$$\frac{1}{3}a^3\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\Big)\Big(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\Big) = \frac{1}{360}a^3.$$

m) $(x^2+y^2+z^2)^3 = a^2z^4$.

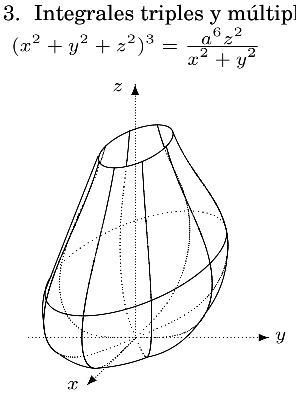


Usando coordenadas esféricas tenemos $r^6 = a^2r^4\operatorname{sen}^4\psi$, o sea $r = a\operatorname{sen}^2\psi$, $0\leq\psi\leq\pi$, $0\leq\varphi\leq\pi$. La figura tiene una parte similar cuando $z<0$, por lo que el volumen es dos veces el volumen determinado por la ecuaciones en coordenadas esféricas:

$$V = 2\int_0^{\pi}\Big(\int_0^{\pi}\Big(\int_0^{a\operatorname{sen}^2\psi} r^2dr\Big)|\cos\psi|d\psi\Big)d\varphi =$$

$$2\frac{\pi}{3}\int_0^{\pi} a^3\operatorname{sen}^6\psi|\cos\psi|d\psi = \frac{4}{3}\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3\operatorname{sen}^6\psi\cos\psi d\psi = \frac{4}{3}\pi a^3\frac{1}{7}\operatorname{sen}^7\psi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{21}\pi a^3.$$

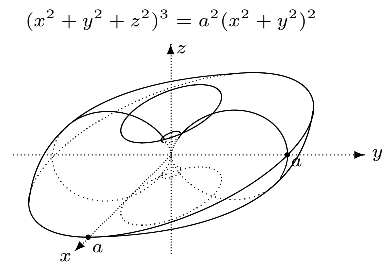
Se pudo usar la variación $0\leq\psi\leq\frac{\pi}{2}$, $0\leq\varphi\leq 2\pi$.



n) $(x^2+y^2+z^2)^3 = \dfrac{a^6z^2}{x^2+y^2}$.

Usando coordenadas esféricas se tiene que $r^6 = \dfrac{a^6r^2\operatorname{sen}^2\psi}{r^2\cos^2\psi}$, i.e. $r = a\sqrt[3]{\tan\psi}$, con $0 \le \psi < \frac{\pi}{2}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. Notemos que la integral es impropia en este caso, pero fácilmente se transforma en propia. No debemos olvidar la parte $z<0$. El volumen es:

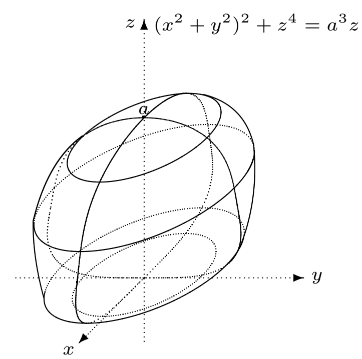
$$2\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_0^{a\sqrt[3]{\tan\psi}} r^2dr\Big)\cos\psi d\psi\Big)d\varphi = \frac{4\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3\operatorname{sen}\psi d\psi = \frac{4}{3}\pi a^3.$$



o) $(x^2+y^2+z^2)^3 = a^2(x^2+y^2)^2$.

Con las coordenadas esféricas la ecuación cambia a $r^6 = a^2r^4\cos^4\psi$ i.e. $r = a\cos^2\psi$, $-\frac{\pi}{2} \le \psi \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. Así el volumen es:

$$V = \int_0^{2\pi}\Big(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_0^{a\cos^2\psi} r^2dr\Big)\cos\psi d\psi\Big)d\varphi = 2\pi\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3\cos^7\psi d\psi = \frac{4}{3}\pi a^3\frac{2\cdot4\cdot6}{3\cdot5\cdot7} = \frac{64\pi a^3}{105}.$$



p) $(x^2+y^2)^2+z^4 = a^3z$.

Se observa que $z \ge 0$; usando coordenadas esféricas tenemos $(r^2\cos^2\psi)^2 + r^4\operatorname{sen}^4\psi = r^4(\cos^4\psi+\operatorname{sen}^4\psi) = a^3r\operatorname{sen}\psi \ge 0$, o sea $r = a\sqrt[3]{\dfrac{\operatorname{sen}\psi}{\operatorname{sen}^4\psi+\cos^4\psi}}$, $0 \le \psi \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, (se pudo usar $0 \le \psi \le \pi$, $0 \le \varphi \le \pi$), por lo tanto el volumen es:

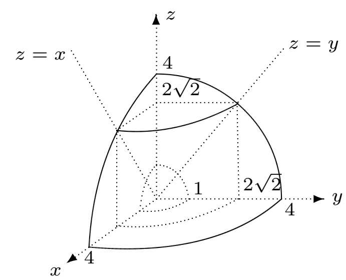
$$V = \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_0^{a\sqrt[3]{\frac{\operatorname{sen}\psi}{\operatorname{sen}^4\psi+\cos^4\psi}}} r^2dr\Big)|\cos\psi|d\psi\Big)d\varphi = \frac{2\pi}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{sen}\psi|\cos\psi|}{\cos^4\psi+\operatorname{sen}^4\psi}d\psi =$$
$$\frac{2}{3}\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{sen}\psi\cos\psi}{\cos^4\psi+\operatorname{sen}^4\psi}d\psi.$$

Haciendo el cambio de variable $u = \operatorname{sen}^2 x$, $du = 2\operatorname{sen}x\cos x dx$, $\cos^4 x + \operatorname{sen}^4 x = (1-\operatorname{sen}^2 x)^2 + \operatorname{sen}^4 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{sen}^4 x = 1 - 2u + 2u^2$, entonces se tiene:

$V = \frac{\pi}{3}a^3 \int_0^1 \frac{du}{1-2u+2u^2} = \frac{2}{3}\pi a^3 \int_0^1 \frac{du}{4u^2-4u+1+1} = \frac{1}{3}\pi a^3 \int_0^1 \frac{2du}{(2u-1)^2+1} =$
$\frac{1}{3}\pi a^3 \arctan(2u-1)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\pi a^3\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{6}\pi^2 a^3.$

q) $x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2+z^2=16$, $z^2=x^2+y^2$, $x=0$, $z=0$, $y=0$.

El cono interseca la esfera de radio 1 en el plano $z=\frac{1}{\sqrt{2}}$ y a la esfera de radio 4 en el plano $z=2\sqrt{2}$, pues $2z^2=1$, $2z^2=16 \Longrightarrow z=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $z=2\sqrt{2}$.

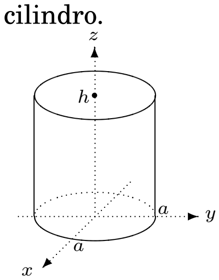


Usando coordenadas cilíndricas tenemos que el volumen está limitado por $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4} \le \psi \le \frac{\pi}{2}$, $1 \le r \le 4$, es decir:

$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_1^4 r^2 dr\right)\cos\psi d\psi\right) d\varphi = \frac{\pi}{2}\frac{1}{3}r^3\Big|_1^4 \operatorname{sen}\psi\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{6}(64-1)\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$
$\frac{21}{4}\pi(2-\sqrt{2}).$

3.4 Centro de gravedad, masa, momentos de inercia

25. Calcular el momento de inercia de un cilindro de radio a y masa m, si su densidad en cada punto es proporcional a la distancia de ese punto del eje del cilindro.



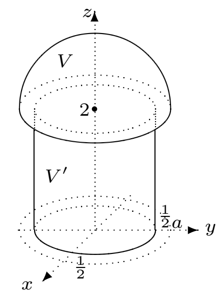
Solución Colocamos la base del cilindro sobre el plano xy y la altura a una distancia h del eje z. La densidad $f(x,y,z)=c\sqrt{x^2+y^2}$ y la distancia al cuadrado del eje del cilindro $\delta^2(x,y,z)=x^2+y^2$, entonces la masa es:

$$m = \iiint_V c\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^a \left(\int_0^h cr\,dz\right) rdr\right) d\theta$$
$$= 2\pi ch \int_0^a r^2 dr = \tfrac{2}{3}\pi cha^3.$$

La inercia respecto al eje z (eje del cilindro) es:

$$I_z = \iiint_V c(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^a \left(\int_0^h cr^3\,dz\right) rdr\right) d\theta$$
$$= 2\pi h \int_0^a cr^4 dr = \tfrac{2}{5}ca^5\pi h = \tfrac{3}{5}ma^2.$$

26. El tallo de una seta es un cilindro recto de revolución de diámetro 1 y longitud 2 y su cabeza es un hemisferio de radio a. Si la seta es un sólido homogéneo con simetría axial y su centro de gravedad está situado en el plano en el que el tallo se une a la cabeza, calcular a.



Solución Dadas las condiciones del problema se tiene que, si situamos la base del cilindro en el plano xy, $\bar{x} = \bar{y} = 0$, $\bar{z} = 2$, con densidad $f(x,y,z) = c$. La masa de la seta es:

$$m = \iiint\limits_V c\,dx\,dy\,dz + \iiint\limits_{V'} c\,dx\,dy\,dz = c\pi\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 2 + c\int_0^{2\pi}\left(\int_0^a\left(\int_2^{2+\sqrt{a^2-r^2}} dz\right) r\,dr\right) d\theta$$

$$= c\tfrac{1}{2}\pi + 2\pi c\int_0^a \sqrt{a^2-r^2}\,r\,dr = \tfrac{1}{2}c\pi + c\pi\tfrac{2}{3}\left(-(a^2-r^2)\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a = \tfrac{1}{2}c\pi + \tfrac{2}{3}c\pi a^3 = c\pi\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{3}a^3\right).$$

Además:

$$m\bar{z} = c\iiint\limits_V z\,dV + c\iiint\limits_{V'} z\,dV$$

$$= c\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^2 z\,dz\right) r\,dr\right) d\theta + c\int_0^{2\pi}\left(\int_0^a\left(\int_2^{2+\sqrt{a^2-r^2}} z\,dz\right) r\,dr\right) d\theta$$

$$= c\frac{z^2}{2}\Big|_0^2 \frac{r^2}{2}\Big|_0^{\frac{1}{2}} 2\pi + 2\pi c\int_0^a\left(\tfrac{1}{2}z^2\Big|_2^{2+\sqrt{a^2-r^2}}\right) r\,dr$$

$$= \tfrac{1}{2}c\pi + c\pi\int_0^a\left(a^2 - r^2 + 4\sqrt{a^2-r^2}\right) r\,dr$$

$$= \tfrac{1}{2}c\pi + c\pi\left(\int_0^a (a^2 r - r^3)dr + \int_0^a 2\sqrt{a^2-r^2}(2r\,dr)\right)$$

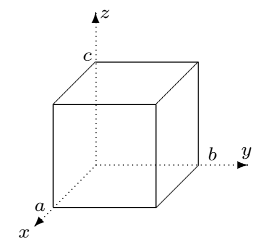
$$= \tfrac{1}{2}c\pi + c\pi\left(\left(\frac{a^4}{2} - \frac{a^4}{4}\right) - \tfrac{4}{3}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}c\pi + c\pi\left(\frac{a^4}{4} + \frac{4}{3}a^3\right) = \tfrac{1}{2}c\pi + c\pi a^3\left(\tfrac{1}{4}a + \tfrac{4}{3}\right),$$

entonces:

$$\bar{z} = 2 = \frac{c}{c}\,\frac{\pi a^3\left(\frac{1}{4}a + \frac{4}{3}\right) + \frac{1}{2}\pi}{\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}a^3\right)} \Longrightarrow \tfrac{1}{4}a^4 + \tfrac{4}{3}a^3 + \tfrac{1}{2} = 1 + \tfrac{4}{3}a^3 \Longrightarrow a^4 = 2 \Longrightarrow a = \sqrt[4]{2}.$$

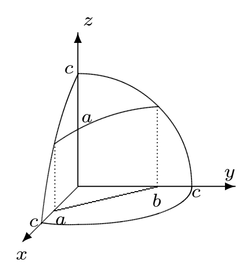
27. Hallar la masa m del paralelepípedo rectangular $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $0 \le z \le c$, si la densidad en el punto (x, y, z) en $\rho(x, y, z) = x + y + z$.

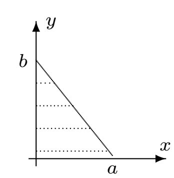


Solución $m = \iiint\limits_V \rho \, dx \, dy \, dz = \int_0^a \int_0^b \int_0^c (x + y + z) \, dz \, dy \, dx =$
$\int_0^a \int_0^b \left((x+y)c + \frac{c^2}{2} \right) dy \, dx \quad = \quad \int_0^a \left(\frac{c^2}{2} b + cbx + \frac{cb^2}{2} \right) dx \quad =$
$\frac{1}{2} abc^2 + \frac{1}{2} ab^2 c + \frac{1}{2} cba^2 = \frac{1}{2} abc(a + b + c)$.

28. Del octante de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 \le c^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$, se ha cortado la región limitada por los planos coordenados y por el plano $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, $a \le c$, $b \le c$. Determinar la masa de este cuerpo, si su densidad en cada punto (x, y, z) vale z.

Solución Se tiene que $\rho(x, y, z) = z$, por lo que:





$m = \iiint\limits_V z \, dx \, dy \, dz =$

$\int_0^a \int_0^{b\left(1 - \frac{x}{a}\right)} \int_0^{\sqrt{c^2 - x^2 - y^2}} z \, dz \, dy \, dx =$

$\frac{1}{2} \int_0^a \int_0^{b(1 - \frac{x}{a})} (c^2 - x^2 - y^2) \, dy \, dx =$

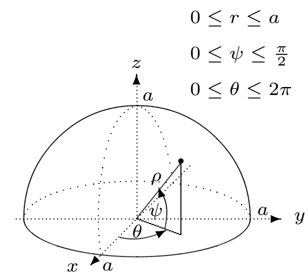
$\frac{1}{2} \int_0^a \left((c^2 - x^2) y - \frac{y^3}{3} \right) \Bigg|_0^{b(1 - \frac{x}{a})} dx = \frac{1}{2} \int_0^a \left[(c^2 - x^2) b (1 - \frac{x}{a}) - \frac{1}{3} b^3 (1 - \frac{x}{a})^3 \right] dx =$

$\frac{b}{2} \int_0^a \left(c^2 - \frac{c^2}{a} x + \frac{1}{a} x^3 - x^2 \right) dx - \frac{1}{6} b^3 \int_0^a \left(1 - \frac{x}{a} \right)^3 dx = \frac{1}{2} b \big(c^2 a - \frac{1}{3} a^3 - \frac{c^2}{a} \frac{a^2}{2} + \frac{1}{a} \frac{a^4}{4} \big) +$
$\frac{1}{6} b^3 a \frac{\left(1 - \frac{x}{a}\right)^4}{4} \Bigg|_0^a = \frac{1}{2} b \big(\frac{1}{2} ac^2 - \frac{1}{12} a^3 \big) - \frac{1}{24} ab^3 = \frac{1}{24} ab (6c^2 - a^2 - b^2)$.

29. En el cuerpo de forma semiesférica $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$, $z \ge 0$, la densidad varía proporcionalmente a la distancia del centro. Determinar el centro de gravedad de este cuerpo.

Solución Se tiene que $\rho(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$,

entonces $m = \iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz =$



$\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r^3\cos\psi\,dr\,d\psi\,d\varphi = 2\pi\frac{1}{4}a^4 = \frac{\pi}{2}a^4.$

Por razones de simetría de la semiesfera:

$m_y = m_x = \frac{2}{\pi a^4}\iiint\limits_V x\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz =$

$\frac{2}{\pi a^4}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r^4\cos^2\psi\cos\varphi\,dr\,d\psi\,d\varphi = 0$, pues $\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi = 0$,

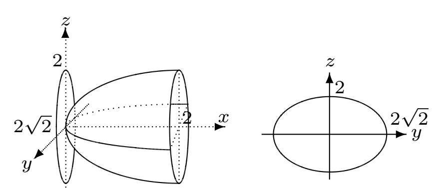
$m_z = \frac{2}{\pi a^4}\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz = \frac{2}{\pi a^4}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r^4\operatorname{sen}\psi\cos\psi\,dr\,d\psi\,d\varphi =$

$\frac{2}{\pi a^4}2\pi\frac{1}{5}a^5\frac{\operatorname{sen}^2\psi}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{5}a.$

30. Hallar el centro de gravedad del cuerpo limitado por el paraboloide $y^2+2z^2=4x$ y por el plano $x=2$.

Solución Aquí consideramos que $\rho = 1$. Cuando $x=2$ se tiene la elipse $y^2+2z^2=8$ i.e. $\frac{y^2}{8}+\frac{z^2}{4}=1$.

Efectuamos un cambio de variable a coordenadas cilíndricas de modo que $y = 2\sqrt{2}r\cos\theta$, $z = 2r\operatorname{sen}\theta$, $x = 2h$, $J = 8\sqrt{2}r$, con $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $r^2 \le h \le 1$. Así tenemos que:



$m = \iiint\limits_V dx\,dy\,dz = \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\int_{-2\sqrt{1-\frac{y^2}{8}}}^{2\sqrt{1-\frac{y^2}{8}}}\int_{\frac{y^2+2z^2}{4}}^{2} dx\,dz\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^1 8\sqrt{2}r\,dh\,dr\,d\theta =$

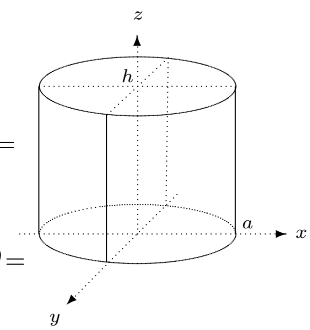
$2\pi\int_0^1 8\sqrt{2}(1-r^2)r\,dr = 16\sqrt{2}\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) = 4\sqrt{2}\pi.$

$\bar{z}=\bar{y}=\frac{1}{4\sqrt{2}\pi}\iiint\limits_V y\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^1 8\sqrt{2}r^2 2\sqrt{2}\cos\theta\,dh\,dr\,d\theta = 0$, pues $\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta =$ 0,

$\bar{x} = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi}\iiint\limits_V x\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^1 8\sqrt{2}(2h\,dh)r\,dr\,d\theta = 8\int_0^1\frac{1}{2}(1-r^4)r\,dr =$

$4(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}) = \frac{4}{3}.$

31. Hallar el momento de inercia del cilindro circular que tiene por altura h y por radio de la base a, con respecto al eje que sirve de diámetro de la base del propio cilindro.



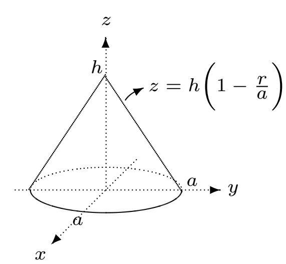
Solución Tomamos $\rho = 1$, con $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, $z = z$, $0 \le z \le h$, $0 \le r \le a$, $0 \le \theta \le 2\pi$, entonces:

$I_x = \iiint_V (y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz = \int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_0^h (\,y^2+z^2\,)\,dz\,dy\,dx =$

$\int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^h (r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta+z^2)\,dz r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^a (hr^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta+\frac{1}{3}h^3)r\,dr\,d\theta =$

$\int_0^{2\pi}\big(h\frac{a^4}{4}\,\mathrm{sen}^2\,\theta+\frac{1}{3}h^3\frac{a^2}{2}\big)d\theta = \frac{1}{2}a^2h\big(2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{sen}^2\,\theta\,d\theta+\frac{2\pi}{3}h^2\big) = \frac{1}{2}ha^2\left(2a^2\frac{\pi}{2}\frac{1}{2}+\frac{2\pi}{3}h^2\right) = \frac{\pi}{12}ha^2(3a^2+4h^2).$

32. Hallar el momento de inercia del cono circular, que tiene por altura h, por radio de la base a y densidad ρ, con respecto al diámetro de su base.



Solución Consideramos que la base del cilindro está en el plano $z = 0$, de modo que su vértice esté en el eje z. Consideremos $z = z$, $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, $0 \le r \le a$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le z \le h(1-\frac{r}{a})$, entonces:

$I_x = \iiint_V (z^2+y^2)\rho\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^{h(1-\frac{r}{a})}\rho(r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta+z^2)\,dz\,r\,dr\,d\theta =$

$\int_0^{2\pi}\int_0^a \rho(r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta\, h(1-\frac{r}{a})+\frac{1}{3}h^3(1-\frac{r}{a})^3)r\,dr\,d\theta =$

$\rho\int_0^{2\pi}\big(h\,\mathrm{sen}^2\,\theta\frac{a^4}{4}-\frac{h}{a}\,\mathrm{sen}^2\,\theta\frac{a^5}{5}+\frac{1}{3}h^3\big(\frac{a^2}{2}-\frac{3a^3}{3a}+\frac{3a^4}{4a^2}-\frac{a^5}{5a^3}\big)\big)\,d\theta =$

$\rho\int_0^{2\pi} 4ha^4\big(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\big)\,\mathrm{sen}^2\,\theta\,d\theta+\frac{2\pi}{3}\rho h^3a^2\big(\frac{1}{2}-1+\frac{3}{4}-\frac{1}{5}\big) =$

$\rho a^4h\frac{1}{20}\frac{\pi}{2}\frac{1}{2}+\frac{2\pi}{3}\rho a^2h^3\frac{3}{60} = \frac{\pi\rho ha^2}{60}(3a^2+2h^2).$

33. Demostrar que los momentos de inercia respecto a los ejes coordenados son:

$$I_x = I_{xy}+I_{xz}; \quad I_y = I_{yx}+I_{yz}; \quad I_z = I_{zx}+I_{zy}.$$

Solución

$$\begin{aligned} I_{xy} + I_{xz} &= \iiint\limits_V z^2 f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz + \iiint\limits_V y^2 f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \\ &= \iiint\limits_V (z^2+y^2) f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = I_x, \end{aligned}$$

ya que:

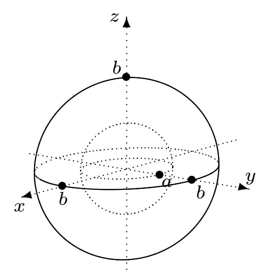
$$I_x = \iiint\limits_V \delta^2(x,y,z) f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_V (y^2+z^2) f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

De manera similar se demuestran las otras igualdades.

34. Calcular la masa del sólido limitado por dos esferas concéntricas de radio a y b, $0 < a < b$, si la densidad en cada punto es igual al cuadrado de su distancia al centro.

Solución Tenemos que $\delta(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$, entonces usando coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} m &= \iiint\limits_V \delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_a^b r^2 r^2 |\cos\psi| dr \right) d\psi \right) d\varphi \\ &= \int_a^b r^4 dr \cdot 2\pi \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi\, d\psi = \frac{4}{5}\pi(b^5 - a^5). \end{aligned}$$

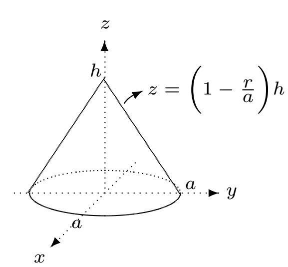


35. Un cono circular recto homogéneo tiene altura h. Demostrar que la distancia de su centro de gravedad a la base es $\dfrac{h}{4}$.

Solución La masa está dada por $m = \iiint\limits_V dx\,dy\,dz =$

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^a \left(\int_0^{h\left(1-\frac{r}{a}\right)} dz \right) r\,dr \right) d\theta = 2\pi \int_0^a h\left(1 - \frac{r}{a}\right) r\,dr =$$

$$2\pi h \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3a} \right)\Bigg|_0^a = 2\pi h \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{3} \right) = \frac{\pi}{3} a^2 h.$$

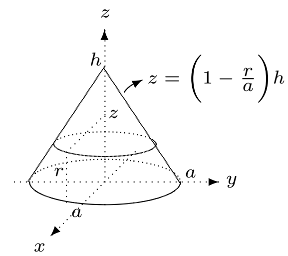


Observemos que $\bar{x} = \bar{y} = 0$, por razones de simetría. Además:

$$\bar{z} = \frac{1}{m} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^a \left(\int_0^{h\left(1-\frac{r}{a}\right)} z\,dz \right) r\,dr \right) d\theta = \frac{3}{\pi a^2 h} 2\pi \int_0^a \frac{1}{2} h^2 \left(1 - \frac{r}{a}\right)^2 r\,dr =$$

$$\frac{3}{a^2 h} \cdot \frac{a^2 h^2}{12} = \frac{h}{4}.$$

36. Determinar el centro de gravedad de un cono de altura h, si su densidad en cada punto es proporcional a la distancia de ese punto a la base.

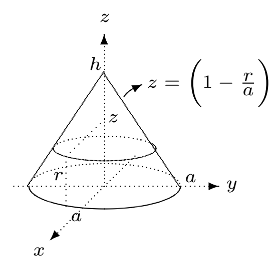


Solución Supongamos sin pérdida de generalidad que la base se sitúa sobre el plano xy y el eje de simetría es el eje z. La masa $m = \iiint_V \alpha z\,dx\,dy\,dz =$

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^a\left(\int_0^{h\left(1-\frac{r}{a}\right)}\alpha z\,dz\right)r\,dr\right)d\theta = 2\pi\int_0^a \alpha\frac{1}{2}h^2\left(1-\frac{r}{a}\right)^2 r\,dr = \frac{1}{12}\pi a^2h^2\alpha.$$

Además $m\,\bar{z} = \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^a\Big(\int_0^{h\left(1-\frac{r}{a}\right)}\alpha z^2\,dz\Big)r\,dr\Big)d\theta = 2\pi\int_0^a \alpha\frac{1}{3}h^3\Big(1-\frac{r}{a}\Big)^3 r\,dr = \frac{1}{30}\pi a^2h^3\alpha$, por lo que $\bar{z} = \dfrac{\alpha a^2h^3\pi/30}{\alpha a^2h^2\pi/12} = \dfrac{2}{5}h$. Observemos que $\bar{x} = \bar{y} = 0$ por razones de simetría.

37. Determinar el centro de gravedad de un cono de altura h, si su densidad en cada punto es proporcional a la distancia del punto al eje del cono.



Solución Aquí suponemos que la base del cono está en el plano xy, con eje de simetría en el eje z.
La masa $m = \iiint_V \alpha\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz =$

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^a\left(\int_0^{h\left(1-\frac{r}{a}\right)}\alpha r\,dz\right)r\,dr\right)d\theta = 2\pi\int_0^a \alpha r^2h\left(1-\frac{r}{a}\right)dr = 2\alpha\pi h\left(\frac{1}{3}r^3-\frac{r^4}{4a}\right)\Bigg|_0^a =$$

$2\pi h\alpha\dfrac{a^3}{12} = \dfrac{\alpha}{6}\pi ha^3.$

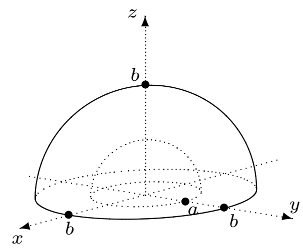
Así se tiene que $m\,\bar{z} = \iiint_V \alpha\sqrt{x^2+y^2}\,z\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^a\left(\int_0^{h\left(1-\frac{r}{a}\right)}\alpha rz\,dz\right)r\,dr\right)d\theta =$

$$2\pi\int_0^a \alpha r^2h^2\left(1-\frac{r}{a}\right)^2dr = \pi h^2\int_0^a \alpha r^2\left(1-\frac{2r}{a}+\frac{r^2}{a^2}\right)dr = \alpha a^3h^2\pi/30 \Longrightarrow$$

$$\bar{z} = \frac{\alpha a^3h^2\pi/30}{\alpha\pi a^3h/6} = \frac{h}{5}.$$

Observemos que $\bar{x} = \bar{y} = 0$ por razones de simetría.

38. Un sólido está limitado por dos hemisferios superiores concéntricos de radio a y b, siendo $0 < a < b$. Si la densidad es constante, encontrar el centro de gravedad.



Solución Es claro que por razones de simetría $\overline{x} = \overline{y} = 0$, pues la densidad es constante ($\delta(x, y, z) = c$). Pasando a coordenadas esféricas, $x = r\cos\psi\cos\varphi$, $y = r\cos\psi\,\mathrm{sen}\,\varphi$, $z = r\,\mathrm{sen}\,\psi$, $J = r^2|\cos\psi|$, tenemos:

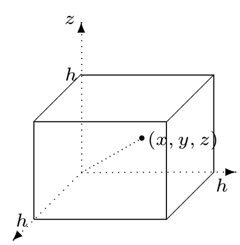
$$m = \iiint_V c\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_a^b cr^2|\cos\psi|\,dr\right)d\psi\right)d\varphi = \tfrac{2}{3}\pi c(b^3 - a^3).$$

$$m\,\overline{z} = \iiint_V cz\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_a^b cr^2|\cos\psi| r\,\mathrm{sen}\,\psi\,dr\right)d\psi\right)d\varphi =$$

$$\pi\tfrac{1}{4}(b^4 - a^4)c2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\,\mathrm{sen}\,\psi\,d\psi = \tfrac{1}{2}c\pi(b^4 - a^4)\tfrac{1}{2}\,\mathrm{sen}^2\psi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \tfrac{1}{4}\pi c(b^4 - a^4),$$ es decir:

$$\overline{z} = \frac{3}{8}\frac{b^4 - a^4}{b^3 - a^3} = \frac{3}{8}\frac{b^3 + ab^2 + a^2b + a^3}{b^2 + ab + b^2}.$$

39. Determinar el centro de gravedad de un cubo de lado h si su densidad en cada punto es proporcional al cuadrado de la distancia de un punto a un vértice de la base.



