Universidad de Costa Rica

Escuela de Matemática

Sea E **un espacio vectorial normado y** A, B **dos partes de** E, **probar que:**

a) $\overline{E\setminus A} = E\setminus\mathring{A}$ **y** $\overset{\circ}{\overline{E\setminus A}} = E\setminus\bar{A}$

b) $\mathfrak{Fr}(A)$, $\mathring{A}$, $E\setminus\bar{A}$ **son dos a dos disjuntos**

c) $\mathfrak{Fr}(A) = (A\cap(\overline{E\setminus A}))\cup(\bar{A}\cap(E\setminus A))$

d) $\mathfrak{Fr}(\bar{A}) \subset \mathfrak{Fr}(A)$ **y** $\mathfrak{Fr}(\mathring{A}) \subset \mathfrak{Fr}(A)$

e) $A \subset \mathfrak{Fr}(A) \iff \mathring{A} = \emptyset$

f) A **es una parte cerrada** $\iff \mathfrak{Fr}(A) \subset A$

g) A **es a abierto** $\iff A \cap \mathfrak{Fr}(A) = \emptyset$

h) $\mathfrak{Fr}(A) = \bar{A}\setminus\mathring{A}$

i) $\mathfrak{Fr}(A\cup B) \subset \mathfrak{Fr}(A)\cup\mathfrak{Fr}(B)$

Serie: Cabécar

Ejercicios de espacios vectoriales normados

Editorial CIMPA

Prof. Jorge Poltronieri

2006

512.520.76

P772e Poltronieri Vargas, Jorge, 1952–

Ejercicios de espacios vectoriales normados / Jorge Poltronieri. – [San José, C.R.: CIMPA], 2003.

123p. : il. ; 27cm (Serie cabécar)

A la cabeza de la port: Universidad de Costa Rica, Escuela de Matemática.

ISBN 9968-9979-3-5

1. ESPACIOS VECTORIALES – PROBLEMAS, EJERCICIOS, ETC. I. Título.

CIP/1424

CC/SIBDI.UCR

Ejercicios de espacios vectoriales normados

Diagramación en LaTeX realizada por el autor

Diseño y concepto de carátula realizada por el autor

Impreso en Costa Rica

San José, 2004

Contenidos

Capítulo 1

Resumen: Espacios vectoriales normados

1.1 Familias de conjuntos

1.1.1 Imágenes directas e inversas

Sea $f\colon E \longrightarrow F$ una aplicación, si $A \subset E$ definimos $f(A) = \{f(x)/x \in A\}$. Si $B \subset F$ definimos $f^{-1}(B) = \{x \in E/f(x) \in B\}$. Recordemos que $A \subset f^{-1}(f(A))$ y $f(f^{-1}(B)) \subset B$ y que en general no siempre se da la igualdad.

1.1.2 Familias de conjuntos

Definición 1.1.1 *Sean L y X dos conjuntos, sea $\mathcal{P}(X)$ el conjunto de subconjuntos de X ($\mathcal{P}(X)$ el conjunto de partes de X). Una familia de subconjuntos de X (de partes de X), es una aplicación $L \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ tal que $\lambda \mapsto A_\lambda$ y se denota por $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$, con $A_\lambda \subset X$ (o $A_\lambda \in \mathcal{P}(X)$), para cada $\lambda \in L$.*

Ejemplo 1.1.1

1. Si $X = \mathbb{R}$, $L = [0, 1]$, definimos $A_\lambda = \{x \in \mathbb{R}/x \geq \lambda\}$.

2. Si $X = \mathbb{N}$, $L = \mathbb{N}$, definimos $A_n = \{x \in \mathbb{N}/x < 2n + 1\}$.

Reunión e intersección de familias

Sea $(A_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos de X (i.e. $A_i \subset X$, $\forall i \in I$), definimos:

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in X / x \in A_i,\ \forall i \in I\},$$

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in X /\ \exists\ i_o \in I \text{ tal que } x \in A_{i_o}\}.$$

Observación Si $I = \emptyset$, por definición escribimos $\bigcup_{i\in I} A_i = \emptyset$; $\bigcap_{i\in I} A_i = X$.

Proposición 1.1.1 *Sean $(A_i)_{i\in I}$ una familia de partes de A, $(B_j)_{j\in J}$ una familia de partes de B y $f\colon A \longrightarrow B$ una aplicación de A en B, entonces*

1. $A\backslash \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I}(A\backslash A_i), \qquad A\backslash \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I}(A\backslash A_i).$
2. $(\bigcup_{i\in I} A_i) \cap (\bigcup_{j\in J} B_j) = \bigcup_{j\in J}(\bigcup_{i\in I}(A_i \cap B_j)) = \bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in J}(A_i \cap B_j) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_i \cap B_j.$
3. $(\bigcap_{i\in I} A_i) \cup (\bigcap_{j\in J} B_j) = \bigcap_{j\in J}\bigcap_{i\in I}(A_i \cup B_j) = \bigcap_{i\in I}\bigcap_{j\in J}(A_i \cup B_j) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J} A_i \cup B_j.$
4. $f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i).$
5. $f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i).$
6. $f^{-1}(\bigcup_{j\in J} B_j) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j).$
7. $f^{-1}(\bigcap_{j\in J} B_j) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j).$
8. *Si* $I = \bigcup_{k\in K} I_k$ *entonces* $\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{k\in K}\bigcup_{i\in I_k} A_i.$

1.2 Espacio vectorial normado

Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, una *norma* sobre E, $\begin{aligned}\|\ \|\colon E &\longrightarrow \mathbb{R}\\ \mathbf{x} &\longmapsto \|\mathbf{x}\|\end{aligned}$ es una aplicación de E en $\mathbb{R}$ tal que:

1. $\|\mathbf{x}\| \geq 0, \forall \mathbf{x} \in E$ y $\|\mathbf{x}\| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
2. $\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda|\ \|\mathbf{x}\|,\ \forall \mathbf{x} \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
3. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|,\ \forall \mathbf{x} \in E, \forall \mathbf{y} \in E$.

Un espacio vectorial provisto de una norma, se llama espacio vectorial normado y se denota por $(E, \| \quad \|)$.

Ejemplo 1.2.1 $\mathbb{R}$ con el valor absoluto es un espacio vectorial normado, $(\mathbb{R}, | \quad |)$.

Caso de ⌈^{n} Recordemos que $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, con las operaciones usuales, es decir que si $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} &= (x_1 + y_1, \ldots, x_n + \ y_n) \\ \lambda \mathbf{x} \ &= (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n). \end{aligned}$$

ßDefinición de una norma sobre ⌈^{n} Sea $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, definimos $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.

Proposición 1.2.1 Desigualdad de Schwarz[1]

Sean $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, *entonces* $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\|$, *donde* $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$ *es el producto escalar.*

Proposición 1.2.2 *La aplicación de* $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$*, es una norma sobre* $\mathbb{R}^n$.

La norma definida en la proposición 1.2.2, se llama *norma euclídea*[2] sobre $\mathbb{R}^n$. ßO-

[1]**Hermann Amandus Schwarz (1843-1921)** Nace en Hermsdorf, Silesia (hoy Polonia) y muere en Berlín, Alemania. Schwarz comenzó en Berlín sus estudios en química, pero fue influenciado por Kummer y Weierstrass y se interesa en la geometría. Continuó estudiando en Berlín supervisado por Weierstrass hasta su doctorado (en 1864) sobre superficies mínimas (superficies de menor área), un problema típico del cálculo de variaciones, que estableció un puente entre la teoría de superficies mínimas y la teoría de funciones analíticas. En 1869 fue designado como profesor de matemáticas en el Eidgenössische Technische Hochschule en Zurich y en 1875, aceptó un puesto de Matemáticas en la Universidad de Göttingen. Schwarz dio un método alternativo para resolver el problema de Dirichlet que pronto llegó a ser una técnica usual. Schwarz contestó la pregunta de si una superficie mínima dada rinde realmente un área mínima. Una idea de este trabajo, en que él construyó una función que usa aproximaciones sucesivas, Emile Picard la usó para la prueba de la existencia para soluciones de ecuaciones diferenciales. Contiene también la desigualdad para la integral ahora conocido como "la desigualdad de Cauchy-Schwarz o de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz". Creó métodos generales basado en su magnífica intuición geométrica. La desigualdad de Cauchy-Schwarz aparece en aritmética, geometría y en las formulaciones teóricas del trabajo de matemáticos tal como Bunyakovsky, Cauchy, Grassmann, von Neumann y Weyl.

[2]**Euclides** Nace en el año 365 a.C. en Alejandría, Egipto y muere alrededor del año 300 a.C. Muy poco se sabe con certeza de su vida. Probablemente, fue llamado a Alejandría en el año 300 a.C. Sin duda que la gran reputación de Euclides se debe a su famosa obra titulada "Los elementos geométricos", conocida simplemente por "Elementos". Tal es la importancia de esta obra que se ha usado como texto de estudios cerca de 2000 años. Esta obra de Euclides es la coronación de las investigaciones realizadas por los geómetras de Atenas, así como de sus antecesores. La forma que emplea fue la deductiva.

tras normas sobre ^{n} Las aplicaciones $\begin{array}{c}\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{x} \longmapsto \|\mathbf{x}\|_1\end{array}$ y $\begin{array}{c}\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{x} \longmapsto \|\mathbf{x}\|_\infty\end{array}$ definidas por $\|\mathbf{x}\|_1 = |x_1|+\cdots+|x_n|$, $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|x_1|,\ldots,|x_n|\}$, si $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, son también normas sobre $\mathbb{R}^n$.

Normas equivalentes

Dos normas $\|\ \|_a$ y $\|\ \|_b$ definidas en un espacio vectorial E, se dicen normas equivalentes si existen $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, tales que $\alpha\|\mathbf{x}\|_a \leq \|\mathbf{x}\|_b \leq \beta\|\mathbf{x}\|_a$, $\forall\mathbf{x} \in E$.

Proposición 1.2.3 *La norma euclídea, la norma $\|\ \|_1$ y la norma $\|\ \|_\infty$ definidas sobre $\mathbb{R}^n$ son equivalentes.*

ßEspacios vectoriales con producto escalar

Definición 1.2.1 *Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, se llama producto escalar sobre E una aplicación $\langle\ ,\ \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:*

1. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$
2. $\langle x, y_1 + y_2\rangle = \langle x, y_1\rangle + \langle x, y_2\rangle$
3. $\langle \lambda x, y\rangle = \langle x, \lambda y\rangle = \lambda \langle x, y\rangle$
4. $\langle x, x\rangle > 0$*, si* $x \neq \mathbf{0}$ *y* $\langle \mathbf{0}, \mathbf{0}\rangle = 0$.

Así, se ha establecido que un espacio vectorial con producto escalar es un espacio vectorial normado. El espacio $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ se denomina espacio pre-hilbertiano[3].

En un espacio vectorial con producto escalar, la norma obtenida del producto escalar

[3]**David Hilbert (1862-1943)** Matemático alemán nace en Königsberg y fallece en Göttingen. Durante el siglo XIX se puso de manifiesto, cada vez de una manera más evidente, que Euclides no había partido de conceptos patentes y que había supuesto muchas cosas sin especificarlas. Se hicieron esfuerzos para fijar un número mínimo de términos y definiciones básicas y de éstas deducir rigurosamente la estructura matemática completa. Esta es la ciencia axiomática y fueron Hilbert y Peano quienes la fundaron. Hilbert publicó en 1899 "Foundations of Geometry", en la que por primera vez se exponían satisfactoriamente una serie de axiomas de geometría. También probó que su sistema de axiomas era bastante completo, algo que los griegos habían admitido de los axiomas de Euclides, pero sin demostrarlo. Así completó el trabajo de Euclides sin efectuar cambios en la esencia, pero su fundamento pasó de intuitivo a lógico.

verifica la ley del paralelogramo:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2,$$

ya que:

$$\langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y\rangle\,.$$

En general, en un espacio vectorial normado no existe un producto escalar asociado a la norma. Una condición necesaria y suficiente, para que un producto escalar se pueda definir de la norma, es que satisfaga la ley del paralelogramo (verificarlo). En este caso, el producto escalar es de la forma:

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\,(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2).$$

1.3 Abiertos y cerrados de $\boldsymbol{E}$

ßBolas abiertas y cerradas

Definición 1.3.1 *Sea E un espacio vectorial normado, sea $\rho \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$ y sea $\mathbf{x} \in E$. Llamaremos bola abierta de centro $\mathbf{x}$ y radio ρ y la designamos por $B(\mathbf{x}, \rho)$ (o a veces por $B_\rho(\mathbf{x})$), al conjunto $B(\mathbf{x}, \rho) = \{\mathbf{y} \in E / \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \rho\}$.*

Se llama bola cerrada de centro $\mathbf{x}$ y radio ρ y se designa por $\bar{B}(\mathbf{x}, \rho)$, al conjunto definido por $\bar{B}(\mathbf{x}, \rho) = \{\mathbf{y} \in E / \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \rho\}$.

Conjuntos abiertos de $\boldsymbol{E}$

Definición 1.3.2 *Un subconjunto $U \subset E$, se llama conjunto abierto o simplemente un abierto, si $\forall \mathbf{x} \in U$, existe $\rho > 0$ tal que $B(\mathbf{x}, \rho) \subset U$.*

Proposición 1.3.1 *Toda bola abierta es un conjunto abierto.*

Proposición 1.3.2 *Sea E espacio vectorial normado, entonces tenemos las siguientes propiedades:*

1. E y $\emptyset$ son abiertos.

2. *Toda reunión de abiertos es un abierto.*

3. *Toda intersección finita de abiertos es un abierto.*

Conjuntos cerrados de E

Definición 1.3.3 *Un subconjunto $F \subset E$ se llama cerrado, si $E \backslash F$ es abierto.*

Proposición 1.3.3 *En E tenemos las siguientes propiedades:*

1. *E y $\emptyset$ son cerrados.*

2. *Toda unión finita de cerrados es un cerrado.*

3. *Toda intersección de cerrados es un cerrado.*

Definición 1.3.4 *Sea E un espacio vectorial normado y sea $A \subset E$, definimos el interior de A y lo denotamos $\overset{\circ}{A}$, como el mayor abierto contenido en A i.e. si O es un abierto de E tal que $O \subset A \Longrightarrow O \subset \overset{\circ}{A}$.*

Recordemos que una familia de abiertos $\mathfrak{T}$ de E es una topología sobre E si:

- $\emptyset$, $E \in \mathfrak{T}$,
- Si $(O_i)_{i \in I} \subset \mathfrak{T}$ (es una familia de abiertos), $\bigcup\limits_{i \in I} O_i \in \mathfrak{T}$.
- Si $(O_i)_{i=1,\ldots,m}$ es una familia finita de abiertos, $\bigcap\limits_{i=1}^{n} O_i \in \mathfrak{T}$.

Al par $(E, \mathfrak{T})$ lo llamamos espacio topológico.

Definición 1.3.5 *Sea E un espacio vectorial normado y sea $E' \subset E$; se dice que $A' \subset E'$ es un abierto de E' (resp. cerrado), si existe $A \subset E$ abierto (resp. cerrado) tal que $A' = A \cap E'$.*

1.3.1 Adherencia y puntos de acumulación

Definición 1.3.6 *Sea $A \subset E$, $\mathrm{x} \in E$ se llama punto adherente de A, si toda bola abierta de centro x contiene puntos de A, es decir si $B(\mathrm{x}, \rho) \cap A \neq \emptyset$, para todo $\rho > 0$.*

El conjunto de puntos adherentes de A, se llama la adherencia de A y se designa por $\bar{A}$.

Proposición 1.3.4 *Sean A y B subconjuntos de E, entonces:*

1. $A \subset \bar{A}$.
2. $\bar{A}$ *es cerrado y si* $F \subset E$ *es un cerrado tal que* $A \subset F$*, entonces* $\bar{A} \subset F$*, es decir* $\bar{A}$ *es el cerrado más pequeño que contiene a* A.
3. F *es cerrado si y sólo si* $F = \bar{F}$.
4. *Si* $A \subset B \Longrightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$.
5. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Definición 1.3.7 *Sea $A \subset E$, se dice que $\mathbf{x} \in E$ es un punto de acumulación de A, si para cada $\rho > 0$, $B(\mathbf{x}, \rho) \cap A$ contiene un punto $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$.*

Definición 1.3.8 *Sea E un espacio vectorial normado y sean A y B dos subconjuntos de E, se dice que A es denso en B si $\bar{A} \supset B$.*

El conjunto A es denso en E si $\bar{A} = E$.

Definición 1.3.9 *Un espacio vectorial normado E se dice separable, si existe un subconjunto numerable A de E tal que A es denso en E i.e. $\bar{A} = E$.*

Definición 1.3.10 *Sea $A \subset E$, se llama frontera de A al conjunto $\mathfrak{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{E \backslash A}$.*

Definición 1.3.11 *Sea E un espacio vectorial normado y sea $A \subset E$, se dice que A es convexo, si $\forall \mathrm{x}, \mathrm{y} \in A$, se tiene que $\mathrm{x} + \lambda(\mathrm{y} - \mathrm{x}) \in A$, $\forall \lambda \in [0, 1]$, i.e. si el segmento de recta que une a x con y está contenido en A.*

1.4 Sucesiones en $\boldsymbol{E}$

Definición 1.4.1 *Sea $(\mathbf{x}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de puntos de E, decimos que el límite de la sucesión es $\mathbf{x} \in E$ y escribimos $\lim\limits_{k \to \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$ (o $\mathbf{x}_k \longrightarrow \mathbf{x}$, cuando $k \to \infty$ o simplemente $\mathbf{x}_k \longrightarrow \mathbf{x}$), si para cada bola abierta $B(\mathbf{x}, \rho)$, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq K$, implica que $\mathbf{x}_k \in B(\mathbf{x}, \rho)$.*

Proposición 1.4.1 *Sea $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de E, las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$.

2. $\forall\varepsilon > 0$, *existe* $K \in \mathbb{N}$ *tal que si* $k \geq K \Longrightarrow \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| < \varepsilon$.

3. $\lim_{k\to\infty} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\| = 0$.

Proposición 1.4.2 *Si $\mathbf{x}_k \longrightarrow \mathbf{x}$ con una de las tres normas euclídea, $\| \quad \|_1$ o $\| \quad \|_\infty$, entonces también lo hace con cualquiera de las otras dos.*

Proposición 1.4.3 *Sea $\mathbf{x}_k = (x_k^1, \ldots, x_k^n)$ una sucesión de $\mathbb{R}^n$ y sea $\mathbf{x} = (x^1, \ldots, x^n)$ en $\mathbb{R}^n$, entonces:*

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x} \iff \lim_{k\to\infty} x_k^i = x^i,\ \forall i = 1, \ldots, n.$$

Notemos que $(x_k^i)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales y son las componentes de los vectores $(\mathbf{x}_k)_k$, para $i = 1, \ldots, n$.

Definición 1.4.2 *Un espacio vectorial normado E se dice completo o que E es un espa-*

cio de Banach[4], si toda sucesión de Cauchy[5] es convergente en E.

---

[4]**Stefan Banach (1892-1945)** Matemático polaco, que nace el 30 el marzo de 1892 en Cracovia, Austria-Hungría (hoy Polonia) y muere el 31 de agosto de 1945 en Lvov, (hoy Ucrania). El padre de Stefan Banach era Stefan Greczek. La primera cosa en darse cuenta fue que Banach no era el apellido de su padre. Stefan Greczek fue un oficial de impuestos que no se casó con la madre de Banach, la cual desapareció de escena después del bautizo de Stefan, cuando tenía cuatro días de nacido y no se supo más de ella. El nombre que aparece como la madre de Stefan en su certificado del nacimiento es Katarzyna Banach. Unos creían que era la sirviente de la madre de Stefan, mientras otros, que era una lavandera que cuidaba a Stefan cuando era muy joven. En vida, más tarde Banach trató de determinar quién fue su madre, pero su padre se negó a decir algo sobre su identidad.
Stefan Greczek nació en un pueblo pequeño llamado Ostrowsko, 50 km al sur de Cracovia. Fue en la casa de su abuela en Ostrowsko, donde se bautizó Banach. Sin embargo, cuando la abuela de Banach enfermó, Stefan Greczek arregló traer a su hijo con Franciszka Plowa que vivía en Cracovia, junto con su hija María. Aunque Banach no volvió a vivir con su abuela, la visitaba frecuentemente cuando crecía. El guardián de María era un francés intelectual, Juliusz Mien, quien rápidamente reconoce los talentos que Banach tenía. Mien enseñó al joven Banach a hablar francés y en general le dio una apreciable educación. Banach asistió a la escuela en Cracovia y sale la escuela en 1902 para empezar su educación secundaria en el Henryk Sienkiewicz Institute, en Cracovia. Por coincidencia, uno de los estudiantes en la clase de Banach fue Witold Wilkosz que se hizo profesor de matemática. En 1906, Wilkosz cambia a un mejor Instituto, aunque Banach mantuvo contacto con Wilkosz. En sus primeros años en el Instituto, Banach alcanzó las primeras clasificaciones en matemática y ciencias naturales. Un compañero recuerda a Banach en este período de su vida: ... era agradable en el trato con sus colegas, pero fuera de la matemática no se interesaba en nada. Si hablaba, lo hacía rápidamente, tan rápidamente como pensaba en matemática... Wilkosz era similar. Para ellos no había problema matemático que no resolvieran rápidamente. Mientras Banach era muy rápido resolviendo problemas matemáticos, Wilkosz era fenomenalmente rápido resolviendo problemas en física, que no eran de interés para Banach. Las calidades excelentes de sus primeros años escolares, dieron paso a calidades más pobres cuando se acercó su final escolar. Pasó los exámenes en 1910 pero no alcanzó distinción. Al salir de la escuela, Banach y Wilkosz querían estudiar matemática, pero ambos sienten que nada nuevo se puede descubrir en matemático y deciden trabajar en otra cosa. Banach escogió estudiar ingeniería, Wilkosz escogió idiomas orientales. El padre de Banach nunca no le había dado mucho apoyo a su hijo, pero ahora una vez salió escuela le dijo abiertamente que ahora era su vida. Banach deja Cracovia y se va a Lvov, donde entra en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Técnica de Lvov. Es casi cierto ese Banach, sin cualquier apoyo financiero, tenía que ayudarse enseñando. Esto le ocupó mucho tiempo y cuando se graduó en 1914, había durado más de lo normal. Banach había visitado Cracovia frecuentemente durante su período de sus estudios en Lvov de 1910 a 1914. No estaban claros los planes de Banach en 1914, pero con la irrupción de I Guerra Mundial en agosto, al poco tiempo de su graduación, Banach se va de Lvov. Lvov estaba, en el tiempo que Banach estudió allí, bajo el control austriaco desde que se dio la partición de Polonia en 1772. En la época de la juventud de Banach, Polonia en cierto sentido no existía y Rusia controlaba gran parte del país. Varsovia sólo tenía una universidad en idioma ruso y se situó en lo que se llamaba "Vistula Land". Con el inicio de la I Guerra Mundial, las tropas rusas ocupaban la ciudad de Lvov. Banach no era apto para el ejército, por tener pobre visión en su ojo izquierdo. Durante la guerra, trabajó construyendo caminos pero en el tiempo que pasó en Cracovia, ganó dinero enseñando en las escuelas locales. También enseño en la Universidad Jagiellonian en Cracovia y aunque no es completamente seguro, se cree que asiste a las conferencias de Zaremba. Un hecho importante ocurrió en la primavera de 1916, que impactó la vida de Banach. Steinhaus, que hacía el servicio militar, estuvo cerca de tomar un puesto en la Universidad Jan Kazimierz en Lvov. Sin embargo vivía en Cracovia en la primavera de 1916, aguardando tomar la oportunidad. Caminaba por las calles de

Cracovia en las tardes y, relató en sus memorias: ...Durante una de la caminatas oí por casualidad las palabras “medida de Lebesgue”, me acerqué al parque y me presenté a los jóvenes matemáticos. Me dijeron de otro compañero de nombre Witold Wilkosz, que ellos alaban extravagantemente. Los jóvenes eran Stefan Banach y Otto Nikodým. Desde entonces, nosotros tendríamos una base común y decidimos establecer una sociedad matemática.

Steinhaus da a Banach un problema que trabajaba sin éxito. Después de unos días Banach tenía la idea principal para el requerido contraejemplo. Steinhaus y Banach escriben un artículo en conjunto, que presentaron en Zaremba para su publicación. La guerra atrasó la publicación y el artículo apareció en el Boletín de la Academia de Cracovia en 1918. De estos primeros resultados con Steinhaus, Banach comenzó a producir importantes artículos matemático rápidamente. Por supuesto, es imposible decir que sin la reunión con Steinhaus, Banach habría seguido la ruta de investigación en matemático. Es también a través de Steinhaus que Banach conoce a su futura esposa Lucja Braus. Se casaron en Zakopane en 1920. Por iniciativa de Steinhaus, la Sociedad Matemática de Cracovia fue creada en 1919. Zaremba se encargó de la reunión inaugural y se eligió como al primero presidente de la Sociedad. Banach disertó en la Sociedad dos veces durante 1919 y continuó produciendo artículos de calidad en la investigación. La Sociedad Matemática de Cracovia siguió y se volvió la Sociedad Polaca Matemática en 1920. Se le ofreció a Banach un puesto de asistente de Lomnicki, en la Universidad Técnica de Lvov en 1920. Trabajó en matemático y presentó una tesis doctoral bajo la tutoría de Lomnicki. Por supuesto, no la ruta normal a un doctorado, pues Banach no tenía cursos matemáticos universitarios. Sin embargo, se hizo una excepción en su caso para someter su tesis “On Operations on Abstract Sets and their Application to Integral Equations”. Esta tesis, se dice que marca el nacimiento de análisis funcional.

En 1922 la Universidad Jan Kazimierz en Lvov, le otorgó a Banach su habilitación para una tesis en Teoría de la medida. El Calendario Universitario de 1921-22 informa: “En 7 el abril de 1922, por resolución del Concejo de la Facultad, el Dr. Stefan Banach recibió su habilitación por un Grado de Docente de Matemática. Se nombró Profesor extraordinario por decreto del Jefe de Estado emitido el 22 de julio de 1922.”

En 1924 Banach se promovió a Profesor Titular y pasó el año académico 1924-25 en Paris. Los años entre las guerras fueron sumamente ocupados para Banach. Así, continúa produciendo un flujo de artículos importantes, escribió sobre aritmética, geometría y textos del álgebra para secundaria. También se envolvió mucho con la publicación de Matemáticas. En 1929 junto con Steinhaus, comenzó una revista nueva “Studia Mathematica” y Banach y Steinhaus fueron los primeros editores. La política de la dirección o redacción de una publicación era: “enfocar en investigación en análisis funcional y temas relacionados”.

Otra publicación importante empieza en 1931, una nueva serie Monografías Matemáticas. Se desarrollan bajo la dirección de Banach y Steinhaus de Lvov y Knaster, Kuratowski, Mazurkiewicz, y Sierpinski de Varsovia. El primer volumen en la serie Théorie des opérations linéaires fue escrito por Banach y apareció en 1932. Era una versión francesa de un volumen que originalmente publicó en polaco en 1931, que rápidamente se volvió un clásico. En 1936 Banach dio una conferencia plenaria en el Congreso Internacional de Matemáticos en Oslo. En esta conferencia describió el trabajo completo de la escuela de Lvov y también habló de los planes que tenían para desarrollar ideas futuras. Otra influencia importante de Banach, fue el hecho que Kuratowski se quedó en la Universidad Técnica de Lvov en 1927 y trabajó allí hasta que 1934. Banach colaboró con Kuratowski y escribieron juntos un artículo. La manera de trabajar de Banach era libre de reglas. A él le gustaba hacer matemático con sus colegas en los cafés de Lvov. Andrzej Turowicz, también profesor de matemática la Universidad Kazimierz en Lvov, describió el estilo de trabajo de Banach: “Banach gastaba la mayor parte de su tiempo en cafés, no sólo por la compañía de otros, sino también por él mismo. A él le gustaba el ruido y la música. No le impedían concentrarse y pensar. Había ocasiones, después que el café cerraba por la noche, que caminaba por la vía férrea de la estación, donde la cafetería estaba abierta alrededor del reloj. Allí, sobre un vidrio de cerveza, pensaba en sus problemas”. En 1939, antes del inicio de la II Guerra Mundial, Banach fue elegido presidente de la Sociedad Matemática Polaca. Al principio de la guerra las tropas soviéticas ocupaban Lvov. Banach estaba en buenos términos con los matemáticos soviéticos antes de que la guerra comenzara. Visitó Moscú varias veces y se le trató bien por parte de la nueva administración soviética. Esto le permitió continuar con su puesto en la Universidad y se nombró Decano de la Facultad de Ciencia de la Universidad, ahora nombrada Universidad Ivan Franko. El padre de Banach llegó a Lvov huyendo del ejército alemán. La vida de Banach en esta fase sufre un pequeño cambio, pero continúa su investigación, su escritura del libro de texto, enseñando y sesionando en los cafés. Sobolev y Aleksandrov visitaron a Banach en Lvov en 1940, mientras que Banach asistió a unas conferencias en la Unión Soviética. Estando en Kiev, Alemania invadió a la Unión Soviética y se volvió inmediatamente a su familia en Lvov. La ocupación Nazi de Lvov, en el junio de 1941, significó para Banach que viviera bajo condiciones muy difíciles. Fue arrestado bajo sospecha de traficar en dinero alemán, pero salió después de algunas semanas. Sobrevivió a un período cuando en Polonia asesinaban académicos. Su supervisor de tesis Lomnicki murió la noche trágica de 3 el julio de 1941, cuando muchas matanzas ocurrieron. Hacia el final de 1941 Banach estaba en el instituto alemán de enfermedades infecciosas, trabajando sobre el ácaro de alimentos. El ácaro del alimento fue su vida durante la ocupación Nazi de Lvov, hasta el julio de 1944. Cuando las tropas soviéticas volvieron a tomar Lvov, Banach renovó sus contactos. Encontró Sobolev en Moscú, pero claramente en ese tiempo estaba gravemente enfermo. Sobolev dio una disertación en una Conferencia Conmemorativa de Banach, y dijo: "A pesar de los rastros de los años de la guerra bajo la ocupación alemana y a pesar de la enfermedad grave que minaba su fuerza, los ojos de Banach todavía eran vivos. Siguió siendo el mismo Stefan Banach sociable, alegre y extraordinariamente bien intencionado, quien había visitado en Lvov antes de la guerra. Es así como queda en mi memoria: con un gran sentido del humor, con energía, una alma bella y un gran talento".

Banach pensaba ir a Cracovia después de la guerra, a tomar un puesto matemático en la Universidad Jagiellonian, pero murió en Lvov en 1945 de cáncer pulmonar. Banach fundó el análisis funcional moderno e hizo su mayor contribución a la teoría de espacios vectoriales topológicos. Además, contribuyó a la teoría de la medida e integración, la teoría de juegos y la teoría de series ortogonales. En su disertación escrita en 1920, definió axiomáticamente lo que hoy se llamaba un espacio de Banach. La idea fue introducida por otros matemáticos al mismo tiempo, por ejemplo Wiener introdujo la noción. pero no había desarrollado la teoría. El nombre espacio de Banach fue acuñado por Fréchet. También se nombraron las álgebras de Banach.

La importancia de la contribución de Banach es que desarrolló una teoría sistemática de análisis funcional, donde antes habían sólo resultados aislados, fueron armonizados para constituir una nueva teoría. Generaliza la teoría de las contribuciones que hicieron Volterra, Fredholm y Hilbert en ecuaciones integrales. Banach demostró numerosos resultados de espacios lineales normados, y muchos teoremas importantes hoy se nombran por él. El teorema de Hahn-Banach en la extensión de un funcional lineal continuo, el teorema de Banach-Steinhaus sobre familias de transformaciones acotadas, el teorema de Banach-Alaoglu, el teorema del punto fijo de Banach y el teorema y la paradoja de la descomposición de una bola de Banach-Tarski. La paradoja de Banach-Tarski apareció en una artículo dos matemáticos en 1926 en Fundamenta Mathematicae llamado "Sur la décomposition des ensembles de points en partiens respectivement congruent". El enigmática de la paradoja muestra que se puede dividir una bola en dos subconjuntos que pueden ser ajustados a dos bolas idénticas a la primera. Se necesita el axioma de elección para definir la descomposición y el hecho que puede tal resultado no es intuitivo, ha hecho que algunos matemáticos se cuestionen el uso del axioma. El paradoja de Banach-Tarski fue la mayor contribución hecha al trabajo de la teoría axiomática de conjuntos, alrededor de este período. La función abierta de Banach de 1929 también usa conceptos de la teoría de conjuntos, esta vez introducidos por Baire en su trabajo de 1899.

[5]**Augustín Louis Cauchy (1789-1857)** Nace el 21 de Agosto 1789 en Paris, Francia. Muere el 23 de Mayo 1857 en Sceaux (cerca de Paris), Francia. Agustín Louis Cauchy fue pionero en el análisis. Investigó la convergencia y la divergencia de las series infinitas, las ecuaciones diferenciales, los determinantes, la probabilidad y física matemática.

Definición 1.4.3 *Un espacio E pre-hilbertiano completo se denomina espacio de Hilbert.*

ßDistancia

Definición 1.4.4 *Sea $E \neq \emptyset$ y sean x, y, $z \in E$, llamamos distancia en E una aplicación $d \colon E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ que verifica las propiedades:*

1. $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$
2. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Al par (E, d) se le llama espacio métrico.

Como consecuencia de la definición se tiene:

$$d(x, y) \geq 0, \quad d(x, y) = d(y, x).$$

Observemos la norma induce una distancia si definimos $d(x, y) = \|x - y\|$.

La situación inversa se da, pues si tenemos una distancia en E, se pude definir la norma $\|x\| = d(x, \mathbf{0})$ (verificarlo).

Un resultado interesante sucede con los espacios vectoriales normados de dimensión finita, ya que en estos espacios todas las normas son equivalentes i.e. todos los espacios vectoriales normados de dimensión finita son completos.

Definición 1.4.5 *Sean A y $B \subset E$ no vacíos y sea $x \in E$, entonces:*

1. *se llama distancia de x a A (y se denota)* $d(x, A) = \inf\limits_{y \in A} \|x - y\|$

Ocupó diversos puestos en la Facultad de Ciencia de París, el Colegio de Francia y la Escuela Politécnica. En 1814 publicó su trabajo de la integral definida que llegó a ser la base de la teoría de las funciones complejas.

Gracias a Cauchy, el análisis infinitesimal adquiere bases sólidas.

Cauchy, produjo 789 escritos, pero fue desaprobado por la mayoría de sus colegas. Mostró una obstinada rectitud a sí mismo y un agresivo fanatismo religioso. Como un apasionado del realismo pasó algún tiempo en Italia después de rechazar tomar un juramento de lealtad. Dejó París después de la Revolución de 1830. Aceptó una oferta del Rey de Piedmont para dar una cátedra en Turín donde estuvo hasta 1832. En 1833 se marchó a Praga en atención a Charles X y para ser el tutor de su hijo.

Cauchy volvió a París en 1838 y retoma su cargo en la academia pero no su posición de profesor por haber rechazado tomar el juramento de lealtad. Cuando Louis Philippe fue destronado en 1848 Cauchy vuelve a su cátedra en la Sorbonne. Ayudó en los posgrados hasta su muerte.

2. *se llama distancia entre A y B, al valor* $d(A, B) = \inf\limits_{\substack{x \in A \\ y \in B}} \|x - y\|$

3. *se llama diámetro de A al valor* $\operatorname{diam}(A) = \sup\limits_{x, y \in A} \|x - y\|$.

Es claro que si $\operatorname{diam}(A) < \infty$, A es acotado.

1.5 Conjuntos compactos de E

Definición 1.5.1 *Sea $A \subset E$, una familia $(O_i)_{i \in I}$ de abiertos de E se llama un recubrimiento abierto de A, si $A \subset \bigcup\limits_{i \in I} O_i$.*

Definición 1.5.2 *El conjunto $K \subset E$ se llama un conjunto compacto de E o simplemente un compacto, si de todo recubrimiento abierto de K, se puede extraer un recubrimiento finito.*

Proposición 1.5.1 *Sean $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, el intervalo $[\,a, b\,]$ es compacto (en $\mathbb{R}$).*

Definición 1.5.3 *Un conjunto $A \subset E$ se dice acotado, si existe una bola abierta B tal que $A \subset B$.*

Proposición 1.5.2 *Sea $A \subset E$, A compacto, entonces A es acotado.*

Proposición 1.5.3 *Si $A \subset E$ es compacto, entonces A es cerrado.*

Proposición 1.5.4 *Si $A \subset E$ es compacto y $F \subset A$ con F es cerrado, entonces F es compacto.*

Proposición 1.5.5 *Si $A \subset E$ es compacto, entonces es cerrado y acotado.*

Proposición 1.5.6 Propiedad de intersección finita

Sea $K \subset E$ compacto y $(F_m)_{m \in \mathbb{N}}$ una sucesión de cerrados de E, tales que $F_m \subset K$, $F_{m+1} \subset F_m$ y $F_m \neq \emptyset$, para cada $m \in \mathbb{N}$, entonces $\bigcap\limits_{m \in \mathbb{N}} F_m \neq \emptyset$.

Teorema 1.5.1 Bolzano[6]–Weierstrass[7]

Sea $K \subset E$ un compacto, entonces toda sucesión $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de puntos de K tiene una subsucesión que converge a un punto $\mathbf{x} \in K$.

1.6 Producto de compactos

Sean E y F espacios vectoriales normados i.e. se tiene $(E, \|\ \|_E)$ y $(F, \|\ \|_F)$, se define el producto cartesiano de los espacios vectoriales normados E y F por $(E \times F, \|\ \|_{E\times F})$, donde $\|(x, y)\|_{E\times F} = \|x\|_E + \|y\|_F$, si $x \in E$ y $y \in F$.

Se verifica sin dificultad que $\|\ \|_{E\times F}$ es una norma sobre $E \times F$.

Otras normas inducidas por las normas de E y F se pueden considerar, por ejemplo, $\|(x, y)\|_{E\times F} = \sup\{\|x\|_E, \|y\|_F\}$, o bien $\|(x, y)\|_{E\times F} = \sqrt{\|x\|_E^2 + \|y\|_F^2}$.

[6]**Bernhard Bolzano (1781-1848)** De nacionalidad checa, fue filósofo, matemático y teólogo. Hizo contribuciones significantes tanto en la matemática como en la teoría del conocimiento. Bolzano ingresó a la facultad de filosofía en la Universidad de Praga en 1796, estudió filosofía y matemática. En 1819 fue suspendido de su puesto a causa de presión del gobierno austriaco, quienes se oponían a su pacifismo y su expresión de la justicia económica. Liberó al cálculo del concepto infinitesimal. En metafísica Bolzano se opuso a Kant, reivindicando el carácter constructivo y no simplemente regulativo de algunas ideas metafísicas como las relativas a Dios y a la inmortalidad del alma. Bolzano, se adelantó a los analistas rigurosos del siglo XIX, con el concepto de función continua y en la demostración de sus propiedades, en el criterio de convergencia de series y en la existencia de funciones continuas sin derivadas. Como publicó sus escritos de análisis en Praga, ciudad entonces alejada de los centros científicos, o de permanecer inéditos, como su importante obra “Teoría de funciones”, que apareció en 1930, la influencia de sus ideas fue escasa.

[7]**Karl Weierstrass (1815-1897)** Nace el 31 de octubre de 1815 en Ostenfelde, Bavaria (hoy Alemania). Muere el 19 de febrero 1897 en Berlín, Alemania. Karl Weierstrass fue más conocido por su construcción de la teoría de las funciones complejas por medio de series. Después que Weierstrass había ocupado varias posiciones de enseñanza menor, llegó a ser reconocido después que publicó una gran cantidad de escritos de funciones abelianas en el Journal de Crélle. En 1856 obtuvo apoyo de Kummer y fue aceptado en la Universidad de Berlín.

Sus exquisitas conferencias en matemáticas atraían a los estudiantes de todo el mundo. Los tópicos de sus conferencias incluían: física matemática (1856-57), introducción de la teoría de funciones analíticas (donde los resultados obtenidos en el año 1841 no fueron jamás publicados), la teoría de las funciones elípticas y aplicaciones a problemas en geometría y mecánica.

En las conferencias de 1859-60 Weierstrass presentó “Introducción al Análisis”. En su curso “Teoría general de las funciones analíticas” en los años 1863-64, comenzó a formular su Teoría de los números reales.

En sus conferencias el año 1863 Weierstrass probó que los números complejos son sólo conmutativos en su extensión algebraica de los números reales. Gauss había prometido una prueba de esto en el año 1831 pero falló en el intento.

Lema 1.6.1 *Sean E y F espacios vectoriales normados, sean $\mathbf{a}\in E$, $\mathbf{b}\in F$ y sea $B((\mathbf{a},\mathbf{b}),\rho)$ la bola abierta de centro $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ y radio $\rho>0$ de $E\times F$, entonces existen bolas abiertas $B(\mathbf{a},\alpha)\subset E$ y $B(\mathbf{b},\alpha)\in F$, $(\alpha>0)$ tales que $B(\mathbf{a},\alpha)\times B(\mathbf{b},\alpha)\subset B((\mathbf{a},\mathbf{b}),\rho)$.*

Teorema 1.6.1 Producto de compactos *Sean E y F espacios vectoriales normados y sean $K_1\subset E$ compacto, $K_2\subset F$ compacto, entonces $K_1\times K_2$ es un compacto de $E\times F$.*

Corolario 1.6.1 *El producto finito de compactos es compacto.*

Teorema 1.6.2 *Los conjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$ son los conjuntos cerrados y acotados.*

Este resultado es válido para espacios vectoriales normados de dimensión finita.

1.7 Funciones continuas

Definición 1.7.1 *Sean E y G espacios vectoriales normados, sea $A\subset E$, $f\colon A\longrightarrow G$, $\mathbf{a}\in A$; decimos que f es continua en $\mathbf{a}$, si para toda bola abierta $B(f(\mathbf{a}),\varepsilon)$, existe una bola abierta $B(\mathbf{a},\delta)$ tal que si $\mathbf{x}\in B(\mathbf{a},\delta)\cap A$, entonces $f(\mathbf{x})\in B(f(\mathbf{a}),\varepsilon)$, es decir $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,\delta>0$ tal que $\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|<\delta,\ \mathbf{x}\in A\Longrightarrow\|f(\mathbf{x})-f(\mathbf{a})\|<\varepsilon$.*

Se dice que f es continua en A, si es continua en cada punto de A.

Proposición 1.7.1 *Sea $A\subset E$ y sea $f\colon A\longrightarrow G$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1) f es continua en A.

2) Si $O\subset G$ es un abierto, entonces $f^{-1}(O)=U\cap A$, donde U es un abierto de E.

3) Si $F\subset G$ es un cerrado, entonces $f^{-1}(F)=C\cap A$, donde C es un cerrado de E.

En particular si $f\colon E\longrightarrow G$; f es continua en E si y sólo si $f^{-1}(O)$ es un abierto, para todo abierto $O\subset G$ si y sólo si $f^{-1}(F)$ es un cerrado, para todo cerrado $F\subset G$.

Proposición 1.7.2 *Sea $f\colon A\subset E\longrightarrow G$, si $(\mathbf{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}\subset A$ es una sucesión tal que $\mathbf{x}_k\longrightarrow\mathbf{x}$ y $\mathbf{x}\in A$, entonces si f es continua en A, $\lim\limits_{k\to\infty}f(\mathbf{x}_k)=f(\mathbf{x})$.*

Proposición 1.7.3 *La función constante y la función identidad son continuas, es decir:*

Si $f: A \subset E \longrightarrow G$ *es tal que* $f(\mathbf{x}) = c, \ \forall \, \mathbf{x} \in A$*, entonces* f *es continua en* A.

Si $f: E \longrightarrow E$ *es tal que* $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$*,* $\forall \, \mathbf{x} \in E$*, entonces* f *es continua en* E.

Proposición 1.7.4 *Sean* E, F, G *espacios vectoriales normados, la composición de funciones continuas es continua, es decir si la función* $f: A \subset E \longrightarrow G$ *es continua en* $\mathbf{a} \in A$ *y si* $g: G \longrightarrow H$ *es continua en* $f(\mathbf{a})$*, entonces* $h = g \circ f$ *es continua en* $\mathbf{a}$.

Proposición 1.7.5 *Se tienen las siguientes propiedades:*

a) Sean $f: A \subset E \longrightarrow G$, $g: A \subset E \longrightarrow G$ *dos funciones continuas en* $\mathbf{a} \in A$*, entonces* $f + g$ *es continua en* $\mathbf{a}$ *y si* $\lambda \in \mathbb{R}$*,* λf *es continua en* $\mathbf{a}$.

b) Si $f: A \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$*,* $g: A \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$ *son continuas en* $\mathbf{a} \in A$*, entonces* $f \cdot g$ *es continua en* $\mathbf{a}$ *y* $\dfrac{f}{g}$ *también es continua en* $\mathbf{a}$*, siempre y cuando* $g(\mathbf{a}) \neq 0$.

Definición 1.7.2 *Sea* $\boldsymbol{\kappa} = (\kappa_1, \ldots, \kappa_n)$ *un vector de enteros positivos o nulos,* $q \in \mathbb{N}$ *y sea* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$*, con* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$*, se denota* $\mathbf{x}^{\boldsymbol{\kappa}} = x_1^{\kappa_1} x_2^{\kappa_2} \cdots x_n^{\kappa_n}$*,* $|\boldsymbol{\kappa}| = \sum_{j=1}^{n} \kappa_j$*, entonces* $P_q(\mathbf{x}) = \sum_{|\boldsymbol{\kappa}| \leq q} a_\kappa \mathbf{x}^\kappa = \sum_{|\boldsymbol{\kappa}| \leq q} a_{\kappa_1 \cdots \kappa_n} x_1^{\kappa_1} \cdots x_n^{\kappa_n}$*, donde* $a_{\boldsymbol{\kappa}} = a_{\kappa_1 \cdots \kappa_n}$ *son constantes y la suma se realiza sobre todos los posibles vectores de enteros positivos con* $|\boldsymbol{\kappa}| \leq q$*, se denomina polinomio en* n *varias variables de grado* q.

Corolario Todo polinomio en varias variables es continuo en $\mathbb{R}^n$. También son continuas las fracciones racionales donde no se anule el denominador.

Definición 1.7.3 *La proyección* i*-ésima es la aplicación* $p_i: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que:*

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto x_i, \quad \textit{i.e.} \quad p_i(\mathbf{x}) = x_i, \quad \textit{para} \ \ i = 1, \ldots, n.$$

Proposición 1.7.6 *Las proyecciones son continuas en todo* $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.7.4 *Sea* $f: A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$*, las funciones* $p_i \circ f: A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *se llaman funciones componentes de* f *y se designan por* $f_i = p_i \circ f$*, para* $i = 1, \ldots, p$.

La función f *se escribe* $f = (f_1, \ldots, f_p)$*, con* $f: A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *tal que* $\mathbf{x} \mapsto (f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_p(\mathbf{x}))$ *y donde* $f_i: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *es tal que* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto f_i(\mathbf{x}) = f_i(x_1, \ldots, x_n)$.

Proposición 1.7.7 *Sea* $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *con* $f = (f_1, \ldots, f_p)$ *y* $f_i\colon A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$*, entonces* f *es continua en* $\mathbf{a} \in A$ *si y sólo si cada función componente* f_i *de* f *es continua en* $\mathbf{a}$*.*

ßFunciones continuas y compactos

Teorema 1.7.1 *Sea* K *un compacto de* E*,* $f\colon K \longrightarrow G$ *una función continua sobre* K*, entonces* $f(K)$ *es compacto en* G*.*

Lema 1.7.1 *Si* $A \subset \mathbb{R}$ *es acotado, entonces* $\sup A \in \bar{A}$ *y* $\inf A \in \bar{A}$*.*

Teorema 1.7.2 *Sea* $K \subset E$ *compacto y sea* $f\colon K \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua en* K*, entonces existen* $\boldsymbol{\alpha} \in K$ *y* $\boldsymbol{\beta} \in K$ *tales que* $f(\boldsymbol{\alpha}) \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\boldsymbol{\beta})$*,* $\forall \mathbf{x} \in K$*, es decir la función es acotada en* K *y alcanza su máximo y su mínimo.*

1.8 Continuidad uniforme

Definición 1.8.1 *Sea* $A \subset E$ *y sea* $f\colon A \longrightarrow G$*, decimos que* f *es uniformemente continua en* A*, si* $\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0$ *tal que* $\forall \mathbf{x} \in A,\ \forall \mathbf{y} \in A$*, con* $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta \Longrightarrow \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| < \varepsilon$*.*

Note que δ *sólo puede depender de* ε *y no de* $\mathbf{x}$ *o de* $\mathbf{y}$*.*

Proposición 1.8.1 *Si* $f\colon A \subset E \longrightarrow G$ *es uniformemente continua en* A*, entonces es continua en* A*.*

Teorema 1.8.1 *Sea* $K \subset E$ *compacto,* $f\colon K \longrightarrow G$ *continua en* K*, entonces* f *es uniformemente continua en* K*.*

Definición 1.8.2 *Sea* E *y* F *espacios vectoriales normados y sea* $f\colon E \longrightarrow F$ *una aplicación, se dice que* f *es* k*–lipschitziana*[8]*si* $\|f(\mathrm{x}) - f(\mathrm{y})\| \leq k\|\mathrm{x} - \mathrm{y}\|$*,* $\forall\, \mathrm{x}, \mathrm{y} \in E$*.*

Si $0 \leq k < 1$ *se dice que* f *es contractiva.*

[8]**Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1832-1903)** Nace e1 4 de mayo de 1832 en Königsberg, Alemania (hoy Kaliningrado, Rusia). Muere el 7 de octubre de 1903 en Bonn, Alemania. Su padre era un hacendado. Empezó sus estudios universitarios muy joven, bajo la supervisión de Franz Neumann. También estudió en Berlín con Dirichlet. Completó su doctorado en 1853 y fue lector de la tesis de Klein en Bonn en 1868. Sus contribuciones más notables se dan en teoría de números, funciones de Bessel y series de Fourier, ecuaciones

1.9 Aplicaciones lineales continuas

Proposición 1.9.1 *Sea E y F espacios vectoriales normados y sea $f\colon E \longrightarrow F$ una aplicación lineal, entonces las proposiciones siguientes son equivalentes:*

a) *f es continua*

b) *f es continua en el origen*

c) *f es acotada en la bola unidad*

d) *existe $M > 0$ tal que $\|f(\mathrm{x})\| \leq M\|\mathrm{x}\|$, $\forall \mathrm{x} \in E$.*

Definición 1.9.1 *Sean E y F espacios vectoriales normados, el espacio de aplicaciones lineales continuas de E a F, que denotamos $\mathsf{L}(E,F)$ es un espacio vectorial.*

Al espacio de funciones lineales continuas que son invertibles, lo denotamos $\mathrm{Isom}(E,F)$ y es un subespacio de $\mathsf{L}(E,F)$.

El espacio vectorial de aplicaciones lineales lo denotamos $\mathfrak{L}(E,F) \supset \mathsf{L}(E,F)$.

Teorema 1.9.1 *Si F es un espacio de Banach, entonces $\mathsf{L}(E,F)$ también es un espacio de Banach.*

Definición 1.9.2 *Sean E y F espacios vectoriales normados, una función $f\colon E \longrightarrow F$ se dice que es un homeomorfismo si f es biyectiva y tanto f como f^{-1} son continuas.*

Teorema 1.9.2 *Sea E un espacio vectorial normado de dimensión finita y sea $\Omega \subset \mathsf{L}(E)$ formado por los elementos invertibles de $\mathsf{L}(E)$, entonces:*

1. *Si $f \in \Omega$, con $\|f^{-1}\| = \alpha^{-1}$ y $g \in \mathsf{L}(E)$, con $\|f - g\| = \beta < \alpha \Longrightarrow g \in \Omega$*

2. *Ω es un abierto de $\mathsf{L}(E)$*

---

diferenciales ordinarias y parciales, mecánica analítica y teoría potencial. Su trabajo en la interpretación mecánica de la geometría diferencial de Riemann resultaría un paso esencial en el camino hacia la teoría especial de Einstein de relatividad: Lipschitz se recuerda para la “condición de Lipschitz”, una desigualdad que garantiza una solución extraordinaria a la ecuación diferencial $y' = f(x,y)$. Peano dio un teorema de la existencia para esta ecuación diferencial, las condiciones garantizan por lo menos una solución. Su trabajo en la teoría algebraica de números lo dirigió para estudiar el cuaterniones y la generalización de las álgebras de Clifford. Lipschitz redescubrió las álgebras de Clifford y fue el primer en aplicarlas para representar rotaciones en espacios euclideanos.

3. $p\colon \Omega \longrightarrow \Omega$ *tal que* $p(f) = f^{-1}$ *es un homeomorfismo.*

ßMatrices Sean E, F y G espacios vectoriales normados de dimensiones finitas (n, m y r respectivamente), con bases $\mathtt{B}_E$, $\mathtt{B}_F$ y $\mathtt{B}_G$ respectivamente. Sea $f \in \mathsf{L}(E, F)$, sea $A(m \times n)$ la matriz asociada a f por las bases $\mathtt{B}_E$ y $\mathtt{B}_F$ y sea $g \in \mathsf{L}(F, G)$ con matriz asociada $\mathtt{B}(r \times m)$ por las bases $\mathtt{B}_F$ y $\mathtt{B}_G$. La matriz asociada a la composición $g \circ f \in \mathsf{L}(E, G)$, en las bases $\mathtt{B}_E$ y $\mathtt{B}_G$ es la matriz $BA(r \times n)$.

Observemos que si $\mathfrak{M}_{m \times n}$ es el conjunto de matrices $m \times n$, es un espacio vectorial normado (Banach) que es isomorfo a $\mathbb{R}^{n \cdot m}$.

La norma en $\| \, \|_i$ en $\mathbb{R}^n$ induce una norma en $\mathfrak{M}_{n \times n}$, de modo que si $A \in \mathfrak{M}_{n \times n}$, $\|A\|_i^* = \sup\limits_{\|\mathrm{x}\|_i = 1} \|A\mathrm{x}\|_i$. Se verifica que:

1. $\|A\|_1^* = \sup\limits_{\|\mathrm{x}\|_1 = 1} \|A\mathrm{x}\|_1 = \max\limits_{1 \le j \le n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$.
2. $\|A\|_2^* = \sup\limits_{\|\mathrm{x}\|_2 = 1} \|A\mathrm{x}\|_2 = \sqrt{\max\limits_{1 \le i \le n} \lambda_i}$, donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son los valores propios de $A'A$.
3. $\|A\|_\infty^* = \sup\limits_{\|\mathrm{x}\|_\infty = 1} \|A\mathrm{x}\|_\infty = \max\limits_{1 \le i \le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

Sea E un espacio vectorial normado, la norma $\mathrm{u} \longrightarrow \|\mathrm{u}\|$ es una aplicación continua de E en $\mathbb{R}$, pues $| \, \|\mathrm{u}\| - \|\mathrm{v}\| \, | \le \|\mathrm{u} - \mathrm{v}\|$.

La topología de E es separada ya que si $\mathrm{x} \neq \mathrm{y}$, $d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = r$ y las bolas abiertas $B(\mathrm{x}, \frac{1}{2}r)$, $B(\mathrm{y}, \frac{1}{2}r)$ son disjuntas.

Definición 1.9.3 *Sea* $(\mathrm{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *una sucesión en* E*, espacio de Banach, la serie de término general* u_p *es convergente a* $\mathrm{u} \in E$*, si* $\mathrm{x}_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{u}_i \longrightarrow \mathrm{u}$*, es decir* $\forall\, \epsilon > 0$*,* $\exists\, N \in \mathbb{N}$ *tal que si* $n \ge N \Longrightarrow \|\mathrm{x}_n - \mathrm{u}\| < \epsilon$*. El límite* u *se denota* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathrm{u}_n$.

Definición 1.9.4 *Sea* $(\mathrm{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *una sucesión de* E*, espacio de Banach, se dice que la serie de término general* u_n *es normalmente convergente, si la serie de las normas* $\sum\limits_{n \ge 0} \|\mathrm{u}_n\|$ *es convergente.*

Nota Existen series convergentes sin ser normalmente convergentes, como por ejemplo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{n}$.

Teorema 1.9.3 *Si la serie de término general* u_n *en* E *espacio de Banach, es normalmente convergente, entonces es convergente y* $\|\sum_{n\geq 0} u_n\| \leq \sum_{n\geq 0} \|u_n\|$.

ßComposición de aplicaciones lineales continuas Sean E, F, G espacios vectoriales normados y sean $f\colon E \longrightarrow F$, $g\colon F \longrightarrow G$ aplicaciones lineales y continuas, entonces $g \circ f\colon E \longrightarrow G$ es una aplicación lineal y continua. Para todo $x \in E$ se tiene que $\|g \circ f(x)\| = \|g(f(x))\| \leq \|g\| \|f(x)\| \leq \|g\| \|f\| \|x\|$, por lo que $\|g \circ f\| \leq \|g\| \|f\|$.

Definición 1.9.5 *Sea* E*,* F *espacios vectoriales normados, la aplicación* $f\colon E \longrightarrow F$ *es un isomorfismo si:*

i) f *es lineal y continua.*

ii) existe g *lineal y continua,* $g\colon F \longrightarrow E$*, tal que* $g \circ f = I_E$ *y* $f \circ g = I_F$.

Es claro que estas condiciones implican que f es una biyección de E en F y que g es biyectiva. Sin embargo si f es lineal biyectiva continua, no implica que la biyección inversa g sea continua. De estas observaciones se tiene otra caracterización de los isomorfismos: Para que $f\colon E \longrightarrow F$ sea un isomorfismo es necesario y suficiente que f sea un homeomorfismo (de espacios topológicos) y que sea lineal.

Señalamos sin demostración un teorema muy importante en análisis debido a Banach.

Teorema 1.9.4 Banach *Si* E *y* F *son espacios de Banach, toda aplicación lineal continua biyectiva* $f\colon E \longrightarrow F$ *es un isomorfismo.*

Nota El teorema indica que la aplicación inversa $f^{-1}\colon F \longrightarrow E$ es continua.

Definición 1.9.6 *Sean* E*,* F *espacios vectoriales normados, una aplicación* $f\colon E \longrightarrow F$ *es una isometría si* f *es lineal biyectiva tal que* $\|f(x)\|_F = \|x\|_E$*,* $\forall\, x \in E$.

Teorema 1.9.5 *Sea* E *un espacio vectorial normado de dimensión finita, entonces* E *es un espacio de Banach y toda aplicación lineal de* E *en un espacio vectorial normado* F *es continua.*

Ejemplo 1.9.1 Si $E = \mathbb{R}$, vamos a definir una isometría natural $\mathsf{L}(\mathbb{R}, F) \simeq F$. Sea $\mathsf{y} \in F$, la aplicación lineal $\lambda \longmapsto \lambda \mathsf{y}$ de $\mathbb{R}$ en F, es continua pues $\|\lambda \mathsf{y}\| = \|\mathsf{y}\| \, |\lambda|$ y se tiene una aplicación $\varphi : F \longrightarrow \mathsf{L}(\mathbb{R}, F)$ que es lineal. Además la aplicación lineal $\varphi(\mathsf{y}) : \mathbb{R} \longrightarrow F$ tiene norma $\|\mathsf{y}\|$.

Inversamente, sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow F$ una aplicación lineal y sea $f(1) \in F$. Así se define una aplicación $\psi \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}, F)$ que es lineal. Es claro que φ y ψ son inversas una de la otra y cada una es una biyección. Además es una isometría, puesto que $\|\varphi(\mathsf{y})\| = \|\mathsf{y}\|$.

Ejemplo 1.9.2 Sea E un espacio de Banach real; entonces $\mathcal{H}(E, \mathbb{R})$ es un espacio de Banach real, llamado dual topológico de E y sus elementos son formas lineales continuas de E. No debe confundirse con el dual algebraico, que comprende las formas lineales continuas o no. Cuando E es de dimensión finita n, el dual topológico y el dual algebraico coinciden, el cual es también de dimensión n.

En general designamos con E^* el dual topológico de E que es un espacio de Banach.

Ejemplo 1.9.3 Consideremos $\mathsf{L}(E, E)$ espacio de Banach, si E es de Banach. Además $g \circ f \in \mathsf{L}(E, E)$, pero $g \longmapsto g \circ f$ y $f \longmapsto g \circ f$ son lineales. Una aplicación de este tipo se denomina bilineal. En general si en un espacio vectorial normado H se define una ley de composición interna (llamada multiplicación) bilineal se dice que H tiene la estructura de álgebra sobre el campo $\mathbb{R}$. Así tenemos que $\mathsf{L}(E, E)$ es un álgebra asociativa y tenemos una norma tal que $\|g \circ f\| \leq \|g\| \, \|f\|$.

Dado que E es de Banach, diremos que $\mathsf{L}(E, E)$ es un álgebra de Banach. En general se tiene que $\|g \circ f\| \neq \|g\| \, \|f\|$.

Teorema 1.9.6 *Si E es un espacio de Banach y si $f \in \mathsf{L}(E, E)$, la serie $\sum\limits_{n \geq 0} \dfrac{1}{n!} f^n$ es normalmente convergente. Su suma se representa por e^f.*

Nota Observemos que si $g \circ f = f \circ g$ se tiene $\mathrm{e}^f \circ \mathrm{e}^g = \mathrm{e}^{f+g}$. En particular $\mathrm{e}^0 = I$ y $\mathrm{e}^f \circ \mathrm{e}^{-f} = I$ i.e. e^f es invertible en $\mathsf{L}(E, E)$.

Las afirmaciones anteriores son válidas para toda álgebra de Banach.

Teorema 1.9.7 *Sea E un espacio Banach y sea $\mathrm{u} \in \mathsf{L}(E,E)$ tal que $\|\mathrm{u}\| < 1$, entonces $I - \mathrm{u}$ tiene inversa en $\mathsf{L}(E,E)$ dada por* $\sum_{n\geq 0} \mathrm{u}^n$.

Corolario 1.9.1 *Si $\|\mathrm{u} - I\| < 1$, entonces u tiene inversa dada por* $\sum_{n\geq 0} (I - \mathrm{u})^n$.

Teorema 1.9.8 *Sean E, F espacios de Banach, sea $\mathrm{Isom}(E,F) \subset \mathsf{L}(E,F)$, el subconjunto formado por los isomorfismos $E \longrightarrow F$, entonces*

i) $\mathrm{Isom}(E,F)$ *es abierto en* $\mathsf{L}(E,F)$

ii) la aplicación $\varphi\colon \mathrm{Isom}(E,F) \longrightarrow \mathsf{L}(E,F)$, *con* $\varphi(\mathrm{u}) = \mathrm{u}^{-1}$ *es continua.*

Nota Cuando E y F tienen la misma dimensión finita n y se identifica $\mathsf{L}(E,F)$ al espacio de las matrices de n filas y n columnas. Se sabe que una matriz f es invertible, si la condición $\det f \neq 0$. Por ser continua la aplicación, $f \longmapsto \det f$ de L en $\mathbb{R}$, la imagen inversa de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ es un abierto i.e. $\det^{-1}(\mathbb{R}\backslash\{0\}) = \mathrm{Isom}(E,F)$.

1.10 Aplicaciones multilineales continuas

Definición 1.10.1 *Sean E_1, E_2,. . . ,E_n, F espacios vectoriales y sea $f\colon E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ una aplicación, se denomina multilineal, si para cada $k = 1, \ldots, n$ y para cada sistema de elementos $\mathrm{a}_i \in E_i$, $i \neq k$, la aplicación parcial $\mathrm{x}_k \longmapsto f(\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_{k-1}, \mathrm{x}_k, \mathrm{a}_{k+1}, \ldots, \mathrm{a}_n)$ de E_k en F es lineal.*

Observemos que $f(\lambda_1 \mathrm{x}_1, \ldots, \lambda_n \mathrm{x}_n) = \lambda_1 \cdots \lambda_n f(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)$.

