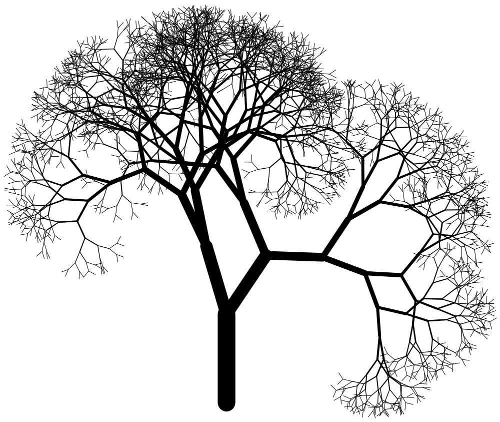
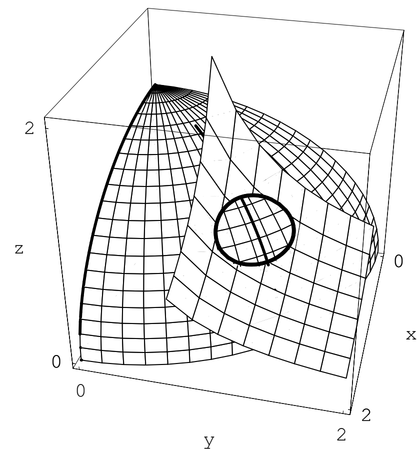
Universidad de Costa Rica

Escuela de Matemática





Serie: Cabécar

Ejercicios de cálculo diferencial: diferenciabilidad, función implícita, máximos y mínimos

Editorial CIMPA

Prof. Jorge Poltronieri

2006

515.330.76

P772e Poltronieri Vargas, Jorge, 1952–

Ejercicios de cálculo diferencial : diferenciabilidad, función implícita, máximos y mínimos / Jorge Poltronieri.– [San José, C.R.: CIMPA], 2003.

231p. : il. ; 27cm (Serie cabécar)

A la cabeza de la port: Universidad de Costa Rica, Escuela de Matemática.

ISBN 9968-9979-4-3

1. CALCULO DIFERENCIAL – PROBLEMAS, EJERCICIOS, ETC. I. Título.

CIP/1423

CC/SIBDI.UCR

Ejercicios de cálculo diferencial: diferenciabilidad,

función implícita, máximos y mínimos

Diagramación en LaTeX realizada por el autor

Diseño y concepto de carátula realizada por el autor

Impreso en Costa Rica

San José, 2004

Contenidos

Capítulo 1

Resumen: Cálculo Diferencial en varias variables

1.1 Derivadas Parciales

Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ un abierto, sea $(a,b) \in U$ y sea f una función, $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $(x,y) \mapsto f(x,y)$. Si el límite $\lim_{x \to a} \frac{f(x,b)-f(a,b)}{x-a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$ existe, decimos que f es parcialmente derivable respecto a x en (a,b) y que el límite anterior es la derivada parcial de f con respecto a x en (a,b), o la primera derivada parcial con respecto a la primera variable de f en (a,b) y la denotamos por $f_x(a,b)$, o $f_1(a,b)$, o $D_1f(a,b)$, o $D_xf(a,b)$, o $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$.

Similarmente se define

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{y \to b} \frac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h},$$

como la derivada parcial de f con respecto a la segunda variable en (a,b) o la derivada parcial de f respecto a y en (a,b) y se denota $f_y(a,b)$, o $f_2(a,b)$, o $D_2f(a,b)$, o $D_y(a,b)$, o $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$.

1.1.1 Derivadas Segundas

Las derivadas segundas se definen como las derivadas de las primeras derivadas y las terceras como las derivadas de las segundas, etc.

Notación

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = f_{11} = D_{11}f = D_{xx}f$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = f_{22} = D_{22}f = D_{yy}f$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx} = f_{21} = D_{21}f = D_{yx}f$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = f_{122} = f_{xyy}, \quad \text{etc.}$$

Proposición 1.1.1 Teorema de Schwarz[1]

Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ *un abierto, sea* $(x_0, y_0) \in U$ *y supongamos que* $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$*,* f_1, f_2 *y* f_{12} *existen y son continuas en una bola abierta* $B((x_0, y_0), r) \subset U$*, entonces* $f_{21}(x_0, y_0)$ *existe y* $f_{12}(x_0, y_0) = f_{21}(x_0, y_0)$.

Derivadas parciales de funciones de varias variables

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, sea f una función $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ y sea $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in U$, entonces si el límite $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_i + h, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n)}{h}$ existe, lo designamos por $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$, $f_{x_i}(\mathbf{a})$, $f_i(\mathbf{a})$, $D_i f(\mathbf{a})$, etc. y lo llamamos la derivada parcial de la i–ésima variable de f evaluada en a.

Generalización de la proposición 1.1.1

La proposición 1.1.1 se generaliza al caso de n variables y al caso de derivadas parciales segundas, terceras o de cualquier orden. Por ejemplo si $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$,

[1]**Hermann Amandus Schwarz (1843-1921)** Nace en Hermsdorf, Silesia (hoy Polonia) y muere en Berlín, Alemania. Schwarz comenzó en Berlín sus estudios en química, pero fue influenciado por Kummer y Weierstrass y se interesa en la geometría. Continuó estudiando en Berlín supervisado por Weierstrass hasta su doctorado (en 1864) sobre superficies mínimas (superficies de menor área), un problema típico del cálculo de variaciones, que estableció un puente entre la teoría de superficies mínimas y la teoría de funciones analíticas. En 1869 fue designado como profesor de matemáticas en el Eidgenössische Technische Hochschule en Zurich y en 1875, aceptó un puesto de Matemáticas en la Universidad de Göttingen. Schwarz dio un método alternativo para resolver el problema de Dirichlet que pronto llegó a ser una técnica usual. Schwarz contestó la pregunta de si una superficie mínima dada rinde realmente un área mínima. Una idea de este trabajo, en que él construyó una función que usa aproximaciones sucesivas, Emile Picard la usó para la prueba de la existencia para soluciones de ecuaciones diferenciales. Contiene también la desigualdad para la integral ahora conocido como "la desigualdad de Cauchy-Schwarz o de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz". Creó métodos generales basado en su magnífica intuición geométrica. La desigualdad de Cauchy-Schwarz aparece en aritmética, geometría y en las formulaciones teóricas del trabajo de matemáticos tal como Bunyakovsky, Cauchy, Grassmann, von Neumann y Weyl.

$\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$ existen y son continuas en (x_0, y_0), entonces $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial z} = \dfrac{\partial^3 f}{\partial z \partial x \partial y} = \cdots$.

1.1.2 Derivadas direccionales

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto $\mathbf{a} \in U$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, la derivada direccional de f en $\mathbf{a}$ en la dirección $\mathbf{u}$, denotada por el símbolo $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{a})$ o $f_{\mathbf{u}}(\mathbf{a})$, se define por $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{a}) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{a})}{h}$, $h \in \mathbb{R}$, si tal límite existe.

Observación Algunos autores requieren que $\|\mathbf{u}\| = 1$. Note que si $\mathbf{u} = (1, 0, \ldots, 0)$, $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{a}) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a})$, si $\mathbf{u} = (0, 1, \ldots, 0)$, $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{a}) = \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a})$, etc.

1.2 El diferencial

Definición 1.2.1 *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, $\mathbf{a} \in U$ y sea $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^p$, decimos que f es diferenciable en $\mathbf{a}$ si existe una función lineal $\ell\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ tal que $f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \ell(\mathbf{h}) + \|\mathbf{h}\| \varepsilon(\mathbf{h})$, donde $\varepsilon(\mathbf{h}) \longrightarrow \mathbf{0}$, cuando $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$.*

La aplicación $\ell\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ se llama el diferencial de f en $\mathbf{a}$ y se denota por $df(\mathbf{a})$ o $Df(\mathbf{a})$.