Solución Colocando el vértice en el origen y los lados sobre los ejes cartesianos tenemos que $\delta(x, y, z) = c(x^2 + y^2 + z^2)$, entonces la masa m es:

$$m = \int_0^h\int_0^h\int_0^h c(x^2 + y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz = \int_0^h\int_0^h c(\frac{h^3}{3} + hy^2 + hz^2)dy\,dz =$$

$$\int_0^h c\left(\frac{h^4}{3} + h\frac{h^3}{3} + h^2z^2\right)dz = c\left(\frac{h^5}{3} + \frac{h^5}{3} + h^2\frac{h^3}{3}\right) = ch^5.$$

Además:

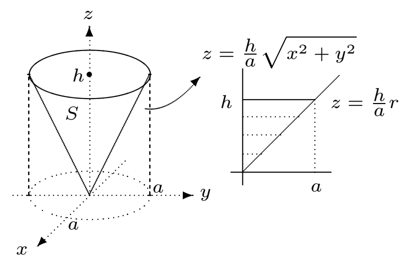
$$m\overline{x} = \int_0^h\int_0^h\int_0^h cx(x^2 + y^2 + z^2)dx\,dy\,dz = \int_0^h\int_0^h c\left(\frac{h^4}{4} + \frac{h^2}{2}y^2 + \frac{h^2}{2}z^2\right)dy\,dz =$$

$$\int_0^h c\left(\frac{h^5}{4} + \frac{h^2}{2}\frac{h^3}{3} + \frac{h^3}{2}z^2\right)dz = c\left(\frac{h^6}{4} + \frac{h^6}{6} + \frac{h^3}{2}\frac{h^3}{3}\right) = c\frac{7}{12}h^6 \Longrightarrow \overline{x} = \frac{7}{12}h.$$

Por simetría se tiene que $\overline{x} = \overline{y} = \overline{z} = \dfrac{7}{12}h$.

40. Un cono recto de revolución tiene altura h, radio de la base a, densidad constante y masa m. Determinar su momento de inercia respecto a un eje paralelo a la base y que pasa por el vértice.

Solución Podemos considerar que el vértice está en el origen, la base a una altura h sobre el eje z (eje del cono) y el eje de referencia es el eje y. En estas condiciones se tiene que la distancia de un punto al eje y es $\delta(x,y,z) = \sqrt{x^2+z^2}$ y la densidad $f(x,y,z) = c$, por lo que $m = \frac{1}{3}\pi a^2 hc$. Además:



$$I_\ell = \iiint_V (x^2+z^2)c\,dx\,dy\,dz = \int_{-a}^{a}\Big(\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\Big(\int_{\frac{h}{a}\sqrt{x^2+y^2}}^{h} c(x^2+z^2)dz\Big)dx\Big)dy$$

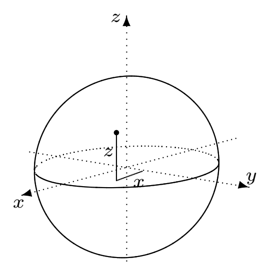
$$= \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^a\Big(\int_{\frac{h}{a}r}^{h} c(r^2\cos^2\theta+z^2)dz\Big)r\,dr\Big)d\theta = \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^h\Big(\int_0^{\frac{a}{h}z} c(r^2\cos^2\theta+z^2)r\,dr\Big)dz\Big)d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^h c\Big(\frac{a^4z^4\cos^2\theta}{4h^4}+\frac{a^2z^4}{2h^2}\Big)dz\Big)d\theta = \int_0^{2\pi} c\Big(\frac{a^4h\cos^2\theta}{20}+\frac{a^2h^3}{10}\Big)d\theta$$

$$= \frac{1}{20}a^2h\pi c(a^2+4h^2) = \frac{3}{20}m(a^2+4h^2).$$

41. Calcular el momento de inercia de una esfera de radio a y masa m respecto a un diámetro, si la densidad es constante.

Solución Consideramos que la esfera está centrada en el origen y que el eje de referencia es el eje y, entonces la distancia al eje y es $\delta(x,y,z) = \sqrt{x^2+z^2}$ y la densidad $f(x,y,z) = c$. De esta manera tenemos que la masa $m = \frac{4}{3}\pi ca^3$.



Si consideramos coordenadas esféricas $x = r\cos\psi\cos\varphi$, $y = r\cos\psi\operatorname{sen}\varphi$, $z = r\operatorname{sen}\psi$, $J = r^2|\cos\psi|$ y el momento de inercia I_y es:

$$I_y = \iiint_V (x^2+z^2)c\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^a cr^4(\cos^2\psi\cos^2\varphi+\operatorname{sen}^2\psi)|\cos\psi|dr\right)d\psi\right)d\varphi =$$

$$c\tfrac{1}{5}r^5\Big|_0^a \int_0^{2\pi}\left(2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^3\psi\cos^2\varphi+\operatorname{sen}^2\psi\cos\psi)\,d\psi\right)d\varphi = \tfrac{1}{5}a^5\,c\,2\int_0^{2\pi}\left(\tfrac{2}{3}\cos^2\varphi+\tfrac{1}{3}\right)d\varphi =$$

$$\tfrac{2}{5}a^5c\left(4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tfrac{2}{3}\cos^2\varphi d\varphi+\tfrac{2}{3}\pi\right) = \tfrac{2}{5}a^5c\left(4\cdot\tfrac{2}{3}\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\pi+\tfrac{2}{3}\pi\right) = \tfrac{8}{15}c\pi a^5 = \tfrac{2}{5}ma^2.$$

42. Calcular los volúmenes de las siguientes regiones:

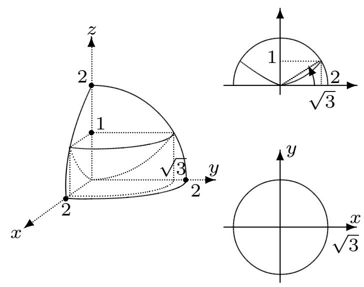
a) el cuerpo limitado por las esfera $x^2+y^2+z^2 = 4$ y el paraboloide $x^2+y^2 = 3z$ (la parte interior con respecto al paraboloide)

b) el cuerpo limitado por el plano $z = 0$, el cilindro $x^2+y^2 = ax$ y la esfera $x^2+y^2+z^2 = a^2$ (interno con respecto al cilindro).

c) el cuerpo limitado por el paraboloide $\dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 2\dfrac{x}{a}$ y el plano $x = a$.

Solución

a) Las superficies se intersecan cuando $z^2 + 3z - 4 = 0$ $\Longrightarrow z = 1$, es decir se intersecan en el plano $z = 1$, con ecuación $x^2 + y^2 = 3$.

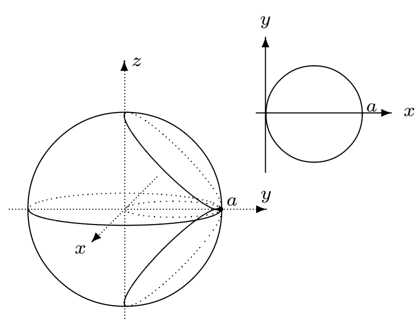


Usando coordenadas cilíndricas tenemos $0 \le r \le \sqrt{3}$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $\frac{1}{3}r^2 \le z \le \sqrt{4 - r^2}$, entonces:

$$\iiint\limits_V dx\,dy\,dz = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}} \int_{\frac{x^2+y^2}{3}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz\,dy\,dx = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \left(\sqrt{4 - r^2} - \frac{1}{3}r^2\right) r\,dr\,d\theta =$$

$$2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4 - r^2}\,r\,dr - \frac{\pi}{6}r^4\Big|_0^{\sqrt{3}} = 2\pi\big(- \frac{1}{3}(4 - r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{3}} - \frac{9}{12}\big) = 2\pi\frac{32 - 4 - 9}{12} = \frac{19\pi}{6}.$$

b) Usando coordenadas cilíndricas tenemos que $x = ar\cos\theta$, $y = ar\,\mathrm{sen}\,\theta$, $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, $-\sqrt{a^2 - r^2} \le z \le \sqrt{a^2 - r^2}$ y como $x^2 + y^2 = ax \Longrightarrow r^2 = ar\cos\theta$, o sea $0 \le r \le a\cos\theta$. Así tenemos:



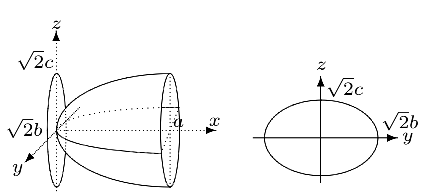
$$\iiint\limits_V dx\,dy\,dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a\cos\theta} \int_{-\sqrt{a^2-r^2}}^{\sqrt{a^2-r^2}} dz\,r\,dr\,d\theta =$$

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a\cos\theta} \sqrt{a^2 - r^2}\,r\,dr\,d\theta =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{3}\left(-(a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{a\cos\theta}\right) d\theta = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^3 - a^3\,\mathrm{sen}^3\,\theta)\,d\theta = \frac{2a^3}{3}\big(\frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{sen}^3\,\theta\,d\theta\big) =$$

$$\frac{2}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}a^3\frac{3\pi - 4}{3\cdot 2} = \frac{a^3}{9}(3\pi - 4).$$

c) Si $x = a$, tenemos la elipse $\dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 2$. Usando coordenadas cilíndricas se tiene $y = br\cos\theta$, $z = cr\,\mathrm{sen}\,\theta$, $ah = x$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le r \le \sqrt{2}$, $J = abcr$, $\frac{1}{2}r^2 \le h \le 1$, por lo que:



$$\iiint\limits_V dx\,dy\,dz = \int_{-\sqrt{2}b}^{\sqrt{2}b}\int_{-c\sqrt{2-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{2-\frac{y^2}{b^2}}}\int_{\frac{a}{2}\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)}^{a} dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\int_{\frac{1}{2}r^2}^{1} abc\,dh\,dr\,d\theta =$$

$$2\pi abc\int_0^{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{2}r^2\right) r\,dr = 2\pi abc\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{8}\right)\Big|_0^{\sqrt{2}} = 2\pi abc\left(1-\frac{4}{8}\right) = \pi abc.$$

3.5 Momento de inercia, centro de gravedad en $\mathbb{R}^3$

43. Determinar los momentos estáticos de los sólidos homogéneos siguientes:

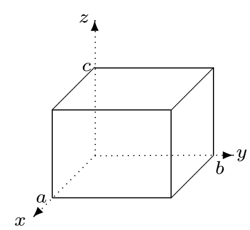
a) paralelepípedo recto de aristas a, b, c con respecto a sus caras.

b) cono circular recto (radio de la base a, altura h), con respecto al plano que pasa por el vértice que es paralelo a la base.

c) sólido limitado por el elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ y el plano xy con respecto a este mismo.

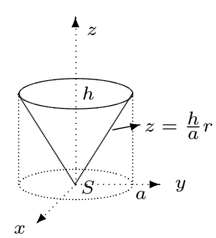
Solución

a) Consideremos el paralelepípedo con un vértice inferior en el origen (ver figura adjunta), entonces vamos a calcular los momentos m_{xy}, m_{xz}, m_{yz}. En efecto:



$$m_{yz}=\int_0^c\int_0^b\int_0^a x\,dx\,dy\,dz=\frac{1}{2}a^2bc,\ m_{xz}=\frac{1}{2}ab^2c,\ m_{xy}=\frac{1}{2}abc^2.$$

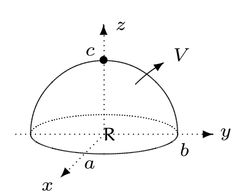
b) Colocando el vértice del cono en el origen (ver gráfica adjunta) tenemos:



$$m_{xy}=\iint\limits_S\int_{\frac{h}{a}r}^{h} z\,dz\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^a\left(\frac{h^2}{2}-\frac{h^2r^2}{2a^2}\right)r\,dr\right)d\theta$$

$$=2\pi\left(\frac{h^2a^2}{4}-\frac{1}{8}\frac{h^2}{a^2}a^4\right)=\frac{1}{4}\pi h^2a^2.$$

c) Usando coordenadas elipsoidales tenemos que:



$$m_{xy}=\iiint\limits_V z\,dx\,dy\,dz$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^1 abcr^2|\cos\psi|cr\operatorname{sen}\psi\,dr\right)d\psi\right)d\varphi$$

$$=2\pi abc^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\operatorname{sen}\psi\,d\psi\int_0^1 r^3\,dr = 2\pi abc^2\frac{\operatorname{sen}^2\psi}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\pi abc^2.$$

Otra manera en que se puede calcular es usando coordenadas cilíndricas:

$$m_{xy} = \iint\limits_R \Big(\int_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} z\,dz \Big)\,dx\,dy = \frac{1}{2}c^2 \iint\limits_R \Big(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\Big)\,dx\,dy$$
$$= \frac{1}{2}c^2 \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^1 abr\big(1-r^2\big)\,dr\Big)\,d\theta = \pi abc^2 \int_0^1 \big(r - r^3\big)\,dr = \pi abc^2\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\Big) = \frac{1}{4}\pi abc^2.$$

44. Determinar los centros de gravedad de los cuerpos homogéneos limitados por las superficies dadas:

a) por los planos $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=2$, $y=4$, $x+y+z=8$ (paralelepípedo truncado).

b) por el elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ y los planos coordenados.

c) por el cilindro $z = \dfrac{y^2}{2}$ y los planos $x=0$, $y=0$, $z=0$ y $2x+3y-12=0$.

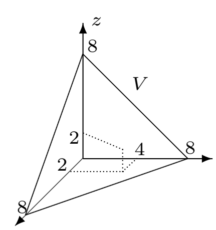
d) por los cilindros $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$ y los planos $z=0$, $x+z=6$.

e) por el paraboloide $z = \dfrac{x^2+y^2}{2a}$ y la esfera $x^2+y^2+z^2=3a^2$, $z \ge 0$.

f) por la esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$ y el cono $z\tan\alpha = \sqrt{x^2+y^2}$ (sector esférico).

Solución

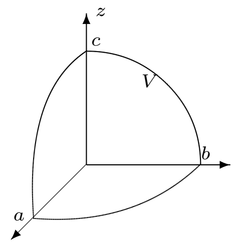
a) En este caso tenemos:



$$m = \int_0^2 \Big(\int_0^4 \Big(\int_0^{8-x-y} dz\Big)\,dy\Big)\,dx = \int_0^2 \Big(\int_0^4 (8-x-y)\,dy\Big)\,dx$$
$$= \int_0^2 \Big((8-x)y - \frac{y^2}{2}\Big)\Big|_0^4 dx = 4\int_0^2 (6-x)\,dx = 4\Big(6x - \frac{x^2}{2}\Big)\Big|_0^2$$
$$= 4(12-2) = 40.$$

$$\bar{x} = \frac{1}{40}\int_0^2 \Big(\int_0^4 \Big(\int_0^{8-x-y} x\,dz\Big)\,dy\Big)\,dx = \frac{1}{40}\int_0^2 4(6x - x^2)\,dx = \frac{1}{10}\Big(3x^2 - \frac{x^3}{3}\Big)\Big|_0^2 = \frac{14}{15}.$$
$$\bar{y} = \frac{1}{40}\int_0^2 \Big(\int_0^4 y(8-x-y)\,dy\Big)\,dx = \frac{1}{40}\int_0^2 \Big((8-x)\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\Big)\Big|_0^4 dx$$
$$= \frac{1}{40}\int_0^2 \Big(\frac{128}{3} - 8x\Big)\,dx = \frac{1}{40}\Big(\frac{256}{3} - 4\cdot 4\Big) = \frac{26}{15}.$$
$$\bar{z} = \frac{1}{40}\int_0^2 \Big(\int_0^4 \Big(\int_0^{8-x-y} z\,dz\Big)\,dy\Big)\,dx = \frac{1}{80}\int_0^2 \Big(\int_0^4 (8-x-y)^2\,dy\Big)\,dx$$
$$= \frac{1}{240}\int_0^2 -(8-x-y)^3\Big|_0^4 dx = \frac{1}{240}\int_0^2 \Big((8-x)^3 - (4-x)^3\Big)\,dx$$
$$= \frac{1}{240}\Big(\frac{(4-x)^4}{4} - \frac{(8-x)^4}{4}\Big)\Big|_0^2 = \frac{1}{4\cdot 240}\Big(2^4 - 6^4 - 4^4 + 8^4\Big) = \frac{2^4\cdot 16\cdot 10}{2^2\cdot 10\cdot 6\cdot 4} = \frac{8}{3}.$$

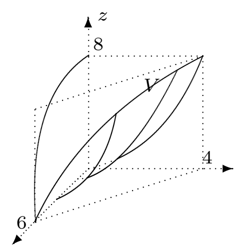
b) Sabemos que para este octavo de elipsoide $m = \frac{1}{6}\pi abc$,



entonces:

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\iiint\limits_V x\,dx\,dy\,dz$$
$$= \frac{1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_0^1\Big(a^2bcr^3\cos^2\psi\cos\varphi\Big)\,dr\Big)d\psi\Big)\,d\varphi$$
$$= \frac{a^2bc}{\frac{1}{6}\pi abc}\frac{1}{4}r^4\Big|_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\psi d\psi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,d\varphi = \frac{1}{4}\frac{6}{\pi}\frac{\pi}{2}\frac{1}{2}a = \frac{3}{8}a.$$

Por razones de simetría respecto a los ejes, $\bar{y} = \frac{3}{8}b$, $\bar{z} = \frac{3}{8}c$.



c) $z = \frac{y^2}{2}$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $2x + 3y = 12$.

Cuando se intersecan las superficies tenemos $z = \frac{1}{2}\Big(\frac{12-2x}{3}\Big)^2 = \frac{2}{9}(6-x)^2$ i.e.

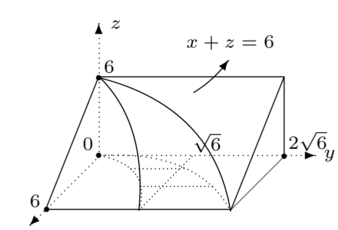
$$m = \int_0^6\Big(\int_0^{4-\frac{2}{3}x}\Big(\int_0^{\frac{y^2}{2}}dz\Big)\,dy\Big)\,dx = \int_0^6\Big(\int_0^{4-\frac{2}{3}x}\frac{y^2}{2}\,dy\Big)\,dx$$
$$= \frac{1}{6}\int_0^6\Big(4-\frac{2}{3}x\Big)^3dx = \frac{1}{6}\frac{3}{2}\Big(-\frac{1}{4}\Big(4-\frac{2}{3}x\Big)^4\Big)\Big|_0^6 = \frac{1}{16}4^4 = 16.$$

$$\bar{x} = \frac{1}{16}\frac{1}{6}\int_0^6 x\Big(4-\frac{2}{3}x\Big)^3dx = \frac{1}{96}\frac{3}{2}\frac{3}{2}\int_0^4 u(4-u)^3du = \frac{3}{16\cdot 8}4^2\int_0^4\frac{u}{4}\Big(1-\frac{u}{4}\Big)^3u^3\frac{du}{4}$$
$$= \frac{3\cdot 4^5}{2\cdot 4^3}\int_0^1 z(1-z)^3\,dz = \frac{3}{2}4^2\beta(2,4) = \frac{1}{2}3\cdot 4^2\frac{1!3!}{5!} = \frac{6}{5}.$$

$$\bar{y} = \frac{1}{16}\int_0^6\Big(\int_0^{4-\frac{2}{3}x}\frac{1}{2}y^3\,dy\Big)\,dx = \frac{1}{32\cdot 4}\int_0^6\Big(4-\frac{2}{3}x\Big)^4dx = \frac{3}{4^4}\Big(-\frac{1}{5}\Big(4-\frac{2}{3}x\Big)^5\Big)\Big|_0^6$$
$$= \frac{3}{4^4\cdot 5}4^5 = \frac{12}{5}.$$

$$\bar{z} = \frac{1}{16\cdot 2}\int_0^6\Big(\int_0^{4-\frac{2}{3}x}\frac{y^4}{4}\,dy\Big)\,dx = \frac{1}{2\cdot 4^3\cdot 5}\int_0^6\Big(4-\frac{2}{3}x\Big)^5dx = -\frac{3}{4^4\cdot 5\cdot 6}\Big(4-\frac{2}{3}x\Big)^6\Big|_0^6$$
$$= \frac{1}{4^4\cdot 5\cdot 2}4^6 = \frac{8}{5}.$$

d) $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $z = 0$, $x + z = 6$.



Para este caso tenemos:

$$m = \int_0^6\Big(\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}\Big(\int_0^{6-x}dz\Big)\,dy\Big)\,dx = \int_0^6\Big(\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}(6-x)\,dy\Big)\,dx$$

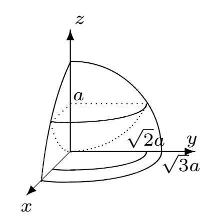
$$= \int_0^6 (6-x)\sqrt{x}\,dx = 6\sqrt{6}\int_0^6 6\Big(1-\frac{x}{6}\Big)\sqrt{\frac{x}{6}}\,\frac{dx}{6}$$
$$= 36\sqrt{6}\int_0^1 u^{\frac{1}{2}}(1-u)du = 36\sqrt{6}\beta(\tfrac{3}{2},2) = 36\sqrt{6}\frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(1)}{\frac{5}{2}\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2})} = \frac{48}{5}\sqrt{6}.$$

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\int_0^6 x^{\frac{3}{2}}(6-x)\,dx = \frac{6^3\sqrt{6}}{m}\int_0^6 \Big(\frac{x}{6}\Big)^{\frac{3}{2}}\Big(1-\frac{x}{6}\Big)\frac{dx}{6} = \frac{6^3\sqrt{6}}{m}\beta(\tfrac{5}{2},2) = \frac{5{\cdot}6^2{\cdot}\sqrt{6}}{8{\cdot}\sqrt{6}}\frac{\Gamma(\frac{5}{2})\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{9}{2})}$$
$$= \frac{5{\cdot}2^2{\cdot}3^2}{2{\cdot}2^3}\frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\frac{7}{2}{\cdot}\frac{5}{2}\Gamma(\frac{5}{2})} = \frac{18}{7}.$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m}\int_0^6\Big(\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}\Big(\int_0^{6-x} y\,dz\Big)dy\Big)dx = \frac{1}{m}\int_0^6\Big(\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}(x-6)y\,dy\Big)dx = \frac{1}{m}\int_0^6 \frac{3x(6-x)}{2}\,dx$$
$$= \frac{5}{48\sqrt{6}}{\cdot}54 = \frac{15}{16}\sqrt{6}.$$

$$\bar{z} = \frac{1}{m}\int_0^6\Big(\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}\Big(\int_0^{6-x} z\,dz\Big)dy\Big)dx = \frac{1}{2m}\int_0^6\Big(\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}(6-x)^2\,dy\Big)dx$$
$$= \frac{1}{2m}\int_0^6 \sqrt{x}(x-6)^2\,dx = \frac{6^3\sqrt{6}}{2m}\int_0^6 \sqrt{\frac{x}{6}}\Big(1-\frac{6}{x}\Big)^2\frac{dx}{6} = \frac{6^3\sqrt{6}}{2m}\int_0^1 \sqrt{u}(1-u)^2du$$
$$= \frac{3^2{\cdot}2^2{\cdot}\sqrt{6}{\cdot}5}{2{\cdot}8{\cdot}\sqrt{6}}\beta(\tfrac{3}{2},3) = \frac{3^2{\cdot}5^2\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(3)}{2{\cdot}\frac{7}{2}{\cdot}\frac{5}{2}{\cdot}\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2})} = \frac{12}{7}.$$

e) $z = \dfrac{x^2+y^2}{2a}$, $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z \geq 0$.



Determinemos la intersección de las superficies: $z^2+2az+a^2 = 4a^2$ i.e. $z=-a\pm 2a$ y como $z\geq 0$, $z=a$.

Si $z=a$ tenemos que $x^2+y^2=2a^2$, por lo tanto se tiene:

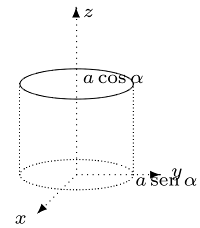
$$m = \int_{-\sqrt{2}a}^{\sqrt{2}a}\Big(\int_{-\sqrt{2a-x^2}}^{\sqrt{2a-x^2}}\Big(\int_{\frac{x^2+y^2}{2a}}^{\sqrt{3a^2-x^2-y^2}} dz\Big)dy\Big)dx = \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{\sqrt{2}a}\Big(\sqrt{3a^2-r^2}-\frac{r^2}{2a}\Big)r\,dr\Big)d\theta$$
$$= 2\pi\Big(-\frac{1}{3}\Big(3a^2-r^2\Big)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{2}a} - \frac{1}{8a}r^4\Big|_0^{\sqrt{2}a}\Big) = \pi a^3\Big(2\sqrt{3}-\tfrac{5}{3}\Big).$$

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{\sqrt{2}a}\Big(\sqrt{3a^2-r^2}-\frac{r^2}{2a}\Big)r^2\cos\theta\,dr\Big)d\theta$$
$$= \frac{1}{m}\int_0^{\sqrt{2}a}\Big(\sqrt{3a^2-r^2}-\frac{r^2}{2a}\Big)r^2\,dr\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta = 0.$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m}\int_0^{\sqrt{2}a}\Big(\sqrt{3a^2-r^2}-\frac{r^2}{2a}\Big)r^2\,dr\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}\theta\,d\theta = 0.$$

$$\bar{z} = \frac{1}{m}\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{\sqrt{2}a}\frac{1}{2}\Big(3a^2-r^2-\frac{r^4}{4a^2}\Big)r\,dr\Big)d\theta = \frac{2\pi}{m}\Big(\frac{36a^4r^2-6a^2r^4-r^6}{48a^2}\Big)\Big|_0^{\sqrt{2}a}$$
$$= \frac{5a^4}{6}\frac{2\pi}{a^3\Big(2\sqrt{3}-\frac{5}{3}\Big)} = \frac{5a}{6\sqrt{3}-5} = \frac{5a}{83}(6\sqrt{3}+5).$$

f) $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z\tan\alpha=\sqrt{x^2+y^2}$.



Las superficies se intersecan cuando $z^2\tan^2\alpha+z^2=a^2$ i.e. $z^2=a^2\cos^2\alpha$, $z=a\cos\alpha$, por lo que tenemos $x^2+y^2=a^2\operatorname{sen}^2\alpha$. Así en coordenadas cilíndricas:

$$m=\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{a\operatorname{sen}\alpha}\Big(\int_{\frac{r}{\tan\alpha}}^{\sqrt{a^2-r^2}}dz\Big)r\,dr\Big)d\theta=\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{a\operatorname{sen}\alpha}\Big(\sqrt{a^2-r^2}-\frac{r}{\tan\alpha}\Big)r\,dr\Big)d\theta$$
$$=2\pi\Big(-\frac{1}{3}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{r^3}{3\tan\alpha}\Big)\Big|_0^{a\operatorname{sen}\alpha}=\frac{2}{3}\pi\Big(-a^3\cos^3\alpha-a^3\frac{\operatorname{sen}^3\alpha}{\tan\alpha}+a^3\Big)$$
$$=\frac{2}{3}\pi a^3\Big(1-\cos^3\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha\cos\alpha\Big)=\frac{2}{3}\pi a^3(1-\cos\alpha).$$

$$\bar{x}=\frac{1}{m}\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{a\operatorname{sen}\alpha}\Big(\int_{\frac{r}{\tan\alpha}}^{\sqrt{a^2-r^2}}dz\Big)r^2\,dr\Big)\cos\theta\,d\theta$$
$$=\frac{1}{m}\int_0^{a\operatorname{sen}\alpha}\Big(\int_{\frac{r}{\tan\alpha}}^{\sqrt{a^2-r^2}}dz\Big)r\,dr\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta=0.$$

$$\bar{y}=\frac{1}{m}\int_0^{a\operatorname{sen}\alpha}\Big(\int_{\frac{r}{\tan\alpha}}^{\sqrt{a^2-r^2}}r^2\,dr\Big)\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}\theta\,d\theta=0.$$

$$\bar{z}=\frac{1}{m}\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{a\operatorname{sen}\alpha}\Big(\int_{\frac{r}{\tan\alpha}}^{\sqrt{a^2-r^2}}z\,dz\Big)r\,dr\Big)d\theta=\frac{\pi}{m}\int_0^{a\operatorname{sen}\alpha}\Big(a^2-r^2-\frac{r^2}{\tan^2\alpha}\Big)r\,dr$$
$$=\frac{\pi}{m}\Big(a^2\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\Big(1+\frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}\Big)\Big)\Big|_0^{a\operatorname{sen}\alpha}=\frac{\pi}{2m}\Big(a^4\operatorname{sen}^2\alpha-\frac{1}{2}a^4\operatorname{sen}^4\alpha\frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}\Big)$$
$$=\frac{\pi}{2}\frac{\frac{1}{2}a^4\operatorname{sen}^2\alpha}{\frac{2}{3}\pi a^3(1-\cos\alpha)}=\frac{3}{8}a\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{3}{8}a(1+\cos\alpha).$$

45. Determinar los momentos de inercia de los cuerpos homogéneos siguientes, cuya masa es m.

a) El paralelepípedo recto, de aristas a, b, c con respecto a cada una de las mismas y con respecto al centro de gravedad.

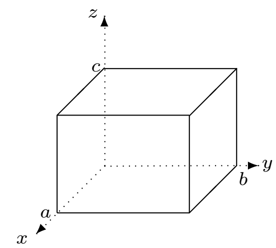
b) De la esfera respecto a la recta tangente.

c) Del elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ con respecto a sus ejes.

d) De la parte entre las esferas concéntricas cuyo radio exterior es igual a a y el interior es r, respecto al diámetro.

e) Del paraboloide de revolución (radio a, altura h), con respecto al eje que pasa por su centro de gravedad y es perpendicular al eje de revolución (momento ecuatorial).