Teorema 1.10.1 *Sean E_1, E_2,. . .,E_n, F espacios vectoriales normados y sea $f\colon E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ una aplicación multilineal. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) f es continua en $E_1 \times \cdots \times E_n$

ii) f es continua en $(\mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0}) \in E_1 \times \cdots \times E_n$

iii) $\|f(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_n)\|$ está acotada en el producto de bolas unitarias, $\|\mathrm{x}_1\| \leq 1, \ldots, \|\mathrm{x}_n\| \leq 1$.

Ejemplo 1.10.1 Aplicación bilineal continua Sean E, F y G espacios vectoriales normados y sea $\varphi\colon \mathsf{L}(F,G) \times \mathsf{L}(E,F) \longrightarrow \mathsf{L}(E,G)$ la aplicación compuesta i.e. $\varphi(g,f) = g \circ f$.

Observemos que esta aplicación es bilineal y que $\|g \circ f\| \leq \|g\| \|f\|$, lo cual implica que φ es continua y $\|\varphi\| \leq 1$.

Isometría entre $\mathsf{L}(E, F; G)$ **y** $\mathsf{L}(E; \mathsf{L}(F, G))$

Vamos a definir una aplicación $\varphi\colon \mathsf{L}(E, F; G) \longrightarrow \mathsf{L}(E, \mathsf{L}(F, G))$ de la siguiente manera. Sea $f \in \mathsf{L}(E, F; G)$, $f(x, y)$ es una función de dos variables $x \in E$, $y \in F$. Fijada x, la aplicación $y \longmapsto f(x, y)$ lineal de F en G y la representaremos f_x. Se tiene:

$$\|f_x(y)\| = \|f(x, y)\| \leq \|f\| \|x\| \|y\| \quad \therefore \quad \|f_x\| \leq \|f\| \|x\|,$$

es decir f_x es una aplicación lineal continua, entonces $x \longmapsto f_x$ es una aplicación $g\colon E \longrightarrow \mathsf{L}(F, G)$ que también es lineal. Además $\|g(x)\| \leq \|f\| \|x\|$, luego g es continua con $\|g\| \leq \|f\|$.

Capítulo 2

Ejercicios de espacios vectoriales normados

2.1 Generalidades

1. Dar un ejemplo de dos subconjuntos A y B de X tales que $B \subset A$ y de una aplicación $f\colon X \longrightarrow Y$ tal que $f(A \backslash B) \neq f(A) \backslash f(B)$.

   Solución Tomemos $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{1, 2\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{2\}$, donde $f(1) = f(2) = a$, $f(3) = b$, entonces $A \backslash B = \{1\}$, $f(A \backslash B) = \{f(1)\} = \{a\}$, $f(A) = \{a\}$, $f(B) = \{a\}$, pero $f(A \backslash B) = \{a\} \neq f(A) \backslash f(B) = \emptyset$.

2. Dar un ejemplo de aplicaciones $f\colon X \longrightarrow Y$ y de subconjuntos $A \subset X$ tales que:

   a) $f(X \backslash A) \subset Y \backslash f(A)$ b) $f(X \backslash A) \supset Y \backslash f(A)$ c) que no se cumpla a) ni b).

   Solución

a) Sea $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b\}$, $A = \{1, 2\}$, donde $f(1) = a$, $f(2) = f(3) = b$, $X \backslash A = \{3\}$, $f(X \backslash A) = \{f(3)\} = \{b\}$, $Y \backslash f(A) = \emptyset \subset f(X \backslash A)$.

b) Sea $X = \{1, 2, 3\}$, $f(1) = b$, $f(2) = f(3) = a$, $A = \{1\}$, $f(A) = \{b\}$, $f(X \backslash A) = f(\{2, 3\}) = Y \supset Y \backslash f(A) = \{a\}$.

c) Sea $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c\}$, $f(1) = 1$, $f(2) = f(3) = b$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{2\}$, $X \backslash A = \{3\}$, $f(X \backslash A) = \{b\}$, $f(A) = \{a, b\}$, $Y \backslash f(A) = \{c\}$, con lo cual tenemos que $f(X \backslash A) \not\subset Y \backslash f(A)$ y $Y \backslash f(A) \not\subset f(X \backslash A)$.

3. ¿Se relacionan de algún modo los conjuntos $f^{-1}(Y \backslash B)$ y $X \backslash f^{-1}(B)$, si f es una apli-

cación de X en Y y $B \subset Y$?

Solución Sea $x \in f^{-1}(Y \backslash B) \Longrightarrow f(x) \in Y \backslash B$ i.e. $f(x) \in Y$, $f(x) \notin B \Longrightarrow x \in f^{-1}(Y) = X$, $x \notin f^{-1}(B) \Longrightarrow x \in X \backslash f^{-1}(B)$ i.e. $f^{-1}(Y \backslash B) \subset X \backslash f^{-1}(B)$.

4. Sea f una aplicación $f\colon X \longrightarrow Y$, probar que las siguientes condiciones son equivalentes:

a) f es inyectiva

b) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$, para todos los subconjuntos A y B de X

c) $f^{-1}(f(A)) = A$, para todo $A \in \mathcal{P}(X)$.

Solución

$(a \Longrightarrow b)$ Sea $y \in f(A \cap B) \Longrightarrow y = f(x)$, para algún $x \in A \cap B \Longrightarrow y = f(x) \in f(A)$, $y = f(x) \in f(B) \Longrightarrow y \in f(A) \cap f(B)$, es decir $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Sea $y \in f(A) \cap f(B) \Longrightarrow y = f(x_A) = f(x_B)$, con $x_A \in A$, $x_B \in B$ y como f es inyectiva $\Longrightarrow x_A = x_B \in A \cap B \Longrightarrow y \in f(A \cap B)$, es decir $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.

$(b \Longrightarrow c)$ Sea $x \in f^{-1}(f(A)) \Longrightarrow f(x) \in f(A)$ i.e. $\exists x_A \in A$ tal que $f(x) = f(x_A)$, pero $f(x) \in f(\{x\}) \cap f(\{x_A\}) = f(\{x\} \cap \{x_A\}) \neq \emptyset \Longrightarrow x = x_A \in A$.

Inversamente, si $x \in A \Longrightarrow f(x) \in f(A) \Longrightarrow x \in f^{-1}(f(A))$.

$(c \Longrightarrow a)$ Si $f(x) = f(y)$, entonces $y \in f^{-1}(f(\{x\})) = \{x\}$ i.e. $x = y$.

5. Dar un ejemplo de una familia de conjuntos $(A_i)_{i \in I}$ si:

a) $I = \{1, 2, 3\}$ b) $I = \mathbb{R}$ c) $I = \mathbb{N}$ d) $I = [\,2, 10\,]$.

Solución

a) $A_1 = \mathbb{N} \backslash \{1\}$, $A_2 = \mathbb{N} \backslash \{1, 2\}$, $A_3 = \mathbb{N} \backslash \{1, 2, 3\}$.

b) $A_i = \,]\,i, \infty\,[$, $i \in \mathbb{R}$.

c) $A_i = \{1, 2, \cdots, i\}$, $i \in \mathbb{N}$.

d) $A_x = \,]-\infty, x\,]$, $x \in [\,2, 10\,]$.

6. Dar un ejemplo de una familia de conjuntos $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que cumpla las siguientes condiciones: $\emptyset \neq A_n \subset \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$; $A_{n+1} \subset A_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$.

Solución Tomemos $A_n = [\,n, +\infty\,[$, entonces $A_n \neq \emptyset$, $A_{n+1} \subset A_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ y $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$.

7. Sea $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una familia decreciente de conjuntos no vacíos, es decir $E_n \supset E_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y $E_n \neq \emptyset$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Sea $E = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$ y sea $F_n = E_n \backslash E_{n+1}$. Demostrar que $E_1 \backslash E = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ y que $F_i \cap F_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

   Solución Sea $x \in E_1 \backslash E \Longrightarrow x \in E_1,\ x \notin E = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n \Longrightarrow x \in E_1$ y $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in E_{n_0-1},\ x \notin E_{n_0} \Longrightarrow x \in F_{n_0-1} \Longrightarrow x \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$.

   Inversamente, si $x \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in F_{n_0} = E_{n_0} \backslash E_{n_0+1}$ i.e. $x \in E_{n_0}$, $x \notin E_{n_0+1} \Longrightarrow x \in E_1 \wedge x \notin \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n \Longrightarrow x \in E_1 \backslash E$.

   Falta probar que $F_i \cap F_j = \emptyset$, si $i \neq j$. En efecto, si $x \in F_i \cap F_j$ con $i > j$, entonces $x \in F_j = E_j \backslash E_{j+1} \Longrightarrow x \in E_j$, $x \notin E_{j+1}$, pero como $E_i \subset E_{j+1}$, se tiene que $x \notin E_i$, o sea $x \notin F_i$ que es una contradicción.

8. Sea $f\colon E \longrightarrow E$ una aplicación; se dice que $X \subset E$ es estable si $f(X) \subset X$. Demostrar que:

a) Si X es estable, entonces $f(X)$ es estable.

b) Toda unión de partes estables es estable y toda intersección de partes estables es estable.

c) Si $X \subset E$ existe un subconjunto $D \subset E$ que es estable, tal que $D \supset X$ y tal que si F es una parte estable y $X \subset F$ entonces $D \subset F$. Designemos con $\widehat{X}$ esta parte estable, es decir la parte estable más pequeña que contiene a X.

d) Demostrar que si $X \subset Y \Longrightarrow \widehat{X} \subset \widehat{Y}$.

e) Sea $f^n(X) = f \circ f^{n-1}(X)$, $f^1(X) = f(X)$ y $f^0(X) = X$, demostrar que $\widehat{X} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} f^n(X)$.

f) Demostrar que $\widehat{X} = X \cup f(\widehat{X}) = X \cup \widehat{f(X)}$.

g) Sea $F = f(E)$ y $G = E \backslash F$, probar que $\forall X \subset G$, existe $Y \subset F$ tal que $f(X \cup Y) = Y$.

h) Si X_0 es la intersección de todas las partes estables no vacías de E, demostrar que $X_0 = f(X_0)$.

Solución

a) Si X es estable, entonces $f(X) \subset X \Longrightarrow f(f(X)) \subset f(X)$ i.e. $f(X)$ es estable.

b) Sea $(X_i)_{i\in I}$ una familia de partes estables, entonces $f(\bigcup_{i\in I} X_i) \subset \bigcup_{i\in I} f(X_i) \subset \bigcup_{i\in I} X_i$, o sea $\bigcup_{i\in I} X_i$ es estable.

Además $f(\bigcap_{i\in I} X_i) \subset \bigcap_{i\in I} f(X_i) \subset \bigcap_{i\in I} X_i$ i.e. $\bigcap_{i\in I} X_i$ es estable.

c) Sea $X \subset E$ y como E es estable, el conjunto $\mathfrak{M} = \{D \subset E / X \subset D,\ D \text{ estable}\} \neq \emptyset$, pues $E \in \mathfrak{M}$.

Sea $\hat{X} = \bigcap_{D\in\mathfrak{M}} D$, entonces $\hat{X}$ es estable, pues $f(\hat{X}) = f(\bigcap_{D\in\mathfrak{M}} D) \subset \bigcap_{D\in\mathfrak{M}} f(D) \subset \bigcap_{D\in\mathfrak{M}} D = \hat{X}$.

Además, si F es estable con $X \subset F \Longrightarrow \hat{X} \subset F$, pues $\hat{X} = \bigcap_{D\in\mathfrak{M}} D \subset F$.

d) Sabemos que $X \subset Y \subset \hat{Y}$, $\hat{Y}$ estable $\Longrightarrow X \subset \hat{Y}$, $\hat{Y}$ estable $\Longrightarrow \hat{X} \subset \hat{Y}$.

e) Probemos que $\hat{X} = \bigcup_{n\geq 0} f^n(X)$ es estable.

En efecto, sea $A = \bigcup_{n\geq 0} f^n(X) \Longrightarrow f(A) = f(\bigcup_{n\geq 0} f^n(X)) = \bigcup_{n\geq 1} f^n(X) \subset X \cup \bigcup_{n\geq 1} f^n(X) = A$, es decir $f(A) \subset A$ y es estable.

Por otro lado, $X \subset A \Longrightarrow \hat{X} \subset A$ por ser $\hat{X}$ la parte más pequeña que contiene a X.

Falta probar que $A \subset \hat{X}$. En efecto, sea $y \in A$, $y \in \bigcup_{n\geq 0} f^n(X) \Longrightarrow y = f(x)$, con $x \in f^{n_0}(X)$, para algún $n_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\} \Longrightarrow y = f(x)$, $x = f^{n_0}(z)$, $z \in X$, pero como $X \subset \hat{X}$ y $f^{n_0+1}(\hat{X}) \subset \hat{X} \Longrightarrow y = f(x) = f^{n_0+1}(z) \in \hat{X}$.

f) Tenemos que $\hat{X} = \bigcup_{n\geq 0} f^n(X) = X \cup \bigcup_{n\geq 1} f^n(X) = X \cup f\Big(\bigcup_{n\geq 0} f^n(X)\Big) = X \cup f(\hat{X}) = X \cup \widehat{f(X)}$, ya que si $Y = f(X)$, entones como $\hat{X} = X \cup \bigcup_{n\geq 1} f^n(X) \Longrightarrow f(\hat{X}) = f(X) \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f(f^n(X)) = f(X) \cup \bigcup_{n\geq 1} f^n(f(X)) = Y \cup \bigcup_{n\geq 1} f(Y) = \hat{Y} = \widehat{f(X)}$.

g) Sea $X \subset G$ y sea $Y = f(\hat{X})$, entonces $f(X \cup f(\hat{X})) = f(X \cup \widehat{f(X)}) = f(\hat{X}) = \widehat{f(X)} = Y$.

h) Sea $X_0 = \bigcap_{\substack{X \text{estable} \\ X\neq\emptyset}} X$, entonces X_0 también es estable i.e. $f(X_0) \subset X_0$.

Además $f(X_0)$ es estable, por lo que $X_0 \subset f(X_0)$ i.e. $f(X_0) = X_0$.

9. a) Sea $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, probar que $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \leq \sqrt{n}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$.

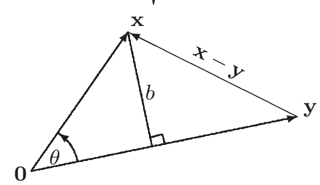
b) Probar que $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|\cos\theta$, donde θ es le ángulo formado por los vectores $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$.

Utilice y verifique que $\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|\cos\theta$.

c) Probar que si $|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}| = \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|$, $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ son colineales.

Solución

a) Por la desigualdad de Schwarz $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i\cdot 1 \geq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} 1^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2} = \sqrt{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.



b) Probemos que $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|\cos\theta$.

En efecto, tenemos que $\|\mathbf{x}\|^2 = b^2 + \|\mathbf{x}\|^2\cos^2\theta$,

$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = b^2 + (\|\mathbf{y}\| - \|\mathbf{x}\|\cos\theta)^2 =$

$\|\mathbf{x}\|^2 \operatorname{sen}^2\theta + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|\cos\theta + \|\mathbf{x}\|^2\cos^2\theta = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|\cos\theta$.

Por otro lado, $\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|\cos\theta \Longrightarrow -2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = -2\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|\cos\theta$, o sea $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|\cos\theta$.

c) Si $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \pm\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\| \Longrightarrow \theta = 0$ o $\theta = \pi$ i.e. $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ son colineales.

10. Si $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ y $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$, entonces $\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i \leq n\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$.

Solución Sabemos que $(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0$, $\forall i$, $\forall j \Longrightarrow a_i b_i - a_i b_j - a_j b_i + a_j b_j \geq 0$, $\forall i$, $\forall j \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + n a_j b_j \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) b_j + a_j\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)$, $\forall j \Longrightarrow n\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + n\sum_{j=1}^{n} a_j b_j \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right) + \left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \Longrightarrow 2n\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geq 2\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} b_i$, o sea $n\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)$.

2.2 Normas

11. Sea $N\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $N(x,y) = \sup_{t\in[0,1]} |x+ty|$, probar que N es una norma sobre $\mathbb{R}^2$ y determinar la bola cerrada de centro $(0,0)$ y norma 1.

Solución

a) N es una norma. En efecto, $N(x,y) \geq 0$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

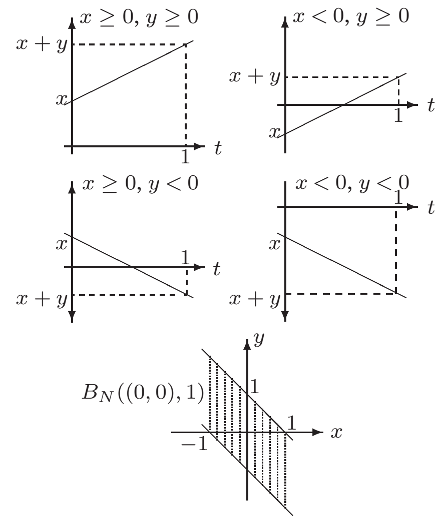
Si $N(x,y) = 0 \Longrightarrow \sup_{0\leq t\leq 1} |x+ty| = 0 \Longrightarrow |x+ty| = 0$, $\forall\, t \in [0,1]$ i.e. si $t=0$, $x=0$ y si $t=1$, $y=0$, o sea $(x,y)=(0,0)$.

Además $N(\lambda(x,y)) = \sup\limits_{0\le t\le 1} |\lambda x + \lambda t y| = |\lambda| \sup\limits_{0\le t\le 1} |x+ty| = \lambda N(x,y)$.

Por otro lado $N((x,y)+(x',y')) = \sup\limits_{t\in[0,1]} |x+x'+t(y+y')| \le \sup\limits_{t\in[0,1]} |x+ty| + \sup\limits_{t\in[0,1]} |x'+ty'| = N(x,y)+N(x',y')$.

b) Consideremos la bola de centro $(0,0)$ y radio 1, es decir el conjunto de $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tales que $N(x,y)\le 1$.

Para x, y fijos debe satisfacerse $-1 \le x+ty \le 1$, $\forall t\in[0,1]$.



Si $x\ge 0$, $y\ge 0$ tenemos que $f(t)=x+ty$ alcanza su máximo en $t=1$ i.e. $f(1)=x+y$ y se cumple que $\sup\limits_{t\in[0,1]} |x+ty| = |x+y| \le 1$.

Si $x<0$, $y\ge 0$ se cumple que en valor absoluto, el máximo valor se alcanza en $|x|$ o en $|x+y|$, que debe ser ≤ 1.

Si $x\ge 0$, $y<0$ se cumple que en valor absoluto, el máximo valor se alcanza en $|x|$ o en $|x+y|$, que debe ser ≤ 1.

Si $x<0$, $y<0$ tenemos que $f(t)=x+ty$, alcanza en valor absoluto el máximo en $t=1$ i.e. $|f(1)|=|x+y|$ y se cumple $\sup\limits_{t\in[0,1]} |x+ty| = |x+y| \le 1$.

Finalmente tenemos que $B_N((0,0),1)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / |x|\le 1,\ |x+y|\le 1\}$.

12. Sea E el espacio vectorial de aplicaciones continuas de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$, con la norma $\|\ \|_\infty$ definida por $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$. Sea $p\in\mathbb{N}$, fijo, $(f_1,f_2,\ldots,f_p)\in E^p$, $N\colon\mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $N(x_1,\ldots,x_p) = \left\| \sum\limits_{i=1}^{p} x_i f_i \right\|_\infty$, dar una condición necesaria y suficiente para que N sea una norma en $\mathbb{R}^p$.

Solución La condición $N(\mathbf{x})\ge 0$ se da por definición; además se tiene que $N(\lambda\mathbf{x}) = \sup\limits_{t\in[0,1]} \left\| \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda x_i f_i(t) \right\|_\infty = |\lambda| N(\mathbf{x})$.

Por otro lado $N(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \left\| \sum\limits_{i=1}^{p} (x_i+y_i) f_i \right\|_\infty \le \left\| \sum\limits_{i=1}^{p} x_i f_i \right\|_\infty + \left\| \sum\limits_{i=1}^{p} y_i f_i \right\|_\infty = N(\mathbf{x}) + N(\mathbf{y})$.

Solo falta probar que si $N(\mathbf{x})=0 \Longrightarrow \mathbf{x}=\mathbf{0}$.

Si $N(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \left\| \sum_{i=1}^{p} x_i f_i \right\|_\infty = \sup_{0\le t\le 1} \left| \sum_{i=1}^{p} x_i f_i(t) \right| = 0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{p} x_i f_i = \mathbf{0}$, por ser $\| \;\; \|_\infty$ una norma en E. Para que esto implique que $x_1 = \cdots = x_p = 0$ debe tenerse que $f_1, \ldots, f_p$ sean linealmente independientes en E.

13. Sea E el espacio vectorial de aplicaciones de clase C^2 de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$, donde N_∞, N'_∞, N''_∞ son aplicaciones de E^2 en $\mathbb{R}$, definidas por: $\forall f \in E$, $N_\infty(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$, $N'_\infty(f) = |f(0)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|$ y $N''_\infty(f) = |f(0)| + |f'(0)| + \sup_{x\in[0,1]} |f''(x)|$. Probar que son normas y compararlas.

    Solución Es fácil ver que cualquiera de las tres aplicaciones $N^*_\infty \ge 0$; también $N^*_\infty(f + g) \le N^*_\infty(f) + N^*_\infty(g)$. Por otro lado $N^*_\infty(\lambda f) = |\lambda| N^*_\infty(f)$.

    Falta probar que $N^*_\infty(f) = 0 \Longrightarrow f = 0$.

a) Sea $N_\infty(f) = 0 \Longrightarrow \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = 0 \ge |f(x)|, \forall x \in [0,1] \Longrightarrow f(x) = 0, \forall x \in [0,1]$.

b) Sea $N'_\infty(f) = 0 \Longrightarrow |f(0)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)| = 0 \Longrightarrow f(0) = 0$ y $\sup_{x\in[0,1]} |f'(x)| = 0 \Longrightarrow f(0) = 0$ y $f'(x) = 0, \forall x \in [0,1] \Longrightarrow f(x) = c, \forall x \in [0,1] \Longrightarrow f(0) = c = 0$, por lo tanto $f(x) = 0$, $\forall x \in [0,1]$

c) Sea $N''_\infty(f) = 0 \Longrightarrow |f(0)| + |f'(0)| + \sup_{x\in[0,1]} |f''(x)| = 0 \Longrightarrow f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ y $f''(x) = 0$, $\forall x \in [0,1] \Longrightarrow f'(x) = c = 0 \Longrightarrow f(x) = d = 0, \forall x \in [0,1]$.

Ahora vamos a comparar las normas. Consideremos $f \in E$, por el teorema del valor medio $f(x) = f(0) + x f'(u)$, con $u \in [0,1]$. De esta forma $|f(x)| \le |f(0)| + |x||f'(u)| \Longrightarrow N_\infty(f) \le |f(0)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)| = N'_\infty(f)$.

Aplicando un razonamiento análogo se llega a $N_\infty(f) \le N'_\infty(f) \le N''_\infty(f)$, pero no son normas equivalentes como lo demuestra el ejemplo siguiente.

Sea $n \in \mathbb{N}^*$, tomemos $f(x) = x^n \Longrightarrow f'(x) = n x^{n-1} \Longrightarrow f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$. De esta forma, $N_\infty(f) = 1$, $N'_\infty(f) = n$, $N''_\infty(f) = n(n-1)$ y las normas no son equivalentes ya que los cocientes $\frac{n}{1}$ y $\frac{n(n-1)}{n} = n - 1$ no están acotados.

14. Sea E el espacio vectorial de sucesiones acotadas en $\mathbb{R}$, $\mathbf{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $u_0 = 0$. Se define $N_\infty(\mathbf{u}) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ y $N(\mathbf{u}) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_{n+1} - u_n|$.

a) Demostrar que N_∞ y N son normas sobre E.

b) Demostrar que $\forall \mathbf{u} \in E$, $N(\mathbf{u}) \leq 2N_\infty(\mathbf{u})$ y que $\exists \mathbf{u} \in E \backslash \{\mathbf{0}\}$ tal que $N(\mathbf{u}) = 2N_\infty(\mathbf{u})$.

c) Demostrar que N y N_∞ no son equivalentes.

Solución

a) $N(\mathbf{u}) = 0 \Longrightarrow |u_{n+1} - u_n| \leq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, por lo tanto usando inducción se sigue que $u_{n+1} = u_n = u_0 = 0$. Por otra parte $N_\infty(\mathbf{u}) = 0 \Longrightarrow |u_n| = 0, \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow u_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Es claro que $N(\mathbf{u}) \geq 0$ y $N_\infty(\mathbf{u}) \geq 0$. Además, $N_\infty(\mathbf{u} + \mathbf{u}') = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n + u'_n| \leq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n| + \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u'_n| = N_\infty(\mathbf{u}) + N_\infty(\mathbf{u}')$ y $N(\mathbf{u} + \mathbf{u}') = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_{n+1} + u'_{n+1} - u_n - u'_n| \leq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_{n+1} - u_n| + \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u'_{n+1} - u'_n| = N(\mathbf{u}) + N(\mathbf{u}')$. Por último, $N_\infty(\lambda\mathbf{u}) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |\lambda||u_n| = |\lambda| N_\infty(\mathbf{u})$ y $N(\lambda\mathbf{u}) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |\lambda||u_{n+1} - u_n| = |\lambda| N(\mathbf{u})$.

b) $N(\mathbf{u}) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_{n+1} - u_n| \leq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_{n+1}| + \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n| \Longrightarrow N(\mathbf{u}) \leq 2N_\infty(\mathbf{u})$ ya que $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n| = N_\infty(\mathbf{u})$. Se define ahora la sucesión $\mathbf{u} = (u_n)_n$ tal que $u_0 = 0$ y $u_n = (-1)^n$ para $n \geq 1$.

Luego $N(\mathbf{u}) = 2 = 2N_\infty(\mathbf{u})$.

c) Sea $0 < \epsilon < 1$, se considera la sucesión $\mathbf{u} = (u_n)_n$ definida por $u_n = \dfrac{\epsilon}{2} n$, si $n \leq \dfrac{2}{\epsilon}$ y $u_n = 1$, si $n > \dfrac{2}{\epsilon}$. En este caso $N_\infty(\mathbf{u}) = 1$.

Ahora, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 \leq \dfrac{2}{\epsilon}$ y $n_0 + 1 > \dfrac{2}{\epsilon}$, por lo tanto $u_{n_0} = \frac{1}{2} n_0 \epsilon$ y $u_{n_0+1} = 1$, entonces para $n = 1, \ldots, n_0 - 1$ se cumple $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\epsilon$. Para $n \geq n_0 + 1$ se cumple $u_{n+1} - u_n = 1 - 1 = 0$.

Ahora se calculará $u_{n_0+1} - u_{n_0}$. En efecto, acuerdo con la definición $\frac{1}{2} n_0 \epsilon \leq 1 < \frac{1}{2}(n_0 + 1)\epsilon$, por lo que $|u_{n_0+1} - u_{n_0}| = 1 - \frac{1}{2} n_0 \epsilon < \frac{1}{2}\epsilon$, ya que $\frac{1}{2}(n_0 + 1)\epsilon > 1 \Longrightarrow \frac{1}{2} n_0 \epsilon + \frac{1}{2}\epsilon > 1$, i.e. $\frac{1}{2}\epsilon > 1 - \frac{1}{2} n_0 \epsilon$. Así, $N(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\epsilon$ y como $\epsilon \in]\,0, 1\,[$ es arbitrario, el cociente $N_\infty(\mathbf{u})/N(\mathbf{u})$ no está acotado.

15. Sea E el $\mathbb{R}$-espacio de aplicaciones continuas de $[\,0, 1\,]$ en $\mathbb{R}$ y sea $\mathbf{0} \neq g \in E$. Se define $N_\infty, N_g \colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ por $N_\infty(f) = \sup\limits_{x\in[\,0,1\,]} |f(x)|$ y $N_g(f) = N_\infty(fg)$.

a) Probar que N_g es una norma sí y sólo si el interior de $g^{-1}(\{0\})$ es vacío.

b) Demostrar que N_∞, N_g son normas equivalente sí y sólo si $g^{-1}(\{0\}) = \emptyset$

Solución

a) Las propiedades habituales de la suma y el producto de la norma son inmediatas. Por otro lado, $N_g(f) = 0 \Longleftrightarrow \sup_{x\in[0,1]} |f(x)g(x)| = 0 \Longleftrightarrow f(x)g(x) = 0, \forall x \in [0,1]$.

Se probará que para que esto implique $f(x) = 0, \forall x \in [0,1]$, es necesario y suficiente que el interior de $g^{-1}(\{0\})$ sea vacío.

($\Longrightarrow$) Supongamos que no es así, entonces existen α y $\beta \in [0,1]$, con $\alpha < \beta$, tales que $g(x) = 0, \forall x \in [\alpha, \beta]$, por lo que se puede construir una función $f \neq 0$, $f \in E$ tal que $fg = 0$. Por ejemplo, se define una función de la siguiente forma: $f(x) = 0, \forall x \in [0, \alpha]$; $f(x) = x - \alpha$, si $\alpha \leq x \leq \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$; $f(x) = \beta - x$, si $\frac{1}{2}(\alpha+\beta) \leq x \leq \beta$ y por último $f(x) = 0$, si $\beta \leq x \leq 1$. En este caso, N_g no es una norma.

($\Longleftarrow$) Ahora supongamos que el interior de $g^{-1}(\{0\})$ es vacío. Sea $f \in E$ tal que $N_g(f) = 0 \Longrightarrow fg = 0$. Sea $x_0 \in [0,1]$, como el interior de $g^{-1}(\{0\}) = \emptyset$, existe una sucesión $(u_n)_n \subset [0,1]$ convergente a x_0 y tal que $g(u_n) \neq 0$. Así, $f(u_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ y por continuidad $f(x_0) = 0$, es decir $f(x) = 0, \forall x \in [0,1]$ i.e. $f = 0$.

b) $\forall f \in E$ se cumple $N_g(f) \leq N_\infty(f) \cdot N_\infty(g)$.

Si $g^{-1}(\{0\}) = \emptyset$, entonces existe un α tal que $|g(x)| \geq \alpha, \forall x \in [0,1]$, pues g es continua en $[0,1]$. Por lo tanto, $N_g(f) \geq \alpha N_\infty(f)$ y son equivalentes.

Si $g^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset$, entonces existe un $x_0 \in [0,1]$ tal que $g(x_0) = 0$. Sea $\epsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tal que $\forall x \in]\, x_0 - \eta, x_0 + \eta\, [\cap [0,1]$, $|g(x)| \leq \frac{1}{2}\epsilon$. Se define $f(x) = \frac{1}{\eta}(x - x_0 + \eta)$, si $x_0 - \eta \leq x \leq x_0$, $f(x) = \frac{1}{\eta}(x_0 + \eta - x)$, si $x_0 \leq x \leq x_0 + \eta$ y $f(x) = 0$, si x no está en estos intervalos. De esta forma $N_\infty(f) = 1$ y $N_g(f) = \frac{1}{2}\epsilon$ y las normas no son equivalentes.

16. Sea $(E, \|\ \ \|)$ un espacio vectorial normado. Probar:

a) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{t} \in E$, $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| + \|\mathbf{z}-\mathbf{t}\| + \|\mathbf{x}-\mathbf{z}\| + \|\mathbf{y}-\mathbf{t}\| \geq \|\mathbf{x}-\mathbf{t}\| + \|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|$.

b) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in E$ tales que $\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z} = \mathbf{0}$ se tiene $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}-\mathbf{z}\| + \|\mathbf{z}-\mathbf{x}\| \geq \frac{3}{2}(\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{z}\|)$.

c) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E \backslash \{\mathbf{0}\}$ se cumple $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \geq \frac{1}{2} \sup\{\|\mathbf{x}\|, \|\mathbf{y}\|\} \left\| \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} - \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|} \right\|$.

d) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E \backslash \{\mathbf{0}\}$, $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \geq \frac{1}{4}(\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|) \left\| \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} - \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|} \right\|$.

Solución

a) Sabemos que $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}-\mathbf{t}\| \geq \|\mathbf{x}-\mathbf{t}\|$, $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| + \|\mathbf{x}-\mathbf{z}\| \geq \|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|$, $\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\| + \|\mathbf{z}-\mathbf{t}\| \geq \|\mathbf{x}-\mathbf{t}\|$ y $\|\mathbf{y}-\mathbf{t}\| + \|\mathbf{z}-\mathbf{t}\| \geq \|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|$, luego se suma y se tiene el resultado.

b) $2(\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}-\mathbf{z}\| + \|\mathbf{z}-\mathbf{x}\|) = (\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|) + (\|\mathbf{z}-\mathbf{x}\| + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|) + (\|\mathbf{y}-\mathbf{z}\| + \|\mathbf{z}-\mathbf{x}\|) \geq$

$\|(\mathbf{x}-\mathbf{y})-(\mathbf{y}-\mathbf{z})\|+\|(\mathbf{z}-\mathbf{x})-(\mathbf{x}-\mathbf{y})\|+\|(\mathbf{y}-\mathbf{z})-(\mathbf{z}-\mathbf{x})\| = \|-3\mathbf{y}\|+\|-3\mathbf{x}\|+\|-3\mathbf{z}\| = 3(\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|+\|\mathbf{z}\|)$, pues $\mathbf{x}+\mathbf{y}+\mathbf{z} = \mathbf{0}$, lo que implica $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|+\|\mathbf{y}-\mathbf{z}\|+\|\mathbf{z}-\mathbf{x}\| \geq \frac{3}{2}(\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|+\|\mathbf{z}\|)$.

c) Es suficiente analizar el caso $\|\mathbf{x}\| \geq \|\mathbf{y}\|$, entonces $\Big\|\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} - \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|}\Big\| \frac{1}{2}\sup\{\|\mathbf{x}\|, \|\mathbf{y}\|\} = \frac{1}{2}\Big\|\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} - \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|}\Big\| \|\mathbf{x}\| = \frac{1}{2}\Big\|\mathbf{x} - \frac{\|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{y}\|}\mathbf{y}\Big\| = \frac{1}{2}\Big\|\mathbf{x}-\mathbf{y}+\mathbf{y}-\frac{\|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{y}\|}\mathbf{y}\Big\| \leq \frac{1}{2}\big(\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|+\|\mathbf{y}\|\big(1-\frac{\|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{y}\|}\big)\big) = \frac{1}{2}(\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\| - \|\mathbf{x}\|) \leq \frac{1}{2}(\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$.

d) Se observa que $\frac{1}{4}(\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|) \leq \frac{1}{2}\sup(\|\mathbf{x}\|, \|\mathbf{y}\|)$, entonces por c) tenemos que:

$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \geq \frac{1}{2}\sup\{\|\mathbf{x}\|, \|\mathbf{y}\|\}\Big\|\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} - \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|}\Big\| \geq \frac{1}{4}(\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)\Big\|\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} - \frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|}\Big\|$.

17. Sea E un espacio vectorial normado y $T\colon E \longrightarrow E$ definida por $T(\mathbf{u}) = \mathbf{u} \iff \|\mathbf{u}\| \leq 1$ y $T(\mathbf{u}) = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \iff \|\mathbf{u}\| \geq 1$. Probar que $\|T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v})\| \leq 2\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|$.

Solución Si $\|\mathbf{u}\| \leq 1$, $\|\mathbf{v}\| \leq 1$, entonces $\|T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| \leq 2\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|$.

Si $\|\mathbf{u}\| \geq 1$, $\|\mathbf{v}\| \geq 1$, entonces $\|T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v})\| = \Big\|\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} - \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\Big\| \leq \frac{4}{\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|}\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| \leq 2\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|$, por el ejercicio 16d), página 33.

Por último, si $\|\mathbf{u}\| \leq 1$, $\|\mathbf{v}\| \geq 1$, entonces $\|T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v})\| = \Big\|\mathbf{u} - \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\Big\| \leq \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| + \Big\|\mathbf{v} - \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\Big\| = \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|\big(1-\frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\big) = \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\| - 1 \leq \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\| - \|\mathbf{u}\| \leq 2\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|$.

18. Sea E un espacio vectorial, N y N_2 normas sobre E. Sea $B_1 = \{\mathbf{x} \in E/N_1(\mathbf{x}) < 1\}$ y $B_2 = \{\mathbf{x} \in E/N_2(\mathbf{x}) < 1\}$. Probar que si $B_1 = B_2 \Longrightarrow N_1 = N_2$.

Solución Supongamos que $B_1 \subset B_2$, entonces $\forall \mathbf{x} \in E\setminus\{\mathbf{0}\}$, $\alpha \in [\,0, 1\,[$, $N_1\big(\frac{\alpha}{N_1(\mathbf{x})}\mathbf{x}\big) = \alpha < 1$, lo que significa que $\frac{\alpha}{N_1(\mathbf{x})}\mathbf{x} \in B_1 \subset B_2$, por lo que $N_2\big(\frac{\alpha}{N_1(\mathbf{x})}\mathbf{x}\big) < 1$, esto es $\alpha N_2(\mathbf{x}) < N_1(\mathbf{x})$. Si $\alpha \longrightarrow 1^-$ se obtiene $N_2(\mathbf{x}) \leq N_1(\mathbf{x})$.

Similarmente se prueba que si $B_1 \subset B_2 \Longrightarrow N_1(\mathbf{x}) \leq N_2(\mathbf{x})$ y entonces necesariamente $N_1(\mathbf{x}) = N_2(\mathbf{x})$, $\forall \mathbf{x} \in E$.

19. Sea E un espacio vectorial normado y sean $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in E$, $r > 0$, $s > 0$, $\lambda \neq 0$. Demostrar que:

a) $B(\mathbf{a}+\mathbf{b}, r+s) = B(\mathbf{a}, r) + B(\mathbf{b}, s)$.

b) $\lambda B(\mathbf{a}, r) = B(\lambda\mathbf{a}, |\lambda| r)$.

c) $B(\mathbf{a}, r) \cap B(\mathbf{b}, s) \neq \emptyset \iff \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\| < r+s$.

d) $B(\mathbf{a}, r) = B(\mathbf{b}, s) \iff (\mathbf{a}, r) = (\mathbf{b}, s)$.

Solución

a) Sea $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}+\mathbf{b}, r+s)$, sea $\mathbf{y} = \frac{1}{r+s}(r\mathbf{x} + s(\mathbf{a}+\mathbf{b}))$, $\mathbf{u} = \mathbf{y} - \mathbf{b}$, $\mathbf{v} = \mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{b}$, entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{x}$, $\|\mathbf{u} - \mathbf{a}\| = \|\mathbf{y} - (\mathbf{a}+\mathbf{b})\| = \frac{r}{r+s}\|\mathbf{x} - (\mathbf{a}+\mathbf{b})\| < r$. Por otro lado, $\|\mathbf{v} - \mathbf{b}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \frac{s}{r+s}\|\mathbf{x} - (\mathbf{a}+\mathbf{b})\| < s \Longrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v} \in B(\mathbf{a}, r) + B(\mathbf{b}, s)$.

Recíprocamente, sea $\mathbf{u} \in B(\mathbf{a}, r)$, $\mathbf{v} \in B(\mathbf{b}, s)$, entonces $\|\mathbf{u} + \mathbf{v} - (\mathbf{a}+\mathbf{b})\| \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{a}\| + \|\mathbf{v} - \mathbf{b}\| < r + s$, por lo que $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in B(\mathbf{a}+\mathbf{b}, r+s)$.

b) Sea $\mathbf{x} \in \lambda B(\mathbf{a}, r) \Longrightarrow \mathbf{x} = \lambda\mathbf{y}$, $\mathbf{y} \in B(\mathbf{a}, r) \Longrightarrow \|\mathbf{x} - \lambda\mathbf{a}\| = |\lambda|\|\mathbf{y} - \mathbf{a}\| < |\lambda| r$, entonces $\mathbf{x} \in B(\lambda\mathbf{a}, |\lambda| r)$.

Inversamente, sea $\mathbf{y} \in B(\lambda\mathbf{a}, |\lambda| r) \Longrightarrow \|\mathbf{y} - \lambda\mathbf{a}\| < |\lambda| r \Longrightarrow \|\mathbf{y}/\lambda - \mathbf{a}\| < r \Longrightarrow \mathbf{x} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{y} \in B(\mathbf{a}, r)$, por lo que $\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x} \in \lambda B(\mathbf{a}, r)$.

c) Si existe $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, r) \cap B(\mathbf{b}, s) \Longrightarrow \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a} - \mathbf{x}\| + \|\mathbf{b} - \mathbf{x}\| < r + s$.

Recíprocamente, supongamos que $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| < r + s$, entonces si $\mathbf{a} = \mathbf{b} \Longrightarrow B(\mathbf{a}, r) \cap B(\mathbf{b}, s) = B(\mathbf{a}, \min\{r, s\}) \neq \emptyset$.

Si $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$, $\exists \lambda$ tal que $1 - \frac{s}{\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|} < \lambda < \frac{r}{\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|}$. Sea $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \lambda(\mathbf{b} - \mathbf{a})$, entonces $\|\mathbf{a} - \mathbf{c}\| = |\lambda|\|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| < r$ y $\|\mathbf{b} - \mathbf{c}\| = (1 - \lambda)\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| < s$, por lo que $\mathbf{c} \in B(\mathbf{a}, r) \cap B(\mathbf{b}, s)$.

d) Supongamos $B(\mathbf{a}, r) = B(\mathbf{b}, s)$ y $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$, entonces $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que si $N \geq \frac{\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|}{r}$. Sea $\mathbf{c}_n = \mathbf{a} + \big(\frac{r}{\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|} - \frac{1}{n}\big)(\mathbf{a} - \mathbf{b})$, entonces $\|\mathbf{c}_n - \mathbf{a}\| = \big(\frac{r}{\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|} - \frac{1}{n}\big)\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| < r$, si $n > N$, por lo tanto $\mathbf{c}_n \in B(\mathbf{a}, r) = B(\mathbf{b}, s)$ y en consecuencia $\|\mathbf{c}_n - \mathbf{b}\| < s$, si $n > N$, es decir $\big|\frac{r}{\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|} - \frac{1}{n} + 1\big| \cdot \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| < s$. En particular se deduce que $(1 - \frac{1}{n})\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| < s - r$, si $n > N$ y cuando $n \to \infty$, $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| \leq s - r$. Análogamente $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| \leq r - s$ y finalmente $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, que es una contradicción. Así lo que supusimos es falso y $\mathbf{a} = \mathbf{b}$. Claramente, si $\mathbf{a} = \mathbf{b} \Longrightarrow r = s$.

La otra dirección es evidente.

2.3 Topología de un espacio vectorial normado

20. Demostrar que normas equivalentes definen los mismos abiertos i.e. todo abierto por una norma es unión de abiertos por la otra norma.

Solución Sean N_1 y N_2 dos normas equivalentes y sea $B_1(\mathbf{a}, r)$ una bola abierta para la norma N_1. Probemos que $B_1(\mathbf{a}, r) = \bigcup B_2$, donde los B_2 son bolas abiertas para la norma N_2.

Sea $\mathbf{y} \in B_1(\mathbf{a}, r) \Longrightarrow \|\mathbf{y}-\mathbf{a}\|_1 < r$, entonces $\exists\, \alpha,\, \beta > 0$ tales que $\alpha\|\mathbf{y}-\mathbf{a}\|_2 \leq \|\mathbf{y}-\mathbf{a}\|_1 \leq \beta\|\mathbf{y}-\mathbf{a}\|_2$, entonces $\exists\, \rho_{\mathbf{y}} > 0$ tal que $B_1(\mathbf{y}, \rho_{\mathbf{y}}) \subset B_1(\mathbf{a}, r)$ i.e. $\forall\, \mathbf{z} \in B_1(\mathbf{y}, \rho_{\mathbf{y}})$, $\|\mathbf{z}-\mathbf{a}\|_1 < r$. Probemos que $B_2(\mathbf{y}, \rho_{\mathbf{y}}/\beta) \subset B_1(\mathbf{a}, r)$.

En efecto, sea $\mathbf{z} \in B_2(\mathbf{y}, \rho_{\mathbf{y}}/\beta) \Longrightarrow \|\mathbf{z}-\mathbf{y}\|_2 < \rho_{\mathbf{y}}/\beta \Longrightarrow \beta\|\mathbf{z}-\mathbf{y}\|_2 < \rho_{\mathbf{y}} \Longrightarrow \|\mathbf{z}-\mathbf{y}\|_1 < \rho_{\mathbf{y}} \Longrightarrow \mathbf{z} \in B_1(\mathbf{y}, \rho_{\mathbf{y}}) \subset B_1(\mathbf{a}, r)$.

Así tenemos que $\displaystyle\bigcup_{\mathbf{y} \in B_1(\mathbf{a}, r)} B_2\left(\mathbf{y}, \rho_{\mathbf{y}}/\beta\right) = B_1(\mathbf{a}, r)$.

21. Dar un ejemplo en $\mathbb{R}$ de:

a) Una intersección de abiertos que no sea abierta.

b) Una unión de cerrados que no sea cerrada.

c) Demostrar que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ no es abierto ni cerrado.

Solución

a) $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left]\, 0, 1 + \frac{1}{n}\, \right[= \left]\, 0, 1\, \right]$.

b) $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[\, \frac{1}{n}, 1\, \right] = \left]\, 0, 1\, \right]$.

c) Observemos que $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ y que $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$.

22. Sea E un espacio vectorial normado, $A \subset E$ abierto y sea $\mathbf{x} \in E$; definimos $\mathbf{x} + A = \{\mathbf{x} + \mathbf{a} / \mathbf{a} \in A\}$. Demostrar que $\mathbf{x} + A$ es un abierto.

Si $B \subset E$ definimos $B + A = \{\mathbf{b} + \mathbf{a} / \mathbf{b} \in B, \mathbf{a} \in A\}$; pruebe que $B + A$ es un abierto.

Solución Sea $\mathbf{z} \in \mathbf{x} + A \Longrightarrow \mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{a}$, con $\mathbf{a} \in A \Longrightarrow \exists\, \rho > 0$ tal que $B(\mathbf{a}, \rho) \subset A$, entonces $B(\mathbf{z}, \rho) = B(\mathbf{a} + \mathbf{x}, \rho) \subset \mathbf{x} + A$. En efecto, sea $\mathbf{y} \in B(\mathbf{a} + \mathbf{x}, \rho) \Longrightarrow \|\mathbf{y} - \mathbf{a} - \mathbf{x}\| = \|(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \mathbf{a}\| < \rho \Longrightarrow \mathbf{y} - \mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, \rho) \subset A \Longrightarrow \mathbf{y} - \mathbf{x} = \mathbf{a}'$, con $\mathbf{a}' \in A \Longrightarrow \mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{a} \in \mathbf{x} + A$.

Observemos que $B + A = \displaystyle\bigcup_{\mathbf{b} \in B} \mathbf{b} + A$, por lo tanto $B + A$ es un abierto, al ser unión de abiertos.

23. Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = \operatorname{sen} \frac{1}{x}\}$, $B = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 / |y| \leq 1\}$. Demostrar que $B \subset \bar{A}$.

Solución Sea $(0, y) \in B$ y sea $\alpha \in [\, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\,]$ tal que $\operatorname{sen}\, \alpha = y$. Dado $\epsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $0 < \dfrac{1}{n\pi+\alpha} < \epsilon \Longrightarrow$ sen $\dfrac{1}{\dfrac{1}{n\pi+\alpha}} =$ sen $(n\pi+\alpha) =$ sen $\alpha = y$, es decir $\left(\dfrac{1}{n\pi+\alpha}, y\right) \in B((0,y),\epsilon) \Longrightarrow A \cap B((0,y),\epsilon) \neq \emptyset$ i.e $(0,y) \in \bar{A}$.

24. Sea E un espacio vectorial normado, $A \subset E$, definimos la frontera de A por $\mathfrak{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{E\backslash A}$. Demostrar que:

a) $\mathfrak{Fr}(A) \subset A \Longleftrightarrow A$ es cerrado.

b) $\mathfrak{Fr}(A) \cap A = \emptyset \Longleftrightarrow A$ es abierto.

c) $\mathfrak{Fr}(A) = \emptyset \Longleftrightarrow A$ es abierto y cerrado.

Solución

a) ($\Longrightarrow$) Sea $\mathbf{x} \in E\backslash A \Longrightarrow \mathbf{x} \notin A \Longrightarrow \mathbf{x} \notin \mathfrak{Fr}(A) \Longrightarrow \mathbf{x} \notin \overline{A}$, por lo que $\exists \rho > 0$ tal que $B(\mathbf{x},\rho) \cap A = \emptyset$, o sea $B(\mathbf{x},\rho) \subset E\backslash A \Longrightarrow E\backslash A$ es abierto y A es cerrado.

($\Longleftarrow$) Si A es cerrado, $\overline{A} = A \Longrightarrow \mathfrak{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{E\backslash A} = A \cap \overline{E\backslash A} \subset A$.

b) ($\Longrightarrow$) Sea $\mathbf{x} \in A \Longrightarrow \mathbf{x} \notin \mathfrak{Fr}(A) \Longrightarrow \mathbf{x} \notin \overline{A}$ o $\mathbf{x} \notin \overline{E\backslash A} \Longrightarrow \mathbf{x} \notin \overline{E\backslash A}$ y existe $\rho > 0$ tal que $B(\mathbf{x},\rho) \cap (E\backslash A) = \emptyset \Longrightarrow B(\mathbf{x},\rho) \subset A$, i.e. A es abierto.

($\Longleftarrow$) Si A es abierto, $\overline{E\backslash A} = E\backslash A \Longrightarrow \mathfrak{Fr}(A) \cap A = \overline{E\backslash A} \cap \overline{A} \cap A = A \cap (E\backslash A) \cap \overline{A} = \emptyset \cap \overline{A} = \emptyset$.

c) ($\Longrightarrow$) $\mathfrak{Fr}(A) = \emptyset \subset A \Longrightarrow A$ es cerrado por la parte a) y $\mathfrak{Fr}(A) = \emptyset \Longrightarrow \mathfrak{Fr}(A) \cap A = \emptyset \Longrightarrow A$ es abierto, por la parte b).

($\Longleftarrow$) Si A es abierto, $\mathfrak{Fr}(A) \cap A = \emptyset$ y si A es cerrado, $\mathfrak{Fr}(A) \subset A \Longrightarrow \mathfrak{Fr}(A) = \emptyset$.

25. Dar un ejemplo de conjuntos de una parte $A \subset \mathbb{R}$ para la cual A, $\bar{A}$, $\overset{\circ}{A}$, $\overset{\circ}{\bar{A}}$, $\overline{\overset{\circ}{A}}$, $\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{A}}}$, $\overline{\overset{\circ}{\bar{A}}}$ sean dos a dos distintos.

Solución Se considera el conjunto $A = [\,0,1\,[\cup]\,1,2\,[\cup(]\,3,4\,[\cap\mathbb{Q}) \cup \{5\}$, entonces $\bar{A} = [\,0,2\,]\cup[\,3,4\,]\cup\{5\}$, $\overset{\circ}{A} =]\,0,1\,[\cup]\,1,2\,[$, $\overset{\circ}{\bar{A}} =]\,0,2\,[\cup]\,3,4\,[$, $\overline{\overset{\circ}{A}} = [\,0,2\,]$, $\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{A}}} =]\,0,2\,[$. Por último $\overline{\overset{\circ}{\bar{A}}} = [\,0,2\,]\cup[\,3,4\,]$ y los conjuntos son dos a dos distintos.

26. Sea E un espacio vectorial normado. Probar que:

a) A es abierto $\Longleftrightarrow \overset{\circ}{A} = A$

b) $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$

c) $\overset{\circ}{A} = E\backslash\, \overline{E\backslash A}$

d) $\overset{\circ}{\overbrace{A\backslash B}} = \overset{\circ}{A} \backslash \bar{B}$

e) $\overline{\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{A}}}} = \overline{\overset{\circ}{A}}$

f) $\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{\bar{A}}}} = \overset{\circ}{\bar{A}}$

g) $A \subset B \Longrightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.

Solución

a) Es evidente por la definición pues si A es abierto $\overset{\circ}{A} = A$. Inversamente si $\overset{\circ}{A} = A$, entonces es abierto pues $\overset{\circ}{A}$ es abierto.

b) Se observa que $\overset{\circ}{A} \subset A$ y $\overset{\circ}{B} \subset B$, luego $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subset A \cap B \Longrightarrow \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}}$. Por otro lado $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} \subset A \cap B \subset A \Longrightarrow \overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} \subset \overset{\circ}{A}$, por ser $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}}$ el mayor abierto contenido en $A \cap B$.

De la misma forma se prueba que $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} \subset \overset{\circ}{B}$ y tenemos que $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} \subset \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.

c) Se pueden establecer las siguientes equivalencias: $\mathbf{x} \in \overset{\circ}{A} \Longleftrightarrow \exists \lambda > 0$ tal que $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}, \lambda) \subset \overset{\circ}{A} \subset A \Longleftrightarrow \exists \lambda > 0$ tal que $B(\mathbf{x}, \lambda) \cap E \backslash A = \emptyset \Longleftrightarrow \mathbf{x} \notin \overline{E \backslash A} \Longleftrightarrow \mathbf{x} \in E \backslash \overline{E \backslash A}$.

d) $\overset{\circ}{\overbrace{A \backslash B}} = \overset{\circ}{\overbrace{A \cap (E \backslash B)}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{\overbrace{E \backslash B}} = \overset{\circ}{A} \cap (E \backslash \bar{B})$, por la parte c), pero esto es igual a $\overset{\circ}{A} \backslash \bar{B}$.

e) $\overset{\circ}{A} \subset \overline{\overset{\circ}{A}} \Longrightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{A}}} \Longrightarrow \overline{\overset{\circ}{A}} \subset \overline{\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{A}}}}$. Por otro lado $\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{A}}} \subset \overline{\overset{\circ}{A}} \Longrightarrow \overline{\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{A}}}} \subset \overline{\overline{\overset{\circ}{A}}} = \overline{\overset{\circ}{A}}$.

f) $\overset{\circ}{\bar{A}} \subset \overline{\overset{\circ}{\bar{A}}} \Longrightarrow \overset{\circ}{\overset{\circ}{\bar{A}}} = \overset{\circ}{\bar{A}} \subset \overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{\bar{A}}}}$ y también $\overset{\circ}{\bar{A}} \subset \bar{A} \Longrightarrow \overline{\overset{\circ}{\bar{A}}} \subset \bar{\bar{A}} = \bar{A} \Longrightarrow \overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{\bar{A}}}} \subset \overset{\circ}{\bar{A}}$.

g) $A \subset B \Longrightarrow \overset{\circ}{A} \subset A \subset B \Longrightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$, por ser $\overset{\circ}{B}$ el abierto más grande contenido en B.

27. Sea E un espacio vectorial normado y sea $A \subset E$ un abierto, demostrar que $\overline{A \cup (E \backslash \bar{A})} = E$.

Solución Supongamos que $E \not\subset \overline{A \cup (E \backslash \bar{A})}$, entonces existe un elemento $\mathbf{x} \in E$ tal que $\mathbf{x} \notin \overline{A \cup (E \backslash \bar{A})}$. De esta forma existe $r_0 > 0$ tal que $B(\mathbf{x}, r_0) \cap (A \cup (E \backslash \bar{A})) = \emptyset$. Así que $B(\mathbf{x}, r_0) \subset E \backslash (A \cup (E \backslash \bar{A})) = (E \backslash A) \cap (E \backslash (E \backslash \bar{A})) = (E \backslash A) \cap \bar{A}$ y en particular, $B(\mathbf{x}, r_0) \subset E \backslash A \Longrightarrow B(\mathbf{x}, r_0) \cap A = \emptyset \Longrightarrow \mathbf{x} \notin \bar{A} \Longrightarrow \mathbf{x} \in E \backslash \bar{A}$ que es una contradicción. Así debe tenerse $E \subset \overline{A \cup (E \backslash \bar{A})}$. La otra inclusión es obvia.

28. Sea E un espacio vectorial normado, A un abierto de E y $B \subset E$. Demostrar que $\overline{A \cap \bar{B}} = \overline{A \cap B}$. Dar un ejemplo de abiertos A y B de $\mathbb{R}$ tales que $A \cap \bar{B}$, $\bar{A} \cap B$, $\overline{A \cap B}$, $\bar{A} \cap \bar{B}$ sean dos a dos distintos.

Solución Es claro que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A \cap \bar{B}}$.

Sea $\mathbf{x} \in \overline{A \cap \bar{B}}$, entonces $\forall \epsilon > 0$ se cumple $B(\mathbf{x}, \epsilon) \cap A \cap \bar{B} \neq \emptyset$. Sea $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, \epsilon) \cap A \cap \bar{B} \Longrightarrow$

$\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, \epsilon) \cap A$ que es abierto por ser intersección de dos abiertos. Luego existe un α tal que $B(\mathbf{y}, \alpha) \subset B(\mathbf{x}, \epsilon) \cap A$. Pero $\mathbf{y} \in \bar{B} \Longrightarrow \emptyset \neq B(\mathbf{y}, \alpha) \cap B \subset B(\mathbf{x}, \epsilon) \cap A \cap B$, por lo tanto $\mathbf{x} \in \overline{A \cap B}$.

Para los ejemplos tomamos $A =]\,0,1\,[\cup]\,3,5\,[$ y $B =]\,2,3\,[\cup]\,4,6\,[$, entonces $A \cap \bar{B} = [\,4,5\,[$, $\bar{A} \cap B =]\,4,5\,]$, $\overline{A \cap B} = [\,4,5\,]$, $\bar{A} \cap \bar{B} = \{3\} \cup [\,4,5\,]$.

29. Sea E un espacio vectorial normado. Demostrar que:

a) Si U y V son abiertos y si $\bar{U} = \bar{V} = E \Longrightarrow \overline{U \cap V} = E$.

b) Si U y V son abiertos de E y si $U \cap V = \emptyset \Longrightarrow \mathring{\bar{U}} \cap \mathring{\bar{V}} = \emptyset$.

c) Si F y G son cerrados con $\mathring{F} = \mathring{G} = \emptyset \Longrightarrow \overbrace{F \cup G}^{\circ} = \emptyset$.

Solución

a) Sea $\mathbf{x} \in E$, como $\mathbf{x} \in \bar{U} = E \Longrightarrow B(\mathbf{x}, \epsilon) \cap U \neq \emptyset, \forall \epsilon > 0$. Si tomamos $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, \epsilon) \cap U$, entonces existe $\alpha > 0$ tal que $B(\mathbf{y}, \alpha) \subset B(\mathbf{x}, \epsilon) \cap U$, pero $\mathbf{y} \in E = \bar{V}$, por lo que $B(\mathbf{y}, \alpha) \cap V \neq \emptyset$ y $\emptyset \neq B(\mathbf{y}, \alpha) \cap V \subset B(\mathbf{x}, \epsilon) \cap U \cap V$ y como esto es cierto $\forall \epsilon > 0$, se tiene que $\mathbf{x} \in \overline{U \cap V}$.

b) Dado que $U \cap V = \emptyset \Longrightarrow U \subset E \backslash V \Longrightarrow \bar{U} \subset \overline{E \backslash V} = E \backslash \mathring{V} = E \backslash V \Longrightarrow \mathring{\bar{U}} \subset \overbrace{E \backslash V}^{\circ} = E \backslash \bar{V} \Longrightarrow \mathring{\bar{U}} \cap \bar{V} = \emptyset \Longrightarrow \mathring{\bar{U}} \cap \mathring{\bar{V}} = \emptyset$.

c) $E \backslash \mathring{F} = \overline{E \backslash F} = E \backslash \mathring{G} = \overline{E \backslash G} = E$. Por la parte a) se tiene que $\overline{(E \backslash F) \cap (E \backslash G)} = E \Longrightarrow \overline{E \backslash (F \cup G)} = E \backslash \overbrace{F \cup G}^{\circ} = E \Longrightarrow \overbrace{F \cup G}^{\circ} = \emptyset$.

30. Sea E un espacio vectorial normado, sea $\mathbf{a} \in E$ y F un cerrado tal que $\mathbf{a} \notin F$. Demostrar que existen dos abiertos disjuntos U y V tales que $\mathbf{a} \in U$ y $F \subset V$.

Solución Sea $\rho = \frac{1}{2} d(\mathbf{a}, F) > 0$, sea $U = B(\mathbf{a}, \rho)$ y sea $F \subset V = \bigcup_{\mathbf{x} \in F} B(\mathbf{x}, \rho)$ y tenemos que $U \cap V = \emptyset$, pues si no existiría $\mathbf{y} \in U \cap V$, con $\|\mathbf{y} - \mathbf{a}\| < \rho$ y $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < \rho$, para algún $\mathbf{x} \in F \Longrightarrow \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\| + \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < 2\rho \Longrightarrow 2\rho = \inf_{\mathbf{x} \in F} \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < 2\rho$, que es una contradicción.

31. Sea E un espacio vectorial normado y sea A una parte de E, se dice A es una parte rara (o el conjunto es raro) sí y sólo si $\mathring{\bar{A}} = \emptyset$. Las siguientes tres propiedades son equivalentes:

a) A es rara

b) $\bar{A}$ es rara.

c) $\overline{E\backslash\bar{A}} = E$.

d) Probar que si A y B son raros, entonces $A \cup B$ es raro.

Solución

A es raro $\iff \overset{\circ}{\bar{A}} = \emptyset \iff E\backslash \overset{\circ}{\bar{A}} = \overline{E\backslash\bar{A}} = E$. Por otro lado $\overset{\circ}{\bar{\bar{A}}} = \overset{\circ}{\bar{A}}$, entonces $\bar{A}$ es raro $\iff A$ es raro.

Ahora se aplica el ejercicio 29 c), página 39, con $\bar{A} = F$ y $\bar{B} = G$, entonces $\overset{\circ}{\widehat{F \cup G}} = \emptyset = \overset{\circ}{\widehat{\bar{A} \cup \bar{B}}} = \overset{\circ}{\overline{A \cup B}}$.

32. Sea E un espacio vectorial normado, $X \subset E$. Probar que las siguientes propiedades son equivalentes:

a) Todo punto de X es un cerrado de X.

b) Para todo par de puntos distintos de X, existe un vecindario en X alrededor de uno de los puntos que no contiene al otro.

c) Para todo $\mathrm{x} \in X$ la intersección de los vecindarios de x en X es igual a $\{\mathrm{x}\}$.

d) Para toda parte A de X, la unión de partes cerradas de X inducidas en A es igual que A.

Solución

a) $\Longrightarrow$ b) Si $\mathrm{x} \neq \mathrm{y}$, entonces $X\backslash\{\mathrm{x}\}$ es un abierto (es decir un vecindario) que contiene a y pero no a x.

b) $\Longrightarrow$ c) En efecto, si $\mathbf{y} \in \bigcap_{\mathbf{x}\in X} V_{\mathbf{x}}$ (con $V_{\mathbf{x}}$ un vecindario de x), entonces $\mathbf{y} \in X\backslash\{\mathrm{y}\}$, ya que $X\backslash\{\mathrm{y}\}$ es un abierto que contiene al x, lo cual es una contradicción.

c) $\Longrightarrow$ a) Sea $\mathbf{x} \in X$, $\forall \mathbf{y} \in X\backslash\{\mathrm{x}\}$, existe un abierto $U_{\mathbf{y}}$ tal que $\mathbf{y} \in U_{\mathbf{y}}$ y $\mathrm{x} \notin U_{\mathbf{y}}$, esto implica que $X\backslash\{\mathrm{x}\} = \bigcup_{\mathbf{y}\in X\backslash\{\mathbf{x}\}} U_{\mathbf{y}}$ que es abierto, lo que implica que $\{\mathrm{x}\}$ es un cerrado.

a) $\Longrightarrow$ d) $A = \bigcup_{\mathbf{x}\in A} \{\mathrm{x}\} \subset X$.

d) $\Longrightarrow$ a) Sea $A = \{\mathrm{x}\} \subset X$, como es la unión de cerrados, $\{\mathrm{x}\}$ es cerrado.