Proposición 1.2.1 *Si el diferencial de f en $\mathbf{a}$ existe, es único.*

Proposición 1.2.2 *Sea $\ell\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ una aplicación lineal, entonces ℓ es continua en $\mathbb{R}^n$.*

Proposición 1.2.3 *Si f es diferenciable en $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $\mathbf{a} \in U$ abierto, entonces f es continua en $\mathbf{a}$.*

Proposición 1.2.4 *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, sea $\mathbf{a} \in U$ y $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f es diferenciable en $\mathbf{a}$, entonces $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{a})$ existe para cualquier dirección $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ y $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{a}) = (Df(\mathbf{a}))(\mathbf{u})$.*

Corolario 1.2.1 *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$, abierto $\mathbf{a} \in U$ y $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$, si f es diferenciable en $\mathbf{a}$, entonces existen todas las derivadas parciales de primer orden de f en $\mathbf{a}$ y tenemos:*

$$\ell(\mathbf{y}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) y_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) y_n, \tag{1.1}$$

para todo $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. *Además* $\ell(\mathbf{e}_i) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$*, donde* $\mathbf{e}_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ *es el* i*-ésimo elemento de la base canónica de* $\mathbb{R}^n$*.*

Observación Usualmente se designa por dx_i, la i-ésima proyección, es decir $dx_i\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de manera que si $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $y_i = dx_i(\mathbf{y})$ y la ecuación (1.1) del corolario se escribe $Df(\mathbf{a})(\mathbf{y}) = \ell(\mathbf{y}) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a})dx_1 + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a})dx_n\right)(\mathbf{y})$, lo que da para el diferencial, la siguiente notación:

$$df(\mathbf{a}) = Df(\mathbf{a}) = \ell = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a})dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a})dx_n,$$

o también

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n.$$

Gradiente Si f es diferenciable en $\mathbf{a} \in U \subset \mathbb{R}^n$ (U abierto), se llama el gradiente de f en $\mathbf{a}$ y se denota por grad$f(\mathbf{a})$ o $\nabla f(\mathbf{a})$ al vector $\nabla f(\mathbf{a}) = (\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}))$. Resulta entonces, por la proposición 1.2.4 y la relación (1.1) de su corolario, que:

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a}) = \ell(\mathbf{u}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{u}.$$

1.2.1 Caso de una función diferenciable de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^p$

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $\mathbf{a} \in U$ y $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $f = (f_1, \ldots, f_p)$ una función diferenciable en $\mathbf{a}$, entonces

i) Cada función componente $f_i\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en $\mathbf{a}$ y $df(\mathbf{a}) = (df_1(\mathbf{a}), \ldots, df_n(\mathbf{a}))$.

ii) La matriz que corresponde al diferencial $df(\mathbf{a})$ es:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) \cdots \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ \dfrac{\partial f_p}{\partial x_1}(\mathbf{a}) \cdots \dfrac{\partial f_p}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{pmatrix},$$

que se llama matriz Jacobiana[2] de f evaluada en $\mathbf{a}$ y se denota por $J_f(\mathbf{a})$.

[2]**Karl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851)** Nace el 10 de diciembre de 1804 en Potsdam, Prusia (hoy Alemania). Muere el 18 de febrero 1851 en Berlín, Alemania. Jacobi estableció con Abel la Teoría de las funciones elípticas. Demostró la solución de integrales elípticas mediante la aplicación de las funciones, series exponenciales introducidas por él mismo. Desarrolló los determinantes funcionales, llamados después

1.2.2 Criterio suficiente de diferenciabilidad

Proposición 1.2.5 *Sea U un abierto de $\mathbb{R}^2$, $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$, si f tiene las derivadas parciales continuas en U, entonces f es diferenciable en cada punto de U.*

Proposición 1.2.6 *Si $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ y si todas las derivadas parciales de f en U existen y son continuas, entonces f es diferenciable en cada punto de U.*

Corolario 1.2.2 *Sea $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $f = (f_1, \ldots, f_p)$. Recordamos que f es diferenciable si cada función componente $f_1, \ldots, f_p$ es diferenciable y que a $f_i\colon U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, se le puede aplicar la proposición anterior, es decir si las derivadas parciales $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ existen y son continuas, entonces f es diferenciable.*

1.3 Regla de la cadena para varias variables

Proposición 1.3.1 *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ diferenciable en $\mathbf{a} \in U$, sea $B \subset \mathbb{R}^p$ abierto tal que $f(U) \subset B$, sea $g\colon B \longrightarrow \mathbb{R}^r$ diferenciable en $f(\mathbf{a})$, sea $H\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^r$ definida por $H = g \circ f$, entonces H es diferenciable en $\mathbf{a}$ y $DH(\mathbf{a}) = Dg(f(\mathbf{a})) \circ Df(\mathbf{a})$, es decir el diferencial de H en $\mathbf{a}$, es la composición de los diferenciales de f en $\mathbf{a}$ y de g en $f(\mathbf{a})$.*

Corolario 1.3.1 *Con las mismas hipótesis de la proposición anterior*

$$J_H(\mathbf{a}) = J_g(f(\mathbf{a}))\ J_f(\mathbf{a}),$$

es decir la matriz jacobiana de la composición de dos funciones es igual al producto de las matrices jacobianas de las funciones.

Proposición 1.3.2 *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ diferenciable en $\mathbf{a}$, sea $B \subset \mathbb{R}^p$ abierto, tal que $B \supset f(U)$, $g\colon B \longrightarrow \mathbb{R}^r$ diferenciable en $f(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$. Sabemos que $H = g \circ f$*

---

jacobianos y las ecuaciones diferenciales.

El padre de Jacobi era banquero y su familia era muy próspera, fue así como él recibió una buena educación en la Universidad de Berlín. Obtuvo su Doctorado en 1825 y enseñó matemáticas en Köningsberg desde 1826 hasta su muerte. Fue nominado para una cátedra en 1832. En 1834 probó que si una función uni-valuada de una variable es doblemente periódica, entonces la razón de los periodos es imaginaria. Este resultado impulsó enormemente el trabajo en esta área, en particular a Liouville y Cauchy.

Jacobi tenía la reputación de ser un excelente maestro, atraía a muchos estudiantes. Introdujo un método de seminario para enseñar a los estudiantes los últimos avances matemáticos.

es diferenciable en $\mathbf{a}$ *y si denotamos* $f = (f_1, \ldots, f_i, \ldots, f_p)$*,* $g = (g_1, \ldots, g_\ell, \ldots, g_s)$ *y* $H = (H_1, \ldots, H_s)$ *entonces,* H_ℓ *es parcialmente derivable y se tiene:*

$$D_k H_\ell(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{p} (D_i g_\ell(b))(D_k\, f_i(\mathbf{a})),$$

para $k \in \{1, \ldots, n\}$*,* $\ell \in \{1, \ldots, s\}$*.*

Definición 1.3.1

- *Dos vectores* $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$*,* $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ *en* $\mathbb{R}^n$ *son perpendiculares (u ortogonales) si* $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = 0$*.*
- *El conjunto* $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n / (\mathbf{x} - \mathbf{a})\cdot\boldsymbol{\eta} = 0\}$ *se llama hiperplano que pasa por* $\mathbf{a}$ *y es normal (perpendicular) a* $\boldsymbol{\eta}$*.*
- *Una función* $f\colon E \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *se dice de clase* C^r *sobre* E*, si todas las derivadas parciales de orden* $\leq r$ *están definidas y son continuas en* E*.*

Observación Si f es diferenciable, $f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + df(\mathbf{x})\mathbf{h} + \|\mathbf{h}\|\varepsilon(\mathbf{h})$, con $\varepsilon(\mathbf{h}) \longrightarrow \mathbf{0}$, cuando $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$. Podemos escribir $f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) \approx df(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}$, cuando $\mathbf{h}$ está cerca de $\mathbf{0}$. La función $df(\mathbf{x}_0)$ es lineal y se dice que se linealiza f en un vecindario de $\mathbf{x}_0$. En la práctica los resultados obtenidos por $df(\mathbf{x}_0)$ se aplican mejor en tanto que $\mathbf{h}$ es pequeño, o bien $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) \approx df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$, cuando $\mathbf{x}$ está cerca de $\mathbf{x}_0$.