Solución



a) Dado que $m = abc$, se tiene:

$$\begin{aligned} m_{xx} &= \int_0^c \Big(\int_0^b \Big(\int_0^a (y^2+z^2)\,dx \Big)\,dy \Big)\,dz \\ &= \int_0^c \Big(\int_0^b a(x^2+y^2)\,dy \Big)\,dz = \int_0^c \frac{1}{3}ab(3z^2+b^2)\,dz \\ &= \frac{1}{3}ab(c^3+b^2c) = \frac{1}{3}abc(b^2+c^2) = \frac{1}{3}m(b^2+c^2), \end{aligned}$$

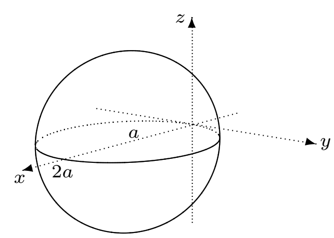
Por razones de simetrías de los cálculos $m_{yy} = \frac{1}{3}m(a^2+c^2)$, $m_{zz} = \frac{1}{3}m(a^2+b^2)$.

Por otro lado, $\bar{x} = \dfrac{1}{m}\displaystyle\int_0^a x\,dx\,dy\,dz = \dfrac{1}{2m}a^2bc = \dfrac{a}{2}$, $\bar{y} = \dfrac{b}{2}$, $\bar{z} = \dfrac{c}{2}$, entonces el momento de inercia respecto al centro de gravedad es:

$$\int_0^c \int_0^b \int_0^a ((x-\bar{x})^2 + (y-\bar{y})^2 + (z-\bar{z})^2)\,dx\,dy\,dz =$$

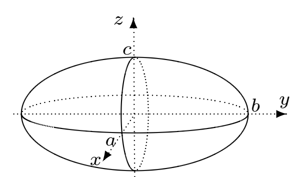
$$\int_0^c \int_0^b \int_0^a (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz - \bar{x}^2m - \bar{y}^2m - \bar{z}^2m =$$

$$\frac{1}{3}m(a^2+b^2+c^2) - \frac{1}{4}m(a^2+b^2+c^2) = \frac{1}{12}m(a^2+b^2+c^2).$$



b) Usando la esfera $(x-a)^2+y^2+z^2 = a^2$ debemos calcular m_z. Así, pasando a coordenadas esféricas, la esfera se escribe $r = 2a\cos\psi\cos\varphi$, $-\frac{\pi}{2} \le \psi \le \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, entonces:

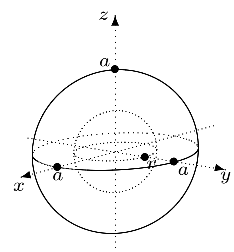
$$\begin{aligned} m_z &= \iiint\limits_V (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^{2a\cos\varphi\cos\psi} r^2\cos^2\psi\, r^2\cos\psi\,dr \Big)d\psi \Big)\,d\varphi \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{32}{5}a^5\cos^8\psi\cos^5\varphi d\psi \Big)\,d\varphi = \frac{128}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^5\cos^8\psi\,d\psi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\varphi\,d\varphi \\ &= \frac{128}{5}a^5 \frac{1{\cdot}3{\cdot}5{\cdot}7}{2{\cdot}4{\cdot}6{\cdot}8}\frac{\pi}{2}\frac{2{\cdot}4}{3{\cdot}5} = \frac{7}{5}\Big(\frac{4}{3}\pi a^3\Big)a^2 = \frac{7}{5}ma^2. \end{aligned}$$



c) Usando coordenadas elipsoidales tenemos $x = ar\cos\psi\cos\varphi$, $y = br\cos\psi\operatorname{sen}\varphi$, $z = cr\operatorname{sen}\psi$, $-\frac{\pi}{2} \le \psi \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le r \le 1$, $J = abcr^2\cos\psi$, entonces:

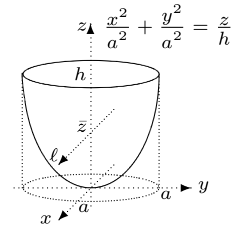
$$m_z = \iiint\limits_V (y^2 + x^2)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} \Big(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^1 (a^2\cos^2\varphi + b^2\operatorname{sen}^2\varphi) r^4 \cos^3\psi abc\,dr \Big) d\psi \Big)\, d\varphi$$
$$= abc\frac{1}{5}r^5\Big|_0^1 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\psi\, d\psi\ 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2\cos^2\varphi + b^2\operatorname{sen}^2\varphi)\,d\varphi = \frac{2}{5}abc\frac{2}{3}4(a^2+b^2)\frac{\pi}{2}\frac{1}{2}$$
$$= \Big(\frac{4}{3}\pi abc\Big)\frac{1}{5}(a^2+b^2) = \frac{1}{5}m(a^2+b^2).$$

Por simetría con los ejes coordenadas $m_x = \frac{m}{5}(b^2+c^2)$, $m_y = \frac{m}{5}(a^2+c^2)$.



d) Si tomamos el origen de coordenadas en el centro de las esferas, debemos determinar por ejemplo I_z (también puede ser I_x o I_y).

$$I_z = \int_0^{2\pi} \Big(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_r^a \rho^4\cos^3\psi\, d\rho \Big) d\psi \Big)\, d\varphi$$
$$= 2\pi\frac{a^5 - r^5}{5} 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\psi\, d\psi = \frac{4}{3}\pi(a^3 - r^3)\frac{2}{5}\frac{a^5 - r^5}{a^3 - r^3} = \frac{2}{5}m\frac{a^5 - r^5}{a^3 - r^3}.$$



e) Sabemos que para un paraboloide de revolución $m = \frac{1}{2}\pi a^2 h$ y que $\bar{x} = \bar{y} = 0$ por la simetría de la superficie. Debemos determinar $\bar{z}$. Se toma ℓ una la recta que pasa por el centro de gravedad, perpendicular al eje de revolución y paralela al eje x:

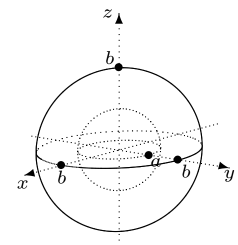
$I_x = I_\ell + \bar{z}^2 m$. Calculemos $\bar{z}$ y calculemos I_x.

$$\bar{z} = \frac{1}{m}\int_0^{2\pi} \Big(\int_0^a \Big(\int_{h\frac{r^2}{a^2}}^h z\,dz \Big) r\,dr \Big)\, d\theta = \frac{\pi}{m}\int_0^a \Big(h^2 - h^2\frac{r^4}{a^4}\Big) r\,dr$$
$$= \frac{\pi}{m}\Big(\frac{1}{2}h^2r^2 - \frac{h^2}{a^4}\frac{h^6}{6}\Big)\Big|_0^a = \frac{\pi}{\frac{1}{2}\pi a^2 h}\Big(\frac{h^2}{2}a^2 - \frac{h^2}{6}a^2\Big) = \frac{2}{3}h.$$
$$I_x = \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^a \Big(\int_{h\frac{r^2}{a^2}}^h (z^2 + r^2\operatorname{sen}^2\theta)\,dz \Big) r\,dr \Big)\, d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^a \Big(\Big(hr^3 - h\frac{r^5}{a^2}\Big)\operatorname{sen}^2\theta + \frac{h^3}{3}r - \frac{h^3}{3}\frac{r^7}{a^6} \Big) dr \Big)\, d\theta = \int_0^{2\pi} \Big(\frac{a^4 h\operatorname{sen}^2\theta}{12} + \frac{a^3h^3}{8} \Big)\, d\theta$$
$$= \frac{a^2h\Big(a^2 + 3h^2\Big)\pi}{36}.$$

Finalmente $m_\ell = m_x - \Big(\frac{2}{3}h\Big)^2 m = \dfrac{a^2h(a^2+3h^2)\pi}{12} - \frac{4}{9}h^2\frac{1}{2}\pi a^2 h = \frac{\pi}{36}(a^2h(3a^2+h^2))$.

46. El cuerpo limitado por dos superficies esféricas concéntricas cuyos radios son a y b, $b > a$, tiene una densidad inversamente proporcional a la distancia al centro de las esferas, con densidad γ a la distancia unidad. Calcular la masa del cuerpo.

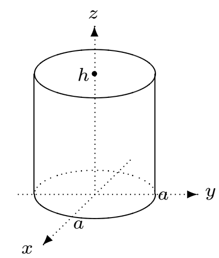
Solución La densidad $\delta(x,y,z) = \dfrac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ y $\delta(0,0,1) = k = \gamma$, entonces:



$$m = \int_0^{2\pi}\Big(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_a^b \frac{\gamma}{r} r^2\,dr\Big)\cos\psi\,d\psi\Big)\,d\varphi$$
$$= 2\pi\gamma 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\,d\psi\,\frac{b^2-a^2}{2} = 2\pi\gamma(b^2-a^2).$$

47. Calcular la masa del cuerpo limitado por un cilindro circular recto de radio a y altura h, si su densidad en cualquier punto es igual al cuadrado de la distancia del punto al centro de la base.

Solución En este caso $\delta(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$.

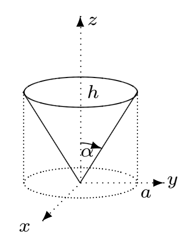


Si ponemos la base en el plano xy y el eje del cilindro en el eje z:

$$m = \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^a\Big(\int_0^h (r^2+z^2)\,dz\Big)r\,dr\Big)\,d\theta = 2\pi\int_0^a\Big(r^2h+\frac{1}{3}h^3\Big)r\,dr$$
$$= \frac{2}{3}\pi\Big(h^3\frac{a^2}{2}+\frac{3}{4}ha^4\Big) = \frac{\pi}{6}a^2h(2h^2+3a^2).$$

48. Calcular la masa del cuerpo limitado por un cono circular cuya altura es igual a h y el ángulo formado por el eje y la generatriz es igual a α. La densidad es proporcional a la potencia $n > 0$, de la distancia desde el plano trazado por el vértice del cono paralelamente a la base, valiendo γ a la distancia unidad.

Solución Colocamos el vértice del cono en el origen y la base a la altura h de eje z. De este modo se tiene que $\tan\alpha = \dfrac{a}{h}$ i.e. $a = h\tan\alpha$, por lo que $x^2+y^2 = cz^2 \Longrightarrow h^2c = a^2$ i.e. $c = \tan^2\alpha$, o sea $x^2+y^2 = z^2\tan^2\alpha$.

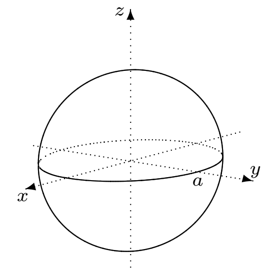


La densidad $\delta(x,y,z) = kz^n$ y $\delta(0,0,1) = k = \gamma$, entonces:

$$m = \iiint_V \delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^a\Big(\int_{\frac{r}{\tan\alpha}}^h \gamma z^n\,dz\Big)r\,dr\Big)\,d\theta = 2\pi\gamma\int_0^a \frac{z^{n+1}}{n+1}\Big|_{\frac{r}{\tan\alpha}}^h r\,dr$$
$$= 2\pi\gamma\int_0^a\Big(\frac{h^{n+1}}{n+1}r - \frac{r^{n+2}}{b^{n+1}(n+1)}\Big)\,dr = \frac{2\pi\gamma}{n+1}\Big(h^{n+1}\frac{r^2}{2} - \frac{r^{n+3}}{b^{n+1}(n+3)}\Big)\Big|_0^a$$
$$= \frac{2\pi\gamma}{n+1}a^2\Big(\frac{h^{n+1}}{2} - \frac{1}{n+3}\frac{a^{n+1}}{\tan^{n+1}\alpha}\Big) = \frac{2\pi\gamma}{n+1}a^2\Big(\frac{h^{n+1}}{2} - \frac{h^{n+1}}{n+3}\Big) = 2\pi\gamma a^2\frac{h^{n+1}}{n+1}\,\frac{n+3-2}{2(n+3)}$$
$$= \frac{2\pi\gamma a^2h^{n+1}}{n+3} = \frac{2\pi\gamma h^{n+3}\tan^2\alpha}{n+3}.$$

49. Calcular las masa de una esfera de radio a, si su densidad es proporcional al cubo de la

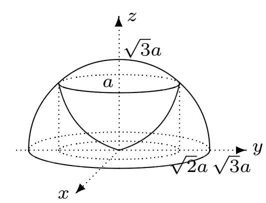
distancia al origen y vale γ a la distancia unidad.



Solución La densidad de la esfera es $\delta(x,y,z) = k(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}$ y $\delta(0,0,1)=k=\gamma$, entonces:

$$m = \iiint_V \delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\Big(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_0^a \gamma r^5 \cos\psi\,dr\Big)d\psi\Big)\,d\varphi$$
$$= 2\pi\gamma 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi\,d\psi\cdot\frac{1}{6}r^6\Big|_0^a = \frac{2}{3}\pi\gamma a^6.$$

50. Determinar la masa del cuerpo limitado por el paraboloide $x^2+y^2=2az$ y la esfera $x^2+y^2+z^2=3a^2$, $z>0$, si la densidad en cada punto es igual a la suma de los cuadrados de coordenadas.

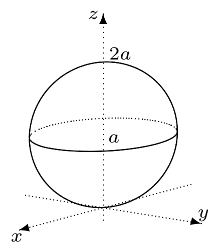


Solución La densidad $\delta(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$. Las superficies se cortan cuando $z^2+2az+a^2=4a^2$ i.e. $z=-a+2a=a$, pues $z>0$.

Cuando $z=a$, tenemos que la intersección de las superficies es $z=a$, $x^2+y^2=2a^2$, cuya proyección sobre el plano $z=0$, es el círculo centrado en el radio $\sqrt{2a}$. Así tenemos que:

$$m = \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{\sqrt{2}a}\Big(\int_{\frac{r^2}{2a}}^{\sqrt{3a^2-r^2}}(r^2+z^2)\,dz\Big)r\,dr\Big)\,d\theta = 2\pi\int_0^{\sqrt{2}a}\Big(r^2z+\frac{z^3}{3}\Big)\Big|_{\frac{r^2}{2a}}^{\sqrt{3a^2-r^2}} r\,dr$$
$$= \frac{\pi}{12a^3}\int_0^{\sqrt{2}a}(8a^3\sqrt{3a^2-r^2}\,(3a^2+2r^2)-12a^2r^4-r^6)dr$$
$$= -\pi\Big(\frac{8}{5}a^4\sqrt{3a^2-r^2}+\frac{4}{15}a^2r^2\sqrt{3a^2-r^2}-\frac{4}{15}\,r^4\sqrt{3a^2-r^2}+$$
$$\frac{2}{3}a^2(3a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{r^6}{6a}+\frac{r^8}{96a^3}\Big)\Big|_0^{\sqrt{2}a}$$
$$= -\pi\Big(\frac{8}{5}a^5+\frac{8}{15}a^5-\frac{16}{15}a^5+\frac{4}{3}a^5+\frac{4}{3}a^5+\frac{1}{6}a^5-\frac{8}{5}\sqrt{3}a^5-2\sqrt{3}a^5\Big)$$
$$= \pi\Big(\frac{18}{5}\sqrt{3}-\frac{97}{30}\Big)a^5 = \frac{1}{5}\pi a^5\Big(18\sqrt{3}-\frac{97}{6}\Big).$$

51. La densidad de la esfera $x^2+y^2+z^2\le 2az$ es igual al cuadrado de la distancia al origen. Determinar el centro de gravedad de la esfera.



Solución La densidad es $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ y la esfera en coordenadas esféricas se escribe $r = 2a \operatorname{sen}\psi$, $0 \le \psi \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. La masa es:

$$m = \iiint_V (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2a\operatorname{sen}\psi} r^4\,dr\right)\cos\psi\,d\psi\right)d\varphi$$

$$= \frac{2}{5}\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2^5a^5\operatorname{sen}^5\psi\cos\psi\,d\psi = \frac{64}{5}\pi a^5\frac{1}{6}\operatorname{sen}^6\psi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{32}{15}\pi a^5.$$

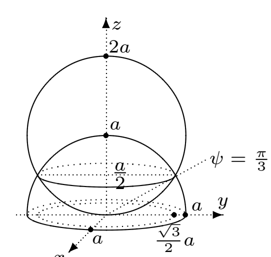
$$\bar{x} = \frac{1}{m}\iiint_V x\,\delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2a\operatorname{sen}\psi} r^5\cos^2\psi\,dr\right)d\psi\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi = 0.$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m}\iiint_V y\,\delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2a\operatorname{sen}\psi} r^5\cos^2\psi\,dr\right)d\psi\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}\varphi\,d\varphi = 0.$$

$$\bar{z} = \frac{1}{m}\iiint_V z\,\delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{m}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{2a\operatorname{sen}\psi} r^5\,dr\right)\cos\psi\operatorname{sen}\psi\,d\psi\right)d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{3m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2^6a^6\operatorname{sen}^7\psi\cos\psi\,d\psi = \frac{64a^6\pi}{3\frac{32}{15}\pi a^5}\cdot\frac{1}{8}\operatorname{sen}^8\psi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{5}{4}a.$$

52. Determinar el momento estático de la parte común de las esferas $x^2+y^2+z^2 \le a^2$ y $x^2+y^2+z^2 \le 2az$ respecto al plano xy, si la densidad es igual a la distancia entre el punto y el plano xy.



Solución Las superficies se intersecan cuando $2az = a^2$ i.e. $z = \frac{a}{2}$, por lo que si $z = \frac{a}{2}$, $x^2+y^2 = \frac{3}{4}a^2$. Además $\delta(x,y,z) = z$, con lo cual tenemos:

$$m_{xy} = \iiint_V \delta(x,y,z)z\,dx\,dy\,dz = \iiint_V z^2\,dx\,dy\,dz$$

$$= \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{\frac{\pi}{3}}\Big(\int_0^{2a\,\mathrm{sen}\,\psi} r^4\,\mathrm{sen}^2\,\psi\cos\psi\,dr\Big)d\psi\Big)\,d\varphi$$

$$+\int_0^{2\pi}\Big(\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_0^{a} r^4\,\mathrm{sen}^2\,\psi\cos\psi\Big)dr\,d\psi\Big)\,d\varphi$$

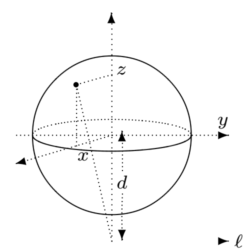
$$= \frac{64\pi}{5}a^5\int_0^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{sen}^7\,\psi\cos\psi\,d\psi + \frac{2\pi}{5}a^5\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{sen}^2\,\psi\cos\psi\,d\psi$$

$$= \frac{8}{5}\pi a^5\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)^8 + \frac{2\pi}{15}a^5\Big(1-\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)^3\Big) = \frac{81\pi}{160}a^5 + 2\pi a^5\Big(\frac{1}{15}-\frac{\sqrt{3}}{40}\Big)$$

$$= \pi a^5\Big(\frac{307}{480}-\frac{\sqrt{3}}{20}\Big) = \frac{1}{20}\pi a^5\Big(\frac{307}{24}-\sqrt{3}\Big).$$

53. Demostrar que le momento de inercia de un cuerpo respecto a cualquier eje ℓ es igual $md^2 + I_c$, donde m es la masa del cuerpo, d es la distancia del eje al centro de gravedad, I_c es el momento de inercia con respecto al eje que es paralelo al eje dado y que pasa por el centro de gravedad del cuerpo. (Teorema de Steiner).

Solución Consideremos un sistema de coordenadas que pase por el centro de gravedad del cuerpo de modo que el eje y sea paralelo al eje ℓ dado y que el eje z pase por el eje ℓ. En este caso el momento de inercia respecto al eje y es:



$$I_y = \iiint\limits_V (x^2+z^2)\delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

donde $\delta(x,y,z)$ es la densidad, de modo que $\bar{x}=\bar{y}=\bar{z}=0$. Así la distancia del punto (x,y,z) a la recta ℓ se mide por la distancia de $(x,y,z+d)$ al eje ℓ, es decir $x^2+(z+d)^2$, por lo que:

$$I_\ell = \iiint\limits_V (x^2+(z+d)^2)\delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_V ((x^2+z^2)+2zd+d^2)\delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$= I_y + 2dm\bar{z} + d^2m = I_y + d^2m,$$

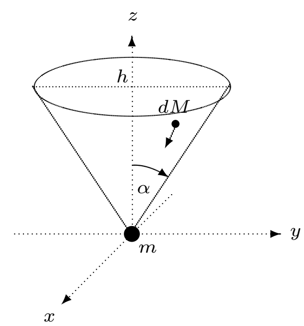
ya que $\displaystyle\iiint\limits_V z\,\delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \bar{z}m = 0$ y $m = \displaystyle\iiint\limits_V \delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$

3.6 Aplicaciones a la gravedad

54. Hallar la atracción que ejerce el cono homogéneo, de altura h y ángulo en el vértice α (en la sección axial), sobre un objeto material que tenga masa m y que está situado es su vértice.

Solución Tomamos el vértice en el origen y usamos coordenadas esféricas:

$$0 \le \varphi \le 2\pi, \quad \tfrac{\pi}{2} - \alpha \le \psi \le \tfrac{\pi}{2}, \quad z = r \operatorname{sen} \psi = h \Longrightarrow r = \frac{h}{\operatorname{sen} \psi}.$$



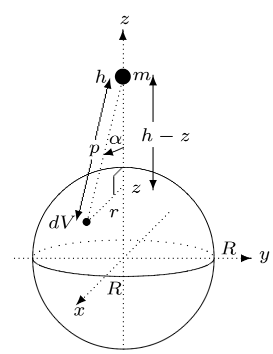
La masa $dM = \rho dV = \rho r^2 \cos\psi \, d\varphi d\psi \, dr$, donde ρ es la densidad y la atracción que ejerce este elemento de masa dM sobre la masa m en el origen, está dada por $-\frac{Gm\,dM}{r^2} \operatorname{sen}\psi = -Gm\rho \operatorname{sen}\psi \cos\psi \, d\psi \, d\varphi \, dr$. La atracción será entonces:

$$F = -\int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{h}{\operatorname{sen}\psi}} Gm\rho \operatorname{sen}\psi \, \cos\psi \, dr \, d\psi \, d\varphi =$$

$$= -2\pi Gmh\rho \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi \, d\psi = -2\pi Gmh\rho \left(1 - \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) = -2\pi Gmh\rho(1 - \cos\alpha).$$

55. Demostrar que la atracción que ejerce una esfera homogénea sobre un punto material exterior a ella no varía, si toda la masa de la esfera se concentra en su centro.

Solución Tomemos el origen en el centro de la esfera, de modo que el eje z pase por el punto que suponemos de masa m y tomemos coordenadas cilíndricas (r, θ, z).



Sea h la distancia del punto al origen y sea p la distancia de un elemento de volumen dV a la masa m: $p = \sqrt{r^2 + (h-z)^2}$, entonces la fuerza de atracción dirigida a lo largo de p tiene valor $-G\gamma m \frac{dV}{p^2}$, donde $\gamma = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ es la densidad de la esfera, $dV = r \, dr \, d\theta \, dz$.

La proyección de la fuerza sobre el eje z es $dF = -\frac{Gm\gamma \, dV}{p^2} \cos\alpha = -Gm\gamma \frac{h-z}{p^3} r \, d\theta \, dr \, dz$, que es la fuerza resultante, ya que por razones de simetría, la suma de las fuerzas perpendiculares al eje z es nula. De esta manera tenemos que:

$$F = \iiint_V dF = \iiint_V -Gm\gamma \frac{h-z}{p^3} r \, d\theta \, dr \, dz$$

$$= -Gm\gamma \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-R}^{R} (h-z) \, dz \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \frac{r \, dr}{(r^2 + (h-z)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ahora, $\displaystyle\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \frac{r\,dr}{(r^2+(h-z)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{h-z} - \frac{1}{\sqrt{R^2+h^2-2hz}}$,

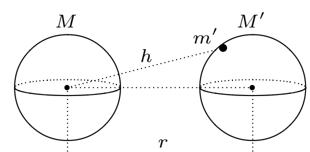
$\displaystyle\int_{-R}^{R}(h-z)\Big(\frac{1}{h-z} - \frac{1}{\sqrt{R^2+h^2-2hz}}\Big)\,dz = \int_{-R}^{R}\Big(1 - \frac{h-z}{\sqrt{R^2+h^2-2hz}}\Big)\,dz =$

$\displaystyle 2R - \frac{(h+R)^2(2h-R)}{3h^2} + \frac{(h-R)^2(2h+R)}{3h^2} = \frac{2R^2}{3h^2}$,

$\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{2R^2}{3h^2}\,d\theta = \frac{4\pi R^3}{3h^2} \Longrightarrow F = -Gm\gamma\frac{4\pi R^3}{3h^2} = -\frac{GmM}{h^2}$, ya que $M = \frac{4}{3}\pi R^3\gamma$.

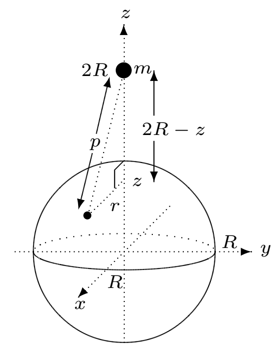
56. Demostrar que la fuerza de interacción entre dos esferas homogéneas no varía si las masas de las esferas estuvieran concentradas en sus centros.

Solución Sabemos por el ejercicio 55, página 194, que la atracción que ejerce una esfera homogénea sobre un punto material exterior a ella no varía, si toda la masa se concentra en el centro de la esfera.



Tomando un elemento de masa de la esfera M' que denotamos con masa m' satisface que la atracción que ejerce la esfera M sobre el elemento m', es como si se concentrara toda la masa de M en el centro i.e. la fuerza $F = -\dfrac{GMm'}{h^2}$, donde G es la constante de gravitación universal y h es la distancia del centro de la esfera M al elemento m'. Ahora usando el mismo principio del ejercicio 55, página 194, centramos la masa M en el centro e integramos sobre los elementos de masa m' de la esfera M', por lo que la fuerza de atracción $F = -\dfrac{GMM'}{r^2}$, donde r es la distancia de los centros de las esferas.

57. Consideramos una esfera sólida heterogénea $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$, donde la densidad varía de acuerdo con $\delta(x,y,z) = \lambda z^2$. Calcular la fuerza con la cual atrae un punto material de masa m, si se sitúa sobre el eje z a una distancia igual a $2R$ del centro de la esfera.



Solución Usando el planteamiento del ejercicio 55, página 194, tenemos que la distancia p de un elemento de volumen dV a la masa m es $p=\sqrt{r^2+(2R-z)^2}$, entonces la densidad $\delta(x,y,z)=\lambda z^2$ y la fuerza es:

$$F=\iiint\limits_V -Gm\lambda z^2\frac{h-z}{p^3}\,r\,dr\,d\theta\,dz$$

$$=-Gm\lambda\int_0^{2\pi}\Big(\int_{-R}^{R}(2R-z)z^2\Big(\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}}\frac{r\,dr}{(r^2+(2R-z)^2)^{\frac{3}{2}}}\Big)\,dz\Big)\,d\theta.$$

Ahora, $\displaystyle\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}}\frac{r\,dr}{(r^2+(2R-z)^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{2R-z}-\frac{1}{\sqrt{5R^2-4Rz}}$,

$$\int_{-R}^{R}(2R-z)z^2\Big(\frac{1}{2R-z}-\frac{1}{\sqrt{5R^2-4Rz}}\Big)\,dz=\int_{-R}^{R}\Big(z^2-\frac{(2R-z)z^2}{\sqrt{5R^2-4Rz}}\Big)\,dz=$$

$$\Big(\frac{1}{3}z^3-\frac{\Big(60z^3-78Rz^2-130R^2z-325R^3\Big)\sqrt{5R^2-4Rz}}{480R}\Big)\Big|_{-R}^{R}=\frac{2}{3}R^3-\frac{263R^3}{420}=\frac{17}{420}R^3.$$

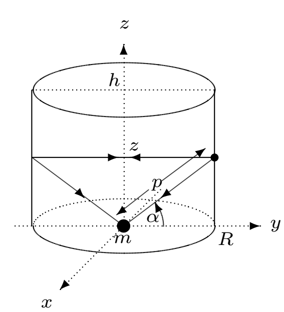
Finalmente $F=-Gm\lambda\pi\frac{17}{210}R^3$; para terminar debemos calcular la masa de la esfera:

$$M=\iiint\limits_V\lambda z^2\,dx\,dy\,dz=\lambda\int_0^{2\pi}\Big(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_0^R r^4\,\text{sen}^2\,\psi|\cos\psi|\,dr\Big)d\psi\Big)\,d\varphi=2\pi\lambda\frac{R^5}{5}2\cdot\frac{1}{3}=$$

$\frac{4}{15}\lambda\pi R^5$, entonces:

$$F=-Gm\Big(\frac{4}{15}\lambda\pi R^5\Big)\cdot\frac{15}{4}\frac{17}{210}\frac{1}{R^2}=-GmM\frac{17}{56}\frac{1}{R^2}=-\frac{17}{56}\frac{GmM}{R^2}.$$

58. Se considera un sólido homogéneo limitado por un cilindro circular recto, radio de la base R y altura h y densidad γ. Determinar la fuerza sobre el punto de masa m situado en el centro de la base del cilindro.