33. Sea E un espacio vectorial normado, X una parte de E. Las nociones de abierto, cerrado, interior, adherencia son relativas a X. Las siguientes propiedades son equivalentes:

a) $\forall U \subset X$ abierto de X, $\bar{U}$ es abierto de X.

b) $\forall F\subset X$ cerrado de X, $\overset{\circ}{F}$ es un cerrado de X.

c) $\forall A\subset X$, $\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{A}}} = \overline{\overset{\circ}{A}}$.

d) $\forall B\subset X$, $\overline{\overset{\circ}{\bar{B}}} = \overset{\circ}{\bar{B}}$.

e) $\forall U$, V abiertos de X tales que $U\cap V=\emptyset$, se tiene $\bar{U}\cap\bar{V}=\emptyset$.

f) $\forall F$, G cerrados de X tales que $F\cup G = X$, se tiene $\overset{\circ}{F}\cup\overset{\circ}{G} = X$.

Solución

(a $\Longrightarrow$ b) Sea $F\subset X$ cerrado de X, entonces $\overline{X\backslash F} = X\backslash\overset{\circ}{F}$ es abierto de $X \Longrightarrow \overset{\circ}{F}$ es cerrado de X.

(b $\Longrightarrow$ a) Sea $U\subset X$ abierto de X, entonces $\overset{\circ}{\overbrace{X\backslash U}} = X\backslash\bar{U}$ es cerrado de $X \Longrightarrow \bar{U}$ es abierto de X.

(c $\Longrightarrow$ d) Sea $B\subset X \Longrightarrow \overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{\overbrace{X\backslash B}}}} = \overline{\overset{\circ}{\overbrace{X\backslash B}}} \Longrightarrow \overset{\circ}{\overline{X\backslash\bar{B}}} = \overline{X\backslash\bar{B}} \Longrightarrow \overset{\circ}{\overbrace{X\backslash\overset{\circ}{\bar{B}}}} = X\backslash\overline{\overset{\circ}{\bar{B}}} \Longrightarrow \overline{\overset{\circ}{\bar{B}}} = \overset{\circ}{\bar{B}}$.

(d $\Longrightarrow$ c) Sea $A\subset X \Longrightarrow \overline{\overset{\circ}{\overline{X\backslash A}}} = \overset{\circ}{\overline{X\backslash A}} \Longrightarrow \overline{\overset{\circ}{\overbrace{X\backslash\overset{\circ}{A}}}} = \overset{\circ}{\overbrace{X\backslash\overset{\circ}{A}}} \Longrightarrow \overline{X\backslash\overline{\overset{\circ}{A}}} = X\backslash\overline{\overset{\circ}{A}} \Longrightarrow X\backslash\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{A}}} = X\backslash\overline{\overset{\circ}{A}} \Longrightarrow \overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{A}}} = \overline{\overset{\circ}{A}}$.

(e $\Longrightarrow$ f) Sean F y G cerrados de X tales que $F\cup G = X \Longrightarrow X\backslash F\cap X\backslash G = \emptyset$ y son abiertos, con lo cual $\overline{X\backslash F}\cap\overline{X\backslash G} = \emptyset = X\backslash\overset{\circ}{F}\cap X\backslash\overset{\circ}{G} = X\backslash\overset{\circ}{F}\cup\overset{\circ}{G}$ y por lo tanto $\overset{\circ}{F}\cup\overset{\circ}{G} = X$.

(f $\Longrightarrow$ e) Sean U y V abiertos de X tales que $U\cap V = \emptyset \Longrightarrow X\backslash U\cup X\backslash V = X$ y son cerrados, entonces $\overset{\circ}{\overbrace{X\backslash U}}\cup\overset{\circ}{\overbrace{X\backslash V}} = X = X\backslash\bar{U}\cup X\backslash\bar{V} = X\backslash\bar{U}\cap\bar{V}$ y por lo tanto $\bar{U}\cap\bar{V} = \emptyset$.

(a $\Longrightarrow$ c) Sea $A\subset X$, entonces $\overset{\circ}{A}$ es un abierto y $\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{A}}}\subset\overline{\overset{\circ}{A}}$, con $\overline{\overset{\circ}{A}}$ abierto. Pero $\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{A}}}$ es el abierto más grande contenido en $\overline{\overset{\circ}{A}}$ que es abierto $\Longrightarrow \overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{A}}} = \overline{\overset{\circ}{A}}$.

(c $\Longrightarrow$ a) Sea $U\subset X$ abierto, entonces $\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{U}}} = \overline{\overset{\circ}{U}} \Longrightarrow \overset{\circ}{\bar{U}} = \bar{U}$ que es abierto.

(a $\Longrightarrow$ e) Sean U y V abiertos tales que $U\cap V = \emptyset \Longrightarrow U\subset X\backslash V \Longrightarrow \bar{U}\subset\overline{X\backslash V} = X\backslash V \Longrightarrow \bar{U} = \overset{\circ}{\bar{U}} = \overset{\circ}{\overbrace{X\backslash V}} = X\backslash\bar{V} \Longrightarrow \bar{U}\cap\bar{V} = \emptyset$.

(f $\Longrightarrow$ a) Sea U abierto de X, entonces $U\cap\overset{\circ}{\overbrace{X\backslash U}} = \emptyset \Longrightarrow \bar{U}\cap\overline{\overset{\circ}{\overbrace{X\backslash U}}} = \bar{U}\cap X\backslash\overset{\circ}{\bar{U}} = \emptyset \Longrightarrow \bar{U}\subset\overset{\circ}{\bar{U}}$, por lo tanto $\bar{U} = \overset{\circ}{\bar{U}}$ es abierto de X.

34. Sea E un espacio vectorial normado, a$\in E$, $\rho{>}0$, probar que $\overline{B(\mathbf{a},\rho)} = \bar{B}(\mathbf{a},\rho)$ y $\overset{\circ}{\overbrace{\bar{B}(\mathbf{a},\rho)}} =$ $B(\mathbf{a},\rho)$.

Solución Sea $\mathbf{x} \in \bar{B}(\mathbf{a},\rho)$ y sea $\mathbf{x}_n = \frac{1}{n}\mathbf{a} + (1-\frac{1}{n})\mathbf{x}$, entonces $\mathbf{x}_n \longrightarrow \mathbf{x}$ y $\mathbf{x}_n \in B(\mathbf{a},\rho)$, pues $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{a}\| = (1-\frac{1}{n})\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| < \rho$, por lo tanto $\mathbf{x} \in \overline{B(\mathbf{a},\rho)}$.

Sea $\mathbf{x} \in \overline{B(\mathbf{a},\rho)}$, entonces $\forall n \in \mathbb{N}$, existe $\mathbf{x}_n \in B(\mathbf{x},\frac{1}{n}) \cap B(\mathbf{a},\rho)$, con lo cual $\mathbf{x}_n \longrightarrow \mathbf{x}$, con $\mathbf{x}_n \in B(\mathbf{a},\rho) \Longrightarrow \mathbf{x} \in \bar{B}(\mathbf{a},\rho)$.

Sea $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a},\rho) \subset \bar{B}(\mathbf{a},\rho)$, entonces $\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| < \rho$ y si tomamos $\rho' = \rho - \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|$, se tiene que $B(\mathbf{x},\rho') \subset B(\mathbf{a},\rho) \subset \bar{B}(\mathbf{a},\rho) \Longrightarrow \mathbf{x} \in B(\mathbf{x},\rho') \subset \overset{\circ}{\overbrace{\bar{B}(\mathbf{a},\rho)}}$, ya que $\overset{\circ}{\overbrace{\bar{B}(\mathbf{a},\rho)}}$ es el mayor abierto contenido en $\bar{B}(\mathbf{a},\rho)$, pues si $\|\mathbf{x}_n-\mathbf{a}\| < \rho \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \|\mathbf{x}_n - \mathbf{a}\| = \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| \le \rho$.

Sea $\mathbf{x} \in \overset{\circ}{\overbrace{\bar{B}(\mathbf{a},\rho)}}$, entonces $\exists\, \rho' > 0$ tal que $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x},\rho') \subset \bar{B}(\mathbf{a},\rho) \Longrightarrow \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| \le \rho$, con lo cual se concluye que $\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| < \rho$. En efecto, si $\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| = \rho$ se cumple que $B(\mathbf{x},\rho') \not\subset \bar{B}(\mathbf{a},\rho)$, $\forall\, \rho' > 0$, lo que es una contradicción. Así se concluye que $\overset{\circ}{\overbrace{\bar{B}(\mathbf{a},\rho)}} \subset B(\mathbf{a},\rho)$.

35. Sea E un espacio vectorial normado y sean A y B dos partes de E, $\lambda \in \mathbb{R}$. Demostrar $\bar{A}+\bar{B} \subset \overline{A+B}$, $\overline{\lambda A} = \lambda\bar{A}$, $\overset{\circ}{A} + \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A+B}}$ y $\overset{\circ}{\overbrace{\lambda A}} = \lambda\overset{\circ}{A}$. Probar además que se puede tener $\bar{A}+\bar{B} \neq \overline{A+B}$ y $\overset{\circ}{\overbrace{A+B}} \neq \overset{\circ}{A} + \overset{\circ}{B}$.

Solución Sea $\mathbf{x} \in \bar{A}+\bar{B}$, entonces existen $\mathbf{a} \in \bar{A}$, $\mathbf{b} \in \bar{B}$ tales que $\mathbf{x} = \mathbf{a}+\mathbf{b}$. Por otro lado, existen dos sucesiones $(\mathbf{a}_n)_n \subset A$ y $(\mathbf{b}_n)_n \subset B$, tales que $\mathbf{a}_n \longrightarrow \mathbf{a}$ y $\mathbf{b}_n \longrightarrow \mathbf{b}$. Así, $\mathbf{a}_n + \mathbf{b}_n \longrightarrow \mathbf{x}$ y $\mathbf{x} \in \overline{A+B}$.

Sea $\mathbf{x} \in \overline{\lambda A}$, entonces $\exists (\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \lambda A$ tal que $\mathbf{x}_n \longrightarrow \mathbf{x}$, con $\mathbf{x}_n = \lambda\mathbf{y}_n$, $\mathbf{y}_n \in A$. De esta forma $\mathbf{y}_n \longrightarrow \dfrac{1}{\lambda}\mathbf{x} \in \bar{A}$, por lo que $\mathbf{x} \in \lambda\bar{A}$.

Similarmente, si $\mathbf{x} \in \lambda\bar{A} \Longrightarrow \mathbf{x} = \lambda\mathbf{y}$, con $\mathbf{y} \in \bar{A}$. Así, existe una sucesión $(\mathbf{y}_n)_n$ tal que $\mathbf{y}_n \longrightarrow \mathbf{y}$, con $\mathbf{y}_n \in A$, pero $\lambda\mathbf{y}_n \longrightarrow \lambda\mathbf{y} = \mathbf{x} \in \overline{\lambda A}$.

Sea $\mathbf{x} \in \overset{\circ}{A} + \overset{\circ}{B}$, entonces $\mathbf{x} = \mathbf{a}+\mathbf{b}$, con $\mathbf{a} \in \overset{\circ}{A}$, $\mathbf{b} \in \overset{\circ}{B}$ y existen α y $\beta > 0$ tales que $B(\mathbf{a},\alpha) \subset \overset{\circ}{A} \subset A$ y $B(\mathbf{b},\beta) \subset \overset{\circ}{B} \subset B$ y como $B(\mathbf{a}+\mathbf{b},\alpha+\beta) = B(\mathbf{a},\alpha) + B(\mathbf{b},\beta) \subset A+B \Longrightarrow \mathbf{x} \in \overset{\circ}{\overbrace{A+B}}$.

Sea $\mathbf{x} \in \overset{\circ}{\overbrace{\lambda A}}$, existe $\rho > 0$ tal que $B(\mathbf{x},\rho) \subset \lambda A \Longrightarrow B(\dfrac{1}{\lambda}\mathbf{x}, \dfrac{1}{|\lambda|}\rho) \subset A \Longrightarrow \dfrac{1}{\lambda}\mathbf{x} \in \overset{\circ}{A}$, por lo que $\mathbf{x} \in \lambda\overset{\circ}{A}$.

De la misma manera, si $\mathbf{x} \in \lambda \overset{\circ}{A}$, entonces $\frac{1}{\lambda}\mathbf{x} \in \overset{\circ}{A} \Longrightarrow \exists\, \rho > 0$ tal que $B(\frac{1}{\lambda}\mathbf{x}, \rho) \subset A \Longrightarrow$ $B(\mathbf{x}, |\lambda|\rho) \subset A$ y $\mathbf{x} \in \overset{\circ}{\widehat{\lambda A}}$.

Sea $E = \mathbb{R}^2$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy = 1\}$, $B = \mathbb{R} \times \{0\}$, entonces $\bar{A} + \bar{B} = A + B =$ $\{(x + x', \frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2 / x \in \mathbb{R}^*,\ x' \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2 \backslash (\mathbb{R} \times \{0\})$ y de esta forma $\overline{A + B} = \mathbb{R}^2$. También, $\overset{\circ}{A} + \overset{\circ}{B} = \emptyset$, $\overset{\circ}{\widehat{A + B}} = A + B$.

36. Sea E un espacio vectorial normado, F un subespacio vectorial de E tal que $\overset{\circ}{F} \neq \emptyset$, probar que $F = E$.

    Solución Dado que $\overset{\circ}{F} \neq \emptyset$, $\exists \mathbf{a} \in \overset{\circ}{F} \subset F$ y $\rho > 0$ tal que $B(\mathbf{a}, \rho) \subset F$. Sea $\mathbf{x} \in E$ tal que $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$, entonces $\mathbf{a} + \dfrac{\rho}{2\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|}(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \in B(\mathbf{a}, \rho) \subset F$ y como F es un espacio vectorial normado se deduce que $\mathbf{x} - \mathbf{a} \in F \Longrightarrow \mathbf{x} \in F$.

37. Sea E un espacio vectorial normado, F un subespacio de E, demostrar que $\bar{F}$ es un subespacio de E.

    Solución Sean $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y} \in \bar{F}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, existen dos sucesiones $(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(\mathbf{y}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset F$ tales que $\mathbf{x}_n \longrightarrow \mathbf{x}$ y $\mathbf{y}_n \longrightarrow \mathbf{y}$, por lo que $\alpha\mathbf{x}_n + \beta\mathbf{y}_n \in F$ y $\alpha\mathbf{x}_n + \beta\mathbf{y}_n \longrightarrow \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in \bar{F}$.

38. Sea E un espacio vectorial normado, U un abierto de E, C el cono de vértice $\mathbf{0}$ sobre U, es decir $C = \{\lambda\mathbf{x} / \lambda > 0,\ \mathbf{x} \in U\}$.

    a) Demostrar que C es un abierto.

    b) Demostrar que si $\mathbf{0} \in U \Longrightarrow C = E$.

    Solución

    a) $C = \bigcup_{\lambda > 0} \{\lambda\mathbf{x} / \mathbf{x} \in U\}$ es abierto, ya que $\{\lambda\mathbf{x} / \mathbf{x} \in U\}$ es un abierto, $\forall\, \lambda > 0$.

    b) Dado que $\mathbf{0} \in U$ abierto, $\exists\, B(\mathbf{0}, \rho) \subset U$. Sea $\mathbf{x} \in E \Longrightarrow \mathbf{y} = \dfrac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}\dfrac{\rho}{2} \in U$, por lo que si $\lambda = 2\dfrac{\|\mathbf{x}\|}{\rho}$ tenemos que $\lambda\mathbf{y} = \mathbf{x} \in C$.

39. Determinar todos los cerrados de $\mathbb{R}$ conteniendo a $\mathbb{Q}$. Dar un ejemplo de una parte de $\mathbb{R}$ que no sea la intersección de un abierto y un cerrado.

    Solución Sea F un cerrado tal que $\mathbb{Q} \subset F$, entonces $\mathbb{R} = \bar{\mathbb{Q}} \subset \bar{F} = F$ y $F = \mathbb{R}$. Además $\mathbb{Q}$ es una parte de $\mathbb{R}$ que no es intersección de un abierto y un cerrado, porque si $\mathbb{Q} = A \cap B$, con A abierto y B cerrado, entonces $\mathbb{Q} \subset B$ y $\mathbb{R} = \bar{\mathbb{Q}} \subset B \subset \mathbb{R}$, con lo que

$B = \mathbb{R}$. Luego $\mathbb{Q} = A \cap \mathbb{R} = A$ y $\mathbb{Q}$ sería, lo cual es una contradicción.

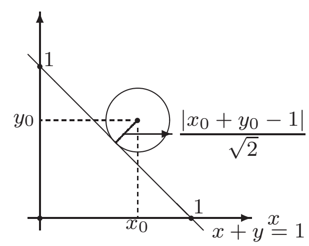
40. Demostrar que el conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x + y > 1\}$ es un abierto de $\mathbb{R}^2$ y que el conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 - (x^2+y^2) = 0\}$ es un cerrado de $\mathbb{R}^2$ de interior vacío, teniendo $(0,0)$ como punto aislado.

Solución Si $x_0+y_0>1$, $B\big((x_0,y_0), \dfrac{x_0+y_0-1}{\sqrt{2}}\big) \subset \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x+y>1\}$, pues la distancia de (x_0,y_0) a la recta $x+y-1=0$ es igual a $\dfrac{x_0+y_0-1}{\sqrt{2}}$[1].

Para probar la otra parte, se sabe que $x^3+x^2y+xy^2+y^3-x^2-y^2 = (x^2+y^2)(x+y) - (x^2+y^2) = (x^2+y^2)(x+y-1) = 0 \Longleftrightarrow x+y=1$ o $x=y=0$.

Así $E = \{(0,0)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x+y=1\}$ y $(0,0)$ es un punto aislado, puesto que $B((0,0), \frac{1}{\sqrt{2}}) \cap E = \{(0,0)\}$.

Por otro lado, $\forall (x,y) \in E$, $B((x,y),\rho) \not\subset E$, $\forall \rho > 0$, o sea $\overset{\circ}{E} = \emptyset$, pues $(x+\frac{\epsilon}{2}, y) \notin E$ ya que $x + \frac{\epsilon}{2} + y - 1 = \frac{\epsilon}{2} \neq 0$.



41. Sea $(u_n)_{n\geq 0}$ una sucesión de números positivos tales que $u_n \longrightarrow +\infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se da un cerrado F_n de $\mathbb{R}$ incluido en $\mathbb{R}\backslash [-u_n, u_n]$. Probar que $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ es cerrado de $\mathbb{R}$.

Solución Sean $A_n = \mathbb{R}\backslash F_n$, $F = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$, entonces $A = \mathbb{R}\backslash F = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ y $[-u_n, u_n] \subset A_n$.

Sea $x \in A$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Longrightarrow u_n > |x| + 1$ y existen $\epsilon_0, \ldots, \epsilon_{n_0} \in \mathbb{R}^+$ tales que $\forall n \in \{0, \ldots, n_0\}$, $B(x, \epsilon_n) \subset A_n$.

Sea $\epsilon = \inf\{1, \epsilon_0, \ldots, \epsilon_n\}$, entonces $B(x,\epsilon) \subset A_n$, $\forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow B(x,\epsilon) \subset A$, así que A es un abierto y por lo tanto F es un cerrado.

42. Sea U abierto de $\mathbb{R}$, a cada $x \in U$ se asocian los elementos x', x'' de $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ definido por $x' = \inf\{y \in \mathbb{R} / y < x, \,]y, x[\, \subset U\}$, $x'' = \sup\{z \in \mathbb{R} / x < z, \,]x, z[\, \subset U\}$ y se denota $I_x = \,]x', x''[$.

a) Probar que I_x es el intervalo abierto más grande que contiene a x y está contenido en U.

[1]Recuerde que la distancia de un punto (x_0,y_0) a la recta $ax+by+c=0$ es igual a $\dfrac{ax_0+by_0+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

b) Sea $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación estrictamente creciente y acotada; probar que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, existe a lo sumo un número finito de intervalos $I_x = \,]\,x', x''\,[$ distintos, tales que $f(x'') - f(x') > \frac{1}{n}$.

c) Deducir que U es la unión de una familia a lo sumo numerable de abiertos dos a dos disjuntos.

Solución

a) Sea $z \in I_x = \,]\,x', x''\,[\implies z < x$ o $z > x$.

Si $z < x \implies \,]\,z, x\,[\subset U$ ya que $x' \leq z \implies z \in U$.

Si $z > x \implies \,]\,x, z\,[\subset U$ ya que $z < x'' \implies z \in U$ i.e. $I_x \subset U$.

I_x es el intervalo abierto más grande que contiene a x y está contenido en U, ya que si tenemos un intervalo $J = \,]\,\alpha, \beta\,[$ con esta propiedad, $x' \leq \alpha$, $\beta \leq x''$.

b) En efecto, es claro que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ siempre se puede encontrar un intervalo $I_x = \,]\,x', x''\,[$ tal que $f(x'') - f(x') > \frac{1}{n}$, pues en caso contrario, $|f(x'') - f(x')| < \frac{1}{n}, \forall\, n \in \mathbb{N} \implies f(x'') = f(x')$, con $x' < x''$, que es una contradicción pues f es estrictamente creciente.

Si existe un número infinito de intervalos I_x disjuntos tales que $f(x'') - f(x') > \frac{1}{n}$, entonces dado $A > 0$, $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $n > A$, por lo que si escogemos n^2 intervalos con la propiedad, los ordenamos de modo que:

$x_1' < x_1'' < x_2' < \cdots < x_{n^2}' < x_{n^2}'' \implies f(x_i'') - f(x_i') > \frac{1}{n}$, $f(x_{i+1}'') - f(x_{i+1}') > \frac{1}{n}$, $f(x_{i+1}') - f(x_i'') \geq 0$, $\forall i = 1, \ldots, n^2 \implies f(x_{n^2}'') - f(x_{n^2}') + f(x_{n^2}') - f(x_{n^2-1}'') + f(x_{n^2-1}'') - f(x_{n^2-1}') + f(x_{n^2-1}') - f(x_{n^2-2}'') + f(x_{n^2-2}'') - f(x_{n^2-2}') + f(x_{n^2-2}') - \cdots + f(x_1'') - f(x_1') = f(x_{n^2}'') - f(x_1') > n^2\left(\frac{1}{n} + 0\right) = n > A$ i.e. f no es acotada, lo que es una contradicción.

Se concluye que los I_x son dos a dos disjuntos y que la suma de las longitudes de las imágenes de un número finito de intervalos I_x es inferior o igual a $M - m$, donde $M = \sup\limits_{x \in U} f(x)$, $m = \inf\limits_{x \in U} f(x)$.

c) Si U es acotado, usando $f = I\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ que es estrictamente creciente y acotada, por lo que $U = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} D_n$, donde D_n es la unión finita de todos los intervalos $I_x = \,]\,x', x''\,[$ tales que $f(x'') - f(x') = x'' - x' > \dfrac{1}{n}$.

Si U es un abierto no acotado, U se escribe como unión numerable de conjuntos acotados $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (]\,n, n+1\,[\,\cap U)$ y se usa la primera parte de c).

43. Sea E un espacio vectorial normado, $(A_i)_{i\in I}$ una familia de partes de E.

a) Probar que $\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} \subset \bigcap_{i\in I} \bar{A}_i$, $\bigcup_{i\in I} \bar{A}_i \subset \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$, $\overset{\circ}{\overbrace{\bigcap_{i\in I} A_i}} \subset \bigcap_{i\in I} \overset{\circ}{A_i}$ y $\bigcup_{i\in I} \overset{\circ}{A_i} \subset \overset{\circ}{\overbrace{\bigcup_{i\in I} A_i}}$.

b) Encontrar ejemplos en que la inclusión es estricta.

Solución

a) Se tiene que $\forall i \in I$; $\bigcap_{i\in I} A_i \subset A_i$, por lo que $\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} \subset \bar{A}_i$, $\forall i \in I$, luego $\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} \subset \bigcap_{i\in I} \bar{A}_i$.

Ahora $\forall i \in I$, $A_i \subset \bigcup_{i\in I} A_i \Longrightarrow \bar{A}_i \subset \overline{\bigcup_{i\in I} A_i} \Longrightarrow \bigcup_{i\in I} \bar{A}_i \subset \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$.

Por otro lado, $\bigcap_{i\in I} A_i \subset A_i, \forall i \in I \Longrightarrow \overset{\circ}{\overbrace{\bigcap_{i\in I} A_i}} \subset \overset{\circ}{A_i} \Longrightarrow \overset{\circ}{\overbrace{\bigcap_{i\in I} A_i}} \subset \bigcap_{i\in I} \overset{\circ}{A_i}$.

También se cumple, $\forall i \in I$, $\overset{\circ}{A_i} \subset \overset{\circ}{\overbrace{\bigcup_{i\in I} A_i}} \Longrightarrow \bigcup_{i\in I} \overset{\circ}{A_i} \subset \overset{\circ}{\overbrace{\bigcup_{i\in I} A_i}}$.

b) Para los ejemplos, tomemos $I = \{1,2\}$, $E = \mathbb{R}$ y $A_1 = \,]-1,0\,[$, $A_2 = \,]\,0,1\,[$. Así, $A_1 \cap A_2 = \emptyset = \overline{A_1 \cap A_2} \neq \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 = \{0\}$.

Sea $I = \mathbb{Q}$, $E = \mathbb{R}$ y $A_i = \{i\} \Longrightarrow \bigcup_{i\in I} \overline{\{i\}} = \mathbb{Q} \neq \overline{\bigcup_{i\in I} \{i\}} = \bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Sea $I = \mathbb{Q}$, $E = \mathbb{R}$, $A_i = \mathbb{R}\backslash\{i\} \Longrightarrow \bigcap_{i\in I} A_i = \mathbb{I} = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Por lo tanto $\overset{\circ}{\overbrace{\bigcap_{i\in I} A_i}} = \emptyset \neq \bigcap_{i\in I} \overset{\circ}{A_i} = \mathbb{I}$.

Por último, si se toma $I = \{1,2\}$, $E = \mathbb{R}$, $A_1 = [\,-1,0\,]$, $A_2 = [\,0,1\,] \Longrightarrow \overset{\circ}{A_1} \cup \overset{\circ}{A_2} = \,]-1,0\,[\cup]\,0,1\,[\, \neq \overset{\circ}{\overbrace{A_1 \cup A_2}} = \,]-1,1\,[$.

44. Sean E y F espacios vectoriales normados, $A \subset E$, $B \subset F$.

a) Probar que $\overline{A \times B} = \bar{A} \times \bar{B}$, $\overset{\circ}{\overbrace{A \times B}} = \overset{\circ}{A} \times \overset{\circ}{B}$.

b) $A \times B$ es cerrado en $E \times F \Longleftrightarrow A$ es cerrado de E y B es cerrado de F.

$A \times B$ es abierto en $E \times F \Longleftrightarrow A$ es abierto de E y B es abierto de F.

c) $\mathfrak{Fr}(A \times B) = \bar{A} \times \mathfrak{Fr}(B) \cup \mathfrak{Fr}(A) \times \bar{B}$.

Solución

a) Sea $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \overline{A \times B} \Longleftrightarrow \forall \lambda > 0,\ B((\mathbf{a}, \mathbf{b}), \lambda) \cap A \times B \neq \emptyset \Longleftrightarrow \forall \lambda > 0$ se cumple que

$\emptyset \neq B\big((\mathbf{a},\mathbf{b}),\frac{\lambda}{2}\big)\cap A\times B \subset B\big(\mathbf{a},\frac{\lambda}{2}\big)\times B\big(\mathbf{b},\frac{\lambda}{2}\big)\cap A\times B \subset B((\mathbf{a},\mathbf{b}),\lambda)\cap A\times B \Longleftrightarrow \forall\lambda>0,$
$B\big(\mathbf{a},\frac{\lambda}{2}\big)\cap A\neq\emptyset$ y $B\big(\mathbf{b},\frac{\lambda}{2}\big)\cap B\neq\emptyset \Longleftrightarrow \mathbf{a}\in\bar{A}$ y $\mathbf{b}\in\bar{B} \Longleftrightarrow (\mathbf{a},\mathbf{b})\in\bar{A}\times\bar{B}$.

Es fácil ver que $\overset{\circ}{A}\times\overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A\times B}}$, pues si $\overset{\circ}{A}\subset A$, $\overset{\circ}{B}\subset B \Longrightarrow \overset{\circ}{A}\times\overset{\circ}{B}\subset A\times B$, pero $\overset{\circ}{A}\times\overset{\circ}{B}$ es un abierto, lo que implica $\overset{\circ}{A}\times\overset{\circ}{B}\subset\overset{\circ}{\widehat{A\times B}}$.

Si $(\mathbf{a},\mathbf{b})\in\overset{\circ}{\widehat{A\times B}} \Longrightarrow \exists B((\mathbf{a},\mathbf{b}),\lambda)\subset\overset{\circ}{\widehat{A\times B}}\subset A\times B \Longrightarrow B\big(\mathbf{a},\frac{\lambda}{2}\big)\times B\big(\mathbf{b},\frac{\lambda}{2}\big)\subset A\times B \Longrightarrow$
$B\big(\mathbf{a},\frac{\lambda}{2}\big)\subset\overset{\circ}{A}$ y $B\big(\mathbf{b},\frac{\lambda}{2}\big)\subset\overset{\circ}{B}$, es decir $(\mathbf{a},\mathbf{b})\in\overset{\circ}{A}\times\overset{\circ}{B}$.

b) $A\times B$ es cerrado $\Longleftrightarrow \overline{A\times B}=A\times B=\bar{A}\times\bar{B}$, por la parte a) $\Longleftrightarrow A=\bar{A}$ y $B=\bar{B}$.

$A\times B$ es abierto $\Longleftrightarrow \overset{\circ}{\widehat{A\times B}}=A\times B=\overset{\circ}{A}\times\overset{\circ}{B} \Longleftrightarrow A=\overset{\circ}{A}$ y $B=\overset{\circ}{B}$.

c) $\mathfrak{Fr}(A\times B)=\bar{A}\times\bar{B}\cap(\overline{E\times F\backslash A\times B})=\bar{A}\times\bar{B}\cap\big((\overline{E\backslash A}\times\bar{F})\cup(E\times\overline{F\backslash B})\big)=(\bar{A}\times\bar{B})\cap(\overline{E\backslash A}\times F)\cup(\bar{A}\times\bar{B}\cap E\times\overline{F\backslash B})=[(\bar{A}\cap\overline{E\backslash A})\times\bar{B}]\cup[\bar{A}\times(\bar{B}\cap\overline{F\backslash B})]=\mathfrak{Fr}(A)\times\bar{B}\cup\bar{A}\times\mathfrak{Fr}(B).$

45. Sean E, F, G espacios vectoriales normados, A es un abierto de $E\times F$ y B abierto de $F\times G$. Se define $B\circ A=\{(\mathbf{x},\mathbf{z})\in E\times G/\,\exists\,\mathbf{y}\in F,\ (\mathbf{x},\mathbf{y})\in A,\ (\mathbf{y},\mathbf{z})\in B\}$. Probar que $B\circ A$ es abierto de $E\times G$.

Solución Sea $(\mathbf{x}_0,\mathbf{z}_0)\in B\circ A$, entonces existe $\mathbf{y}_0\in F$ tal que $(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)\in A$, $(\mathbf{y}_0,\mathbf{z}_0)\in B$. Por otro lado existen abiertos U de E y V_1 de F tales que $(\mathbf{y}_0,\mathbf{z}_0)\in U\times V_1\subset A$ y V_2 abierto de F y W abierto de G tales que $(\mathbf{y}_0,\mathbf{z}_0)\in V_2\times W\subset B$. Hay que demostrar que $U\times W\subset B\circ A$.

En efecto, $\forall(\mathbf{x},\mathbf{z})\in U\times W$ se tiene $(\mathbf{x},\mathbf{y}_0)\in U\times V_1\subset A$, $(\mathbf{y}_0,\mathbf{z})\in V_2\times W\subset B \Longrightarrow (\mathbf{x},\mathbf{z})\in B\circ A$.

De esta forma tenemos que $B\circ A$ es un abierto.

46. Sea E un espacio pre-hilbertiano:

a) Demostrar que $\forall\mathbf{a}\in E$, la aplicación $\begin{aligned} f_{\mathbf{a}}\colon E &\longrightarrow \mathbb{R}\\ \mathbf{x} &\longmapsto \langle\mathbf{x},\mathbf{a}\rangle\end{aligned}$ es continua.

b) Deducir que $\forall A\subset E$ el ortogonal $A^{\perp}$ de A es un subespacio vectorial cerrado de E.

Solución

a) Tenemos que $|f_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})-f_{\mathbf{a}}(\mathbf{y})|=|\,\langle\mathbf{x}-\mathbf{y},\mathbf{a}\rangle\,|\leq\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|\,\|\mathbf{a}\|$, es decir $f_{\mathbf{a}}$ es continua.

b) Observemos que $A^{\perp}=\bigcap\limits_{\mathbf{a}\in A} f_{\mathbf{a}}^{-1}(\{0\})$ es un cerrado.

En efecto si $\mathbf{x}\in A^{\perp}\Longrightarrow\mathbf{x}\perp\mathbf{a},\ \forall\,\mathbf{a}\in A\Longrightarrow\langle\mathbf{x},\mathbf{a}\rangle=0,\ \forall\,\mathbf{a}\in A\Longleftrightarrow\mathbf{x}\in\bigcap\limits_{\mathbf{a}\in A} f_{\mathbf{a}}^{-1}(\{0\})$.

47. Sea E el espacio vectorial normado sobre $\mathbb{R}$ de aplicaciones continuas de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$, con la norma $\|\ \|_\infty$. Se define E_1 la parte de E formada por las aplicaciones derivables, M formada por las aplicaciones monótonas, P formada por las aplicaciones polinomiales. Demostrar que $\overset{\circ}{E_1} = \overset{\circ}{M} = \overset{\circ}{P} = \emptyset$.

Solución Sea $\epsilon > 0$ y $f \in E_1$ (resp. P), la aplicación $x \longmapsto \epsilon|x - \frac{1}{2}|$ no es derivable ni polinomial y la aplicación $g\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = f(x) + \epsilon|x - \frac{1}{2}|$ satisface $g \notin E_1$ (resp. P), y sin embargo $\|g - f\|_\infty = \frac{1}{2}\epsilon < \epsilon$, por lo que $B(f,\epsilon) \not\subset E_1$ (resp. P) y $\overset{\circ}{E_1} = \emptyset$ (resp. $\overset{\circ}{P} = \emptyset$).

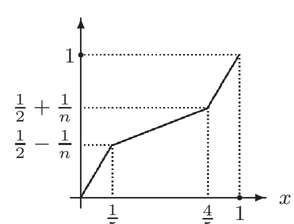
Sea $\epsilon > 0$, $f \in M$ creciente; si f no es constante, existen x_1, x_2, $x_3 \in [0,1]$ tales que $0 < x_1 < x_2 < x_3 < 1$ y $0 < f(x_2) - f(x_1) < \epsilon/2$, $0 < f(x_3) - f(x_2) < \epsilon/2$.
Sea $h \in E$ tal que $f(x_2) - f(x_1) < h(x_1)$, $h(x_2) = 0$, $0 < h(x_3)$, $\|h\| < \epsilon$. Observemos que $f + h \notin M$, pues $f(x_1) + h(x_1) > f(x_2)$, $f(x_2) + h(x_2) = f(x_2)$, $f(x_3) + h(x_3) > f(x_2)$, por lo que $B(f,\epsilon) \not\subset M$, $\forall \epsilon > 0$, o sea $\overset{\circ}{M} = \emptyset$.

48. Sea E el $\mathbb{R}$–espacio vectorial de aplicaciones continuas de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$, provisto de $\|\ \|_\infty$, I, S, B las partes de E formada por las aplicaciones elementales de E, con valores en $[0,1]$ y respectivamente inyectivas, sobreyectivas, biyectivas. ¿Son I, S, B cerrados o abiertos en E?

Solución

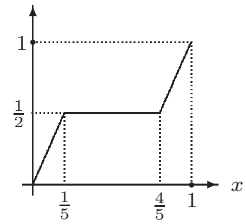
a) Definimos para $n \geq 3$, $f_n\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$ dada por:

$$f_n(x) = \begin{cases} 5(\frac{1}{2} - \frac{1}{n})x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{5}] \\ \frac{10}{3n}(x - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} & \text{si } x \in [\frac{1}{5}, \frac{4}{5}] \\ 5(\frac{1}{2} - \frac{1}{n})(x-1) + 1 & \text{si } x \in [\frac{4}{5}, 1], \end{cases}$$



entonces $f_n \in B$, pero $f_n \longrightarrow f$, donde $f\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$ está dada por:

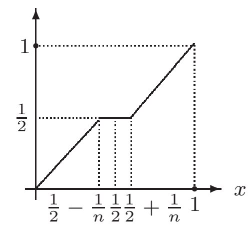
$$f(x)=\begin{cases} \frac{5}{2}x & \text{si } x\in[\,0,\frac{1}{5}\,] \\ \frac{1}{2} & \text{si } x\in[\,\frac{1}{5},\frac{4}{5}\,] \\ \frac{5}{2}(x-1)+1 & \text{si } x\in[\,\frac{4}{5},1\,], \end{cases}$$



por lo que se tiene que B, I no son cerrados, pues $f\notin I$.

b) Para $n\geq 3$, la función $g_n\colon[\,0,1\,]\longrightarrow[\,0,1\,]$, dada por:

$$g_n(x)=\begin{cases} \frac{n}{n-2}x & \text{si } x\in[\,0,\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\,] \\ \frac{1}{2} & \text{si } x\in[\,\frac{1}{2}-\frac{1}{n},\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\,] \\ \frac{n}{n-2}(x-1)+1 & \text{si } x\in[\,\frac{1}{2}+\frac{1}{n},1\,] \end{cases}$$

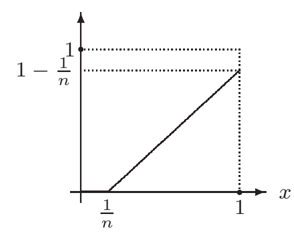


converge a $I_d\colon[\,0,1\,]\longrightarrow[\,0,1\,]$, pero $g_n\notin I$, $g_n\notin B$ y sin embargo dada la bola $B(I_d,\epsilon)$, $\exists\, n\in\mathbb{N}$ tal que $\epsilon>\frac{1}{n}\Longrightarrow g_n\in B(I_d,\epsilon)$ y se concluye que I, B no son abiertos.

Veamos que $\|g_n-I_d\|_\infty=\sup\limits_{0\leq x\leq 1}|g_n(x)-x|=\sup\{\sup\limits_{0\leq x\leq \frac{1}{2}-\frac{1}{n}}\frac{2}{n-2}x,\ \sup\limits_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\leq x\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}|\frac{1}{2}-x|,$
$\sup\limits_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\leq x\leq 1}\frac{2}{n-2}(1-x)\}=\frac{1}{n}$.

c) Para $n\geq 4$, sea $h_n\colon[\,0,1\,]\longrightarrow[\,0,1\,]$ definida por:

$$h_n(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x\in[\,0,\frac{1}{n}\,] \\ x-\frac{1}{n} & \text{si } x\in[\,\frac{1}{n},1\,], \end{cases}$$



tenemos que $h_n\notin S$, pero $h_n\longrightarrow h=\begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ x & \text{si } 0<x\leq 1, \end{cases}$

con $h\in S$, por lo que se tiene que S no es abierto, pues dado $\epsilon>0$, $\exists\, n\in\mathbb{N}$ tal que $\epsilon>\frac{1}{n}\Longrightarrow h_n\in B(h,\epsilon)\not\subset S$.

d) Sea $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset S$ una sucesión convergente a $\varphi\in E$ i.e. $\|\varphi_n-\varphi\|_\infty\longrightarrow 0$, cuando $n\to\infty$, o sea $\sup\limits_{0\leq x\leq 1}|\varphi_n(x)-\varphi(x)|<\epsilon$, $\forall\, n\geq N_\epsilon$.

Sea $y\in[\,0,1\,]$, para cada $n\in\mathbb{N}$, existe $x_n\in[\,0,1\,]$ tal que $y=\varphi_n(x_n)$, así la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset[\,0,1\,]$ tiene al menos un punto de adherencia $x\in[\,0,1\,]$, i.e. existe una aplicación $\sigma\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, estrictamente creciente tal que $x_{\sigma(n)} \longrightarrow x$. Además, como $\|\varphi_n - \varphi\|_\infty \longrightarrow 0$, se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} \|\varphi_n(x) - \varphi(x)\| = |y - \varphi(x)| = 0$ i.e. $\varphi(x) = y$, es decir $\varphi \in S$.

Así hemos demostrado que S es cerrado.

2.4 Frontera

49. Sea E un espacio vectorial normado y A, B dos partes de E, probar que:

a) $\overline{E\backslash A} = E\backslash \overset{\circ}{A}$ y $\overset{\circ}{\widehat{E\backslash A}} = E\backslash \bar{A}$

b) $\mathfrak{Fr}(A)$, $\overset{\circ}{A}$, $E\backslash \bar{A}$ son dos a dos disjuntos

c) $\mathfrak{Fr}(A) = (A \cap (\overline{E\backslash A})) \cup (\bar{A} \cap (E\backslash A))$

d) $\mathfrak{Fr}(\bar{A}) \subset \mathfrak{Fr}(A)$ y $\mathfrak{Fr}(\overset{\circ}{A}) \subset \mathfrak{Fr}(A)$

e) $A \subset \mathfrak{Fr}(A) \Longleftrightarrow \overset{\circ}{A} = \emptyset$

f) A es una parte cerrada $\Longleftrightarrow \mathfrak{Fr}(A) \subset A$

g) A es a abierto $\Longleftrightarrow A \cap \mathfrak{Fr}(A) = \emptyset$

h) $\mathfrak{Fr}(A) = \bar{A}\backslash \overset{\circ}{A}$

i) $\mathfrak{Fr}(A \cup B) \subset \mathfrak{Fr}(A) \cup \mathfrak{Fr}(B)$

j) Si A es cerrado, entonces $B \cap \mathfrak{Fr}(A) \subset \mathfrak{Fr}(A \cap B)$

k) $\bar{A} = A \cup \mathfrak{Fr}(A)$

l) Si A y B son abiertos, entonces:

$(A \cap \mathfrak{Fr}(B)) \cup (B \cap \mathfrak{Fr}(A)) \subset \mathfrak{Fr}(A \cap B) \subset (A \cap \mathfrak{Fr}(B)) \cup (B \cup \mathfrak{Fr}(A)) \cup (\mathfrak{Fr}(A) \cap \mathfrak{Fr}(B))$.

Dar un ejemplo en que estos conjuntos sean dos a dos distintos.

Solución

a) Dado que $\overset{\circ}{A} \subset A \Longrightarrow E\backslash A \subset E\backslash \overset{\circ}{A}$ que es un cerrado $\Longrightarrow \overline{E\backslash A} \subset E\backslash \overset{\circ}{A}$. Supongamos ahora que $E\backslash \overset{\circ}{A} \not\subset \overline{E\backslash A} \Longrightarrow \exists \mathbf{x} \notin \overline{E\backslash A}$ y $\mathbf{x} \notin \overset{\circ}{A}$, es decir $\exists \rho > 0$ tal que $B(\mathbf{x}, \rho) \cap (E\backslash A) = \emptyset \Longrightarrow \mathbf{x} \notin \overset{\circ}{A}$ y $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}, \rho) \subset A$, que es una contradicción. De esta manera hemos probado que $\overline{E\backslash A} = E\backslash \overset{\circ}{A}$.

Además, sea $B = E\backslash A \Longrightarrow \overline{E\backslash B} = \bar{A} = E\backslash \overset{\circ}{B}$, o sea $E\backslash \bar{A} = \overset{\circ}{B} = \overset{\circ}{\widehat{E\backslash A}}$.

b) Es claro que $E\backslash \mathfrak{Fr}(A) = E\backslash(\bar{A} \cap \overline{E\backslash A}) = (E\backslash \bar{A}) \cup \overset{\circ}{A}$, entonces $\mathfrak{Fr}(A) \cap \overset{\circ}{A} = \mathfrak{Fr}(A) \cap (E\backslash \bar{A}) =$

$\emptyset$. Por otro lado $(E\backslash\bar{A})\cap\mathring{A}\subset(E\backslash A)\cap A=\emptyset$.

c) Note que $(A\cap(\overline{E\backslash A}))\cup(\bar{A}\cap(E\backslash A))=[(A\cap\overline{E\backslash A})\cup\bar{A}]\cap[(A\cap\overline{E\backslash A})\cup(E\backslash A)]=$

$[(A\cup\bar{A})\cap(\overline{E\backslash A}\cup\bar{A})]\cap[(A\cup(E\backslash A))\cap(\overline{E\backslash A}\cup(E\backslash A))]=$

$[(\bar{A}\cap(\overline{E\backslash A})\cup\bar{A})]\cap[(A\cup(E\backslash A))\cap(\overline{E\backslash A})]=[\bar{A}]\cap[\overline{E\backslash A}]=\mathfrak{Fr}(A)$.

d) Sabemos que $\mathfrak{Fr}(\bar{A})=\bar{A}\cap(\overline{E\backslash\bar{A}})\subset\bar{A}\cap(\overline{E\backslash A})=\mathfrak{Fr}(A)$ y por otra parte $\mathring{A}\subset A\Longrightarrow$

$\mathfrak{Fr}(\mathring{A})=\overline{\mathring{A}}\cap(\overline{E\backslash\mathring{A}})=\overline{\mathring{A}}\cap(E\backslash\mathring{\mathring{A}})=\overline{\mathring{A}}\cap(E\backslash\mathring{A})=\overline{\mathring{A}}\cap(\overline{E\backslash A})\subset\bar{A}\cap(\overline{E\backslash A})=\mathfrak{Fr}(A)$.

e) $A\subset\mathfrak{Fr}(A)\Longleftrightarrow A\subset\overline{E\backslash A}=E\backslash\mathring{A}\Longleftrightarrow A\cap\mathring{A}=\mathring{A}=\emptyset$.

f) ($\Longrightarrow$) $\mathfrak{Fr}(A)=\bar{A}\cap\overline{E\backslash A}\subset\bar{A}=A$, pues A es cerrado.

($\Longleftarrow$) $\mathfrak{Fr}(A)=\bar{A}\cap\overline{E\backslash A}\subset A$ y como $\bar{A}=A\cup\mathfrak{Fr}(A)\Longrightarrow\bar{A}=A$ y es cerrado.

g) Como A es abierto, entonces $E\backslash A$ es cerrado $\Longrightarrow\mathfrak{Fr}(E\backslash A)\subset E\backslash A$, pero $\mathfrak{Fr}(E\backslash A)=$ $\mathfrak{Fr}(A)\subset E\backslash A\Longrightarrow A\cap\mathfrak{Fr}(A)=\emptyset$.

Si $A\cap\mathfrak{Fr}(A)=\emptyset$, sea $\mathbf{x}\in A\Longrightarrow\mathbf{x}\notin\mathfrak{Fr}(A)\Longrightarrow\mathbf{x}\notin\overline{E\backslash A}\Longrightarrow\exists\rho>0$ tal que $B(\mathbf{x},\rho)\cap E\backslash A=$ $\emptyset\Longrightarrow B(\mathbf{x},\rho)\subset A$ i.e. A es abierto.

h) $\mathfrak{Fr}(A)=\bar{A}\cap\overline{E\backslash A}=\bar{A}\cap(E\backslash\mathring{A})=\bar{A}\backslash\mathring{A}$.

i) $\mathfrak{Fr}(A\cup B)=\overline{A\cup B}\cap\overline{E\backslash A\cup B}=\bar{A}\cup\bar{B}\cap\overline{(E\backslash A)\cap(E\backslash B)}=[\bar{A}\cap\overline{(E\backslash A)\cap(E\backslash B)}]\cup[\bar{B}\cap$ $\overline{(E\backslash A)\cap(E\backslash B)}]\subset[\bar{A}\cap(\overline{E\backslash A})]\cup[\bar{B}\cap(\overline{E\backslash B})]=\mathfrak{Fr}(A)\cup\mathfrak{Fr}(B)$.

j) $\mathfrak{Fr}(A)\cap B=\bar{A}\cap\overline{E\backslash A}\cap B=A\cap B\cap\overline{E\backslash A}\subset\overline{A\cap B}\cap\overline{E\backslash A\cap B}=\mathfrak{Fr}(A\cap B)$.

k) Es claro que $A\subset\bar{A}$ y $\mathfrak{Fr}(A)\subset\bar{A}$, entonces $A\cup\mathfrak{Fr}(A)\subset\bar{A}$.

Sea $\mathbf{x}\in\bar{A}$, si $\mathbf{x}\in A$, $\mathbf{x}\in A\cup\mathfrak{Fr}(A)$. Si $\mathbf{x}\notin A$, entonces $\mathbf{x}\in E\backslash A\subset\overline{E\backslash A}$. Así $\mathbf{x}\in\bar{A}$ y $\mathbf{x}\in\overline{E\backslash A}\Longrightarrow\mathbf{x}\in\mathfrak{Fr}(A)\Longrightarrow\mathbf{x}\in A\cup\mathfrak{Fr}(A)$.

l) Se tiene que $A\cap\bar{B}\subset\overline{A\cap B}$ y $\bar{A}\cap B\subset\overline{A\cap B}$, entonces $A\cap\mathfrak{Fr}(B)\cup B\cap\mathfrak{Fr}(A)=$ $[A\cap\bar{B}\cap\overline{E\backslash B}]\cup[\bar{A}\cap B\cap\overline{E\backslash A}]\subset\overline{A\cap B}\cap[\overline{E\backslash A}\cup\overline{E\backslash B}]=\overline{A\cap B}\cap\overline{E\backslash A\cap B}=\mathfrak{Fr}(A\cap B)$.

Vamos a usar que $A\cup\mathfrak{Fr}(A)=\bar{A}$ entonces:

$\mathfrak{Fr}(A\cap B)=\overline{A\cap B}\cap\overline{E\backslash A\cap B}\subset[\bar{A}\cap\bar{B}]\cap[\overline{E\backslash A}\cup\overline{E\backslash B}]=[\bar{B}\cap\mathfrak{Fr}(A)]\cup[\bar{A}\cap\mathfrak{Fr}(B)]=$

$[(B\cup\mathfrak{Fr}(B))\cap\mathfrak{Fr}(A)]\cup[(A\cup\mathfrak{Fr}(A))\cap\mathfrak{Fr}(B)]=(A\cap\mathfrak{Fr}(B))\cup(B\cap\mathfrak{Fr}(A))\cup(\mathfrak{Fr}(A)\cap\mathfrak{Fr}(B))$.

Falta determinar los conjuntos para los cuales no hay igualdad.

Si $E=\mathbb{R}$, $A=\,]0,1[\,\cup\,]2,3[\,\cup\,]3,5[$, $B=\,]1,3[\,\cup\,]4,6[$, entonces $A\cap B=\,]2,3[\,\cup\,]4,5[$,

$\mathfrak{Fr}(A\cap B)=\{2,3,4,5\}$, $\mathfrak{Fr}(A)=\{0,1,2,3,5\}$, $\mathfrak{Fr}(B)=\{1,3,4,6\}$,

por lo que $A\cap\mathfrak{Fr}(B)=\{4\}$, $B\cap\mathfrak{Fr}(A)=\{2,5\}$, $\mathfrak{Fr}(A)\cap\mathfrak{Fr}(B)=\{1,3\}$.

De esta forma $[\,A\cap\mathfrak{Fr}(B)\,]\cup[\,B\cap\mathfrak{Fr}(A)\,]=\{2,4,5\}\neq\mathfrak{Fr}(A\cap B)=\{2,3,4,5\}\neq[\,A\cap\mathfrak{Fr}(B)\,]\cup[\,B\cap\mathfrak{Fr}(A)\,]\cup[\,\mathfrak{Fr}(A)\cap\mathfrak{Fr}(B)\,]=\{1,2,3,4,5\}$.

50. ¿Se puede decir que $\mathfrak{Fr}(\mathfrak{Fr}(A))=\emptyset$, $\forall A\subset E$, donde E es un espacio vectorial normado? ¿$\mathfrak{Fr}(\mathfrak{Fr}(A))=\mathfrak{Fr}(A)$?

    Solución $\mathfrak{Fr}(\mathfrak{Fr}(A))=\emptyset$ no es posible. Si por ejemplo $E=\mathbb{R}$, $A=\,]\,0,1\,[\,\cap\mathbb{Q}$, $\mathfrak{Fr}(A)=\bar{A}\cap\overline{\mathbb{R}\backslash A}=[\,0,1\,]\cap\mathbb{R}=[\,0,1\,]$, $\mathfrak{Fr}(\mathfrak{Fr}(A))=\{0,1\}\neq\emptyset$ y $\mathfrak{Fr}(\mathfrak{Fr}(A))\neq\mathfrak{Fr}(A)$.

51. Sea E un espacio vectorial normado y consideremos $\mathsf{H}=\{F\subset E/F$ es cerrado$\}$. ¿La aplicación $\mathfrak{Fr}\colon\mathcal{P}(E)\longrightarrow\mathsf{H}$ es sobreyectiva?

    Solución No es sobreyectiva, pues si $E=\{0\}$, $\mathfrak{Fr}(\emptyset)=\emptyset$ y $\mathfrak{Fr}(E)=\emptyset$ y $\mathsf{H}=\{\emptyset,E\}$.

52. Sea E un espacio vectorial normado, $U\subset E$ abierto, probar que $\mathfrak{Fr}(\bar{U})=\mathfrak{Fr}(U)\Longleftrightarrow\mathring{\bar{U}}=U$.

    Solución

    ($\Longleftarrow$) Si $\mathring{\bar{U}}=U\Longrightarrow\mathfrak{Fr}(\bar{U})=\bar{U}\cap\overline{E\backslash\bar{U}}=\bar{U}\cap E\backslash\mathring{\bar{U}}=\bar{U}\cap E\backslash U=\bar{U}\cap\overline{E\backslash U}=\mathfrak{Fr}(U)$.

    ($\Longrightarrow$) Tenemos que $\mathring{\bar{U}}\cap(E\backslash U)\subset\bar{U}\cap(E\backslash U)=\bar{U}\cap\overline{E\backslash U}=\mathfrak{Fr}(U)$ y como $\mathfrak{Fr}(U)=\mathfrak{Fr}(\bar{U})=\bar{U}\cap E\backslash\mathring{\bar{U}}\subset E\backslash\mathring{\bar{U}}\Longrightarrow\mathring{\bar{U}}\cap(E\backslash U)\subset E\backslash\mathring{\bar{U}}\Longrightarrow E\backslash U\subset E\backslash\mathring{\bar{U}}\Longrightarrow\mathring{\bar{U}}\subset U$.

53. Sea E un espacio vectorial normado y sea $A\subset E$. Las tres propiedades siguientes son equivalentes:

    a) $\forall X\in\mathcal{P}(E)$, $\overline{A\cap X}=\bar{A}\cap\bar{X}$.

    b) $\forall X\in\mathcal{P}(E)$, $\overset{\circ}{\widehat{A\cup X}}=\mathring{A}\cup\mathring{X}$.

    c) $\mathfrak{Fr}(A)=\emptyset$.

    d) Demostrar que $\mathfrak{Fr}(\bar{A})=\emptyset\Longleftrightarrow\forall U$ abierto de E se tiene $\overline{\bar{A}\cap U}=\bar{A}\cap\bar{U}$.

    Solución

    (a $\Longrightarrow$ c) $\overline{A\cap E\backslash A}=\emptyset=\bar{A}\cap\overline{E\backslash A}=\mathfrak{Fr}(A)$.

    (c $\Longrightarrow$ a) Se tiene que $A\cap X\subset\bar{A}$, $A\cap X\subset\bar{X}\Longrightarrow\overline{A\cap X}\subset\bar{A}\cap\bar{X}$.

Para probar la otra inclusión, tomemos $\mathbf{y} \in \bar{A} \cap \bar{X}$, como $\mathfrak{Fr}(A) = \emptyset = \bar{A} \backslash \mathring{A} \implies \mathring{A} = A = \bar{A}$, por lo que $\forall \lambda > 0$, $B(\mathbf{y}, \lambda) \cap A \cap X \neq \emptyset \implies \mathbf{y} \in \overline{A \cap X}$.

(a $\implies$ b) Dada la equivalencia entre a) y c) y como $\mathfrak{Fr}(A) = \mathfrak{Fr}(E\backslash A) = \emptyset$, la propiedad es válida también para $E\backslash A$; así $E\backslash \overbrace{A \cup X}^{\circ} = \overline{E\backslash(A \cup X)} = \overline{(E\backslash A) \cap (E\backslash X)} = \overline{E\backslash A} \cap \overline{E\backslash X} = (E\backslash \mathring{A}) \cap (E\backslash \mathring{X}) = E\backslash \mathring{A} \cup \mathring{X}$, por ejercicio 26c), página 37, o sea $\overbrace{A \cup X}^{\circ} = \mathring{A} \cup \mathring{X}$.

(b $\implies$ a) $E\backslash \overline{A \cap X} = \overbrace{E\backslash(A \cap X)}^{\circ} = \overbrace{(E\backslash A) \cup (E\backslash X)}^{\circ} = \overbrace{E\backslash A}^{\circ} \cup \overbrace{E\backslash X}^{\circ} = E\backslash \bar{A} \cup E\backslash \bar{X} = E\backslash(\bar{A} \cap \bar{X})$ i.e. $\overline{A \cap X} = \bar{A} \cap \bar{X}$.

d) ($\implies$) Dado que (c$\implies$a), en particular tenemos que $\overline{\bar{A} \cap U} = \bar{A} \cap \bar{U}$, $\forall U$ abierto de E.

($\impliedby$) Sea $U = E\backslash\bar{A}$, entonces $\emptyset = \bar{\emptyset} = \overline{\bar{A} \cap (E\backslash\bar{A})} = \bar{A} \cap \overline{E\backslash\bar{A}} = \mathfrak{Fr}(\bar{A})$.

2.5 Partes densas

54. Dar un ejemplo de dos partes A y B de $\mathbb{R}$, complementarios de $\mathbb{R}$, en biyección uno con el otro y densos en $\mathbb{R}$.

Solución Tomemos $A = (]-\infty, 0] \backslash \mathbb{Q}_-) \cup \mathbb{Q}_+$, $B = \mathbb{Q}_- \cup ([0, \infty[\backslash \mathbb{Q}_+)$ y $\begin{array}{rl} f\colon A \longrightarrow B \\ x \longmapsto -x. \end{array}$

55. Sea D denso en $\mathbb{R}$, demostrar que D es infinito y que si se quita a D una parte finita se obtiene un conjunto denso en $\mathbb{R}$.

Solución Si D es finito, $\exists\ M > 0$ tal que $D \subset [-M, M] \implies \bar{D} \subset [-M, M] \neq \mathbb{R}$.

En consecuencia, D debe ser infinito.

Probemos la propiedad para un elemento para un elemento. Sea $a \in D$ y $D_1 = D\backslash\{a\}$, sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$, como D es denso, $\exists\ d \in D$ tal que $x < d < y$.

Si $d = a$, $\exists\ d'$ tal que $x < d' < d = a < y$ i.e. $\exists\ d' \in D_1$ tal que $x < d' < y$.

Si $d \neq a$, entonces $d \in D_1$ y tenemos $x < d < y$.

Así tenemos que D_1 es denso en $\mathbb{R}$.

Es claro que si tenemos $a_1, \ldots, a_n \in D$, entonces $D\backslash\{a_1\}$ es denso en $\mathbb{R}$, $D\backslash\{a_1, a_2\}$ es denso en $\mathbb{R}, \ldots, D\backslash\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ es denso en $\mathbb{R}$, dado que si un conjunto es denso en $\mathbb{R}$

y se le extrae un punto, el conjunto resultante sigue siendo denso en $\mathbb{R}$.

56. Sea E un espacio vectorial normado, A, B, X, $Y \subset E$. Demostrar que si A es denso en X (es decir $X \subset \bar{A}$) y B es denso en Y, entonces $A \cup B$ es denso en $X \cup Y$.

    Solución Si $X \subset \bar{A}$, $Y \subset \bar{B} \Longrightarrow X \cup Y \subset \bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cup B}$, por lo que $A \cup B$ es denso en $X \cup Y$.

57. Sea E un espacio vectorial normado, $D \subset E$, demostrar que D es denso en $E \Longleftrightarrow \forall U$ abierto de E, $D \cap U$ es denso en U.

    Solución

    ($\Longleftarrow$) Es claro si se toma $U = E$ el cual es abierto, entonces $D \cap E = D$ es denso en E.

    ($\Longrightarrow$) Sabemos que si D es denso en E y U un abierto de E, se tiene $\overline{\bar{D} \cap U} = \overline{D \cap U}$ (ver ejercicio 28, página 38), es decir $\overline{D \cap U} = \overline{\bar{D} \cap U} = \overline{E \cap U} = \bar{U}$ y $U \subset \bar{U} = \overline{D \cap U}$.

58. Sea E un espacio vectorial normado, $D \subset E$ denso en E y $\mathrm{x} \in D$. Demostrar que para todo V vecindario de x en D, $\bar{V}$ es un vecindario de x en E.

    Solución Sabemos que si V es un vecindario de x en D, entonces existe un abierto U de E tal que $\mathrm{x} \in U \cap D \subset V \Longrightarrow \mathrm{x} \in U \cap D \subset \overline{U \cap D} = \overline{U \cap \bar{D}} = \bar{U} \subset \bar{V}$ (ver ejercicio 28, página 38).

59. Sea E un espacio vectorial normado, admitiendo una parte densa a lo sumo numerable, demostrar que toda familia de abiertos de E no vacíos, dos a dos disjuntos, es a lo sumo numerable.

    Solución Sea $(D_i)_{i \in I}$ una familia de abiertos de E no vacíos, dos a dos disjuntos y D una parte densa a lo sumo numerable, por el axioma de escogencia, existe $d_i \in D$ tal que $d_i \in D_i$ y como $D_i \cap D_j = \emptyset$, si $i \neq j$, se tiene que $d_i \neq d_j$ y la aplicación $f\colon I \longrightarrow D$ es inyectiva, por lo que I es a lo sumo numerable.

60. Demostrar que $\mathbb{Q}^2$ es denso en $\mathbb{R}^2$.

    Solución Sabemos que $\overline{\mathbb{Q}^2} = \bar{\mathbb{Q}} \times \bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}^2$.

61. Sea E un espacio vectorial normado, $A \subset E$ que admite al menos un punto de acumulación en E, entonces A es infinito. Estudiar el recíproco.

Solución Sea $\mathbf{a} \in E$ un punto de acumulación de A en E, entonces $\forall k \in \mathbb{N}$, existe un $\mathbf{a}_{n_k} \in A$, tal que $\mathbf{a}_{n_k} \in B(\mathbf{a}, \frac{1}{k}) \cap (A \backslash \{\mathbf{a}\})$, con $\mathbf{a}_{n_i} \neq \mathbf{a}_{n_j}$, si $i \neq j$ y $\mathbf{a}_{n_k} \longrightarrow \mathbf{a}$. Luego A es infinito.