Corolario 1.3.2 *Si* $\nabla f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$*, entonces* $\nabla f(\mathbf{x})$ *apunta en la dirección a lo largo de la cual* f *crece más rápido.*

Corolario 1.3.3 *Si* $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *es de clase* C^1 *y* (x_o, y_o, z_o) *es un punto de la superficie de nivel* S *definida por* $f(x, y, z) = k$*,* k *una constante de* $\mathbb{R}$*, entonces* $\nabla f(x_o, y_o, z_o)$ *es normal a la superficie en el sentido siguiente: Si* $\mathbf{v}$ *es un vector tangente de una trayectoria* $\mathbf{r}(t)$ *en* $t = 0$*, con* $\mathbf{r}(0) = (x_o, y_o, z_o)$*, entonces* $\nabla f\cdot\mathbf{v} = 0$*.*

Corolario 1.3.4 *Si* $f\colon U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *es diferenciable en* $(x_o, y_o, z_o) \in U$ *abierto, la derivada direccional de un vector unitario* $\mathbf{u} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ *existe y se tiene:*

$$D_{\mathbf{u}} f(x_o, y_o, z_o) = \nabla f(x_o, y_o, z_o)\cdot\mathbf{u} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma,$$

y este vector es máximo cuando $\mathbf{u}$ *coincide con* $\nabla f(x_o, y_o, z_o)$ *i.e.*

$$\cos\alpha = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}, \qquad \cos\beta = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}.$$

1.4 Teorema de la función implícita

Teorema 1.4.1 *Sea* $f\colon U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$*,* U *abierto. Supongamos* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *es continua en* U *y que existe* $(a,b) \in U$ *tal que* $f(a,b) = 0$ *y tal que* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$*, entonces existen dos intervalos* I_a*,* I_b *con* $a \in I_a$*,* $b \in I_b$ *tales que:*

a) La ecuación $f(x, g(x)) = 0$ *y las condiciones* $x \in I_a$*,* $y \in I_b$*, definen una aplicación* $g\colon I_a \longrightarrow I_b$ *continua y verifica* $g(a) = b$*, es decir para cada* $x \in I_a$ *la ecuación* $f(x,y) = 0$ *con la condición* $y \in I_b$ *tiene una solución única, que se denota* $g(x)$*. Esta solución depende de manera continua en* x*. Por otro lado, si para ciertos valores* $x \in I_a$ *la ecuación* $f(x,y) = 0$ *tiene varias soluciones, entonces la única solución* $y = g(x)$ *pertenece a* I_b*.*

b) Si f *es parcialmente derivable en* x *en* (a,b)*,* g *es derivable en* a *y se tiene* $g'(a) = -\dfrac{f_x(a,g(a))}{f_y(a,g(a))}$*.*

c) Si f *es parcialmente derivable en* x *sobre* U*,* g *es derivable en* I_a *y se tiene* $g'(x) = -\dfrac{f_x(x,g(x))}{f_y(x,g(x))}$*, si* $f_y(x,g(x)) \neq 0$*.*

d) Si f *es de clase* C^k*, para* $k \geq 1$ *sobre* U*,* g *es de clase* C^k *en* I_a*. Para* $k \geq 2$ *se tiene:* $g''(x) = -\dfrac{\left[f_{xx} + f_{xy}g'(x)\right] f_y - f_x \left[f_{xy} + f_{yy}g'(x)\right]}{\left[f_y\right]^2}$*, donde* f_{xx}*,* f_{xy}*,* f_{yy}*,* f_x *y* f_y *se evalúan en* $(x, g(x))$*.*

Teorema 1.4.2 *Sea* $f(\mathbf{x}, y)$ *una función real de* $n+1$ *variables, de clase* C^k*,* $k \geq 1$*, sobre un abierto* $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *y sea* $(\mathbf{a}, b) \in U$ *tal que* $f(\mathbf{a}, b) = 0$ *y tal que* $f_y(\mathbf{a}, b) \neq 0$*, entonces existe una bola abierta* $V_\mathbf{a}$ *de centro* $\mathbf{a}$ *en* $\mathbb{R}^n$ *y un intervalo* I_b *con* $V_\mathbf{a} \times I_b \subset U$*, tales que la ecuación* $f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = 0$ *y las condiciones* $\mathbf{x} \in V_\mathbf{a}$*,* $g(\mathbf{x}) \in I_b$*, definen la única función* $g\colon V_\mathbf{a} \longrightarrow I_b$*, es decir para cada* $\mathbf{x} \in V_\mathbf{a}$*, la ecuación* $f(\mathbf{x}, y) = 0$ *con la condición* $y \in I_b$ *tiene una única solución, que se denota* $g(\mathbf{x})$*. Claramente* $g(\mathbf{a}) = b$*;* g *es de clase* C^k *sobre* $V_\mathbf{a}$ *y* *además*

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = -\frac{f_{x_i}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))}{f_y(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))}. \tag{1.2}$$

Corolario 1.4.1 *Se considera $S = \{(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^{n+1} / f(\mathbf{x}, y) = 0\}$, con las mismas hipótesis del teorema existe un abierto $W(\mathbf{a}, b) \subset U$, tal que $S \cap W(\mathbf{a}, b) = \{(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^{n+1} / \mathbf{x} \in V_{\mathbf{a}},\ y = g(\mathbf{x})\}$, es decir al interior de $W(\mathbf{a}, b)$ los elementos de S son de la forma $(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))$.*

Definición 1.4.1 *Sea f una función real con derivadas parciales en $\mathbf{a} \in U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, f es regular en $\mathbf{a}$ si $\nabla f(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$. Se dice también que $\mathbf{a}$ es un punto regular de $S = \{\mathbf{x} \in U / f(\mathbf{x}) = c\}$, donde $c = f(\mathbf{a})$.*

Corolario 1.4.2 Plano tangente a la superficie de ecuación $f(\mathrm{x}) = c$

Sea f una función de clase C^k $(k \geq 1)$ sobre $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y sea $\mathbf{a} \in U$ tal que $\nabla f(\mathbf{a}) \neq 0$. Se considera $f(\mathbf{a}) = c$, entonces $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n / f(\mathbf{x}) = c\}$ admite en $\mathbf{a}$ el plano tangente de ecuación $(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot \nabla f(\mathbf{a}) = 0$.

1.4.1 Teorema de la función implícita para un sistema de ecuaciones

Teorema 1.4.3 *Sean $f_j(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_p)$, $j = 1, \ldots, p$, funciones reales de $n + p$ variables de clase $C^k (k \geq 1)$ sobre un abierto $U \subset \mathbb{R}^{n+p}$. Sea $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^p$ donde $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in U$, tales que $f_j(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$, $j = 1, \ldots, p$ y tales que la matriz jacobiana $\dfrac{\partial(f_1, \ldots, f_p)}{\partial(y_1, \ldots, y_p)}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ sea invertible, entonces existe una bola abierta $V_{\mathbf{a}}$ y una bola abierta $V_{\mathbf{b}}$ con $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in V_{\mathbf{a}} \times V_{\mathbf{b}} \subset U$, tales que el sistema de ecuaciones $f_j(\mathbf{x}, g_1(\mathbf{x}), \ldots, g_p(\mathbf{x})) = 0$, $j = 1, \ldots, p$ y las condiciones $\mathbf{x} \in V_{\mathbf{a}}$, $(g_1(\mathbf{x}), \ldots, g_p(\mathbf{x})) \in V_{\mathbf{b}}$ definen las funciones $g_j(\mathbf{x})$, $j = 1, \ldots, p$ (es decir para $\mathbf{x} \in V_{\mathbf{a}}$, la ecuación $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ con la condición $\mathbf{y} \in V_{\mathbf{b}}$ tiene una única solución $\mathbf{y} = (g_1(\mathbf{x}), \ldots, g_p(\mathbf{x}))$. Se tiene que $g_j(\mathbf{a}) = b_j$, $j = 1, \ldots, p$, además las funciones g_j son de clase C^k sobre $V_{\mathbf{a}}$. Las derivadas parciales de g, $\dfrac{\partial g_j}{\partial x_i}$ están dadas por la fórmula:*

$$\frac{\partial(g_1, \ldots, g_p)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(\mathbf{x}) = -\left(\frac{\partial(f_1, \ldots, f_p)}{\partial(y_1, \ldots, y_p)}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))\right)^{-1} \frac{\partial(f_1, \ldots, f_p)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})),$$

donde $g = (g_1, \ldots, g_p)$.