Solución Situamos la base del cilindro en el plano $z=0$ y situamos la masa m en el origen, entonces el diferencial de masa del cilindro $dM=\gamma dV=\gamma r\,dr\,d\theta\,dz$, de modo que el diferencial de fuerza:

$$dF=-\frac{Gm\,dM\,\text{sen}\,\alpha}{p^2}=-\frac{Gm\gamma r\,dr\,d\theta\,dz}{p^2}\,\text{sen}\,\alpha=-\frac{Gm\gamma r\,dr\,d\theta\,z\,dz}{p^3},$$

donde $p=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{r^2+z^2}$, $\text{sen}\,\alpha=\frac{z}{p}$, ya que sólo queda la fuerza de atracción sobre el eje z, pues las fuerzas de atracción perpendiculares al eje z se anulan por la simetría del cilindro. La atracción total será:

$$F = -Gm\gamma \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^h \Big(\frac{1}{2} \int_0^R \frac{2r\,dr}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \Big) z\,dz \Big) d\theta = -2\pi Gm\gamma \int_0^h (r^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} \Big|_0^R z\,dz$$

$$= -2\pi Gm\gamma \int_0^h \Big(\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}} \Big) z\,dz = -2\pi Gm\gamma \big(z - \sqrt{R^2+z^2}\big)\Big|_0^h =$$

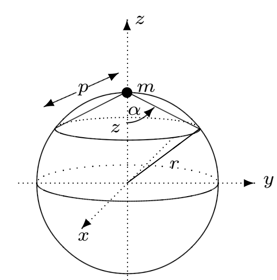
$$= -2\pi Gm\gamma (R + h - \sqrt{R^2+h^2}).$$

59. Se considera una esfera sólida heterogénea de radio R, cuya densidad γ está dada por $\gamma = a - b\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, con $a > 0$, $b > 0$.

a) Determinar las constantes a y b, si la densidad media de la esfera es γ_m y la densidad sobre la superficie de la esfera es γ_0.

b) Calcular la fuerza de atracción ejercida por la esfera en un punto m situado sobre la superficie de la esfera.

Solución Consideramos la esfera de radio R, centrada en el origen y la masa m situada en el eje z.



a) Se tiene que $\gamma_0 = a - bR$ y $\gamma_m = \iiint_V (a-br)r^2\,dr|\cos\psi|\,d\psi\,d\varphi =$

$$\frac{4}{3}\pi R^3 a - b\int_0^{2\pi} \Big(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^R r^3\,dr \Big) \cos\psi\,d\psi \Big) d\varphi =$$

$$\frac{4}{3}\pi R^3 a - b 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{\pi}{3} R^3 (4a - 3bR).$$

Además $\gamma_c = \dfrac{\gamma_m}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{1}{4}(4a - 3bR)$, $\gamma_0 = a - bR$ i.e. $\gamma_c = \frac{1}{4}(\gamma_0 + 4bR - 3bR) = \dfrac{1}{4}(4\gamma_0 + bR)$, por lo que $b = \dfrac{4\gamma_c - 4\gamma_0}{R}$, $a = 4\gamma_c - 3\gamma_0$.

b) El diferencial de la fuerza F:

$dF = -\dfrac{Gm\,dM}{p^2}\cos\alpha = -\dfrac{Gm(a-br)(R - r\,\mathrm{sen}\,\psi)r^2|\cos\psi|\,d\psi\,dr\,d\varphi}{(r^2+R^2-2rR\,\mathrm{sen}\,\psi)^{\frac{3}{2}}}$, ya que por la simetría de la esfera, las fuerzas perpendiculares al eje z se anulan y $\cos\alpha = \dfrac{R-z}{p}$. Así la fuerza es:

$$F = -\int_0^{2\pi} \Big(\int_0^R \Big(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{Gm(a-br)(R - r\,\mathrm{sen}\,\psi)r^2|\cos\psi|}{(r^2+R^2-2rR\,\mathrm{sen}\,\psi)^{\frac{3}{2}}} d\psi \Big) dr \Big) d\varphi$$

$$= -2\pi Gm \int_0^R r^2(a{-}br)\sqrt{r^2+R^2-2rR\operatorname{sen}\psi}\Big(-\frac{1}{2rR^2}+\frac{R^2-r^2}{2rR^2(r^2+R^2-2rR\operatorname{sen}\psi)}\Big)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}dr$$

$$= -2\pi Gm \int_0^R r^2(a-br)\Big(-\frac{R-r}{2rR^2}-\frac{r^2-R^2}{2rR^2(R-r)}+\frac{R+r}{2rR^2}+\frac{r^2-R^2}{2rR^2(R+r)}\Big)dr$$

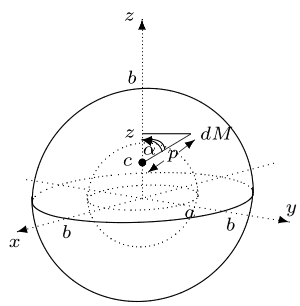
$$= -2\pi Gm \int_0^R r^2(a-br)\Big(\frac{2(R+r)}{2rR^2}-\frac{2(R-r)}{2rR^2}\Big)dr = -2\pi Gm\int_0^R r^2(a-br)\frac{2}{R^2}dr$$

$$= -2\pi Gm\frac{2}{R^2}\Big(a\frac{R^3}{3}-b\frac{R^4}{4}\Big) = -2\pi GmR\frac{4a-3bR}{6} = -\frac{4}{3}\pi GmR\gamma_c = -\frac{GMm}{R^2}.$$

Se ha usado la fórmula:

$$\int\frac{a+bx}{(c+dx)^{\frac{3}{2}}}dx = -\frac{2}{d}\frac{a+bx}{\sqrt{c+dx}}+\int\frac{b\,dx}{d\sqrt{c+dx}} = \sqrt{c+dx}\Big(\frac{b}{d^2}-\frac{ad-bc}{d^2(c+dx)}\Big)+C.$$

60. Se considera un cuerpo homogéneo limitado por dos esferas concéntricas (capa esférica). Demostrar que la atracción que ejerce esta capa sobre una masa m situada dentro de la cavidad del cuerpo, es nula.



Solución Usando el desarrollo del ejercicio 59, página 197, colocamos la masa m sobre el eje z, en la posición c, donde $|c| < a < b$ (a y b son los radios de las esferas concéntricas), entonces tenemos que el diferencial de la fuerza F:

$$dF = -\frac{Gm\,dM}{p^2}\cos\alpha = -\frac{Gm\,dM(z-c)}{p^3}$$

$$= -\frac{Gm(r\operatorname{sen}\psi-c)r^2|\cos\psi|\,d\psi\,dr\,d\varphi}{(r^2+c^2-2rc\operatorname{sen}\psi)^{\frac{3}{2}}},$$ ya que por la simetría de la esfera, las fuerzas perpendiculares al eje z se anulan y $\cos\alpha = \dfrac{z-c}{p}$. Así la fuerza es:

$$F = -\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^R\Big(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{Gm(r\operatorname{sen}\psi-c)r^2\cos\psi}{(r^2+c^2-2rc\operatorname{sen}\psi)^{\frac{3}{2}}}d\psi\Big)dr\Big)d\varphi$$

$$= -2\pi Gm\int_0^R r^2\sqrt{r^2+c^2-2rc\operatorname{sen}\psi}\Big(\frac{1}{2rc^2}-\frac{2c^r-r(r^2+c^2)}{2c^2r^2(r^2+c^2-2cr\operatorname{sen}\psi)}\Big)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}dr$$

$$= -2\pi Gm\int_0^R r^2\Big((r-c)\Big(\frac{1}{2rc^2}-\frac{c^2-r^2}{2rc^2(r-c)^2}\Big)-(r+c)\Big(\frac{1}{2rc^2}-\frac{c^2-r^2}{2rc^2(r+c)^2}\Big)\Big)dr$$

$$= -2\pi Gm\int_0^R r^2\Big(\frac{r-c}{2rc^2}+\frac{c+r}{2rc^2}-\frac{r+c}{2rc^2}-\frac{r-c}{2rc^2}\Big)dr = -2\pi Gm\int_0^R 0\,dr = 0.$$

3.7 Ejercicios especiales

61. Sea $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq x \leq 1,\ x \leq y \leq 1,\ x \leq z \leq y\}$, $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, demostrar $\displaystyle\iiint_V f(x)f(y)f(z)dxdydz = \frac{1}{6}\Big(\int_0^1 f(t)dt\Big)^3$.

Solución Definiendo $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$, se tiene $\displaystyle\int_0^1\int_x^1 \Big(\int_x^y f(z)dz\Big)f(y)\,dy\,f(x)\,dx =$

$$\int_0^1\int_x^1 \big(F(y)-F(x)\big)F'(y)dy\,F'(x)dx = \int_0^1 \big(\tfrac{1}{2}F(y)^2 - F(x)F(y)\big)\Big|_x^1 F'(x)dx =$$

$$\int_0^1 \big(\tfrac{1}{2}F(1)^2 - F(x)F(1) - \tfrac{1}{2}F(x)^2 + F(x)^2\big)F'(x)dx =$$

$$\int_0^1 \big(\tfrac{1}{2}F(1)^2 - F(x)F(1) + \tfrac{1}{2}F(x)^2\big)F'(x)dx =$$

$$\big(\tfrac{1}{2}F(1)^2F(x) - \tfrac{1}{2}F(1)F(x)^2 + \tfrac{1}{6}F(x)^3\big)\Big|_0^1 = \tfrac{1}{2}F(1)^3 - \tfrac{1}{2}F(1)^3 + \tfrac{1}{6}F(1)^3 = \tfrac{1}{6}\Big(\int_0^1 f(t)dt\Big)^3.$$

62. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ y sean f, g, $h\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ aplicaciones continuas. Estudiar la integral

$$\iiint_{[a,b]^3} \begin{vmatrix} f(x) & f(y) & f(z) \\ g(x) & g(y) & g(z) \\ h(x) & h(y) & h(z) \end{vmatrix}^2 dx\,dy\,dz,$$ para probar que:

$$\Big(\int_a^b f^2\Big)\Big(\int_a^b gh\Big)^2 + \Big(\int_a^b g^2\Big)\Big(\int_a^b fh\Big)^2 + \int_a^b h^2\Big(\int_a^b fg\Big)^2 \leq \Big(\int_a^b f^2\Big)\Big(\int_a^b g^2\Big)\Big(\int_a^b h^2\Big) + 2\Big(\int_a^b fg\Big)\Big(\int_a^b fh\Big)\Big(\int_a^b gh\Big).$$

Solución Desarrollando el determinante se tiene que:

$$f^2(x)(g(y)h(z)-h(y)g(z))^2 + f^2(y)(g(x)h(z)-h(x)g(z))^2 + f^2(z)(g(x)h(y)-h(x)g(y))^2 -$$

$$2f(x)f(y)(g(y)h(z)-h(y)g(z))(g(x)h(z)-h(x)g(z)) + 2f(x)f(z)(g(y)h(z)-h(y)g(z))\cdot$$

$$(g(x)h(y)-h(x)g(y)) - 2f(y)f(z)(g(x)h(z)-h(x)g(z))(g(x)h(y)-h(x)g(y)) =$$

$$f^2(x)g^2(y)h^2(z) + f^2(x)h^2(y)g^2(z) - 2f^2(x)g(y)h(y)h(z)g(z) + f^2(y)h^2(x)g^2(z) +$$

$$f^2(y)g^2(x)h^2(z) - 2f^2(y)g(x)h(x)h(z)g(z) + f^2(z)g^2(x)h^2(y) + f^2(z)h^2(x)g^2(y) -$$

$$2f^2(x)g(x)h(x)h(y)g(y) - 2f(x)f(y)g(x)g(y)h^2(z) + 2f(x)f(y)h(x)g(y)g(z)h(z) +$$

$$2f(x)f(y)g(x)h(y)g(z)h(z) - 2f(x)f(y)h(x)h(y)g^2(z) + 2f(x)f(z)g(x)g(y)h(y)h(z) -$$

$$2f(x)f(z)h(x)h(z)g^2(y) - 2f(x)f(z)g(x)g(z)h^2(y) + 2f(x)f(z)h(x)h(y)g(y)g(z) -$$

$$2f(y)f(z)g^2(x)h(y)h(z) + 2f(y)f(z)h(x)g(x)g(y)h(z) + 2f(y)f(z)h(x)g(x)h(y)g(z) -$$

$2f(y)f(z)h^2(x)g(y)g(z) \geq 0$. Integrando los términos tenemos:

$$6\int_a^b f^2 \int_a^b g^2 \int_a^b h^2 - 2\int_a^b f^2\Big(\int_a^b gh\Big)^2 - 2\int_a^b f^2\Big(\int_a^b gh\Big)^2 - 2\int_a^b f^2\Big(\int_a^b gh\Big)^2 +$$
$$2\int_a^b fh \int_a^b fg \int_a^b gh + 2\int_a^b fg \int_a^b fh \int_a^b gh - 2\int_a^b g^2\Big(\int_a^b fh\Big)^2 + 2\int_a^b fg \int_a^b gh \int_a^b fh -$$
$$2\int_a^b g^2\Big(\int_a^b fh\Big)^2 - 2\int_a^b h^2\Big(\int_a^b fg\Big)^2 + 2\int_a^b fh \int_a^b hg \int_a^b fg - 2\int_a^b g^2\Big(\int_a^b fh\Big)^2 +$$
$$2\int_a^b hg \int_a^b fg \int_a^b fh + 2\int_a^b hg \int_a^b fh \int_a^b fg - 2\int_a^b h^2\Big(\int_a^b fg\Big)^2 =$$
$$6\int_a^b f^2 \int_a^b g^2 \int_a^b h^2 - 6\int_a^b f^2\Big(\int_a^b gh\Big)^2 - 6\int_a^b h^2\Big(\int_a^b fg\Big)^2 - 6\int_a^b g^2\Big(\int_a^b fh\Big)^2 +$$
$$12\int_a^b fh \int_a^b fg \int_a^b gh \geq 0 \Longrightarrow$$
$$\Big(\int_a^b f^2\Big)\Big(\int_a^b gh\Big)^2 + \Big(\int_a^b g^2\Big)\Big(\int_a^b fh\Big)^2 + \int_a^b h^2\Big(\int_a^b fg\Big)^2 \leq \Big(\int_a^b f^2\Big)\Big(\int_a^b g^2\Big)\Big(\int_a^b h^2\Big) +$$
$$2\Big(\int_a^b fg\Big)\Big(\int_a^b fh\Big)\Big(\int_a^b gh\Big).$$

63. a) Demostrar que $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}^+$, $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$.

b) Sean $f, g\colon [\,0,1\,] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ funciones continuas, demostrar que:

$$\iiint\limits_{[\,0,1\,]^3} \big[(f(x)g(y)g(z))^3 + (f(y)g(z)g(x))^3 + (f(z)g(x)g(y))^3$$
$$- 3f(x)f(y)f(z)g^2(x)g^2(y)g^2(z)\big]dxdydz \geq 0.$$

c) Deducir que si ϕ, ψ son aplicaciones continuas en $[\,0,1\,]$, con valor en $\mathbb{R}^+$,

$$\int_0^1 \phi(x)\psi(x)dx \leq \Big(\int_0^1 (\phi(x))^3 dx\Big)^{\frac{1}{3}}\Big(\int_0^1 (\psi(x))^{\frac{3}{2}} dx\Big)^{\frac{2}{3}}.$$

Solución

a) Consideremos la función $f(x) = a^3 + b^3 + x^3 - 3abx$, entonces $f'(x) = 3x^2 - 3ab = 0 \iff x = \pm\sqrt{ab}$, por lo que tenemos $f(\sqrt{ab}) = a^3 + b^3 - 2(ab)^{\frac{3}{2}}$ y $f(-\sqrt{ab}) = a^3 + b^3 + 2(ab)^{\frac{3}{2}} \geq 0$. Así, dado que $f(-\sqrt{ab})f(\sqrt{ab}) = (a^3 + b^3)^2 - 4a^3b^3 = a^6 + b^6 - 2a^3b^3 = (a^3 - b^3)^2 \geq 0 \implies f(\sqrt{ab}) > 0$ y como la función $f(x)$ tiene un mínimo en $\sqrt{ab}$, para todo $x \geq 0$, $f(x) \geq f(\sqrt{ab}) \geq 0$, lo que implica que $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$, si $c \geq 0$.

b) Usando la parte a) con $a = f(x)g(y)g(z)$, $b = f(y)g(z)g(x)$, $c = f(z)g(x)g(y)$, se tiene:

$$\iiint\limits_{[\,0,1\,]^3} (a^3 + b^3 + c^3)dxdydz - 3\iiint\limits_{[\,0,1\,]^3} abcdxdydz \geq 0 \implies \iiint\limits_{[\,0,1\,]^3} \big[(f(x)g(y)g(z))^3 +$$

$$(f(y)g(z)g(x))^3 + (f(z)g(x)g(y))^3 - 3f(x)f(y)f(z)g^2(x)g^2(y)g^2(z)\big]dxdydz \geq 0.$$

c) Sea $f = \phi$, $g = \sqrt{\psi}$, entonces $3\displaystyle\iiint_{[0,1]^3} \phi^3(x)\psi^{\frac{3}{2}}(y)\psi^{\frac{3}{2}}(z)dxdydz \geq 3\Big(\int_0^1 \phi(x)\psi(x)dx\Big)^3 \implies$

$$\int_0^1 \phi^3(x)dx\Big(\int_0^1 \psi^{\frac{3}{2}}(x)dx\Big)^2 \geq \Big(\int_0^1 \phi(x)\psi(x)dx\Big)^3 \implies$$

$$\Big(\int_0^1 \phi^3(x)dx\Big)^{\frac{1}{3}}\Big(\int_0^1 \psi^{\frac{3}{2}}(x)dx\Big)^{\frac{2}{3}} \geq \int_0^1 \phi(x)\psi(x)dx.$$

64. a) Calcular $\displaystyle\iiint_V \frac{dxdydz}{(1+x^2z^2)(1+y^2z^2)}$, si $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ z \geq 0\}$.

b) Deducir el valor de $\displaystyle\int_0^\infty \Big(\frac{\arctan t}{t}\Big)^2 dt$.

Solución

a) Sea $I = \displaystyle\iiint_V \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x^2z^2)(1+y^2z^2)} = \int_0^1\int_0^1\int_0^\infty \Big(\frac{\frac{x^2}{x^2-y^2}}{1+x^2z^2} - \frac{\frac{y^2}{x^2-y^2}}{1+y^2z^2}\Big)dzdydx =$

$$\int_0^1\int_0^1 \Big(\frac{x^2}{x^2-y^2}\frac{\arctan z}{x}\Big|_0^\infty - \frac{y^2}{x^2-y^2}\frac{\arctan z}{y}\Big|_0^\infty\Big)dydx =$$

$$\frac{\pi}{2}\int_0^1\int_0^1 \frac{x-y}{x^2-y^2}dxdy = \frac{\pi}{2}\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{x+y}dxdy = \frac{\pi}{2}\int_0^1 (\ln(1+y) - \ln y)dy =$$

$$\frac{\pi}{2}\lim_{\epsilon\to 0^+}\Big((1+y)\ln(1+y) - (1+y) - y\ln y + y)\Big)\Big|_\epsilon^1 = \frac{\pi}{2}2(\ln 2 + \lim_{\epsilon\to 0^+}\epsilon\ln\epsilon) = \pi\ln 2.$$

b) Por otro lado, $I = \displaystyle\int_0^\infty\int_0^1\Big(\int_0^1 \frac{dx}{1+z^2x^2}\Big)\frac{1}{1+y^2z^2}dy\,dz.$

Sea $u = zx$, $du = zdx$, entonces $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+z^2x^2} = \frac{1}{z}\int_0^z \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{z}\arctan z$. Así tenemos que $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{z^2}\arctan^2 z dz = \int_0^\infty \Big(\frac{\arctan t}{t}\Big)^2 dt.$

3.8 Integrales múltiples

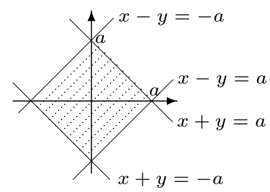
65. Designemos con $S_n(a) = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n/|x_1| + \cdots + |x_n| \leq a\}$, con $a \geq 0$. Cuando $n = 2$, el conjunto es un cuadrado con vértices en $(0,\pm a)$ y $(\pm a, 0)$. Cuando $n = 3$ es un octaedro con vértices en $(0,0,\pm a)$, $(0,\pm a,0)$, $(\pm a,0,0)$. Denotemos $V_n(a)$ el volumen de $V_n(a)$ dado por $V_n(a) = \displaystyle\int\cdots\int_{S_n(a)} dx_1\cdots dx_n$.

a) Demostrar que $V_n(a) = a^n V_n(1)$.

b) Para $n \geq 2$, expresar la integral que da $V_n(1)$ como una iteración de una integral unidimensional y una integral $(n-1)$-múltiple y demostrar que:

$$V_n(1) = V_{n-1}(1)\int_{-1}^{1}(1-|x|)^{n-1}dx = \frac{2}{n}V_{n-1}(1).$$

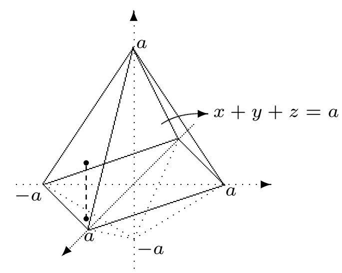
c) Usando a) y b) deducir que $V_n(a) = \dfrac{2^n a^n}{n!}$.



Solución Veamos de cerca que pasa en los casos $n=2$ y $n=3$. En efecto, para $n=2$ se define que:

$$V_2(a) = \int_{-a}^{0}\int_{-x-a}^{x+a} dy\,dx + \int_{0}^{a}\int_{x-a}^{a-x} dy\,dx = \int_{-a}^{a}\int_{-a+|x|}^{a-|x|} dy\,dx.$$

Para $n=3$, para x, y en el primer cuadrante del plano xy satisfaciendo $-a \le x \le a$, $-a+|x| \le y \le a-|x|$, se tiene que z varía entre $z = a-x-y$ y $z = -a+x+y$. De manera general para x, y en el plano xy se tiene que $-a+|x|+|y| \le z \le a-|x|-|y|$, es decir:



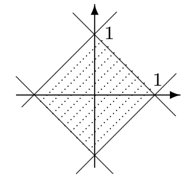
$$V_3(a) = \int_{-a}^{a}\left(\int_{-a+|x|}^{a-|x|}\left(\int_{-a+|x|+|y|}^{a-|x|-|y|} dz\right) dy\right) dx.$$

En general vamos a tener que la variación de $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_2, x_1$ es la siguiente:

$$\begin{gathered}
-a+|x_{n-1}|+\cdots+|x_1| \le x_n \le a-|x_{n-1}|-\cdots-|x_1| \\
-a+|x_{n-2}|+\cdots+|x_1| \le x_{n-1} \le a-|x_{n-2}|-\cdots-|x_1| \\
\vdots \\
-a+|x_1| \le x_2 \le a-|x_1| \\
-a \le x_1 \le a,
\end{gathered}$$

con lo cual:

$$V_n(a) = \int_{-a}^{a}\left(\int_{-a+|x_1|}^{a-|x_1|}\cdots\left(\int_{-a+|x_1|+\cdots+|x_{n-1}|}^{a-|x_1|-\cdots-|x_{n-1}|} dx_n\right)\cdots dx_2\right) dx_1$$



y definiendo $y_i = \dfrac{x_i}{a}$, $i = 1, \ldots, n$:

$$V_n(a) = a^n\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1+|y_1|}^{1-|y_1|}\cdots\left(\int_{-1+|y_1|+\cdots+|y_{n-1}|}^{1-|y_1|-\cdots-|y_{n-1}|} dy_n\right)\cdots dy_2\right) dy_1 = a^n V_n(1)$$

$$= a^n \int_{-1}^{1} \left(\int_{-(-1+|x_1|)}^{(1-|x_1|)} \cdots \left(\int_{-(-1+|x_1|)+|x_2|+\cdots+|x_n|}^{(1-|x_1|)-|x_2|-\cdots-|x_n|} dx_n \right) \cdots dx_2 \right) dx_1$$

$$= a^n \int_{-1}^{1} V_{n-1}(1-|x_1|)\, dx_1 = a^n \int_{-1}^{1} (1-|x_1|)^{n-1} V_{n-1}(1)\, dx_1$$

$$= a^n V_{n-1}(1) \int_{-1}^{1} (1-|x|)^{n-1}\, dx = a^n V_{n-1}(1) 2 \int_{0}^{1} (1-x)^{n-1}\, dx$$

$$= a^n V_{n-1}(1) \Big(-\frac{2}{n}(1-x)^n \Big)\Big|_0^1 = a^n V_{n-1}(1) \frac{2}{n}$$

$$= a^n \frac{2}{n} \frac{2}{n-1} V_{n-2}(1) = \cdots = a^n \frac{2}{n} \frac{2}{n-1} \cdots \frac{2}{1} V_0(1) = a^n \frac{2^n}{n!}.$$

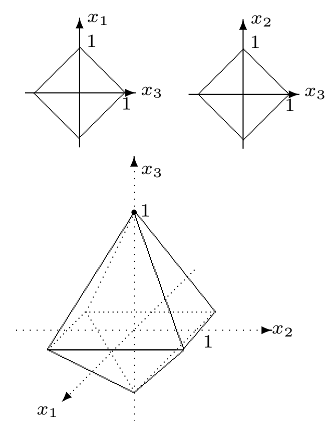
66. Sea $S_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n / |x_i| + |x_n| \le a,\ i = 1, \ldots, n-1\}$, siendo $a > 0$ y $n \ge 2$.

a) Dibujar $S_n(1)$, cuando $n = 2$ y cuando $n = 3$.

b) Denotamos $V_n(a) = \underset{S_n(a)}{\int \cdots \int} dx_1 \cdots dx_n$, demostrar que $V_n(a) = a^n V_n(1)$.

c) Expresar la integral que da $V_n(1)$ como una iteración de una integral unidimensional y una integral $(n-1)$-dimensional y deducir que $V_n(a) = \dfrac{2^n a^n}{n}$.

Solución



a) Para $n = 2$, es el caso conocido $|x_1| + |x_2| \le 1$.

Para $n = 3$ tenemos $|x_1| + |x_3| \le a$, $|x_2| + |x_3| \le a$, $|x_3| \le a$.

Así $|x_i| \le a - |x_3|$, $-a \le x_3 \le a$, es decir que se tiene $-a + |x_3| \le x_i \le a - |x_3|$, $1 \le i \le 2$, $-a \le x_3 \le a$ y se forman dos pirámides de base cuadrada común en el plano $x_1 x_2$.

b) $V_n(a) = \underset{S_n(a)}{\int \cdots \int} dx_1 \cdots dx_n = \displaystyle\int_{-a}^{a} \left(\int_{-a+|x_n|}^{a-|x_n|} \cdots \left(\int_{-a+|x_n|}^{a-|x_n|} dx_1 \right) \cdots dx_{n-1} \right) dx_n$

$$= a^n \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1+\frac{|x_n|}{a}}^{1-\frac{|x_n|}{a}} \cdots \left(\int_{-1+\frac{|x_n|}{a}}^{1-\frac{|x_n|}{a}} \frac{dx_1}{a} \right) \cdots \frac{dx_{n-1}}{a} \right) \frac{dx_n}{a}$$

$$= a^n \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1+|x_n|}^{1-|x_n|} \cdots \left(\int_{-1+|x_n|}^{1-|x_n|} dx_1 \right) \cdots dx_{n-1} \right) dx_n = a^n V_n(1).$$

Por otro lado:

$$V_n(1) = \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1+|x_n|}^{1-|x_n|}\left(\cdots\int_{-1+|x_n|}^{1-|x_n|}\Big(2\big(1-|x_n|\big)dx_2\cdots\Big)dx_{n-1}\right)dx_n\right.$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1+|x_n|}^{1-|x_n|}\left(\cdots\int_{-1+|x_n|}^{1-|x_n|}(2(1-|x_n|))^2dx_3\cdots\right)dx_{n-1}\right)dx_n$$

$$= \cdots = \int_{-1}^{1}\Big(2\big(1-|x_n|\big)\Big)^{n-1}dx_n = 2\int_0^1 2^{n-1}\big(1-x\big)^{n-1}dx$$

$$= 2^n\int_0^1 \big(1-x\big)^{n-1}dx = 2^n\frac{1}{n}.$$

c) Así se tiene que $V_n(a) = a^nV_n(1) = a^n2^n\dfrac{1}{n}$.

67. Sea $S_n(a) = \{\big(x_1,\ldots,x_n\big)\in\mathbb{R}^n/x_1^2+\cdots+x_n^2\le a^2\}$ y sea $V_n(a) = \underset{S_n(a)}{\int\cdots\int} dx_1\cdots dx_n$.

a) Demostrar que $V_n(a) = a^nV_n(1)$.

b) Expresar la integral $V_n(1)$ para $n\ge 3$, como una integral doble y una integral $(n-2)$-múltiple. Verificar que $V_{n-2}(R) = R^{n-2}V_{n-2}(1)$, con $R = \sqrt{1-x_{n-1}^2-x_n^2}$.

c) Usando a) y b) verificar que $V_n(1) = V_{n-2}(1)\dfrac{2\pi}{n}$ y deducir que $V_n(a) = \dfrac{\pi^{n/2}a^n}{\Gamma\big(\frac{1}{2}n+1\big)}$, donde Γ es la función gama.

d) Expresar $V_n(1)$ con la identidad de una integral unidimensional y una integral $(n-1)$-múltiple y verificar que $V_n(1) = 2V_{n-1}(1)\displaystyle\int_0^1\big(1-x^2\big)^{(n-1)/2}dx$.

e) Usando c) y d) deducir que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\Big(\frac{n+1}{2}\Big)}{\Gamma\Big(\frac{n}{2}+1\Big)}$.