El recíproco es falso pues si $E = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Z}$ es infinito y no tiene puntos de acumulación.

62. Sea D una parte densa de $\mathbb{R}$, demostrar que D es infinito y que si se elimina en D una parte finita se obtiene un conjunto denso en $\mathbb{R}$.

Solución Si D fuera finito, sería acotado y $\exists\, a > 0$ tal que $\forall\, x \in D$, $|x| < a$, por lo que $\bar{D} \subset [-a, a] \neq \mathbb{R}$.

Sea $a \in D$, $D' = D \backslash \{a\}$ y sean x, $y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$, entonces existe $d \in D$ tal que $x < d < y$.

Si $d = a$, existe $d' \in D'$ tal que $a < d' < d < y$.

Si $d \neq a$, se tiene que $d \in D'$, por lo que siempre existe $d \in D'$ tal que $x < d' < y$ y D' es denso en $\mathbb{R}$.

Un razonamiento análogo muestra que el argumento es válido si se elimina una parte finita a D denso en $\mathbb{R}$.

2.6 Puntos aislados

63. Sea E un espacio vectorial normado, $X \subset E$, demostrar que para que todo punto de X sea aislado, es necesario y suficiente que todo punto de X sea abierto en X.

Solución

($\Longrightarrow$) Sea $\mathbf{x} \in X$ aislado en X, entonces existe $B(\mathbf{x}, \epsilon)$ tal que $B(\mathbf{x}, \epsilon) \cap X = \{\mathbf{x}\}$; por lo tanto $\{\mathbf{x}\}$ es un abierto de X.

($\Longleftarrow$) Si todo punto $\{\mathbf{x}\} \subset X$ es un abierto en X, entonces $\{\mathbf{x}\} = X \cap U$, con U abierto, lo que implica que x es un punto aislado de X.

64. Sea $A \subset \mathbb{R}$, demostrar que si todos los puntos de A son aislados, entonces $\overset{\circ}{A} = \emptyset$. Estudiar el recíproco.

Solución Supongamos que todos los puntos de A son aislados en A, entonces $\forall a \in A$, $\exists \epsilon_0$ tal que $]\, a - \epsilon_0, a + \epsilon_0 \,[\cap A = \{a\} \Longrightarrow \forall a \in A$, $\exists \epsilon_a$ tal que $]\, a - \epsilon_a, a + \epsilon_a \,[\not\subset A$, pues por ejemplo $a + \frac{1}{2}\epsilon_a \in]\, a - \epsilon_a, a + \epsilon_a\, [\setminus \{a\}$. Se concluye que $\overset{\circ}{A} = \emptyset$.

El recíproco es falso pues se puede definir $A = \{\frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ y $\overset{\circ}{A} = \emptyset$, pero 0 no es punto aislado.

Otro ejemplo es cuando tomamos $A = \mathbb{Q}$, $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$ y ningún punto es aislado.

65. Sea E un espacio vectorial normado, U un abierto de E, $\mathrm{x} \in U$, demostrar que si x es aislado en U, x es aislado en E.

Solución Sea $\mathrm{x} \in U$ abierto, si x aislado en U, existe U' abierto tal que $U \cap U' = \{\mathrm{x}\}$, entonces $\{\mathrm{x}\}$ es un abierto de E, por lo que x es aislado de E.

66. Demostrar que si $A \subset E$ espacio vectorial normado, no tiene puntos aislados, sucede lo mismo con $\bar{A}$.

Solución Supongamos que $\bar{A}$ tiene un punto aislado, entonces existe un abierto U de x tal que $U \cap \bar{A} = \{\mathrm{x}\} \Longrightarrow \overline{U \cap \bar{A}} = \overline{U \cap A} = \overline{\{\mathrm{x}\}} = \{\mathrm{x}\} \Longrightarrow U \cap A = \{\mathrm{x}\}$, es decir x es un punto aislado de A, lo que es una contradicción.

2.7 Puntos de acumulación

67. Sea E un espacio vectorial normado, para cada $X \subset E$ se denota por X' al conjunto de puntos de acumulación de X en E, llamado conjunto derivado de X. Sean $A, B \subset E$, U, V abiertos de E, probar:

a) $A \subset B \Longrightarrow A' \subset B'$

b) $(A \cup B)' = A' \cup B'$ y $(A \cap B)' \subset A' \cap B'$. Dar un ejemplo en que no haya igualdad

c) A' es cerrado y además $A' = \bar{A}' = (\bar{A})'$

d) $U \cap A' \subset (U \cap A)'$

e) $U \cap V = \emptyset \Longrightarrow \overset{\circ}{U'} \cap \overset{\circ}{V'} = \emptyset$

f) A es cerrado sí y sólo si $A' \subset A$. Además $\bar{A} = A \cup A'$

g) Si F es un espacio vectorial normado y $C \subset F$, entonces $A' \times C' \subset (A \times C)'$. Dar un ejemplo donde no se da la igualdad

h) Se define A^n por $A^0 = A$, $A^{n+1} = (A^n)'$. Si $n \geq 0$, dar un ejemplo de un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ tal que $\emptyset \neq A^3 \neq A^2 \neq A'$.

Solución

a) Sea $\mathbf{x} \in A'$, podemos construir una sucesión $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tal que $\mathbf{a}_n \longrightarrow \mathbf{x}$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{a}_n \neq \mathbf{x}$. Como para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple $\mathbf{a}_n \in A \subset B \Longrightarrow \mathbf{x} \in B'$.

b) – Es claro que $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B \Longrightarrow A' \cup B' \subset (A \cup B)'$.

– Sea $\mathbf{x} \in (A \cup B)'$, $\exists (\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A \cup B$, $\mathbf{x}_n \neq \mathbf{x}$ y $\mathbf{x}_n \longrightarrow \mathbf{x}$ y se puede extraer una subsucesión de términos en A o una subsucesión de términos en B que converge a $\mathbf{x}$. Así, $\mathbf{x} \in A' \cup B'$.

– Sabemos que $(A \cap B)' \subset A'$ y $(A \cap B)' \subset B'$, lo que implica $(A \cap B)' \subset A' \cap B'$.

– Sea $E = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, entonces $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow (A \cap B)' = \emptyset \neq A' \cap B' = \mathbb{R}$.

c) – Probemos que A' es un cerrado de E. Sea $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de A' convergente a un $\mathbf{x} \in E$; como $\mathbf{x}_n \in A'$, entonces existe una sucesión $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{a}_n\| < \frac{1}{n}$, es decir $\mathbf{a}_n \longrightarrow \mathbf{x}$, por lo que $\mathbf{x} \in A'$. Así tenemos que $A' = \bar{A}'$ y esto prueba también que A' es cerrado.

– Como $A \subset \bar{A} \Longrightarrow A' \subset (\bar{A})'$ y entonces $A' = \bar{A}' \subset (\bar{A})'$.

– Sea $\mathbf{x} \in (\bar{A})'$, existe una sucesión $(\mathbf{y}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \bar{A}$ con $\mathbf{y}_n \neq \mathbf{x}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, tal que $\mathbf{y}_n \longrightarrow \mathbf{x}$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un $\mathbf{a}_n \in A$ tal que $\|\mathbf{a}_n - \mathbf{y}_n\| < \|\mathbf{x} - \mathbf{y}_n\|$, por lo que $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ converge a $\mathbf{x}$ y por lo tanto $\mathbf{x} \in A'$.

d) Sea $\mathbf{x} \in U \cap A'$, entonces $\mathbf{x} \in A'$ y si V es un abierto con $\mathbf{x} \in V$ se tiene $U \cap V \cap A\backslash\{\mathbf{x}\} \neq \emptyset \Longrightarrow (U \cap A) \cap V\backslash\{\mathbf{x}\} \neq \emptyset$, por lo que $\mathbf{x} \in (U \cap A)'$.

e) Si $U \cap V = \emptyset \Longrightarrow U \subset E\backslash V \Longrightarrow U' \subset (E\backslash V)' \subset \overline{E\backslash V} = E\backslash V \Longrightarrow \overset{\circ}{\overline{U'}} \subset \overset{\circ}{\overline{E\backslash V}} = E\backslash\bar{V} \subset E\backslash V' \subset E\backslash \overset{\circ}{\overline{V'}} \Longrightarrow \overset{\circ}{\overline{U'}} \cap \overset{\circ}{\overline{V'}} = \emptyset$.

f) Probemos que $\bar{A} = A \cup A'$.

"$\subset$" Sea $\mathbf{x} \in \bar{A}$, si $\mathbf{x} \in A \Longrightarrow \mathbf{x} \in A \cup A'$.

Si $\mathbf{x} \notin A \Longrightarrow \forall \rho > 0$, $B(\mathbf{x}, \rho) \cap A\backslash\{\mathbf{x}\} \neq \emptyset \Longrightarrow \mathbf{x} \in A' \subset A \cup A'$.

"$\supset$" Tomemos ahora $\mathbf{x} \in A \cup A'$, entonces si $\mathbf{x} \in A \subset \bar{A}$.

Si $\mathbf{x} \in A' \Longrightarrow \forall \rho > 0$, $B(\mathbf{x}, \rho) \cap (A\backslash\{\mathbf{x}\}) \neq \emptyset \Longrightarrow \forall \rho > 0$, $B(\mathbf{x}, \rho) \cap A \neq \emptyset \Longrightarrow \mathbf{x} \in \bar{A}$.

– En particular A es cerrado $\Longleftrightarrow A = \bar{A} = A \cup A' \Longleftrightarrow A' \subset A$.

g) Si F es un espacio vectorial normado y $C \subset F$, entonces si $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in A' \times C'$, $\exists (\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$

y $(\mathbf{b}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ tales que $\mathbf{a}_n \longrightarrow \mathbf{a}$ y $\mathbf{b}_n \longrightarrow \mathbf{b}$, con $\mathbf{a}_n \neq \mathbf{a}$ y $\mathbf{b}_n \neq \mathbf{b}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Luego $(\mathbf{a}_n, \mathbf{b}_n) \longrightarrow (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \Longrightarrow (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in (A \times B)'$.

Ahora si $E = F = \mathbb{R}$, $A = [\,0,1\,]$ y $C = \{0\}$, se tiene que $A' = A = \bar{A}$, $C' = \emptyset$ y $A' \times C' = \emptyset \neq ([\,0,1\,]\times\{0\})' = [\,0,1\,]\times\{0\}$.

h) Sea $B = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \{x_n^k \in [\,0,1\,]\cap\mathbb{I}/ \lim\limits_{n\to\infty} x_n^k = \frac{1}{k}\}$ y sea $A = ([\,1,2\,]\cap\mathbb{Q}) \cup B$, con lo que $A' = [\,1,2\,]\cup\{\frac{1}{n}/n\in\mathbb{N}\}$ y $A^2 = [\,1,2\,]\cup\{0\}$ y $A^3 = [\,1,2\,]$.

2.8 Convexidad

68. Sean E un espacio vectorial normado, $C_1, C_2, \ldots, C_n$ partes convexas de E y $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Demostrar que $a_1C_1 + \cdots + a_nC_n$ es una parte convexa de E.

    Solución Sean $\mathbf{x}_i \in C_i$, $y_i \in C_i$, entonces para cada $\beta \in [\,0,1\,]$ se cumple $\beta x_i + (1-\beta)y_i \in C_i$, con $i = 1, \ldots, n$, luego $\beta \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\mathbf{x}_i + (1-\beta) \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\mathbf{y}_i \in \sum\limits_{i=1}^{n} a_iC_i$.

69. Sea E un espacio vectorial normado, se dice que una parte A de E es estrellada sí y sólo si existe un $\mathbf{a}\in A$ tal que $\forall \mathbf{x}\in A$ el segmento $[\,\mathbf{a},\mathbf{x}\,] \subset A$, donde $[\,\mathbf{a},\mathbf{x}\,] = \{\lambda\mathbf{a}+(1-\lambda)\mathbf{x}/\lambda \in [\,0,1\,]\}$. Demostrar que si A es estrellado, entones $\bar{A}$ es estrellado.

    Solución Supongamos que A es estrellado con respecto a $\mathbf{a}$, sea $\mathbf{x} \in \bar{A}$ y sea $\mathbf{y} \in [\,\mathbf{a}, \mathbf{x}\,]$, entonces existe $\lambda\in[\,0,1\,]$ tal que $\mathbf{y} = \lambda\mathbf{a}+(1-\lambda)\mathbf{x}$. Además existe una sucesión $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tal que $\mathbf{a}_n \longrightarrow \mathbf{x}$, con lo que $\lambda\mathbf{a}+(1-\lambda)\mathbf{a}_n \subset A$, pues $[\,\mathbf{a},\mathbf{a}_n\,] \subset A$ y $\lambda\mathbf{a}+(1-\lambda)\mathbf{a}_n \longrightarrow \mathbf{y}$, es decir $\mathbf{y} \in \bar{A}$.

70. Sea E un espacio vectorial normado, C una parte convexa de E, probar que $\bar{C}$ y $\overset{\circ}{C}$ son convexas.

    Solución

    a) Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \bar{C}$, $\lambda \in [\,0,1\,]$, existen sucesiones $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\mathbf{y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en E, convergentes a $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ respectivamente. Así, $\lambda\mathbf{x}_n + (1-\lambda)\mathbf{y}_n \longrightarrow \lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}$, con $\lambda\mathbf{x}_n + (1-\lambda)\mathbf{y}_n \in C$, lo que implica $\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \in \bar{C}$.

    b) Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \overset{\circ}{C}$, $\lambda \in [\,0,1\,]$, entonces existen α, $\beta > 0$ tales que $B(\mathbf{x},\alpha) \subset C$, $B(\mathbf{y},\beta) \subset C$ y por las propiedades de la bolas abiertas $B(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}, \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta) = B(\lambda\mathbf{x}, \lambda\alpha) + B((1-\lambda)\mathbf{y}, (1-\lambda)\beta) = \lambda B(\mathbf{x},\alpha) + (1-\lambda)B(\mathbf{y},\beta) \subset C$ i.e. $\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \in \overset{\circ}{C}$.

71. Sea E un espacio vectorial normado, U un abierto de E, demostrar que U en convexo sí y sólo si $U + U = 2U$.

Solución

($\Longrightarrow$) Si $\mathbf{y} \in 2U \Longrightarrow \mathbf{y} = 2\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{x}$, con $\mathbf{x} \in U \Longrightarrow \mathbf{y} \in U + U$. Por otro lado, como U es convexo, para cada $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U \Longrightarrow \frac{1}{2}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{y} \in U \Longrightarrow \mathbf{x} + \mathbf{y} \in 2U$, o sea $U + U = 2U$.

($\Longleftarrow$) Supongamos ahora que $U + U = 2U$ con lo que $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$, $\frac{1}{2}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \in U$.

Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$ tales que $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, $\lambda \in [0, 1]$, $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}$ y por ser U abierto, existe $\rho > 0$ tal que $B(\mathbf{x}, \rho) \subset U$, $B(\mathbf{y}, \rho) \subset U$. Además, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists \epsilon_n > 0$ tal que $B(\frac{i}{2^n}\mathbf{x} + (1 - \frac{i}{2^n})\mathbf{y}, \epsilon_n) \subset U$, para $i \in \{0, \dots, 2^n\}$. Sabemos que $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{i=0}^{2^n} B(\frac{i}{2^n}\mathbf{x} + (1 - \frac{i}{2^n})\mathbf{y}, \epsilon_n) \subset U$.

72. Demostrar que la parte de ℓ^2, formada por las sucesiones $\mathbf{u} = (u_n)_{n \geq 1} \in \ell^2$, tales que $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 u_n^2$ converge y su límite de convergencia es menor que 1, es una parte convexa y con interior vacío. ℓ^2 es el espacio vectorial normado de sucesiones $\mathbf{u} = (u_n)_{n \geq 1}$ de términos reales, tales que $\sum_n u_n^2$ converge. La norma se define por $\|\mathbf{u}\|_2 = \big(\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2\big)^{\frac{1}{2}}$.

Solución

a) Sea $\mathbf{u} = (u_n)_{n \geq 1}$, $\mathbf{v} = (v_n)_{n \geq 1} \in \mathrm{C} = \{\mathbf{u} \in \ell^2 / \sum_{n=1}^{\infty} n^2 u_n^2 \leq 1\}$, $\lambda \in [0, 1]$, entonces $\forall N \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^{N} n^2(\lambda u_n + (1-\lambda)v_n)^2 = \lambda^2 \sum_{n=1}^{N} n^2 u_n^2 + 2\lambda(1-\lambda) \sum_{n=1}^{N} n^2 u_n v_n + (1-\lambda)^2 \sum_{n=1}^{N} n^2 v_n^2 \leq \lambda^2 + \lambda(1-\lambda) \sum_{n=1}^{N} n^2(u_n^2 + v_n^2) + (1-\lambda)^2 \leq \lambda^2 + 2\lambda(1-\lambda) + (1-\lambda)^2 = 1$, por lo que es convexa.

b) Sea $\mathbf{x} \in \mathrm{C}$ y $\epsilon > 0$, se va a demostrar que existe $\mathbf{y} \in \ell^2$ tal que $\mathbf{y} \notin \mathrm{C}$ y $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \epsilon$. Sabemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=N+1}^{\infty} x_n^2 < \frac{1}{4}\epsilon^2$ y $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{1}{4}\epsilon^2$.

Para $n \in \mathbb{N}$ denotemos $y_n = x_n$ si $n \leq N$, $y_n = \frac{1}{n}$, si $n > N$, entonces $\mathbf{y} \in \ell^2$ y $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} (x_n - \frac{1}{n})^2 \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} 2(x_n^2 + \frac{1}{n^2}) < \epsilon^2$ y por lo tanto $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \epsilon$, pero $\mathbf{y} \notin \mathrm{C}$ pues $\sum_{n \geq 1} n^2 y_n^2$ diverge.

2.9 Distancia de un punto a una parte

73. Sea E un espacio vectorial normado, $A \subset E$, $A \neq \emptyset$, $\mathbf{x} \in E$, comparar $d(\mathbf{x}, A)$ con $d(\mathbf{x}, \bar{A})$.

Solución Sabemos que $A \subset \bar{A}$, entonces $d(\mathbf{x}, \bar{A}) \leq d(\mathbf{x}, A)$. Ahora, sea $\epsilon > 0$, existe un $\mathbf{y} \in \bar{A}$ tal que $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < d(\mathbf{x}, \bar{A}) + \epsilon$ y existe $\mathbf{a} \in A$ tal que $d(\mathbf{y}, \mathbf{a}) < \epsilon$. lo que implica $d(\mathbf{x}, A) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{a}) < d(\mathbf{x}, \bar{A}) + 2\epsilon$ y como el $\epsilon > 0$ es arbitrario, concluimos que $d(\mathbf{x}, A) \leq d(\mathbf{x}, \bar{A})$ y por lo tanto $d(\mathbf{x}, A) = d(\mathbf{x}, \bar{A})$.

74. Sea E un espacio vectorial normado, a cada parte cerrada $A \neq \emptyset$ se le asocia la aplicación $d_A : E \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $d_A(\mathbf{x}) = d(\mathbf{x}, A) = \inf_{\mathbf{a} \in A} d(\mathbf{x}, \mathbf{a})$. Probar que la aplicación $A \longmapsto d_A$ es inyectiva.

Solución Sean A y B dos partes cerradas no vacías de E tales que $d_A = d_B$. Dado $\mathbf{a} \in A$, se tiene $d_A(\mathbf{a}) = 0 = d_B(\mathbf{a}) = d(\mathbf{a}, B)$, entonces $\mathbf{a} \in \bar{B} = B$, o sea $A \subset B$. Por simetría, $B \subset A$ y por consiguiente, $A = B$.

75. Sea E el espacio vectorial de aplicaciones acotadas de $[\,0, 1\,]$ en $\mathbb{R}$, provisto de la norma $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [\,0,1\,]} |f(x)|$, sea $A \subset E$ formado por las aplicaciones continuas y se considera $f_0 \in E$, definida por $f_0(x) = 1$, si $x \in [\,0, \frac{1}{2}\,]$, $f_0(x) = 2$, si $x \in \,]\,\frac{1}{2}, 1\,]$. Calcular $d(f_0, A)$.

Solución

a) Sea $f \in A$, se tiene que $\|f - f_0\|_\infty \geq |f(\frac{1}{2}) - f_0(\frac{1}{2})| = |f(\frac{1}{2}) - 1|$. Además $\|f - f_0\|_\infty \geq \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} |f(x) - f_0(x)| = |f(\frac{1}{2}) - 2|$, por lo tanto $2\|f - f_0\|_\infty \geq |f(\frac{1}{2}) - 1| + |f(\frac{1}{2}) - 2| \geq 1$.

b) Sea $g : [\,0, 1\,] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \frac{3}{2}$, entonces $g \in A$ y $\|g - f_0\| = \frac{1}{2}$. Luego, $d(f_0, A) = \frac{1}{2}$.

76. Sea E el espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de aplicaciones continuas de $[\,0, 1\,]$ en $\mathbb{R}$, provisto de la norma $\| \ \|_\infty$ y $A = \{f \in E / f(0) = 0, \ \int_0^1 f \geq 1\}$.

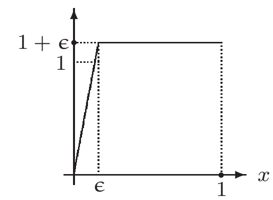
a) Demostrar que A es una parte cerrada de E.

b) Demostrar que $\forall f \in A, \ \|f\|_\infty > 1$.

c) Calcular $d(\mathbf{0}, A)$.

Solución

a) Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ convergiendo en $(E, \| \ \|_\infty)$ a un $f \in E$, entonces $f_n(0) \longrightarrow f(0)$, si $n \to \infty$, ya que $|f_n(0) - f(0)| \leq \|f_n - f\|_\infty$, entonces $f(0) = 0$. Además tenemos que $\int_0^1 f_n \longrightarrow \int_0^1 f$, pues $\left| \int_0^1 f_n - \int_0^1 f \right| \leq \|f_n - f\|_\infty$. Esto demuestra que $\int_0^1 f \geq 1$ y tenemos que $f \in A$.



b) Sea $f \in A$, entonces $1 \leq \int_0^1 f \leq \|f\|_\infty$ y si $\|f\|_\infty = 1$, $\int_0^1 (\|f\|_\infty - f) = 0 \Longrightarrow \|f\|_\infty - f = \mathbf{0} \Longrightarrow f = 1$, que contradice el hecho $f \in A$.

c) Por b), $d(\mathbf{0}, A) \geq 1$. Sea $\epsilon \in]\,0,1\,]$ y $f_\epsilon \colon [\,0,1\,] \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f_\epsilon(x) = \dfrac{1+\epsilon}{\epsilon}x$, si $x \in [\,0,\epsilon\,]$ y $f_\epsilon(x) = 1+\epsilon$, si $x \in [\,\epsilon, 1\,]$, entonces $f_\epsilon \in A$, pues $f_\epsilon(0) = 0$ y $\int_0^1 f_\epsilon = \int_\epsilon^1 (1+\epsilon) + \int_0^\epsilon \frac{1+\epsilon}{\epsilon}x = 1 + \frac{1}{2}\epsilon(1-\epsilon) > 1$. Además $d(\mathbf{0}, A) \leq \|f\|_\infty = 1+\epsilon$, $\forall \epsilon > 0 \Longrightarrow d(\mathbf{0}, A) \leq 1 \therefore d(\mathbf{0}, A) = 1$.

77. Sea E un espacio vectorial normado.

a) $\forall X \subset E$, $n \in \mathbb{N}^*$, se denota por $H_n(X) = \{\mathbf{x} \in E / d(\mathbf{x}, X) < \frac{1}{n}\}$. Demostrar que $H_n(X)$ es un abierto de E y que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} H_n(X) = \bar{X}$.

b) Deducir que todo cerrado es intersección de una familia numerable de abiertos de E.

c) Demostrar que todo abierto de E es unión de una familia numerable de cerrados de E.

Solución

a) $H_n(X)$ es un abierto, pues $H_n(X) = d(\cdot, X)^{-1}\big(\,]-\infty, \frac{1}{n}\,[\,\big)$ y la función $d(\cdot, X)$ es continua de E en $\mathbb{R}$. Ahora observemos que $\mathbf{x} \in \bar{X} \Longleftrightarrow d(\mathbf{x}, X) = 0 \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*$, $d(\mathbf{x}, X) < \frac{1}{n} \Longleftrightarrow \mathbf{x} \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} H_n(X)$.

b) Esta implicación es inmediata, por que si F es un cerrado, $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} H_n(F)$.

c) Sea O un conjunto abierto, entonces $E \backslash O$ es cerrado y $E\backslash O = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} H_n(E\backslash O) \Longrightarrow O = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} E\backslash(H_n(E\backslash O))$, donde los $E\backslash H_n(E\backslash O)$ son cerrados.

78. Sea E un espacio vectorial normado, $\emptyset \neq A \subset E$ y $d_A \colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $d_A(\mathbf{x}) = d(\mathbf{x}, A)$. Demostrar que si A es una parte convexa de E, d_A es una aplicación convexa. Estudiar el recíproco, suponiendo además que A es cerrado.

Solución

a) Sea A convexo y sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, $\lambda \in [\,0,1\,]$, $\mathbf{z} = \lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}$, entonces $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in A$,

$d(\mathbf{z}, A) \leq d(\mathbf{z}, \lambda\mathbf{u} + (1-\lambda)\mathbf{v}) = \|\lambda(\mathbf{x}-\mathbf{u}) + (1-\lambda)(\mathbf{y}-\mathbf{v})\| \leq \lambda\|\mathbf{x}-\mathbf{u}\| + (1-\lambda)\|\mathbf{y}-\mathbf{v}\|$

$\Longrightarrow d(\mathbf{z}, A) \leq \lambda \inf_{\mathbf{u}\in A} \|\mathbf{x}-\mathbf{u}\| + (1-\lambda) \inf_{\mathbf{v}\in A} \|\mathbf{y}-\mathbf{v}\| = \lambda d(\mathbf{x}, A) + (1-\lambda) d(\mathbf{y}, A)$,

es decir $d(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}, A) \leq \lambda d(\mathbf{x}, A) + (1-\lambda) d(\mathbf{y}, A)$.

b) Recíprocamente sean $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in A$, $\lambda \in [0,1]$, entonces:

$d(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}, A) \leq \lambda d(\mathbf{x}, A) + (1-\lambda)d(\mathbf{y}, A) = 0 \Longrightarrow \lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \in \bar{A} = A$, o sea A es convexo.

79. Sean E espacio vectorial normado y sea $A \subset E$ acotado.

a) Demostrar que $\bar{A}$ es acotado y que $\operatorname{diam}(\bar{A}) = \operatorname{diam}(A)$.

b) Pruebe que si A, $B \subset \mathbb{R}^n$ no vacíos y acotados $\operatorname{diam}(A \cup B) \leq \operatorname{diam}(A) + \operatorname{diam}(B) + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, $\forall \mathbf{x} \in A$, $\forall \mathbf{y} \in B$.

c) Concluya que $\operatorname{diam}(A \cup B) \leq \operatorname{diam}(A) + \operatorname{diam}(B) + d(A, B)$.

d) Si $A \cap B \neq \emptyset \implies d(A, B) = 0$ y que el recíproco es falso.

e) Demostrar que $\mathfrak{Fr}(A)$ es acotada y que $\operatorname{diam}(\mathfrak{Fr}(A)) = \operatorname{diam}(A)$.

Solución

a) Sea $\epsilon > 0$, existen $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \bar{A}$ tales que $\operatorname{diam}(\bar{A}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \epsilon$. Por otro lado existen $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in A$ tales que $d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \epsilon$, $d(\mathbf{y}, \mathbf{b}) < \epsilon$, de donde $\operatorname{diam}(\bar{A}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \epsilon \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) + d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{b}) + \epsilon < d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + 3\epsilon \leq \operatorname{diam}(A) + 3\epsilon \Longrightarrow \operatorname{diam}(\bar{A}) \leq \operatorname{diam}(A)$ y en particular $\bar{A}$ es acotado. La igualdad se desprende del hecho que $\operatorname{diam}(A) \leq \operatorname{diam}(\bar{A})$.

b) Observemos que $\forall\, \mathbf{x}$, $\forall\, \mathbf{y} \in A \cup B$ se tiene que $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \operatorname{diam}(A) + \operatorname{diam}(B) + \|\mathbf{x}' - \mathbf{y}'\|$, con $\mathbf{x}' \in A$,$\mathbf{y}' \in B$.

En efecto, si $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in A$, $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \operatorname{diam}(A) \leq \operatorname{diam}(A) + \operatorname{diam}(B) + \|\mathbf{x}' - \mathbf{y}'\|$, con $\mathbf{x}' \in A$, $\mathbf{y}' \in B$.

Si $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in B$, $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \operatorname{diam}(B) \leq \operatorname{diam}(A) + \operatorname{diam}(B) + \|\mathbf{x}' - \mathbf{y}'\|$, con $\mathbf{x}' \in A$, $\mathbf{y}' \in B$.

Si $\mathbf{x} \in A$, $\mathbf{y} \in B$, consideremos $\mathbf{x}' \in A$ y $\mathbf{y}' \in B$, por lo que $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| + \|\mathbf{y} - \mathbf{y}'\| + \|\mathbf{x}' - \mathbf{y}'\| \leq \operatorname{diam}\, A + \operatorname{diam}\, B + \|\mathbf{x}' - \mathbf{y}'\|$, $\mathbf{x}' \in A$, $\mathbf{y}' \in B$ arbitrarios, entonces:

$\sup\limits_{\substack{\mathbf{x} \in A \cup B \\ \mathbf{y} \in A \cup B}} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \operatorname{diam}(A \cup B) \leq \operatorname{diam}\, A + \operatorname{diam}\, B + \|\mathbf{x}' - \mathbf{y}'\|$ y como $\mathbf{x}' \in A$ y $\mathbf{y}' \in B$ son arbitrarios, vale $\forall\, \mathbf{x}' \in A$, $\forall\, \mathbf{y}' \in B$.

c) Por la parte b) tenemos $\operatorname{diam}(A \cup B) \leq \operatorname{diam}\, A + \operatorname{diam}\, B + d(A, B)$ ya que $d(A, B) = \inf\limits_{\substack{\mathbf{x} \in A \\ \mathbf{y} \in B}} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$.

d) Si $A \cap B \neq \emptyset$, $\exists\, \mathbf{x} \in A$, $\mathbf{x} \in B \Longrightarrow d(A, B) \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}\| = 0$.

Para el recíproco veamos que si $A = \{0\}$ y $B = \left\{\frac{1}{n}/n \in \mathbb{N}^*\right\}$ tenemos que $d(A, B) = 0 = \inf\left\{\frac{1}{n}/n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

e) $\mathfrak{Fr}(A) \subset \bar{A} \Longrightarrow \mathfrak{Fr}(A)$ es acotada. Además, $\operatorname{diam}(\mathfrak{Fr}(A)) \leq \operatorname{diam}(\bar{A}) = \operatorname{diam}(A)$. Si $A = \{\mathbf{x}\}$ no hay nada que probar. Sean $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in A$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, entonces las semi-rectas $\{\mathbf{x} + \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x}), \lambda \geq 1\}$, $\{\mathbf{y} + \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \lambda \geq 1\}$ contienen cada una al menos un punto de $\mathfrak{Fr}(A)$ puesto que A es acotado; entonces $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \operatorname{diam}(\mathfrak{Fr}(A))$, $\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$, lo que implica $\operatorname{diam}(A) \leq \operatorname{diam}(\mathfrak{Fr}(A))$. Así, $\operatorname{diam}(A) = \operatorname{diam}(\bar{A}) = \operatorname{diam}(\mathfrak{Fr}(A))$.

2.10 Topología inducida

80. Sea E un espacio vectorial normado y sean $A \subset B \subset E$, probar que si A es una parte abierta de B y B una parte abierta de E, entonces A es una parte abierta de E. Probar que lo mismo ocurre con las partes cerradas.

    Solución Se tiene que $A = U \cap B$, con U, B abiertos de E, luego A es abierto de E. Similarmente si $A = F \cap B$, con B, F cerrados de E, entonces A es cerrado de E.

81. Sea E un espacio vectorial normado y sean A, $B \subset E$ y $C \subset E$ tales que $C \subset A \cap B$. Demostrar que si C es un abierto de A y un abierto de B, entonces C es un abierto de $A \cup B$.

    Solución Por hipótesis, existen dos abiertos U, $V \subset E$ tales que $C = A \cap U = B \cap V$, entonces $U \cap V \cap (A \cup B) = (U \cap V \cap A) \cup (U \cap V \cap B) = (C \cap U) \cup (C \cap V) = C$ y como $U \cap V$ es abierto, se sigue que C es un abierto de $A \cup B$.

82. Sea E un espacio vectorial normado, sea $(U_i)_{i \in I}$ un recubrimiento abierto de E y A una parte de E. Demostrar que A es cerrado en E sí y sólo si, $\forall i \in I$, $A \cap U_i$ es una parte cerrada de U_i.

    Solución

    ($\Longleftarrow$) Supongamos que $\forall i \in I$, $A \cap U_i$ es una parte cerrada de U_i. Para cada $i \in I$ denotamos $B_i = U_i \cap (E \backslash A) = U_i \backslash (U_i \cap A)$ que es un abierto de U_i, entonces B_i es un abierto de E, lo que implica que $\bigcup\limits_{i\in I} B_i = \bigcup\limits_{i\in I} U_i \cap (E\backslash A) = E\backslash A$ es un abierto de E y por lo tanto A es un cerrado.

($\Longrightarrow$) Es inmediato de la definición.

2.11 Sucesiones en un espacio vectorial normado

83. Sea E un espacio vectorial normado, $X \subset E$, demostrar que todo punto de X es aislado sí y sólo si toda sucesión convergente en X es estacionaria.

    Solución

    ($\Longrightarrow$) Sea $\mathbf{x} \in X$, $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $\mathbf{x}_n \longrightarrow \mathbf{x}$, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(\mathbf{x}, \epsilon) \cap X = \{\mathbf{x}\}$ y existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbf{x}_n \in B(\mathbf{x}, \epsilon)$, $\forall\, n \geq N$. Esto significa que $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es estacionaria e igual a $\mathbf{x}$ a partir de un cierto N.

    ($\Longleftarrow$) Supongamos que toda sucesión convergente en X es estacionaria. Sea $\mathbf{x} \in X$, si $\mathbf{x}$ no fuera aislado en X, entonces $\exists (\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $\mathbf{x}_n \longrightarrow \mathbf{x}$ y $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{x}_n \neq \mathbf{x}$ y esto es una contradicción con el hecho de que toda sucesión en X es estacionaria.

84. Sea E un espacio vectorial normado y sean $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\mathbf{y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones en E tales que $\mathbf{x}_n \longrightarrow \mathbf{x}$ y $\mathbf{y}_n \longrightarrow \mathbf{y}$, entonces $d(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) \longrightarrow d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

    Solución Se tiene que $d(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) \leq d(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) + d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}_n, \mathbf{y})$ y por otro lado, $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) + d(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) + d(\mathbf{y}_n, \mathbf{y}) \Longrightarrow |d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - d(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n)| \leq d(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) + d(\mathbf{y}_n, \mathbf{y})$. Finalmente dado $\epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq N$, se tiene $d(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) < \frac{1}{2}\epsilon$, $d(\mathbf{y}_n, \mathbf{y}) < \frac{1}{2}\epsilon$, por lo que $|d(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) - d(\mathbf{x}, \mathbf{y})| < \epsilon$, $\forall\, n \geq N$.

85. Sea E un espacio vectorial normado y $(\mathbf{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de E tal que $(\mathbf{u}_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(\mathbf{u}_{3n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, $(\mathbf{u}_{3n+2})_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\mathbf{u}_{7n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergen. Demostrar que $(\mathbf{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

    Solución Denotemos $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{u}_{3n+i} = \ell_i$, para $i = 0, 1, 2$ y $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{u}_{7n+1}$. Las sucesiones $(\mathbf{u}_{21n+15})_n$, $(\mathbf{u}_{21n+1})_n$, $(\mathbf{u}_{21n+8})_n$ se extraen de $(\mathbf{u}_{7n+1})_n$, ya que $7(3n+1)+1 = 21n+8$, $7(3n)+1 = 21n+1$, $7(3n+2)+1 = 21n+15$. Pero además, estas sucesiones se extraen de $(\mathbf{u}_{3n})_n$, $(\mathbf{u}_{3n+1})_n$, $(u_{3n+2})_n$ ya que $3(7n+5) = 21n+15$, $3(7n)+1 = 21n+1$, $3(7n+1)+2 = 21n+8$, por lo que $\ell_0 = \ell_1 = \ell_2 = \ell$. Por otro lado, como $\mathbb{N} = 3\mathbb{N} \cup (3\mathbb{N}+1) \cup (3\mathbb{N}+2)$, se tiene que $\mathbf{u}_n \longrightarrow \mathbf{u}$ y dado $\epsilon > 0$ existe N_i tal que si $n > N_i \Longrightarrow |\mathbf{u}_{3n+i} - \ell_i| = |\mathbf{u}_{3n+i} - \ell| < \epsilon$.

Observemos que si $k > \max\{N_0, N_1 N_2\}$, entonces $|\mathbf{u}_k - \ell| < \epsilon$, pues $k = 3n+2, 3n+1$ o $3n$.

86. Sean E y F espacios vectoriales normados, $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ y $(\mathbf{y}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ sucesiones.

a) Demostrar que si $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ es un punto adherente de $\big((\mathbf{x}_n,\mathbf{y}_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ en $E\times F$, entonces $\mathbf{x}$ es un punto adherente de $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $\mathbf{y}$ es un punto adherente de $(\mathbf{y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Dar un ejemplo en el cual $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\mathbf{y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admiten al menos un punto de acumulación, pero $(\mathbf{x}_n,\mathbf{y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no.

Solución

a) Es claro que existe una subsucesión $(\mathbf{x}_{n_k},\mathbf{y}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $(\mathbf{x}_{n_k},\mathbf{y}_{n_k}) \longrightarrow (\mathbf{x},\mathbf{y})$ y se tiene que $\mathbf{x}_{n_k} \longrightarrow \mathbf{x}$ y $\mathbf{y}_{n_k} \longrightarrow \mathbf{y}$ y así $\mathbf{x}$ es un punto adherente de $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $\mathbf{y}$ es un punto adherente de $(\mathbf{y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Sea $E=\mathbb{R}$, definimos $x_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ n & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases}$ $\quad y_n = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases}$

entonces la sucesión $(x_n,y_n) = \begin{cases} (0,n) & \text{si } n \text{ es par} \\ (n,0) & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases}$

no tiene puntos adherentes.

87. Sea E un espacio vectorial normado, $(\mathbf{u}_{(n,p)})_{(n,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ una sucesión doble en E. Se supone que $\forall n\in\mathbb{N}$, la sucesión $(\mathbf{u}_{(n,p)})_{p\in\mathbb{N}}$ converge a $\mathbf{v}_n$ y que la sucesión $(\mathbf{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\ell\in E$. Demostrar que existe una aplicación $\rho\colon\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$, estrictamente creciente tal que la sucesión $(\mathbf{u}_{(n,\rho(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ converge a ℓ.

Solución Para cada $n\in\mathbb{N}$, existe $\phi(n)\in\mathbb{N}$ tal que $\forall p\ge\phi(n)$, $\|\mathbf{u}_{(n,p)}-\mathbf{v}_n\| < \frac{1}{n+1}$.

Sea $\rho\colon\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ definida por $\rho(n)=\sup\{\phi(0),\dots,\phi(n)\}+n$, entonces ρ es estrictamente creciente y $\forall n\in\mathbb{N}$, $\|\mathbf{u}_{n,\rho(n)}-\mathbf{v}_n\|<\frac{1}{n+1}$, lo cual implica que $\mathbf{u}_{(n,\rho(n))}\longrightarrow\ell$, pues $\mathbf{v}_n\longrightarrow\ell$.

88. Sean E y F espacios vectoriales normados, $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de E; $\mathbf{x}\in E$, $(\mathbf{y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión en F, $\mathbf{y}\in F$. Se supone que $\mathbf{x}_n\longrightarrow\mathbf{x}$ y que $\mathbf{y}$ es un valor adherente de $(\mathbf{y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Demostrar que $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ es un valor adherente de $((\mathbf{x}_n,\mathbf{y}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ en $E\times F$.

Solución Se sabe que existe una subsucesión $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}\subset F$ tal que $y_{n_k}\longrightarrow\mathbf{y}$ y como $\mathbf{x}_n\longrightarrow\mathbf{x}$ también $\mathbf{x}_{n_k}\longrightarrow\mathbf{x}\Longrightarrow(\mathbf{x}_{n_k},\mathbf{y}_{n_k})\longrightarrow(\mathbf{x},\mathbf{y})$, por lo que $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ es un valor adherente de $((\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

89. Sea E un espacio vectorial normado, $(\mathbf{u}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$, para $p\in\mathbb{N}$ se denota $U_p = \{\mathbf{u}_n / n>p\}$. Demostrar que $\bigcap_{p\in\mathbb{N}} \bar{U}_p$ es el conjunto de valores adherentes de la sucesión $(\mathbf{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solución Sea $\mathbf{u}$ un valor adherente de la sucesión $(\mathbf{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, existe una subsucesión $(\mathbf{u}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\mathbf{u}_{n_k} \longrightarrow \mathbf{u}$. Cada $p\in\mathbb{N}$ satisface que $(\mathbf{u}_{n_k})_{k\geq p} \subset U_p \Longrightarrow \mathbf{u}\in \bar{U}_p, \forall p\in\mathbb{N}$, esto es $\mathbf{u}\in \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \bar{U}_p$.

Inversamente, sea $\mathbf{u}\in \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \bar{U}_p$, existe $n_p\in\mathbb{N}$ tal que $\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_{n_p}\| < \frac{1}{p}$, con $n_p > n_{p-1}$ i.e. $\mathbf{u}$ es un punto adherente de $(\mathbf{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

En efecto, dado $\mathbf{u}\in \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \bar{U}_p$, consideramos:

$$
\begin{aligned}
n_1 &= \min\{k\in\mathbb{N} / \mathbf{u}_k \in B(\mathbf{u},1)\cap U_1\}\\
n_2 &= \min\{k\in\mathbb{N} / \mathbf{u}_k \in B(\mathbf{u},\tfrac{1}{2})\cap U_{n_1}\}\\
&\;\vdots\\
n_p &= \min\{k\in\mathbb{N} / \mathbf{u}_k \in B(\mathbf{u},\tfrac{1}{p})\cap U_{n_{p-1}}\}.
\end{aligned}
$$

Observemos que ninguno de los conjuntos anteriores es vacío, pues $\mathbf{u}\in\bar{U}_m$ y $B(\mathbf{u},\frac{1}{r})\cap U_m \neq \emptyset$ sea cual sea r y m. Además $n_p > n_{p-1}$, pues $\mathbf{u}_{n_p}\in U_{n_{p-1}} = \{\mathbf{u}_m / m > n_{p-1}\} \Longrightarrow n_p > n_{p-1}$, $p\in\mathbb{N}$, esto quiere decir que $(\mathbf{u}_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $(\mathbf{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Así, $\mathbf{u}_{n_p}\in B(\mathbf{u},\frac{1}{p}), \forall p\in\mathbb{N} \implies \|\mathbf{u}_{n_p}-\mathbf{u}\| < \frac{1}{p}$, lo que implica $\lim_{p\to\infty} \mathbf{u}_{n_p} = \mathbf{u}$.

2.12 Continuidad

90. Sean E y F espacios vectoriales normados, $F\neq\{\mathbf{0}\}$ y $X\subset E$. Probar que X es discreto sí y sólo si toda aplicación de X en F es continua.

Solución

($\Longrightarrow$) Si X es discreto, entonces toda parte de X es abierta y para toda $f\colon X\longrightarrow F$ se tiene que $f^{-1}(O)$ es un abierto, con O abierto de F y esto significa que f es continua.

($\Longleftarrow$) Supongamos que toda aplicación $f\colon X\longrightarrow F$ es continua, sea $U\subset X$, entonces definimos $f\colon X\longrightarrow F$, por $f(\mathbf{x})=\mathbf{0}$, si $\mathbf{x}\in U$ y $f(\mathbf{x})=\mathbf{y}_0\neq\mathbf{0}$, si $\mathbf{x}\notin U$. Esta función es continua y como $\{\mathbf{y}_0\}$ es cerrado en F, entonces $f^{-1}(\{\mathbf{y}_0\}) = X\backslash U$ es cerrado, por lo que U es abierto en X.

91. Sean E y F espacios vectoriales normados, $f\colon E \longrightarrow F$ continua, $A \subset E$, demostrar que si A es denso en E, entonces $f(A)$ es denso en $f(E)$.

Solución Sea $\mathbf{y} \in f(E)$, entonces existe $\mathbf{x} \in E$ tal que $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$. Sea $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$, tal que $\mathbf{a}_n \longrightarrow \mathbf{x}$, entonces $f(\mathbf{a}_n) \longrightarrow \mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ y esto implica que $\overline{f(A)} = f(E)$.

92. Sean E y F espacios vectoriales normados y sea $f\colon E \longrightarrow F$ una aplicación. Demostrar que las siguientes propiedades son equivalentes:

a) f es continua.

b) $\forall A \in \wp(E)$, $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.

c) $\forall B \in \wp(F)$, $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\bar{B})$.

d) $\forall B \in \wp(F)$, $f^{-1}(\overset{\circ}{B}) \subset \overset{\circ}{\overbrace{f^{-1}(B)}}$.

Solución

(a $\Longrightarrow$ b) Sea $A \in \wp(E)$, $\mathbf{y} \in f(\bar{A})$, entonces existe $\mathbf{x} \in \bar{A}$ tal que $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. Además existe una sucesión $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tal que $\mathbf{a}_n \longrightarrow \mathbf{x} \Longrightarrow f(\mathbf{a}_n) \longrightarrow f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$; por lo tanto $\mathbf{y} \in \overline{f(A)}$.

(b $\Longrightarrow$ c) $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(f(\overline{f^{-1}(B)})) \subset f^{-1}(\overline{f(f^{-1}(B))}) = f^{-1}(\bar{B})$.

(c $\Longrightarrow$ d) $f^{-1}(\overset{\circ}{B}) = f^{-1}(F\backslash \overline{F\backslash B}) = E\backslash f^{-1}(\overline{F\backslash B}) \subset E\backslash \overline{f^{-1}(F\backslash B)} = \overset{\circ}{\overbrace{E\backslash f^{-1}(F\backslash B)}} = \overset{\circ}{\overbrace{f^{-1}(B)}}$.

(d $\Longrightarrow$ a) Sea U abierto de F, entonces $f^{-1}(U) = f^{-1}(\overset{\circ}{U}) \subset \overset{\circ}{\overbrace{f^{-1}(U)}} \subset f^{-1}(U)$, por lo que $f^{-1}(U) = \overset{\circ}{\overbrace{f^{-1}(U)}}$, o sea $f^{-1}(U)$ es abierto.

93. Sean E y F espacios vectoriales normados y sea $f\colon E \longrightarrow F$ una aplicación continua.

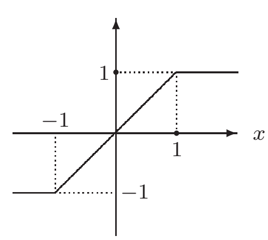
a) Para $A \subset E$, comparar $f(\mathfrak{Fr}(A))$ y $\mathfrak{Fr}(f(A))$.

b) Para $B \subset F$, comparar $f^{-1}(\mathfrak{Fr}(B))$ y $\mathfrak{Fr}(f^{-1}(B))$.

Solución

a) i) Sean $E = F = A = \mathbb{R}$ y consideremos la función

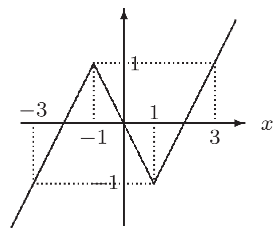
$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq -1 \\ x & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1, \end{cases}$$



entonces $\mathfrak{Fr}(A) = \bar{\mathbb{R}} \cap \overline{\mathbb{R}\backslash\mathbb{R}} = \emptyset \Longrightarrow f(\mathfrak{Fr}(A)) = \emptyset$, $f(A) = [\,-1, 1\,]$, $\mathfrak{Fr}([\,-1, 1\,]) = \{-1, 1\}$ y $\mathfrak{Fr}(f(A)) \not\subset f(\mathfrak{Fr}(A))$.

ii) Sea $E = F = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{R}^*$ y tomemos la función

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \leq -1 \\ -x & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ x-2 & \text{si } x \geq 1, \end{cases}$$



así tenemos que $f(A) = \mathbb{R}$, $\mathfrak{Fr}(A) = \{0\}$, $f(\mathfrak{Fr}(A)) = f(\{0\}) = \{0\}$ y $f(\mathfrak{Fr}(A)) \not\subset \emptyset = \mathfrak{Fr}(f(A))$.

Así se concluye que no existe relación entre $f(\mathfrak{Fr}(A))$ y $\mathfrak{Fr}(f(A))$.

b) i) Sea $E = F = \mathbb{R}$, $B = [\,-1, 1\,]$, f la misma función que en b-ii), entonces tenemos que $f^{-1}(B) = [\,-3, 3\,]$, $\mathfrak{Fr}(f^{-1}(B)) = \{-3, 3\}$, $\mathfrak{Fr}(B) = \{-1, 1\}$, $f^{-1}(\mathfrak{Fr}(B)) = \{-3, -1, 1, 3\}$ y $f^{-1}(\mathfrak{Fr}(B)) \not\subset \mathfrak{Fr}(f^{-1}(B))$.

ii) Sea $\mathbf{x} \in \mathfrak{Fr}(f^{-1}(B)) \Longrightarrow \mathbf{x} \in \overline{f^{-1}(B)} \cap \overline{E\backslash f^{-1}(B)} \Longrightarrow \mathbf{x} \in \overline{f^{-1}(B)}$ y $\mathbf{x} \in \overline{E\backslash f^{-1}(B)}$. Como f es continua en $\mathbf{x} \in E$, dado $\epsilon > 0$, existe $\rho > 0$ tal que si $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < \rho \Longrightarrow \|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})\| < \epsilon$. Como $\mathbf{x} \in \overline{f^{-1}(B)}$ se tiene $B(\mathbf{x}, \lambda) \cap f^{-1}(B) \neq \emptyset$, $\forall \lambda > 0$. Sea $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, \rho) \cap f^{-1}(B)$, entonces $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < \rho$, $\mathbf{y} \in f^{-1}(B) \Longrightarrow f(\mathbf{y}) \in B$, $\|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})\| < \epsilon \therefore B \cap B(f(\mathbf{x}), \epsilon) \neq \emptyset$. Luego $f(\mathbf{x}) \in \bar{B}$ y $\mathbf{x} \in f^{-1}(\bar{B})$.

Por otro lado, como $\mathbf{x} \in \overline{E\backslash f^{-1}(B)}$ se tiene que $\forall \rho > 0$ se cumple $B(\mathbf{x}, \rho) \cap (E\backslash f^{-1}(B)) \neq \emptyset$. Sea $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, \rho) \cap E\backslash f^{-1}(B)$, entonces $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < \rho$, $\mathbf{y} \notin f^{-1}(B) \Longrightarrow \|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})\| < \epsilon$, $f(\mathbf{y}) \notin B \Longrightarrow B(f(\mathbf{x}), \epsilon) \cap F\backslash B \neq \emptyset \therefore f(\mathbf{x}) \in \overline{F\backslash B}$, o sea $\mathbf{x} \in f^{-1}(\overline{F\backslash B})$. De esta forma, podemos concluir que $\mathbf{x} \in f^{-1}(\bar{B}) \cap f^{-1}(\overline{F\backslash B}) = f^{-1}(\bar{B} \cap \overline{F\backslash B}) = f^{-1}(\mathfrak{Fr}(B))$, es decir $\mathfrak{Fr}(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(\mathfrak{Fr}(B))$.

94. Sean E y F espacios vectoriales normados, $f\colon E \longrightarrow F$ continua.

a) Comparar para $A \subset E$, los conjuntos $f(A')$ y $f(A)'$.

b) Comparar para $B \subset F$, los conjuntos $f^{-1}(B')$ y $f^{-1}(B)'$.

Solución

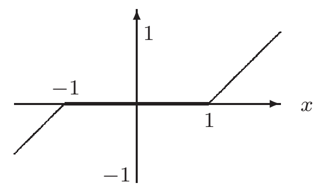
a) i) Sea $E = F = A = \mathbb{R}$, $f = \mathbf{0}$, entonces $A' = \mathbb{R}$, $f(A') = \{0\}$, $f(A) = \{0\}$, $f(A)' = \emptyset$, por lo tanto $f(A')\not\subset f(A)'$.

ii) Sea $E = \,]\,0,+\infty\,[$, $F = [\,0,+\infty\,[$, $A = E$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$, entonces $A' = \,]\,0,+\infty\,[\, = E$, $f(A') = \,]\,0,+\infty\,[$, $f(A)' = [\,0,+\infty\,[\; \Longrightarrow\; f(A)'\not\subset f(A')$.

b) i) Sea $E = F = \mathbb{R}$, $B = \,]\,0,+\infty\,[$, $f = \mathbf{0}$, entonces $B' = [\,0,+\infty\,[$ y $f^{-1}(B') = \mathbb{R}$, $f^{-1}(B) = \emptyset$, $f^{-1}(B)' = \emptyset$, por lo tanto $f^{-1}(B')\not\subset f^{-1}(B)'$.

ii) Sea $E = F = \mathbb{R}$, $B = \{0\}$ y sea la función

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \le -1 \\ 0 & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ x-1 & \text{si } x \ge 1, \end{cases}$$



entonces $B' = \emptyset$, $f^{-1}(B') = \emptyset$ y $f^{-1}(B)' = [\,-1,1\,] \Longrightarrow f^{-1}(B)'\not\subset f^{-1}(B')$.

95. Sean E y F espacios vectoriales normados y sea $f\colon E \longrightarrow F$ un aplicación. Demostrar que f es continua sí y sólo si $\forall \mathrm{x} \in E$, $\exists V_{\mathbf{x}}$ un vecindario de x en E, tal que la restricción de f a $V_{\mathbf{x}}$ sea continua en $V_{\mathbf{x}}$.

Solución

($\Longrightarrow$) La necesidad es inmediata.

($\Longleftarrow$) Sea $\mathrm{x} \in E$, sea $V_{\mathbf{x}}$ un vecindario de x tal que $f|_{V_{\mathbf{x}}}$ es continua y sea $\epsilon > 0$, entonces existe $\rho_1 > 0$ tal que si $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < \rho_1$, $\mathbf{y} \in V_{\mathbf{x}} \Longrightarrow \|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})\| < \epsilon$.

Por otro lado, existe $B(\mathbf{x}, \rho_2) \subset V_{\mathbf{x}}$, es decir si $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < \rho = \min\{\rho_1, \rho_2\} \Longrightarrow \|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})\| < \epsilon$. Esto significa que f es continua en $\mathrm{x} \in E$.

96. Sean E y F espacios vectoriales normados, E_1, E_2 cerrados en E tales que $E_1 \cup E_2 = E$ y sea $f\colon E \longrightarrow F$ una aplicación. Demostrar que si las restricciones $f|_{E_1}$ y $f|_{E_2}$ son continuas, entonces f es continua.

Solución Sea A un cerrado de F, $f^{-1}(A) = (f^{-1}(A)\cap E_1)\cup(f^{-1}(A)\cap E_2) = (f|_{E_1})^{-1}(A)\cup (f|_{E_2})^{-1}(A)$ es un cerrado porque es la unión de dos cerrados.

97. Sean E y F espacios vectoriales normados y sean $f, g\colon E \longrightarrow F$ dos funciones continuas, demostrar que $\{\mathrm{x} \in E/f(\mathrm{x}) = g(\mathrm{x})\}$ es un cerrado en E y que si $F = \mathbb{R}$, el conjunto $\{\mathrm{x} \in E/f(\mathrm{x}) \le g(\mathrm{x})\}$ es un cerrado en E y $\{\mathrm{x} \in E/f(\mathrm{x}) < g(\mathrm{x})\}$ es un abierto de E.

Solución Es claro que $\{\mathbf{x} \in E/f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})\} = (f-g)^{-1}(\{\mathbf{0}\})$ es un cerrado por ser imagen inversa de un cerrado y porque $f-g$ es continua.

Cuando $F = \mathbb{R}$, el mismo argumento se aplica a $\{\mathbf{x}\in E/f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})\} = (f-g)^{-1}(]-\infty, 0\,])$ y a $\{\mathbf{x} \in E/f(\mathbf{x}) < g(\mathbf{x})\} = (f-g)^{-1}(]-\infty, 0\,[)$.

98. Sean E y F espacios vectoriales normados; D una parte densa de E y f, $g\colon E \longrightarrow F$ aplicaciones continuas. Demostrar que si $f|_D = g|_D$, entonces $f = g$.

Solución Sea $\mathbf{x} \in E$, existe $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ tal que $\mathbf{a}_n \longrightarrow \mathbf{x}$, entonces $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(\mathbf{a}_n) = g(\mathbf{a}_n)$, lo que implica que $\lim\limits_{n\to\infty} f(\mathbf{a}_n) = f(\mathbf{x}) = \lim\limits_{n\to\infty} g(\mathbf{a}_n) = g(\mathbf{x})$.

99. Sean E y F espacios vectoriales normados, $\mathbf{a}\in E$, $f\colon E \longrightarrow F$ una aplicación acotada. En un vecindario de a se define la oscilación de f en a como $w(f, \mathbf{a}) = \inf\limits_{V\in V_{\mathbf{a}}} (\operatorname{diam}(f(V)))$, donde $V_{\mathbf{a}}$ es la familia de vecindarios de a. Demostrar que f es continua en a sí y sólo si $w(f, \mathbf{a}) = 0$.

Solución

($\Longrightarrow$) Sea $\epsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tal que $f(B(\mathbf{a}, \eta)) \subset B(f(\mathbf{a}), \frac{1}{2}\epsilon)$, entonces se tiene que la bola $B(\mathbf{a}, \eta) \in V_{\mathbf{a}}$ y $\operatorname{diam}(f(B(\mathbf{a}, \eta))) \leq \epsilon \Longrightarrow w(f, \mathbf{a}) = 0$.

($\Longleftarrow$) Supongamos que $w(f, \mathbf{a}) = 0$ y sea $\epsilon > 0$, existe $V \in V_{\mathbf{a}}$ tal que $\operatorname{diam}(f(V)) < \epsilon$, por lo que existe $\eta > 0$ tal que $B(\mathbf{a}, \eta) \subset V$, entonces $\forall \mathbf{x} \in E$, $d(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \eta \Longrightarrow \mathbf{x} \in V \Longrightarrow f(\mathbf{x}) \in f(V) \Longrightarrow \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})\| < \operatorname{diam}(f(V)) < \epsilon$ y f es continua en a.

100. Sea E un espacio vectorial normado.

a) Sean $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in E$ tales que $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$, demostrar que existe una aplicación $f\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $f(\mathbf{a}) \neq f(\mathbf{b})$.

b) Sean F y G cerrados disjuntos no vacíos de E, demostrar que existe una aplicación $\Phi\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $\Phi|_F = 0$ y $\Phi|_G = 1$.

Solución

a) Sea $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| - \|\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$, es continua y $f(\mathbf{a}) = -\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| \neq f(\mathbf{b}) = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$.

b) Sea $\Phi(\mathbf{x}) = \dfrac{d(\mathbf{x}, F)}{d(\mathbf{x}, F) + d(\mathbf{x}, G)}$, es continua pues $d(\mathbf{x}, F) + d(\mathbf{x}, G) \neq 0$, $\forall \mathbf{x} \in E$. Además $\Phi|_F = 0$ y $\Phi|_G = 1$. Ver ejercicio 219, página 118

101. Sean E y F espacios vectoriales normados, $f\colon E \longrightarrow F$ continua, $(\mathbf{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de E y a un punto adherente de $(\mathbf{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Demostrar que $f(\mathbf{a})$ es un punto adherente de $(f(\mathbf{u}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ en F.

Solución Existe una subsucesión $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $u_{n_k} \longrightarrow \mathbf{a} \Longrightarrow f(u_{n_k}) \longrightarrow f(\mathbf{a})$, o lo que es lo mismo $f(\mathbf{a})$ es un punto adherente de $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

102. Sea E un espacio vectorial normado, sea $n \in \mathbb{N}^*$ y $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in E$. Demostrar que $A = \{\mathbf{x} \in E / \prod_{i=1}^{n} \|\mathbf{x} - \mathbf{a}_i\| = 1\}$ es una parte cerrada y acotada de E.

Solución Consideremos la función $f(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} \|\mathbf{x} - \mathbf{a}_i\|$, es continua de E en $\mathbb{R}$ y $A = \{\mathbf{x} \in E / \prod_{i=1}^{n} \|\mathbf{x} - \mathbf{a}_i\| = 1\} = f^{-1}(\{1\})$ es cerrado, pues $\{1\}$ es cerrado en $\mathbb{R}$.

Sea $n \geq 2$ y sea $\mathbf{x} \in A$, entonces $f(\mathbf{x}) = 1 = \prod_{i=1}^{n} \|\mathbf{x}-\mathbf{a}_i\| \geq \|\mathbf{x}-\mathbf{a}_1\| \prod_{i=2}^{n} |\|\mathbf{x}-\mathbf{a}_1\| - \|\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_i\||$. Denotando por $t = \|\mathbf{x} - \mathbf{a}_1\|$, $\alpha_i = \|\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_i\|$ se tiene que $t|t-\alpha_2|\cdots|t-\alpha_n| \leq 1$ y como el polinomio $|t(t-\alpha_1)(t-\alpha_2)\cdots(t-\alpha_n)| \longrightarrow \infty$, si $t \to \pm\infty$, tenemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\{t \in \mathbb{R}/t|t-\alpha_1|\cdots|t-\alpha_n| \leq 1\} \subset [-N, N]$ $\therefore$ $\|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{a}_1\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{a}_1\| \leq \|\mathbf{a}_1\| + N$, si $\mathbf{x} \in A$ y por lo tanto A es acotado y cerrado.

103. Sea E un espacio vectorial normado y sean F, G cerrados disjuntos de E. Demostrar que existen dos abiertos U, V de E tales que $F \subset U$, $G \subset U$, $U \cap V = \emptyset$. En particular verificar que si $\mathbf{x} \in E \backslash F$, con F cerrado, existen abiertos O_1, O_2 tales que $\mathbf{x} \in O_1$, $F \subset O_2$ y $O_1 \cap O_2 = \emptyset$.

Solución Consideremos $h(\mathbf{x}) = d(\mathbf{x}, G) - d(\mathbf{x}, F)$ que es continua de E en $\mathbb{R}$ y sean los abiertos $U = h^{-1}(]-\infty, 0[)$, $V = h^{-1}(]0, \infty[)$, entonces si $\mathbf{x} \in F$, $d(\mathbf{x}, F) = 0$ y $h(\mathbf{x}) > 0 \Longrightarrow \mathbf{x} \in U$.

Si $\mathbf{x} \in G \Longrightarrow d(\mathbf{x}, G) = 0$ y $h(\mathbf{x}) < 0 \Longrightarrow \mathbf{x} \in U$, o sea $U \cap V = \emptyset$.

Por otro lado $\{\mathbf{x}\}$ es un cerrado disjunto con F, por lo que $\exists O_1$ y O_2 abiertos tales que $\{\mathbf{x}\} \subset O_1$, $F \subset O_2$ y $O_1 \cap O_2 = \emptyset$.

104. Sean E, F espacios vectoriales normados, $f\colon E \longrightarrow F$, una aplicación f se dice que es abierta si $\forall O$ abierto de E, $f(O)$ es abierto de F. Demostrar que f es abierta sí y sólo si $\forall \mathbf{x} \in E$ y todo vecindario V de $\mathbf{x}$ en E, $f(V)$ es un vecindario de $f(\mathbf{x})$ en F.