Corolario 1.4.3 *Tomando en cuenta las hipótesis del teorema anterior, consideremos el conjunto* $S = \{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n+p} / f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0\}$*, entonces existe un abierto* $W_{(\mathbf{a},\mathbf{b})} \subset U$ *del punto* $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ *tal que* $S \cap W_{(\mathbf{a},\mathbf{b})} = \{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n+p} / \mathbf{x} \in V_{\mathbf{a}},\ \mathbf{y} = g(\mathbf{x})\}$.

Definición 1.4.2 Función regular en un punto *Se dice que* f *es regular en* $\mathbf{a}$ *si* $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{a})$ *es de rango* p*. En este caso se dice también que* $\mathbf{a}$ *es un punto regular de* $S = \{\mathbf{x} \in U / f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})\}$.

Corolario 1.4.4 *Sea* $f: U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$*,* U *abierto,* f *una función de clase* C^k *y sea* $\mathbf{a}$ *un punto regular de* $S = \{\mathbf{x} \in U / f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$*, entonces existe un abierto* $W_{\mathbf{a}}$*,* $\mathbf{a} \in W_{\mathbf{a}} \subset \mathbb{R}^p$*, una bola* $B_0 \subset \mathbb{R}^{n-p}$ *centrada en el origen y una aplicación* $h: B_0 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *de clase* C^k *tales que* $S \cap W_{\mathbf{a}} = h(B_0) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n / \mathbf{z} = h(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in B_0\}$.

Teorema 1.4.4 Teorema de la función inversa

Sea U *abierto,* F *una aplicación* $F: U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$*, de clase* C^k*,* $k \geq 1$ *y sea* $\mathbf{a} \in U$ *tal que* F *es regular en* $\mathbf{a}$*,* $\det\left(\dfrac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{a})\right) \neq 0$*, entonces existe un abierto* $U_{\mathbf{a}}$*,* $\mathbf{a} \in U_{\mathbf{a}} \subset U$ *tal que la restricción de* F *a* $U_{\mathbf{a}}$ *sea una aplicación biyectiva (de* $U_{\mathbf{a}}$*) sobre una bola* $V_{\mathbf{b}}$ *de centro* $\mathbf{b} = F(\mathbf{a})$*. La aplicación* $F^{-1}: V_{\mathbf{b}} \longrightarrow U_{\mathbf{a}}$ *es de clase* C^k *y se tiene* $J_{F^{-1}}(F(\mathbf{x})) = (J_F(\mathbf{x}))^{-1}$*,* $\forall\, \mathbf{x} \in U_{\mathbf{a}}$.

(La matriz jacobiana de F^{-1} *en* $\mathbf{y} = F(\mathbf{x})$ *es igual a la inversa de la matriz jacobiana de* F *en* $\mathbf{x} = F^{-1}(\mathbf{y})$*).*

1.5 Fórmula de Taylor para funciones de varias variables

Teorema 1.5.1 Fórmula de Taylor[3]

Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ *abierto,* $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$*, con derivadas parciales continuas de orden* p*. Sean* h*,*

[3]**Brook Taylor (1685-1731)** Nace el 18 de agosto de 1685 en Edmonton, Inglaterra. Muere el 29 de diciembre de 1731 en Londres, Inglaterra. En 1708 Taylor produjo una solución al problema del centro de oscilación, la cual desde que fue difundida hasta 1724, resultó ser la disputa principal con Johann Bernoulli.

En "Los métodos de incrementos directo e inverso" Taylor (1715) agrega a las matemáticas una nueva rama llamada ahora "El cálculo de las diferencias finitas", inventa la integración por partes y descubrió la célebre fórmula conocida como la Serie de Taylor. La importancia de esta fórmula no fue reconocida hasta 1772, cuando Lagrange proclamó los principios básicos del cálculo diferencial.

Taylor también desarrolló los principios fundamentales de la perspectiva en "Perspectivas lineales" (1715), junto con "Los nuevos principios de la perspectiva lineal".

k reales tales que el segmento de extremidades (x_0, y_0) y (x_0+h, y_0+k) está contenido en A (es decir los puntos (x_0+th, y_0+tk) con $0 \le t \le 1$), entonces la fórmula de Taylor para dos variables es:

$$f(x_0+h,y_0+k) = f(x_0,y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) +$$

$$\frac{h}{1!}\frac{k}{1!}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) + \frac{k^2}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) + \frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0,y_0) + \frac{h^2}{2!}\frac{k}{1!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x_0,y_0) +$$

$$\frac{h}{1!}\frac{k^2}{2!}\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x_0,y_0) + \frac{k^3}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x_0,y_0) + \cdots + \sum_{n+m=p-1}\frac{h^m}{m!}\frac{k^n}{n!}\frac{\partial^{p-1} f}{\partial x^m \partial y^n}(x_0,y_0) +$$

$$\sum_{n+m=p}\frac{h^m}{m!}\frac{k^n}{n!}\frac{\partial^p f}{\partial x^m \partial y^n}(x_0+\theta h, y_0+\theta k), \text{ con } 0<\theta<1.$$

Corolario 1.5.1 *Para el caso de tres variables tenemos (bajo hipótesis similares):*

$$f(x_0+h,y_0+k,z_0+\ell) = \sum_{q+r+s\le p-1}\frac{h^q}{q!}\frac{k^r}{r!}\frac{\ell^s}{s!}\frac{\partial^{q+r+s} f}{\partial x^q \partial y^r \partial z^s}(x_0,y_0,z_0) +$$

$$\sum_{q+r+s=p}\frac{h^q}{q!}\frac{k^r}{r!}\frac{\ell^s}{s!}\frac{\partial^{q+r+s} f}{\partial x^q \partial y^r \partial z^s}(x_0+\theta h, y_0+\theta k, z_0+\theta\ell), \text{ con } 0<\theta<1.$$

Más generalmente, sea $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, A abierto, con derivadas parciales continuas hasta el orden p, sea $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ tales que el segmento de extremidades $\mathbf{x}_0,\ \mathbf{x}_0+\mathbf{h}$ esté contenido en A ($\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}$, $0 \le t \le 1$), entonces la fórmula de Taylor para n variables es:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) = & \sum_{q_1+\cdots+q_n\le p-1}\frac{h_1^{q_1}}{q_1!}\frac{h_2^{q_2}}{q_2!}\cdots\frac{h_n^{q_n}}{q_n!}\frac{\partial^{q_1+q_2+\cdots+q_n} f}{\partial x_1^{q_1}\partial x_2^{q_2}\cdots\partial x_n^{q_n}}(\mathbf{x}_0) \\ & + \sum_{q_1+\cdots+q_n=p}\frac{h_1^{q_1}}{q_1!}\cdots\frac{h_n^{q_n}}{q_n!}\frac{\partial^{q_1+\cdots+q_n} f}{\partial x_1^{q_1}\cdots\partial x_n^{q_n}}(\mathbf{x}_0+\theta\mathbf{h}), \end{aligned}$$

con $0 < \theta < 1$ y si $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ entonces:

$$f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) = \sum_{q_1+\cdots+q_n\le p}\frac{h_1^{q_1}}{q_1!}\cdots\frac{h_n^{q_n}}{q_n!}\frac{\partial^{q_1+\cdots+q_n} f}{\partial x_1^{q_1}\cdots\partial x_n^{q_n}}(\mathbf{x}_0) + \|\mathbf{h}\|^p o(1).$$

1.6 Diferenciabilidad en espacios de Banach

La definición de diferencial se puede ampliar al caso general de un espacio vectorial normado completo E. Al igual que en el caso de dimensión finita, la diferencial en espacios de Banach utiliza la aproximación por una función lineal.

Taylor da cuenta de un experimento para descubrir las leyes de la atracción magnética (1715) y un método no probado para aproximar las raíces de una ecuación, dando un método nuevo para logaritmos computacionales (1717).