Solución

a) $V_n(a) = \underset{S_n(a)}{\int\cdots\int} dx_1\cdots dx_n$

$$= \int_{-a}^{a}\left(\int_{-\sqrt{a^2-x_n^2}}^{\sqrt{a^2-x_n^2}}\cdots\left(\int_{-\sqrt{a^2-x_n^2-\cdots-x_2^2}}^{\sqrt{a^2-x_n^2-\cdots-x_2^2}}dx_1\right)\cdots dx_{n-1}\right)dx_n$$

$$= a^n\int_{-a}^{a}\left(\int_{-a\sqrt{1-\left(\frac{x_n}{a}\right)^2}}^{a\sqrt{1-\left(\frac{x_n}{a}\right)^2}}\cdots\left(\int_{-a\sqrt{1-\left(\frac{x_n}{a}\right)^2-\cdots-\left(\frac{x_2}{a}\right)^2}}^{a\sqrt{1-\left(\frac{x_n}{a}\right)^2-\cdots-\left(\frac{x_2}{a}\right)^2}}\frac{dx_1}{a}\right)\cdots\frac{dx_{n-1}}{a}\right)\frac{dx_n}{a}$$

$$= a^n\int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x_n^2}}^{\sqrt{1-x_n^2}}\cdots\left(\int_{-\sqrt{1-x_n^2-\cdots-x_2^2}}^{\sqrt{1-x_n^2-\cdots-x_2^2}}dx_1\right)\cdots dx_{n-1}\right)dx_n = a^nV_n(1).$$

b) Además $x_1^2+\cdots+x_n^2\le 1 \Longleftrightarrow x_1^2+\cdots+x_{n-2}^2\le 1-x_{n-1}^2-x_n^2$ y $x_{n-1}^2+x_n^2\le 1$, entonces:

$$V_n(1) = \iint\limits_{x_{n-1}^2+x_n^2\leq 1} \left[\int\limits_{x_1^2+\cdots x_n^2\leq 1-x_{n-1}^2-x_n^2}\cdots\int dx_1\cdots dx_{n-2}\right] dx_{n-1}dx_n$$

$$= \iint\limits_{x_{n-1}^2+x_n^2\leq 1} \left[V_{n-2}\left(\sqrt{1-x_{n-1}^2-x_n^2}\right)\right] dx_{n-1}dx_n$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} (1-x^2-y^2)^{\frac{n-2}{2}} V_{n-2}(1)\, dx\, dy,$$

es decir $V_{n-2}(R) = R^{n-2}V_{n-2}(1)$, con $R = \sqrt{1-x^2-y^2}$.

c) Así tenemos que:

$$V_n(1) = V_{n-2}(1) \iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} (1-x^2-y^2)^{\frac{n}{2}-1}\, dx\, dy$$

$$= V_{n-2}(1)\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 (1-r^2)^{\frac{n}{2}-1} r\, dr\right) d\theta$$

$$= V_{n-2}(1) 2\pi\frac{1}{2}\frac{2}{n}\left[-(1-r^2)^{\frac{n}{2}}\right]\Big|_0^1 = \frac{2\pi}{n}V_{n-2}(1),\ \text{si } n\geq 3, \text{ o sea:}$$

$$V_n(1) = \frac{2\pi}{n}\cdot\frac{2\pi}{n-2}\cdot V_{n-4}(1) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{\frac{n}{2}}\dfrac{\pi}{\frac{n}{2}-1}\cdots\dfrac{\pi}{\frac{3}{2}-1} & \text{si } n \text{ es impar}\\[2ex] \dfrac{\pi}{\frac{n}{2}}\dfrac{\pi}{\frac{n}{2}-1}\cdot\dfrac{\pi}{2-1} & \text{si } n \text{ es par}\end{cases}$$

$$= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}n+1)}$$

y se concluye que $V_n(a) = \dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}a^n}{\Gamma(\frac{1}{2}n+1)}$.

d) Es claro que:

$$V_n(1) = \int_{-1}^1\left(\int\limits_{x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2\leq 1-x_n^2}\cdots\int dx_1\cdots dx_{n-1}\right)dx_n = \int_{-1}^1\left(V_{n-1}(\sqrt{1-x_n^2})\right)dx_n$$

$$= \int_{-1}^1 \left(1-x_n^2\right)^{\frac{1}{2}(n-1)} V_{n-1}(1)dx_n = V_{n-1}(1)2\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}(n-1)}dx$$

$$= 2V_{n-1}(1)\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}(n-1)}dx.$$

e) Sabemos que $V_n(1) = \dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}n+1)}$, entonces $\dfrac{V_n(1)}{2V_{n-1}(1)} = \displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}(n-1)}dx$.

Consideremos el cambio de variable $x = \operatorname{sen} t$, $dx = \cos t\, dt$, entonces:

$$\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}(n-1)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\operatorname{sen}^2 t)^{\frac{1}{2}(n-1)} \cos t\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} t \cos t\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\, dt,$$

por lo que:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\, dt = \frac{V_n(1)}{2V_{n-1}(1)} = \frac{\dfrac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{1}{2}n+1)}}{\dfrac{2\pi^{\frac{1}{2}(n-1)}}{\Gamma(\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}+1)}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(n+1))}{\Gamma(\frac{1}{2}n+1)}.$$

3.9 Integrales impropias dependiendo de un parámetro

68. Determinar $f'(x)$, si $f(x) = \displaystyle\int_a^{\alpha(x)} g(x,y)\, dy$, donde g es de clase C^1 y $\alpha(x)$ es derivable.

Solución Tenemos que: $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_a^{\alpha(x+h)} g(x+h,y)\, dy - \dfrac{1}{h}\int_a^{\alpha(x)} g(x,y)\, dy =$
$\displaystyle\int_a^{\alpha(x)} \frac{g(x+h,y)-g(x,y)}{h} dy + \int_{\alpha(x)}^{\alpha(x+h)} \frac{g(x+h,y)-g(x,y)\, dy}{h} + \frac{1}{h}\int_{\alpha(x)}^{\alpha(x+h)} g(x,y)\, dy =$
$\displaystyle\int_a^{\alpha(x)} \frac{\partial g}{\partial x}(\zeta_1,y)\, dy + \int_{\alpha(x)}^{\alpha(x+h)} \frac{\partial g}{\partial x}(\zeta_2,y)\, dy + g(x,t_1)\frac{\alpha(x+h)-\alpha(x)}{h}$, con ζ_1, entre x y $x+h$, ζ_2 entre x y $x+h$, t_1 entre $\alpha(x)$ y $\alpha(x+h)$. Así:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \int_a^{\alpha(x)} \frac{\partial g}{\partial x}(\zeta_1,y)\, dy + \frac{\partial g}{\partial x}(\zeta_2,t_2)(\alpha(x+h)-\alpha(x)) + g(x,t_1)\frac{\alpha(x+h)-\alpha(x)}{h},$$

con t_2 entre $\alpha(x)$ y $\alpha(x+h)$. Finalmente si $h \to 0$, se concluye que:

$$f'(x) = \int_a^{\alpha(x)} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\, dy + 0 + g(x,\alpha(x))\alpha'(x).$$

69. Determinar $f'(x)$, si $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy^2}\, dy$, $x > 0$.

Solución Aplicando el resultado anterior de modo que $a \to +\infty$, la función g de clase C^1 sea integrable para $y \in [\, x, +\infty\, [$, con $|g(x,y)| \leq h(y) = \mathrm{e}^{-y^2}$, si $y \geq 1$, $x \geq 1$ y h integrable, tenemos que f es derivable y la fórmula anterior es válida:

$$f'(x) = -\int_x^{+\infty} y^2 \mathrm{e}^{-xy^2}\, dy - \mathrm{e}^{-x^3}.$$

70. Demostrar que la función $g(x,y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\, f(z)}{x^2+(y-z)^2}\, dz$, satisface la ecuación de Laplace $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$.

Solución Se tiene que $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(z)(x^2+(y-z)^2-2x^2)}{(x^2+(y-z)^2)^2}\,dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(y-z)^2-x^2}{(x^2+(y-z)^2)^2}\,dz$,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-2x(x^2+(y-z)^2)^2 - 2(x^2+(y-z)^2)(2x)((y-z)^2x^2)}{(x^2+(y-z)^2)^4} f(z)\,dz,$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^3-6x(y-z)^2}{(x^2+(y-z)^2)^3} f(z)\,dz,$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-2x(y-z)f(z)}{(x^2+(y-z)^2)^2}\,dz,$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-2xf(z)(x^2+(y-z)^2)^2 + 2((x^2+(y-z)^2)^2(2(y-z))2x(y-z)f(z)}{(x^2+(y-z)^2)^4}\,dz$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-2x(x^2+(y-z)^2)+8x(y-z)^2}{(x^2+(y-z)^2)^3} f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-2x^3+6x(y-z)^2}{(x^2+(y-z)^2)^3} f(z)\,dz.$$

Finalmente, $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$.

71. La transformada de Laplace $F(p)$ de la función $f(t)$, se determina por la expresión $F(p) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)\,dt$. Determinar la transformada de las siguientes funciones:

a) $f(t) = 1$

b) $f(t) = e^{\alpha t}$

c) $f(t) = \operatorname{sen} \beta t$

d) $f(t) = \cos \beta t$.

Solución

a) $F(p) = -\dfrac{1}{p}\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-pt}(-p\,dt) = \frac{1}{p}e^{-pt}\Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{p}(-1) = \frac{1}{p}$.

b) $F(p) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-(p-\alpha)t}\,dt = \begin{cases} \dfrac{1}{p-\alpha} & \text{si } p > \alpha \\ \infty & \text{si } p \le \alpha. \end{cases}$

Se sabe que:
$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = e^{ax}(a\cos bx + b\operatorname{sen} bx)/(a^2+b^2) + C$$
$$\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx = e^{ax}(a\operatorname{sen} bx - b\cos bx)/(a^2+b^2) + C,$$

por lo que:

c) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-pt}\operatorname{sen}\beta t\,dt = \frac{\beta}{p^2+\beta^2}$.

d) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-pt}\cos\beta t\,dt = \frac{p}{p^2+\beta^2}$

72. Sabiendo que $\displaystyle\int_0^1 x^{n-1}\,dx = \frac{1}{n}$ para $n > 0$, calcular $\displaystyle\int_0^1 x^{n-1}\ln x\,dx$.

Solución Sabemos que $\displaystyle\int_{\varepsilon}^1 x^{n-1}\ln x\,dx = \frac{1}{n}x^n\ln x\Big|_{\varepsilon}^1 - \int_{\varepsilon}^1 \frac{x^n}{n}\frac{1}{x}\,dx =$

$\frac{1}{n}\varepsilon^n \ln\varepsilon - \frac{1}{n}\int_\varepsilon^1 x^{n-1}\,dx \longrightarrow 0 - \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n} = -\frac{1}{n^2}$, si $\varepsilon \to 0$.

73. Sabiendo que $\int_0^\infty e^{-pt}\,dt = \frac{1}{p}$, $p > 0$, calcular $\int_0^\infty t^2 e^{-pt}\,dt$.

Solución Sea $F(p) = \int_0^\infty e^{-pt}\,dt = \frac{1}{p} \Longrightarrow F'(p) = -\frac{1}{p^2} = \int_0^\infty -te^{-pt}\,dt \Longrightarrow F''(p) = \int_0^\infty t^2 e^{-pt}\,dt = \frac{2}{p^3}$.

74. Usando derivación respecto al parámetro, calcular las siguientes integrales:

a) $\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\,dx$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$

b) $\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\operatorname{sen} mx\,dx$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$

c) $\int_0^\infty \frac{\arctan \alpha x}{x(1+x^2)}\,dx$

d) $\int_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx$, $|\alpha| < 1$

e) $\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\operatorname{sen}\beta x}{x}\,dx$, $\alpha \geq 0$.

Solución

a) Sea $F(\alpha,\beta) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\,dx$, $\frac{\partial F}{\partial \alpha} = -\int_0^\infty e^{-\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty e^{-\alpha x}(-\alpha\,dx) = \frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x}\Big|_0^\infty = \frac{1}{\alpha}$, por lo tanto $F(\alpha,\beta) = \ln\alpha + c(\beta)$, pero $F(\alpha,\alpha) = 0 = \ln\alpha + c(\alpha) \Longrightarrow c(\alpha) = -\ln\alpha$, por lo que $F(\alpha,\beta) = \ln\alpha - \ln\beta = \ln\frac{\alpha}{\beta}$.

b) Sea $F(\alpha,\beta,m) = \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\operatorname{sen} mx\,dx$, $\frac{\partial F}{\partial\alpha} = -\int_0^\infty e^{-\alpha x}\operatorname{sen} mx\,dx = -\frac{m}{m^2+\alpha^2} \therefore$ $F(\alpha,\beta,m) = -\arctan\frac{\alpha}{m} + c(\beta,m)$, pero $F(\alpha,\alpha,m) = 0 = -\arctan\frac{\alpha}{m} + c(\alpha,m)$, por lo que $F(\alpha,\beta,m) = -\arctan\frac{\alpha}{m} + \arctan\frac{\beta}{m}$.

c) Sea $F(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\arctan\alpha x}{x(1+x^2)}\,dx$,

$F'(\alpha) = \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^2\alpha^2)} = \left(\frac{\alpha\arctan(\alpha x)}{\alpha^2-1} - \frac{\arctan x}{\alpha^2-1}\right)\Bigg|_0^\infty = \frac{\alpha\frac{\pi}{2}}{\alpha^2-1} - \frac{\frac{\pi}{2}}{\alpha^2-1} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\alpha+1}$, ya que $\frac{1}{(1+x^2)(1+x^2\alpha^2)} = \frac{\alpha^2}{(\alpha^2-1)(\alpha^2x^2+1)} - \frac{1}{(x^2+1)(\alpha^2-1)}$.

Así se tiene que $F(\alpha) = \frac{\pi}{2}\ln(\alpha+1) + c$, pero $F(0) = 0 = c \Longrightarrow F(\alpha) = \frac{\pi}{2}\ln(\alpha+1)$.

d) Sea $F(\alpha) = \int_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx$, $F'(\alpha) = -\int_0^1 \frac{2\alpha\,dx}{(1-\alpha^2x^2)\sqrt{1-x^2}} = -2\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1-\alpha^2\operatorname{sen}^2\theta}$, usando $x = \operatorname{sen}\theta$, $dx = \cos\theta\,d\theta$. Así usando la sustitución $t = \tan\theta$, $\operatorname{sen}^2\theta = \frac{t^2}{1+t^2}$,

$d\theta = \dfrac{dt}{1+t^2}$, por lo que:

$$F'(\alpha) = 2\alpha \int_0^\infty \frac{dt}{(1+(1-\alpha^2)t^2)} = -\frac{2\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{1-\alpha^2}\,dt}{(1+(1-\alpha^2)t^2)} =$$

$$-\frac{2\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \arctan\sqrt{1-\alpha^2}t\Big|_0^\infty = -\frac{2\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}\frac{\pi}{2} = -\frac{\alpha\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}} \Longrightarrow$$

$$F(\alpha) = \frac{1}{2}\int \frac{-2\alpha\pi\, d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} = \pi\sqrt{1-\alpha^2} + c,$$

pero $F(0) = \pi + c = 0$ i.e. $c = -\pi$ y se tiene que $F(\alpha) = \pi(\sqrt{1-\alpha^2} - 1)$.

e) Sea $F(\alpha,\beta) = \displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha x}\frac{\operatorname{sen}\beta x}{x}\,dx$, $\dfrac{\partial F}{\partial \alpha} = -\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha x}\operatorname{sen}\beta x\,dx = -\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2} \Longrightarrow$

$F(\alpha,\beta) = -\arctan\dfrac{\alpha}{\beta} + c(\beta)$. Además $\dfrac{\partial F}{\partial \beta} = \displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha x}\cos\beta x\,dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} \Longrightarrow$

$F(\alpha,\beta) = \arctan\dfrac{\beta}{\alpha} + c_1(\alpha) = -\arctan\dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\pi}{2} + c_1(\alpha)$, es decir $c(\beta) = \dfrac{\pi}{2} + c_1(\alpha)$, o sea $c = \dfrac{\pi}{2} + c_1$, pero $F(\alpha,0) = 0 = 0 + \dfrac{\pi}{2} + c_1 \Longrightarrow c = 0$.

Finalmente $F(\alpha,\beta) = -\arctan\dfrac{\alpha}{\beta} = \arctan\dfrac{\beta}{\alpha} - \dfrac{\pi}{2}$.

3.10 Integrales dependientes de un parámetro

75. Determinar el dominio de la función $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{x^2+z^2}}$.

Solución La función $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{x^2+z^2}} = \ln(z+\sqrt{x^2+z^2})\Big|_0^1 = \ln(1+\sqrt{x^2+1}) - \ln|x|$, por lo que el dominio es $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

76. Calcular la curvatura de la curva $y = \displaystyle\int_\pi^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}\alpha x}{\alpha}\,d\alpha$ en el punto en que $x = 1$.

Solución La función $y = \displaystyle\int_\pi^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}\alpha x}{\alpha}\,d\alpha$ cumple que $y' = \displaystyle\int_\pi^{2\pi}\cos\alpha x\,dx = \operatorname{sen}2\pi x - \operatorname{sen}\pi x$, $y'' = 2\pi\cos 2\pi x - \pi\operatorname{sen}\pi x$ i.e. $y'(1) = 0$, $y'' = 3\pi$, por lo que la curvatura κ es:

$$\kappa = \frac{y''}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}} = 3\pi.$$

77. Usando la igualdad $\displaystyle\int_0^b \frac{dx}{1+ax} = \frac{1}{a}\ln(1+ab)$, obtener la fórmula siguiente derivando respecto al parámetro:

$$\int_0^b \frac{x\,dx}{(1+ax)^2} = \frac{1}{a^2}\ln(1+ab) - \frac{b}{a(1+ab)}.$$

Solución Sea $f(a) = \displaystyle\int_0^b \frac{dx}{1+ax}$, entonces $f'(a) = -\displaystyle\int_0^b \frac{x\,dx}{(1+ax)^2} = -\frac{1}{a^2}\ln(1+ab) + \frac{1}{a}\frac{b}{1+ab}$ i.e. $\displaystyle\int_0^b \frac{x\,dx}{(1+ax)^2} = \frac{1}{a^2}\ln(1+ab) - \frac{1}{a}\frac{b}{1+ab}$.

78. a) Usando la igualdad $\displaystyle\int_0^b \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{b}{a}$, obtener $\displaystyle\int_0^b \frac{dx}{(x^2+a^2)^3}$.

b) Usando la igualdad $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{2a}$, calcular la integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Solución

a) Para la solución de este problema es conveniente usar la fórmula:

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)a^2(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}},$$

que se demuestra fácilmente usando integración por partes. En efecto:

$$J_n = \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2+a^2-x^2}{(a^2+x^2)^n}\,dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{x{\cdot}x\,dx}{(a^2+x^2)^n} =$$
$$\frac{1}{a^2}J_{n-1} - \frac{1}{a^2}\Big(\frac{-x}{2(n-1)a^2(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2n-2}J_{n-1}\Big) =$$
$$\frac{x}{2(n-1)a^2(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-1}J_{n-1}\frac{1}{a^2}.$$

Así, cuando $n=3$ obtenemos:

$$\int_0^b \frac{dx}{(a^2+x^2)^3} = \frac{b}{2{\cdot}2a^2(b^2+a^2)^2} + \frac{3}{4}\frac{1}{a^2}\int_0^b \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} =$$
$$\frac{b}{4a^2(a^2+b^2)^2} + \frac{3}{4a^2}\Big(\frac{b}{2a^2(b^2+a^2)} + \frac{1}{2a^2}\int_0^b \frac{dx}{a^2+x^2}\Big) =$$
$$\frac{b}{4a^2(a^2+b^2)^2} + \frac{3}{4a^2}\Big(\frac{b}{2a^2(a^2+b^2)} + \frac{1}{2a^3}\arctan\frac{b}{a}\Big) = \frac{b}{8a^4}\Big(\frac{3}{ab}\arctan\frac{b}{a} + \frac{5a^2+3b^2}{(a^2+b^2)^2}\Big).$$

b) Tenemos que:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)a^2(a^2+x^2)^{n-1}}\Big|_0^\infty + \frac{2n-3}{2n-2}\frac{1}{a^2}\int_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}} =$$
$$\frac{1}{a^2}\frac{2n-3}{2n-2}\frac{1}{a^2}\frac{2n-5}{2n-4}\int_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-2}} = \cdots = \frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 1}{(2n-2)(2n-4)\cdots 2}\frac{1}{a^{2n-2}}\int_0^\infty \frac{dx}{a^2+x^2} =$$
$$\frac{(2n-3)(2n-5)\cdots 1}{(2n-2)(2n-4)\cdots 2}\frac{\pi}{2a^{2n-1}}.$$

79. Calcular el valor de la integral $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}x^{n-1}\,dx$, $a>0$, $n\in\mathbb{N}^*$.

Solución Primeramente veamos que $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\,dx = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{-ax}\Big|_0^\infty = \frac{1}{a}$.

Tomemos el cambio $du = \mathrm{e}^{-ax}\,dx$, $v = x^{n-1}$ i.e. $u = -\frac{1}{a}\mathrm{e}^{-ax}$, $dv = (n-1)x^{n-2}\,dx$; entonces:

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}x^{n-1}\,dx = -\frac{1}{a}\mathrm{e}^{-ax}x^{n-1}\Big|_0^\infty + \frac{1}{a}(n-1)\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}x^{n-2}\,dx =$$

$$0+\frac{1}{a^2}(n-1)(n-2)\int_0^\infty e^{-ax}x^{n-3}\,dx=\cdots=\frac{(n-1)(n-2)\cdots 1}{a^{n-1}}\int_0^\infty e^{-ax}\,dx=\frac{1}{a^n}(n-1)!.$$

80. Usando la igualdad $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\operatorname{sen}^2 x}=\frac{\pi}{2|ab|}$, determinar $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{(a^2\cos^2 x+b^2\operatorname{sen}^2 x)^2}$.

Solución Sea $f(a)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\operatorname{sen}^2 x}$, entonces $f'(a)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2a\cos^2 x\,dx}{(a^2\cos^2 x+b^2\operatorname{sen}^2 x)^2}=$
$2a\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{(a^2\cos^2 x+b^2\operatorname{sen}^2 x)^2}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2a\operatorname{sen}^2 x\,dx}{(a^2\cos^2 x+b^2\operatorname{sen}^2 x)^2}=$
$2a\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{(a^2\cos^2 x+b^2\operatorname{sen}^2 x)^2}-\frac{1}{2b}f'(b)\Longrightarrow\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{(a^2\cos^2 x+b^2\operatorname{sen}^2 x)^2}=$
$\displaystyle\frac{1}{2a}f'(a)+\frac{1}{2b}f'(b)=\frac{1}{2a}\frac{\pi}{2|a^2b|}+\frac{1}{2b}\frac{\pi}{2|ab^2|}=\frac{\pi(a^2+b^2)}{4|ab|^3}$.

81. Calcular las siguientes integrales derivando respecto al parámetro.

a) $\displaystyle\int_0^\infty\frac{1-e^{-ax}}{xe^x}\,dx$, $a>-1$.

b) $\displaystyle\int_0^\infty\frac{1-e^{-ax^2}}{xe^{x^2}}\,dx$, $a>-1$.

c) $\displaystyle\int_0^1\frac{\arctan ax}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

d) $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx$, $a^2<1$.

e) $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\arctan ax}{x(1+x^2)}\,dx$.

f) $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1-a^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$, $a^2<1$.

g) $\displaystyle\int_0^\pi\frac{\ln(1+a\cos x)}{\cos x}\,dx$, $a^2<1$.

h) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{1+a\operatorname{sen}x}{1-a\operatorname{sen}x}\right)\frac{dx}{\operatorname{sen}x}$, $a^2<1$.

i) $\displaystyle\int_0^\infty\frac{1-e^{-ax^2}}{x^2}\,dx$, $a>0$.

j) $\displaystyle\int_0^\infty\frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x^2}\,dx$, $a>0$, $b>0$.

k) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\operatorname{sen}bx-\operatorname{sen}cx}{x}\,dx$, $a>0$.

l) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\cos bx-\cos cx}{x}\,dx$, $a>0$.

m) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\cos^2 x+b^2\operatorname{sen}^2 x)\,dx$, $a>0$, $b>0$.

Solución

a) Sea $f(a)=\displaystyle\int_0^\infty\frac{1-e^{-ax}}{xe^x}\,dx$, $f'(a)=\displaystyle\int_0^\infty\frac{xe^{-ax}}{xe^x}\,dx-\int_0^\infty e^{-(a+1)x}\,dx=$
$\displaystyle-\frac{1}{a+1}\int_0^\infty e^{-(a+1)x}(-(a+1)\,dx)=-\frac{1}{a+1}e^{-(a+1)x}\Big|_0^\infty=\frac{1}{a+1}\Longrightarrow f(a)=\ln(1+a)+C=$
$\ln(1+a)$, pues $f(0)=C=0$.

b) Si $f(a)=\displaystyle\int_0^\infty\frac{1-e^{-ax^2}}{xe^{x^2}}\,dx$, $f'(a)=\displaystyle\int_0^\infty\frac{x^2e^{-ax^2}}{x^2e^{x^2}}dx=\int_0^\infty xe^{-(a+1)x^2}\,dx=$
$\displaystyle\frac{1}{2}\frac{1}{a+1}\Big(-e^{-(a+1)x^2}\Big)\Big|_0^\infty=\frac{1}{2(a+1)}\ \therefore\ f(a)=\frac{1}{2}\ln(a+1)+C=\frac{1}{2}\ln(a+1)$, dado que $f(0)=C=0$.

c) Tomemos $f(a)=\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan ax}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx$, $f'(a)=\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1+a^2x^2)\sqrt{1-x^2}} \underset{x=\operatorname{sen} t}{=}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+a^2\operatorname{sen}^2 t}\frac{\cos t}{\cos t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+a^2\operatorname{sen}^2 t} =^1 \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\arctan\left(\sqrt{1+a^2}\tan x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+a^2}}$$

$\Longrightarrow f(a)=\frac{\pi}{2}\ln(a+\sqrt{a^2+1})+C=\frac{\pi}{2}\ln(a+\sqrt{a^2+1})$, pues $f(0)=C=0$.

d) Sea $f(a)=\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx$, $f'(a)=\displaystyle\int_0^1 \frac{-2a\,dx}{\sqrt{1-x^2}(1-a^2x^2)} = -2a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{1-a^2\operatorname{sen}^2 t} =$ $-2a\dfrac{1}{\sqrt{1-a^2}}\arctan(\sqrt{1-x^2}\tan x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{-a\pi}{\sqrt{1-a^2}} \Longrightarrow f(a)=\pi\sqrt{1-a^2}+C$ y como $f(0)=\pi+C=0$ i.e. $C=-\pi \Longrightarrow f(a)=\pi(\sqrt{1-a^2}-1)$.

e) Si $f(a)=\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan ax}{x(1+x^2)}\,dx$, $f'(a)=\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(1+a^2x^2)(1+x^2)} =$

$$\int_0^\infty \left(\frac{a^2}{a^2-1}\frac{1}{a^2x^2+1}-\frac{1}{a^2-1}\frac{1}{1+x^2}\right)dx = \left(\frac{a}{a^2-1}\arctan(ax)-\frac{1}{a^2-1}\arctan x\right)\Big|_0^\infty =$$

$$\begin{cases} \left(\dfrac{a}{a^2-1}-\dfrac{1}{a^2-1}\right)\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2(a+1)} & \text{si } a>0 \\ -\dfrac{\pi}{2}\dfrac{a}{a^2-1}-\dfrac{\pi}{2}\dfrac{a}{a^2-1} = \dfrac{\pi}{2(1-a)} & \text{si } a\le 0, \end{cases}$$

por lo tanto $f(a)=\begin{cases} \frac{\pi}{2}\ln(a+1), & \text{si } a>0 \\ -\frac{\pi}{2}\ln(1-a), & \text{si } a\le 0 \end{cases} \Longrightarrow f(a)=\operatorname{signo}(a)\frac{\pi}{2}\ln(1+|a|)$, ya que $f(0)=0$.

f) Tomemos $f(a)=\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-a^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, $f'(a)=\displaystyle\int_0^1 \frac{-2ax^2\,dx}{(1-a^2x^2)\sqrt{1-x^2}} =$

$$\frac{2}{a}\int_0^1 \frac{-a^2x^2\,dx}{(1-a^2x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{a}\int_0^1 \frac{(1-a^2x^2-1)\,dx}{(1-a^2x^2)\sqrt{1-x^2}} =$$

$$\frac{2}{a}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2}{a}\int_0^1 \frac{dx}{(1-a^2x^2)\sqrt{1-x^2}} \underset{x=\operatorname{sen} t}{=} \frac{2}{a}\arcsin x\Big|_0^1 - \frac{2}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t\,dt}{(1-a^2\operatorname{sen}^2 t)\cos t} =$$

$\dfrac{2}{a}\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{2}{a}\arctan(\sqrt{1-a^2}\tan x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi}{a}-\dfrac{\pi}{a}\dfrac{1}{\sqrt{1-a^2}} \Longrightarrow f(a)=\pi\ln a+\pi\ln\dfrac{1+\sqrt{1+a^2}}{a} =$ $\pi\ln(1+\sqrt{1+a^2})+C$, pero[2] como $f(0)=0$, $C=-\ln 2$, es decir $f(a)=\pi\ln\dfrac{1+\sqrt{1+a^2}}{2}$.

g) Sea $f(a)=\displaystyle\int_0^\pi \frac{\ln(1+a\cos x)}{\cos x}\,dx$, $f'(a)=\displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{1+a\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}$, pues:

$\displaystyle\int \frac{dx}{1+a\cos x} = \frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\tan\frac{x}{2}\right)+C$, entonces $f(a)=\pi\arcsin a + C =$

---

[1]Recuerde que $\displaystyle\int \frac{dx}{p^2+q^2\operatorname{sen}^2 ax} = \frac{1}{ap\sqrt{p^2+q^2}}\arctan\frac{\sqrt{p^2+q^2}\tan ax}{p}+C.$

[2]Recuerde que $\displaystyle\int \frac{dx}{p^2-q^2\operatorname{sen}^2 ax} = \frac{1}{ap\sqrt{p^2-q^2}}\arctan\frac{\sqrt{p^2-q^2}\tan ax}{p}+C.$

$\pi \operatorname{arcsen} a$, **ya que** $f(0) = C = 0$.

h) Si $f(a) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1 + a \operatorname{sen} x}{1 - a \operatorname{sen} x}\right)\frac{dx}{\operatorname{sen} x}$, $a^2 < 1$,