Solución

($\Longrightarrow$) Sea $\mathbf{x} \in E$, $V \in V_{\mathbf{x}}$, existe U abierto de E tal que $\mathbf{x} \in U \subset V$, entonces $f(\mathbf{x}) \in f(U) \subset f(V)$, con $f(U)$ abierto, por lo que $f(V)$ es un vecindario de $f(\mathbf{x})$ en F, es decir $f(V) \in V_{f(\mathbf{x})}$.

($\Longleftarrow$) $\forall \mathbf{x} \in E$, $\forall V \in V_{\mathbf{x}}$, $f(V) \in V_{f(\mathbf{x})}$. Sea U un abierto de E y $\mathbf{y} \in f(U)$, entonces existe $\mathbf{x} \in U$ tal que $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ y por lo tanto $U \in V_{\mathbf{x}} \Longrightarrow f(U) \in V_{f(\mathbf{x})} \Longrightarrow \exists B(f(\mathbf{x}), \rho) \subset f(U)$ o sea $f(U)$ es abierto.

2.13 Homeomorfismos

105. Sean E, F y G espacios vectoriales normados, $f\colon E \longrightarrow F$, $g\colon F \longrightarrow G$ aplicaciones continuas de modo que f es sobreyectiva y $g \circ f$ es un homeomorfismo. Probar que f y g son homeomorfismos.

Solución Es claro que f es inyectiva, pues si $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}') \Longrightarrow g(f(\mathbf{x})) = g(f(\mathbf{x}')) \Longrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{x}'$. Así, f es biyectiva y como $g \circ f$ es biyectiva, g es biyectiva. Ahora $f^{-1} = (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ g = (g \circ f)^{-1} \circ g$ es continua, lo mismo que g^{-1} ya que $g^{-1} = f \circ f^{-1} \circ g^{-1} = f \circ (g \circ f)^{-1}$.

106. Demostrar que en un espacio vectorial normado $E \neq \{\mathbf{0}\}$, todas las bolas abiertas (respectivamente cerradas) son homeomorfas.

Solución Sean $B(\mathbf{a}, \rho)$, $B(a', \rho')$ dos bolas abiertas, entonces $f(\mathbf{x}) = \dfrac{\rho'}{\rho}(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \mathbf{a}'$ es un homeomorfismo de $B(\mathbf{a}, \rho)$ en $B(\mathbf{a}', \rho')$ (resp. $\bar{B}(\mathbf{a}, \rho)$ en $\bar{B}(\mathbf{a}', \rho')$).

En efecto, es continua, biyectiva con inversa $(\mathbf{y} - \mathbf{a})\dfrac{\rho}{\rho'} = f^{-1}(\mathbf{y})$ que también es continua.

107. Encontrar una aplicación $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uniformemente continua sobre $\mathbb{R}$, biyectiva tal que f^{-1} sea continua en $\mathbb{R}$, pero no uniformemente continua.

Solución Sea $f(x) = \operatorname{signo}(x)\sqrt{|x|}$, entonces f es continua y biyectiva. Además f^{-1} está dada por $g(x) = f^{-1}(x) = \operatorname{signo}(x)x^2$, que es continua, pero no uniformemente continua.

En efecto, sea $0<\epsilon<1$ y sea $\eta>0$, entonces $\left|\frac{1}{\eta} + \frac{\eta}{2} - \frac{1}{\eta}\right| = \frac{\eta}{2}<\eta$, pero $\left|g\left(\frac{1}{\eta} + \frac{\eta}{2}\right) - g\left(\frac{1}{\eta}\right)\right| = \left|\frac{1}{\eta^2} + 1 + \frac{\eta^2}{4} - \frac{1}{\eta^2}\right| = 1 + \frac{\eta^2}{4} > 1 > \epsilon$, es decir que dado $\epsilon > 0$, $\nexists\, \eta > 0$ tal que $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, si $|x - y| < \eta \Longrightarrow |g(x) - g(y)| < \epsilon$.

Falta probar que f es uniformemente continua. Observemos que:

$|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|}$, si $x, y \geq 0$.

$|\sqrt{-x}-\sqrt{-y}| \leq \sqrt{|x-y|}$, si $x, y \leq 0$.

$|\sqrt{-x}-\sqrt{y}| \leq \sqrt{|x+y|} = \sqrt{||x|-|y||}$, si $x \leq 0$, $y \geq 0$.

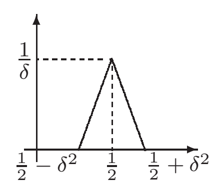
En efecto, sin pérdida de generalidad podemos tomar $x \geq y \geq 0 \Longrightarrow \sqrt{xy} \geq y \geq 0 \Longrightarrow 2y \leq 2\sqrt{xy} \Longrightarrow x+y-2\sqrt{xy} \leq x-y \Longrightarrow (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \leq \sqrt{|x-y|^2}$. Así se tiene la desigualdad deseada.

108. Dar un ejemplo de dos espacios vectoriales normados E y F y una aplicación $f\colon E \longrightarrow F$ tal que f sea continua y biyectiva, pero que f^{-1} no sea continua.

Solución Sea $I\colon (\mathrm{C}([0,1],\mathbb{R}), \|\ \|_\infty) \longrightarrow (\mathrm{C}([0,1],\mathbb{R}), \|\ \|_1)$, $I(f) = f$, I es continua pues $\|f-g\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)-g(t)|dt \leq \|f-g\|_\infty \int_0^1 dt = \|f-g\|_\infty < \delta = \epsilon$.

Sin embargo, $I^{-1} = I\colon (\mathrm{C}([0,1],\mathbb{R}), \|\ \|_1) \longrightarrow (\mathrm{C}([0,1],\mathbb{R}), \|\ \|_\infty)$ no es continua por ejemplo en la función $\mathbf{0}$.

En efecto, sea f_δ definida como en el gráfico adjunto, con $0 < \delta < \frac{1}{2}$, entonces si $0 < \epsilon < 1$ tenemos que $\|f_\delta\|_1 = \delta$ y $\|f_\delta\|_\infty = \dfrac{1}{\delta} > 2 > \epsilon$.



109. Sean E y F espacios vectoriales normados, $X \subset E$, $Y \subset F$ y $f\colon X \longrightarrow Y$ una aplicación.

a) Se supone que f es continua, inyectiva, sea $\mathrm{x} \in E$ tal que $f(\mathrm{x})$ es aislado en Y, demostrar que x es aislado en X.

b) Deducir que si f es un homeomorfismo y si $\mathrm{x} \in X$ es aislado en X, entonces $f(\mathrm{x})$ es aislado en Y.

c) Demostrar que $[0,1]$, $[0,1]\cup\{2\}$, $[0,1]\cup\{2,3\}$ son dos a dos no homeomorfos.

Solución

a) $\{f(\mathrm{x})\}$ es aislado, o sea es un vecindario de $f(\mathrm{x})$, por lo tanto $\{\mathrm{x}\} = f^{-1}(f(\{\mathrm{x}\}))$ (pues f es inyectiva) es un vecindario de x.

b) Similarmente $\mathrm{x} = f^{-1}(f(\mathrm{x}))$ y como f^{-1} es biyectiva y continua, entonces $f(\mathrm{x})$ es aislado en Y.

c) $\{2\}$ es aislado en $[0,1]\cup\{2\}$, pero $[0,1]$ no tiene puntos aislados, por lo que no son homeomorfos, ya que en caso contrario $f(2)$ es aislado en $[0,1]$ y esto es una contradicción. Por otro lado, $\{2,3\}$ son puntos aislados en $[0,1]\cup\{2,3\}$, pero $[0,1]\cup\{2\}$ sólo tiene un punto aislado y no son homeomorfos.

110. Sean E y F espacios vectoriales normados y $f\colon E \longrightarrow F$ una aplicación, demostrar que f es uniformemente continua sí y sólo si $\forall(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\forall(\mathbf{y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de E tales que $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{y}_n\| \longrightarrow 0$, cuando $n \to \infty$, implica que $\|f(\mathbf{x}_n) - f(\mathbf{y}_n)\| \longrightarrow 0$, cuando $n \to \infty$.

Solución

($\Longrightarrow$) Supongamos que f es uniformemente continua y sean $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\mathbf{y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en E tales que $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{y}_n\| \longrightarrow 0$. Sea $\epsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tal que $\forall \mathbf{x}$, $\mathbf{x}' \in E$, si $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| < \eta \Longrightarrow \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}')\| < \epsilon$.

Por otro lado, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > \mathbb{N} \Longrightarrow \|\mathbf{x}_n - \mathbf{y}_n\| < \eta \Longrightarrow \|f(\mathbf{x}_n) - f(\mathbf{y}_n)\| < \epsilon$.

($\Longleftarrow$) Supongamos que f no es uniformemente continua sobre E, entonces $\exists \epsilon > 0$ y $\exists \mathbf{x}'$, $\mathbf{x}'' \in E$ tales que $\forall \eta > 0$, con $\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''\| < \eta$ se tiene $\|f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x}'')\| > \epsilon$. En particular, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) \in E \times E$ tal que $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{y}_n\| < \frac{1}{n}$ y $\|f(\mathbf{x}_n) - f(\mathbf{y}_n)\| \geq \epsilon$. De esta forma $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{y}_n\|$ tiende a 0, pero $\|f(\mathbf{x}_n) - f(\mathbf{y}_n)\| \not\longrightarrow 0$, lo que contradice la hipótesis.

111. Sean E y F espacios vectoriales normados y sea $f\colon E \longrightarrow F$ una aplicación continua, demostrar que el gráfico de f, $G_f = \{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \in E \times F / \mathbf{x} \in E\}$ es homeomorfo a E.

Solución Sea $h\colon E \longrightarrow G_f$ definida por $h(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))$, h es continua y biyectiva. Falta probar que h^{-1} es continua.

Sea U un abierto de E, entonces se tiene que $(h^{-1})^{-1}(U) = h(U) = \{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))/\mathbf{x} \in U\} = G_f \cap (U \times F)$ es un abierto de G_f, i.e. h^{-1} es continua.

112. Sea E un espacio vectorial normado y sean f y $g\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones uniformemente continuas sobre E, demostrar que si f y g son acotadas, entonces fg es uniformemente continua sobre E, pero es falso si f o g son no acotados.

Solución

a) $\forall \mathbf{x}$, $\mathbf{x}' \in E$, $|fg(\mathbf{x}) - fg(\mathbf{x}')| = |f(\mathbf{x})\,(g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}')) + (f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}'))\,g(\mathbf{x}')| \leq \|f\|_\infty |g(\mathbf{x}) -$

$g(\mathbf{x}')| + \|g\|_\infty |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}')|$.

Sea $\epsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| < \delta_1 \Longrightarrow |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}')| < \frac{1}{2}\epsilon / \|g\|_\infty$ y existe $\delta_2 > 0$ tal que $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| < \delta_2 \Longrightarrow |g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}')| < \frac{1}{2}\epsilon / \|f\|_\infty$, con lo cual si escogemos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, entonces si $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| < \delta \Longrightarrow |fg(\mathbf{x}) - fg(\mathbf{x}')| \le \epsilon$.

b) Sea $E = \mathbb{R}$, $f(x) = x$, $g(x) = \operatorname{sen} x$, fg no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$, pues $|fg(2n\pi + \frac{1}{n}) - fg(2n\pi)| = (2n\pi + \frac{1}{n}) \operatorname{sen} \frac{1}{n} \longrightarrow 2\pi$.

2.14 Funciones Lipschitzianas

113. Sea E un espacio vectorial normado, demostrar que $d: E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_E$ es 1-lipschitziana, con $E \times E$ provisto de la norma $\|(\mathbf{x}, \mathbf{y})\| = \|\mathbf{x}\|_E + \|\mathbf{y}\|_E$.

Solución Sabemos que $|d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - d(\mathbf{x}', \mathbf{y}')| = |\,\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_E - \|\mathbf{x}' - \mathbf{y}'\|_E| \le \|\mathbf{x} - \mathbf{y} - \mathbf{x}' + \mathbf{y}'|_E \le \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|_E + \|\mathbf{y} - \mathbf{y}'\|_E = d(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + d(\mathbf{y}, \mathbf{y}') = \|(\mathbf{x} - \mathbf{x}', \mathbf{y} - \mathbf{y}')\|$.

114. Sea E un espacio vectorial normado, A una parte no vacía de E, probar que la aplicación $\mathbf{x} \longrightarrow d(\mathbf{x}, A)$ es 1-lipschitziana.

Solución $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, $\forall \mathbf{a} \in A$, $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \le \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| + \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\| \Longrightarrow d(\mathbf{x}, A) \le \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \le \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| + \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|$, $\forall \mathbf{a} \in A \Longrightarrow d(\mathbf{x}, A) \le \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| + d(\mathbf{y}, A)$, por lo que $|d(\mathbf{x}, A) - d(\mathbf{y}, A)| \le \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, por la simetría en $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$.

115. Sea E el espacio vectorial normado de aplicaciones lipschitzianas $f: [\,0, 1\,] \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(0) = 0$, $\forall f \in E$. Se denota $N(f) = \inf\{k \in \mathbb{R}_+ \,/\, \forall\, x, y \in [\,0, 1\,], |f(x) - f(y)| \le k|x - y|\}$. Probar que N es una norma sobre E no equivalente a $\| \;\|_\infty$.

Solución $N(f)$ está bien definida, $N(f) \ge 0$, $N(\lambda f) = |\lambda| N(f)$ y $N(f+g) \le N(f) + N(g)$. Si $N(f) = 0$, $\forall k > 0$ se tiene que $\forall x, y \in [\,0, 1\,]$, $|f(x) - f(y)| \le k|x - y| \Longrightarrow f(x) - f(y) = 0$, o sea f =constante i.e. $f = 0$, pues $f(0) = 0$.

Por otro lado, $\forall f \in E$, $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in [\,0,1\,]} |f(x)|$. Sabemos que $|f(x) - f(y)| \le k|x - y|$, por lo tanto $|f(x) - f(y)| \le N(f)|x - y| \le N(f) \Longrightarrow |f(x) - f(0)| = |f(x)| \le N(f)$, $\forall x \in [\,0, 1\,] \Longrightarrow \|f\|_\infty \le N(f)$.

Ahora, consideremos $f_n: [\,0, 1\,] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{si } 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{n} \le x \le 1, \end{cases}$

entonces $\|f_n\|_\infty = 1$, $|f_n(x) - f_n(y)| = \begin{cases} n|x-y| & \text{si } 0 \le x \le \dfrac{1}{n},\ 0 \le y \le \dfrac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \dfrac{1}{n} \le x \le 1,\ \dfrac{1}{n} \le y \le 1 \\ |nx-1| \text{ o } |ny-1| & \text{si } 0 \le x \le \dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n} \le y \le 1 \text{ o} \\ & \quad 0 \le y \le \dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n} \le x \le 1, \end{cases}$

por lo tanto si $0 \le x \le \frac{1}{n}$, $\frac{1}{n} \le y \le 1$, $|nx-1| = n|x - \frac{1}{n}| = n(\frac{1}{n} - x) \le n(y-x) = n|y-x|$, se tiene que $\forall x, y \in [0,1]$, $|f_n(x) - f_n(y)| \le n|y-x|$, es decir $N(f_n) = n$ i.e. N y $\|\ \|_\infty$ no son equivalentes.

116. Sea E un espacio vectorial normado, A una parte no vacía de E, $k \in \mathbb{R}_+$, $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$, k-lipschitziana, demostrar que la aplicación $g\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(\mathbf{x}) = \sup\limits_{\mathbf{a}\in A}(f(\mathbf{a}) - k\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|)$, extiende a f y es k-lipschitziana. Explicitar $g(\mathbf{x})$ en el caso en que $E = \mathbb{R}$, $A = [0,1]$, $f(a) = a^2$, $k = 2$.

Solución Sea $\mathbf{a}_0 \in A$ fijo, que existe pues $A \neq \emptyset$, entonces $\forall \mathbf{x} \in E$, $\forall \mathbf{a} \in A$, $f(\mathbf{a}) - k\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| = f(\mathbf{a}) - f(\mathbf{a}_0) + f(\mathbf{a}_0) - k\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| \le k\|\mathbf{a}_0 - \mathbf{a}\| - k\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| + f(\mathbf{a}_0) \le k\|\mathbf{x}-\mathbf{a}_0\| + f(\mathbf{a}_0)$, por lo que existe $\sup\limits_{\mathbf{a}\in A}(f(\mathbf{a}) - k\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|)$.

Sea $\mathbf{x} \in A$, $g(\mathbf{x}) = \sup\limits_{\mathbf{a}\in A}(f(\mathbf{a}) - k\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|) \ge f(\mathbf{x})$. Por otro lado, $\forall \mathbf{x} \in A$, $\forall \mathbf{a} \in A$, $f(\mathbf{a}) - k\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| = f(\mathbf{a}) - f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}) - k\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| \le f(\mathbf{x}) \Longrightarrow g(\mathbf{x}) \le f(\mathbf{x})$ ya que $f(\mathbf{a}) - f(\mathbf{x}) \le k\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|$, por ser k-lipschitziana.

Se ha demostrado que $f = g|_A$ i.e. g extiende a f en E. Falta probar que es k-lipschitziana. En efecto, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, $\forall \mathbf{a} \in A$, $f(\mathbf{a}) - k\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| = f(\mathbf{a}) - k\|\mathbf{y}-\mathbf{a}\| + k(\|\mathbf{y}-\mathbf{a}\| - \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|) \le f(\mathbf{a}) - k\|\mathbf{y}-\mathbf{a}\| + k\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$, por lo que tenemos $g(\mathbf{x}) \le g(\mathbf{y}) + k\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$ y por simetría $|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{y})| \le k\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$, o sea g es k-lipschitziana.

Queda por explicitar $g(x)$, si $A = [0,1]$, $f(a) = a^2$, $k = 2$.

Primero verifiquemos que f es 2-lipschitziana. En efecto, $|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x+y|\,|x-y| \le 2|x-y|$, $\forall x, \forall y \in [0,1]$.

Ahora $g(a) = \sup\limits_{x\in[0,1]}(x^2 - 2|x-a|)$, con $h(x) = x^2 - 2|x-a| = \begin{cases} x^2 - 2x + 2a & \text{si } x > a \\ x^2 + 2x - 2a & \text{si } x < a \\ x^2 & \text{si } x = a. \end{cases}$

Para $x > a$ se tiene que el mínimo se tiene para $h'(x) = 2x - 2 = 0$ i.e. $x = 1$ y el máximo en $x = 0$, entonces para $a < 1$, $g(a) = 2a$.

Para $x < a$ se tiene que el mínimo ocurre en $h'(x) = 2x + 2 = 0$ i.e. $x = -1$ y el máximo en $x = 1$, o sea si $a > 1$, $g(a) = 3 - 2a$.

Para $x = a$, $g(a) = a^2$, para $0 \le a \le 1$.

2.15 Completitud

117. Sea E espacio vectorial normado, $(\mathbf{u}_n)_{n\ge 1}$ sucesión de Cauchy en E, $(\mathbf{v}_n)_{n\ge 1}$, definida por $\mathbf{v}_n = \frac{1}{n}(\mathbf{u}_1 + \cdots + \mathbf{u}_n)$, demostrar que $(\mathbf{v}_n)_{n\ge 1}$ es de Cauchy en E.

Solución Dado $\epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall p \ge N$, $\forall r \in \mathbb{N} \Longrightarrow \|\mathbf{u}_{p+r} - \mathbf{u}_p\| < \frac{1}{2}\epsilon$.

Sean p, $r \in \mathbb{N}$ tal que $p > N$ entonces:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{v}_{p+r} - \mathbf{v}_p\| &= \left\| \frac{1}{r+p}(\mathbf{u}_1 + \cdots + \mathbf{u}_p + \cdots + \mathbf{u}_{p+r}) - \frac{1}{p}(\mathbf{u}_1 + \cdots + \mathbf{u}_p) \right\| \\
&= \frac{1}{r+p}\frac{1}{p}\, \|p(\mathbf{u}_1 + \cdots + \mathbf{u}_p + \cdots + \mathbf{u}_{p+r}) - (r+p)(\mathbf{u}_1 + \cdots + \mathbf{u}_p)\| \\
&= \frac{1}{r+p}\frac{1}{p} \left\| p \sum_{k=p+1}^{p+r} \mathbf{u}_k - r \sum_{k=1}^{p} \mathbf{u}_k \right\| \\
&= \frac{1}{r+p}\frac{1}{p} \left\| p \sum_{k=p+1}^{p+r} \mathbf{u}_k - r \sum_{k=N+1}^{p} \mathbf{u}_k - rN\mathbf{u}_{N+1} + rN\mathbf{u}_{N+1} - r \sum_{k=1}^{N} \mathbf{u}_k \right\| \\
&\le \frac{1}{r+p}\frac{1}{p}(pr\tfrac{1}{2}\epsilon + rN\|\mathbf{u}_{N+1}\| + r\sum_{k=1}^{N} \|\mathbf{u}_k\|),
\end{aligned}$$

pues hay pr términos de la forma $\mathbf{u}_s - \mathbf{u}_t$, para s, $t \ge N + 1$.

Por otro lado $\frac{1}{p}(N\|\mathbf{u}_{N+1}\| + \sum_{k=1}^{N} \|\mathbf{u}_k\|) \longrightarrow 0$, cuando $p \to \infty$, por lo tanto existe $N' \in \mathbb{N}$ tal que si $p > N' \Longrightarrow \frac{1}{p}(N\|\mathbf{u}_{N+1}\| + \sum_{k=1}^{N} \|\mathbf{u}_k\|) < \frac{1}{2}\epsilon$.

Finalmente, para $p \ge \max\{N, N'\} \Longrightarrow \|\mathbf{v}_{p+r} - \mathbf{v}_p\| < \epsilon$.

118. Sean E, F espacios vectoriales normados, $(\mathbf{u}_n)_n$ una sucesión de Cauchy en E, $f{:}E \longrightarrow F$ una aplicación uniformemente continua, demostrar que $(f(\mathbf{u}_n))_n$ es de Cauchy en F.

Solución Dado $\epsilon > 0$, existe $\eta > 0$ tal que $\forall \mathbf{x}'$, $\mathbf{x}'' \in E$, $\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''\|_E < \eta \Longrightarrow \|f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x}'')\|_F < \epsilon$.

Por otro lado existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $p > N$, $q > N \Longrightarrow \|\mathbf{u}_p - \mathbf{u}_q\|_E < \eta \Longrightarrow \|f(\mathbf{u}_p) - f(\mathbf{u}_q)\|_F < \epsilon$ i.e. $(f(\mathbf{u}_n))_n$ es de Cauchy en F.

119. Sea E un espacio vectorial normado y sean $(\mathbf{u}_n)_n$, $(\mathbf{v}_n)_n$ dos sucesiones de E tales que

$\|\mathbf{u}_n - \mathbf{v}_n\|_E \longrightarrow 0$, cuando $n \to \infty$. Demostrar que si una es de Cauchy la otra también es de Cauchy.

Solución Supongamos que $(\mathbf{u}_n)_n$ es de Cauchy y sea $\epsilon > 0$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_1 \Longrightarrow \|\mathbf{u}_n - \mathbf{v}_n\| < \frac{1}{3}\epsilon$. Por otro lado existe N_2 tal que si $p \geq N_2$, $q \geq N_2 \Longrightarrow \|\mathbf{u}_p - \mathbf{u}_q\| < \frac{1}{3}\epsilon$.

Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$, entonces si $p \geq N$, $q \geq N$ se tiene $\|\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_q\| = \|\mathbf{v}_p - \mathbf{u}_p + \mathbf{u}_p - \mathbf{u}_q + \mathbf{u}_q - \mathbf{v}_q\| \leq \|\mathbf{v}_p - \mathbf{u}_p\| + \|\mathbf{u}_q - \mathbf{v}_q\| + \|\mathbf{u}_p - \mathbf{u}_q\| < \epsilon$.

120. Sea E un espacio vectorial normado, $(\mathbf{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en E, $\varphi\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ biyectiva.

a) Demostrar que $(\mathbf{u}_n)_n$ y $(\mathbf{u}_{\varphi(n)})_n$ tienen los mismos valores adherentes.

b) Demostrar que $(\mathbf{u}_n)_n$ es de Cauchy $\Longleftrightarrow$ $(\mathbf{u}_{\varphi(n)})_n$ es de Cauchy.

Solución

a) Sea $\mathbf{a} \in \overline{\{\mathbf{u}_n/n \in \mathbb{N}\}} \Longleftrightarrow \forall\, \rho > 0$, $B(\mathbf{a}, \rho) \cap \{\mathbf{u}_n/n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset \Longleftrightarrow$ $\forall\ \rho > 0$, $B(\mathbf{a}, \rho) \cap \{\mathbf{u}_{\varphi(n)}/n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset \Longleftrightarrow \mathbf{a} \in \overline{\{\mathbf{u}_{\varphi(n)}/n \in \mathbb{N}\}}$.

b) Supongamos que $(\mathbf{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y sea $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall p$, $q > N \Longrightarrow \|\mathbf{u}_p - \mathbf{u}_q\| < \epsilon$.

El conjunto $\{n \in \mathbb{N}/\varphi(n) \leq N\}$ es finito. por lo que existe $N' \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi(n) \leq N \Longrightarrow n \leq N'$, por lo que si p, $q > N' \Longrightarrow \varphi(p)$, $\varphi(q) > N \Longrightarrow \|\mathbf{u}_{\varphi(p)} - \mathbf{u}_{\varphi(q)}\| < \epsilon$ i.e. $(\mathbf{u}_{\varphi(n)})_n$ es de Cauchy.

Recíprocamente si $(\mathbf{u}_\varphi(n))_n$ es de Cauchy, $(\mathbf{u}_{\varphi^{-1}(\varphi(n))} = \mathbf{u}_n)_n$ es de Cauchy.

121. Sea E un espacio vectorial normado, $\alpha > 0$, $\emptyset \neq X \subset E$ tal que $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \Longrightarrow \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \geq \alpha$. Demostrar que X es una parte completa de E.

Solución Sea $(\mathbf{u}_n)_n$ una sucesión de Cauchy en X y sea $\epsilon > 0$, entonces $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que si p, $q > N \Longrightarrow \|\mathbf{u}_p - \mathbf{u}_q\| < \epsilon$.

Sea $\epsilon = \alpha$, entonces $\|\mathbf{u}_p - \mathbf{u}_q\| < \alpha$ si p, $q > N$, pero $\|\mathbf{u}_p - \mathbf{u}_q\| \geq \alpha$, si $\mathbf{u}_p \neq \mathbf{u}_q$ i.e. $\mathbf{u}_p = \mathbf{u}_q$, si p, $q > N$, o sea $(\mathbf{u}_n)_n$ es estacionaria y por lo tanto es convergente. Así, X es una parte completa de E.

122. Sea E un espacio vectorial normado tal que $\exists \rho > 0$ para el cual la bola cerrada $\bar{B}(\mathbf{0}, \rho)$

sea completa. Demostrar que E es completo.

Solución Sea $(\mathbf{u}_n)_n$ una sucesión de Cauchy en E, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $p, q > N \Longrightarrow \|\mathbf{u}_p - \mathbf{u}_q\| < \rho$. La sucesión $(\mathbf{u}_n)_{n \geq N+1}$ es de Cauchy en la bola cerrada $\bar{B}(\mathbf{u}_{n+1}, \rho)$, que es completa pues es homeomorfa a $\bar{B}(\mathbf{0}, \rho)$; así $(\mathbf{u}_n)_n$ es convergente y E es completo.

123. Sea E un espacio vectorial normado completo, $f\colon E \longrightarrow F$ una aplicación biyectiva uniformemente continua tal que $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_E \leq \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\|_F$. Demostrar que la imagen por f de toda parte cerrada de E es una parte cerrada de F.

Solución Sea $A \subset E$ cerrado y sea $(\mathbf{y}_n)_n$ una sucesión de términos en $f(A)$, convergente a $\mathbf{y} \in F$. Como $\mathbf{y}_n \in f(A)$, $\exists \mathbf{x}_n \in A$ tal que $f(\mathbf{x}_n) = \mathbf{y}_n$ y como $(\mathbf{y}_n)_n$ es de Cauchy en F, $(\mathbf{x}_n)_n$ es de Cauchy en E. Así tenemos que $\mathbf{x}_n \longrightarrow \mathbf{x}$, donde $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$, entonces $\mathbf{x} \in A$ por ser cerrado i.e. $\mathbf{y} \in f(A)$ y es cerrado.

124. Sea E un espacio vectorial normado y sea F un espacio vectorial normado completo, $f\colon E \longrightarrow F$ biyectiva, uniformemente continua y tal que f^{-1} es continua. Demostrar que E es completo.

Solución Sea $(\mathbf{u}_n)_n$ una sucesión de Cauchy en E, entonces $(f(\mathbf{u}_n))_n$ es de Cauchy en F, por el ejercicio 118, página 77 y por lo tanto converge a un $\mathbf{y} \in F$. Así, la sucesión $(\mathbf{u}_n)_n$ converge a $f^{-1}(\mathbf{y})$, o sea E es completo.

125. Sea E un espacio vectorial normado, D una parte densa en E, demostrar que E es completo $\Longleftrightarrow$ toda sucesión de Cauchy en D es convergente en E.

Solución

($\Longrightarrow$) Sea $(\mathbf{x}_n)_n$ una sucesión de Cauchy en D, entonces $\mathbf{x}_n \longrightarrow \mathbf{x} \in \bar{D} = E$.

($\Longleftarrow$) Supongamos que toda sucesión de Cauchy en D converge en E. Sea $(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\exists \mathbf{v}_n \in D$ tal que $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{v}_n\| < \frac{1}{n}$. Así, $(\mathbf{v}_n)_n \subset D$ es de Cauchy, por lo que converge $\mathbf{x} \in E$ y se tiene que $\mathbf{x}_n \longrightarrow \mathbf{x}$ i.e. E es completo.

126. Sea E un espacio vectorial normado, sea D una parte densa en E y sea F un espacio vectorial normado completo, $f\colon D \longrightarrow F$ uniformemente continua. Demostrar que existe $g\colon E \longrightarrow F$ continua única que extiende a f.

Solución **Existencia** Sea $\mathbf{x} \in E$, existe $(\mathbf{a}_n)_n \subset D$ tal que $\mathbf{a}_n \longrightarrow \mathbf{x}$, entonces $f(\mathbf{a}_n)_n$ es de Cauchy en F, por el ejercicio 98, página 70, por lo que $f(\mathbf{a}_n) \longrightarrow \mathbf{y} \in F$. Se define $g: E \longrightarrow F$ por $g(\mathbf{x}) = \mathbf{y} = \lim\limits_{n\to\infty} f(\mathbf{a}_n)$, con $\mathbf{a}_n \longrightarrow \mathbf{x}$. La función g así definida está bien definida, pues si $\mathbf{b}_n \longrightarrow \mathbf{x}$, $\mathbf{a}_n \longrightarrow \mathbf{x}$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(\mathbf{a}_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(\mathbf{b}_n) = \mathbf{y}$. Probemos que g es uniformemente continua.

Sea $\epsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tal que $\forall \mathbf{a}', \mathbf{a}'' \in D$, $\|\mathbf{a}' - \mathbf{a}''\| < \eta \Longrightarrow \|f(\mathbf{a}') - f(\mathbf{a}'')\| < \frac{1}{3}\epsilon$.

Sean $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in E$ tales que $\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''\| < \frac{1}{3}\epsilon$, existen dos sucesiones $(\mathbf{a}'_n)_n$, $(\mathbf{a}''_n)_n \subset D$ tales que $\mathbf{a}'_n \longrightarrow \mathbf{x}'$, $\mathbf{a}''_n \longrightarrow \mathbf{x}''$. Existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N_1 \Longrightarrow \|\mathbf{x}' - \mathbf{a}'_n\| < \frac{1}{3}\eta$, $\|\mathbf{x}'' - \mathbf{a}''_n\| < \frac{1}{3}\eta$ y existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N_2$, $\|g(\mathbf{x}') - f(\mathbf{a}'_n)\| < \frac{1}{3}\epsilon$, $\|g(\mathbf{x}'') - f(\mathbf{a}''_n)\| < \frac{1}{3}\epsilon$.

Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$, entonces si $n > N$ implica que:

$$\|g(\mathbf{x}') - g(\mathbf{x}'')\| \leq \|g(\mathbf{x}') - f(\mathbf{a}'_n)\| + \|f(\mathbf{a}'_n) - f(\mathbf{a}''_n) + \|f(\mathbf{a}''_n) - g(\mathbf{x}'')\| < \epsilon,$$

si $\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''\| \leq \|\mathbf{x}' - \mathbf{a}'\| + \|\mathbf{a}'_n - \mathbf{a}''_n\| + \|\mathbf{a}''_n - \mathbf{x}''\| < \eta$. Así tenemos que g es uniformemente continua sobre E i.e. es continua.

Unicidad Sea g' otra extensión de f en E, por lo tanto $g'|_D = g|_D$, con D parte densa, entonces $g' = g$ por el ejercicio 98, página 70.

127. Demostrar que un espacio vectorial normado E es completo $\Longleftrightarrow \forall (\mathbf{u}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ tal que $\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n+1}\| < \dfrac{1}{2^n}$ converge.

Solución

($\Longrightarrow$) Supongamos que E es completo y sea $(\mathbf{u}_n)_n$ una sucesión tal que $\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n+1}\| < \dfrac{1}{2^n}$, entonces $\|\mathbf{u}_p - \mathbf{u}_{p+r}\| \leq \|\mathbf{u}_p - \mathbf{u}_{p+1}\| + \|\mathbf{u}_{p+1} - \mathbf{u}_{p+2}\| + \cdots + \|\mathbf{u}_{p+r-1} - \mathbf{u}_{p+r}\| \leq \sum\limits_{k=1}^{r} \dfrac{1}{2^{p+k-1}} \leq \dfrac{1}{2^{p-1}}$ i.e. $(\mathbf{u}_n)_n$ es de Cauchy, o sea es convergente.

($\Longleftarrow$) Supongamos que $\forall (\mathbf{u}_n)_n$ sucesión tal que $\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n+1}\| < \dfrac{1}{2^n}$ es convergente en E. Sea $(\mathbf{x}_n)_n$ una sucesión de Cauchy en E, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $p, q > N_1 \Longrightarrow \|\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_q\| < \dfrac{1}{2}$, $\exists N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $p, q > N_2 \Longrightarrow \|\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_q\| < \dfrac{1}{2^2}, \ldots, \exists N_n \in \mathbb{N}$ tal que $p, q > N_n \Longrightarrow \|\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_q\| < \dfrac{1}{2^n}$. La sucesión definida por $\mathbf{u}_n = \mathbf{x}_{N_n}$, verifica que $\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n+1}\| < \dfrac{1}{2^n}$, por lo que $(\mathbf{u}_n)_n$ converge a $\mathbf{x} \in E$. Demostremos que $\mathbf{x}_n \longrightarrow \mathbf{x}$.

En efecto, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N \Longrightarrow \|\mathbf{u}_n - \mathbf{x}\| < \frac{1}{2}\epsilon$, con lo cual

$\|\mathbf{x}_{N_n} - \mathbf{x}\| < \frac{1}{2}\epsilon$, para $n \geq N$. Para $m > N_n$ se tiene $\|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_{m-1}\| + \|\mathbf{x}_{m-1} - \mathbf{x}_{m-2}\| + \cdots + \|\mathbf{x}_{N_n} - \mathbf{x}\| \leq \dfrac{1}{2^m} + \dfrac{1}{2^{m-1}} + \cdots + \dfrac{1}{2^{N_n}} + \|\mathbf{x}_{N_n} - \mathbf{x}\| \leq \dfrac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{2}\epsilon \leq \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon$, si $m > \max\{N_n, M\}$, con M tal que si $n > M \Longrightarrow \dfrac{1}{2^{n-1}} < \frac{1}{2}\epsilon$. Así $\mathbf{x}_n \longrightarrow \mathbf{x}$ y E es completo.

128. Sea E un espacio vectorial normado, demostrar que E es completo si y sólo si $\forall (F_n)_{n\geqslant 0}$ de cerrados acotados no vacíos de E, decrecientes y tales que $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam}(F_n) = 0$, se tiene $\bigcap\limits_{n\geqslant 0} F_n \neq \emptyset$.

Solución

$(\Longrightarrow)$ Sea $\epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant N \Longrightarrow \operatorname{diam}(F_n) < \epsilon$ i.e. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in F_n$, $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \epsilon$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, consideremos $\mathbf{x}_n \in F_n$, entonces $\forall p, q > N$, $\mathbf{x}_q, \mathbf{x}_p \in F_n \Longrightarrow \|\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_q\| < \epsilon$, por lo que $(\mathbf{x}_n)_n$ es de Cauchy en E completo y se tiene $\mathbf{x}_n \longrightarrow \mathbf{x} \in E$.

Por otro lado, $\mathbf{x}_n \in F_n \Longrightarrow \mathbf{x}_p \in F_n$, $\forall p \geqslant n$ y como F_n es cerrado, $\mathbf{x} \in F_n$, $\forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \bigcap\limits_{n\geqslant 0} F_n \neq \emptyset$.

$(\Longleftarrow)$ Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en E, $\forall n \in \mathbb{N}$ se define $F_n = \overline{\{x_p / p \geqslant n\}}$.

Cada F_n es cerrado, $F_{n+1} \subset F_n$ y como $(x_n)_n$ es de Cauchy, $(x_n)_n$ es acotada $\Longrightarrow F_n$ es acotado.

Sea $\epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall p, q > N \Longrightarrow \|\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_q\| < \epsilon$ i.e. $\forall n > N$ se tiene $\operatorname{diam}(F_n) \leq \epsilon$, pues $\operatorname{diam} A = \operatorname{diam} \bar{A}$, es decir $\operatorname{diam}(F_n) \longrightarrow 0$, por lo que $\bigcap\limits_{n\geqslant 0} F_n \neq \emptyset$.

Sea $\mathbf{x} \in \bigcap\limits_{n\geqslant 0} F_n$, probemos que $\mathbf{x}_n \longrightarrow \mathbf{x}$. En efecto, $\mathbf{x}_n \in F_n$, $\mathbf{x} \in F_n$ por lo que $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| \leq \operatorname{diam} F_n < \epsilon$, si $n > N$, o sea $\mathbf{x}_n \longrightarrow \mathbf{x}$ y E es completo.

129. Sea E un espacio vectorial normado completo y sea $f\colon E \longrightarrow E$ una aplicación tal que $\exists \alpha \in]\,0, \frac{1}{2}\,[$, para el cual $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \leq \alpha(\|f(\mathbf{x}) - \mathbf{x}\| + \|f(\mathbf{y}) - \mathbf{y}\|)$. Demostrar que f admite un punto fijo único.

Solución La unicidad es inmediata, pues si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ son dos puntos fijos, $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \leq \alpha\cdot 0$ i.e. $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y}) = \mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Sea $(\mathbf{x}_n)_n$ la sucesión definida por $\mathbf{x}_0 \in E$, $\mathbf{x}_{n+1} = f(\mathbf{x}_n)$, si $n \geqslant 0$. Por hipótesis, si $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{n-1}$, $\mathbf{y} = \mathbf{x}_n$ tenemos $\|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n\| \leq \alpha(\|x_n - \mathbf{x}_{n-1}\| + \|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n\|) \Longrightarrow \|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n\| \leq \dfrac{\alpha}{1-\alpha}\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n-1}\|$ y como $\beta = \dfrac{\alpha}{1-\alpha} \in]\,0, 1\,[$, se tiene $\|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n\| \leq \beta^n \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|$.

Así tenemos que $(\mathbf{x}_n)_n$ es de Cauchy en E y converge a $\mathbf{x} \in E$. Aplicando la hipótesis a

$\mathbf{x} = \mathbf{x}_n$, $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ se tiene $\|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}\| \leq \alpha(\|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n\| + \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{x}\|)$ y pasando al límite $\|f(\mathbf{x}) - \mathbf{x}\| \leq \alpha\|f(\mathbf{x}) - \mathbf{x}\|$, o sea $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$.

130. Sea E un espacio vectorial normado completo, $f\colon E \longrightarrow E$ aplicación para la cual $\exists p \in \mathbb{N}^*$ tal que f^p sea una contracción. Demostrar que f^p admite un punto fijo único.

Solución Sea $g = f^p$, entonces se define $\mathbf{x}_0 \in E$, $\mathbf{x}_{n+1} = g(\mathbf{x}_n)$ para $n \geqslant 0$. Por otro lado existe $0 < \beta < 1$ tal que $\|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{y})\| \leq \beta\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, entonces se tiene si $n > m$:

$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m\| \leq \beta\|\mathbf{x}_{n-1} - \mathbf{x}_{m-1}\| \leq \cdots \leq \beta^m\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{n-m}\| \leq$

$\beta^m\,[\,\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\| + \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| + \cdots + \|\mathbf{x}_{n-m-1} - \mathbf{x}_{n-m}\|\,] \leq$

$\beta^m\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\|\,[\,1 + \beta + \cdots + \beta^{n-m-1}\,] = \dfrac{\beta^m}{1-\beta}\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1\|.$

Así tenemos que $(\mathbf{x}_n)_n$ es de Cauchy, por lo que $(\mathbf{x}_n)_n$ converge a $\mathbf{x} \in E$.

Por otro lado $\|g(\mathbf{x}_n) - \mathbf{x}_n\| \leq \beta\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n-1}\|$ y tomando el límite por ser g continua, se tiene $\|g(\mathbf{x}) - \mathbf{x}\| \leq \beta{\cdot}0$, lo que implica $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$.

Supongamos que hay dos punto fijos, entonces $f^p(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, $f^p(\mathbf{y}) = \mathbf{y}$ y tenemos $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|f^p(\mathbf{x}) - f^p(\mathbf{y})\| = \|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{y})\| \leq \beta\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, con $0 < \beta < 1$, por lo que $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

131. Demostrar que el espacio vectorial normado de E de aplicaciones continuas de $[\,0,1\,]$ en $\mathbb{R}$, provisto de la norma $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|dx$ no es completo.

Solución Para $n \geq 2$ se define $f_n\colon [\,0,1\,] \longrightarrow \mathbb{R}$, por:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -nx + \frac{n+2}{2} & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

entonces $\|f_{n+r} - f_n\|_1 = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{x+r}} |-rx + \tfrac{1}{2}r|dx + \int_{\frac{1}{2}+\frac{1}{n+r}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} |-nx + \tfrac{n+2}{2}|dx = \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{n+r} = \tfrac{r}{4n(n+r)} \leq \tfrac{1}{4n}$, por lo que $(f_n)_n$ es de Cauchy y converge a $f(x) = I_{[\,0,\frac{1}{2}\,]}(x)$, $f \notin E$, pues no es continua en $\frac{1}{2}$.

Supongamos que existe $f \in E$ tal que $f_n \longrightarrow f$ en E, con la norma $\|\ \ \|_1$, entonces $\|f_n - f\|_1 \geqslant \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} |f(x) - f_n(x)|dx = \int_0^{\frac{1}{2}} |1 - f(x)|dx \longrightarrow 0$, por lo tanto $f(\mathbf{x}) = 1$, para $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$.

Sea $x_0 \in]\,\frac{1}{2}, 1\,]$, entonces $\forall n \geqslant \dfrac{1}{x_0 - \frac{1}{2}}$, $\|f_n - f\|_1 \geq \displaystyle\int_0^1 |f(x) - f_n(x)| dx = \int_{x_0}^1 |f(x)| dx \longrightarrow 0$, por lo que $f(x) = 0$ en $[\,x_0, 1\,]$ y se concluye que f no es continua en $\frac{1}{2}$.

132. Sea (X, d) un espacio métrico completo acotado, I el conjunto de homeomorfismos de X en X. Demostrar que $\delta\colon \mathrm{I} \times \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por:

$$\delta(f, g) = \sup_{\mathbf{x} \in X} [\, d(f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x})) + d(f^{-1}(\mathbf{x}), g^{-1}(\mathbf{x}))\,]$$

es una distancia sobre I y que (I, δ) es un espacio métrico completo.

Solución Demostremos que si $\mathrm{C}(X)$ es el espacio vectorial de aplicaciones continuas de X en X y $d_\infty(f, g) = \sup\limits_{\mathbf{x} \in X} d(f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x})) \geq 0$ es una distancia y que $(\mathrm{C}(X), d_\infty)$ es un espacio métrico completo. En efecto:

a) $d_\infty(f, g) \geqslant 0$ y $d_\infty(f, g) = 0 \Longleftrightarrow \sup\limits_{\mathbf{x} \in X} d(f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x})) = 0 \Longleftrightarrow d(f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x})) = 0$, $\forall \mathbf{x} \in X \Longleftrightarrow f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$, $\forall \mathbf{x} \in X \Longleftrightarrow f = g$.

b) $d_\infty(f, g) = d_\infty(g, f)$, pues d es una distancia.

c) $d_\infty(f, g) = \sup d(f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x})) \leq d(f(\mathbf{x}), h(\mathbf{x})) + d(h(\mathbf{x}), g(\mathbf{x})) \leq d_\infty(f, h) + d_\infty(h, g)$.

Sea $(f_n)_n \subset \mathrm{C}(X)$ una sucesión de Cauchy i.e. dado $\epsilon > 0$, $d_\infty(f_n, f_m) < \epsilon$, $\forall n$, $m \geqslant N \Longleftrightarrow d(f_n(\mathbf{x}), f_m(\mathbf{x})) < \epsilon$, $\forall n$, $m \geqslant N$, $\forall \mathbf{x} \in X \Longleftrightarrow (f_n(\mathbf{x}))_n$ es de Cauchy en (X, d) espacio métrico completo $\forall \mathbf{x} \in X \Longleftrightarrow f_n(\mathbf{x}) \longrightarrow \mathbf{y}_\mathbf{x}$, $\forall \mathbf{x} \in X$.

Así, se define $f\colon X \longrightarrow X$ por $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_\mathbf{x}$ y probemos que $f \in \mathrm{C}(X)$.

Sea $\epsilon > 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant N \Longrightarrow d(f_n(\mathbf{x}), f(\mathbf{x})) < \frac{1}{3}\epsilon$, $\forall \mathbf{x} \in X$. Además, como f_n es continua (i.e. uniformemente continua por ser X compacto), $\exists \eta > 0$ tal que si $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \eta \Longrightarrow d(f_n(\mathbf{x}), f_n(\mathbf{y})) \leq d(f_n(\mathbf{x}), f(\mathbf{x})) + d(f_n(\mathbf{x}), f_n(\mathbf{y})) + d(f_n(\mathbf{y}), f(\mathbf{y})) < \frac{1}{3}\epsilon + \frac{1}{3}\epsilon + \frac{1}{3}\epsilon = \epsilon$.

Así se tiene que f es continua en X (uniformemente continua), lo que implica $f \in \mathrm{C}(X)$ y $(\mathrm{C}(X), d_\infty)$ es un espacio métrico completo.

Observemos que $\forall f$, $g \in \mathrm{I}$, $d_\infty(f, g) \leq \delta(f, g)$. Se tiene que δ es una distancia sobre $\mathrm{I} \subset \mathrm{C}(X)$. Probemos que (I, δ) es un espacio métrico completo.

Sea $(f_n)_n$ una sucesión de Cauchy en (I, δ), entonces $(f_n)_n$ es una sucesión de Cauchy en $(\mathrm{C}(X), d_\infty)$, por lo que $f_n \longrightarrow f \in \mathrm{C}(X)$ por d_∞. Además $(f_n^{-1})_n$ es de Cauchy en

$(\mathrm{C}(X), d_\infty)$ y converge a $g \in \mathrm{C}(X)$ por d_∞. Así tenemos que $f_n \longrightarrow f$, $f_n^{-1} \longrightarrow g \Longrightarrow$ $f_n \circ f_n^{-1} \longrightarrow f \circ g$ y $f_n^{-1} \circ f_n \longrightarrow g \circ f \Longrightarrow f \circ g = g \circ f = I_X$, o sea $g = f^{-1}$ con f y f^{-1} continuas.

Así $\delta(f_n, f) \leq d_\infty(f_n, f) + d_\infty(f_n^{-1}, g) \longrightarrow 0$, entonces $f_n \longrightarrow f$ en (I, δ) que es completo.

133. a) Sea E un espacio vectorial normado $\neq \{\mathbf{0}\}$ y sean $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in E$, $\rho > 0$, $\alpha > 0$, demostrar que $\bar{B}(\mathbf{a}, \rho) \subset \bar{B}(\mathbf{b}, \alpha) \Longleftrightarrow \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| \leq \alpha - \rho$.

b) Sea E un espacio vectorial normado completo, $(\mathbf{a}_n)_n$ una sucesión de E, $(\rho_n)_n$ una sucesión en $\mathbb{R}_+^*$. Se supone que la sucesión $(\bar{B}(\mathbf{a}_n, \rho_n))_n$ es decreciente y que $\rho_n \longrightarrow \rho$. Demostrar que $(\mathbf{a}_n)_n$ converge y que si $\mathbf{a} = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{a}_n$, se tiene $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \bar{B}(\mathbf{a}_n, \rho_n) = \bar{B}(\mathbf{a}, \rho)$.

Solución

a) Si $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ es evidente. Se supone $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$, entonces existe n tal que si $n > \dfrac{\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|}{\rho}$.

Sea $\mathbf{c} = \mathbf{a} + (\frac{\rho}{\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|} - \frac{1}{n})(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \Longrightarrow \|\mathbf{c} - \mathbf{a}\| = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|(\frac{\rho}{\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|} - \frac{1}{n}) < \rho \Longrightarrow$

$\mathbf{c} \in \bar{B}(\mathbf{a}, \rho) \subset \bar{B}(\mathbf{b}, \alpha) \Longrightarrow \|\mathbf{b} - \mathbf{c}\| = \left\|(\mathbf{a} - \mathbf{b})(1 + \frac{\rho}{\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|} - \frac{1}{n})\right\| =$

$\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| \left(1 + \frac{\rho}{\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|} - \frac{1}{n}\right) < \alpha.$

Recíprocamente, si $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| \leq \alpha \Longrightarrow \mathbf{a} \in \bar{B}(\mathbf{b}, \alpha)$.

Sea $\mathbf{x} \in \bar{B}(\mathbf{a}, \rho) \Longrightarrow \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| + \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| \leq \rho + \alpha - \rho = \alpha$ i.e. $\bar{B}(\mathbf{a}, \rho) \subset \bar{B}(\mathbf{b}, \alpha)$.

b) Sabemos que $\bar{B}(\mathbf{a}_{n+m}, \rho_{n+m}) \subset \bar{B}(\mathbf{a}_n, \rho_n) \Longrightarrow \|\mathbf{a}_{n+m} - \mathbf{a}_n\| \leq \rho_n - \rho_{n+m}$. Así tenemos que $(\rho_n)_n \downarrow \rho$, por lo que $(\rho_n)_n$ es de Cauchy i.e. $(\mathbf{a}_n)_n$ es de Cauchy y como E es completo $(\mathbf{a}_n)_n$ converge a $\mathbf{a} \in E$.

Sea $\mathbf{x} \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \bar{B}(\mathbf{a}_n, \rho_n) \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}_n\| \leq \rho_n \Longrightarrow \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leq \rho$, o sea $\mathbf{x} \in \bar{B}(\mathbf{a}, \rho)$.

Por otro lado, sabemos que $\|\mathbf{a}_{n+m}, \mathbf{a}_n)\| \leq \rho_n - \rho_{n+m}$; si fijamos n y $m \to \infty$ se tiene $\|\mathbf{a}_n - \mathbf{a}\| \leq \rho_n - \rho \Longrightarrow \bar{B}(\mathbf{a}, \rho) \subset \bar{B}(\mathbf{a}_n, \rho_n)$, $\forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \bar{B}(\mathbf{a}, \rho) \subset \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \bar{B}(\mathbf{a}_n, \rho_n)$.

134. Sea $f\colon S \longrightarrow S$, $S \subset \mathbb{R}^n$ una aplicación tal que $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| < \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, si $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$.

a) Probar que f posee a lo sumo un punto fijo y dar un ejemplo de función de este tipo sin puntos fijos.

b) Sea $\mathbf{x} \in S$, $\mathbf{p}_0 = \mathbf{x}$, $\mathbf{p}_{n+1} = f(\mathbf{p}_n)$, $c_n = \|\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_{n+1}\|$, $n > 0$, probar $(c_n)_n$ es una sucesión decreciente y que existe $c = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$.

c) Supongamos que existe una sub-sucesión $(\mathbf{p}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergiendo a $\mathbf{q}\in S$. Probar que $c=\|\mathbf{q}-f(\mathbf{q})\|=\|f(\mathbf{q})-f(f(\mathbf{q}))\|$ y deducir que $\mathbf{q}$ es un punto fijo de f y que $\mathbf{p}_n\longrightarrow\mathbf{q}$.

d) Si S es compacto, deducir que f siempre tiene un punto fijo único.

Solución

a) Si hay dos puntos fijos $\mathbf{x}_0\neq\mathbf{y}_0$ se tiene $\|f(\mathbf{x}_0)-f(\mathbf{y}_0)\|=\|\mathbf{x}_0-\mathbf{y}_0\|<\|\mathbf{x}_0-\mathbf{y}_0\|$, por lo que hay a lo sumo un punto fijo.

Sea $f\colon]\,0,1\,[\longrightarrow]\,0,1\,[$, $f(x)=\frac{1}{2}x$, es tal que $|f(x)-f(y)|=\frac{1}{2}|x-y|<|x-y|$, pero no hay puntos fijos pues $f(x)=x\iff\frac{1}{2}x=x\iff x=0\notin]\,0,1\,[$.

b) Se tiene $c_{n+1}=\|\mathbf{p}_{n+1}-\mathbf{p}_{n+2}\|=\|f(\mathbf{p}_n)-f(\mathbf{p}_{n+1})\|<\|\mathbf{p}_n-\mathbf{p}_{n+1}\|=c_n$, por lo tanto $(c_n)_n\downarrow$ y acotada inferiormente por 0, es decir $c_n\longrightarrow c\geqslant 0$.

c) Dado que $\mathbf{p}_{n_k}\longrightarrow\mathbf{q}$, entonces $c_{n_k}=\|\mathbf{p}_{n_k}-\mathbf{p}_{n_k+1}\|=\|\mathbf{p}_{n_k}-f(\mathbf{p}_{n_k})\|\longrightarrow\|\mathbf{q}-f(\mathbf{q})\|$, pero también converge $c_{n_k+1}=\|\mathbf{p}_{n_k+1}-\mathbf{p}_{n_k+2}\|=\|f(\mathbf{p}_{n_k})-f(f(\mathbf{p}_{n_k}))\|\longrightarrow\|f(\mathbf{q})-f(f(\mathbf{q}))\|$, ya que si $(c_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge, $(c_{n_k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ también converge y al mismo límite, es decir $c=\|\mathbf{q}-f(\mathbf{q})\|=\|f(\mathbf{q})-f(f(\mathbf{q}))\|$.

Si $\mathbf{q}\neq f(\mathbf{q})\Longrightarrow\|f(\mathbf{q})-f(f(\mathbf{q}))\|<\|\mathbf{q}-f(\mathbf{q})\|$ que es una contradicción. Así, $\mathbf{q}=f(\mathbf{q})$ i.e. $\mathbf{q}$ es un punto fijo.

Probemos que $\mathbf{p}_n\longrightarrow\mathbf{q}$, cuando $n\to\infty$. En efecto, sea $\epsilon>0$, $\exists n_k$ tal que $\|\mathbf{p}_{n_k}-\mathbf{q}\|<\epsilon$, entonces si $n>n_k$ se tiene $\|\mathbf{p}_n-\mathbf{q}\|=\|f(\mathbf{p}_{n-1})-f(\mathbf{q})\|<\|\mathbf{p}_{n-1}-\mathbf{q}\|=\|f(\mathbf{p}_{n-2})-f(\mathbf{q})\|<\|\mathbf{p}_{n-2}-\mathbf{q}\|<\cdots<\|\mathbf{p}_{n_k}-\mathbf{q}\|<\epsilon$.

d) Si S es compacto, existe $(\mathbf{p}_{n_k})_k$ tal que $\mathbf{p}_{n_k}\longrightarrow\mathbf{q}$; y por c) $\mathbf{p}_n\longrightarrow\mathbf{q}$. Por la parte a), f posee un punto fijo único.

2.16 Compacidad

135. Se denota $K_0=[\,0,1\,]$, $K_1=K_0\setminus]\,\frac{1}{3},\frac{2}{3}\,[$, $K_2=K_1\setminus(]\,\frac{1}{9},\frac{2}{9}\,[\cup]\,\frac{7}{9},\frac{8}{9}\,[)$,... y $K=\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}K_n$. Demostrar que K es un compacto de interior vacío (K es el conjunto de Cantor[2]).

[2] **Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918)** Matemático ruso-alemán nace en San Petersburgo (Leningrado, Rusia) y fallecido en Halle, Alemania. Ya en la escuela Cantor, mostró talento por las matemáticas. Se doctoró en 1867 y obtuvo el puesto de profesor en la Universidad de Halle en 1872. Mejor conocido como el creador de la Teoría conjuntista, Cantor construyó una estructura lógica completa, en la cual se postulaba que una serie completa de números transfinitos, representaba diferentes órdenes de infinitos.

Solución $K \subset [\,0,1\,]$ es cerrado, pues es la intersección infinita de cerrados y es acotado, por lo tanto compacto. Sea $\mathrm{x} \in K$, $\epsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2\cdot 3^n} < \epsilon$, entonces $]\,x-\epsilon, x+\epsilon\,[\, \cap [\,0,1\,] \not\subset K_n$, por lo tanto no está contenido en K, pues K_n está formado por 2^n intervalos de tamaño $\frac{1}{3^n}$. Así $\overset{\circ}{K} = \emptyset$, es decir $\overset{\circ}{K}$ no puede estar contenido en un conjunto formado por cerrados de tamaño $\frac{1}{3^{n+1}}$, ya que el tamaño del intervalo $]\,x-\epsilon, x+\epsilon\,[$ es mayor o igual que $\frac{1}{3^n}$ y $]\,x-\epsilon, x+\epsilon\,[\, \not\subset K_p, \forall p \geq n$.

136. Demostrar que una parte K de un espacio vectorial normado E es compacta $\Longleftrightarrow \forall (F_i)_{i\in I}$ familia de cerrados de K tales que $\bigcap\limits_{i\in I} F_i = \emptyset$, $\exists N \in \mathbb{N}^*$ y $i_1, \ldots, i_N \in I$ tales que $\bigcap\limits_{k=1}^{N} F_{i_k} = \emptyset$.

Solución

$(\Longrightarrow)$ Sea $(F_i)_{i\in I}$ una familia de cerrados de K, $F_i = S_i \cap K$, con S_i cerrado en E, $\forall i \in I$, por lo que $\bigcap\limits_{i\in E} F_i = \bigcap\limits_{i\in E} S_i \cap K = \emptyset$. Ahora $\bigcup\limits_{i\in I} E\backslash S_i \supset K$, entonces existen $i_1, \ldots, i_N \in I$ tales que $K \subset \bigcup\limits_{k=1}^{N} E\backslash S_{i_k} \Longrightarrow K \cap \bigcap\limits_{k=1}^{N} S_{i_k} = \emptyset = \bigcap\limits_{k=1}^{N} F_{i_k}$.

$(\Longleftarrow)$ Sea $(O_i)_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de K, $K \subset \bigcup\limits_{i\in I} O_i$, entonces $K \subset \bigcup\limits_{i\in I} O_i \cap K \Longrightarrow \emptyset = \bigcap\limits_{i\in I} (E\backslash O_i) \cap K = \bigcap\limits_{i\in I} S_i \cap K = \bigcap\limits_{i\in I} F_i$, donde S_i es un cerrado y F_i es un cerrado de K, $(F_i = S_i \cap K)$. Así, por hipótesis $\exists N \in \mathbb{N}^*$ tal que $\bigcap\limits_{k=1}^{N} F_{i_k} = \emptyset = \bigcap\limits_{k=1}^{N} S_{i_k} \cap K = \bigcap\limits_{k=1}^{N} (E\backslash O_{i_k}) \cap K \Longrightarrow K = \bigcup\limits_{k=1}^{N} O_{i_k} \cap K \subset \bigcup\limits_{k=1}^{N} O_{i_k}$.

137. Sea E un espacio vectorial normado y sea $\emptyset \neq X \subset E$, demostrar que cualesquiera dos de las tres propiedades siguientes implica la tercera:

i) X es compacto   ii) X es discreto   iii) X es finito.

Solución

i) y ii) $\Longrightarrow$ iii) $(\{\mathrm{x}\})_{\mathrm{x}\in X}$ es un recubrimiento abierto de X, pues $\{\mathrm{x}\}$ es abierto en $X \Longrightarrow X$ se recubre por un número finito puntos $\{\mathrm{x}\}$ i.e. X es finito.

i) y iii) $\Longrightarrow$ ii) En efecto iii) $\Longrightarrow$ ii).

ii) y iii) $\Longrightarrow$ i) X tiene un número finito de abiertos.

También adelantó el estudio de las series trigonométricas, fue el primero en probar la no numerabilidad de los números reales e hizo contribuciones importantes a la teoría de la dimensión.

138. Demostrar que toda parte compacta K de un espacio vectorial normado E, contiene una parte densa dentro de K, a lo sumo numerable.

Solución Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, $(B(\mathbf{x}, \frac{1}{n}))_{\mathbf{x}\in K}$ es un recubrimiento de K, del cual se puede extraer un subrecubrimiento finito $(B(\mathbf{x}_{n,i}, \frac{1}{n}))_{1\leq i\leq N_n}$.

El conjunto $H = \{\mathbf{x}_{n,i}/n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq i \leq N_n\}$ es una parte densa de K y numerable.

En efecto, el hecho que sea numerable es evidente. Falta probar que es densa. Sea $\mathbf{y}\in K$, $\epsilon > 0$, $\exists m$ tal que $\frac{1}{m} < \epsilon \Longrightarrow \mathbf{y}\in K \subset \bigcup_{i=1}^{N_m} B(\mathbf{x}_{m,i}, \frac{1}{m}) \Longrightarrow \mathbf{y}\in B(\mathbf{x}_{m,i}, \frac{1}{m})$ para algún $i_0 \in \{1, \ldots, N_m\}$.

Así tenemos que $B(\mathbf{y}, \epsilon) \cap H \neq \emptyset$, pues existe $\mathbf{x}_{m,i_0} \in H$ tal que $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_{m,i_0}\| < \frac{1}{m} < \epsilon$.

139. Sea E un espacio vectorial normado, U, V abiertos de E y K un compacto de E tal que $K \subset U \cup V$. Demostrar que existen compactos K_U, K_V de E tales que $K = K_U \cup K_V$, $K_U \subset U$, $K_V \subset V$.

Solución $K\backslash U$ y $K\backslash V$ son cerrados de E, disjuntos, entonces por el ejercicio 103, página 71, existen abiertos U_1 y V_1 tales que $K\backslash U \subset V_1$, $K\backslash V \subset U_1$, $U_1 \cap V_1 = \emptyset$.

Tomemos $K_U = K\backslash V_1$, $K_V = K\backslash U_1$ que son cerrados de E, contenidos en K, es decir con $K = K_U \cup K_V$,$K_U \subset U$, $K_V \subset V$.

En efecto, si $\mathbf{x} \in K \Longrightarrow \mathbf{x} \in U \cup V \Longrightarrow \mathbf{x} \notin U_1$ ó $\mathbf{x} \notin V_1 \Longrightarrow \mathbf{x} \in K_U$ ó $\mathbf{x} \in K_V$, o sea $K \subset K_U \cup K_V$, i.e. $K = K_U \cup K_V$.