Taylor fue elegido socio de la Real Sociedad en 1712 y fue nombrado en ese año para integrar un comité para la adjudicación de las demandas de Newton y de Leibniz de haber inventado el cálculo.

Definición 1.6.1 *Sean E y F espacios de Banach*[4]*y sea $U \subset E$ un abierto no vacío, la*

---

[4]**Stefan Banach (1892-1945)** Matemático polaco, que nace el 30 el marzo de 1892 en Cracovia, Austria-Hungría (hoy Polonia) y muere el 31 de agosto de 1945 en Lvov, (hoy Ucrania). El padre de Stefan Banach era Stefan Greczek. La primera cosa en darse cuenta fue que Banach no era el apellido de su padre. Stefan Greczek fue un oficial de impuestos que no se casó con la madre de Banach, la cual desapareció de escena después del bautizo de Stefan, cuando tenía cuatro días de nacido y no se supo más de ella. El nombre que aparece como la madre de Stefan en su certificado del nacimiento es Katarzyna Banach. Unos creían que era la sirviente de la madre de Stefan, mientras otros, que era una lavandera que cuidaba a Stefan cuando era muy joven. En vida, más tarde Banach trató de determinar quién fue su madre, pero su padre se negó a decir algo sobre su identidad.
Stefan Greczek nació en un pueblo pequeño llamado Ostrowsko, 50 km al sur de Cracovia. Fue en la casa de su abuela en Ostrowsko, donde se bautizó Banach. Sin embargo, cuando la abuela de Banach enfermó, Stefan Greczek arregló traer a su hijo con Franciszka Plowa que vivía en Cracovia, junto con su hija María. Aunque Banach no volvió a vivir con su abuela, la visitaba frecuentemente cuando crecía. El guardián de María era un francés intelectual, Juliusz Mien, quien rápidamente reconoce los talentos que Banach tenía. Mien enseñó al joven Banach a hablar francés y en general le dio una apreciable educación. Banach asistió a la escuela en Cracovia y sale la escuela en 1902 para empezar su educación secundaria en el Henryk Sienkiewicz Institute, en Cracovia. Por coincidencia, uno de los estudiantes en la clase de Banach fue Witold Wilkosz que se hizo profesor de matemática. En 1906, Wilkosz cambia a un mejor Instituto, aunque Banach mantuvo contacto con Wilkosz. En sus primeros años en el Instituto, Banach alcanzó las primeras clasificaciones en matemática y ciencias naturales. Un compañero recuerda a Banach en este período de su vida: ... era agradable en el trato con sus colegas, pero fuera de la matemática no se interesaba en nada. Si hablaba, lo hacía rápidamente, tan rápidamente como pensaba en matemática... Wilkosz era similar. Para ellos no había problema matemático que no resolvieran rápidamente. Mientras Banach era muy rápido resolviendo problemas matemáticos, Wilkosz era fenomenalmente rápido resolviendo problemas en física, que no eran de interés para Banach. Las calidades excelentes de sus primeros años escolares, dieron paso a calidades más pobres cuando se acercó su final escolar. Pasó los exámenes en 1910 pero no alcanzó distinción. Al salir de la escuela, Banach y Wilkosz querían estudiar matemática, pero ambos sienten que nada nuevo se puede descubrir en matemático y deciden trabajar en otra cosa. Banach escogió estudiar ingeniería, Wilkosz escogió idiomas orientales. El padre de Banach nunca no le había dado mucho apoyo a su hijo, pero ahora una vez salió escuela le dijo abiertamente que ahora era su vida. Banach deja Cracovia y se va a Lvov, donde entra en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Técnica de Lvov. Es casi cierto ese Banach, sin cualquier apoyo financiero, tenía que ayudarse enseñando. Esto le ocupó mucho tiempo y cuando se graduó en 1914, había durado más de lo normal. Banach había visitado Cracovia frecuentemente durante su período de sus estudios en Lvov de 1910 a 1914. No estaban claros los planes de Banach en 1914, pero con la irrupción de I Guerra Mundial en agosto, al poco tiempo de su graduación, Banach se va de Lvov. Lvov estaba, en el tiempo que Banach estudió allí, bajo el control austriaco desde que se dio la partición de Polonia en 1772. En la época de la juventud de Banach, Polonia en cierto sentido no existía y Rusia controlaba gran parte del país. Varsovia sólo tenía una universidad en idioma ruso y se situó en lo que se llamaba "Vistula Land". Con el inicio de la I Guerra Mundial, las tropas rusas ocupaban la ciudad de Lvov. Banach no era apto para el ejército, por tener pobre visión en su ojo izquierdo. Durante la guerra, trabajó construyendo caminos pero en el tiempo que pasó en Cracovia, ganó dinero enseñando en las escuelas locales. También enseño en la Universidad Jagiellonian en Cracovia y aunque no es completamente seguro, se cree que asiste a las conferencias de Zaremba. Un hecho importante ocurrió en la primavera de 1916, que impactó la vida de Banach. Steinhaus, que hacía el servicio militar, estuvo cerca de tomar un puesto en la Universidad Jan Kazimierz en Lvov. Sin embargo vivía en Cracovia en la primavera de 1916, aguardando tomar la oportunidad. Caminaba por las calles de

aplicación $f\colon U \longrightarrow F$ *es diferenciable en* $\mathbf{a} \in U$*, si existe* $g \in \mathsf{L}(E,F)$ *tal que* $f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) =$

Cracovia en las tardes y, relató en sus memorias: ...Durante una de la caminatas oí por casualidad las palabras "medida de Lebesgue", me acerqué al parque y me presenté a los jóvenes matemáticos. Me dijeron de otro compañero de nombre Witold Wilkosz, que ellos alaban extravagantemente. Los jóvenes eran Stefan Banach y Otto Nikodým. Desde entonces, nosotros tendríamos una base común y decidimos establecer una sociedad matemática.
Steinhaus da a Banach un problema que trabajaba sin éxito. Después de unos días Banach tenía la idea principal para el requerido contraejemplo. Steinhaus y Banach escriben un artículo en conjunto, que presentaron en Zaremba para su publicación. La guerra atrasó la publicación y el artículo apareció en el Boletín de la Academia de Cracovia en 1918. De estos primeros resultados con Steinhaus, Banach comenzó a producir importantes artículos matemático rápidamente. Por supuesto, es imposible decir que sin la reunión con Steinhaus, Banach habría seguido la ruta de investigación en matemático. Es también a través de Steinhaus que Banach conoce a su futura esposa Lucja Braus. Se casaron en Zakopane en 1920. Por iniciativa de Steinhaus, la Sociedad Matemática de Cracovia fue creada en 1919. Zaremba se encargó de la reunión inaugural y se eligió como al primero presidente de la Sociedad. Banach disertó en la Sociedad dos veces durante 1919 y continuó produciendo artículos de calidad en la investigación. La Sociedad Matemática de Cracovia siguió y se volvió la Sociedad Polaca Matemática en 1920. Se le ofreció a Banach un puesto de asistente de Lomnicki, en la Universidad Técnica de Lvov en 1920. Trabajó en matemático y presentó una tesis doctoral bajo la tutoría de Lomnicki. Por supuesto, no la ruta normal a un doctorado, pues Banach no tenía cursos matemáticos universitarios. Sin embargo, se hizo una excepción en su caso para someter su tesis "On Operations on Abstract Sets and their Application to Integral Equations". Esta tesis, se dice que marca el nacimiento de análisis funcional.
En 1922 la Universidad Jan Kazimierz en Lvov, le otorgó a Banach su habilitación para una tesis en Teoría de la medida. El Calendario Universitario de 1921-22 informa: "En 7 el abril de 1922, por resolución del Concejo de la Facultad, el Dr. Stefan Banach recibió su habilitación por un Grado de Docente de Matemática. Se nombró Profesor extraordinario por decreto del Jefe de Estado emitido el 22 de julio de 1922."
En 1924 Banach se promovió a Profesor Titular y pasó el año académico 1924-25 en Paris. Los años entre las guerras fueron sumamente ocupados para Banach. Así, continúa produciendo un flujo de artículos importantes, escribió sobre aritmética, geometría y textos del álgebra para secundaria. También se envolvió mucho con la publicación de Matemáticas. En 1929 junto con Steinhaus, comenzó una revista nueva "Studia Mathematica" y Banach y Steinhaus fueron los primeros editores. La política de la dirección o redacción de una publicación era: "enfocar en investigación en análisis funcional y temas relacionados".
Otra publicación importante empieza en 1931, una nueva serie Monografías Matemáticas. Se desarrollan bajo la dirección de Banach y Steinhaus de Lvov y Knaster, Kuratowski, Mazurkiewicz, y Sierpinski de Varsovia. El primer volumen en la serie Théorie des opérations linéaires fue escrito por Banach y apareció en 1932. Era una versión francesa de un volumen que originalmente publicó en polaco en 1931, que rápidamente se volvió un clásico. En 1936 Banach dio una conferencia plenaria en el Congreso Internacional de Matemáticos en Oslo. En esta conferencia describió el trabajo completo de la escuela de Lvov y también habló de los planes que tenían para desarrollar ideas futuras. Otra influencia importante de Banach, fue el hecho que Kuratowski se quedó en la Universidad Técnica de Lvov en 1927 y trabajó allí hasta que 1934. Banach colaboró con Kuratowski y escribieron juntos un artículo. La manera de trabajar de Banach era libre de reglas. A él le gustaba hacer matemático con sus colegas en los cafés de Lvov. Andrzej Turowicz, también profesor de matemática la Universidad Kazimierz en Lvov, describió el estilo de trabajo de Banach: "Banach gastaba la mayor parte de su tiempo en cafés, no sólo por la compañía de otros, sino también por él mismo. A él le gustaba el ruido y la música. No le impedían concentrarse y pensar. Había ocasiones, después que el café cerraba por la noche, que caminaba por la vía férrea de la estación, donde la cafetería estaba abierta alrededor del reloj. Allí, sobre un vidrio de cerveza, pensaba en sus problemas". En 1939, antes del inicio de la II Guerra Mundial, Banach fue