$f'(a) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - a \operatorname{sen} x}{1 + a \operatorname{sen} x}\frac{1}{\operatorname{sen} x}\frac{\operatorname{sen} x(1 - a\operatorname{sen} x) + \operatorname{sen} x(1 + a \operatorname{sen} x)}{(1 - a \operatorname{sen} x)^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\,dx}{1 - a^2 \operatorname{sen}^2 x} =$
$\displaystyle\frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \arctan\left(\sqrt{1-a^2}\tan x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\frac{\pi}{2} \therefore f(a) = \frac{\pi}{2}\operatorname{arcsen} a + C = \frac{\pi}{2}\operatorname{arcsen} a$, **pues** $f(0) = C = 0$.

i) Consideremos $f(a) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1 - \mathrm{e}^{-ax^2}}{x^2}\,dx$, $a>0$, **entonces** $f'(a) = \displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \Longrightarrow$ $f(a) = \sqrt{\pi a}C = \sqrt{\pi a}$, **dado que** $f(0) = C = 0$.

j) Sea $f(a, b) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ax^2} - \mathrm{e}^{-bx^2}}{x^2}\,dx$, $a > 0$, $b > 0$, **entonces:**

$\displaystyle\frac{\partial f}{\partial a}(a, b) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2}\,dx = -\sqrt{\frac{\pi}{a}}$, $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial b}(a, b) = \sqrt{\frac{\pi}{b}}$, **por lo que** $f(a, b) = -\sqrt{\pi a} + C_1(b) = \sqrt{\pi b} + C_2(a) = \sqrt{\pi b} - \sqrt{\pi a} = \sqrt{\pi}(\sqrt{b} - \sqrt{a}) + C = \sqrt{\pi}(\sqrt{b} - \sqrt{a})$, **dado que** $f(a, a) = C = 0$.

k) Sea $f(a, b, c) = \displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax}\frac{\operatorname{sen} bx - \operatorname{sen} cx}{x}\,dx$, $a > 0$, **entonces:**

$\displaystyle\frac{\partial f}{\partial b} = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax}\cos bx\,dx = -\frac{(a\cos bx - b \operatorname{sen} bx)}{a^2 + b^2}\mathrm{e}^{-ax}\Big|_0^{\infty} = \frac{a}{a^2 + b^2}$,

$\displaystyle\frac{\partial f}{\partial a} = -\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax}\cos cx\,dx = -\frac{a}{a^2 + c^2}$, **por lo tanto:**

$f(a, b, c) = \arctan\frac{b}{a} + C_1(a, c) = \arctan\frac{c}{a} + C_2(a, b) = \arctan\frac{b}{a} - \arctan\frac{c}{a} + C = \arctan\frac{b}{a} - \arctan\frac{c}{a}$, **pues** $f(a, b, b) = C = 0$.

l) Sea $f(a, b, c) = \displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax}\frac{\cos bx - \cos cx}{x}\,dx$, $a > 0$, **entonces:**

$\displaystyle\frac{\partial f}{\partial b} = \int_0^{\infty} -\mathrm{e}^{-ax}\operatorname{sen} bx\,dx = \frac{b\cos bx + a \operatorname{sen} bx}{a^2 + b^2}\mathrm{e}^{-ax}\Big|_0^{\infty} = -\frac{b}{a^2 + b^2}$,

$\displaystyle\frac{\partial f}{\partial c} = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax}\operatorname{sen} cx\,dx = \frac{c}{a^2 + c^2}$, **o sea** $f(a, b, c) = -\arctan\frac{b}{a} + C_1(a, c) = \arctan\frac{c}{a} + C_2(a, b) = -\arctan\frac{b}{a} + \arctan\frac{c}{a} + C = -\arctan\frac{b}{a} + \arctan\frac{c}{a}$, **pues** $C = 0$ **porque** $f(a, b, b) = 0$.

m) Tomemos $f(a, b) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(a^2\cos^2 x + b^2 \operatorname{sen}^2 x\right)dx$, **entonces:**

$\displaystyle\frac{\partial f}{\partial a} = 2a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x\,dx}{b^2 \operatorname{sen}^2 x + a^2\cos^2 x} = 2a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 x\,dx}{(a^2 + b^2\tan^2 x)\sec^2 x} =$

$\displaystyle 2a\int_0^{\infty} \frac{dt}{(a^2 + b^2t^2)(1 + t^2)} = \int_0^{\infty}\left(\frac{2a}{(a^2 - b^2)(t^2 + 1)} - \frac{2ab^2}{(a^2 - b^2)(a^2t^2 + a^2)}\right)dt =$

$\left(\dfrac{2a\arctan t}{a^2-b^2}-\dfrac{2ab}{a^2-b^2}\arctan\dfrac{bt}{a}\right)\Big|_0^\infty=\dfrac{\pi}{2}\dfrac{2}{a^2-b^2}(a-b)=\dfrac{\pi}{a+b}\Longrightarrow f(a,b)=\pi\ln(a+b)+C_1(b)$.

Similarmente $\dfrac{\partial f}{\partial b}=2b\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{sen}^2 x\,dx}{a^2\cos^2 x+b^2\operatorname{sen}^2 x}=2b\int_0^\infty\dfrac{dt}{(b^2+a^2t^2)(1+t^2)}=\dfrac{\pi}{a+b}\Longrightarrow$ $f(a,b)=\pi\ln(a+b)+C_2(a)$ i.e. $f(a,b)=\pi\ln(a+b)+C$ y dado que $f(1,1)=0\Longrightarrow C=-\pi\ln 2$ i.e. $f(a,b)=\pi\ln\dfrac{a+b}{2}$.

82. Calcular la integral $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}\,dx$, para luego determinar $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\tan x}\,dx$.

Solución Sea $f(a)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan a(\tan x)}{\tan x}\,dx$, $f'(a)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+a^2\tan^2 x}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{a+1} & \text{si } a>0,\\[2mm] \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{a-1} & \text{si } a<0,\end{cases}$

(ver ejercicio 81 m), página 211, entonces $f(a)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}\ln(a+1) & \text{si } a>0,\\[2mm] -\dfrac{\pi}{2}\ln(1-a) & \text{si } a\le 0.\end{cases}$

En el caso en que $a=1$, tenemos que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(\tan x)}{\tan x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\tan x}\,dx=\frac{\pi}{2}\ln 2$.

83. Usar la igualdad $\displaystyle\int_0^1 x^n\,dx=\frac{1}{n+1}$, para calcular la integral $\displaystyle\int_0^1\frac{x^\beta-x^a}{\ln x}\,dx$, $\alpha>-1$, $\beta>-1$.

Solución Recordemos que $\dfrac{d}{da}a^\beta=\dfrac{a^\beta}{\ln a}$; entonces si integramos desde α hasta β la integral en cuestión tenemos:

$$\int_\alpha^\beta\left(\int_0^1 x^n\,dx\right)dn=\int_\alpha^\beta\frac{1}{n+1}dn=\ln\frac{\beta+1}{\alpha+1}=\int_0^1\left(\int_\alpha^\beta x^n dn\right)dx=\int_0^1\frac{x^\beta-x^\alpha}{\ln x}\,dx.$$

84. Usando que $2a\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-a^2x^2}\,dx=\sqrt{\pi}$, calcular la integral $\displaystyle\int_0^\infty\left(\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{x^2}}-\mathrm{e}^{-\frac{b^2}{x^2}}\right)dx$.

Solución Es claro que $2\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(ax)^2}(a\,dx)=\sqrt{\pi}$, entonces si definimos la función $f(a,b)=\displaystyle\int_0^\infty\left(\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{x^2}}-\mathrm{e}^{-\frac{b^2}{x^2}}\right)dx$, $\dfrac{\partial f}{\partial a}=\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\left(\frac{a}{x}\right)^2}\frac{-2a}{x^2}\,dx$, $\dfrac{\partial f}{\partial b}=\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\left(\frac{b}{x}\right)^2}\frac{2b}{x^2}\,dx$.

Haciendo $u=\dfrac{a}{x}$, $du=-\dfrac{a}{x^2}\,dx$, entonces $\dfrac{\partial f}{\partial a}=2\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-u^2}du=\sqrt{\pi}$, $\dfrac{\partial f}{\partial b}=-2\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-u^2}du=-\sqrt{\pi}$, y la función $f(a,b)=a\sqrt{\pi}+C_1(b)=-b\sqrt{\pi}+C_2(a)=\sqrt{\pi}(a-b)+C$ y como $f(a,a)=C=0$, se tiene $f(a,b)=\sqrt{\pi}(a-b)$.

85. Dada la relación $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-z^2}\,dz=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, usarla para deducir $\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-z^2x}\,dx$. Usar los resultados para calcular las integrales de Fresnel.

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{x}}$ b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}\,dx.$

Solución Sabemos que $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-z^2}\,dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, entonces $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-z^2x}\,dz = \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-z^2x}\sqrt{x}\,dz =$ $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-u^2}\,du = \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{\sqrt{\pi}}{2} \implies \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-z^2x}\,dz,\ x>0.$

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^\infty \frac{2}{\sqrt{\pi}}\Big(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-z^2x}\cos x\,dz\Big)dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\Big(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-z^2x}\cos x\,dx\Big)dz =$ $\displaystyle\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{z^2}{1+z^4}\,dz = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{2}\pi}{4} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, ya que:

$\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}$ y que

$\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\Big(\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}\Big) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(x\sqrt{2}+1) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(x\sqrt{2}-1) + C.$

b) Similarmente, $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^\infty \frac{2}{\sqrt{\pi}}\Big(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-z^2x}\operatorname{sen} x\,dz\Big)dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{dz}{1+z^4} =$ $\displaystyle\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{2}\pi}{4} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, ya que:

$\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\operatorname{sen} bx\,dx = \frac{b}{a^2+b^2}$ y que

$\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\Big(\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\Big) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(x\sqrt{2}+1) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(x\sqrt{2}-1) + C.$

86. Sea f una función continua para $x \geq 0$, tal que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \ell$, entonces si $a>0$, $b>0$:

$$\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = (\ell - f(0))\ln\frac{a}{b}.$$

Usar este resultado en los siguientes casos:

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan ax - \arctan bx}{x}\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-ax^n}-\mathrm{e}^{-bx^n}}{x}\,dx,\ (n>0).$

Solución Consideremos $\displaystyle\int_\epsilon^R \Big(\frac{f(ax)}{x} - \frac{f(bx)}{x}\Big)dx = \int_\epsilon^R \frac{f(ax)}{ax}a\,dx - \int_\epsilon^R \frac{f(bx)}{bx}b\,dx =$ $\displaystyle -\int_{b\epsilon}^{bR}\frac{f(u)}{u}du + \int_{a\epsilon}^{R\epsilon}\frac{f(u)}{u}\,du = -\int_{aR}^{bR}\frac{f(u)}{u}du + \int_{a\epsilon}^{b\epsilon}\frac{f(u)}{u}\,du,$

pero $\displaystyle m_R\ln\frac{b}{a} \leq \int_{aR}^{bR}\frac{f(u)}{u}du \leq M_R\ln\frac{b}{a}$, donde $m_R = \inf\limits_{x\in[\,Ra,Rb\,]} f(x)$, $M_R = \sup\limits_{x\in[\,Ra,Rb\,]} f(x)$,

$\displaystyle m_\epsilon\ln\frac{b}{a} \leq \int_{a\epsilon}^{b\epsilon}\frac{f(u)}{u}du \leq M_\epsilon\ln\frac{b}{a}.$

Observemos que $m_\alpha \leq f(x) \leq M_\alpha$ para $x\in[\,\alpha a,\alpha b\,]$, entonces:

$$\lim_{R\to\infty} m_R = \lim_{R\to\infty} M_R = \lim_{x\to\infty} f(x) = \ell,$$

por lo que se tiene $\lim\limits_{R\to\infty}\displaystyle\int_{Ra}^{Rb}\frac{f(u)}{u}\,du = \ell\ln\frac{b}{a}$ y además $\lim\limits_{\epsilon\to 0} m_\epsilon = \lim\limits_{\epsilon\to 0} M_\epsilon = f(0)$ i.e. $\lim\limits_{\epsilon\to 0}\displaystyle\int_{a\epsilon}^{b\epsilon}\frac{f(u)}{u}\,du = f(0)\ln\frac{b}{a}$.

Finalmente $\displaystyle\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = f(0)\ln\frac{b}{a} - \ell\ln\frac{b}{a} = (\ell - f(0))\ln\frac{a}{b}$.

a) Dado $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x = \frac{\pi}{2}$, entonces $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan ax - \arctan bx}{x}\,dx = (\frac{\pi}{2}-0)\ln\frac{a}{b} = \frac{\pi}{2}\ln\frac{a}{b}$.

b) Sea $f(x) = \mathrm{e}^{-x^n}$, cuando $x\to\infty$, $f(x)\longrightarrow 0$ y como $f(\sqrt[n]{a}x) = \mathrm{e}^{-ax^n}$ tenemos:

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-ax^n}-\mathrm{e}^{-bx^n}}{x}\,dx = (0-1)\ln\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{1}{n}\ln\frac{b}{a}.$$

87. Sea f una función continua para $x\geq 0$, tal que $\displaystyle\int_A^\infty \frac{f(x)}{x}\,dx$ converge, para todo $A>0$. Probar que si $a>0$, $b>0$, se tiene que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = f(0)\ln\frac{b}{a}$.

Usar este resultado en los siguientes casos:

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x}\,dx$

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx}{x}\,dx$

d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{b\operatorname{sen} ax - a\operatorname{sen} bx}{x^2}\,dx$

e) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^3 x}{x^2}\,dx$.

Solución Para la demostración observemos que $\displaystyle\int_\epsilon^\infty \frac{f(ax)\,dx}{x}$ siempre existe, lo mismo que la integral $\displaystyle\int_\epsilon^\infty \frac{f(bx)}{x}\,dx$, por lo tanto:

$\displaystyle\int_\epsilon^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = \int_\epsilon^{+\infty}\frac{f(ax)}{ax}a\,dx - \int_\epsilon^{+\infty}\frac{f(bx)}{bx}b\,dx = \int_{a\epsilon}^\infty f(u)du - \int_{b\epsilon}^\infty f(u)du = \int_{a\epsilon}^{b\epsilon} f(u)udu \Longrightarrow m_\epsilon\int_{a\epsilon}^{b\epsilon}\frac{du}{u} \leq \int_{a\epsilon}^{b\epsilon}\frac{f(u)}{u}du \leq M_\epsilon\int_{a\epsilon}^{b\epsilon}\frac{du}{u}$, es decir:

$$m_\epsilon\ln\frac{b}{a} \leq \int_{a\epsilon}^{b\epsilon}\frac{f(u)}{u}\,du \leq M_\epsilon\ln\frac{b}{a},$$

donde $m_\epsilon = \inf\limits_{x\in[\,\epsilon a,\epsilon b\,]} f(x)$, $M_\epsilon = \sup\limits_{x\in[\,\epsilon a,\epsilon b\,]} f(x)$, pero $\lim\limits_{\epsilon\to 0} m_\epsilon = \lim\limits_{\epsilon\to 0} M_\epsilon = f(0)$, por lo que:

$$\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

a) Sea $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$, sabemos que $\displaystyle\int_A^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}}{x}\,dx$ converge $\forall A>0$, entonces:

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\,dx = f(0)\ln\frac{b}{a} = \ln\frac{b}{a}.$$

b) Si $f(x) = \cos x$, $\displaystyle\int_A^{\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx$ converge $\forall\, A > 0$, pues:

$$\int_A^B \frac{\cos x}{x}\,dx = \frac{\operatorname{sen} x}{x}\Big|_A^B + \int_A^B \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\,dx \longrightarrow -\frac{\operatorname{sen} A}{A} + \int_A^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx,$$

cuando $B \to \infty$, por lo tanto $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x}\,dx = f(0)\ln\frac{b}{a} = \ln\frac{b}{a}$.

c) Se tiene que $\operatorname{sen} ax \cdot \operatorname{sen} bx = \dfrac{1}{2}(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x)$; si definimos $f(x) = \dfrac{1}{2}\cos x$ obtenemos:

$$\int_0^{\infty} \frac{f((a-b)x) - f((a+b)x)}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{\cos(a-b)x - \cos(a+b)x}{x} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{b+a}{a-b}\right|.$$

d) Sea $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$, como $\displaystyle\int_A^{\infty} \frac{f(x)}{x}\,dx = \int_A^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\,dx$ converge, $\forall\, A>0$ y como $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, se tiene que $ab\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\frac{\operatorname{sen} ax}{ax} - \frac{\operatorname{sen} bx}{bx}}{x}\,dx = ab\,f(0)\ln\frac{b}{a} = ab\ln\frac{b}{a}$.

e) Sabemos que $\operatorname{sen}^3 x = \dfrac{3}{4}\operatorname{sen} x - \dfrac{1}{4}\operatorname{sen} 3x$, entonces definiendo $f(x) = \dfrac{3}{4}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$, tenemos que $f(3x) = \dfrac{1}{4}\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x} \Longrightarrow \dfrac{\operatorname{sen}^3 x}{x^2} = \dfrac{\frac{3}{4}\frac{\operatorname{sen} x}{x} - \frac{1}{4}\frac{\operatorname{sen} 3x}{x}}{x} = \dfrac{f(x) - f(3x)}{x}$, por lo tanto:

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^3 x}{x^2}\,dx = f(0)\ln\frac{3}{1} = \frac{3}{4}\ln 3.$$

88. Verificar que la función de Laplace $\Phi(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$, satisface las siguientes relaciones:

a) $\displaystyle\int_0^x \Phi(az)\,dz = \frac{e^{-a^2x^2} - 1}{a\sqrt{\pi}} + x\Phi(ax)$.

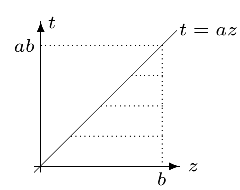
b) $\displaystyle\int_0^{\infty} (1 - \Phi(x))\,dx = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Solución

a) Escribamos $\displaystyle\int_0^b \Phi(az)\,dz = \int_0^b \Big(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{az} e^{-t^2}\,dt\Big)\,dz =$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{ab}\Big(\int_{\frac{t}{a}}^b e^{-t^2}\,dz\Big)dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\Big(\int_0^{ab} b e^{-t^2}\,dt - \int_0^{ab} \frac{t}{a} e^{-t^2}\,dt\Big) =$$

$$b\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{ab} e^{-t^2}\,dt + \frac{1}{\sqrt{\pi}a} e^{-t^2}\Big|_0^{ab} = b\Phi(ab) + \frac{1}{\sqrt{\pi}a}\Big(e^{-a^2b^2} - 1\Big).$$



Sustituyendo b por x tenemos $\displaystyle\int_0^x \Phi(az)\,dz = \frac{1}{\sqrt{\pi}a}\Big(e^{-a^2x^2} - 1\Big) + x\Phi(ax)$.

b) $\displaystyle\int_0^b \Phi(az)\,dz - b\Phi(ab) = \int_0^b \Phi(az)\,dz - \int_0^b \Phi(ab)\,dz = -\int_0^b (\Phi(ab) - \Phi(az))\,dz = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(e^{-a^2b^2} - 1)$.

Si $a=1$, se tiene que $\displaystyle\int_0^b (\Phi(b)-\Phi(z))\,dz = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(1-e^{-b^2})$.

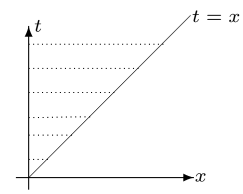
Si $b\to\infty$, $\Phi(b)\longrightarrow 1$ y $e^{-b^2}\longrightarrow 0$, por lo tanto:

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^b \big(\Phi(b)-\Phi(z)\big)\,dz = \int_0^\infty \big(1-\Phi(z)\big)\,dz = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\lim_{b\to\infty}\big(1-e^{-b^2}\big) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

89. Las funciones $\operatorname{si}(x)$ y $\operatorname{ci}(x)$ se definen por $\operatorname{si}(x) = -\displaystyle\int_x^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$ (seno integral) y por $\operatorname{ci}(x) = -\displaystyle\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt$ (coseno integral). Demostrar que $\displaystyle\int_0^\infty \operatorname{sen} x\operatorname{si}(x)dx = -\int_0^\infty \cos x\operatorname{ci}(x)dx = \frac{\pi}{4}$.

Solución

a) Observemos que:



$$-\int_0^\infty \operatorname{sen} x\Big(\int_x^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt\Big)dx = -\int_0^\infty \Big(\int_0^t \operatorname{sen} x\frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dx\Big)dt =$$

$$\int_0^\infty (\cos t-1)\frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt = \int_0^\infty \Big(\frac{\operatorname{sen} t\cos t}{t} - \frac{\operatorname{sen} t}{t}\Big)dt =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} 2t}{2t}2\,dt - \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} u}{u}du - \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} u}{u}\,du = -\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} u}{u}\,du = -\frac{\pi}{4},$$

ya que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

b) $$-\int_0^\infty \cos x\Big(\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt\Big)dx = -\int_0^\infty \Big(\int_0^t \cos x\frac{\cos t}{t}\,dx\Big)dt = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} t\cos t}{t}\,dt =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} 2t}{2t}2\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} u}{u}\,du = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

90. La función de Bessel de orden cero es $J_0(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\operatorname{sen}\theta)d\theta$. Demostrar que:

a) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}J_0(x)dx = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$, $a>0$.

b) $$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} ax}{x}J_0(x)dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si} \quad a\ge 1 \\ \operatorname{arcsen} a & \text{si} \quad |a|\le 1 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si} \quad a\le -1. \end{cases}$$

Solución

a) Se tiene que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}J_0(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-ax}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\operatorname{sen}\theta)d\theta\right)dx =$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^\infty e^{-ax}\cos(x\operatorname{sen}\theta)dx\right)d\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a\,d\theta}{a^2+\operatorname{sen}^2\theta} =$$

$$\frac{2}{\pi}\frac{a}{a\sqrt{a^2+1}}\arctan\frac{\sqrt{a^2+1}\tan x}{a}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}},\ a>0.$$

b) Sea $I = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} ax}{x} J_0(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} ax \cos(x \operatorname{sen}\theta)}{x}\, dx\right) d\theta =^3$

$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^\infty \left(\frac{\operatorname{sen}(a-\operatorname{sen}\theta)x}{x} + \frac{\operatorname{sen}(a+\operatorname{sen}\theta)x}{x}\right) dx\right) d\theta.$

Si $a > 1$, $a - \operatorname{sen}\theta > 0$, $a + \operatorname{sen}\theta > 0$, entonces:

$I = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(a-\operatorname{sen}\theta)x}{(a-\operatorname{sen}\theta)x}(a-\operatorname{sen}\theta)\, dx + \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(a+\operatorname{sen}\theta)x}{(a+\operatorname{sen}\theta)x}(a+\operatorname{sen}\theta)\, dx\right) d\theta =$

$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} u}{u}\, du + \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} u}{u}\, du\right) d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) d\theta = \frac{\pi}{2}.$

Si $a < 1$, $a - \operatorname{sen}\theta < 0$, $a + \operatorname{sen}\theta < 0$, entonces:

$I = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(-u)}{u}\, du + \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(-u)}{u}\, du\right) d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right) d\theta = -\frac{\pi}{2}.$

Si $0 \le a \le 1$ se tiene que:

$a - \operatorname{sen}\theta > 0$, si $0 < \theta < \operatorname{arcsen} a$,

$a - \operatorname{sen}\theta < 0$, si $\operatorname{arcsen} a < \theta < \frac{\pi}{2}$,

$a + \operatorname{sen}\theta > 0$, si $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, entonces:

$I = \frac{1}{\pi}\Big(\int_0^{\operatorname{arcsen} a} \frac{\pi}{2}\, d\theta + \int_{\operatorname{arcsen} a}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(-u)}{u}\, du\, d\theta + \int_{\operatorname{arcsen} a}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} u}{u}\, du\, d\theta +$

$\int_0^{\operatorname{arcsen} a} \frac{\pi}{2}\, d\theta\Big) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\operatorname{arcsen} a + 0 + \frac{\pi}{2}\operatorname{arcsen} a\right) = \operatorname{arcsen} a.$

De manera similar se analiza el caso $-1 \le a \le 0$.

91. Verificar que las siguientes funciones satisfacen las ecuaciones diferenciales dadas:

a) $f(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-xz}}{1+z^2}\, dz$, $y'' + y = \frac{1}{x}$.

b) $f(x) = \int_{-1}^1 \left(z^2-1\right)^{n-1} e^{xz}\, dz$, $xy'' + 2ny' - xy = 0$.

c) $f(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-xz}}{\left(1+z^2\right)^{n+1}}\, dz$, $xy'' - 2ny + xy = 1$.

d) $J_0(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\operatorname{sen}\theta)d\theta$, $y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0$.

Solución

a) Sea $y = \int_0^\infty \frac{e^{-xz}}{1+z^2}\, dz$, $y' = \int_0^\infty \frac{-ze^{-xz}}{1+z^2}\, dz$,

[3] $\operatorname{sen}\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(\alpha-\beta) + \operatorname{sen}(\alpha+\beta))$

$y'' = \int_0^{\infty} \frac{z^2 \mathrm{e}^{-xz}}{1+z^2}\,dz = \int_0^{\infty} \frac{\left(1+z^2\right)\mathrm{e}^{-xz} - \mathrm{e}^{-xz}}{1+z^2}\,dz =$

$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-xz}\frac{(-x)dz}{-x} - \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xz}}{1+z^2}\,dz = -\frac{1}{x}\mathrm{e}^{-xz}\Big|_0^{\infty} - y = \frac{1}{x} - y \Longrightarrow y'' + y = \frac{1}{x}.$

b) Sea $y = \int_{-1}^{1} \left(z^2-1\right)^{n-1}\mathrm{e}^{xz}\,dz$, $y' = \int_{-1}^{1} \left(z^2-1\right)^{n-1} z\mathrm{e}^{xz}\,dz$,

$y'' = \int_{-1}^{1} \left(z^2-1\right)^{n-1} z^2\mathrm{e}^{xz}\,dz$, entonces:

$xy'' = \int_{-1}^{1} \left(z^2-1\right)^{n-1} z^2 x\mathrm{e}^{xz}\,dz$, $2ny' = \int_{-1}^{1} \left(z^2-1\right)^{n-1} 2n\mathrm{e}^{xz}\,dz$, $xy = \int_{-1}^{1} \left(z^2-1\right)^{n-1} x\mathrm{e}^{xz}\,dz$,

$xy'' + 2ny' - xy = \int_{-1}^{1} \left(z^2-1\right)^{n-1}\left(xz^2 + 2nz - x\right)\mathrm{e}^{xz}\,dz =$

$\int_{-1}^{1} x\left(z^2-1\right)^{n}\mathrm{e}^{xz}\,dz + \int_{-1}^{1} 2n\left(z^2-1\right)^{n-1} z\mathrm{e}^{xz}\,dz =$

$\left(z^2-1\right)^{n}\mathrm{e}^{xz}\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} 2n\left(z^2-1\right)^{n-1} z\mathrm{e}^{xz}\,dz + \int_{-1}^{1} 2n\left(z^2-1\right)^{n-1} z\mathrm{e}^{xz}\,dz = 0.$

c) Tomemos $y = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xz}}{\left(1+z^2\right)^{n+1}}\,dz$, $y' = \int_0^{\infty} \frac{-z\mathrm{e}^{-xz}\,dz}{\left(1+z^2\right)^{n+1}}$, $y'' = \int_0^{\infty} \frac{z^2\mathrm{e}^{-xz}\,dz}{\left(1+z^2\right)^{n-1}}$, entonces: $xy'' - 2ny' + xy = \int_0^{\infty} \frac{\left(z^2x + 2zn + x\right)\mathrm{e}^{-xz}}{\left(1+z^2\right)^{n+1}}\,dz =$

$\int_0^{\infty} \frac{\left(z^2+1\right)x}{(z^2+1)^{n+1}}\mathrm{e}^{-xz}\,dz + \int_0^{\infty} \frac{2nz\mathrm{e}^{-xz}\,dz}{\left(z^2+1\right)^{n+1}} = \int_0^{\infty} \frac{x}{(z^2+1)^n}\mathrm{e}^{-xz}\,dz + \int_0^{\infty} \frac{2nz\mathrm{e}^{-xz}\,dz}{\left(z^2+1\right)^{n+1}} =$

$-\frac{\mathrm{e}^{-xz}}{\left(z^2+1\right)^n}\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{2nz\mathrm{e}^{-xz}\,dz}{\left(z^2+1\right)^{n+1}} + \int_0^{\infty} \frac{2nz\mathrm{e}^{-xz}\,dz}{\left(z^2+1\right)^{n+1}} = 1.$

d) Sea $y = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\operatorname{sen}\theta)d\theta$, $y' = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(x\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta d\theta$,

$y'' = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}^2\theta d\theta$, entonces:

$y'' + \frac{1}{x}y' + y = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\operatorname{sen}\theta)\cos^2\theta d\theta + \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}(x\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta\,d\theta}{x} =$

$-\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\operatorname{sen}\theta)\cos^2\theta d\theta + \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\operatorname{sen}(x\operatorname{sen}\theta)\cos\theta}{x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x\operatorname{sen}\theta)x\cos^2\theta}{x}d\theta\right) = 0.$

92. Calcular las siguientes integrales impropias.

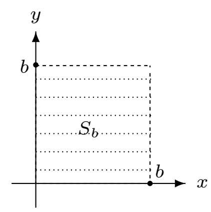
a) $\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-(x+y)}\,dy\right)dx$

b) $\int_0^{1}\left(\int_0^{y^2} \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\,dx\right)dy$

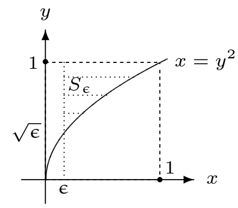
c) $\displaystyle\iint\limits_S \frac{dx\,dy}{x^4+y^2}$, $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x\geq 1, y\geq x^2\}$ d) $\displaystyle\int_0^\infty\left(\int_0^\infty \frac{dy}{(x^2+y^2+a^2)^2}\right)dx$, $a>0$

e) $\displaystyle\int_0^\infty\left(\int_0^\infty\left(\int_0^\infty \frac{dz}{(x^2+y^2+z^2+1)^2}\right)dy\right)dx.$

Solución



a) Sea $S_b = [0,b]\times[0,b]$, entonces $\displaystyle\iint\limits_{S_b} \mathrm{e}^{-(x+y)}\,dx\,dy =$ $\displaystyle\int_0^b\left(\int_0^b \mathrm{e}^{-(x+y)}\,dy\,dx\right) = (-\mathrm{e}^{-y})\Big|_0^b(-\mathrm{e}^{-x})\Big|_0^b =$ $(1-\mathrm{e}^{-b})^2 \longrightarrow 1$, cuando $b\to+\infty$.