Sea $\mathbf{x}\in K_U \Longrightarrow \mathbf{x}\in K, \mathbf{x} \notin V_1 \Longrightarrow \mathbf{x}\in U$. De manera similar se prueba que si $\mathbf{x}\in K_V \Longrightarrow \mathbf{x}\in V$.

140. Sean E, F espacios vectoriales normados, $K \subset E$ compacto, $L \subset F$ y A una parte cerrada de $K \times L$. Demostrar que la segunda proyección $\mathrm{pr}_2(A)$ es cerrada.

Solución Sea $(\mathbf{y}_n)_n$ una sucesión en $\mathrm{pr}_2(A)$ convergiendo a $\mathbf{y} \in F$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un $\mathbf{x}_n \in E$ tal que $(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) \in A \subset K \times L$, por lo tanto $(\mathbf{x}_n)_n \subset K$ que es compacto y existe $(\mathbf{x}_{n_k})_k$ tal que $\mathbf{x}_{n_k} \longrightarrow \mathbf{x} \in K$, lo que implica $(\mathbf{x}_{n_k}, \mathbf{y}_{n_k}) \longrightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in A$, pues A es cerrado en $K \times L$, es decir $\mathbf{y} \in \mathrm{pr}_2(A)$.

141. Sea E un espacio vectorial normado de dimensión finita, $(\mathbf{u}_n)_n$ una sucesión acotada en

E. Probar que el conjunto de puntos adherentes de $(\mathbf{u}_n)_n$ en E es un compacto de E.

Solución Sea $A' \subset E$ el conjunto de puntos adherentes de $(\mathbf{u}_n)_n$, entonces A' es un conjunto cerrado y acotado (pues la sucesión lo es) en un espacio vectorial normado de dimensión finita, lo que implica que A' es compacto.

142. Sea E un espacio vectorial normado, K una parte compacta de E, $(\mathbf{u}_n)_n$ una sucesión en K, demostrar que si $(\mathbf{u}_n)_n$ tiene un único punto adherente, entonces $(\mathbf{u}_n)_n$ converge.

Solución Supongamos que $(\mathbf{u}_n)_n \subset K$ admite solamente un punto adherente $\mathbf{a} \in E$ y que $(\mathbf{u}_n)_n$ diverge, entonces $\exists\epsilon > 0$ tal que $\forall N \in \mathbb{N}$ existe $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ y se tiene $\|\mathbf{u}_n - \mathbf{a}\| > \epsilon$. Así podemos construir una subsucesión $(\mathbf{u}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\|\mathbf{u}_{n_k} - \mathbf{a}\| \geq \epsilon$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Por ser K compacto, $(\mathbf{u}_{n_k})_k$ admite al menos un valor adherente $\mathbf{b}\in K$ tal que $d(\mathbf{b}, \mathbf{a}) \geq \epsilon$, por lo tanto la sucesión $(\mathbf{u}_n)_n$ tiene dos valores adherentes distintos.

143. Sea E un espacio vectorial normado tal que $\bar{B}(\mathbf{0}, 1)$ es compacta, demostrar que E es completo.

Solución Sea $(\mathbf{u}_n)_n$ una sucesión de Cauchy en E, entonces $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall p$, $q \geq N \Longrightarrow \|\mathbf{u}_p - \mathbf{u}_q\| < 1$. En particular $\forall p \geq N \Longrightarrow \|\mathbf{u}_p - \mathbf{u}_N\| < 1$, lo que implica $\mathbf{u}_p \in \bar{B}(\mathbf{u}_N, 1)$, entonces $(\mathbf{u}_p - \mathbf{u}_N)_{p\geq N}$ admite al menos un valor adherente en $\bar{B}(\mathbf{0}, 1)$ i.e. $(\mathbf{u}_p)_{p\geq N}$ admite un valor adherente en $\bar{B}(\mathbf{u}_N, 1)$.

Probemos que si una sucesión de Cauchy en $\bar{B}(\mathbf{u}_N, 1)$ admite un punto adherente, entonces converge.

Sea $\epsilon > 0$, como $\bar{B}(\mathbf{0}, 1)$ es compacta existe una subsucesión $(\mathbf{u}_{n_k} - \mathbf{u}_N)_k$ convergente a $\mathbf{u} - \mathbf{u}_N$ i.e. $\exists N'$ tal que si $k \geq N' \Longrightarrow \|\mathbf{u}_{n_k} - \mathbf{u}_N - \mathbf{u} + \mathbf{u}_N\| < \frac{1}{2}\epsilon$ y si p y $q \geq N'' \Longrightarrow \|\mathbf{u}_p - \mathbf{u}_N - \mathbf{u}_q + \mathbf{u}_N\| < \frac{1}{2}\epsilon$, pues $(\mathbf{u}_n)_n$ es una sucesión de Cauchy .

Sea $p \geq \max\{N', N'', N\}$, entonces:

$\|\mathbf{u}_p - \mathbf{u}\| = \|\mathbf{u}_p - \mathbf{u}_N - \mathbf{u} + \mathbf{u}_N\| \leq \|\mathbf{u}_p - \mathbf{u}_{n_k}\| + \|\mathbf{u}_{n_k} - \mathbf{u}\| \leq \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon.$

144. Sea E un espacio vectorial normado, $F \subset E$ cerrado, $K \subset E$ compacto, demostrar que $F + K$ es cerrado. ¿Es el resultado cierto si K es sólo cerrado?

Solución Sea $(\mathbf{z}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $F+K$ convergente a $\mathbf{z}\in E$. Para cada $n\in N$, $\exists\mathbf{x}_n\in F$, $\mathbf{y}_n\in K$ tales que $\mathbf{z}_n=\mathbf{x}_n+\mathbf{y}_n$. La sucesión $(\mathbf{y}_n)_n\subset K$ tiene una subsucesión $(\mathbf{y}_{n_k})_k$, convergiendo a $\mathbf{y}\in K$. Como $\mathbf{x}_{n_k}=\mathbf{z}_{n_k}-\mathbf{y}_{n_k}\longrightarrow\mathbf{z}-\mathbf{y}\in F$, por lo tanto $\mathbf{z}=(\mathbf{z}-\mathbf{y})+\mathbf{y}\in F+K$.

Los conjuntos $F=\mathbb{N}^*$, $K=\{-n+\frac{1}{n}/n\in\mathbb{N}^*\}$ son cerrados, pero $\left(\frac{1}{n}\right)_n\subset F+K$ y $0\notin F+K$, o sea $F+K$ no es cerrado.

145. Demostrar que toda parte A de $\mathbb{R}$ que tiene un número finito de puntos de acumulación en $\mathbb{R}$, es a lo sumo numerable.

Solución Sean $a_1<\cdots<a_n$, los puntos de acumulación de A y sea $\epsilon=\inf\limits_{1\le i\le n-1}(a_{i+1}-a_i)/2$. Para cada $p\in\mathbb{Z}$, sea $A_p=A\cap[\,p\epsilon,(p+1)\epsilon\,]$, entonces si A_p no tiene puntos de acumulación en $\mathbb{R}$, A_p es finito. En el caso que A_p tiene un punto de acumulación (y sólo uno) $x\in\mathbb{R}$, entonces $A_p=\{x\}\cup\bigcup\limits_{q\in\mathbb{N}^*}(A_p\backslash\,]\,x-\frac{1}{q},x+\frac{1}{q}\,[)$ es la unión numerable de conjuntos finitos, i.e. A es a lo sumo numerable por ser unión a lo sumo numerable de conjuntos A_p a lo sumo numerables.

146. Sea $f\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ una función tal que $\forall x\in\mathbb{R}$, $\exists\epsilon_x>0$ de modo que f es creciente en $]\,x-\epsilon_x,x+\epsilon_x\,[$, demostrar que f es creciente en $\mathbb{R}$.

Solución Sean $x,y\in\mathbb{R}$ tales que $x<y$; la familia de conjuntos $(]\,z-\epsilon_z,z+\epsilon_z\,[)_{z\in[\,x,y\,]}$ es un recubrimiento abierto del compacto $[\,x,y\,]$, por lo tanto existen $z_1,\ldots,z_n\in[\,x,y\,]$ tales que $[\,x,y\,]\subset\bigcup\limits_{k=1}^{n}\,]\,z_k-\epsilon_{z_k},z_k+\epsilon_{z_k}\,[\implies f(x)\le f(y)$.

En efecto, supongamos que $[\,x,y\,]\subset\,]\,z_1-\epsilon_1,z_1+\epsilon_1\,[\cup]\,z_2-\epsilon_2,z_2+\epsilon_2\,[$, entonces existe $t\in\,]\,z_1-\epsilon_1,z_1+\epsilon_1\,[\cap]\,z_2-\epsilon_2,z_2+\epsilon_2\,[$ con $x\le t\le y$ tal que $f(x)\le f(t)\le f(y)$. Así el resultado es válido si $[\,x,y\,]$ está contenido en una unión finita de intervalos $]\,z_k-\epsilon_k,z_k+\epsilon_k\,[$.

Más generalmente, si f es creciente sobre los intervalos $I_1,\ldots,I_p$ tales que $\bigcup\limits_{k=1}^{p}I_k$ sea un intervalo, entonces f es creciente en $\bigcup\limits_{k=1}^{p}I_k$, por lo tanto f es creciente en $\mathbb{R}$.

147. Demostrar que $[\,0,1\,]$ y $\mathbb{R}$ no son homeomorfos.

Solución Sabemos que $[\,0,1\,]$ es compacto y $\mathbb{R}$ no lo es, pero la compacidad se conserva por homeomorfismos.

148. Sea E un espacio vectorial normado, sea e_1, e_2, e_3 un sistema libre en E y sea $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(t) = \|t(\cos t)e_1 + t(\operatorname{sen}\, t)e_2 + (t^2 - 1)e_3\|$, probar que existe $m > 0$ tal que $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) \geq m$.

Solución Para todo $t \in \mathbb{R}$, $f(t) \geq (t^2 - 1)\|e_3\| - \|t(\cos t)e_1 + t(\operatorname{sen}\, t)e_2\| \longrightarrow +\infty$, si $t \longrightarrow \pm\infty$, entonces existe $t_0 \in \mathbb{R}^+$ tal que si $|t| \geq t_0 \Longrightarrow f(t) \geq 1$.

Por otro lado $f(t) = 0 \Longrightarrow t^2 - 1 = t\cos t = t\operatorname{sen}\, t = 0 \Longrightarrow t = \pm 1$ y $\cos t = \operatorname{sen}\, t = 0$ que es imposible, por lo tanto f es continua en el compacto $[\,-t_0, t_0\,]$ con $f(t) > 0$, es decir $\exists m_1 > 0$ tal que $\forall t \in [\,-t_0, t_0\,]$, $f(t) \geq m_1$ y tomamos $m = \inf\{m_1, 1\}$.

149. Sea E un espacio vectorial normado, K, $L \subset E$ compactos, demostrar que $K + L$ es compacto.

Solución $K + L$ es la imagen del compacto $K \times L$ (de $E \times E$) por la aplicación continua $(x, y) \longmapsto x + y$.

150. a) Sea E un espacio vectorial normado y sean K, $L \subset E$ compactos, demostrar que la unión de segmentos que unen un punto de K y un punto de L, es compacta.

b) Sean E, F dos espacios vectoriales normados, K una parte compacta de E, $L \subset F$ y $f\colon K \longrightarrow L$ continua y biyectiva, demostrar que f^{-1} es continua.

Solución

a) El conjunto propuesto es la imagen del compacto $K \times L \times [\,0, 1\,]$ por la aplicación continua $(x, y, t) \longmapsto tx + (1 - t)y$.

b) Sea $f^{-1}\colon L \longrightarrow K$ y sea A un cerrado de K i.e. compacto, entonces $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$ es un compacto y por lo tanto un cerrado.

151. Sean E, F espacios vectoriales normados, $A \subset E$, $f\colon A \longrightarrow F$ continua, $\varphi\colon A \longrightarrow A \times F$ definida por $\varphi(\mathbf{a}) = (\mathbf{a}, f(\mathbf{a}))$ y $G = A \times f(A)$.

a) Demostrar que φ es continua.

b) Demostrar que G es compacta $\Longleftrightarrow$ A es compacto.

Solución

a) Dado que la función identidad $I: A \longrightarrow A$ es continua y que $f: A \longrightarrow F$ es continua, tenemos que $(I, f): A \longrightarrow A \times F$ es continua i.e. $\varphi = (I, f)$ es continua.

b) ($\Longrightarrow$) G es compacta y $A = \mathrm{pr}_1(G)$ es la imagen de un compacto por una aplicación continua i.e. A es compacto.

($\Longleftarrow$) Si A es compacto, $f(A)$ es compacto, pues f es continua $\Longrightarrow G = A \times f(A)$ es compacto.

152. Sea E un espacio vectorial normado, $A \subset E$ una parte no vacía de E, para cada $\rho > 0$ se define el conjunto $V_\rho(A) = \{\mathbf{x} \in E / d(\mathbf{x}, A) < \rho\}$.

a) Demostrar que $V_\rho(A)$ es un abierto de E y que $\bar{A} \subset V_\rho(A)$.

b) Demostrar que si A es compacto, $\forall U \subset E$ abierto, donde $A \subset U$, existe $\rho > 0$ tal que $V_\rho(A) \subset U$.

Solución

a) $V_\rho(A) = d^{-1}(\cdot, A)(]-\infty, \rho[)$ es la imagen inversa de un abierto por la aplicación continua $\mathbf{x} \longmapsto d(\mathbf{x}, A)$ de E en $\mathbb{R}$. Además $\bar{A} = \{\mathbf{x} \in E / d(\mathbf{x}, A) = 0\} = d^{-1}(\cdot, A)(\{0\}) \subset V_\rho(A)$.

b) Sea $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(\mathbf{a}) = d(\mathbf{a}, E \backslash U)$, es continua sobre el compacto A, con $f(\mathbf{a}) > 0$, $\forall \mathbf{a} \in A$, entonces existe $\rho > 0$ tal que $\forall \mathbf{a} \in A$, $f(\mathbf{a}) \geq \rho$, con lo cual $V_\rho(A) \subset U$. En efecto, si $\mathbf{z} \in V_\rho(A) \Longrightarrow d(\mathbf{z}, A) < \rho$ i.e. $d(\mathbf{z}, \mathbf{a}) < \rho$, para algún $\mathbf{a} \in A \Longrightarrow \mathbf{z} \in U$, pues en caso contrario $\mathbf{z} \in E \backslash U$ y $d(\mathbf{a}, \mathbf{z}) \geq f(\mathbf{a}) \geq \rho$ que es una contradicción.

153. Sea E un espacio vectorial normado.

a) Sea $(\mathbf{a}_n)_n$ una sucesión en E, que converge a un elemento $\ell \in E$, demostrar que $\{\ell\} \cup \{\mathbf{a}_n / n \in \mathbb{N}\}$ es una parte compacta de E.

b) Sean E y F espacios vectoriales normados, $A \subset E$, $f: A \longrightarrow F$ una aplicación, demostrar que si la restricción de f a todo compacto A es continua, entonces f es continua.

c) Sean E y F espacios vectoriales normados, $A \subset E$, $f: A \longrightarrow F$ una aplicación, demostrar que si f es inyectiva y si la imagen por f de todo compacto de A es un compacto de F, entonces f es continua.

Solución

a) Sea $(O_i)_{i \in I}$ un recubrimiento abierto de $\{\ell\} \cup \{\mathbf{a}_n / n \in \mathbb{N}\}$, entonces $\exists O_{i_0}$ tal que $\ell \in O_{i_0}$

y existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, $\mathbf{a}_n \in O_{i_0}$. Así tenemos que hay a lo sumo N abiertos O_i tales que la unión contienen a los elementos $a_1, \ldots, a_N$ i.e. $\{\ell\} \cup \{\mathbf{a}_n / n \in \mathbb{N}\}$ se recubre con un número finito de abiertos.

b) Sea $(\mathbf{a}_n)_n$ una sucesión en A tal que $\mathbf{a}_n \longrightarrow \ell \in A$, por a) $(f(a_n))_n$ converge a $f(\ell) \in F$.

c) Sea $(\mathbf{a}_n)_n$ una sucesión en A convergiendo a $\ell \in A$. Si $(\mathbf{a}_n)_n$ es estacionaria, $(f(\mathbf{a}_n))_n$ es estacionaria y $f(\mathbf{a}_n) \longrightarrow f(\ell)$ en F.

Supongamos que $(\mathbf{a}_n)_n$ no es estacionaria. Sea $(\mathbf{v}_n)_n$ la sucesión obtenida a partir de $(\mathbf{a}_n)_n$ suprimiendo los eventuales términos iguales a ℓ, entonces $\mathbf{v}_n \longrightarrow \ell$, por lo tanto $\{\ell\} \cup \{\mathbf{v}_n / n \in \mathbb{N}\}$ es compacto y se tiene que $L = \{f(\ell)\} \cup \{f(\mathbf{v}_n) / n \in \mathbb{N}\}$ es compacto y $(f(\mathbf{v}_n))_n$ admite un valor adherente en L.

Supongamos que $(f(\mathbf{v}_n))_n$ admite un valor adherente $\mathbf{y} \in L$ tal que $\mathbf{y} \neq f(\ell)$, entonces $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbf{y} = f(\mathbf{v}_{N_1})$. Consideremos $(\mathbf{v}_n)_{n > N_1}$ que converge también a ℓ. De manera similar existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $N_2 > N_1$, con $\mathbf{y} = f(\mathbf{v}_{N_2})$. Así construimos una subsucesión $(\mathbf{v}_{n_k})_k$ tal que $\mathbf{y} = f(\mathbf{v}_{n_k})$, $\forall k \in \mathbb{N}$, entonces $\mathbf{v}_{n_k} \longrightarrow \ell$ y es constante pues f es inyectiva, o sea $\mathbf{v}_{n_k} = \ell$, lo que contradice la definición de la sucesión $(\mathbf{v}_n)_n$. Finalmente $(f(\mathbf{v}_n))_n$ admite en el compacto L un único valor adherente $f(\ell)$ y por el ejercicio 142, página 88, $f(\mathbf{v}_n) \longrightarrow f(\ell) \Longrightarrow f(\mathbf{a}_n) \longrightarrow f(\ell)$.

154. Sea E un espacio vectorial normado de dimensión finita, $\emptyset \neq A \subset E$ acotado, demostrar que existen $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \bar{A}$ tales que $\operatorname{diam}(A) = \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|$.

Solución La aplicación $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \longmapsto \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ es continua sobre el compacto $\bar{A} \times \bar{A}$, por lo que es acotada y tiene su cota superior en $\bar{A} \times \bar{A}$. Por otro lado $\operatorname{diam}(A) = \operatorname{diam}(\bar{A}) = \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|$, para algún $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \bar{A}$.

155. Sea E un espacio vectorial normado, $K \subset E$ compacto, $\hat{K}$ la envolvente equilibrada de K, es decir el conjunto $\{\lambda \mathbf{x} / \mathbf{x} \in K, |\lambda| \leq 1\}$. Demostrar que $\hat{K}$ es compacto.

Solución $\hat{K}$ es la imagen del compacto $[-1, 1] \times K$, por la aplicación continua tal que $(\lambda, \mathbf{x}) \longmapsto \lambda \mathbf{x}$.

156. Sea E un espacio vectorial normado, F un subespacio vectorial de dimensión finita de

E tal que $E \neq F$, demostrar que existe $\mathbf{x} \in E$ tal que $\|\mathbf{x}\| = 1$, $d(\mathbf{x}, F) = 1$.

Solución Existe $\mathbf{x} \in E$ tal que $\mathbf{x} \notin F$ y como F es cerrado, $d(\mathbf{x}, F) > 0$. La aplicación $\mathbf{z} \longmapsto \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|$ es continua sobre el compacto $F \cap \bar{B}(\mathbf{x}, d(\mathbf{x}, F) + 1)$, por lo tanto alcanza su cota inferior y existe $\mathbf{z}_0 \in F$ tal que $d(\mathbf{x}, F) = \|\mathbf{x} - \mathbf{z}_0\|$. Sea $\mathbf{y} = \dfrac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{z}_0\|}(\mathbf{x} - \mathbf{z}_0)$, entonces $\|\mathbf{y}\| = 1$ y $d(\mathbf{y}, F) \leq d(\mathbf{y}, \mathbf{0}) = \|\mathbf{y}\| = 1$ y $\forall \mathbf{z} \in F$, $\|\mathbf{y} - \mathbf{z}\| = \dfrac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{z}_0\|}\|\mathbf{x} - (\mathbf{z}_0 + \|\mathbf{x} - \mathbf{z}_0\|\mathbf{z})\| \geq \dfrac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{z}_0\|} d(\mathbf{x}, F) = 1$, pues $\mathbf{z}_0 + \|\mathbf{x} - \mathbf{z}_0\|\mathbf{z} \in F$. Finalmente $\exists \mathbf{y} \in E$ tal que $\|\mathbf{y}\| = 1$, $d(\mathbf{y}, F) = 1$.

157. Sea E un espacio vectorial normado, U abierto de E, K compacto de E tal que $K \subset U$, demostrar que existe $\rho > 0$ tal que $\forall \mathbf{x} \in K$, $B(\mathbf{x}, \rho) \subset U$.

Solución Sea $K \subset E$ compacto, $K \subset U$, la aplicación $\mathbf{x} \longmapsto d(\mathbf{x}, E \backslash U)$ es continua sobre el compacto K y es positiva, por lo tanto alcanza su cota inferior $\rho > 0$; así $\forall \mathbf{x} \in K$, $B(\mathbf{x}, \rho) \subset U$, pues en caso contrario $\exists\, \mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, \rho)$, tal que $\mathbf{y} \notin U \Longrightarrow \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < \rho$, $\mathbf{y} \in E \backslash U \Longrightarrow d(\mathbf{x}, E \backslash U) = \inf\limits_{\mathbf{y} \in E \backslash U} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \rho$, que es una contradicción, pues $d(\mathbf{x}, E \backslash U) \geq \rho$.

158. Sea E un espacio vectorial normado, K parte compacta de E, $(U_i)_{i \in I}$ un recubrimiento abierto de E, demostrar que $\exists\, \rho > 0$ tal que $\forall \mathbf{x} \in K$, $\exists i \in I$, $B(\mathbf{x}, \rho) \subset U_i$.

Solución Supongamos que es falso; entonces $\forall \rho > 0$, $\exists \mathbf{x} \in K$, $\forall i \in I$, $B(\mathbf{x}, \rho) \not\subset U_i$. Así, si $\rho = \frac{1}{n}$, existe $\mathbf{x}_n \in K$ tal que $B(\mathbf{x}_n, \frac{1}{n}) \not\subset U_i$, $\forall i \in I$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ y como K es compacto $\exists\, (\mathbf{x}_{n_k})_{k \in \mathbb{N}^*}$ tal que $\mathbf{x}_{n_k} \longrightarrow \mathbf{a} \in K$. Dado que $(U_i)_{i \in I}$ recubre K, existe $i_0 \in I$ tal que $\mathbf{a} \in U_{i_0}$ y existe $\rho_0 > 0$ tal que $B(\mathbf{a}, \rho_0) \subset U_{i_0}$. Por otro lado $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $k > N_1 \Longrightarrow \|\mathbf{x}_{n_k} - \mathbf{a}\| < \frac{1}{2}\rho_0$ y $\exists N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $k > N_2$, $\frac{1}{n_k} < \frac{1}{2}\rho_0$.

Sea $N = \sup\{N_1, N_2\}$, entonces si $k > N \Longrightarrow B(\mathbf{x}_{n_k}, \frac{1}{n_k}) \subset B(\mathbf{a}, \rho_0) \subset U_{i_0}$ que es una contradicción.

159. Sea E espacio vectorial normado, $K \subset E$ compacto, $\rho > 0$, $F = \bigcup\limits_{\mathbf{x} \in K} \bar{B}(\mathbf{x}, \rho)$, demostrar que F es cerrado.

Solución Sea $(\mathbf{x}_n)_n$ una sucesión en F convergiendo a $\mathbf{x} \in E$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\exists \mathbf{y}_n \in K$ tal que $\mathbf{x}_n \in \bar{B}(\mathbf{y}_n, \rho)$, por lo tanto dado que K es compacto, existe $(\mathbf{y}_{n_k})_k \subset K$ tal que $\mathbf{y}_{n_k} \longrightarrow \mathbf{y} \in K$.

Por otro lado $\forall k \in \mathbb{N}$, $\|\mathbf{x}_{n_k} - \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}_{n_k} - \mathbf{y}_{n_k}\| + \|\mathbf{y}_{n_k} - \mathbf{y}\| \leq \rho + \|\mathbf{y}_{n_k} - \mathbf{y}\|$, tomando el límite se tiene $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \rho \Longrightarrow \mathbf{x} \in \bar{B}(\mathbf{y}, \rho)$, $\mathbf{y} \in K \Longrightarrow \mathbf{x} \in F$.

160. Sea E un espacio vectorial normado, $K \subset E$ compacto, $(F_n)_n\downarrow$ una sucesión decreciente de cerrados no vacíos de K, $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$.

a) Si $f\colon K \longrightarrow K$ es continua, probar que $f(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(F_n)$

b) Demostrar que la sucesión $(\operatorname{diam}(F_n))_{n\in\mathbb{N}}$ decrece y converge a $\operatorname{diam}(F)$.

Solución

a) La inclusión $f(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(F_n)$ es inmediata.

Inversamente, sea $\mathbf{y} \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f(F_n) \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, existe $\mathbf{x}_n \in F_n$ tal que $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}_n)$. Como K es compacto $\exists (\mathbf{x}_{n_k})_k \subset K$ tal que $\mathbf{x}_{n_k} \longrightarrow \ell \in K$. Así, si $k > N \in \mathbb{N}$, $x_{n_k} \in F_{n_k} \subset F_{n_N}$, por lo tanto $\ell \in F_{n_N}$ y dado que $(F_n)_n$ es decreciente se tiene que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ell \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$.

Finalmente como f es continua, $f(x_{n_k}) \longrightarrow f(\ell) = \mathbf{y} \in f(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n)$.

b) Sabemos que $F \neq \emptyset$ por el ejercicio 154, página 92, pues si $F = \emptyset = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \subset K$ compacto $\Longrightarrow \exists i_1, \dots, i_k$ tales que $\bigcap_{s=1}^{k} F_{i_s} = \emptyset$ y como es decreciente $F_{i_k} = \emptyset$, que es una contradicción.

La sucesión $(\operatorname{diam}(F_n))_n\downarrow$, pues $F_{n+1} \subset F_n$ y $\operatorname{diam} F \leq \operatorname{diam} F_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, por lo que $\operatorname{diam} F_n \longrightarrow \ell \geq \operatorname{diam} F$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\exists \mathbf{a}_n, \mathbf{b}_n \in F_n$ tales que $\|\mathbf{a}_n - \mathbf{b}_n\| = \operatorname{diam} F_n$. Como $(\mathbf{a}_n, \mathbf{b}_n) \in K \times K$ que es compacto, existe $(\mathbf{a}_{n_k}, \mathbf{b}_{n_k})_k$ que converge a $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in K \times K$ i.e. $\mathbf{a}_{n_k} \longrightarrow \mathbf{a}$, $\mathbf{b}_{n_k} \longrightarrow \mathbf{b}$ y como $(\mathbf{a}_{n_k})_{k\geq p} \subset F_p$, $(\mathbf{b}_{n_k})_{k\geq p} \subset F_p$, entonces $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in F_p$, $\forall p \in \mathbb{N}$, por lo tanto $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in F$ y se tiene $\operatorname{diam} F_{n_k} = \|\mathbf{a}_{n_k} - \mathbf{b}_{n_k}\| \longrightarrow \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| \leq \operatorname{diam} F \Longrightarrow \ell \leq \operatorname{diam} F$.

161. Sean E un espacio vectorial normado, K una parte compacta de E y $f\colon K \longrightarrow K$ una aplicación tal que $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in K$, $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \geq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$. Demostrar que f es una isometría de K en K.

Solución

a) f es inyectiva pues si $\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \Longrightarrow \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \neq 0$, o sea $f(\mathbf{x}) \neq f(\mathbf{y})$.

b) Demostremos que f conserva la distancia. En efecto, sean $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in K$, entonces las sucesiones $\mathbf{a}_n = f^{(n)}(\mathbf{a})$, $\mathbf{b}_n = f^{(n)}(\mathbf{b})$ son tales que $(\mathbf{a}_n)_n$, $(\mathbf{b}_n)_n \subset K$, por lo que existe $((\mathbf{a}_{n_k}, \mathbf{b}_{n_k}))_k \longrightarrow (\alpha, \beta) \in K \times K$.

Sea $\epsilon > 0$, $\exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tales que $N_1 < N_2$ y $\|\mathbf{a}_{n_{N_1}} - \alpha\| < \frac{1}{4}\epsilon$, $\|\mathbf{a}_{n_{N_2}} - \alpha\| < \frac{1}{4}\epsilon$, $\|\mathbf{b}_{n_{N_1}} - \beta\| < \frac{1}{4}\epsilon$, $\|\mathbf{b}_{n_{N_2}} - \beta\| < \frac{1}{4}\epsilon$, entonces si $k = n_{N_2} - n_{N_1} > 0$, se tiene $\|\mathbf{a}_k - \mathbf{a}\| \leq \|f(\mathbf{a}_k) - f(\mathbf{a})\| = \|\mathbf{a}_{k+1} - \mathbf{a}_1\| \leq \|f(\mathbf{a}_{k+1}) - f(\mathbf{a}_1)\| = \|\mathbf{a}_{k+2} - \mathbf{a}_2\| \leq \cdots \leq \|\mathbf{a}_{n_{N_2}} - \mathbf{a}_{n_{N_1}}\| < \frac{1}{2}\epsilon$.

Similarmente, $\|\mathbf{b}_k - \mathbf{b}\| < \frac{1}{2}\epsilon$, por lo que $\|\mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1\| \leq \|\mathbf{a}_2 - \mathbf{b}_2\| \leq \cdots \leq \|\mathbf{a}_k - \mathbf{b}_k\| \leq \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| + \|\mathbf{a}_k - \mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}_k - \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| + \epsilon$, $\forall \epsilon > 0$, lo que implica $\|\mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1\| \leq \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$, es decir $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| \leq \|f(\mathbf{a}) - f(\mathbf{b})\| = \|\mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1\| \leq \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$ i.e. $\|f(\mathbf{a}) - f(\mathbf{b})\| = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$.

c) Lo anterior demuestra que $f(K)$ es denso en K. En efecto, $\forall \epsilon > 0$, $\forall \mathbf{a} \in K$, $\exists k \in \mathbb{N}^*$ tal que $\|\mathbf{a} - f^{(k)}(\mathbf{a})\| < \epsilon$ i.e. $\overline{f(K)} = K$.

d) K es compacto y f es continua (pues $\|f(\mathbf{a}) - f(\mathbf{b})\| = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$) $\therefore f(K)$ es compacto, $f(K) = \overline{f(K)} = K$ y f es sobreyectiva sobre K.

162. Sean E, F espacios vectoriales normados, $K \subset E$, $L \subset F$ compactos y sean $f\colon K \longrightarrow L$, $g\colon L \longrightarrow K$ aplicaciones tales que $\forall \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in K$, $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}')\|_F = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|_E$, $\forall \mathbf{y}, \mathbf{y}' \in L$, $\|g(\mathbf{y}) - g(\mathbf{y}')\|_E = \|\mathbf{y} - \mathbf{y}'\|_F$. Demostrar que $f(K) = L$ y $g(L) = K$.

Solución Observamos que si $f(K) = L$ y $g(L) = K \Longrightarrow f \circ g(L) = L$ y $g \circ f(K) = K$, entonces si $g \circ f(K) \neq K$ o $f \circ g(L) \neq L \Longrightarrow f(K) \neq L$ o $g(L) \neq K$, que es la negación de lo que debemos demostrar.

Se supone que $g \circ f(K) \neq K$, entonces $\exists \mathbf{x} \in K$ tal que $\mathbf{x} \notin g \circ f(K)$ y como $g \circ f$ es continua y K compacto, $g \circ f(K)$ es compacto i.e. cerrado en K, lo que implica $\epsilon = d(\mathbf{x}, g \circ f(K)) > 0$. La sucesión definida por $\mathbf{x}_n = g \circ f^{(n)}(\mathbf{x})$ es tal que $(\mathbf{x}_n)_n \subset K$ compacto i.e. $\exists (\mathbf{x}_{n_k})_k$ tal que $\mathbf{x}_{n_k} \longrightarrow \alpha \in K$. Así, existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, $N_1 < N_2$ tales que $\|g \circ f^{n_{N_1}}(\mathbf{x}) - g \circ f^{n_{N_2}}(\mathbf{x})\| < \epsilon$. Finalmente, sea $p = N_2 - N_1 \in \mathbb{N}^*$, se tiene $\|g \circ f^{(p)}(\mathbf{x}) - \mathbf{x}\| = \|g \circ f^{(p+1)}(\mathbf{x}) - g \circ f(\mathbf{x})\| = \cdots = \|g \circ f^{(n_{N_2})}(\mathbf{x}) - g \circ f^{(n_{N_1})}(\mathbf{x})\| < \epsilon$ que contradice la definición de ϵ, pues si $\mathbf{x} \in K$, $\|\mathbf{x} - g \circ f(\mathbf{x})\| \geq \epsilon$. Así se tiene $K = g \circ f(K) \subset g(L) \subset K \Longrightarrow g(L) = K$.

Similarmente, si $f \circ g(L) \neq L$ se llega a una contradicción, lo que prueba que $f(K) = L$.

163. Sea E un espacio vectorial normado, $K \subset E$ compacto; se define el conjunto $\mathrm{I} = \{f\colon K \longrightarrow K / \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in K\}$. Probar que I es un grupo con la operación com-

posición $\circ$.

Solución Sea $f \in I$, probemos que f es biyectiva y que $f^{-1} \in I$.

En efecto, f es continua e inyectiva. Además $f(K)$ es denso en K (ver ejercicio 161, página 94) i.e. $\overline{f(K)} = K$, por lo tanto f es continua y biyectiva. Como f es biyectiva, $f(K) = \overline{f(K)} = K$ por ser K compacto.

Finalmente $f^{-1} \in I$, pues $\|f^{-1}(\mathbf{y}) - f^{-1}(\mathbf{y}')\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| = \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}')\| = \|\mathbf{y} - \mathbf{y}'\|$, es decir $(\mathrm{I}, \circ)$ es un grupo cuyo elemento neutro es la función identidad.

164. Sea E un espacio vectorial normado, F un espacio vectorial normado cerrado de E, G subespacio vectorial de dimensión finita de E, demostrar que $F + G$ es cerrado.

Solución Por inducción sobre la dimensión de G, es suficiente probarlo cuando $\dim(G) = 1$. Sea $\mathbf{v}_1 \in E$ vector que genera G y supongamos que $\mathbf{v}_1 \notin F$. Si no, el resultado es evidente. Sea $(\mathbf{x}_n)_n$ una sucesión de $F + G$ convergiendo a $\mathbf{x} \in E$; para cada $n \in \mathbb{N}$, $\exists \mathbf{y}_n \in F$, $\lambda_n \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{x}_n = \mathbf{y}_n + \lambda_n \mathbf{v}_1$.

Sea $\rho = d(\mathbf{v}_1, F) > 0$, entonces $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n \neq 0 \Longrightarrow \dfrac{\|\mathbf{x}_n\|}{|\lambda_n|} = \|\dfrac{1}{\lambda_n}\mathbf{x}_n - \mathbf{v}_1\| \geq \rho \therefore |\lambda_n| \leq \dfrac{\|\mathbf{x}_n\|}{\rho}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y como $(\mathbf{x}_n)_n$ converge, $(\|\mathbf{x}_n\|)_n$ es acotada, por lo que $(\lambda_n)_n$ es acotada y existe una subsucesión $(\lambda_{n_k})_k$ converge a λ tal que la sucesión $\mathbf{y}_{n_k} \longrightarrow \mathbf{x} - \lambda \mathbf{v}_1 \in F$, lo que implica que $\mathbf{x} = (\mathbf{x} - \lambda \mathbf{v}_1) + \lambda \mathbf{v}_1 \in F + G$.

165. Sean E, F espacios vectoriales normados, $K \subset E$ compacto, $f\colon K \longrightarrow F$ una aplicación tal que $\forall (\mathbf{x}_n)_n$ sucesión de Cauchy en K, la sucesión $(f(\mathbf{x}_n))_n$ es de Cauchy en F. Demostrar que f es uniformemente continua.

Solución Demostramos el resultado por contradicción. Si f no es uniformemente continua, existe $\epsilon > 0$ y dos sucesiones $(\mathbf{x}'_n)_n$, $(\mathbf{x}''_n)_n \subset K$ tales que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|\mathbf{x}'_n - \mathbf{x}''_n\|_E < \dfrac{1}{n}$ y $\|f(\mathbf{x}'_n) - f(\mathbf{x}''_n)\|_F \geq \epsilon$.

Como $K \times K$ es compacto, existe $((\mathbf{x}'_{n_k}, \mathbf{x}''_{n_k}))_k$ subsucesión convergente a $(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') \in K \times K$ i.e. $\mathbf{x}'_{n_k} \longrightarrow \mathbf{x}'$, $\mathbf{x}''_{n_k} \longrightarrow \mathbf{x}''$, por lo que se tiene $\mathbf{x}' = \mathbf{x}''$.

La sucesión $(\mathbf{y}_k)_k$ definida por $\mathbf{y}_k = \mathbf{x}'_{n_k}$, si k es par y $\mathbf{y}_k = \mathbf{x}''_{n_k}$, si k es impar, converge a $\mathbf{x}' (= \mathbf{x}'')$, por lo que $(\mathbf{y}_k)_k$ es de Cauchy en K. Por hipótesis, $(f(\mathbf{y}_k))_k$ es entonces de Cauchy en F, pero $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f(\mathbf{y}_n) - f(\mathbf{y}_{n+1})\|_F \geq \epsilon$, que es una contradicción pues la sucesión es de Cauchy.

166. Sean E y F espacios vectoriales normados, $K \subset E$ compacto, $f\colon K \longrightarrow F$ una aplicación tal que $\forall A,\, B \in \lceil(E)\backslash\{\emptyset\}$, $d(A,B) = 0 \Longrightarrow d'(f(A), f(B)) = 0$, donde $d(A,B) = \inf\limits_{\substack{\mathbf{a}\in A\\ \mathbf{b}\in B}} \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|$ y d' se define de manera análoga en F. Demostrar que f es uniformemente continua.

Solución Dado que K es compacto, es suficiente demostrar que f es continua. Razonemos por contradicción; supongamos que existe $\mathbf{a} \in K$ y $\epsilon > 0$ tales que $\forall \eta > 0$, $\exists \mathbf{x} \in K$ con $\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|_E < \eta$ y $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})\|_F \geq \epsilon$.
Para $\eta = \dfrac{1}{n}$, $\exists \mathbf{x}_n \in K$ con $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{a}\|_E < \dfrac{1}{n}$ y $\|f(\mathbf{x}_n) - f(\mathbf{a})\|_F \geq \epsilon$. Aplicando la hipótesis a los conjuntos $A = \{\mathbf{a}\}$, $B = \{\mathbf{x}_n / n \in \mathbb{N}^*\}$, se tiene que $d(A,B) = 0$, pero $d'(f(A), f(B)) \geq \epsilon$, que es una contradicción.

167. Sea $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, demostrar que la imagen inversa por f de un compacto de $\mathbb{R}$ es un compacto de $\mathbb{R} \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} |f(x)| = +\infty$.

Solución

($\Longrightarrow$) Supongamos que la imagen inversa de un compacto es un compacto. Sea $A > 0$, entonces $f^{-1}([-A, A])$ es un compacto i.e. $\exists B > 0$ tal que $f^{-1}([-A, A]) \subset [-B, B]$, entonces $\forall x \in \mathbb{R}$, con $|x| > B \Longrightarrow |f(x)| \geq A$, o sea $\lim\limits_{x\to\pm\infty} |f(x)| = +\infty$.
($\Longleftarrow$) Supongamos que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} |f(x)| = +\infty$ y sea K un compacto de $\mathbb{R}$, entonces existe $A > 0$ tal que $K \subset [-A, A]$, por lo que existe $B > 0$ tal que $f^{-1}([-A, A]) \subset [-B, B]$, es decir $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| > B \Longrightarrow |f(x)| > A \Longrightarrow f(x) \notin K$. Así $f^{-1}(K)$ es cerrado (pues K es cerrado y f es continua) y acotado pues $f^{-1}(K) \subset [-B, B]$.

168. Sea K un compacto de $\mathbb{R}^2$ no reducido a un punto, demostrar que $\exists! \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ y $\exists! \rho > 0$ tal que $K \subset \bar{B}(\mathbf{a}, \rho)$ y si $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$, $\delta > 0$ de modo que $K \subset \bar{B}(\mathbf{b}, \delta) \Longrightarrow \delta \geq \rho$.

Solución

Existencia Para cada $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$, $A = \{\rho \in \mathbb{R}^* / K \subset \bar{B}(\mathbf{a}, \rho)\} \neq \emptyset$, pues K es acotado $\therefore \exists$ la cota inferior de A que la denotaremos $f(\mathbf{a})$ y $f(\mathbf{a}) \neq 0$ (pues K no es un punto aislado).
Sean $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$, entonces $\forall \mathbf{x} \in K$, $\|\mathbf{a}-\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\| + \|\mathbf{x}-\mathbf{b}\| \Longrightarrow \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| \leq \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\| + f(\mathbf{b}) \Longrightarrow$

$\mathbf{x} \in \bar{B}(\mathbf{a}, \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\| + f(\mathbf{b})) \Longrightarrow K \subset \bar{B}(\mathbf{a}, \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\| + f(\mathbf{b}))$, por lo que $f(\mathbf{a}) \leq \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\| + f(\mathbf{b})$ y por simetría $|f(\mathbf{a}) - f(\mathbf{b})| \leq \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|$, lo que prueba la continuidad (uniforme) de f.

Por otro lado, sea $\delta = \operatorname{diam}(K)$, entonces $\forall \mathbf{x} \in K$ se tiene $K \subset \bar{B}(\mathbf{x}, \delta)$. Así, $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| > 3\delta$, con $\mathbf{x} \in K$, se tiene $\forall \mathbf{y} \in K$, $\|\mathbf{a}-\mathbf{y}\| \geq \|\mathbf{a}-\mathbf{x}\| - \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \geq 2\delta$, por lo que $f(\mathbf{a}) \geq 2\delta$, lo que prueba que f admite una cota inferior que se encuentra en $\bar{B}(\mathbf{a}, 3\delta)$ que es compacto.

En efecto, sea $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ tal que si $\mathbf{x} \in K$, $\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| < 3\delta$. En particular si $\mathbf{a} = \mathbf{x}$ se tiene $K \subset \bar{B}(\mathbf{a}, \delta) \Longrightarrow f(\mathbf{a}) \leq \delta$, $\forall \mathbf{a} \in K$ y como $f(\mathbf{a}) \geq 2\delta$, $\forall \mathbf{a}$ tal que $\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| > 3\delta$, f tiene un mínimo en el compacto $\bar{B}(\mathbf{a}, 3\delta)$ por ser continua. Así, $\exists \mathbf{a}_0 \in \mathbb{R}^2$ tal que $f(\mathbf{a}_0)$ es mínimo i.e. $f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{a}_0)$, $\forall \mathbf{y} \in \bar{B}(\mathbf{a}, 3\delta)$, es decir $\exists \mathbf{a}_0 \in \mathbb{R}^2$, $\rho_0 > 0$ tales que $K \subset \bar{B}(\mathbf{a}_0, \rho_0)$ y si $K \subset \bar{B}(\mathbf{b}, \beta) \Longrightarrow f(\mathbf{a}_0) = \rho_0 \leq f(\mathbf{b}) \leq \beta$.

Unicidad Supongamos que existen $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^2$, $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tales que $(\mathbf{a}_1, \rho_1)$ y $(\mathbf{a}_2, \rho_2)$ satisfacen la condición, entonces $\rho_1 \geq \rho_2$ y $\rho_2 \geq \rho_1$ i.e. $\rho_1 = \rho_2 = \rho$.

Si $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2$, no hay nada que probar.

Si $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{a}_2$, consideremos $\mathbf{a} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2)$ y $\rho' = \sqrt{\rho^2 - \frac{1}{4}\|\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2\|^2}$. Probemos que $K \subset B(\mathbf{a}, \rho')$.

En efecto, $\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|^2 < {\rho'}^2 = \rho^2 - \frac{1}{4}\|\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2\|^2 \Longleftrightarrow \|\mathbf{x}-\mathbf{a}_1\|^2 - \frac{1}{4}\|\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2\|^2 \leq \|\mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{a}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{a}_2\|^2 = \|\mathbf{x}-\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{a}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{a}_2\|^2 = \|\mathbf{x}-\mathbf{a}_1 - \frac{1}{2}(\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_1)\|^2 < \rho^2 - \frac{1}{4}\|\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2\|^2 \Longleftrightarrow \|\mathbf{x}-\mathbf{a}_1\|^2 < \rho^2$, por lo tanto, si $\mathbf{x} \in \bar{B}(\mathbf{a}_1, \rho) \Longrightarrow \mathbf{x} \in \bar{B}(\mathbf{a}, \rho')$, o sea $K \subset B(\mathbf{a}, \rho')$ y $f(\mathbf{a}) \leq \rho' < \rho$ que es una contradicción, pues ρ es el menor.

169. Sea E un espacio vectorial euclidiano de dimensión finita, $K \subset E$ compacto, para $\rho > 0$ se denota $B_\rho = \{\mathbf{x} \in E / K \subset \bar{B}(\mathbf{x}, \rho)\}$, demostrar que $I = \{\rho > 0,\ B_\rho \neq \emptyset\}$ es un intervalo. Si denotamos $\rho_0 = \inf I$, precisar B_{ρ_0}.

Solución Observamos que el ejercicio 168, página 97 es válido en general para un espacio vectorial normado de dimensión finita.

Es claro que $I \neq \emptyset$, pues al ser K compacto, $\exists \mathbf{x} \in E$, $\rho > 0$ tal que $K \subset \bar{B}(\mathbf{x}, \rho) \Longrightarrow \mathbf{x} \in B_\rho$ i.e. $I \neq \emptyset$ pues $\rho \in I$.

Sean α, $\beta \in I$, probemos que si $\alpha < t < \beta \Longrightarrow t \in I$. En efecto, si $\alpha < t < \beta$, con α,

$\beta\in I \Longrightarrow B_\alpha = \{\mathbf{x}\in E/K \subset \bar{B}(\mathbf{x},\alpha)\} \neq \emptyset$, $B_\beta = \{\mathbf{x}\in E/K \subset \bar{B}(\mathbf{x},\beta)\} \neq \emptyset$. Pero si $\mathbf{x}\in B_\alpha$, $K \subset \bar{B}(\mathbf{x},\alpha) \subset \bar{B}(\mathbf{x},t) \Longrightarrow \emptyset \neq B_\alpha \subset B_t \subset B_\beta$, por lo tanto $B_t \neq \emptyset$ y $t\in I$. Sea $\rho_0 = \inf I$, que existe pues I es acotado inferiormente por 0.

Por otro lado, por el problema 168, página 97 $\exists! \mathbf{a} \in E$, $\exists! \rho > 0$ tales que $K \subset \bar{B}(\mathbf{a},\rho)$ y así tenemos que $\rho = \rho_0$. Sean $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in B_{\rho_0}$, entonces $K \subset \bar{B}(\mathbf{a},\rho_0)$, $K \subset \bar{B}(\mathbf{b},\rho_0) \Longrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{b}$, pues sólo existe un $\mathbf{a} \in E$ tal que $\bar{B}(\mathbf{a},\rho_0) \supset K$ i.e. $B_{\rho_0} = \{\mathbf{a}\}$.

170. Sea $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, sobreyectiva tal que $\forall y \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(\{y\})$ es un compacto de $\mathbb{R}$. Demostrar que f es cerrada (i.e. la imagen de un cerrado es un cerrado).

Solución

a) Demostremos que $|f(x)| \longrightarrow +\infty$, si $x \longrightarrow +\infty$, razonando por contradicción. En efecto, si $|f(x)| \not\longrightarrow +\infty$, cuando $x \to +\infty$, $\exists A > 0$ y $(x_n)_n\uparrow$ tal que $x_n \longrightarrow +\infty$, con $|f(x_n)| < A$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Supongamos que $\Gamma = \{n\in\mathbb{N}/\exists\, y\in[\,x_n, x_{n+1}\,],\ f(y) \geq A+1\}$ es infinito, existe $\sigma\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ estrictamente creciente y $(z_n)_n$ tales que $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n \in [\,x_{\sigma(n)}, x_{\sigma(n)+1}\,]$ y $f(z_n) = A + \frac{1}{2}$, utilizando el teorema de los valores intermedios, pero $f^{-1}(\{A+\frac{1}{2}\})$ no es acotado lo que es contradictorio.

Así Γ es finito (sea $m = \sup\Gamma$) y f es acotado superiormente por $A+1$ en $[\,x_m, \infty\,[$. Similarmente f es acotado inferiormente. Como f es sobreyectiva se puede construir una sucesión $(u_n)_n$ de límite $+\infty$ tal que $\forall n \geq m$:

$$\begin{cases} f(u_{2n+1}) > \displaystyle\sup_{x\in[\,u_{2n},+\infty\,[} f(x) \ \text{ y } \ u_{2n+1} < u_{2n} - 1,\ f(u_{2n+1}) > 0 \\ f(u_{2n+2}) < \displaystyle\inf_{x\in[\,u_{2n+1},+\infty\,[} f(x) \ \text{ y } \ u_{2n+2} < u_{2n+1} - 1,\ f(u_{2n+1}) < 0. \end{cases}$$

Por el teorema de los valores intermedios, se tiene que $f^{-1}(\{0\})$ no es acotado, lo que es una contradicción. Finalmente tenemos que $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ o $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp\infty$.

b) Sea F un cerrado de $\mathbb{R}$ y $(y_n)_n$ una sucesión en $f(F)$ que converge a $y\in\mathbb{R}$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $\exists\, x_n \in F$ tal que $f(x_n) = y_n$.

Si $(x_n)_n$ no es acotado, se puede extraer una subsucesión $(x_{n_k})_k$ tal que $x_{n_k} \longrightarrow \pm\infty$ y $f(x_{n_k}) \not\longrightarrow \pm\infty$ que es una contradicción.

Así, $(x_n)_n$ es acotado y existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $x_{n_k} \longrightarrow x$, lo que establece que $x \in F$ y $f(x) = y \in f(F)$, o sea $f(F)$ es cerrado.

171. Sean E y F espacios vectoriales normados, $f\colon E \longrightarrow F$ biyectiva y abierta, demostrar:

a) Si $(\mathbf{y}_n)_n \subset F$ tal que $\mathbf{y}_n \longrightarrow \mathbf{y}$, la sucesión $(\mathbf{x}_n)_n \subset E$ con $\mathbf{x}_n = f^{-1}(\mathbf{y}_n)$ convergente en E.

b) Si B es compacto en F, $A = f^{-1}(B)$ es compacto en E.

Solución

a) Sea $\mathbf{x}_n = f^{-1}(\mathbf{y}_n)$, $\mathbf{x} = f^{-1}(\mathbf{y})$. Probemos que $\mathbf{x}_n \longrightarrow \mathbf{x}$.

Sea $\epsilon > 0$, $B(\mathbf{x}, \epsilon)$ es un abierto $\Longrightarrow f(B(\mathbf{x}, \epsilon))$ es abierto con $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \in f(B(\mathbf{x}, \epsilon)) \Longrightarrow$ $\exists \delta > 0$ tal que $B(f(\mathbf{x}), \delta)) \subset f(B(\mathbf{x}, \epsilon))$.

Ahora $\mathbf{y}_n \longrightarrow \mathbf{y} = f(\mathbf{x})$, entonces $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N \Longrightarrow \mathbf{y}_n \in B(\mathbf{y}, \delta)$ i.e. $\mathbf{x}_n = f^{-1}(\mathbf{y}_n) \in B(\mathbf{x}, \epsilon)$, si $n \geq N$, es decir $\mathbf{x}_n \longrightarrow \mathbf{x} \in E$.

b) Sea B compacto de F, probemos que $A = f^{-1}(B)$ es un compacto en E.

Sea $(O_i)_{i\in I}$ una familia de abiertos tales que $A = f^{-1}(B) \subset \bigcup\limits_{i\in I} O_i \Longrightarrow B \subset f(\bigcup\limits_{i\in I} O_i) \subset \bigcup\limits_{i\in I} f(O_i)$ y como $f(O_i)$ es abierto, existen $i_1, \ldots, i_m$ tales que $B \subset \bigcup\limits_{s=1}^{m} f(O_{i_s})$.

Probemos que $A = f^{-1}(B) \subset \bigcup\limits_{s=1}^{m} O_{i_s}$. Sea $\mathbf{x} \in f^{-1}(B) \Longrightarrow f(\mathbf{x}) \in B \subset \bigcup\limits_{s=1}^{m} f(O_{i_s}) \Longrightarrow$ $f(\mathbf{x}) \in f(O_{i_s})$, para algún $s = 1, \ldots, m$, lo que implica $\mathbf{x} \in O_{i_s}$, para algún $s = 1, \ldots, m$, (por ser f inyectiva) $\Longrightarrow \mathbf{x} \in \bigcup\limits_{s=1}^{m} O_{i_s}$, o sea A es compacto.

172. Sean E y F espacios vectoriales normados, $f\colon E \longrightarrow K$ una aplicación, de modo que $K \subset F$ compacto, probar que si G_f es cerrado, f es continua.

Solución Supongamos que no es continua, entonces $\exists \mathbf{x}_0 \in E$ y $\exists \epsilon > 0$ tal que $\forall \eta > 0$, $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \eta$ y se tiene $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\| > \epsilon$.

Sea $\eta = \dfrac{1}{n}$, con $n \in \mathbb{N}^*$, $\exists \mathbf{x}_n \in E$ tal que $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\| < \dfrac{1}{n}$ y $\|f(\mathbf{x}_n) - f(\mathbf{x}_0)\| > \epsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ahora, como $\mathbf{x}_n \longrightarrow \mathbf{x}_0$ y $(f(\mathbf{x}_n))_n \subset K$ compacto, $\exists\, (f(\mathbf{x}_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ convergente, $f(\mathbf{x}_{n_k}) \longrightarrow \mathbf{y} \in K \Longrightarrow (\mathbf{x}_{n_k}, f(\mathbf{x}_{n_k})) \longrightarrow (\mathbf{x}_0, \mathbf{y})$ y como $(\mathbf{x}_{n_k}, f(\mathbf{x}_{n_k})) \in G_f$ se tiene $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}) \in G_f$ i.e. $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}_0)$, pero $\|f(\mathbf{x}_{n_k}) - f(\mathbf{x}_0)\| > \epsilon$, $\forall k \in \mathbb{N}$ que es una contradicción pues se tiene que $f(\mathbf{x}_{n_k}) \longrightarrow f(\mathbf{x}_0)$.

173. Sea E un espacio vectorial normado, probar que $F \subset E$ es cerrado si y solamente si $\{\mathbf{x} \in E/d(\mathbf{x}, F) = 0\} \subset F$.

Solución

($\Longrightarrow$) Sea $\mathbf{x} \in \{\mathbf{y} \in E/d(\mathbf{y}, F) = 0\}$, entonces $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists \mathbf{x}_n \in F$ tal que $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| < \frac{1}{n}$, por lo tanto $\mathbf{x}_n \longrightarrow \mathbf{x}$, pero F es cerrado $\Longrightarrow \mathbf{x} \in F$.

($\Longleftarrow$) Sea $(\mathbf{x}_n)_n \subset F$ tal que $\mathbf{x}_n \longrightarrow \mathbf{x}$, entonces dado $\epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N \Longrightarrow d(\mathbf{x}, F) \leq \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| < \epsilon$ i.e. $d(\mathbf{x}, F) = 0 \Longrightarrow \mathbf{x} \in F$.

174. Se define en $\mathbb{R}$ la distancia $d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$, probar que $(\mathbb{R}, d)$ no es completo.

Solución Probemos que d es una distancia.

- $d(x, y) \geq 0$, $\forall x$, $y \in \mathbb{R}$ y si $d(x, y) = 0 \Longrightarrow \arctan x = \arctan y \Longrightarrow x = y$.

- $d(x, y) = |\arctan x - \arctan y| \leq |\arctan x - \arctan z| + |\arctan z - \arctan y| = d(x, z) + d(z, y)$.

Sea $(x_n)_n$ una sucesión tal que $x_n \longrightarrow \frac{\pi}{2}^-$, entonces $z_n = \tan x_n \longrightarrow +\infty$. Probemos que $(z_n)_n$ es de Cauchy.

En efecto, $d(z_n, z_m) = |x_n - x_m| < \epsilon$, para n, $m \geq N$, pues $(x_n)_n$ converge a $\frac{\pi}{2}$ y es de Cauchy. Así, $(z_n)_n$ es de Cauchy, pero $(z_n)_n$ es divergente.

175. Sea E espacio vectorial normado, $F \subset E$ cerrado, $(\mathbf{x}_n)_n \subset F$ tal que $\mathbf{x}_n \longrightarrow \mathbf{x}$, entonces $\mathbf{x} \in F$. Enuncie el recíproco y estudiar su veracidad.

Solución Dado que $\mathbf{x}_n \longrightarrow \mathbf{x}$, entonces $\mathbf{x} \in \overline{\{\mathbf{x}_n/n \in \mathbb{N}\}} \subset \bar{F} = F$.

Recíproco Si $\forall (\mathbf{x}_n)_n \subset F$ tal que $\mathbf{x}_n \longrightarrow \mathbf{x} \Longrightarrow \mathbf{x} \in F$, entonces F es cerrado.

Hagamos la prueba por contradicción y supongamos que F no es cerrado, entonces $E \backslash F$ no es abierto, es decir $\exists \mathbf{x} \in E \backslash F$ tal que $\forall \eta > 0$, $B(\mathbf{x}, \eta) \not\subset E \backslash F$.

Sea $\eta = \frac{1}{n}$, $\exists \mathbf{x}_n \in B(\mathbf{x}, \frac{1}{n})$ tal que $\mathbf{x}_n \notin E \backslash F$, por lo tanto $(\mathbf{x}_n)_n \subset F$, $\mathbf{x}_n \longrightarrow \mathbf{x} \notin F$, que es una contradicción.

176. Sea E un espacio vectorial normado, $F \subset E$ un cerrado, K compacto, entonces $F \cap K$ es compacto.

Solución Sea $(O_i)_{i\in I}$ familia de abiertos tales que $K\cap F\subset \bigcup\limits_{i\in I} O_i \Longrightarrow K\subset \bigcup\limits_{i\in I} O_i\cup E\backslash F \therefore K\subset \bigcup\limits_{s=1}^{m} O_{i_s}\cup E\backslash F \Longrightarrow K\cap F\subset \bigcup\limits_{s=1}^{m} O_{i_s}$, pues si $\mathbf{x}\in K\cap F \Longrightarrow \mathbf{x}\in K, \mathbf{x}\in F \Longrightarrow \mathbf{x}\in \bigcup\limits_{s=1}^{m} O_{i_s}, \mathbf{x}\notin E\backslash F \Longrightarrow \mathbf{x}\in \bigcup\limits_{s=1}^{m} O_{i_s}$, o sea $K\cap F$ es compacto.

177. Sea E un espacio vectorial normado, demostrar que toda intersección de compactos es un compacto y que toda unión finita de compactos es compacta. ¿Toda unión de compactos es compacta?

Solución

a) Sea $(K_m)_{m\in M}$ una familia de compactos y sea $K=\bigcap\limits_{m\in M} K_m\subset K_m, \forall m\in M$. Como K es cerrado, por el ejercicio 176, página 101, $K\cap K_m=K$ es compacto.

b) Sea $K=\bigcup\limits_{m=1}^{p} K_m$ y sea $(O_i)_{i\in I}$ una familia de abiertos tales que $K\subset \bigcup\limits_{i\in I} O_i \Longrightarrow K_m\in \bigcup\limits_{i\in I} O_i, \forall m=1,\ldots,p$ y $K_m\subset \bigcup\limits_{s\in I_m} O_s$, con I_m finito, $\forall m=1,\ldots,p \Longrightarrow K=\bigcup\limits_{m=1}^{p} K_m\subset \bigcup\limits_{s\in I} O_s, I=\bigcup\limits_{m=1}^{p} I_m$ i.e. K es compacto.

c) En general es falso que toda unión de compactos sea compacta, pues $[\,n,n+1\,]$ son compactos, pero $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} [\,n,n+1\,]=[\,0,+\infty\,[$, que no es compacto.

178. Sea E un espacio vectorial normado.

a) Dar un ejemplo de una sucesión de cerrados tales que $F_{n+1}\subset F_n\neq\emptyset, \forall n\in\mathbb{N}$, pero $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n=\emptyset$.

b) Demostrar que si $(F_n)_n$ es una sucesión de cerrados tales que $F_{n+1}\subset F_n, F_n\neq\emptyset, \forall n\in\mathbb{N}$ y $F_n\subset K$ compacto de $E \Longrightarrow \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n\neq\emptyset$.

c) Sea $(F_n)_n$ una sucesión de cerrados de E, tales que $F_{n+1}\subset F_n, F_n\neq\emptyset, \forall n\in\mathbb{N}$.

Sea $F=\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ y sea O un abierto tal que $F\subset O$. Demostrar que existe $N\in\mathbb{N}$, tal que si $n\geq N \Longrightarrow F_n\subset O$.

Solución

a) Sea $E=\mathbb{R}$, $F_n=[\,n,+\infty\,[\,\neq\emptyset$, $F_{n+1}\subset F_n$ y $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n=\emptyset$.

b) Si $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n=\emptyset \Longrightarrow K\subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E\backslash F_n \therefore K\subset \bigcup\limits_{k=1}^{s} E\backslash F_{n_k}=E\backslash \bigcap\limits_{k=1}^{s} F_{n_k}=E\backslash F_{n_0}$, donde $n_0=\max\{n_1,\ldots,n_s\} \Longrightarrow F_{n_0}\subset K\subset E\backslash F_{n_0} \Longrightarrow F_{n_0}=\emptyset$. Así $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n\neq\emptyset$.

c) Sea $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \subset O$ abierto, entonces $K \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E\backslash F_n \cup O \Longrightarrow K \subset \bigcup_{k=1}^{s} E\backslash F_{n_k} \cup O = E\backslash F_{n_0} \cup O$, con $n_0 = \max\{n_1, \ldots, n_s\}$, por lo que $\forall n \geq n_0$ se tiene $F_n \subset K \subset E\backslash F_{n_0} \cup O \subset E\backslash F_n \cup O \Longrightarrow F_n \subset O$, si $n \geq n_0$.

179. Sea E un espacio vectorial normado y sean F un cerrado, K compacto de E, tales que $K\cap F = \emptyset$. Demostrar que existe $\alpha>0$ tal que $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \geq \alpha, \forall \mathbf{x}\in K, \forall \mathbf{y}\in K$, i.e. $d(K, F) \geq \alpha$.

Solución Supongamos que no, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists \mathbf{x}_n \in K$, $\exists \mathbf{y}_n \in F$ tales que $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{y}_n\| < \frac{1}{n}$. Dado que K es compacto $\exists (\mathbf{x}_{n_k})_k \subset K$ tal que $\mathbf{x}_{n_k} \longrightarrow \mathbf{x} \in K$, por lo cual $\mathbf{y}_{n_k} \longrightarrow \mathbf{x}$, pero F es cerrado $\Longrightarrow \mathbf{x} \in F$, es decir $F \cap K \neq \emptyset$, que es una contradicción. Así $\exists \alpha > 0$ tal que $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \geq \alpha, \forall \mathbf{x} \in K, \forall \mathbf{y} \in F$.