$f(\mathbf{a}) + g(\mathbf{h}) + \|\mathbf{h}\|\epsilon(\mathbf{h})$, *donde* $\epsilon(\mathbf{h}) \longrightarrow \mathbf{0}$, *cuando* $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$.

---

elegido presidente de la Sociedad Matemática Polaca. Al principio de la guerra las tropas soviéticas ocupaban Lvov. Banach estaba en buenos términos con los matemáticos soviéticos antes de que la guerra comenzara. Visitó Moscú varias veces y se le trató bien por parte de la nueva administración soviética. Esto le permitió continuar con su puesto en la Universidad y se nombró Decano de la Facultad de Ciencia de la Universidad, ahora nombrada Universidad Ivan Franko. El padre de Banach llegó a Lvov huyendo del ejército alemán. La vida de Banach en esta fase sufre un pequeño cambio, pero continúa su investigación, su escritura del libro de texto, enseñando y sesionando en los cafés. Sobolev y Aleksandrov visitaron a Banach en Lvov en 1940, mientras que Banach asistió a unas conferencias en la Unión Soviética. Estando en Kiev, Alemania invadió a la Unión Soviética y se volvió inmediatamente a su familia en Lvov. La ocupación Nazi de Lvov, en el junio de 1941, significó para Banach que viviera bajo condiciones muy difíciles. Fue arrestado bajo sospecha de traficar en dinero alemán, pero salió después de algunas semanas. Sobrevivió a un período cuando en Polonia asesinaban académicos. Su supervisor de tesis Lomnicki murió la noche trágica de 3 el julio de 1941, cuando muchas matanzas ocurrieron. Hacia el final de 1941 Banach estaba en el instituto alemán de enfermedades infecciosas, trabajando sobre el ácaro de alimentos. El ácaro del alimento fue su vida durante la ocupación Nazi de Lvov, hasta el julio de 1944. Cuando las tropas soviéticas volvieron a tomar Lvov, Banach renovó sus contactos. Encontró Sobolev en Moscú, pero claramente en ese tiempo estaba gravemente enfermo. Sobolev dio una disertación en una Conferencia Conmemorativa de Banach, y dijo: "A pesar de los rastros de los años de la guerra bajo la ocupación alemana y a pesar de la enfermedad grave que minaba su fuerza, los ojos de Banach todavía eran vivos. Siguió siendo el mismo Stefan Banach sociable, alegre y extraordinariamente bien intencionado, quien había visitado en Lvov antes de la guerra. Es así como queda en mi memoria: con un gran sentido del humor, con energía, una alma bella y un gran talento".
Banach pensaba ir a Cracovia después de la guerra, a tomar un puesto matemático en la Universidad Jagiellonian, pero murió en Lvov en 1945 de cáncer pulmonar. Banach fundó el análisis funcional moderno e hizo su mayor contribución a la teoría de espacios vectoriales topológicos. Además, contribuyó a la teoría de la medida e integración, la teoría de juegos y la teoría de series ortogonales. En su disertación escrita en 1920, definió axiomáticamente lo que hoy se llamaba un espacio de Banach. La idea fue introducida por otros matemáticos al mismo tiempo, por ejemplo Wiener introdujo la noción. pero no había desarrollado la teoría. El nombre espacio de Banach fue acuñado por Fréchet. También se nombraron las álgebras de Banach.
La importancia de la contribución de Banach es que desarrolló una teoría sistemática de análisis funcional, donde antes habían sólo resultados aislados, fueron armonizados para constituir una nueva teoría. Generaliza la teoría de las contribuciones que hicieron Volterra, Fredholm y Hilbert en ecuaciones integrales. Banach demostró numerosos resultados de espacios lineales normados, y muchos teoremas importantes hoy se nombran por él. El teorema de Hahn-Banach en la extensión de un funcional lineal continuo, el teorema de Banach-Steinhaus sobre familias de transformaciones acotadas, el teorema de Banach-Alaoglu, el teorema del punto fijo de Banach y el teorema y la paradoja de la descomposición de una bola de Banach-Tarski. La paradoja de Banach-Tarski apareció en una artículo dos matemáticos en 1926 en Fundamenta Mathematicae llamado "Sur la décomposition des ensembles de points en partiens respectivement congruent". El enigmática de la paradoja muestra que se puede dividir una bola en dos subconjuntos que pueden ser ajustados a dos bolas idénticas a la primera. Se necesita el axioma de elección para definir la descomposición y el hecho que puede tal resultado no es intuitivo, ha hecho que algunos matemáticos se cuestionen el uso del axioma. El paradoja de Banach-Tarski fue la mayor contribución hecha al trabajo de la teoría axiomática de conjuntos, alrededor de este período. La función abierta de Banach de 1929 también usa conceptos de la teoría de conjuntos, esta vez introducidos por Baire en su trabajo de 1899.

La aplicación $g: E \longrightarrow F$ se llama el diferencial de f en $\mathfrak{a}$ y se denota por $g = df(\mathfrak{a})$ o $Df(\mathfrak{a})$. La continuidad de $df(\mathfrak{a})$ implica la continuidad de f en $\mathfrak{a}$.

Definición 1.6.2 *Se dice que f es diferenciable en $U \subset E$, si f es diferenciable en todo punto de U.*

Es claro que la aplicación lineal $g = df(\mathfrak{a})$ depende de $\mathfrak{a} \in U$, lo que permite definir la aplicación $\mathfrak{a} \longmapsto df(\mathfrak{a})$, que denotaremos df i.e. $df: U \longrightarrow \mathsf{L}(E, F)$.

Definición 1.6.3 *Se dirá que $f: U \longrightarrow F$ es continuamente diferenciable o de clase C^1, si f es diferenciable en U y la aplicación $df: U \longrightarrow \mathsf{L}(E, F)$ es continua.*

Al igual que en el caso de $\mathbb{R}^n$, la diferencial no depende de la norma que se utilice.