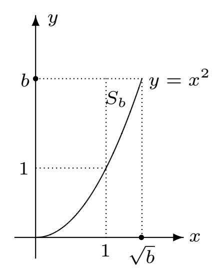


b) Hay problemas cuando $y=0$, por lo tanto tomamos $\varepsilon>0$ y definimos $S_\varepsilon=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/0\leq x\leq y^2,\ \sqrt{\varepsilon}\leq y\leq 1\}$, entonces:

$$\iint\limits_{S_\varepsilon} \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\,dx\,dy = \int_{\sqrt{\varepsilon}}^1\left(\int_0^{y^2} \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\,dx\right)dy = \int_{\sqrt{\varepsilon}}^1 y\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\Big|_0^{y^2}\,dy = \int_{\sqrt{\epsilon}}^1 y(\mathrm{e}^y-1)\,dy =$$

$$y(\mathrm{e}^y-y)\Big|_{\sqrt{\epsilon}}^1 - \int_{\sqrt{\epsilon}}^1(\mathrm{e}^y-y)\,dy = (\mathrm{e}-1)-\sqrt{\epsilon}(\mathrm{e}^{\sqrt{\epsilon}}-\sqrt{\epsilon})-(\mathrm{e}^y-\tfrac{1}{2}y^2)\Big|_{\sqrt{\epsilon}}^1 =$$

$\mathrm{e}-1-\sqrt{\epsilon}(\mathrm{e}^{\sqrt{\epsilon}}-\sqrt{\epsilon})-\mathrm{e}+\frac{1}{2}+\mathrm{e}^{\sqrt{\epsilon}}-\frac{1}{2}\epsilon \longrightarrow \frac{1}{2}$, si $\epsilon\to 0^+$.



c) Consideremos $S_b=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x^2\leq y\leq b, 1\leq x\leq\sqrt{b}\}$,

$$\iint\limits_{S_b}\frac{dy\,dx}{x^4+y^2} = \int_1^{\sqrt{b}}\left(\int_{x^2}^b \frac{1}{x^4+y^2}\,dy\right)dx =$$

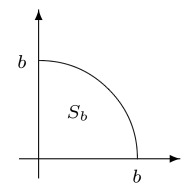
$$\int_1^{\sqrt{b}} \frac{1}{x^2}\arctan\left(\frac{y}{x^2}\right)\Big|_{x^2}^b\,dx = \int_1^{\sqrt{b}}\left(\frac{1}{x^2}\arctan\left(\frac{b}{x^2}\right)-\frac{\pi}{4x^2}\right)dx =$$

$$\Big[-\frac{1}{\sqrt{2b}}\arctan\left(\sqrt{\frac{2}{b}}x+1\right)-\frac{1}{\sqrt{2b}}\arctan\left(\sqrt{\frac{2}{b}}x-1\right)-\frac{1}{x}\arctan\frac{b}{x^2}$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2b}}\ln(x^2+\sqrt{2b}x+b)+\frac{1}{2\sqrt{2b}}\ln(x^2-\sqrt{2b}x+b)+\frac{\pi}{4x}\Big]_1^{\sqrt{b}} =$$

$\displaystyle\arctan b+\frac{1}{\sqrt{2b}}\arctan\left(\sqrt{\frac{2}{b}}+1\right)+\frac{1}{\sqrt{2b}}\arctan\left(\sqrt{\frac{2}{b}}-1\right)+\frac{1}{2\sqrt{2b}}\ln(b+\sqrt{2b}+1)$ $\displaystyle-\frac{1}{2\sqrt{2b}}\ln(b-\sqrt{2b}+1)-\frac{1}{2\sqrt{2b}}\ln(2\sqrt{2}+3)+\left(-\frac{1}{2\sqrt{2b}}-\frac{1}{4}\right)\pi \longrightarrow \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$, cuando $b\to\infty$.

d) Definimos $S_b = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \le b^2, x \ge 0, y \ge 0\}$, entonces:

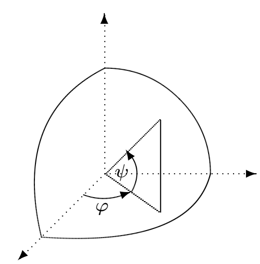


$$\iint\limits_{S_b} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2+a^2)^2} = \int_0^b \left(\int_0^{\sqrt{b^2-x^2}} \frac{dy}{(x^2+y^2+a^2)} \right) dx =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} \int_0^b \frac{2r\,dr}{(r^2+a^2)^2} \right) d\theta = \frac{\pi}{4} \left(-\frac{1}{r^2+a^2} \right)\Bigg|_0^b = \frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^2+b^2} \right) \longrightarrow \frac{\pi}{4a^2},$$ cuando $b \to \infty$, (usando coordenadas polares).

e) Sea $V_b = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2+y^2+z^2 \le b^2, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0\}$, y

usando coordenadas esféricas tenemos:



$$\iiint\limits_{V_b} \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2+1)^2} =$$

$$\int_0^b \left(\int_0^{\sqrt{b^2-x^2}} \left(\int_0^{\sqrt{b^2-x^2-y^2}} \frac{dz}{(x^2+y^2+z^2+1)^2} \right) dy \right) dx =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^b \frac{r^2 \cos\psi}{(r^2+1)^2}\, dr \right) d\varphi \right) d\psi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi\, d\psi \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^b \left(\frac{1}{r^2+1} - \frac{1}{(r^2+1)^2} \right) dr =$$

$$\frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} \arctan r - \frac{r}{2(r^2+1)} \right)\Bigg|_0^b = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} \arctan b - \frac{b}{2(b^2+1)} \right) \longrightarrow \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi^2}{8},$$ cuando $b \to \infty$.

93. Determinar la convergencia de las siguientes integrales dobles impropias.

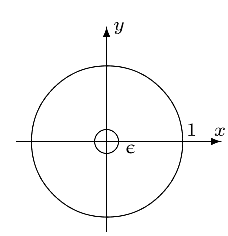
a) $\displaystyle\iint\limits_S \ln\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, S es el círculo $x^2+y^2 \le 1$.

b) $\displaystyle\iint\limits_S \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^\alpha}$, S es la parte exterior del círculo de radio 1 con centro $(0,0)$.

c) $\displaystyle\iint\limits_S \frac{dx\,dy}{\sqrt[3]{(x-y)^2}}$, S es el cuadrado $|x| \le 1$, $|y| \le 1$.

d) $\displaystyle\iiint\limits_V \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}$, V es la parte exterior de la esfera de centro $(0,0,0)$ y radio 1.

Solución



a) El problema se presenta en $(0,0)$, por lo que tomamos $S_\epsilon = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \epsilon^2 \le x^2+y^2 \le 1\}$, $\epsilon > 0$ y usando polares $\displaystyle\iint\limits_{S_\epsilon} \ln\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_\epsilon^1 (\ln r)\, r\, dr \right) d\theta =$

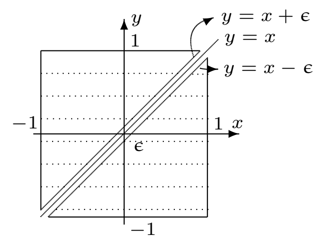
$$2\pi \int_{\epsilon}^{1} r \ln r \, dr = 2\pi \left(\frac{1}{2} r^2 \ln r - \frac{1}{4} r^2 \right) \Big|_{\epsilon}^{1} = 2\pi \Big(-\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \epsilon^2 \ln \epsilon + \frac{\epsilon^2}{4} \Big) \longrightarrow -\frac{\pi}{2}, \text{ cuando } \epsilon \to 0.$$

b) Sea $S_b = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}$; usando coordenadas polares se tiene:

$$\iint\limits_{S_b} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^{\alpha}} = \int_0^{2\pi} \left(\int_1^b \frac{1}{r^{2\alpha-1}} \, dr \right) d\theta = 2\pi \left. \frac{r^{-2\alpha+2}}{-2\alpha+2} \right|_1^b = 2\pi \left(\frac{b^{-2\alpha+2}}{-2\alpha+2} - 1 \right) \longrightarrow -2\pi,$$

cuando $b \to \infty$, sii $-2\alpha + 2 < 0$, o sea $\alpha > 1$.

c) Sea $S_{\epsilon} = S \backslash \Delta_{\epsilon}$, $\epsilon > 0$ como aparece el la figura adjunta,



entonces $\displaystyle\iint\limits_{S_{\epsilon}} \frac{dx\,dy}{\sqrt[3]{(x-y)^2}} =$

$$\int_{-1+\epsilon}^{1} \left(\int_{-1}^{x-\epsilon} \frac{dy}{(x-y)^{2/3}} \right) dx + \int_{-1}^{1-\epsilon} \left(\int_{x+\epsilon}^{1} \frac{dy}{(x-y)^{2/3}} \right) dx =$$

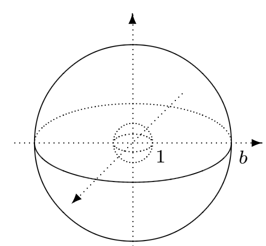
$$\int_{-1+\epsilon}^{1} -3(x-y)^{1/3} \Big|_{-1}^{x-\epsilon} dx + \int_{-1}^{1-\epsilon} -3(x-y)^{1/3} \Big|_{x+\epsilon}^{1} dx =$$

$$\int_{-1+\epsilon}^{1} (3(x+1)^{1/3} - \epsilon^{1/3}) \, dx + \int_{-1}^{1-\epsilon} 3(-\epsilon^{1/3} - (x+1)^{1/3}) \, dx =$$

$$\Big(\tfrac{9}{4}(x+1)^{4/3} - 3x\epsilon^{1/3} \Big) \Big|_{-1+\epsilon}^{1} + \Big(-3x\epsilon^{1/3} - \tfrac{9}{4}(x-1)^{4/3} \Big) \Big|_{1}^{1-\epsilon} =$$

$\frac{3}{4} \left(\epsilon^{4/3} - 8\epsilon^{1/3} + 6\sqrt[3]{2} \right) - 3(1-\epsilon)\epsilon^{1/3} - \frac{9}{4}\epsilon^{4/3} - 3\epsilon^{1/3} + \frac{9}{4} 2^{4/3} \longrightarrow \frac{9}{2}\sqrt[3]{2} + \frac{9}{4} 2^{4/3} = 9\sqrt[3]{2}$, si $\epsilon \to 0$.

d) Tomemos $V_b = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq b^2\}$,



entonces pasando coordenadas esféricas tenemos:

$$\iiint\limits_{V_b} \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha}} = \int_0^{2\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_1^b \frac{r^2 \cos\psi}{r^{2\alpha}} \, dr \right) d\psi \right) d\varphi =$$

$$2\pi \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi \, d\psi \int_1^b \frac{dr}{r^{2\alpha-2}} = 4\pi \left. \frac{r^{-2\alpha+3}}{-2\alpha+3} \right|_1^b = \frac{4\pi}{3-2\alpha} \left(\frac{1}{b^{2\alpha-3}} - 1 \right) \longrightarrow \frac{4\pi}{2\alpha-3} \text{ sii } \alpha > \tfrac{3}{2},$$

cuando $b \to \infty$.

94. Calcular las siguientes integrales dobles impropias.

a) $\displaystyle\iint\limits_{S} \frac{1}{x-y} \, dx\,dy$, $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1\}$.

b) $\displaystyle\iint\limits_{S} \frac{1}{\sqrt{xy}} \, dx\,dy$, $S = [\,0,1\,] \times [\,0,1\,]$.

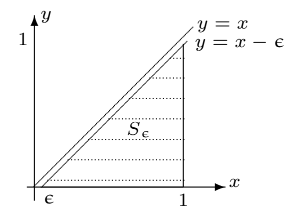
c) $\displaystyle\iint_S \frac{1}{\sqrt{|x-y|}}\,dx\,dy$, $S = [\,0,1\,]\times[\,0,1\,]$.

d) $\displaystyle\iint_S \frac{x}{y}\,dx\,dy$, $S = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/y\le x\le 2y, 0\le y\le 1\}$.

e) $\displaystyle\iint_S \log x\,dx\,dy$, $S = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/0\le x\le e^y, 0\le y\le 1\}$.

Solución

a) Hay un problema que se presenta a lo largo de la recta $x=y$ en S; tomemos S_ϵ, $\epsilon>0$ como aparece en la figura adjunta, entonces:

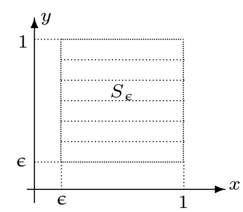


$$\int_{S_\epsilon}\frac{1}{x-y}\,dx\,dy = \int_\epsilon^1\left(\int_0^{x-\epsilon}\frac{1}{x-y}\,dy\right)dx =$$

$$-\int_\epsilon^1 \ln(x-y)\Big|_0^{x-\epsilon}dx = \int_\epsilon^1(\ln x-\ln\epsilon)\,dx = (x\ln x - x - x\ln\epsilon)\Big|_\epsilon^1 = -1-\ln\epsilon+\epsilon \longrightarrow +\infty,$$

si $\epsilon\to 0$, o sea diverge.

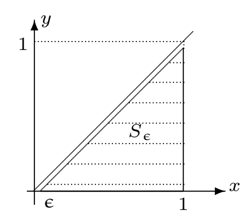
b) Hay un problema en $(0,0)$, entonces consideremos el conjunto $S_\epsilon = [\,\epsilon,1\,]\times[\,\epsilon,1\,]$, $\epsilon>0$:



$$\iint_{S_\epsilon}\frac{1}{\sqrt{xy}}\,dx\,dy = \int_\epsilon^1\left(\int_\epsilon^1\frac{1}{\sqrt{xy}}\,dy\right)dx =$$

$$\int_\epsilon^1\left(\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{2\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{x}}\right)dx = 4(\sqrt{x}-\sqrt{x\epsilon})\Big|_\epsilon^1 = 4(1-\sqrt{\epsilon})^2 \longrightarrow 4, \text{ cuando } \epsilon\to 0.$$

c) Observemos que por razones de simetría, la integral es dos veces la integral sobre el triángulo inferior del cuadrado $[\,0,1\,]\times[\,0,1\,]$. Así, tomamos S_ϵ, $\epsilon>0$ como en la figura adjunta, por lo que:

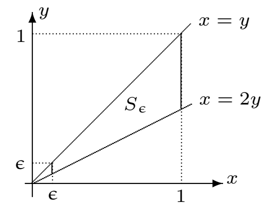


$$\iint_{S_\epsilon}\frac{1}{\sqrt{x-y}}\,dx\,dy = \int_\epsilon^1\left(\int_0^{x-\epsilon}\frac{1}{\sqrt{x-y}}\,dy\right)dx = \int_\epsilon^1 -2\sqrt{x-y}\Big|_0^{x-\epsilon}dx = \int_\epsilon^1(2\sqrt{x}-2\sqrt{\epsilon})\,dx =$$

$$\left(\tfrac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-2x\sqrt{\epsilon}\right)\Big|_\epsilon^1 = \tfrac{4}{3}-2\sqrt{\epsilon}-\tfrac{4}{3}\epsilon^{\frac{3}{2}}+2\epsilon\sqrt{\epsilon} = \tfrac{4}{3}-2\sqrt{\epsilon}+\tfrac{2}{3}\epsilon\sqrt{\epsilon}\longrightarrow\tfrac{4}{3}, \text{ si } \epsilon\to 0.$$

Finalmente, $\displaystyle\iint_S\frac{dx\,dy}{\sqrt{|x-y|}} = 2\cdot\tfrac{4}{3} = \tfrac{8}{3}$.

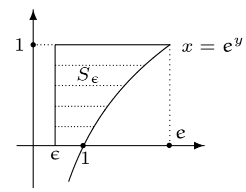
d) Tenemos un problema en $x = 0$, por lo que tomamos la región $S_\epsilon = S \setminus [\,0, \epsilon\,] \times [\,0, \epsilon\,]$, $\epsilon > 0$, entonces:



$$\iint\limits_{S_\epsilon} \frac{y}{x}\, dx\, dy = \int_\epsilon^1 \left(\int_{\frac{x}{2}}^{x} \frac{y}{x}\, dy \right) dx = \int_\epsilon^1 \frac{1}{2} \frac{y^2}{x} \Big|_{\frac{x}{2}}^{x} dx =$$

$$\int_\epsilon^1 \frac{3}{8} x\, dx = \frac{3}{16}(1 - \epsilon^2) \longrightarrow \frac{3}{16}, \text{ si } \epsilon \to 0.$$

e) Sea $S_\epsilon = S \setminus [\,0, \epsilon\,] \times [\,0, 1\,]$ con $\epsilon > 0$, ya que tenemos problemas en $x = 0$, entonces:



$$\int\limits_{S_\epsilon} \ln x\, dx\, dy = \int_0^1 \left(\int_\epsilon^{e^y} \ln x\, dx \right) dy =$$

$$\int_0^1 (x \ln x - x) \Big|_\epsilon^{e^y} dy = \int_0^1 (e^y(y-1) - \epsilon \log \epsilon + \epsilon)\, dy = ((y-2)e^y - y\epsilon \ln \epsilon + \epsilon y) \Big|_0^1 =$$
$$2 - e - \epsilon \ln \epsilon + \epsilon \longrightarrow 2 - e, \text{ si } \epsilon \to 0^+.$$

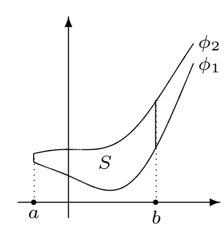
95. a) Indicar la manera de colocar los límites de integración, de la integral doble $\iint\limits_S f(x, y)\, dx\, dy$, si S es la región no acotada $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x),\, x \ge a\}$, donde $\phi_1 \le \phi_2$, si $x \ge a$.

b) Evaluar $\iint\limits_S xy e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$, $S = [\,0, +\infty\,[\times [\,0, 1\,]$.

c) Evaluar $\iint\limits_S e^{-xy}\, dx\, dy$, $S = [\,0, +\infty\,[\times [\,1, 2\,]$. Suponga que el teorema de Fubini se cumple y probar que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^x - e^{-2x}}{x}\, dx = \ln 2$.

Solución

a) En este caso lo más simple es tomar la integral respecto a y, luego respecto a x:



$$\iint\limits_S f(x, y)\, dx\, dy = \lim_{b \to \infty} \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx.$$

b) Sea $S_b = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \le x \le b,\ 0 \le y \le 1\}$, entonces:

$$\iint\limits_{S_b} xy e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \int_0^b \left(\int_0^1 x e^{-x^2} y e^{-y^2}\, dy \right) dx = \int_0^b x e^{-x^2} \left(-\tfrac{1}{2} y e^{y^2} \right) \Big|_0^1 dx =$$

$$-\tfrac{1}{2} \left(1 - e^{-1}\right) \left(-\tfrac{1}{2} e^{-y^2} \right) \Big|_0^b = \tfrac{1}{4}(1 - e^{-1})(1 - e^{-b}) \longrightarrow \frac{e-1}{4e}, \text{ si } b \to \infty.$$

c) En el caso presente se puede cambiar el orden de integración sin problema.

Sea $S_b = [\,0, b\,] \times [\,1, 2\,]$, $b > 0$, entonces:

$$\iint\limits_{S_b} \mathrm{e}^{-xy}\,dx\,dy = \int_0^b \left(\int_1^2 \mathrm{e}^{-xy}\,dy \right) dx = \int_0^b -\frac{1}{x}\mathrm{e}^{-xy}\Big|_1^2\,dy =$$

$$\int_0^b \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x}}{x}\,dx = \int_1^2 \left(\int_0^b \mathrm{e}^{-xy}\,dx \right) dy = \int_1^2 -\frac{1}{y}\mathrm{e}^{-xy}\Big|_0^b\,dy = \int_1^2 \frac{1 - \mathrm{e}^{-by}}{y}\,dy.$$

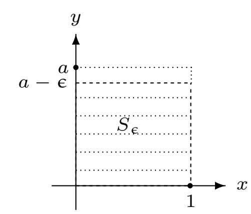
De este modo vemos que $\displaystyle\int_0^b \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x}}{x}\,dx = \int_1^2 \frac{1 - \mathrm{e}^{-by}}{y}\,dy$ y si $b \to \infty$ se tiene:

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x}}{x}\,dx = \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x}}{2}\,dx = \int_1^2 \lim_{b\to\infty} \frac{1 - \mathrm{e}^{-by}}{y}\,dy = \int_1^2 \frac{1}{y}\,dy = \ln 2.$$

96. Calcular las integrales impropias siguientes:

a) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^a \frac{x}{\sqrt{a^2 - y^2}}\,dy \right) dx$ b) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x + y}{x^2 + 2xy + y^2}\,dx \right) dy.$

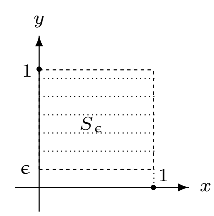
Solución



a) Tenemos problemas en $y = a$; sea $S_\epsilon = [\,0, 1\,] \times [\,0, a - \epsilon\,]$, $\epsilon > 0$, entonces:

$$\int_0^1 \left(\int_0^{a-\epsilon} \frac{x}{\sqrt{a^2 - y^2}}\,dy \right) dx = \int_0^1 x \operatorname{arcsen} \frac{y}{a}\Big|_0^{a-\epsilon}\,dx =$$

$$\int_0^1 \left(\operatorname{arcsen} \frac{a - \epsilon}{a} \right) x\,dx = \tfrac{1}{2}x^2\Big|_0^1 \operatorname{arcsen} \frac{a - \epsilon}{a} = \tfrac{1}{2} \operatorname{arcsen} \left(1 - \tfrac{\epsilon}{a}\right) \longrightarrow \frac{\pi}{4}, \text{ si } \epsilon \to 0.$$



b) Dado que $S = [\,0, 1\,] \times [\,0, 1\,]$ hay problemas en $(0, 0)$. Tomemos $S_\epsilon = [\,\epsilon, 1\,] \times [\,0, 1\,]$, $0 < \epsilon < 1$, con lo cual se tiene

$$\iint\limits_{S_\epsilon} \frac{x + y}{(x + y)^2}\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_\epsilon^1 \frac{dx}{x + y} \right) dy =$$

$$\int_0^1 (\ln(y + 1) - \ln(y + \epsilon))\,dy = ((y + 1)\log(y + 1) - (y + \epsilon)\log(y + \epsilon))\Big|_0^1 =$$

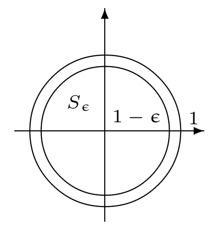
$2\ln 2 - (1 + \epsilon)\log(1 + \epsilon) + \epsilon \log \epsilon \longrightarrow 2\ln 2$, si $\epsilon \to 0$.

97. Analizar la convergencia de las integrales dobles siguientes:

a) $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \frac{\operatorname{sen}^2(x - y)}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\,dx\,dy$ b) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{x^2+y^2}}{x - y}\,dy \right) dx.$

Solución

a) Es claro que el problema se presenta en el círculo $x^2+y^2=1$; entonces tomando S_ϵ el círculo $x^2+y^2=(1-\epsilon)^2$, se tiene $(0<1-\epsilon<1)$:

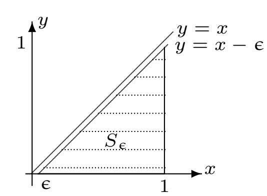


$$0 \leq \iint\limits_{S_\epsilon} \frac{\operatorname{sen}^2(x-y)}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dx\,dy \leq \iint\limits_{S_\epsilon} \frac{dx\,dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{1-\epsilon} \frac{r\,dr}{\sqrt{1-r^2}}\,d\theta = -2\pi\sqrt{1-r^2}\Big|_0^{1-\epsilon} = 2\pi\left(1-\sqrt{1-(1-\epsilon)^2}\right) \longrightarrow 2\pi, \text{ si } \epsilon \to 0.$$

De esta manera la integral $\displaystyle\iint\limits_{S_\epsilon} \frac{\operatorname{sen}^2(x-y)}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,dx\,dy$ está acotada superiormente y como es creciente cuando $\epsilon \to 0$, por el Axioma del extremo superior, tiene límite, es decir converge.

b) Tenemos problemas sobre la recta $x-y$ en S, entonces consideremos $S_\epsilon = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\epsilon<x<1, 0\leq y\leq x-\epsilon\}$, $\epsilon>0$, por lo tanto:



$$\iint\limits_{S_\epsilon} \frac{e^{x^2+y^2}}{x-y}\,dx\,dy = \int_\epsilon^1\left(\int_0^{x-\epsilon}\frac{e^{x^2+y^2}}{x-y}\,dy\right)dx \geq$$

$$\int_\epsilon^1\left(\int_0^{x-\epsilon}\frac{1}{x-y}\,dy\right)dx = -1-\ln\epsilon+\epsilon \longrightarrow +\infty, \text{ si } \epsilon\to 0, \text{ es decir la integral diverge.}$$

98. a) Calcular la integral impropia $\displaystyle\iiint\limits_V \frac{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{z+(x^2+y^2+z^2)^2}}\,dx\,dy\,dz$, donde V es el primer octante de la esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$.

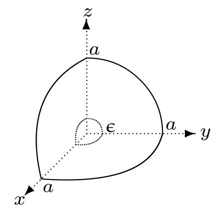
b) Determinar la existencia de la integral impropia $\displaystyle\iint\limits_S x^{-\frac{3}{2}}e^{y-x}\,dx\,dy$, sobre el conjunto $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/0\leq y\leq x, x\geq 0\}$.

c) Calcular $\displaystyle\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$, con $f(x,y,z)=\dfrac{1}{(1+(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}})^{\frac{3}{2}}}$.

d) Calcular $\displaystyle\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

e) Calcular $\displaystyle\iiint\limits_V \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$, donde V es la región exterior a la esfera de centro $(0,0,0)$ y radio 1.

Solución



a) La integral tiene problemas en $(0,0,0)$ y consideramos $V_\epsilon = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\epsilon^2 \le x^2+y^2+z^2 \le a^2,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\}$, $\epsilon>0$, entonces pasando a coordenadas esféricas tenemos:

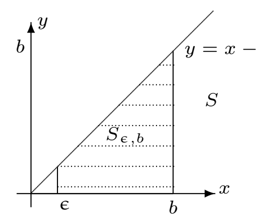
$$\iiint\limits_{V_\epsilon} \frac{(x^2+y^2+z^2)^{\frac14}\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{z+(x^2+y^2+z^2)^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_\epsilon^a \frac{\sqrt{r}r^2\cos\psi}{\sqrt{r\,\mathrm{sen}\,\psi+r^4}}\,dr\right)d\psi\right)d\varphi =$$

$$\frac{\pi}{2}\int_\epsilon^a\left(\int_0^{\pi/2}\frac{r^{5/2}\cos\psi\,d\psi}{\sqrt{r\,\mathrm{sen}\,\psi+r^4}}\right)dr = \frac{\pi}{2}\int_\epsilon^a 2r^{\frac32}\sqrt{r\,\mathrm{sen}\,\psi+r^4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\,dr =$$

$$\pi\int_\epsilon^a r^{\frac32}(\sqrt{r+r^4}-r^2)\,dr = \pi\int_\epsilon^a(r^2\sqrt{1+r^3}-r^{\frac72})\,dr = \pi(\tfrac13\tfrac23(1+r^3)^{\frac32}-\tfrac29 r^{\frac92})\Big|_\epsilon^a =$$

$$\tfrac29\pi\left((1+a^3)^{\frac32}-a^{\frac92}-(1+\epsilon^3)^{\frac32}-\epsilon^{\frac92}\right)\longrightarrow \tfrac29\pi\left((1+a^3)^{\frac32}-a^{\frac92}-1\right),\text{ cuando } \epsilon\to 0.$$

b) La integral presenta problemas en $x=0$ y se realiza sobre una región no acotada, por lo que tomamos $S_{\epsilon,b} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/0<\epsilon<x\le b,\ 0\le y\le x\}$. Así se tiene:



$$\iint\limits_{S_{\epsilon,b}} x^{-\frac32}e^{y-x}\,dy\,dx = \int_\epsilon^b\left(\int_0^x x^{-\frac32}e^{y-x}\,dy\right)dx =$$

$$\int_\epsilon^b x^{-\frac32}e^{-x}e^y\Big|_0^x\,dx = \int_\epsilon^b\frac{1-e^{-x}}{x^{\frac32}}\,dx,\text{ pero } \frac{1-e^x}{x^{\frac32}}\sim\frac{1}{\sqrt{x}} \text{ y en } 0 \text{ no hay problemas.}$$

En $+\infty$, $\dfrac{1-e^x}{x^{\frac32}} \le \dfrac{1}{x^2}$, a partir de algún $A>0$, por lo que permanece acotada por una función integrable en $[\,A,+\infty\,[$, luego es integrable.