180. a) Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto, demostrar que si $(x, y) \in U$, existen $\delta > 0$, $\epsilon > 0$ tales que $]\,x - \delta, x + \delta\,[\times]\,y - \epsilon, y + \epsilon\,[\subset U$.

b) Sea $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, sea O abierto de $\mathbb{R}^2$ tal que $O \subset \mathbb{R} \times [\,a, b\,]$ y sea $A = \{x \in \mathbb{R} / \exists\, y \in [\,a, b\,],\ (x, y) \in O\}$. Demostrar que A es abierto en $\mathbb{R}$.

Solución

a) Sea $(x, y) \in U$ abierto, $\exists \eta > 0$ tal que $B((x, y), \eta) \subset U$, entonces $\forall \delta > 0$, $\forall \epsilon > 0$ tales que $\delta < \frac{1}{2}\eta$, $\epsilon < \frac{1}{2}\eta$, se tiene que $]\,x - \delta, x + \delta\,[\times]\,y - \epsilon, y + \epsilon\,[\subset U$.

En efecto, sea $(u, v) \in\,]\,x - \delta, x + \delta\,[\times]\,y - \epsilon, y + \epsilon\,[\Longrightarrow \|(u, v) - (x, y)\|^2 \leq \frac{1}{4}\eta^2 + \frac{1}{4}\eta^2 = \frac{1}{2}\eta^2 < \eta^2 \Longrightarrow (u, v) \in B((x, y), \eta) \subset U$.

b) Sea $x\in A$, $\exists y\in[\,a, b\,]$ tal que $(x, y)\in O \therefore \exists\, \delta>0$, $\epsilon>0$ tales que $]\,x-\delta, x+\delta\,[\times]\,y-\epsilon, y+\epsilon\,[\subset O \Longrightarrow\,]\,x - \delta, x + \delta\,[\subset A$ i.e. A es abierto.

En efecto, si $u \in\,]\,x - \delta, x + \delta\,[$, $\exists v \in\,]\,y - \epsilon, y + \epsilon\,[\subset [\,a, b\,]$ tal que $(u, v) \in O \Longrightarrow u \in A$.

181. Sea E un espacio vectorial normado y sea $f\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $\mathbf{a} \in E$ tal que $f(\mathbf{a}) > 0$. Demostrar que $\exists B(\mathbf{a}, \rho)$ tal que si $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, \rho) \Longrightarrow f(\mathbf{x}) > 0$.

Solución Sea $\epsilon = \frac{1}{2}f(\mathbf{a}) > 0$, $\exists \rho > 0$ tal que si $\mathbf{x}\in B(\mathbf{a}, \rho) \Longrightarrow |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| < \epsilon = \frac{1}{2}f(\mathbf{a}) \Longrightarrow 0 < \frac{1}{2}f(\mathbf{a}) < f(\mathbf{x}) < \frac{3}{2}f(\mathbf{a})$, $\forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, \rho)$.

182. Sea $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{5}y^2 = 1\}$, demostrar que C es compacto.

Solución $C = f^{-1}(\{1\})$ es cerrado pues $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{5}y^2$ es continua.

Además C es acotado, pues $C \subset \bar{B}((0,0),3)$. En efecto, si $(x,y)\in C \Longrightarrow \frac{1}{4}x^2+\frac{1}{5}y^2 \leq 1 \Longrightarrow \frac{1}{4}x^2 \leq 1$, $\frac{1}{5}y^2 \leq 1 \Longrightarrow |x| \leq 2$, $|y| \leq \sqrt{5} \Longrightarrow x^2+y^2 \leq 9$ i.e. $(x,y) \in \bar{B}((0,0),3)$.

183. Sea $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - 2y \geq 0\}$, demostrar que A es cerrado en $\mathbb{R}^2$. ¿Es A compacto?

Solución Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 - 2y$ es continua y $A = f^{-1}([0,+\infty[)$ es cerrado por ser la imagen inversa de un cerrado por una función continua.

A no es compacto, pues no es acotado ya que la sucesión $((n,0))_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ y no es acotada.

184. ¿Es el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R}/0 \leq \dfrac{x^2+1}{x} \operatorname{sen} x \cosh x \leq 1\}$ compacto?

Solución La función $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(0) = 1$, $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x} \operatorname{sen} x \cosh x$, si $x \neq 0$ es continua y $A = f^{-1}([0,1])$ que es cerrado, pero no es acotado pues $n\pi \in A$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.17 Aplicaciones lineales

185. Sean E y F espacios vectoriales normados, $f \in \mathcal{H}(E,F)$, se supone $\forall (\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión en E tendiendo a $\mathbf{0}$, la sucesión $(f(\mathbf{x}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada. Probar que f es continua.

Solución Supongamos que f no es continua, entonces $\exists \mathbf{x}_0 \in E$, $\exists \epsilon > 0$ tal que $\forall \eta > 0$, $\exists \mathbf{x} \in E$ tal que $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \eta$ y $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| > \epsilon$.

Sea $\eta = \dfrac{1}{n}$, $\mathbf{y}_n = \mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0$, $\|\mathbf{y}_n\|_E < \dfrac{1}{n}$ y $\|f(\mathbf{y}_n)\|_F > \epsilon$, por lo tanto si $\mathbf{u}_n = \dfrac{\mathbf{y}_n}{\|\mathbf{y}_n\|}$, $\|\mathbf{u}_n\| = 1$ y $f(\mathbf{u}_n) = \dfrac{1}{\|\mathbf{y}_n\|_E} f(\mathbf{y}_n)$ es tal que $\|f(\mathbf{u})\|_F > \dfrac{\epsilon}{\|\mathbf{y}_n\|_E} > n\epsilon$.

Se ha demostrado que existe $(\mathbf{u}_n)_n \subset E$ tal que $\|\mathbf{u}_n\|_E = 1$, $\|f(\mathbf{u}_n)\|_F \longrightarrow +\infty$, si $n \to \infty$.

Sea $\mathbf{x}_n = \dfrac{\mathbf{u}_n}{\sqrt{\|f(\mathbf{u}_n)\|_F}}$, entonces $\mathbf{x}_n \longrightarrow \mathbf{0}$ y $\|f(\mathbf{x}_n)\|_F = \sqrt{\|f(\mathbf{u}_n)\|_F} \longrightarrow +\infty$, que es una contradicción.

186. Sean E y F espacios vectoriales normados, $(\mathbf{x}_n)_n \subset E$ sucesión tal que $\mathbf{x}_n \longrightarrow \mathbf{x} \in E$, $(f_n)_n \subset \mathsf{L}(E,F)$ convergiendo a $f \in \mathsf{L}(E,F)$. Demostrar que $(f(\mathbf{x}_n))_n$ converge a $f(\mathbf{x})$ en F.

Solución Sabemos que dado $0 < \epsilon < \min\{1, 2\|f\|\}$, $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_1 \Longrightarrow \|f_n - f\| \leq \dfrac{\epsilon}{2(\|\mathbf{x}\|_E + 1)}$ y $\exists N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_2 \Longrightarrow \|\mathbf{x}_n\|_E - \|\mathbf{x}\|_E \leq \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\|_E \leq \dfrac{\epsilon}{2\|f\|} < 1$ i.e. $\|\mathbf{x}_n\| \leq \|\mathbf{x}\|_E + 1$. Así, para $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ se tiene:

$\|f_n(\mathbf{x}_n) - f(\mathbf{x})\|_F \leq \|f_n(\mathbf{x}_n) - f(\mathbf{x}_n)\|_F + \|f(\mathbf{x}_n) - f(\mathbf{x})\|_F \leq$

$\|f_n - f\| \, \|\mathbf{x}_n\|_E + \|f\| \, \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\|_E \leq \frac{\epsilon}{2} \frac{\|\mathbf{x}_n\|_E}{\|\mathbf{x}\|_E + 1} + \|f\| \frac{\epsilon}{2\|f\|} \leq \epsilon.$

187. Sean E, F y G espacios vectoriales normados, $(f_n)_n \subset \mathsf{L}(E,F)$, convergiendo a $f \in \mathsf{L}(E,F)$, $(g_n)_n \subset \mathsf{L}(F,G)$, convergiendo a $g \in \mathsf{L}(F,G)$, demostrar que $(g_n \circ f_n)_n$ converge a $g \circ f$ en $\mathsf{L}(E,G)$.

Solución Sea $0 < \epsilon < \min\{1, 2\|f\|, 2(\|g\|+1)\}$, $\|f\| > 0$, $\|g\| > 0$, $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_1 \Longrightarrow \|f_n - f\| \leq \frac{\epsilon}{2(\|g\|+1)}$, $\exists N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_2 \Longrightarrow \|g_n - g\| \leq \frac{\epsilon}{2\|f\|}$ y $\exists N_3 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_3 \Longrightarrow \|g_n\| - \|g\| \leq \|g_n - g\| \leq \epsilon \leq 1 \Longrightarrow \|g_n\| \leq 1 + \|g\|$.

Así, para $n \geq N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$ se tiene $\|g_n \circ f_n - g \circ f\| = \|g_n \circ f_n - g_n \circ f + g_n \circ f - g \circ f\| \leq \|g_n\| \, \|f_n - f\| + \|f\| \, \|g_n - g\| \leq \|f_n - f\|(1 + \|g\|) + \|f\| \, \|g_n - g\| \leq \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon$.

188. Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial normado y $P \in \mathbb{R}\,[\,x\,]$; demostrar que $\{f \in \mathsf{L}(E) / P(f) = 0\}$ es cerrado en $\mathsf{L}(E)$.

Solución Sea $(f_n)_n \subset \mathsf{L}(E)$ tal que $f_n \longrightarrow f \in \mathsf{L}(E)$, entonces $f_n^k = \underbrace{f_n \circ f_n \circ \cdots \circ f_n}_{k-\text{veces}} \in \mathsf{L}(E)$, $f^k \in \mathsf{L}(E)$. Sea $P(x) \in \mathbb{R}\,[\,x\,]$ un polinomio, $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p$, con $a_p \neq 0$, entonces $P(f) = a_0 I + a_1 f + \cdots + a_p f^p \in \mathsf{L}(E)$ y como $f_n \longrightarrow f$, $P(f_n) \longrightarrow P(f)$.

En efecto, sea $\epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N \Longrightarrow \|f_n - f\| \leq \rho = \min\limits_{1 \leq k \leq p} \{ \big(\frac{\epsilon}{p} \frac{1}{\max\limits_{0 \leq k \leq p} \{|a_k|\}} \big)^{\frac{1}{k}} \}$, entonces $\|P(f_n) - P(f)\| \leq \sum\limits_{k=1}^{p} |a_k| \|f_n - f\|^k \leq \sum\limits_{k=1}^{p} |a_k| \frac{\epsilon}{p} \frac{1}{\max\limits_{0 \leq k \leq p} |a_k|} \leq \epsilon$.

Así, si $f_n \in \mathsf{L}(E)$, con $P(f_n) = 0$, entonces si $f_n \longrightarrow f$, es tal que $\|P(f)\| < \epsilon \Longrightarrow P(f) = 0$, o sea $\{f \in \mathsf{L}(E) / P(f) = 0\}$ es cerrado.

189. Sean ℓ^∞ el espacio vectorial normado de las sucesiones reales acotadas $\mathbf{x} = (x_n)_n$, provisto de la norma $\|\mathbf{x}\|_\infty = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$ y $\Delta \colon \ell^\infty \longrightarrow \ell^\infty$, definida por $\Delta(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$, donde $\mathbf{y} = (y_n)_n$ es tal que $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_n = x_{n+1} - x_n$. Demostrar que $\Delta \in \mathsf{L}(\ell^\infty)$ y calcular $\|\Delta\|$.

Solución Observamos que Δ es lineal y que $\|\Delta(\mathbf{x})\|_\infty = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |x_{n+1} - x_n| \leq 2\|\mathbf{x}\|_\infty$, o sea $\|\Delta\| \leq 2$. Por otro lado, si $x_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, se tiene $\Delta(\mathbf{x}) = -2\mathbf{x}$ y $\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \Longrightarrow \|\Delta(\mathbf{x})\|_\infty = 2\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\Delta\| \, \|\mathbf{x}\|_\infty$, $2 \leq \|\Delta\|$ i.e. $\|\Delta\| = 2$.

190. Sea $T \colon \ell^\infty \longrightarrow \ell^\infty$ una aplicación definida por $T(\mathbf{x}) = T((x_n)_n) = \big(\frac{1}{n+1} \sum\limits_{i=0}^{n} x_i \big)_{n \in \mathbb{N}}$, demostrar que $T \in \mathsf{L}(\ell^\infty)$ y calcular $\|T\|$.

Solución T es lineal, pues $T(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = (\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}(x_i+y_i))_{n\in\mathbb{N}} = T(\mathbf{x})+T(\mathbf{y})$ y $T(\lambda\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\lambda x_i\right) = \lambda T(\mathbf{x})$. Ahora $\|T(\mathbf{x})\| = \sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n+1}\left|\sum_{i=0}^{n}x_i\right| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}|x_i| \leq \|\mathbf{x}\|_\infty \Longrightarrow \|T\| \leq 1$.

Además, si $\mathbf{x} = (1)_{n\in\mathbb{N}}$ se tiene $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, por lo que $\|T(\mathbf{x})\|_\infty = 1 \leq \|T\| \Longrightarrow \|T\| = 1$.

191. Se provee a $\mathbb{R}[x]$ con la norma $\|P\| = \sup_{n\geq 0}|a_n|$, si $P(x) = a_0 + a_1 + \cdots + a_p x^p$. Estudiar la continuidad de las aplicaciones lineales $f\colon P \longrightarrow P'$, $g\colon P \longrightarrow xP$ y calcular las normas de las aplicaciones, si existen.

Solución

a) $f\colon\mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$ es lineal y no es continua. En efecto si f es continua por el ejercicio 185, página 104 se debe tener que si $P_n \longrightarrow 0$, entonces $(f(P_n))_n$ es acotado, pero si $P_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}}x^n$ es tal que $\|P_n\| = \frac{1}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0$ y sin embargo $f(P_n)(x) = \sqrt{n}x^{n-1}$ no es acotado ya que $\|f(P_n)\| = \sqrt{n} \longrightarrow \infty$.

b) g es lineal y continua (uniformemente continua), pues $\|g(P)\| = \|xP\| = \|P\|$, es decir $\|g\| = 1$.

192. Sea $n \in \mathbb{N}^*$ y sea $\mathfrak{M}_n$ el espacio vectorial de matrices $n\times n$ provisto de la norma N definida por $N(A) = \sup_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$, con $A = (a_{ij})$. Calcular $\|f\|$, si $f(A) = \operatorname{tr}(A)$, con $f\colon\mathfrak{M}_n \longrightarrow \mathbb{R}$.

Solución $|f(A)| = |\sum_{i=1}^{n}a_{ii}| \leq \sum_{i=1}^{n}|a_{ii}| \leq \sum_{i,j}|a_{ij}| \leq nN(A)$, por lo que $\|f\| \leq n$.
Por otro lado, $|f(I)| = n \leq \|f\|N(I) = \|f\|$ i.e. $\|f\| = n$.

193. Sea E el espacio vectorial normado de aplicaciones continuas de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$, provisto de la norma $\|\ \|_\infty$, demostrar que la aplicación $\Phi\colon f \longmapsto e^f$ es continua sobre E, pero no es lineal.

Solución Sea $E = \mathrm{C}([0,1],\mathbb{R})$, $\|f\|_\infty = \sup_{0\leq x\leq 1}\|f(x)\|$. La función Φ está bien definida. En efecto, si $f = g \Longrightarrow f(x) = g(x), \forall x\in[0,1]$ y $e^{f(x)} = e^{g(x)}, \forall x\in[0,1]$, es decir $e^f = e^g$. También $e^f\colon[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y $e^f \in E$.

Además, $f_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^k}{k!} \in E$, si $f \in E$ y $f_n \longrightarrow e^f$ en E y $e^f \in E$. En efecto, $\|e^f - f_n\|_\infty =$

$\sup_{0\leq x\leq 1} |e^{f(x)} - f_n(x)| = \sup_{0\leq x\leq 1} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f^k(x)}{k!} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\|f\|_\infty^k}{k!} = \left| e^{\|f\|_\infty} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\|f\|_\infty^k}{k!} \right| < \epsilon$, para $n \geq N_o$.

Φ no es lineal, pues $\Phi(I + I) = e^{2I} \neq 2\Phi(I) = 2e^I$. En efecto, $e^{2I(x)} = e^{2x} \neq 2e^x$, $\forall x \in [0,1]$, $x \neq \ln 2$.

Probemos que $\forall t \in [-\ln 2, \ln 2] \Longrightarrow |e^t - 1| \leq 2|t|$. En efecto $|e^t - e^0| = e^\xi |t|$, para ξ entre 0 y t por el teorema del valor medio, por lo que $|e^t - 1| \leq 2|t|$.

Sea $f_o \in E$, entonces $\forall x \in [0,1]$, $|e^{f(x)} - e^{f_o(x)}| = e^{f_o(x)}|e^{f(x)-f_o(x)} - 1| \leq 2e^{f_o(x)}|f(x) - f_o(x)| \Longrightarrow \|\Phi(f) - \Phi(f_o)\|_\infty \leq 2e^{\|f_o\|_\infty}\|f - f_o\|_\infty$, si $\|f - f_o\|_\infty \leq \ln 2$.

Sea $\epsilon > 0$ y sea $\delta = \min\{\ln 2, \frac{\epsilon}{2e^{\|f_o\|_\infty}}\}$, entonces si $\|f - f_o\| < \delta \Longrightarrow \|f - f_o\| < \frac{\epsilon}{2e^{\|f_o\|_\infty}} \Longrightarrow \|\Phi(f) - \Phi(f_o)\|_\infty \leq 2e^{\|f_o\|_\infty}\|f - f_0\|_\infty < \epsilon$ i.e. Φ es continua.

194. Sea E el espacio vectorial normado de aplicaciones continuas de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$, provisto de la norma $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt$ y sea $T\colon E \longrightarrow E$ definida por: $\forall f \in E$, $\forall x \in [0,1]$, $T(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$. Demostrar que $T \in \mathrm{L}(E)$ y calcular $\|T\|$.

Solución T es lineal y $\|T(f)\|_1 = \int_0^1 \left| \int_0^x f(t)dt \right| dx \leq \int_0^1 \int_0^x |f(t)|dt\,dx \leq \int_0^1 \|f\|_1 dx = \|f\|_1$ i.e. $\|T\| \leq 1$. Sea $f_n \in E$, definida por $f_n(t) = n(1-t)^{n-1}$, entonces $\|f_n\|_1 = 1$ y además $\|T(f_n)\|_1 = \int_0^1 (1 - (1-x)^n)dx = \frac{n}{n+1} \leq \|T\|\,\|f_n\|_1 = \|T\|$, por lo tanto $\|T\| \geq 1$ y $\|T\| = 1$.

195. Sea E el espacio vectorial normado de aplicaciones continuas de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$, provisto de la $\|\ \|_\infty$, F el espacio vectorial normado de aplicaciones de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$ de clase C^1, provisto de la norma $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$, $T\colon E \longrightarrow F$ aplicación definida por $T(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$. Demostrar que $T \in \mathrm{L}(E,F)$ y calcular $\|T\|$.

Solución T es lineal, pues $T(f + \lambda g)(x) = \int_0^x (f + \lambda g)(t)dt = T(f) + \lambda T(g)$. Además $N(T(f)) = \|T(f)\|_\infty + \|f\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|f\|_\infty = 2\|f\|_\infty$, o sea $\|T\| \leq 2$ y T es continua.

Sea $f = \chi_{[0,1]}$, $\|f\|_\infty = 1$, $N(T(f)) = 2 \leq \|T\|\,\|f\|_\infty = \|T\| \Longrightarrow 2 = \|T\|$.

196. Sea E el espacio vectorial normado de aplicaciones continuas acotadas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ provisto de la norma $\|\ \|_\infty$, para $f \in E$, $a \in \mathbb{R}$, $\tau_a f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\tau_a(f)(x) = f(x + a)$.

a) ¿Para $a_0 \in \mathbb{R}$, $f \in E$, se tiene $\tau_a f \longrightarrow \tau_{a_0} f$, cuando $a \longrightarrow a_0$ dentro de E?

b) Demostrar que $\forall a \in \mathbb{R}$, $\tau_a \in \mathsf{L}(E)$ y calcular $\|\tau_a\|$.

c) ¿Para $a \in \mathbb{R}$, $\tau_a \longrightarrow \tau_{a_0}$, cuando $a \longrightarrow a_0$, dentro de $(\mathsf{L}(E), \| \ \|_\infty)$?

Solución

a) Sea $f(x) = \text{sen } x^2$, entonces para $a > 0$, $\|\tau_a(f) - \tau_0(f)\|_\infty = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |\text{sen } (x+a)^2 - \text{sen } x^2| \geq$ $|\text{sen } (a+1/a)^2 - \text{sen } (1/a^2)| = 2\left|\text{sen } \dfrac{a^2+2}{2} \cos \dfrac{a^2+2+2/a^2}{2}\right|$, que no tiene límite cuando $a \to 0$ i.e. $\tau_a(f) \not\longrightarrow \tau_0(f)$, cuando $a \longrightarrow 0$.

b) Sea $f \in E$, $a \in \mathbb{R}$, $\|\tau(f)\|_\infty = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x+a)| = \|f\|_\infty$, entonces $\|\tau_a\| = 1$ y τ_a es continua.

c) $\tau_a \in \mathsf{L}(E)$, pero $\|\tau_a(f) - \tau_{a_0}(f)\| \not\longrightarrow 0$, si $a \longrightarrow a_0$ por la parte a).

197. Sea $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[x]$ el espacio vectorial normado de polinomios de grado $\leq n$, provisto de la norma $\|P\| = \sup\limits_{-1\leq x\leq 1} |P(x)|$, $x_0 \in \mathbb{R}$, demostrar que existe $c > 0$ tal que $\forall P \in \mathbb{R}_n[x]$, $|P(x_0)| \leq c\|P\|$.

Solución Sabemos que $\mathbb{R}_n[x]$ es un espacio vectorial normado de dimensión finita, entonces la aplicación $f_{x_0}\colon \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f_{x_0}(P) = P(x_0)$ es lineal, por lo que f_{x_0} es continua y existe $c > 0$ tal que $\forall P \in \mathbb{R}_n[x]$, $|P(x_0)| \leq c\|P\|$.

En efecto, si f_{x_0} es continua, $|f_{x_0}(P)|$ está acotada en la bola unidad $\|P\| \leq 1$, por lo que $\sup\limits_{\|P\|\leq 1} |f_{x_0}(P)|$ existe y se denota $\|f_{x_0}\|$ i.e. $|f_{x_0}(P)| \leq \|f_{x_0}\| \, \|P\|$.

198. Sea E el espacio vectorial real de aplicaciones continuas de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$, provisto de una las tres normas $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$, $\| \ \|_\infty$, definidas por $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|dx$, $\|f\|_2 = \left(\displaystyle\int_0^1 |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$, $\|f\|_\infty = \sup\limits_{0\leq x\leq 1} |f(x)|$, sea $\Phi \in E$, $\Phi \geq 0$ y sea $T_\Phi\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $T_\Phi(f) = \displaystyle\int_0^1 f(x)\Phi(x)dx$. Demostrar que T_Φ es lineal, continua y calcular $\|T_\Phi\|$ en cada uno de los tres casos.

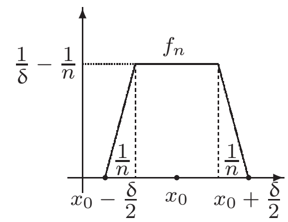
Solución T_Φ es lineal (forma lineal), pues $T_\Phi(f+\lambda g) = \displaystyle\int_0^1 (f+\lambda g)\Phi = T_\Phi(f) + \lambda T_\Phi(g)$.

a) $|T_\Phi(f)| = \left|\displaystyle\int_0^1 f(x)\Phi(x)dx\right| \leq \displaystyle\int_0^1 |f(x)||\Phi(x)|dx \leq \|\Phi\|_\infty \|f\|_1$, o sea $\|T_\Phi\|_{N_1} \leq \|\Phi\|_\infty$ i.e. T_Φ es continua.

Si $\Phi = \mathbf{0}$, es trivial.

Supongamos $\Phi \neq \mathbf{0}$, entonces $\exists x_0 \in [\,0,1\,]$ tal que $\Phi(x_0) = \|\Phi\|_\infty$. Sea $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in [\,x_0 - \delta, x_0 + \delta\,] \cap [\,0,1\,] \Longrightarrow \Phi(x) \geq \Phi(x_0) - \epsilon$.

Consideremos para $n \in \mathbb{N}^*$, n grande, $f_n\colon [\,0,1\,] \longrightarrow \mathbb{R}$, nula en $[\,0, x_0 - \frac{1}{2}\delta\,] \cup [\,x_0 + \frac{1}{2}\delta, 1\,]$, valiendo $\dfrac{1}{\delta} - \dfrac{1}{n}$ en $[\,x_0 - \frac{1}{2}\delta + \dfrac{1}{n},\ x_0 + \frac{1}{2}\delta - \dfrac{1}{n}\,]$ y en el resto rectas que hagan continua a f_n como se muestra en la figura adjunta.



Así tenemos que $\|f_n\|_1 \leq (\dfrac{1}{\delta} - \dfrac{1}{n})\delta = 1 - \dfrac{\delta}{n} < 1$, para n suficientemente grande y $|T_\Phi(f_n)| \geq (\Phi(x_0) - \epsilon) \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx \geq (\Phi(x_0) - \epsilon)(\delta - \frac{2}{n})(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{n}) \longrightarrow \Phi(x_0) - \epsilon$, si $n \to \infty$ i.e. $\displaystyle\sup_{\|f\| \leq 1} |T_\Phi(f)| \geq T_\Phi(f_n) \longrightarrow \Phi(x_0) - \epsilon$, $\forall \epsilon > 0$, o sea $\|T_\Phi\|_{N_1} \geq \|\Phi\|_\infty \Longrightarrow \|T_\Phi\|_{N_1} = \|\Phi\|_\infty$.

b) $|T_\Phi(f)| \leq \displaystyle\int_0^1 |f(x)||\Phi(x)|dx \leq \|f\|_\infty \|\Phi\|_1 \Longrightarrow \|T_\Phi\|_{N_\infty} \leq \|\Phi\|_1$. Además si $f = \chi_{[\,0,1\,]}$, entonces $|T_\Phi(f)| = \left|\displaystyle\int_0^1 \Phi(x)dx\right| = \|\Phi\|_1$, i.e. $\|T_\Phi\|_{N_\infty} = \|\Phi\|_1$.

c) $|T_\Phi(f)|^2 = \left(\displaystyle\int_0^1 f(x)\Phi(x)dx\right)^2 \leq \displaystyle\int_0^1 f^2(x)dx \int_0^1 \Phi^2(x)dx = \|f\|_2^2 \|\Phi\|_2^2$, i.e. $|T_\Phi(f)| \leq \|f\|_2 \|\Phi\|_2$, es decir $\|T_\Phi\|_{N_2} \leq \|\Phi\|_2$. Además $|T_\Phi(\Phi)| = \|\Phi\|_2^2$ y por lo tanto $\|T_\Phi\|_{N_2} = \|\Phi\|_2$.

199. Sea E el espacio vectorial normado de aplicaciones de $[\,0,1\,]$ en $\mathbb{R}$ con la norma $\|\ \|_\infty$, sea $F\colon [\,0,1\,]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación continua, con $\displaystyle\sup_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq t \leq 1}} |F(x,t)| < 1$ y sea $T\colon E \longrightarrow E$ tal que si $\Phi \in E$, asocia $T(\Phi)\colon [\,0,1\,] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\forall x \in [\,0,1\,]$, $T(\Phi)(x) = \Phi(x) + \displaystyle\int_0^1 F(x,t)\Phi(t)dt$. Demostrar que T es un homeomorfismo de E en E.

Solución Sea $U\colon E \longrightarrow E$ definida por $U(\Phi) = T(\Phi) - \Phi$; U es lineal y continua. $U = T - I$, T es lineal, pues $T(\Phi + \Psi) = \Phi + \Psi + \displaystyle\int_0^1 F(\cdot,t)(\Phi(t) + \Psi(t))dt = T(\Phi) + T(\Psi)$ y $T(\lambda\Phi) = \lambda T(\Phi)$.

Por otro lado $|U(\Phi)(x)| = \left|\displaystyle\int_0^1 F(x,t)\Phi(t)dt\right| \leq M\|\Phi\|_\infty$; además $\|U(\Phi)\| \leq M\|\Phi\|_\infty$. Así podemos definir la norma de U, $\|U\|$ de modo que $\|U\| \leq M < 1$ y tenemos $U \in (\mathrm{L}(E), \|\ \|)$ el cual es completo, es decir $T = I + U$ es invertible en $\mathrm{L}(E)$ y su inversa es $\displaystyle\sum_{n \geq 0} (-1)^n U^n$.

Falta probar que T y T^{-1} son continuas. En efecto, $\|T(\Phi)\| \leq 2\|\Phi\|_\infty$, $\|T^{-1}(\Phi)\| \leq$

$\dfrac{1}{1-\|U\|_\infty}\|\Phi\|_\infty$.

200. Sea E un espacio vectorial normado y sea $\Phi \in \mathrm{L}(E,\mathbb{R})$, $\Phi \neq \mathbf{0}$, demostrar que $\forall \mathbf{x} \in E$, $d(\mathbf{x}, \ker(\Phi)) = \dfrac{|\Phi(\mathbf{x})|}{\|\Phi\|}$.

Solución

a) Sea $\mathbf{x} \in E$, $\mathbf{y} \in \ker(\Phi)$, $|\Phi(\mathbf{x})| = |\Phi(\mathbf{x}-\mathbf{y})| \leq \|\Phi\|\,\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_E \Longrightarrow \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \geq \dfrac{|\Phi(\mathbf{x})|}{\|\Phi\|}$, $\forall \mathbf{x} \in E$.

b) Sea $F = \ker(\Phi)$, sea $\mathbf{x} \in E$ tal que $\mathbf{x} \notin F$ y sea $\epsilon > 0$, tal que $\epsilon < \|\Phi\|$, entonces $\exists \mathbf{z} \in E$ tal que $\|\Phi\| \leq |\Phi(\mathbf{z})| + \epsilon$ y $\|\mathbf{z}\| = 1 \Longrightarrow \mathbf{z} \notin F$. Así $\forall \mathbf{x} \in E$, $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \lambda\mathbf{z}$, con $\mathbf{a} \in F$, $\lambda \in \mathbb{R} \Longrightarrow |\Phi(\mathbf{x})| = |\lambda|\,|\Phi(\mathbf{z})|$, pero $\lambda\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{u} \Longrightarrow |\lambda| = |\lambda|\|\mathbf{z}\| = \|\mathbf{x}-\mathbf{u}\|_E \geq d(\mathbf{x}, F) \Longrightarrow |\Phi(\mathbf{x})| \geq |\lambda|(\|\Phi\| - \epsilon) \geq d(\mathbf{x}, F)(\|\Phi\| - \epsilon) \Longrightarrow \|\Phi(\mathbf{x})\| \geq d(\mathbf{x}, F)\|\Phi\|$, $\forall \mathbf{x} \in E$.

201. Sea E un espacio vectorial normado, $f\colon E \longrightarrow F$ una aplicación acotada en $B(\mathbf{0}, 1)$ y aditiva, es decir $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, $f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$. Demostrar que $f \in \mathrm{L}(E, F)$.

Solución Sabemos que $f(\mathbf{0}+\mathbf{0}) = f(\mathbf{0}) = f(\mathbf{0}) + f(\mathbf{0}) \Longrightarrow f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Por ser aditiva se tiene $f(-\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x})$ ya que $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0} = f(\mathbf{x}) + f(-\mathbf{x})$. Además se tiene que $f(n\mathbf{x}) = nf(\mathbf{x})$, con $n \in \mathbb{Z}$.

Sea $f(\mathbf{x}) = f(\frac{1}{q}\mathbf{x} + \cdots + \frac{1}{q}\mathbf{x}) = qf(\frac{1}{q}\mathbf{x})$, por lo tanto $f(\frac{1}{q}\mathbf{x}) = \frac{1}{q}f(\mathbf{x})$, con $q \in \mathbb{Z}^*$.

Sea $r \in \mathbb{Q}$, $r = \dfrac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}^*$, entonces $f(r\mathbf{x}) = f(\frac{p}{q}\mathbf{x}) = \frac{p}{q}f(\mathbf{x}) = rf(\mathbf{x})$.

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, probemos que $f(\lambda\mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x})$.

Sea $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, existe $(r_n)_n \subset \mathbb{Q}$ tal que $r_n \longrightarrow \lambda$. Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, $\exists p(n) \in \mathbb{N}$ tal que $|\lambda - r_{p(n)}| \leq \dfrac{1}{n\|\mathbf{x}\|}$, entonces $\mathbf{y}_n = n(\lambda - r_{p(n)})\mathbf{x}$ verifica que $\|\mathbf{y}_n\|_E < 1 \Longrightarrow \|f(\mathbf{y}_n)\|_F \leq M = \sup\limits_{\|\mathbf{y}\|\leq 1}\|f(\mathbf{y})\|_F$. Así tenemos $\|f(\lambda\mathbf{x}) - r_{p(n)}f(\mathbf{x})\|_F = \|f(\lambda\mathbf{x}) - f(r_{p(n)}\mathbf{x})\|_F = \|f((\lambda - r_{p(n)})\mathbf{x})\|_F = \|f(\frac{1}{n}\mathbf{y}_n)\|_F = \frac{1}{n}\|f(\mathbf{y}_n)\|_F \leq \dfrac{M}{n} \longrightarrow 0$, cuando $n \to \infty$, lo que implica $f(\lambda\mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x})$.

Sea $\mathbf{x} \in E$, entonces $\left\|f\Big(\dfrac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_E}\Big)\right\|_F = \dfrac{1}{\|\mathbf{x}\|_E}\|f(\mathbf{x})\|_F \leq M$ i.e. $\|f(\mathbf{x})\|_F \leq M\|\mathbf{x}\|_E$ y f es continua.

202. Sean E, F espacios vectoriales normados tales que F es de dimensión finita, $f \in \mathcal{H}(E, F)$, demostrar que f es sobreyectiva $\Longleftrightarrow$ f es abierta (i.e. $\forall O$ abierto de E, $f(O)$ es abierto de F).

Solución

($\Longrightarrow$) Como f es sobreyectiva, dados $e'_1, \dots, e'_n$ base de F, $\exists e_1, \dots, e_n \in E$ tales que $f(e_i) = e'_i$. La función $f|_{\langle e_1, \dots, e_n \rangle}$ es un homeomorfismo de $H = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ en F.

Sea O un abierto de E, $f(O) = \left(f^{-1}\right)^{-1}(O)$, con f^{-1} continua $\Longrightarrow f(O)$ es abierto.

($\Longleftarrow$) Supongamos que f es abierta, entonces $f(B_E(\mathbf{0}, 1)) = U$ abierto en F. Como f es lineal, $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \in U$, por lo tanto $\exists \epsilon > 0$ tal que $B_F(\mathbf{0}, \epsilon) \subset U$.

Sea $\mathbf{y} \in F \backslash \{\mathbf{0}\}$, $\dfrac{\epsilon}{2\|\mathbf{y}\|_F}\mathbf{y} \in B_F(\mathbf{0}, \epsilon) \subset U \subset f(E) \Longrightarrow f$ es sobreyectiva ya que como $\dfrac{\epsilon}{2\|\mathbf{y}\|_F}\mathbf{y} \in f(E)$, $\exists \mathbf{x} \in E$ tal que $f(\mathbf{x}) = \dfrac{\epsilon}{2\|\mathbf{y}\|_F}\mathbf{y}$, entonces si $\mathbf{x}_0 = \dfrac{2\|\mathbf{y}\|_F}{\epsilon}\mathbf{x}$, tenemos $f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}$.

203. Sea E un espacio vectorial normado sobre $\mathbb{C}$, $P \in \mathbb{C}[x]$, $Z_p = \{f \in \mathrm{L}(E) / P(f) = 0\}$.

a) Demostrar que si $\operatorname{val}(P) = 1$, $P = a_1 x + \cdots + a_n x^n$, $a_1 \neq 0$, entonces $\mathbf{0}$ es un punto aislado de Z_p. Recuerde que $\operatorname{val}(P) = k$, si $P = a_k x^k + \cdots + a_n x^n$, con $a_k \neq 0$, $k \leq n$.

b) Demostrar que si $\dim(E) \geq 2$ y $\operatorname{val}(P) \geq 2$, entonces $\mathbf{0}$ no es un punto aislado de Z_p.

Solución

a) Sea $P(x) = a_1 x + \cdots + a_n x^n$, $a_1 \neq 0$, $a_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, n$ y sea $f \in Z_p$ tal que $\|f\| \leq 1$, entonces como $P(f) = 0 \Longrightarrow |a_1|\|f\| = \|a_2 f^2 + \cdots + a_n f^n\| \leq |a_2|\|f\|^2 + \cdots + |a_n|\|f\|^n \leq \alpha\|f\|^2$, con $\alpha = \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k| \Longrightarrow \|f\| \geq \dfrac{|a_1|}{\alpha}$ i.e. $\mathbf{0}$ es un punto aislado de Z_p.

b) Sea $\epsilon > 0$ y sea $f_\epsilon \in \mathrm{L}(E)$ definida por la matriz $\begin{pmatrix} \mathbf{0}' & \epsilon \\ \emptyset & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ en una base fija, entonces $f_\epsilon^k = \mathbf{0}$, $k \geq 2$, por lo que $P(f_\epsilon) = \mathbf{0}$ i.e. $f_\epsilon \in Z_p$, $\forall \epsilon > 0$, es decir $f_\epsilon \longrightarrow \mathbf{0}$, cuando $\epsilon \to 0$, pues $\|f_\epsilon\| = \epsilon$. Así $\mathbf{0}$ no es un punto aislado en Z_p.

204. Sea $E \neq \{\mathbf{0}\}$ un espacio vectorial normado y sean $\alpha > 0$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathrm{L}(E)$, demostrar que $\mathbf{u} \circ \mathbf{v} - \mathbf{v} \circ \mathbf{u} \neq \alpha I_E$.

Solución Probemos el resultado por contradicción. Supongamos que $\mathbf{u} \circ \mathbf{v} - \mathbf{v} \circ \mathbf{u} = \alpha I_E$, entonces $\mathbf{v} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{v} - \mathbf{v}^2 \circ \mathbf{u} = \alpha \mathbf{v}$, $\mathbf{u} \circ \mathbf{v}^2 - \mathbf{v} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{v} = \alpha \mathbf{v}$ y sumando $\mathbf{u} \circ \mathbf{v}^2 - \mathbf{v}^2 \circ \mathbf{u} = 2\alpha \mathbf{v}$. En general $\mathbf{u} \circ \mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{v}^n = \alpha \mathbf{v}^n$; $\mathbf{v} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{v}^n - \mathbf{v}^2 \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{v}^{n-1} = \alpha \mathbf{v}^n$; $\mathbf{v}^2 \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{v}^{n-1} - \mathbf{v}^3 \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{v}^{n-2} = \alpha \mathbf{v}^n$, $\dots$, $\mathbf{v}^n \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{v} - \mathbf{v}^{n+1} \circ \mathbf{u} = \alpha \mathbf{v}^n$. Sumando tenemos

$\mathbf{u}\circ\mathbf{v}^{n+1}-\mathbf{v}^{n+1}\circ\mathbf{u}=(n+1)\mathbf{v}^n$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Ahora $(n+1)\alpha\|\mathbf{v}^n\|\leq 2\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}^{n+1}\|\leq 2\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{v}^n\|$.

Si $\mathbf{v}^n\neq\mathbf{0}$, $(n+1)\alpha\leq 2\|\mathbf{u}\|\cdot\|\mathbf{v}\|$, $\forall n\in\mathbb{N}$, que es una contradicción.

Si $\mathbf{v}^n=\mathbf{0}$, sea n_0 el menor entero tal que $\mathbf{v}^{n_0}=\mathbf{0}\Longrightarrow\mathbf{u}\circ\mathbf{v}^{n_0}-\mathbf{v}^{n_0}\circ\mathbf{u}=n_0\alpha\mathbf{v}^{n_0-1}\Longrightarrow$ $\mathbf{v}^{n_0-1}=\mathbf{0}\Longrightarrow E=\{\mathbf{0}\}$, que es una contradicción.

205. Sea E un espacio pre-hilbertiano de dimensión infinita, $\Phi\colon E\longrightarrow\mathbb{R}$ lineal, no continua. Probar que $\ker(\Phi)$ es denso en E y que $\ker(\Phi)^{\perp}=\{\mathbf{0}\}$.

Solución $\ker(\Phi)$ es un hiperplano de E, supongamos que $\ker(\Phi)$ es cerrado, entonces $\exists\mathbf{a}\in E$ tal que $\Phi(\mathbf{a})=1$, por lo tanto $\mathbf{a}\notin\ker(\Phi)$ y $\mathbf{a}+\ker\Phi$ es cerrado y se tiene $\mathbf{0}\notin\mathbf{a}+\ker\Phi$. Así $\exists\epsilon>0$ tal que $\forall\mathbf{x}\in B(\mathbf{0},\epsilon)$, $\mathbf{x}\notin\mathbf{a}+\ker(\Phi)$, es decir $\forall\mathbf{x}\in B(\mathbf{0},\epsilon)$, $\Phi(\mathbf{x})\neq 1$.

Sea $\mathbf{x}\in B(\mathbf{0},\epsilon)$, si $|\Phi(\mathbf{x})|>1$, entonces $\left\|\dfrac{\mathbf{x}}{\Phi(\mathbf{x})}\right\|=\dfrac{\|\mathbf{x}\|}{|\Phi(\mathbf{x})|}\leq\|\mathbf{x}\|<\epsilon$, pero $\Phi\left(\dfrac{1}{\Phi(\mathbf{x})}\mathbf{x}\right)=1$, que es una contradicción.

Así debe tenerse que $\forall\mathbf{x}\in B(\mathbf{0},\epsilon)$, $|\Phi(\mathbf{x})|\leq 1$, es decir que Φ es acotada sobre $B(\mathbf{0},\epsilon)\Longrightarrow$ Φ es continua, que también es una contradicción.

Finalmente, $\overline{\ker(\Phi)}$ es un subespacio vectorial de E, contenido estrictamente en el hiperplano $\ker(\Phi)\Longrightarrow\overline{\ker(\Phi)}=E$.

Sea $\mathbf{x}\in\ker(\Phi)^{\perp}$, como $\ker(\Phi)$ es denso en E, $\exists\,(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\ker(\Phi)$ tal que $\mathbf{x}_n\longrightarrow\mathbf{x}$, entonces $\langle\mathbf{x}_n,\mathbf{x}\rangle=0$, $\forall n\in\mathbb{N}$ y $\langle\mathbf{x}_n,\mathbf{x}\rangle\longrightarrow\|\mathbf{x}\|^2=0$, o sea $\mathbf{x}=\mathbf{0}$.

2.18 Espacio de matrices

206. a) Sea $n\in\mathbb{N}^*$, N una norma sobre $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ espacio vectorial de matrices $n\times n$, demostrar que $\exists\alpha>0$ tal que $\forall A,\ B\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, $N(AB)\leq\alpha N(A)N(B)$.

b) Verificar que si $\|\ \|$ es la norma euclídea, $\|AB\|\leq\|A\|\,\|B\|$.

Solución

a) Denotando $\|A\|_\infty=\sup\limits_{1\leq i,j\leq n}|a_{ij}|$, existen α y $\beta>0$ tales que $\forall A\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, $\alpha\|A\|_\infty\leq N(A)\leq\beta\|A\|_\infty$, pero $\|AB\|_\infty\leq n\|A\|_\infty\|B\|_\infty\Longrightarrow N(AB)\leq n\beta\|A\|_\infty\|B\|_\infty\leq\dfrac{n\beta}{\alpha^2}N(A)N(B)$.

b) En efecto, $\|AB\|^2=\sum\limits_{i=1}^n\sum\limits_{j=1}^n(AB)_{ij}^2=\sum\limits_{i=1}^n\sum\limits_{j=1}^n\left(\sum\limits_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}\right)^2\leq\sum\limits_{i=1}^n\sum\limits_{j=1}^n\left(\sum\limits_{k=1}^n a_{ik}^2\right)\left(\sum\limits_{k=1}^n b_{kj}^2\right)=$

$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2\right)\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} b_{kj}^2\right) = \|A\|^2\,\|B\|^2$, o sea $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$.

207. Sea $n \in \mathbb{N}^*$, A, $P \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ tales que $A^k \longrightarrow P$, cuando $k \to \infty$, demostrar que $AP = PA = P$ y $P^2 = P$.

Solución $AA^k = A^kA = A^{k+1} \longrightarrow AP = PA = P$ y $A^kA^k = A^{2k} \longrightarrow P^2 = P$.

208. Sea $N \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{I} = \{(A,B) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})^2 / AB = BA\}$.

a) Probar que $\mathcal{I}$ es cerrado en $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})^2$.

b) Sea $(A,B) \in \mathcal{I}$, P, $K \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $A^k \longrightarrow P$, $B^k \longrightarrow Q$, cuando $n \to \infty$. Probar que $P^2 = P$, $Q^2 = Q$, $PQ = QP$.

Solución

a) Sea $f\colon \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})^2 \longrightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ definida por $f(A,B) = AB - BA$, entonces f es continua. Además $\mathcal{I} = f^{-1}(\{\mathbf{0}\})$ es cerrado, pues $\{\mathbf{0}\}$ es cerrado.

b) Por el ejercicio 207, página 113, $P^2 = P$, $Q^2 = Q$.

Por otro lado, $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^kB^k = A^{k-1}ABB^{k-1} = A^{k-1}BAB^{k-1} = A^{k-2}BAAB^{k-1} = BA^{k-1}AB^{k-1} = BA^{k-1}B^{k-1}A = B^2A^{k-2}B^{k-2}A = \cdots = B^kA^k \longrightarrow PQ = QP$.

209. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $t \in \mathbb{R}$, calcular e^{tA}, con $A = \begin{pmatrix} \cosh a & b \operatorname{senh} a \\ \frac{1}{b}\operatorname{senh} a & \cosh a \end{pmatrix}$.

Solución Veamos que $\det A = 1$. Diagonalizando A, $\exists P$ y D diagonal tal que $A = PDP^{-1}$, donde $P = \begin{pmatrix} b & -b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \frac{1}{2b}\begin{pmatrix} 1 & b \\ -1 & b \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^a & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-a} \end{pmatrix}$. Además $\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{tPDP^{-1}} = P\mathrm{e}^{tD}P^{-1}$, pues $(PDP^{-1})^k = PDP^{-1}PDP^{-1}\cdots PDP^{-1} = PD^kP^{-1}$ y como $\mathrm{e}^{tD} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t\mathrm{e}^a} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-t\mathrm{e}^a} \end{pmatrix}$, entonces tenemos:

$$\mathrm{e}^{tA} = P\mathrm{e}^{tD}P^{-1} = \frac{1}{2b}\begin{pmatrix} b(\mathrm{e}^{t\mathrm{e}^a} + \mathrm{e}^{t\mathrm{e}^{-a}}) & b^2(\mathrm{e}^{t\mathrm{e}^a} - \mathrm{e}^{t\mathrm{e}^{-a}}) \\ \mathrm{e}^{t\mathrm{e}^a} - \mathrm{e}^{t\mathrm{e}^{-a}} & b(\mathrm{e}^{t\mathrm{e}^a} + \mathrm{e}^{t\mathrm{e}^{-a}}) \end{pmatrix}.$$

210. Sea $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, demostrar que existe $\alpha > 0$, $\beta > 0$ tales que $\|\mathrm{e}^{tA}\| \leq \alpha \mathrm{e}^{\beta|t|}$.

Solución Por el ejercicio 206, página 112, tenemos para una norma $\|\ \|$ arbitraria, existe $\gamma > 0$ tal que $\|AB\| \leq \gamma\|A\|\,\|B\|$, entonces $\|\mathrm{e}^{tA}\| = \left\|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(tA)^k}{k!}\right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{|t|^k\gamma^{k-1}\|A\|^k}{k!} =$

$\frac{1}{\gamma}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|t|^k\gamma^k\|A\|^k}{k!}=\frac{1}{\gamma}\mathrm{e}^{|t|\gamma\|A\|}$ y tomamos $\alpha=\frac{1}{\gamma}$, $\beta=\gamma\|A\|$.

211. Sea $n\in\mathbb{N}^*$, $A\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, demostrar que $\exists k_0\in\mathbb{N}$, tal que $\forall k\geq k_0$, se tiene $I+A+\cdots+\frac{A^k}{k!}\in\mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$.

Solución Sabemos que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ es un abierto, pues la aplicación $\det\colon\mathfrak{M}_n\longrightarrow\mathbb{R}$ es continua y $\det^{-1}(\mathbb{R}^*)=\mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$.

Por otro lado $\mathrm{e}^A\in\mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$ (ya que $\mathrm{e}^A\circ\mathrm{e}^{-A}=I$), entonces existe $\epsilon>0$ tal que $B(\mathrm{e}^A,\epsilon)\subset\mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$. Así, $H_k=\sum_{m=0}^{k}\frac{A^m}{m!}\longrightarrow\mathrm{e}^A$ y $\exists k_0\in\mathbb{N}$ tal que si $k\geq k_0\Longrightarrow\|H_k-\mathrm{e}^A\|<\epsilon$ i.e. $H_k\in\mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$.

212. Sea $n\in\mathbb{N}^*$, demostrar:

a) $\forall p\in\mathbb{N}$, el conjunto de matrices $A\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ tales que $\operatorname{rang}(A)\leq p$, es cerrado en $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

b) El conjunto de matrices no invertibles de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ no es compacto si $n\geq 2$.

c) El conjunto de matrices diagonalizables de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ es conexo por arcos.

d) El conjunto de matrices diagonalizables de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ es denso en $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

e) $O_n(\mathbb{R})$ y $U_n(\mathbb{C})$ son compactos (matrices ortogonales en $\mathbb{R}$ y unitarias en $\mathbb{C}$).

f) $\{A\in O_n(\mathbb{R})/A^2=A\}$ es compacto.

Solución

a) Sea $f\colon\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})\longrightarrow\mathbb{R}$ tal que $f(A)=\left(a_{11},\det\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{12}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{22}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{22}\end{pmatrix},\ldots,\det A\right)$, es continua y $f^{-1}(\mathbb{R}^p\times\{0\}\times\cdots\times\{0\})$ es un cerrado i.e. $\bigcup_{k=1}^{p}f^{-1}(\mathbb{R}^k\times\{0\}\times\cdots\times\{0\})$ es cerrado.

b) El conjunto no es acotado, pues $A_n=\begin{pmatrix}n&\mathbf{0}'\\\mathbf{0}&\emptyset\end{pmatrix}$ es tal que $\|A\|=n$.

c) Es suficiente unir una matriz diagonalizable A y una matriz nula $\mathbf{0}$. Una aplicación que sirve es $\gamma\colon[0,1]\longrightarrow\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, con $\gamma(t)=tA$.

d) Sea $A\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ y sea $\epsilon>0$, $\exists P\in\mathsf{GL}_n(\mathbb{C})$, T triangular superior tal que $A=PTP^{-1}$.

Por otro lado $\exists\,\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{C}$ tales que si $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ son los elementos diagonales de T, $\lambda_1+\alpha_1,\ldots,\lambda_n+\alpha_n$, son distintos dos a dos y $\|T'-T\|<\frac{\epsilon}{\|P\|\,\|P^{-1}\|}$, donde $T'=$

$T + \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$, entonces $PT'P^{-1}$ es diagonalizable y además $\|PT'P^{-1} - A\| < \epsilon$.

e) $O_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{I\})$ con $f\colon \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, $A \longmapsto A^t A$ que es continua y acotada.

$U_n(\mathbb{C}) = f^{-1}(\{I\})$, con $f\colon \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, $A \longmapsto A^* A$ que es continua y acotada.

f) $\{A \in O_n(\mathbb{R}) / A^2 = A\}$ es una parte cerrada del conjunto $O_n(\mathbb{R})$ como imagen inversa del cerrado $\{\mathbf{0}\}$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ en $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, por la aplicación continua de $A \longmapsto A^2 - A$.

2.19 Continuidad

213. Analizar la continuidad de las siguientes funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$.

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{en } (0,0). \end{cases}$ b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{en } (0,0). \end{cases}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x-y)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{en } (0,0). \end{cases}$

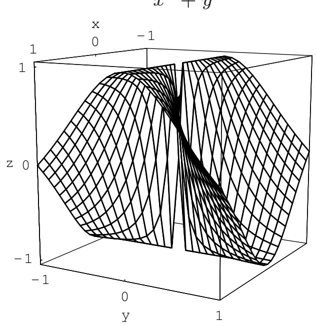
Solución

a) Si $y = \frac{1}{2}x$, $f(x, \frac{1}{2}x) = \frac{3}{4}/\frac{5}{4} = \frac{3}{5} \not\to 0$, si $x \to 0$ y la función no es continua en $(0,0)$.

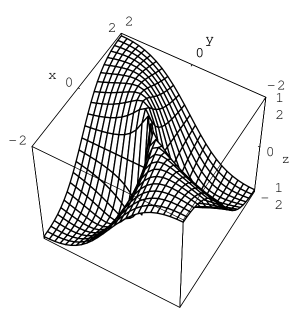
b) Si $y = x$, $f(x,x) = \dfrac{x^2}{\frac{1}{2}x^2} = \frac{1}{2} \not\to 0$, si $x \to 0$ y la función no es continua en $(0,0)$.

c) Notemos que $f(x,-x) = \dfrac{-x^2(2x)}{(2x^2)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{-2x^3}{2^{\frac{3}{2}}x^3} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \not\to 0$, cuando $x \to 0$ y la función no es continua en $(0,0)$.

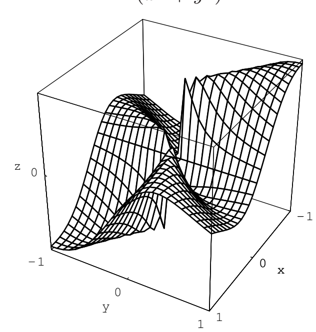
a) $f = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$



b) $f = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$



c) $f = \dfrac{xy(x-y)}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$



214. a) Si $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ y si existen los límites $\lim\limits_{x\to a} f(x,y)$, $\lim\limits_{y\to b} f(x,y)$, demostrar que $\lim\limits_{x\to a}(\lim\limits_{y\to b} f(x,y)) = \lim\limits_{y\to b}(\lim\limits_{x\to a} f(x,y)) = L$.

b) Verificar que el recíproco es falso.

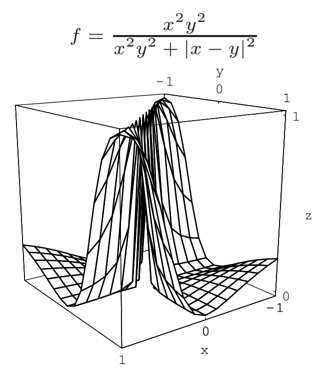
Solución

a) Sea $L_1^y = \lim_{x\to a} f(x,y)$, $L_2^x = \lim_{y\to b} f(x,y)$ i.e. $\forall\epsilon > 0$, $\exists\delta_1 > 0$ tal que $|f(x,b) - L_1^b| < \frac{1}{4}\epsilon$, si $|x-a|<\delta_1$, $\exists\delta_2>0$ tal que $|f(a,y)-L_2^a|<\frac{1}{4}\epsilon$, si $|y-b|<\delta_2$ y $\exists\delta_3>0$ tal que $|f(x,y)-L|<\frac{1}{4}\epsilon$, si $\|(x-a,y-b)\| < \delta_3$.

Sea $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$, si $\|(x-a,y-b)\| < \delta \Longrightarrow |L_1^b - L_2^a| \le |L_1^b - f(x,b)| + |f(a,y) - L_2^a| + |f(x,b) - L| + |f(a,y) - L| < \frac{1}{4}\epsilon + \frac{1}{4}\epsilon + \frac{1}{4}\epsilon + \frac{1}{4}\epsilon = \epsilon$, es decir $L_1^b = L_2^a$, o sea $\lim_{x\to a} f(x,b) = \lim_{y\to b} f(a,y)$.

Falta verificar que $f(x,b) = \lim_{y\to b} f(x,y)$ que es inmediato, pues $|f(x,b) - f(x,y)| \le |f(x,b) - f(a,b)| + |f(x,y) - f(a,b)| < \epsilon$.

b) Sea $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2 + |x-y|^2}$, entonces $\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y)) = \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y)) = 0$, pero $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe, pues $f(x,x) = 1 \not\to 0$, si $x \to 0$.



215. Sean E y F espacios vectoriales normados y sea $f\colon E \longrightarrow F$ una función continua en E, $O \subset E \times F$ un abierto y sea el conjunto $A = \{\mathbf{x} \in E/(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \in O\}$. Demostrar que A es un abierto de E.

Solución En $E \times F$ se escoge la norma $\|(\mathbf{x},\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x}\|_E + \|\mathbf{y}\|_F$. Sea $\mathbf{x}_0 \in A$, $\exists\eta > 0$ tal que $(B(\mathbf{x}_0, f(\mathbf{x}_0)), \eta) \subset O$, por ser abierto y sea $\frac{1}{2}\eta > 0$, $\exists\delta' > 0$ tal que si $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta' \Longrightarrow \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\| < \frac{1}{2}\eta$. Sea $\delta = \min\{\delta', \frac{1}{2}\eta\}$, entonces $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \in B(\mathbf{x}_0, f(\mathbf{x}_0), \eta)$, pues $\|(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0, f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0))\| = \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|_E + \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\|_F < \delta + \frac{1}{2}\eta < \eta$.

Probemos que $B(\mathbf{x}_0, \delta) \subset A$. En efecto, sea $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0,\delta) \Longrightarrow \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|_E < \delta \Longrightarrow \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\|_F < \frac{1}{2}\eta \Longrightarrow (\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \in O \Longrightarrow \mathbf{x} \in A$.

216. a) Sea $f\colon\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y sea $G_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2/y = f(x)\}$ el gráfico de f. Demostrar que el G_f es un cerrado de $\mathbb{R}^2$.

b) Dar un ejemplo de una función $f\colon\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que tenga gráfico cerrado en $\mathbb{R}^2$ y que no sea continua.

c) Sea $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow K$, donde $K \subset \mathbb{R}$ es un compacto y f una aplicación tal que su gráfico G_f es cerrado en $\mathbb{R}^2$. Demostrar que f es continua en $\mathbb{R}$.

Solución

a) Sea $((x_n, y_n))_n \subset G_f$ tal que $(x_n, y_n) \longrightarrow (x_0, y_0)$, entonces $y_n = f(x_n)$ y como f es continua $f(x_n) = y_n \longrightarrow f(x_0) = y_0 \Longrightarrow (x_0, y_0) \in G_f$ y es cerrado.

b) La función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$ es discontinua y $G_f = \{(x, \frac{1}{x})/x \neq 0\} \cup \{(0, f(0))\}$ es un cerrado.

c) Demostremos la propiedad por contradicción. Si la función no es continua en un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, $\exists\, \epsilon > 0$ tal que $\forall \eta > 0$ se puede encontrar $x_\delta \in \mathbb{R}$ que satisface $|x_\delta - x_0| < \eta$ y siempre se tiene $|f(x_\delta) - f(x_0)| > \epsilon$. Si tomamos $\delta = \frac{1}{n}$, construimos una sucesión $(x_n)_{n \geq 1}$ tal que $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$. Pero $(f(x_n))_n \subset K$ que es compacto y existe una subsucesión $(f(x_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ que converge a $y_0 \in K$. Así, $(x_{n_k}, f(x_{n_k})) \longrightarrow (x_0, y_0) \in G_f$ por ser cerrado, lo que implica $y_0 = f(x_0)$, es decir que existe $K \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq K$, $|f(x_{n_k}) - f(x_0)| < \epsilon$, que es una contradicción. De esta forma lo que se supuso es falso y f es continua.

217. Sea E un espacio vectorial normado de dimensión finita, F un espacio vectorial normado y sea $f\colon E \longrightarrow F$ una aplicación lineal, probar que f es continua.

Solución Sea $\{\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n\}$ una base de E, sea $M = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \|f(\mathrm{e}_i)\|$ y sean $\mathbf{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \mathrm{e}_i$, $\mathbf{y} = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \mathrm{e}_i \in E$, entonces:

$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| = \|f(\mathbf{x} - \mathbf{y})\| = \|\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - y_i) f(\mathrm{e}_i)\| \leq \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i| M = M\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1$, es decir la función es continua. Observemos que en realidad se probó la continuidad uniforme de f.

218. Sean E y F espacios vectoriales normados y sea $f\colon E \longrightarrow F$ una aplicación que para por el punto $\mathbf{a} \in E$, tiene la siguiente propiedad: $\forall\, (\mathbf{a}_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset E$ tal que $\mathbf{a}_k \longrightarrow \mathbf{a}$, se tiene que $f(\mathbf{a}_k) \longrightarrow f(\mathbf{a})$. Demostrar que f es continua en $\mathbf{a}$.

Solución Supongamos que f no es continua en $\mathbf{a}$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $\forall \eta > 0$ si $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \eta \Longrightarrow \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})\| > \epsilon$. Sea $\eta = \dfrac{1}{n}$, entonces $\exists \mathrm{x}_n \in E$ tal que $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{a}\| < \dfrac{1}{n}$ y por hipótesis $\|f(\mathbf{x}_n) - f(\mathbf{a})\| < \epsilon$ que es una contradicción. Así, la función f es continua en $\mathbf{a}$.

219. Sea E un espacio vectorial normado y sea $A \subset E$, definimos $d(\mathbf{x}, A) = \inf\limits_{\mathbf{a}\in A} \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$, para $\mathbf{x} \in E$.

a) Demostrar que la aplicación $\begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{x} \longmapsto d(\mathbf{x}, A) \end{array}$ es uniformemente continua.

b) Demostrar que $d(\mathbf{x}, A) = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} \in \bar{A}$.

Sean F_1 y F_2 dos conjuntos cerrados de E tales que $F_1 \cap F_2 = \emptyset$.

c) Demostrar que el conjunto $\{\mathbf{x} \in E / d(\mathbf{x}, F_1) < d(\mathbf{x}, F_2)\}$ es un abierto de E.

d) Deducir que existen abiertos O_1 y O_2 de E tales que $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ y $F_1 \subset O_1$, $F_2 \subset O_2$.

e) Demostrar que existe una aplicación $f\colon E \longrightarrow [\,0, 1\,]$ continua en E, tal que $f(\mathbf{x}) = 1$, si $\mathbf{x} \in F_1$ y $f(\mathbf{x}) = 0$, si $\mathbf{x} \in F_2$.

Solución

a) Sea $\mathbf{a} \in A$ y sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, entonces $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| + \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|$, entonces $\inf\limits_{\mathbf{a}\in A} \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| = d(\mathbf{x}, A) \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| + \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\| \Longrightarrow d(\mathbf{x}, A) - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|$, $\forall \mathbf{a} \in A \Longrightarrow d(\mathbf{x}, A) - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq d(\mathbf{y}, A) \Longrightarrow d(\mathbf{x}, A) - d(\mathbf{y}, A) \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$.