Proposición 1.6.1 *Sean E, F y G espacios de Banach y sea $U \subset E$ abierto, $f: U \longrightarrow F$ diferenciable en $\mathbf{a} \in U$, sea $B \subset F$ abierto tal que $f(U) \subset B$, sea $g: B \longrightarrow G$ diferenciable en $f(\mathbf{a})$, sea $h: U \longrightarrow G$ definida por $h = g \circ f$, entonces h es diferenciable en $\mathbf{a}$ y $Dh(\mathbf{a}) = Dg(f(\mathbf{a})) \circ Df(\mathbf{a})$, es decir el diferencial de h en $\mathbf{a}$, es la composición de los diferenciales de f en $\mathbf{a}$ y de g en $f(\mathbf{a})$.*

Se verifica sin dificultad que si $f \in \mathsf{L}(E, F)$, $df(\mathbf{x}) = f$, $\forall \mathbf{x} \in U$.

Teorema 1.6.1 *Sean E_1, E_2 y F espacios de Banach, si $f: E_1 \times E_2 \longrightarrow F$ es bilineal continua, f es diferenciable y su diferencial en $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)$ está definida por:*

$$df(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2)(\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2) = f(\mathfrak{h}_1, \mathfrak{a}_2) + f(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{h}_2).$$

Generalización Sean $E_1, \ldots, E_n, F$ espacios de Banach, si $f: E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ es multilineal continua, donde $\|(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n)\| = \sum\limits_{i=1}^{n} \|\mathfrak{x}_i\|$, entonces f es diferenciable y

$$df(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)(\mathfrak{h}_1, \ldots, \mathfrak{h}_n) = f(\mathfrak{h}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n) + \ldots + f(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{n-1}, \mathfrak{h}_n).$$

Teorema 1.6.2 *Sean E, F espacios de Banach, sea $\mathrm{Isom}(E, F) \subset \mathsf{L}(E, F)$, el subconjunto formado por los isomorfismos $E \longrightarrow F$, entonces*

i) $\mathrm{Isom}(E, F)$ *es abierto en* $\mathsf{L}(E, F)$

ii) la aplicación $\varphi: \mathrm{Isom}(E, F) \longrightarrow \mathsf{L}(E, F)$, *con* $\varphi(\mathbf{u}) = \mathbf{u}^{-1}$ *es continua.*

En el teorema 1.6.2 se ha definido una aplicación continua $\varphi\colon \mathbf{u} \longmapsto \mathbf{u}^{-1}$ de $\mathrm{Isom}(E,F)$ (abierto en el espacio de Banach $\mathsf{L}(E,F)$) en $\mathrm{Isom}(E,F)$ y nos preguntamos si φ es diferenciable. Su diferencial sería entonces un elemento de $\mathsf{L}(\mathsf{L}(E,F),\mathsf{L}(E,F))$.

Teorema 1.6.3 *Con las condiciones anteriores, la aplicación φ es de clase C^1 en el abierto $\mathrm{Isom}(E,F)\subset \mathsf{L}(E,F)$ y su diferencial viene dado por:*

$$d\varphi(\mathbf{u})(\mathbf{h}) = -\mathbf{u}^{-1}\mathbf{h}\mathbf{u}^{-1}, \quad \textit{para } \mathbf{h}\in \mathsf{L}(E,F).$$

1.6.1 Convergencia de una sucesión de funciones diferenciables

Teorema 1.6.4 *Sea U un abierto convexo de E espacio vectorial normado completo y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones diferenciables, $f_n\colon U \longrightarrow F$, F espacio vectorial normado completo, tal que:*

i) $\exists\, \mathbf{a}\in U$ tal que $f_n(\mathbf{a})\in F$ tiene límite

ii) la sucesión de aplicaciones $df_n\colon U \longrightarrow \mathsf{L}(E,F)$ converge uniformemente en U a una función $g\colon U \longrightarrow \mathsf{L}(E,F)$, entonces $\forall\, \mathbf{x}\in U$, la sucesión de las $(f_n(\mathbf{x}))_n \subset F$ tiene un límite representado por $f(\mathbf{x})$. La convergencia de la sucesión $(f_n)_n$ a f es uniforme en cada parte acotada de U y la función f es diferenciable y su diferencial es g.

Definición 1.6.4 *Sean E, F espacios vectoriales normados completos, $V\subset E$ abierto, $W\subset F$ abierto, se dice que $f\colon V\longrightarrow W$ es un difeomorfismo de clase C^1, si f es biyectiva de clase C^1 y si la inversa $f^{-1}\colon W\longrightarrow V$ es de clase C^1.*

1.6.2 Diferenciales de orden superior

Sean E, F espacios vectoriales normados completos, $V\subset E$ abierto y $f\colon V\longrightarrow F$ una aplicación diferenciable en V, se tiene entonces una aplicación diferencial $df\colon U \longrightarrow \mathsf{L}(E,F)$ y nos preguntamos si df es a su vez una aplicación diferenciable.

Definición 1.6.5 *Se dice que f es dos veces diferenciable en el punto $\mathbf{a}\in U$, si la aplicación df es diferenciable en $\mathbf{a}$ y la designamos $d^2f(\mathbf{a})$, donde $d^2f(\mathbf{a})\in \mathsf{L}(E,\mathsf{L}(E,F))$, es decir $d^2f\colon U\longrightarrow \mathsf{L}(E,\mathsf{L}(E,F))$.*

Definición 1.6.6 *Se dice que f es dos veces diferenciable en U, si es dos veces diferenciable en todo punto de U.*

Definición 1.6.7 *Se dice que f es de clase C^2 en U, si f es dos veces diferenciable en U y la aplicación d^2f es continua en U.*

Recordemos la isometría canónica entre $\mathsf{L}(E, \mathsf{L}(E,F)) \cong \mathsf{L}(E,E,F)$. Mediante esta biyección $d^2f(\mathfrak{a})$ define un elemento de $\mathsf{L}(E,E,F)$, es decir una aplicación bilineal continua de $E \times E$ en F. Abusando de la notación se considera $d^2f(\mathfrak{a}) \in \mathsf{L}(E,E,F)$ de modo que $(\mathfrak{h},\mathfrak{k}) \longmapsto df^2(\mathfrak{a})(\mathfrak{h},\mathfrak{k}) = (d^2f(\mathfrak{a})(\mathfrak{h}))(\mathfrak{k})$.

Teorema 1.6.5 *Si $f\colon U \longrightarrow F$ es dos veces diferenciable en el punto $\mathfrak{a}$, la segunda diferencial $d^2f(\mathfrak{a}) \in \mathsf{L}(E,E,F)$ es una aplicación bilineal simétrica, o sea $d^2f(\mathfrak{a})(\mathfrak{h},\mathfrak{k}) = d^2f(\mathfrak{a})(\mathfrak{k},\mathfrak{h})$, $\forall\, \mathfrak{h},\mathfrak{k} \in E$.*

Caso en que $E = E_1 \times \cdots \times E_n$

Sea $\mathfrak{a} \in U \subset E$, con U abierto de E, sea $f\colon U \longrightarrow F$ una aplicación continua, para cada $\mathfrak{a} = (a_1,\dots,a_n) \in U$, consideremos la inyección $\lambda_i\colon E_i \longrightarrow F$ definida por:

$$\lambda_i(x_i) = (a_1,\dots,a_{i-1},x_i,a_{i+1},\dots,a_n).$$

La composición $f \circ \lambda_i$ está definida sobre el abierto $\lambda^{-1}(U) \subset E_i$, de modo que $a_i \in \lambda_i^{-1}(U)$. La llamamos la i–ésima aplicación parcial en el punto $\mathfrak{a}$.