Finalmente podemos concluir que $\displaystyle\iint\limits_S x^{-\frac32}e^{y-x}\,dx\,dy$ existe.

c) Sea V_b la esfera de centro $(0,0,0)$ y radio b; usando coordenadas esféricas tenemos:

$$\iiint\limits_{V_b} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \tfrac13\int_0^{2\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^b\frac{3r^2|\cos\psi|}{(1+r^3)^{\frac32}}\,dr\right)d\psi\right)d\varphi =$$

$$2\pi\cdot 2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\,d\psi\ \tfrac13\int_0^b\frac{3r^2\,dr}{(1+r^3)^{\frac32}} = \tfrac43\pi(-2)\frac{1}{(1+r^3)^{\frac12}}\Big|_0^b = \tfrac83\pi\big(1-\frac{1}{\sqrt{1+b^3}}\big) \longrightarrow \tfrac83\pi,\text{ si } b\to\infty.$$

d) Sea S_b el círculo de centro $(0,0)$ y radio b, entonces usando polares tenemos:

$$\iint\limits_{S_b} \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^b \frac{2r\,dr}{(1+r^2)^{\frac{3}{2}}}\right)d\theta = \pi(-2)\frac{1}{\sqrt{1+r^2}}\Big|_0^b =$$

$2\pi\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{1+b^2}}\right) \longrightarrow 2\pi$, si $b\to\infty$.

e) Sea $V_b = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/1\le x^2+y^2+z^2\le b^2\}$, $b>1$, entonces pasando a coordenadas esféricas tenemos:

$$\iiint\limits_{V_b} \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \int_0^{2\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_1^b \frac{r^2\cos\psi}{r^4}\,dr\right)d\psi\right)d\varphi = 2\pi\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\,d\psi\int_1^b \frac{1}{r^2}\,dr =$$

$4\pi\left(1-\dfrac{1}{b}\right) \longrightarrow 4\pi$, si $b\to\infty$.

99. En cada uno de los siguientes casos, calcular la integral impropia o probar la divergencia.

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx\,dy}{1+x^2+y^2}$.

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

c) $\displaystyle\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx\,dy}{(x^2+y^2+a^2)^2}$.

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|-|y|}\,dx\,dy$.

e) $\displaystyle\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}(x+y)e^{-(x+y)}\,dx\,dy$.

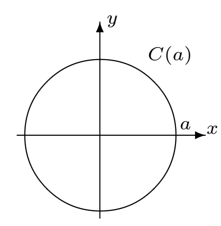
f) $\displaystyle\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} xye^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$.

g) $\displaystyle\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(x^2+2xy\cos\alpha+y^2)}\,dx\,dy$.

h) $\displaystyle\int_0^{\infty}\Big(\int_x^{\infty} e^{-y^2}\,dy\Big)\,dx$.

i) $\displaystyle\int_0^{\infty}\Big(\int_x^{\infty} xe^{-y}\frac{\operatorname{sen} y}{y^2}\,dy\Big)\,dx$.

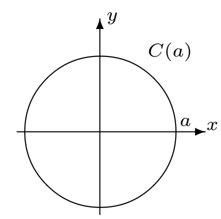
Solución



a) Usando coordenadas polares tenemos que:

$$\iint\limits_{C(a)}\frac{dx\,dy}{1+x^2+y^2} = \int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{r\,dr}{1+r^2} = \pi\ln(1+a^2) \longrightarrow \infty, \text{ si } a\to\infty$$

i.e. diverge.

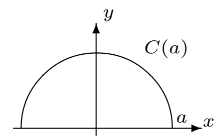


b) Usando coordenadas polares sobre el círculo $C(a)$:

$$\iint\limits_{C(a)}\frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^a \frac{r\,dr}{(1+r^2)^{\frac{3}{2}}}\Big)d\theta = \frac{-2\pi}{\sqrt{1+r^2}}\Big|_0^a =$$

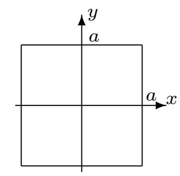
$2\pi\Big(1-\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}\Big) \longrightarrow 2\pi$, si $a\to\infty$ i.e. converge.

c) Usando el cambio de variable $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, $J = r$, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le a < +\infty$, se tiene que sobre el semi-círculo $C(a)$:



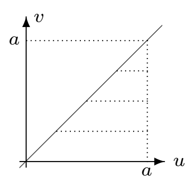
$$\int_0^{\pi}\Big(\int_0^a \frac{r\,dr}{(a^2+r^2)^2}\Big)\,d\theta = \frac{\pi}{2}\Big(-\frac{1}{a^2+r^2}\Big)\Big|_0^a = \frac{\pi}{2}\Big(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a^2+a^2}\Big) \longrightarrow \frac{\pi}{2a^2},\ \text{si } a\to\infty.$$

d) Tomando el cuadrado $[-a,a]\times[-a,a]$ e integrando:



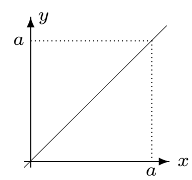
$$\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} \mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{e}^{-|y|}\,dx\,dy = \Big(\int_{-a}^{a}\mathrm{e}^{-|x|}\,dx\Big)\Big(\int_{-a}^{a}\mathrm{e}^{-|y|}\,dy\Big) = \Big(2\int_0^a \mathrm{e}^{-x}\,dx\Big)^2 = 4(1-\mathrm{e}^{-a})^2 \longrightarrow 4,\ \text{si } a\to\infty.$$

e) Efectuamos el cambio de variable $x+y=u$, $y=v$, $x = u-v \ge 0$, $y = v \ge 0$, por lo que $0 \le v \le u < +\infty$ y el Jacobiano $J = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$; entonces:



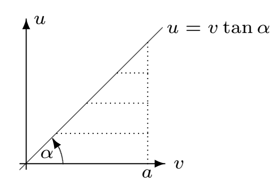
$$\int_0^a\Big(\int_0^u u\mathrm{e}^{-u}dv\Big)du = \int_0^a u^2\mathrm{e}^{-u}du \longrightarrow \int_0^{\infty} u^2\mathrm{e}^{-u}du = \Gamma(3) = 2! = 2.$$

f) Tomemos la región $[0,a]\times[0,a]$, entonces:



$$\int_0^a\Big(\int_0^a x\mathrm{e}^{-x^2}y\mathrm{e}^{-y^2}\,dx\Big)dy = \Big(\int_0^a x\mathrm{e}^{-x^2}\,dx\Big)^2 = \Big(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\Big|_0^a\Big)^2 = \frac{1}{4}(1-\mathrm{e}^{-a^2})^2 \longrightarrow \frac{1}{4},\ \text{cuando } a\to\infty.$$

g) Supongamos que $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Realicemos el cambio de variable, de acuerdo con $x^2+2xy\cos\alpha+y^2 = (x+y\cos\alpha)^2+(y\operatorname{sen}\alpha)^2 = v^2+v^2$ i.e. $u = x+y\cos\alpha$, $v = y\operatorname{sen}\alpha$, entonces $x = u - v\tan\alpha$, $y = \frac{v}{\operatorname{sen}\alpha}$. Como en la región original $x \ge 0$,

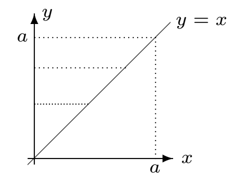


$y \ge 0$, debemos tener que $x = u - v\tan\alpha \ge 0$, $y = \frac{v}{\operatorname{sen}\alpha} \ge 0 \Longrightarrow 0 \le v\tan\alpha \le u \le +\infty$.

El Jacobiano es $J = \begin{vmatrix} 1 & -\tan\alpha \\ 0 & \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} \end{vmatrix} = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$, por lo que:

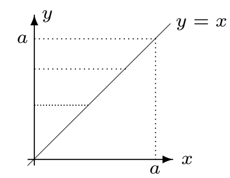
$$\int_0^a\Big(\int_0^{v\tan\alpha}\mathrm{e}^{-(u^2+v^2)}\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}du\,dv\Big) = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\int_0^{\alpha}\Big(\frac{1}{2}\int_0^a 2\mathrm{e}^{-r^2}r\,dr\Big)d\theta = \frac{\alpha}{2\operatorname{sen}\alpha}(-\mathrm{e}^{-r^2})\Big|_0^a = \frac{\alpha}{2\operatorname{sen}\alpha}(1-\mathrm{e}^{-a^2}) \longrightarrow \frac{\alpha}{2\operatorname{sen}\alpha},\ \text{si } a\to\infty.$$

h) Realizando una inversión en el orden de integración tenemos:



$\displaystyle\int_0^a \Big(\int_x^a \mathrm{e}^{-y^2}\,dy\Big)\,dx \;=\; \int_0^a \Big(\int_0^y \mathrm{e}^{-y^2}\,dx\Big)\,dy \;=\; \int_0^a y\mathrm{e}^{-y^2}\,dy \;=$
$\displaystyle -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-y^2}\Big|_0^a = \frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-a^2}) \longrightarrow \frac{1}{2}$, cuando $a\to\infty$.

i) Invirtiendo el orden de integración tenemos que:



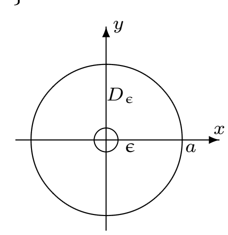
$\displaystyle\int_0^a \Big(\int_x^a x\mathrm{e}^{-y}\frac{\operatorname{sen} y}{y^2}\,dy\Big)\,dx = \int_0^a \Big(\int_0^y x\mathrm{e}^{-y}\frac{\operatorname{sen} y}{y^2}\,dx\Big)\,dy =$
$\displaystyle\int_0^a \frac{1}{2}y^2\mathrm{e}^{-y}\frac{\operatorname{sen} y}{y^2}\,dy = \frac{1}{2}\int_0^a \mathrm{e}^{-y}\operatorname{sen} y\,dy = \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{2}\Big)(\cos y+\operatorname{sen} y)\mathrm{e}^{-y}\Big|_0^a =$
$\displaystyle\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-a}(\cos a+\operatorname{sen} a) \longrightarrow \frac{1}{4}$, si $a\to\infty$.

100. Determinar la convergencia de las siguientes integrales impropias, usando coordenadas polares sobre el círculo de centro $(0,0)$ y radio a, que denotamos D.

a) $\displaystyle\iint_D \ln\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$ b) $\displaystyle\iint_D \frac{\mathrm{e}^{-x^2-y^2}}{x^2+y^2}\,dx\,dy.$

c) $\displaystyle\iint_D \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx\,dy.$ d) $\displaystyle\iint_D \frac{\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,dx\,dy.$

Solución Las integrales impropias que consideramos tiene problemas en $(0,0)$, por lo que tomamos la integral sobre $D_\epsilon=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\epsilon^2\le x^2+y^2\le a^2\}$.



a) $\displaystyle\iint_{D_\epsilon} \ln\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\Big(\int_\epsilon^a \frac{1}{2}\ln r\; r\,dr\Big)\,d\theta =$
$\displaystyle\pi\Big(\frac{1}{2}r^2\ln r-\frac{1}{4}r^2\Big)\Big|_\epsilon^a \;=\; \pi\Big(\frac{1}{2}a^2\ln a-\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{2}\epsilon^2\ln\epsilon+\frac{1}{4}\epsilon^2\Big) \;\longrightarrow$
$\displaystyle\pi\Big(\frac{1}{2}a^2\ln a-\frac{1}{4}a^2\Big)$, cuando $\epsilon\to 0$ i.e. converge.

b) $\displaystyle\iint_{D_\epsilon} \frac{\mathrm{e}^{-x^2-y^2}}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_\epsilon^a \frac{\mathrm{e}^{-r^2}}{r}\,dr\,d\theta = 2\pi\int_\epsilon^a \mathrm{e}^{-r^2}\frac{1}{r}\,dr$, que diverge pues $e^{-r^2}\frac{1}{r}\sim\frac{1}{r}$, cuando $r\to 0$.

c) $\displaystyle\iint_{D_\epsilon} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_\epsilon^a \frac{\operatorname{sen} r^2}{r^3}\,r\,dr \;=\; 2\pi\int_{\epsilon^2}^{a^2}\frac{\operatorname{sen} x}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$, con el cambio de variable $x=r^2$, por lo que la integral converge, ya que cuando $x\to 0$, $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x^{\frac{3}{2}}}\sim\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

d) $\displaystyle\iint_{D_\epsilon} \frac{\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,dx\,dy \;=\; \int_0^{2\pi}\Big(\int_\epsilon^a \frac{\cos r^2}{r^2}\,r\,dr\Big)\,d\theta \;=\; \pi\int_{\epsilon^2}^{a^2}\frac{\cos x}{x}\,dx$, diverge pues sabemos que $\dfrac{\cos x}{x}\sim\dfrac{1}{x}$, cuando $x\to 0$.

101. Determinar la existencia de un número m tal que $\displaystyle\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^m}$ sea convergente.

Solución Consideremos el conjunto $D_\epsilon^a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \epsilon^2 \le x^2+y^2 \le a^2\}$, entonces:

$$\iint\limits_{D_\epsilon^a} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^m} = \int_0^{2\pi}\int_\epsilon^a \frac{r\,dr}{r^{2m}} = 2\pi\int_\epsilon^a \frac{dr}{r^{2m-1}}.$$

La integral converge en 0, si $2m-1 > -1$ i.e. $m > 0$.

La integral converge en ∞, si $2m-1 < -1$ i.e. $m < 0$.

En conclusión, no existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $\displaystyle\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^m}$ sea convergente.

102. Calcular las siguientes integrales impropias.

a) $\displaystyle\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{(1+z+y+x)^7}}$. b) $\displaystyle\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{xy\ dx\,dy\,dz}{(1+x^2+y^2+z^2)^3}$.

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2-y^2-z^2}\,dx\,dy\,dz$.

Solución

a) Consideremos el cubo $[0,a]^3$, entonces:

$$\int_0^a\Big(\int_0^a\Big(\int_0^a \frac{dx}{(1+x+y+z)^{\frac{7}{2}}}\Big)dy\Big)dz = \int_0^a\Big(\int_0^a -\frac{2}{5}\frac{dy}{(x+y+z+1)^{\frac{5}{2}}}\Big|_0^a\Big)dz =$$

$$\frac{2}{5}\int_0^a\Big(\int_0^a\Big(\frac{1}{(y+z+1)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{(y+z+a+1)^{\frac{5}{2}}}\Big)dy\Big)dz =$$

$$\frac{4}{15}\int_0^a\Big(\frac{-1}{(z+a+1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(z+1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(z+a+1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(z+2a+1)^{\frac{3}{2}}}\Big)dz =$$

$$\frac{8}{5}\Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{a+1}} + \frac{1}{\sqrt{2a+1}} - \frac{1}{\sqrt{3a+1}}\Big) \longrightarrow \frac{8}{15}, \text{ cuando } a \to \infty.$$

b) Usando coordenadas esféricas en la región $[0,a]\times[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{2}]$, o sea la esfera de radio a en el primer octante que denotamos V_a:

$$\iiint\limits_{V_a} \frac{xy\ dx\,dy\,dz}{(1+x^2+y^2+z^2)^3} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_0^a \frac{r^4\cos^3\psi\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi}{(1+r^2)^3}\,dr\Big)d\psi\Big)d\varphi =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\psi\,d\psi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi\,d\varphi\int_0^a \frac{r^4\,dr}{(1+r^2)^3} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\int_0^a\Big(\frac{1}{(r^2+1)^3} - \frac{2}{(r^2+1)^2} + \frac{1}{r^2+1}\Big)dr =$$

$$\frac{1}{3}\Big(\frac{3}{8}\arctan a + \frac{a}{4(a^2+1)^2} - \frac{5a}{8(a^2+1)}\Big) \longrightarrow \frac{1}{3}\frac{3}{8}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{16}\pi, \text{ cuando } a \to \infty, \text{ ya que:}$$

$$\int \frac{dr}{(r^2+1)^3} = \frac{3}{8}\arctan r + \frac{3r}{8(r^2+1)} + \frac{r}{4(r^2+1)^2} + C,$$

$$\int \frac{dr}{(r^2+1)^2} = \frac{r}{2(r^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan r + C.$$

c) Tomando la esfera V_a de radio a, se tiene que:
$$\int_0^{2\pi}\Big(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_0^a \mathrm{e}^{-r^2}r^2\cos\psi\,dr\Big)d\psi\Big)\,d\varphi = 2\pi\cdot 2\cdot\int_0^a \mathrm{e}^{-r^2}r^2\,dr = 2\pi\int_0^a \mathrm{e}^{-r^2}r(2r\,dr) =$$
$$2\pi\int_0^{a^2}\mathrm{e}^{-x}\sqrt{x}\,dx = 2\pi\int_0^{a^2}x^{\frac{3}{2}-1}\mathrm{e}^{-x}\,dx \longrightarrow 2\pi\Gamma(\tfrac{3}{2}) = 2\pi\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \pi^{\frac{3}{2}},$$ cuando $a\to\infty$.

103. Determinar la convergencia de las integrales impropias tomadas sobre la esfera V de radio a y centro $(0,0,0)$.

a) $\displaystyle\iiint\limits_V \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\ln\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}}.$

b) $\displaystyle\iiint\limits_V \frac{\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz.$

c) $\displaystyle\iiint\limits_V \frac{xyz}{(x^2+y^2+z^2)^3}\,dx\,dy\,dz.$

d) $\displaystyle\iiint\limits_V \ln(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz.$

Solución Observemos que la integrales tienen problemas en el origen, por lo que tomaremos el conjunto $V_\zeta = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\zeta^2\leq x^2+y^2+z^2\leq a^2\}$.

a) $$\iiint\limits_{V_\zeta}\frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\ln(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{3}}} = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi}\Big(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_\zeta^a\frac{r^2\cos\psi\,dr}{r^3\ln r}\Big)d\psi\Big)\,d\varphi =$$
$$\frac{3}{2}\cdot 2\pi\cdot 2\int_\zeta^a\frac{dr}{r\ln r} = 6\pi\ln|\ln r|\Big|_\zeta^a = 6\pi(\ln|\ln a| - \ln|\ln\zeta|)\longrightarrow -\infty,$$ cuando $\zeta\to 0^+$, es decir diverge.

b) $$\iiint\limits_{V_\zeta}\frac{\ln r\,r^2}{r^2}\,dr\cos\psi\,d\psi\,d\varphi = 2\pi\cdot 2\cdot\int_\zeta^a\ln r\,dr = 4\pi(r\ln r - r)\Big|_\zeta^a =$$
$$4\pi\Big(a\ln a - a - \zeta\ln\zeta + \zeta\Big)\longrightarrow 4\pi a(\ln a - 1),$$ cuando $\zeta\to 0$.

c) $$\iiint\limits_{V_\zeta}\frac{xyz\,dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^3} = \int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a\frac{r^3\cos^2\psi\,\mathrm{sen}\,\psi\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi\,r^2\cos\psi}{r^6}\,dr\,d\psi\,d\varphi =$$
$$\int_0^{2\pi}\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi\,d\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\psi\,\mathrm{sen}\,\psi\,d\psi\int_\zeta^a\frac{1}{r}\,dr = 0\cdot 0\cdot(\ln a - \ln\zeta) = 0,$$ lo que nos indica que la esfera V_ζ no sirve para determinar la convergencia de la integral. Pero sabemos que si la integral es convergente, debe converger para cualquier parte de la esfera sobre la cual se integre. Tomamos la esfera en el primer octante, así:
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_\zeta^a\frac{1}{r}\,dr\Big)\cos^3\psi\,\mathrm{sen}\,\psi\,d\psi\Big)\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi\,d\varphi = (\ln a - \ln\zeta)(-\tfrac{1}{4})(\tfrac{1}{2})\longrightarrow +\infty,$$ si $\zeta\to 0$, o sea diverge.

d) $$\iiint\limits_{V_\zeta}\ln(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\Big(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_0^a\ln r^2 r^2\,dr\Big)\cos\psi\,d\psi\Big)\,d\varphi = 2\pi\cdot 2\cdot 2\int_\zeta^a r^2\ln r\,dr =$$

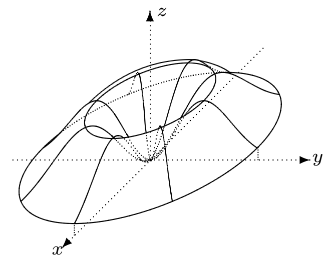
$8\pi\cdot\frac{1}{3}(r^3\ln r-\frac{1}{3}r^3)\Big|_{\zeta}^{a} = \frac{8}{3}\pi(a^3(\ln a-\frac{1}{3})-\zeta^3(\ln\zeta-\frac{1}{3})) \longrightarrow \frac{8}{3}\pi a^3(\ln a-\frac{1}{3})$, cuando $\zeta\to 0$.

104. Calcular el volumen de los siguientes sólidos:

a) el sólido limitado por la superficie $z=(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$ y el plano $z=0$.

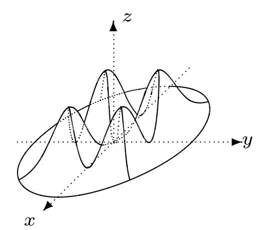
b) el sólido limitado por la superficie $z=x^2y^2\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$ y el plano $z=0$.

c) el sólido limitado por la superficie $z=x\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$ y el plano $z=0$, con $z\geq 0$.

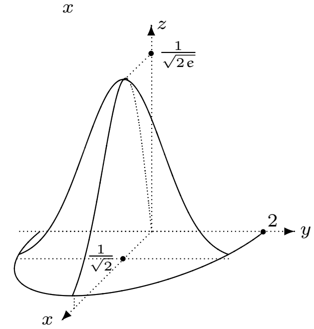


Solución Consideremos el círculo de radio a y centro $(0,0)$ y el volumen del sólido correspondiente denotado V_a:

a) $V_a = \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^a r^2\mathrm{e}^{-r^2}r\,dr\Big)d\theta = \pi\int_0^{a^2}x\mathrm{e}^{-x}\,dx \longrightarrow$ $\pi\Gamma(2)=\pi$, cuando $a\to\infty$.



b) $V_a = \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^a r^4\cos^2\varphi\,\mathrm{sen}^2\,\varphi\,\mathrm{e}^{-r^2}r\,dr\Big)d\theta =$ $\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi(1-\cos^2\varphi)\,d\theta\int_0^a r^5\mathrm{e}^{-r^2}\,dr =$ $4(\frac{\pi}{2}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{\pi}{2})\frac{1}{2}\int_0^{a^2}x^2\mathrm{e}^{-x}\,dx \longrightarrow 4\frac{\pi}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{2}\Gamma(3)=\frac{\pi}{4}$, si $a\to\infty$.



c) En este caso la región es $x=\sqrt{a^2-y^2}$, $-a\leq y\leq a$ y el volumen V_a:

$V_a = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_0^a r^2\cos\varphi\,\mathrm{e}^{-r^2}\,dr\Big)d\theta = \int_0^{a^2}\sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}\,dx \longrightarrow$ $\Gamma(\frac{3}{2})=\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, cuando $a\to\infty$.

Bibliografía

[1] Archinard Gabriel, Guerrien Bernard 1988 *Analyse mathématique pour economistes*, 3^a édition, Editorial Economica, Paris.

[2] Apostol Tom 1977 *Análisis Matemático*, Editorial Reverté, Barcelona.

[3] Apostol Tom, 1967 *Calculus*, Volumen II, Blaisdell Publishing Company, Massachusetts.

[4] Attali P., Guillard J., Tissier A. 1995 *Analyse 2: Collection exercices et problémes*, Editions Breal, Rosny.

[5] Attali P., Guillard J., Tissier A. 1993 *Géométrie 1: Collection exercices et problèmes*, Editions Breal, Rosny.

[6] Attali P., Guillard J., Tissier A. 1992 *Géométrie 2: Collection exercices et problèmes*, Editions Breal, Rosny.

[7] Bass J. 1970 *Curso de matemáticas*, Tomo I, Editorial Toray–Masson, Barcelona

[8] Berman G.N. 1983 *Problemas y ejercicios de análisis matemático*, 2^a edición, Editorial MIR, Moscú.

[9] Bronshtein I., Semendiaev K. 1982 *Manual de matemáticas para ingenieros y estudiantes*, 4^a edición, Editorial MIR, Moscú.

[10] Cartan Henri 1997 *Cours de Calcul différentiel*, Editorial Hermann, Paris.

[11] Churchill R.V., Brown G.H. 1992 *Variable compleja y aplicaciones*, 5^a edición, McGraw-Hill, Madrid

[12] De Castro Korgi, Rodrigo 2003 *El universo LaTeX*, Editorial Panamericana, Bogotá, Colombia.

[13] Del Castillo F. 1980 *Análisis matemático*, Vol.2, Editorial Alhambra, Madrid.

[14] Demidovich Boris P. 1976 *5000 Problemas de Análisis Matemático* Editorial Paraninfo, Madrid.

[15] Demidovich Boris P. 1973 *Problemas y ejercicios de análisis matemático*, 4^a edición, Editorial MIR, Moscú.

[16] Dixmier J. 1976 *Cours de Mathématiques*, Editorial Dunod, Paris

[17] Douchet Jacques, Zwahlen Bruno 1983 *Calcul différentiel et intégral. Fonctions réelles d'une variable réelle*, Vol.1, Editorial Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, Suisse.

[18] Douchet Jacques, Zwahlen Bruno 1987 *Calcul différentiel et intégral. Fonctions réelles d'une variable réelle, Exercices résolus*, Vol.3, Editorial Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, Suisse.

[19] Douchet Jacques, Zwahlen Bruno 1986 *Calcul différentiel et intégral. Fonctions réelles de plusieurse variables réelles*, Vol.2, Editorial Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, Suisse.

[20] Douchet Jacques, Zwahlen Bruno 1989 *Calcul différentiel et intégral. Fonctions réelles de plusieurse variables réelles, Exercices résolus*, Vol.4, Editorial Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, Suisse.

[21] Doneddu A. 1981 *Fonctions vectorielles. Séries. quations différentielles*, Tome 5, 2^a édition, Vuibert, Paris.

[22] Doneddu A. 1981 *Géométrie différentielle. Intégrales multiples*, Tome 6, 2^a édition, Vuibert, Paris.

[23] Efimov A., Demidovich Boris 1983 *Problemas de las matemáticas superiores*, Vol.1, Editorial MIR, Moscú.

[24] Edwards Jr., C.H. 1973 *Advanced calculus of several variables*, Dover, New York.

[25] Efimov A., Demidovich Boris 1983 *Problemas de las matemáticas superiores*, Vol.2, Editorial MIR, Moscú.

[26] Fogiel M. 1994 *Handbook of Mathematical, Scientific and Engineering*, New Jersey.

[27] Goossens Michel, Mittelbach Frank, Samarin Alexander 1994, *The LaTeX Companion*, Addison Wesley Publishing Company.

[28] Goossens Michel, Rahtz Sebastian 1999, *The LaTeX Web Companion*, Addison Wesley Publishing Company.

[29] Hobby John 1997, *The MetaPost System.*

[30] Hobby John 1997, *Drawing Graphs with MetaPost.*

[31] Hobby John 1998, *A User's Manual for MetaPost.*

[32] Knuth, Donald 1986, *The METAFONTbook*, Addison Wesley Publishing Company.

[33] Knuth, Donald 1995, *The TeXbook*, Addison Wesley Publishing Company.

[34] Krée P. 1969 *Introduction aux mathématiques et a leurs applications fondamentales*, Editorial Dunod, Paris.

[35] Kreysig Erwin 1993 *Matemáticas avanzadas para ingeniería*, Vol 1, Limusa, México.

[36] Lamport, Leslie 1994 *LaTeX: A document preparation system*, Addison Wesley Publishing Company, 2^a Edition.

[37] Lang Serge 1990 *Introducción al Análisis Matemático*, Addison–Wesley Iberoamericana, Delaware.

[38] Lang Serge 1994 *Calculus of several variables*, Sringer–Verlag.

[39] Lelong–Ferrand Jaqueline 1963 *Géométrie différentielle*, Masson, Paris.

[40] Liret F., Zisman M. 1984 *Maths*, Tome 2, Editorial Dunod, Paris

[41] Liret F., Zisman M. 1987 *Maths*, Tome 3, Editorial Dunod, Paris

[42] Marsden J, Tromba A. 1991 *Cálculo vectorial*, 3^a edición, Addison Wesley Iberoamericana, Delaware.

[43] Nikolsky S.M. 1977 *A course of Mathematical Analysis*, Vol.1, Editorial MIR, Moscú.

[44] Nikolsky S.M. 1977 *A course of Mathematical Analysis*, Vol.2, Editorial MIR, Moscú.

[45] Monier J.M. 1990 *Analyse: Exercices résolus*, Tome 1, Dunod, Paris.

[46] Monier J.M. 1990 *Analyse: Exercices résolus*, Tome 2, Dunod, Paris.

[47] Monier J.M. 1993 *Géométrie: Exercices résolus*, Dunod, Paris.

[48] Monier J.M. 1997 *Analyse*, Tome 4, Dunod, Paris.

[49] Monier J.M. 1997 *Géométrie*, Tome 7, Dunod, Paris.

[50] Ohl Thorsten 1997, *EMP: Encapsulated METAPOST for LaTeX.*

[51] Piskunov N. 1978 *Cálculo diferencial e integral*, Vol I, Editorial MIR,

[52] Piskunov N. 1978 *Cálculo diferencial e integral*, Vol II, Editorial MIR, Moscú.

[53] Quinet J. 1978 *Cours élémentaire de mathématiques supérieures, Geométrie, Tomo 5*, 6^a édition, Dunod, Paris.

[54] Quinet J. 1996 *Cours élémentaire de mathématiques supérieures, Calcul intégral et séries, Tomo 3*, 6^a édition, Dunod, Paris.

[55] Restrepo G. 1997 *Análisis en* $\mathbb{R}^n$, Editorial Universidad del Valle, Cali.

[56] Reckdahl Keith *Using Imported Graphics un LaTeX2e.*

[57] Ríbnikov K. 1987 *Historia de las matemáticas*, Editorial MIR, Moscú.

[58] Ruskeepää, Heikki 1999, *Mathematica Navigator*, Academic Press.

[59] Spiegel M.R. 1992 *Manual de fórmulas y tablas matemáticas*, Editorial McGraw-Hill, México.

[60] Taylor A., Mann W. Robert 1989 *Fundamentos de cálculo avanzado*, Editorial Limusa, Mexico.

[61] Tauvel, Patrice 1999 *Analyse complexe*, Dunod, Paris.

Índice alfabético