Similarmente, $d(\mathbf{y}, A) - d(\mathbf{x}, A) \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, por lo que $|d(\mathbf{x}, A) - d(\mathbf{y}, A)| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ y la función es uniformemente continua.

b) $d(\mathbf{x}, A) = 0 \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0$, $\exists \mathbf{a} \in A$ tal que $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \epsilon \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0$, $B(\mathbf{x}, \epsilon) \cap A \neq \emptyset \Longleftrightarrow \mathbf{x} \in \bar{A}$.

c) Notemos que $\{\mathbf{x} \in E / d(\mathbf{x}, F_1) < d(\mathbf{x}, F_2)\} = (d(\cdot, F_1) - d(\cdot, F_2))^{-1}(]-\infty, 0\,[$ es abierto pues $d(\cdot, F_1) - d(\cdot, F_2)$ es continua y la imagen inversa de un abierto es un abierto.

d) Observemos que $F_1 \subset O_1 = \{\mathbf{x} \in E / d(\mathbf{x}, F_1) < d(\mathbf{x}, F_2)\}$. En efecto, si $\mathbf{x} \in F_1$, $d(\mathbf{x}, F_1) = 0 < d(\mathbf{x}, F_2)$, pues si $d(\mathbf{x}, F_2) = 0$ se tiene $\mathbf{x} \in F_2$, que es una contradicción.

De esta forma también, $F_2 \subset O_2 = \{\mathbf{x} \in E / d(\mathbf{x}, F_1) > d(\mathbf{x}, F_2)\}$ y se tiene $O_1 \cap O_2 = \emptyset$.

e) Sea $f\colon E \longrightarrow [\,0, 1\,]$ definida por $f(\mathbf{x}) = \dfrac{d(\mathbf{x}, F_2)}{d(\mathbf{x}, F_1) + d(\mathbf{x}, F_2)}$. Es importante notar que $d(\mathbf{x}, F_1) + d(\mathbf{x}, F_2) \neq 0$, $\forall \mathbf{x} \in E$ y claramente $f(\mathbf{x}) = 1$, si $\mathbf{x} \in F_1$ y $f(\mathbf{x}) = 0$, si $\mathbf{x} \in F_2$.

220. Dar un ejemplo en $\mathbb{R}^2$ de dos cerrados F_1 y F_2, no vacíos tales que $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ y $d(F_1, F_2) = 0$ y que además existen abiertos O_1 y O_2 de $\mathbb{R}^2$ tales que $F_1 \subset O_1$, $F_2 \subset O_2$ y

$O_1 \cap O_2 = \emptyset$.

Solución Sea $F_1 = \mathbb{N}^*$, $F_2 = \{n + \frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}^*\}$; es claro que $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, $d(F_1, F_2) \leq |n - n - \frac{1}{n}| = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow d(F_1, F_2) = 0$. Además, $F_1 \subset O_1 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} B(n, \frac{1}{2n})$, $F_2 \subset O_2 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} B(n + \frac{1}{n}, \frac{1}{2n})$ y $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Recuerde que en $\mathbb{R}$, $B(a, \rho) =]\, a - \rho, a + \rho\, [$.

221. Demostrar que si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es uniformemente continua sobre un conjunto acotado $A \subset \mathbb{R}^n$, entonces f es acotada en A (i.e. existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f(\mathbf{x})| \leq M$ para todo $\mathbf{x} \in A$).

Solución Supongamos que no, entonces existe $(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ tal que $f(x_n) \longrightarrow +\infty$, por ejemplo. Por otro lado, $(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \bar{A}$ es compacto, por lo que $\exists \mathbf{x}_{n_k} \longrightarrow \mathbf{x}_0 \in \bar{A}$, entonces dado $\epsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tal que $\|\mathbf{x}_{n_k} - \mathbf{x}_0\| < \eta \Longrightarrow |f(\mathbf{x}_{n_k}) - f(\mathbf{x}_0)| < \epsilon$, pero $f(\mathbf{x}_{n_k}) \longrightarrow +\infty$ lo que es contradictorio.

222. Estudiar la existencia del límite en $(0, 0)$ para las funciones $f(x, y)$ siguientes:

a) $\dfrac{xy}{x+y}$	b) $\dfrac{1+x^2+y^2}{y} \operatorname{sen} y$	c) $\dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$
d) $\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$	e) $\dfrac{1-\cos xy}{y^2}$	f) $\lvert x\rvert^y$
g) $\dfrac{\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y}{x+y}$	h) $\dfrac{x^2}{\lvert x-y\rvert}$	i) $\dfrac{(x^2+y^2)^2}{x^2-y^2}$
j) $\dfrac{x^3y^3+y^2}{x^6+y^2}$	k) $\dfrac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$	l) $\dfrac{\lvert x\rvert^\alpha \lvert y\rvert^\beta}{y-x^2}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
m) $\dfrac{\lvert x\rvert^\alpha \lvert y\rvert^\beta}{x^2-xy+y^2}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$	n) $\dfrac{\lvert y\rvert^\alpha}{x^2+\lvert y\rvert}$, $\alpha \in \mathbb{R}$	o) $\dfrac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}{\sqrt{\lvert x\rvert}+\sqrt{\lvert y\rvert}}$
p) $\dfrac{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 y}{\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{sh}^2 y}$	q) $\dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} y}$	r) $\dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sh} y}{\operatorname{sh} x - \operatorname{sen} y}$

Solución

a) $f(x, y) = \dfrac{xy}{x+y}$

Consideremos $f(0, y) = 0 \longrightarrow 0$ si $y \to 0$ y $f(x, -x + x^3) = \dfrac{x(-x+x^3)}{x^3} = \dfrac{-x^2+x^4}{x^3} = x - \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x} \longrightarrow +\infty$, cuando $x \to 0^+$ y no existe el límite en $(0, 0)$.

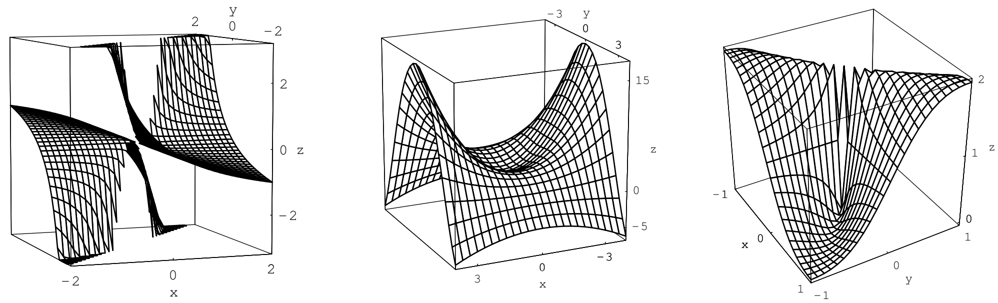
b) $f(x, y) = \dfrac{1+x^2+y^2}{y} \operatorname{sen} y$

La expresión $(1 + x^2 + y^2)\dfrac{\operatorname{sen} y}{y} \sim 1 + x^2 + y^2 \sim 1$, si $(x, y) \to (0, 0)$ i.e. existe el límite en $(0, 0)$.

c) $f(x,y) = \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$

Notemos que $f(0,y) = 1$ y $f(x,x) = \dfrac{4x^2}{2x^2} = 2$ i.e. no existe el límite en $(0,0)$.

a) $f = \frac{xy}{x+y}$ b) $f = (1+x^2+y^2)\frac{\operatorname{sen}\, y}{y}$ c) $f = \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$



d) $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

Puesto que $|f(x,y)| = \left|\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| = \left|\dfrac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{x^2+y^2}\right| \leq 2|x+y|\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 2|x+y| \leq 2(|x|+|y|) < \epsilon$, si $\delta = \frac{1}{2}\epsilon$, pues dado $\epsilon > 0$ se escoge $\delta = \frac{1}{2}\epsilon$ y es tal que si $\|(x,y)-(0,0)\|_1 < \delta \implies |f(x,y)-0| \leq 2|x+y| < 2(|x|+|y|) < \epsilon$, i.e. $f(x,y) \longrightarrow 0$, cuando $(x,y) \to (0,0)$.

e) $f(x,y) = \dfrac{1-\cos xy}{y^2}$

Como $\left|\dfrac{1-\cos xy}{y^2}\right| \sim \left|\dfrac{1-(1-\frac{1}{2}x^2y^2)}{y^2}\right| = \left|\frac{1}{2}x^2\right| \leq \frac{1}{2}\|(x,y)\|^2$, se tiene que $f(x,y) \longrightarrow 0$, si $(x,y) \to (0,0)$. En general:

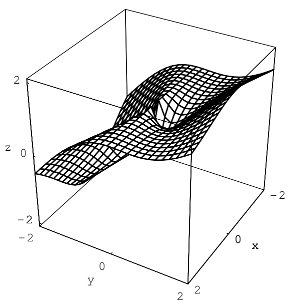
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} \frac{1-\cos xy}{y^2} = \lim_{(x,y)\to(x_0,0)} \frac{1-(1-\frac{1}{2}x^2y^2+o_y(x^2y^2))}{y^2} = \lim_{(x,y)\to(x_0,0)} (\tfrac{1}{2}x^2+o_y(1)) =$$

$\frac{1}{2}x_0^2$. Se escribe o_y para enfatizar que el o depende de y, cuando $y \to 0$.

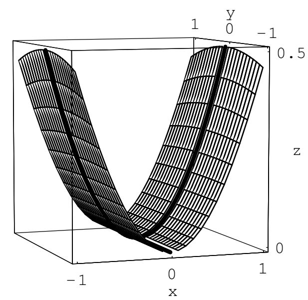
f) $f(x,y) = |x|^y$

Tomando el logaritmo podemos escribir $\ln f(x,y) = y\ln|x| \therefore \ln f(x,x) = x\ln|x| \longrightarrow 0$, cuando $x \to 0$, entonces $f(x,x) \longrightarrow 1$, pero $f(x, \dfrac{1}{\ln x}) = x^{\frac{1}{\ln x}} = e \longrightarrow e$, si $x \to 0^+$, lo que demuestra que el límite no existe.

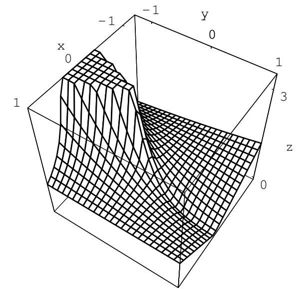
d) $f = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$



e) $f = \dfrac{1-\cos xy}{y^2}$



f) $f = |x|^y$



g) $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y}{x+y}$

Observemos que $f(0,y) = 0 \longrightarrow 0$ y que $f(x,-x+x^2) = \dfrac{\operatorname{sh} x \operatorname{sh}(-x+x^2)}{x^2} =$
$\dfrac{e^x - e^{-x}}{2x^2}\dfrac{e^{-x+x^2}-e^{x-x^2}}{2} = \dfrac{e^{x^2} - e^{2x-x^2} - e^{-2x+x^2} + e^{-x^2}}{4x^2} =$
$\dfrac{1+x^2+-(1+2x-x^2+\frac{1}{2}(2x)^2)-(1-2x+x^2+\frac{1}{2}(-2x)^2)+(1-x^2+o(x^2))}{4x^2} =$
$\dfrac{-4x^2+o(x^2)}{4x^2} = -1+o(1) \longrightarrow -1$ y no existe el límite en $(0,0)$.

h) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{|x-y|}$

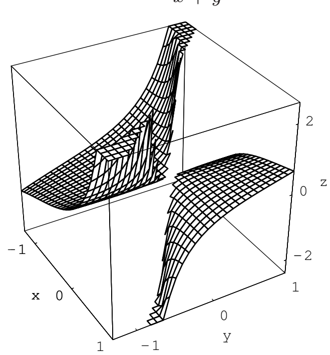
Es claro que $f(x,x+x^2) = \dfrac{x^2}{x^2} \longrightarrow 1$ y que $f(x,x+x^3) = \dfrac{x^2}{x^3} \sim \dfrac{1}{x} \longrightarrow +\infty$, es decir no existe el límite en $(0,0)$.

i) $f(x,y) = \dfrac{(x^2+y^2)^2}{x^2-y^2}$

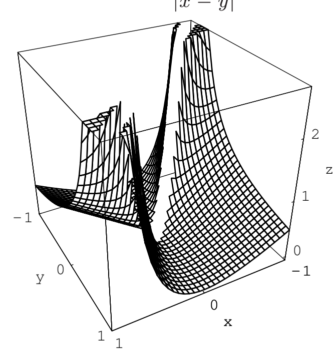
Notemos que $f(0,y) = -y^2 \longrightarrow 0$, cuando $y \to 0$, pero $f(x,x+\lambda x^3) = \dfrac{(x^2+(x+\lambda x^3)^2)^2}{x^2-(x+\lambda x^3)^2} =$

$\dfrac{(2x^2+2\lambda x^4+\lambda^2x^6)^2}{x^2-(x^2+2\lambda x^4+\lambda^2 x^6)} = -\dfrac{x^4(2+2\lambda x^2+\lambda^2x^4)^2}{x^4(2\lambda+\lambda^2x^2)} \sim -\dfrac{2^2}{2\lambda} = -\dfrac{2}{\lambda}$ y no existe el límite en $(0,0)$.

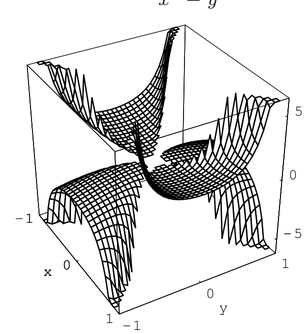
g) $f = \dfrac{\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y}{x+y}$



h) $f = \dfrac{x^2}{|x-y|}$



i) $f = \dfrac{(x^2+y^2)^2}{x^2-y^2}$



j) $f(x,y) = \dfrac{x^3y^3 + y^2}{x^6 + y^2}$

Haciendo $y = x$, $f(x,x) = \dfrac{x^6 + x^2}{x^6 + x^2} = 1$ y $f(x,0) = 0$ con lo cual se tiene que no existe el límite en $(0,0)$.

k) $f(x,y) = \dfrac{x^4y^4}{(x^2 + y^4)^3}$

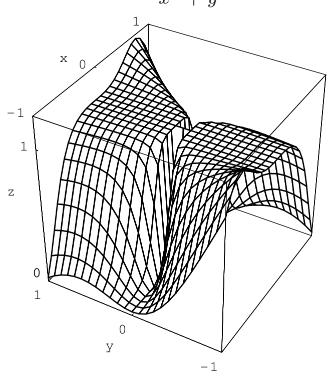
Cuando $x = y$, $f(x,x) = \dfrac{x^8}{(x^2 + x^4)^3} = \dfrac{x^2}{(1 + x^2)^3} \longrightarrow 0$, y si $x = y^2$, $f(y^2,y) = \dfrac{y^8y^4}{(2y^4)^3} = \dfrac{1}{8} \not\longrightarrow 0$ y no es continua en $(0,0)$.

l) $f(x,y) = \dfrac{|x|^\alpha|y|^\beta}{y - x^2}$, $\alpha,\, \beta \in \mathbb{R}$

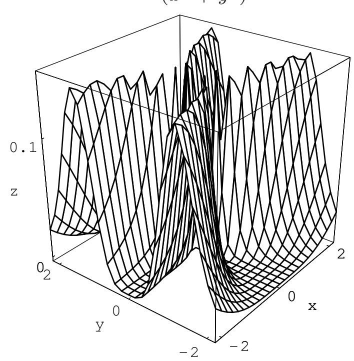
Se considera $f(x, |x|^\gamma + x^2) = \dfrac{|x|^\alpha(|x|^\gamma + x^2)^\beta}{|x|^\gamma} = |x|^{\alpha-\gamma}|x|^{2\beta}(1 + |x|^{\gamma-2})^\beta \sim |x|^{\alpha-\gamma+2\beta}$ si $\gamma \geq 2$. Sea $\gamma = \max\{\alpha + 2\beta + 1, 3\}$, entonces $f(|x|, |x|^\gamma + x^2) = |x|^{\alpha+2\beta-\gamma}(1 + |x|^{\gamma-2}) =$

$$\begin{cases} |x|^{-1}(1 + |x|^{\gamma-2}) \longrightarrow \infty, \text{ si } x \to 0 \text{ y } \gamma = \alpha + 2\beta + 1 \text{ i.e. el límite no existe.} \\[2ex] |x|^{\alpha+2\beta-3}(1 + |x|) \longrightarrow \infty, \text{ si } x \to 0 \text{ y } \gamma = 3 \Longrightarrow \alpha + 2\beta - 3 \leq -1 \text{ i.e. el límite no existe.} \end{cases}$$

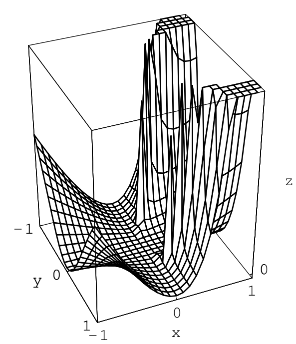
j) $f = \dfrac{x^3y^3 + y^2}{x^6 + y^2}$



k) $f = \dfrac{x^4y^4}{(x^2 + y^4)^3}$



l) $f = \dfrac{|x|^\alpha|y|^\beta}{y - x^2}$



m) $f(x,y) = \dfrac{|x|^\alpha|y|^\beta}{x^2 - xy + y^2}$, $\alpha,\, \beta \in \mathbb{R}$

Notemos que $x^2 - xy + y^2 \neq 0$, salvo para $(x,y) = (0,0)$, así tenemos que $f(x,y) = \dfrac{|x|^\alpha|y|^\beta}{x^2 - xy + y^2} \longrightarrow 0 \Longleftrightarrow \alpha + \beta > 2$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$.

En efecto, $|x|^\alpha|y|^\beta \leq \|(x,y)\|_\infty^{\alpha+\beta}$, $x^2 + y^2 - xy \geq \frac{3}{4}\|(x,y)\|_\infty^2$, entonces:

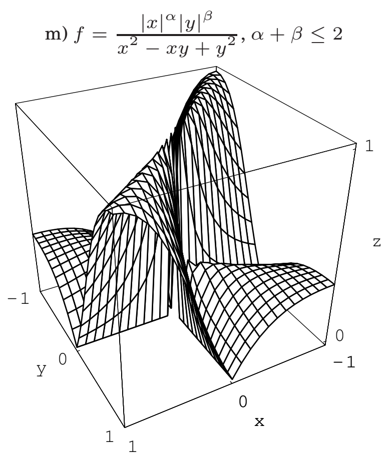
$$|f(x,y)| \leq \frac{|x|^\alpha|y|^\beta}{x^2 - xy + y^2} \leq \tfrac{4}{3}\|(x,y)\|_\infty^{\alpha+\beta-2} \longrightarrow 0, \text{ cuando } (x,y) \to (0,0),$$

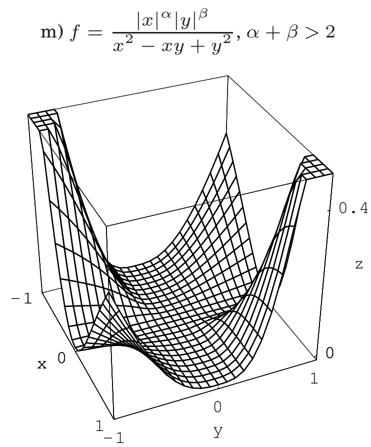
es decir el límite existe si $\alpha + \beta - 2 > 0$.

Si $\alpha + \beta = 2$, $f(x,x) = 1 \not\longrightarrow 0$, si $x \to 0$.

Si $\alpha+\beta<2$, $f(x,x)=|x|^{\alpha+\beta-2}\longrightarrow\infty$, si $x\to 0$.

Observemos que si $\alpha<0$ o $\beta<0$, no existe el límite en $(0,0)$.





n) $f(x,y)=\dfrac{|y|^{\alpha}}{x^2+|y|}$, $\alpha\in\mathbb{R}$

Veamos que $f(0,y)=|y|^{\alpha-1}\longrightarrow\begin{cases}1 & \alpha=1\\ 0 & \alpha>1.\end{cases}$

Si $\alpha=1$, $f(\sqrt{y},y)=\frac{1}{2}\longrightarrow\frac{1}{2}$, si $y\to 0$.

Si $\alpha>1$, $|f(x,y)|=\dfrac{|y|^{\alpha}}{x^2+|y|}\le|y|^{\alpha-1}$, es decir $f(x,y)\longrightarrow 0\iff\alpha>1$.

o) $f(x,y)=\dfrac{\operatorname{sen}\,x\operatorname{sen}\,y}{\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}}$

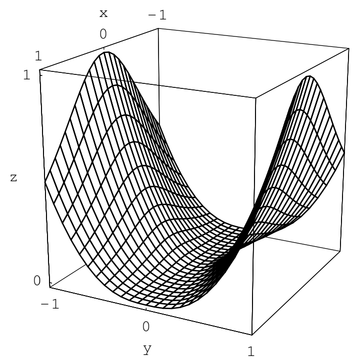
Puesto que $\left|\dfrac{\operatorname{sen}\,x\operatorname{sen}\,y}{\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}}\right|\le\left|\dfrac{xy}{\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}}\right|\le(\max\{|x|,|y|\})^{\frac{3}{2}}=\|(x,y)\|_{\infty}^{\frac{3}{2}}$, es decir tiene por límite 0 en $(0,0)$, pues basta escoger $\delta=\epsilon^{\frac{2}{3}}$.

p) $f(x,y)=\dfrac{\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen}^2 y}{\operatorname{sh}^2 x+\operatorname{sh}^2 y}$

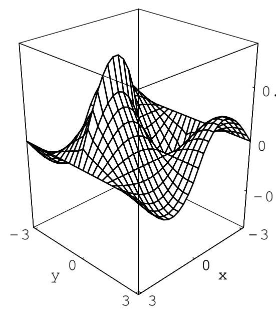
Tenemos que $\left|\dfrac{\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen}^2 y}{\operatorname{sh}^2 x+\operatorname{sh}^2 y}-1\right|\le\dfrac{(\operatorname{sh}^2 x-\operatorname{sen}^2 x)+(\operatorname{sh}^2 y-\operatorname{sen}^2 y)}{\operatorname{sh}^2 x+\operatorname{sh}^2 y}$, ya que $\forall t\in\mathbb{R}$, $\operatorname{sen}^2 t\le t^2\le\operatorname{sh}^2 t$. Además $\exists A>0$ tal que $\operatorname{sh}^2 t-\operatorname{sen}^2 t\le At^4$, $\forall\, t\in[-1,1]$, de modo que si $\|(x,y)\|\le 1$ tenemos:

$$|f(x,y)-1|\le A\,\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\le A\,\frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2}=A\|(x,y)\|^2\longrightarrow 0,\ \text{si } (x,y)\to(0,0).$$

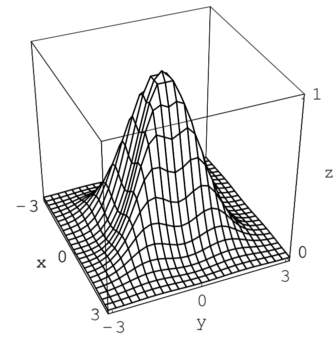
n) $f = \frac{|y|^\alpha}{x^2+|y|}$



o) $f = \frac{\text{sen } x \,\text{sen } y}{\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}}$



p) $f = \frac{\text{sen}^2 x + \text{sen}^2 y}{\text{sh}^2 x + \text{sh}^2 y}$



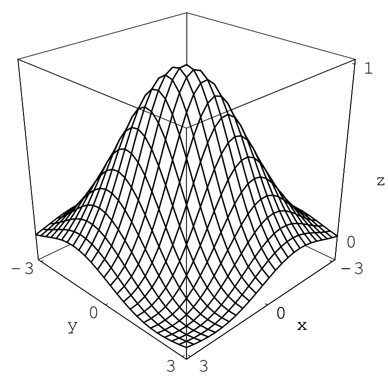
q) $f(x,y) = \dfrac{\text{sen } x - \text{sen } y}{\text{sh } x - \text{sh } y}$

Es conocido que $\dfrac{\text{sen } x - \text{sen } y}{\text{sh } x - \text{sh } y} = \dfrac{\text{sen } \frac{1}{2}(x-y)}{\text{sh } \frac{1}{2}(x-y)} \dfrac{\cos \frac{1}{2}(x+y)}{\text{ch } \frac{1}{2}(x+y)} \sim 1$, cuando $(x,y) \to (0,0)$, o sea $f(x,y) \longrightarrow 1$ cuando $(x,y) \to (0,0)$.

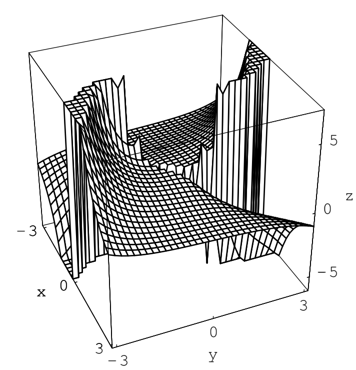
r) $f(x,y) = \dfrac{\text{sen } x - \text{sh } y}{\text{sh } x - \text{sen } y}$

Notemos que $f(x,x) = -1$, $f(x,0) = \dfrac{\text{sen } x}{\text{sh } x} \longrightarrow 1$ i.e $\nexists$ límite en $(0,0)$.

q) $f = \frac{\text{sen } x - \text{sen } y}{\text{sh } x - \text{sh } y}$



r) $f = \frac{\text{sen } x - \text{sh } y}{\text{sh } x - \text{sen } y}$



223. ¿La función $f(x,y,z) = \dfrac{xyz}{x+y+z}$ tiene un límite en $(0,0,0)$?

Solución Si consideramos $f(x,x,-2x+x^4) = \dfrac{x^2(-2x+x^4)}{x^4} = \dfrac{-2x^3+x^6}{x^4} \sim -\dfrac{2}{x}$ y no existe límite en $(0,0)$.

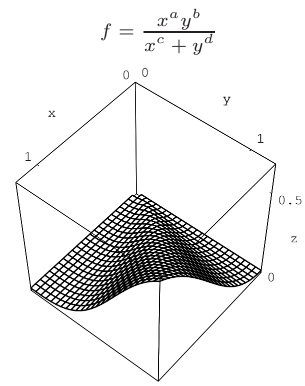
224. ¿La función $f\colon (x,y,z) \longmapsto \dfrac{x+y}{x^2-y^2+z^2}$ tiene un límite en $(2,-2,0)$?

Solución Tomemos la trayectoria $(2+h,-2+h,h)$ en $\mathbb{R}^3$, es decir $f(2+h,-2+h,h) =$

$$\frac{2h}{h^2+(2+h)^2-(-2+h)^2} = \frac{2h}{h^2+4+4h+h^2-(4-4h+h^2)} = \frac{2h}{h^2+8h} = \frac{1}{4+\frac{1}{2}h} \longrightarrow \frac{1}{4}.$$

Además $f(2+h,-2-h,h)=0$ y no existe el límite en $(0,0)$.

225. Sean a, $b \geq 0$, c, $d>0$ y $f\colon \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto \dfrac{x^a y^b}{x^c+y^d}$ encontrar una condición necesaria y suficiente sobre a, b, c, d para que f admita 0 por límite en $(0^+,0^+)$.



Solución Se considera $X = x^{c/2}$, $Y = y^{d/2}$, entonces $f(x,y) = \left|\dfrac{X^{2a/c}Y^{2b/d}}{X^2+Y^2}\right| \leq \|(X,Y)\|^{2(\frac{a}{c}+\frac{b}{d}-1)}$, por lo tanto $f(x,y) \longrightarrow 0$, cuando $(x,y)\to(0^+,0^+) \iff \dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{d}>1$.

Es claro que $(X,Y)\to(0^+,0^+) \iff (x,y)\to(0^+,0^+)$.

226. Determinar la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x,y,z) = \dfrac{xy+xz+yz}{x^2+y^2+z^2}$ b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4\sqrt{y}}{x^5+y^{5/3}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0). \end{cases}$

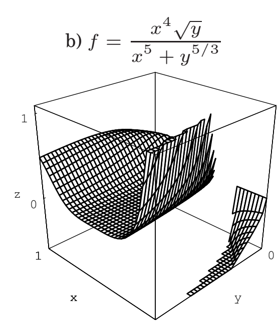
c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-xy}{x+y} & \text{si } (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0). \end{cases}$

Solución

a) $f(x,y,z) = \dfrac{xy+xz+yz}{x^2+y^2+z^2}$

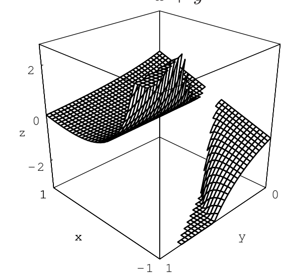
$f(0,0,z) = \dfrac{0}{z^2} = 0$, $f(x,x,x) = \dfrac{3x^2}{3x^2} = 1 \not\longrightarrow 0$, si $x\to 0$.

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4\sqrt{y}}{x^5+y^{5/3}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0). \end{cases}$



Sea $x<0$, $f(x,(1-x^4)^{3/5}(-x)^3) =$
$\dfrac{(-x)^{4+3/2}(1-x^4)^{3/10}}{x^5+x^9-x^5} = \dfrac{(-x)^{11/2}}{x^9}(1-x^4)^{3/10} \longrightarrow +\infty$, si $x\to 0^-$.

c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - xy}{x+y} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$



Es claro que $y \neq -x$, entonces si $y = x^2 - x$, $f(x, x^2 - x) = \dfrac{x^2 - x(x^2 - x)}{x^2} = \dfrac{2x^2 - x^3}{x^2} = 2 - x \not\to 0$, si $x \to 0$.

227. Sea $f\colon \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación, se supone que para toda aplicación $\varphi\colon \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x) = 0$, la función $x \longmapsto f(x, \varphi(x))$ admite un límite en 0. Demostrar que f admite un límite en $(0,0)$.

Solución

a) Demostremos que $\lim\limits_{x\to 0} f(x, \varphi(x)) = l$, no depende de la escogencia de φ, es decir que l es el mismo para todo $\varphi\colon \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x) = 0$.

Sean φ_1, φ_2 funciones tales que $\lim\limits_{x\to 0} \varphi_1(x) = \lim\limits_{x\to 0} \varphi_2(x) = 0$, con $\lim\limits_{x\to 0} f(x, \varphi_1(x)) = l_1$ y $\lim\limits_{x\to 0} f(x, \varphi_2(x)) = l_2$.

Sea φ una función definida por $\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \geq 1 \\ \varphi_1(x) & \text{si } x \in [\,\dfrac{1}{2n+1}, \dfrac{1}{2n}\,[\quad n \in \mathbb{N}^* \\ \varphi_2(x) & \text{si } x \in [\,\dfrac{1}{2n}, \dfrac{1}{2n-1}\,[\quad n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$

La función φ es tal que $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x) = 0 \therefore \lim\limits_{x\to 0} f(x, \varphi(x)) = l$ existe, o sea $|f(x, \varphi(x)) - l| < \epsilon$ si $|x| < \eta$. Así $\exists\, n$ para el cual $|x| < \dfrac{1}{2n-1} < \eta$.

Si $x \in [\,\dfrac{1}{2n}, \dfrac{1}{2n-1}\,[\implies |f(x, \varphi(x)) - l| = |f(x, \varphi_2(x)) - l| < \epsilon \implies l = l_2$.

Similarmente si $x \in [\,\dfrac{1}{2n+1}, \dfrac{1}{2n}\,[\implies |f(x, \varphi(x)) - l| = |f(x, \varphi_1(x) - l_1| < \epsilon \implies l = l_1$, es decir $l_1 = l_2$ y es independiente de la función φ.

b) Supongamos que f no admite a l por límite en $(0,0)$, entonces $\exists \epsilon > 0$ tal que $\forall \eta > 0$, $|x| + |y| < \eta$, con $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ y $|f(x,y) - l| \geq \epsilon$.

Consideremos $\eta > 0$ y construyamos una sucesión tal que $|x_n| + |y_n| \leq \frac{1}{2}|x_{n-1}|$ si $n \geq 2$, con $|f(x_n, y_n) - l| \geq \epsilon$. En efecto, sea $x_0 = 1$ y sea $\eta = \frac{1}{2}|x_0| = \frac{1}{2}$, entonces $\exists (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ tal que $|x_1| + |y_1| < \frac{1}{2}|x_0| = \frac{1}{2}$ y $|f(x_1, y_1) - l| \geq \epsilon$.

Sea $\eta = \frac{1}{2}|x_1|$, $\exists (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ tal que $|x_2| + |y_2| < \frac{1}{2}|x_1|$ y $|f(x_2, y_2) - l| \geq \epsilon$.

$\vdots$

Sea $\eta = \frac{1}{2}|x_{n-1}|$, $\exists (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ tal que $|x_n| + |y_n| < \frac{1}{2}|x_{n-1}|$ y $|f(x_n, y_n) - l| \geq \epsilon$.

Observe que $|x_n| + |y_n| < \frac{1}{2}|x_{n-1}| < |x_{n-1}|$, o sea $|x_n| < |x_{n-1}|$.

Sea $\varphi: \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x) = y_n$ si $|x_{n+1}| \leq |x| < |x_n|$. La función φ es tal que $\varphi(x) \longrightarrow 0$, cuando $x \to 0$, pues dado $\epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N \implies |x_{n+1}| \leq |x_n| < |x_{n-1}| < 2\epsilon$ por lo que $|\varphi(x)| = |y_n| \leq |x_n| + |y_n| < \frac{1}{2}|x_{n-1}| < \epsilon$, es decir $\lim\limits_{x \to 0} f(x, \varphi(x)) = l$, pero $(x_n, y_n) \longrightarrow (0, 0)$ y $f(x_n, \varphi(x_n)) = f(x_n, y_n) \not\longrightarrow l$, que es contradictorio.

228. Sea $\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ aplicación continua, estudiar la continuidad de $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \displaystyle\int_{x-y}^{x+y} \varphi(t)\, dt$.

Solución Consideremos $f(x, y) = \displaystyle\int_0^{x+y} \varphi(t)\, dt - \int_0^{x-y} \varphi(t)\, dt$, por lo tanto la función que se debe estudiar es $\psi(u) = \displaystyle\int_0^u \varphi(t)\, dt$. La función ψ es de clase C^1 y como las aplicaciones $(x, y) \longmapsto x + y$, $(x, y) \longmapsto x - y$ son continuas, $f(x, y)$ es continua en $\mathbb{R}^2$.

229. Sea $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \begin{cases} 2y & \text{si } x \geq y^2 \\ \frac{2x}{y} & \text{si } |x| < y^2,\ y \neq 0 \\ -2y & \text{si } x \leq -y^2. \end{cases}$

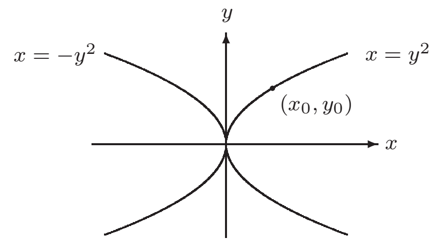
a) Demostrar que f es continua en $\mathbb{R}^2$.

b) Demostrar que no existe $(A, \alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, tal que

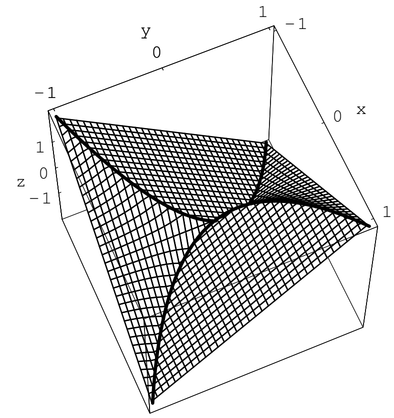
$$\forall\, (x, x', y) \in\,]-\alpha, \alpha[\, \times\,]-\alpha, \alpha[\, \times\,]-\beta, \beta[\, \Longrightarrow |f(x, y) - f(x', y)| \leq A|x - x'|.$$

Solución

a) En el plano sin las parábolas $x = \pm y^2$ las funciones son continuas, pues las fórmulas de las funciones son polinomios o cocientes de polinomios que no se anulan en el denominador.



Queda por analizar la frontera $x = \pm y^2$, y en particular en $(0, 0)$. Sea $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tal que $x_0 = y_0^2 \neq 0$ (el caso $x_0 = -y_0^2 \neq 0$ se analiza de la misma forma), entonces dado $\epsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ y un $k > 0$ tales que si $(x, y) \in B((x_0, y_0), \eta) \Longrightarrow$ $|x| < k$, $|y| < k$, $\dfrac{1}{|y|} < k$.



Si $x \geq y^2$, $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| = |2y - 2y_0|$ y se escoge $\delta = \dfrac{\epsilon}{2}$.

Si $x < y^2$, $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| = |\dfrac{2x}{y} - 2y_0| = |\dfrac{2x}{y} - \dfrac{2x_0}{y_0}| = \dfrac{1}{|y\,y_0|}|2xy_0 - 2x_0 y| \leq \dfrac{2}{|y\,y_0|}|xy_0 - xy + xy - x_0 y| \leq 2k^2(|x|\,|y - y_0| + |y|\,|x - x_0|) \leq 2k^3(|x - x_0| + |y - y_0|) = 2k^3\|(x - x_0, y - y_0)\|_1 < \epsilon$ y se escoge $\delta = \dfrac{\epsilon}{2k^3}$.

Sea $\delta = \min\{\eta, \dfrac{\epsilon}{2}, \dfrac{\epsilon}{2k^3}\}$, entonces si $\|(x - x_0, y - y_0)\| < \delta \Longrightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \epsilon$ en ambas regiones.

Falta analizar en $(0, 0)$. Veamos; dado $\epsilon > 0$ debemos tener $|f(x, y)| < \epsilon \Longleftrightarrow |2y| < \epsilon$ si $|x| \geq y^2$ o $\left|\dfrac{2x}{y}\right| < \epsilon$ si $|x| < y^2$; por tanto basta escoger $\delta = \dfrac{\epsilon}{2}$. En efecto, si $\|(x, y)\|_1 < \delta = \dfrac{\epsilon}{2} \Longrightarrow |x| + |y| < \dfrac{\epsilon}{2}$, lo que implica $|f(x, y)| = \begin{cases} |2y| < 2\,\dfrac{\epsilon}{2} = \epsilon & \text{si } |x| \geq y^2 \\ |\dfrac{2x}{y}| \leq 2|y| < 2\dfrac{\epsilon}{2} = \epsilon & \text{si } |x| < y^2, \end{cases}$

o sea $\forall (x, y) \in B((0, 0), \delta)$ se tiene que $|f(x, y)| < \epsilon$.

b) Supongamos que existen $A \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta > 0$ tales que $\forall x \in]-\alpha, \alpha[$, $\forall y \in]-\beta, \beta[\Longrightarrow |f(x, y) - f(x', y)| \leq A|x - x'|$. En particular si $|x| < y^2$, $|x'| < y^2$, entonces $|f(x, y) - f(x', y)| = |\dfrac{2x}{y} - \dfrac{2x'}{y}| = \dfrac{2}{|y|}|x' - x| \leq A|x - x'|$.
Escojamos $x = \frac{1}{2}\min\left\{\alpha, \frac{1}{3}\beta^2, \dfrac{2}{3A^2 + 1}\right\}$, $x' = 2x$, $y = \sqrt{x}$, entonces $\left|\dfrac{2x}{y} - \dfrac{2x'}{y}\right| = \left|\dfrac{2x}{y}\right| = 2\sqrt{x} \leq A|x| \Longrightarrow 2 \leq A\sqrt{x} \leq A\sqrt{\dfrac{1}{2}\dfrac{2}{3A^2 + 1}} < A\sqrt{\dfrac{1}{3A^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ que es una contradicción.

230. Encontrar todos los pares $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tales que $\exists\, M \in \mathbb{R}_+$, $x^\alpha y^\beta \leq M(x + y)$, $\forall x, y > 0$.

Solución Sea $y = 1$, entonces $x^\alpha \leq M(x + 1)$, $\forall x > 0$ se tiene sólo si $0 \leq \alpha \leq 1$.

Similarmente $0 \leq \beta \leq 1$. Además si $x = y$ implica que $x^{\alpha+\beta} \leq 2Mx$ se tiene para todo $x > 0$ si sólo si $x^{\alpha+\beta-1} \leq 2M$ el cual permanece acotado si $\alpha + \beta = 1$.

Sea $= \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 / \exists\, M > 0,\ x^\alpha y^\beta \leq M(x+y)\, \forall\, x, y > 0\} \subset \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq \alpha \leq 1,\ 0 \leq \beta \leq 1,\ \alpha + \beta = 1\}$.

Recíprocamente si $0 < x^\alpha y^\beta \leq (x+y)^\alpha (x+y)^\beta = (x+y)$ i.e. se tiene la desigualdad.

231. Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$ de longitud >0, $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ aplicación, $a \in I$ tal que f admite un desarrollo limitado de orden 2, ¿$\frac{1}{xy}(f(a+x+y) - f(a+x) - f(a+y) + f(a))$ admite un límite cuando $(x, y) \to (0, 0)$, $xy \neq 0$?

Solución Sea $\epsilon\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\epsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si } x = \dfrac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*, \\[2ex] \dfrac{1}{n^4} & \text{si } x = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^3},\ n \in \mathbb{N}^*, \\[2ex] 0 & \text{si no,} \end{cases}$

y sea $f(x) = x^2 \epsilon(x)$. Se toma $x = \frac{1}{n}$, $y = \frac{1}{n^3}$, $a = 0$ y se tiene

$$\frac{f(a+x+y) - f(a+x) - f(a+y) + f(a)}{xy} = \frac{\dfrac{1}{n^4} - \dfrac{1}{n} - 0 + 0}{\dfrac{1}{n^4}} = 1 - n^3.$$

232. Para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se define $f_{x,y}\colon [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ por $f_{x,y}(t) = xt^2 + yt$ y $F(x, y) = \sup\limits_{t \in [-1,1]} f_{x,y}(t)$.

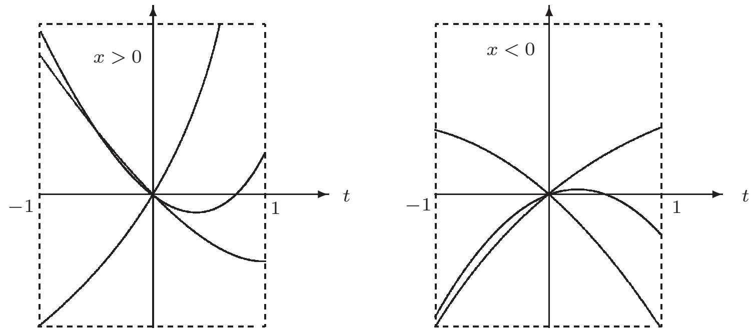
a) Calcular $F(x, y)$.

b) Estudiar la continuidad de F en $\mathbb{R}^2$.

Solución

a) Si $x > 0$, alcanza el máximo para $F(x, y) = \sup\{x - y, x + y\}$, pues el máximo se alcanza en los extremos $t = 1$ o $t = -1$.

Si $x = 0$, $F(x, y) = \begin{cases} y & \text{si } y \geq 0 \\ -y & \text{si } y < 0 \end{cases}$ i.e. $F(0, y) = |y|$.

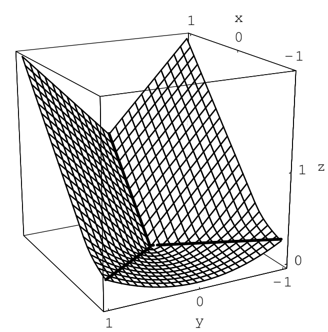


Si $x < 0$ alcanza el máximo en $F'_{xy}(t) = 0 = 2tx + y \iff t = -\dfrac{y}{2x}$. Así tenemos que si $\left|-\dfrac{y}{2x}\right| < 1$, $F(x,y) = x\left(-\dfrac{y}{2x}\right)^2 + y\left(-\dfrac{y}{2x}\right) = -\dfrac{y^2}{4x}$.

En el caso en que $\left|-\dfrac{y}{2x}\right| > 1$, $F(x,y) = \max\{x+y, x-y\}$.

En resumen
$$F(x,y) = \begin{cases} \max\{x+y, x-y\} & \text{si } x \geq 0, \\ -\dfrac{y^2}{4x} & \text{si } x < 0 \text{ y } \left|\dfrac{y}{2x}\right| \leq 1 \\ \max\{x+y, x-y\} & \text{si } x < 0 \text{ y } \left|\dfrac{y}{2x}\right| > 1. \end{cases}$$
$$= \max\left\{x+y, x-y, -\frac{y^2}{4x}\right\}.$$

b) Hay que probar que es continua en la frontera $|y| = 2|x|$ para $x < 0$ y el caso $x = 0$, $y = 0$.



Sea $(x_0, 2x_0)$ un punto en el que deseamos probar la continuidad, $x_0 \neq 0$, entonces
$$|F(x,y) - F(x_0,y_0)| = \begin{cases} \left|-\dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{y_0^2}{4x_0}\right| & \text{si } \left|\dfrac{y}{2x}\right| \leq 1 \\ \left|x - y - \dfrac{y_0^2}{4x_0}\right| & \text{si } \left|\dfrac{y}{2x}\right| > 1. \end{cases}$$

Si $\left|\dfrac{y}{2x}\right| \leq 1$ se tiene $\left|\dfrac{y^2}{4x} - \dfrac{y_0^2}{4x_0}\right| = \left|\dfrac{y^2x_0 - xy_0^2}{4x\,x_0}\right| = \dfrac{1}{4|xx_0|}|y^2x_0 - xy_0^2| \leq$
$\dfrac{1}{4|xx_0|}(|y^2x_0 - xy^2| + |y^2x - xy_0|) = \dfrac{1}{4|xx_0|}\left|\,|y^2|\,|x - x_0| + |x|\,|y^2 - y_0^2|\,\right| \leq$
$\dfrac{1}{4|xx_0|}(|y|^2|x - x_0| + |x|\,|y + y_0|\,|y - y_0|)$.

Dado $\epsilon > 0$, existe $\eta' > 0$ y $k > 0$ tal que $(x,y) \in B((x_0,y_0),\eta') \Longrightarrow \left|\dfrac{1}{x}\right| < k$, $|x| < k$, $|y| < k$.

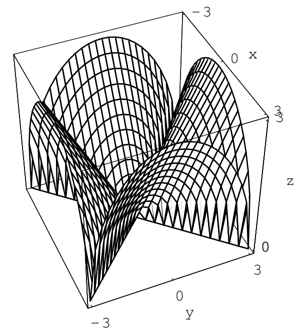
Además existe $\eta'' > 0$, $\eta'' = \dfrac{2\epsilon}{k^4}$ tal que si $|x - x_0| + |y - y_0| < \eta'' \Longrightarrow \left|\dfrac{y^2}{4x} - \dfrac{y^2}{4x_0}\right| \leq \epsilon$.

Si $\left|\dfrac{y}{2x}\right| > 1$, $|x - y + \dfrac{y_0^2}{4x_0}| = |x - y + x_0| = |x - x_0 - y + 2x_0| = |x - x_0| + |y - y_0| < \epsilon$, si se escoge $\eta''' = \epsilon$. Finalmente si $\eta = \min\{\eta', \eta'', \eta'''\}$, entonces para $|x-x_0|+|y-y_0|<\eta \Longrightarrow$ $|F(x,y) - F(x_0,y_0)| < \epsilon$, con $x_0 \neq 0$, $y_0 = 2x_0$.

En $(0,0)$, tomemos $\epsilon > 0$, $\eta = \frac{\epsilon}{2}$, entonces si $|x| + |y| < \eta$ se tiene $|x| < \frac{\epsilon}{2}$, $|y| < \frac{\epsilon}{2}$ y

$$|F(x,y) - F(0,0)| = \begin{cases} \max\{x+y, x-y\} \leq |x| + |y| < \epsilon & \text{si } x > 0 \\ \max\{x+y, x-y\} \leq |x| + |y| < \epsilon & \text{si } x < 0,\ \left|\frac{y}{2x}\right| > 1 \\ -\frac{y^2}{4x} = \left|\frac{y}{2x}\right| \left|\frac{y}{2}\right| \leq \left|\frac{y}{2}\right| < \frac{\epsilon}{4} < \epsilon & \text{si } x < 0,\ \left|\frac{y}{2x}\right| \leq 1. \end{cases}$$

233. Demostrar que $\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto \sqrt{|x^2 - y^2|} \end{aligned}$ no es uniformemente continua en $\mathbb{R}^2$.



Solución Analicemos $\left|f(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha} + \alpha) - f(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha})\right| = \sqrt{2 + \alpha^2} \geq \sqrt{2}$ i.e. $\forall \epsilon < \sqrt{2}$, $\nexists\ \delta > 0$ tal que si $\|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta \Longrightarrow |f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \epsilon$.

234. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, las aplicaciones parciales $f(x_0,\cdot)$ y $f(\cdot,y_0)$ son continuas. Demostrar que existe una sucesión $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de aplicaciones continuas en $\mathbb{R}^2$, convergiendo simplemente a f en $\mathbb{R}^2$.

Solución Sea $g(x) = f(x,y_0)$ y sea y_0 un punto arbitrario pero fijo. Tomemos el punto x_0 y probemos la continuidad de g en x_0. Sea $\epsilon > 0$, por la continuidad de f en (x_0,y_0), $\exists \eta > 0$ tal que si $\|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \eta \Longrightarrow |f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \epsilon$. En particular si $y = y_0$ todo lo expresado anteriormente es válido, por lo cual se escoge el mismo η para la función $g(x)$. En efecto si $|x - x_0| < \eta$, entonces $|x - x_0| = \|(x,y_0) - (x_0,y_0)\| < \eta \Longrightarrow$ $|f(x,y_0) - f(x_0,y_0)| = |g(x) - g(x_0)| < \epsilon$. Finalmente, se probó la continuidad de la función g en x_0, pero este punto puede ser cualquier elemento de $\mathbb{R}$, luego la demostración es válida para todo $x \in \mathbb{R}$.

De la misma manera se demuestra la continuidad de $h(y) = f(x_0,y)$.

Para cada $n \in \mathbb{N}^*$ se descompone $\mathbb{R}^2$ en bandas verticales: $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right] \times \mathbb{R}$ y se define g_n sobre $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right] \times \mathbb{R}$ de la manera siguiente:

$$\forall y \in \mathbb{R}, \begin{cases} g_n\left(\frac{k}{n}, y\right) = f\left(\frac{k}{n}, y\right) \\ g_n\left(\frac{k+1}{n}, y\right) = f\left(\frac{k+1}{n}, y\right) \\ g_n(x,y) = m\left(x - \frac{k}{n}\right) + f\left(\frac{k}{n}, y\right), \quad \text{si } x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right], \end{cases}$$

con $m = n(f(\frac{k+1}{n}, y) - f(\frac{k}{n}, y))$.

Sea $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ y sea $\epsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \frac{\epsilon}{2}$.

Por otro lado, dado $\eta > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$, $\exists k \in \mathbb{N}$ tales que $\frac{k}{n} \leq x_0 \leq \frac{k+1}{n}$, con $\frac{1}{n} < \eta$. Así tenemos que:

$$|g(x_0, y_0) - f(x_0, y_0)| = |m(x_0 - \frac{k}{n}) + f(\frac{k}{n}, y_0) - f(x_0, y_0)| \leq$$

$$n|f(\frac{k+1}{n}, y_0) - f(\frac{k}{n}, y_0)||(x_0 - \frac{k}{n}| + |f(\frac{k}{n}, y_0) - f(x_0, y_0)| \leq n\frac{\epsilon}{2}\frac{1}{n} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

lo que prueba la convergencia puntual y como (x_0, y_0) es arbitrario, vale $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

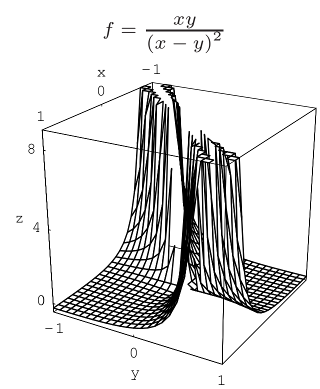
235. Estudiar la continuidad de $f(x,y) = \dfrac{xy}{(x-y)^2}$.

Solución La función se indefine sobre la recta $x = y$.

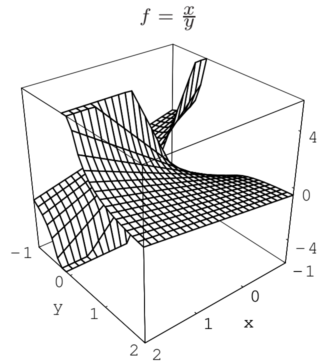
Cabe la posibilidad de que exista el límite en $(0,0)$.

Veamos que no, pues si $f(x, x - x^3) = \dfrac{x(x-x^3)}{x^6} = \dfrac{1-x^2}{x^4} \longrightarrow +\infty$, cuando $x \to 0$.

Finalmente, f es continua en $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq y\}$.



236. Demostrar que si $f(x,y) = \frac{x}{y}$, entonces $f(x,y) \longrightarrow 1$, cuando $(x,y) \to (1,1)$.



Solución Sea $\delta_1 < \frac{1}{2}$, entonces si $|y-1| < \delta_1 < \frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{1}{2} < y < \frac{3}{2} \Longrightarrow \frac{2}{3} < \frac{1}{y} < 2$.

Sea $\epsilon > 0$ y sea $\delta = \min\{\delta_1, \frac{\epsilon}{2}\}$, entonces si $\|(x,y) - (1,1)\|_1 = |x-1| + |y-1| < \delta \Longrightarrow \left|\frac{x}{y} - 1\right| = \frac{|x-y|}{y} \leq \frac{|x-1|+|y-1|}{y} = 2\|(x-1,y-1)\|_1 < 2\delta \leq 2\frac{\epsilon}{2} = \epsilon$, es decir $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x}{y} = 1$.

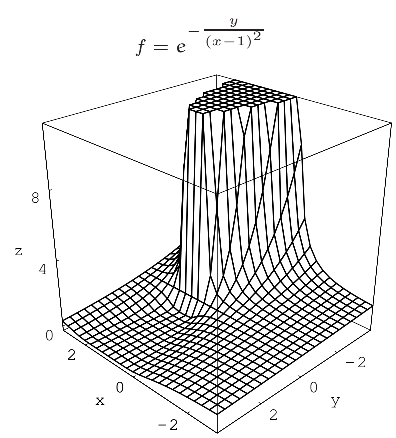
237. Estudiar la continuidad de $f(x,y,z) = \dfrac{1}{(x-y)^2 + z^2}$.

Solución Es claro que $f(x,x,z) = \dfrac{1}{z^2} \longrightarrow +\infty$, cuando $z \longrightarrow 0$ i.e. no es continua en la recta $(x,x,0)$, $x \in \mathbb{R}$.

238. ¿La función $f(x,y) = \mathrm{e}^{-y/(x-1)^2}$ es continua en $(1,2)$?

Solución Sea $1 > \epsilon > 0$ y sea $\delta = \min\left\{\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{-3}{2\ln\epsilon}}\right\}$, entonces si $\|(x,y)-(1,2)\|_1 = |x-1| + |y-2| < \delta \Longrightarrow |y-2| < \frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{3}{2} < y < \frac{5}{2} \Longrightarrow -\frac{5}{2} < -y < -\frac{3}{2}$,

$|x-1| < \delta \Longrightarrow |x-1|^2 < -\dfrac{3}{2\ln\epsilon} \Longrightarrow 1 < -\dfrac{3}{2(x-1)^2\ln\epsilon} \Longrightarrow -\dfrac{y}{(x-1)^2} < -\dfrac{3}{2(x-1)^2} < \ln\epsilon \Longrightarrow \mathrm{e}^{-y/(x-1)^2} < \mathrm{e}^{\ln\epsilon} = \epsilon$, es decir $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \mathrm{e}^{-y/(x-1)^2} = 0$.



Observemos que f es continua en $\mathbb{R}^2 \backslash \{1\} \times \mathbb{R}$ y que se puede definir el límite como 0 en $\{1\} \times]\,0, +\infty\,[$ y no existe el límite en $\{1\} \times]-\infty, 0\,[$, pues $f(x,y) \longrightarrow +\infty$ cuando $(x,y) \longrightarrow (1,y)$, $y < 0$.

En el punto $(1,0)$ tampoco existe el límite.

Así podemos extender la función f a una función continua sobre $\mathbb{R}^2 \backslash D$ con $D = \{1\} \times]-\infty, 0\,]$.

Bibliografía

[1] Archinard Gabriel, Guerrien Bernard 1988 *Analyse mathématique pour economistes*, 3^a édition, Editorial Economica, Paris.

[2] Apostol Tom 1977 *Análisis Matemático*, Editorial Reverté, Barcelona.

[3] Apostol Tom, 1967 *Calculus*, Volumen II, Blaisdell Publishing Company, Massachusetts.

[4] Attali P., Guillard J., Tissier A. 1995 *Analyse 2: Collection exercices et problémes*, Editions Breal, Rosny.

[5] Attali P., Guillard J., Tissier A. 1993 *Géométrie 1: Collection exercices et problèmes*, Editions Breal, Rosny.

[6] Attali P., Guillard J., Tissier A. 1992 *Géométrie 2: Collection exercices et problèmes*, Editions Breal, Rosny.

[7] Bass J. 1970 *Curso de matemáticas*, Tomo I, Editorial Toray–Masson, Barcelona

[8] Berman G.N. 1983 *Problemas y ejercicios de análisis matemático*, 2^a edición, Editorial MIR, Moscú.

[9] Bronshtein I., Semendiaev K. 1982 *Manual de matemáticas para ingenieros y estudiantes*, 4^a edición, Editorial MIR, Moscú.

[10] Cartan Henri 1997 *Cours de Calcul différentiel*, Editorial Hermann, Paris.

[11] Churchill R.V., Brown G.H. 1992 *Variable compleja y aplicaciones*, 5^a edición, McGraw-Hill, Madrid

[12] De Castro Korgi, Rodrigo 2003 *El universo LaTeX*, Editorial Panamericana, Bogotá, Colombia.

[13] Del Castillo F. 1980 *Análisis matemático*, Vol.2, Editorial Alhambra, Madrid.

[14] Demidovich Boris P. 1976 *5000 Problemas de Análisis Matemático* Editorial Paraninfo, Madrid.

[15] Demidovich Boris P. 1973 *Problemas y ejercicios de análisis matemático*, 4^a edición, Editorial MIR, Moscú.

[16] Dixmier J. 1976 *Cours de Mathématiques*, Editorial Dunod, Paris

[17] Douchet Jacques, Zwahlen Bruno 1983 *Calcul différentiel et intégral. Fonctions réelles d'une variable réelle*, Vol.1, Editorial Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, Suisse.

[18] Douchet Jacques, Zwahlen Bruno 1987 *Calcul différentiel et intégral. Fonctions réelles d'une variable réelle, Exercices résolus*, Vol.3, Editorial Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, Suisse.

[19] Douchet Jacques, Zwahlen Bruno 1986 *Calcul différentiel et intégral. Fonctions réelles de plusieurse variables réelles*, Vol.2, Editorial Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, Suisse.

[20] Douchet Jacques, Zwahlen Bruno 1989 *Calcul différentiel et intégral. Fonctions réelles de plusieurse variables réelles, Exercices résolus*, Vol.4, Editorial Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, Suisse.

[21] Doneddu A. 1981 *Fonctions vectorielles. Series. Équations différentielles*, Tome 5, 2^a édition, Vuibert, Paris.

[22] Doneddu A. 1981 *Géométrie différentielle. Intégrales multiples*, Tome 6, 2^a édition, Vuibert, Paris.

[23] Efimov A., Demidovich Boris 1983 *Problemas de las matemáticas superiores*, Vol.1, Editorial MIR, Moscú.

[24] Edwards Jr., C.H. 1973 *Advanced calculus of several variables*, Dover, New York.

[25] Efimov A., Demidovich Boris 1983 *Problemas de las matemáticas superiores*, Vol.2, Editorial MIR, Moscú.

[26] Fogiel M. 1994 *Handbook of Mathematical, Scientific and Engineering*, New Jersey.

[27] Goossens Michel, Mittelbach Frank, Samarin Alexander 1994, *The LaTeX Companion*, Addison Wesley Publishing Company.

[28] Goossens Michel, Rahtz Sebastian 1999, *The LaTeX Web Companion*, Addison Wesley Publishing Company.

[29] Hobby John 1997, *The MetaPost System*.

[30] Hobby John 1997, *Drawing Graphs with MetaPost*.

[31] Hobby John 1998, *A User's Manual for MetaPost*.

[32] Knuth, Donald 1986, *The METAFONTbook*, Addison Wesley Publishing Company.

[33] Knuth, Donald 1995, *The TeXbook*, Addison Wesley Publishing Company.

[34] Krée P. 1969 *Introduction aux mathématiques et a leurs applications fondamentales*, Editorial Dunod, Paris.

[35] Kreysig Erwin 1993 *Matemáticas avanzadas para ingeniería*, Vol 1, Limusa, México.

[36] Lamport, Leslie 1994 *LaTeX: A document preparation system*, Addison Wesley Publishing Company, 2^a Edition.

[37] Lang Serge 1990 *Introducción al Análisis Matemático*, Addison–Wesley Iberoamericana, Delaware.

[38] Lang Serge 1994 *Calculus of several variables*, Sringer–Verlag.

[39] Lelong–Ferrand Jaqueline 1963 *Géométrie différentielle*, Masson, Paris.

[40] Liret F., Zisman M. 1984 *Maths*, Tome 2, Editorial Dunod, Paris

[41] Liret F., Zisman M. 1987 *Maths*, Tome 3, Editorial Dunod, Paris

[42] Marsden J, Tromba A. 1991 *Cálculo vectorial*, 3^a edición, Addison Wesley Iberoamericana, Delaware.

[43] Nikolsky S.M. 1977 *A course of Mathematical Analysis*, Vol.1, Editorial MIR, Moscú.

[44] Nikolsky S.M. 1977 *A course of Mathematical Analysis*, Vol.2, Editorial MIR, Moscú.

[45] Monier J.M. 1990 *Analyse: Exercices résolus*, Tome 1, Dunod, Paris.

[46] Monier J.M. 1990 *Analyse: Exercices résolus*, Tome 2, Dunod, Paris.

[47] Monier J.M. 1993 *Géométrie: Exercices résolus*, Dunod, Paris.

[48] Monier J.M. 1997 *Analyse*, Tome 4, Dunod, Paris.

[49] Monier J.M. 1997 *Géométrie*, Tome 7, Dunod, Paris.

[50] Ohl Thorsten 1997, *EMP: Encapsulated METAPOST for LaTeX.*

[51] Piskunov N. 1978 *Cálculo diferencial e integral*, Vol I, Editorial MIR,

[52] Piskunov N. 1978 *Cálculo diferencial e integral*, Vol II, Editorial MIR, Moscú.

[53] Quinet J. 1978 *Cours élémentaire de mathématiques supérieures, Geométrie, Tomo 5*, 6^a édition, Dunod, Paris.

[54] Quinet J. 1996 *Cours élémentaire de mathématiques supérieures, Calcul intégral et séries, Tomo 3*, 6^a édition, Dunod, Paris.

[55] Restrepo G. 1997 *Análisis en* $\mathbb{R}^n$, Editorial Universidad del Valle, Cali.

[56] Reckdahl Keith *Using Imported Graphics un LaTeX2e.*

[57] Ríbnikov K. 1987 *Historia de las matemáticas*, Editorial MIR, Moscú.

[58] Ruskeepää, Heikki 1999, *Mathematica Navigator*, Academic Press.

[59] Spiegel M.R. 1992 *Manual de fórmulas y tablas matemáticas*, Editorial McGraw-Hill, México.

[60] Taylor A., Mann W. Robert 1989 *Fundamentos de cálculo avanzado*, Editorial Limusa, Mexico.

[61] Tauvel, Patrice 1999 *Analyse complexe*, Dunod, Paris.