Teorema 1.6.6 *Con las notaciones precedentes, si f es diferenciable en el punto $\mathfrak{a}$, entonces la aplicación parcial $f \circ \lambda_i$ es diferenciable en a_i, $i = 1,\dots,n$. Denotamos su diferencial $d(f \circ \lambda_i)(a_i) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathfrak{a}) \in \mathsf{L}(E_i,F)$, que la llamamos derivada parcial de f respecto a x_i. Además:*

$$df(\mathbf{a})(\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})(h_i), \quad h_i \in E_i, \ \ i = 1,\dots,n$$

Corolario 1.6.1 *Sea f diferenciable sobre U, una condición necesaria y suficiente para que f sea de clase C^1 es que las aplicaciones $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\colon U \longrightarrow \mathsf{L}(E_i,F)$ sean aplicaciones continuas.*

Aplicando el mismo razonamiento a df se tiene:

$$(d^2 f(\mathbf{a}))(\mathbf{k}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(df)}{\partial x_i}(\mathbf{a})(k_i),$$

lo que permite escribir:

$$(d^2 f(\mathbf{a}))(\mathbf{k})(\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial(df)}{\partial x_i}(\mathbf{a})(k_i) \right)(\mathbf{h}).$$

Recordemos que $\dfrac{\partial(df)}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \in \mathsf{L}(E_i, \mathsf{L}(E, F))$, que $\dfrac{\partial(df)}{\partial x_i}(\mathbf{a})(k_i) \in \mathsf{L}(E, F)$ y que su valor sobre $\mathbf{h}$ es un elemento de F. Así, tenemos:

$$\left(\frac{\partial(df)}{\partial x_i}(\mathbf{a})(k_i) \right)(\mathbf{h}) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)(\mathbf{a})(k_i) \right)(h_j).$$

Si denotamos $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a})$ la expresión $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j} \right)$ en el punto $\mathbf{a}$, que es un elemento de $\mathsf{L}(E_i, \mathsf{L}(E_j, F)) \cong \mathsf{L}(E_i, E_j; F)$, obtenemos:

$$(d^2 f(\mathbf{a}))(\mathbf{k})(\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a})(k_i) \right)(h_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a})(h_i) \right)(k_j).$$

Corolario 1.6.2 *Si $f\colon U \longrightarrow F$ es dos veces diferenciable de n variables reales, se tiene:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a}) \in F.$$

Es el clásico teorema de Schwarz.

Sea $f\colon U \longrightarrow F$ una función dos veces diferenciable, se tiene que $d^2 f\colon U \longrightarrow \mathsf{L}_2(E, F) = \mathsf{L}(E, E; F)$ de aplicaciones bilineales continuas de $E \times E \longrightarrow F$. En general se denota $\mathsf{L}_n(E, F)$ el espacio de aplicaciones multilineales continuas de $E \times \cdots \times E \longrightarrow F$.

Si la aplicación $d^2 f$ es diferenciable, se escribirá $d^3 f$ su diferencial, que es un elemento de $\mathsf{L}(E, \mathsf{L}_2(E; F)) \cong \mathsf{L}_3(E, F)$. Por recurrencia sobre n se tiene que si f es n veces diferenciable, tenemos que $d^n f(\mathbf{a}) \in \mathsf{L}_n(E, F)$. De esta manera tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.6.7 *Si f es n veces diferenciable en el punto $\mathbf{a}$, el diferencial $d^n f(\mathbf{a}) \in \mathsf{L}_n(E, F)$ es una aplicación multilineal simétrica de $E \times \cdots \times E \longrightarrow F$, es decir que si $\mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_n$ son n vectores de E y σ es una permutación cualquiera de $\{1, \ldots, n\}$, se tiene:*

$$d^n f(\mathbf{a})(\mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_n) = d^n f(\mathbf{a})(\mathbf{h}_{\sigma(1)}, \ldots, \mathbf{h}_{\sigma(n)}).$$

Capítulo 2

Ejercicios de Cálculo Diferencial en varias variables

2.1 Derivadas parciales

1. Graficar la función $f(x,y) = ax + by + c$.

   Solución Determinemos la intersección de la función $f(x,y) = z$, con los planos coordenados. Vamos a suponer que $a < 0$, $b < 0$, $c > 0$.

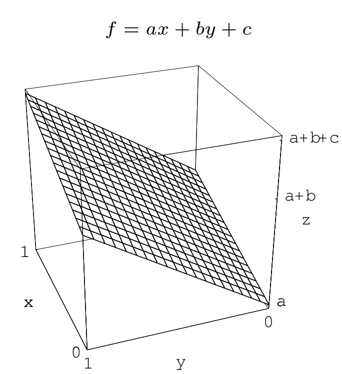
   Sobre el plano xy se tiene $z = 0$, por lo que $ax + by + c = 0$.

   Sobre el plano xz, se tiene $y = 0$, por lo que la intersección es la recta $z = by + c$.

   Sobre el plano yz, tenemos $x = 0$ i.e. la intersección es la recta $z = ax + c$.

   Las curvas de nivel definidas por la relación $z = h = ax + by + c$, donde h es una constante, son igualmente rectas. Resulta de igual manera cuando se hacen los cortes perpendiculares $x = p$, $y = q$, con p, q constantes cualesquiera.

   Así, cualquiera que sea el corte que se haga, por uno de los planos descritos se obtiene una recta, por lo que el gráfico es un plano.

   De manera general el conjunto de puntos en $\mathbb{R}^{n+1}$ de la forma $(x, f(x))$ donde $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b$ se llama hiperplano de $\mathbb{R}^{n+1}$.

2. Considerar la función $f(x,y) = \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2}$.

a) Dibujar en el plano xy las curvas de nivel a las alturas $h = 0$, ± 1, ± 4.

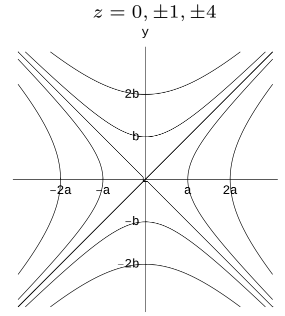
b) Sea G la superficie representativa de f, $G = \{(x, y, z)/z = \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2}\}$. Dibujar en el plano xz los cortes de G, para los planos verticales $y = 0$, $\pm b$, $\pm 2b$.

c) Dibujar en el plano yz los cortes de G por los planos verticales $x = 0$, $\pm a$, $\pm 2a$.

d) Dibujar la figura de la superficie G.

Solución

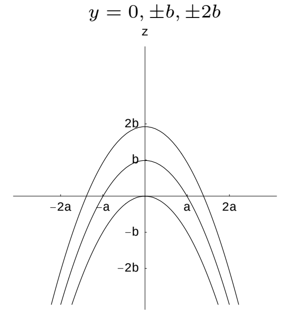
$z = 0, \pm 1, \pm 4$



a) La curva de nivel de altura h es $f(x, y) = h$, es decir $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = h$.

Si $h \neq 0$ las curvas son hipérbolas, con asíntotas $y = \pm\dfrac{b}{a}x$ que corresponden al caso $h = 0$.

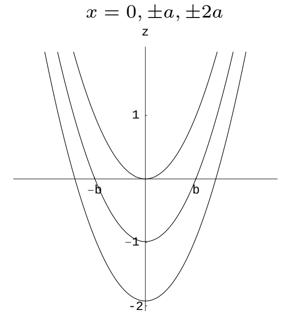
$y = 0, \pm b, \pm 2b$



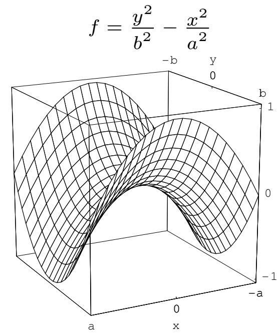
b) El corte de la superficie G por los planos verticales $y = k$, dan la curva de la ecuación $z = f(x, k) = -\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{k^2}{b^2}$, que son parábolas.

c) El corte de G por los planos horizontales de ecuación $x = p$, es la curva $z = \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{p^2}{a^2}$ son también parábolas.

$x = 0, \pm a, \pm 2a$



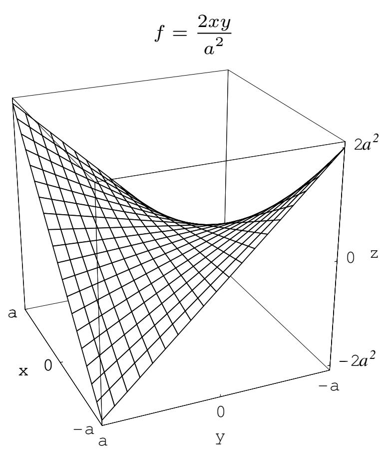
Estos diferentes cortes nos permiten representar el gráfico de f, que es un paraboloide hiperbólico (silla de montar), el cual tiene un plano tangente horizontal en $(0, 0)$.

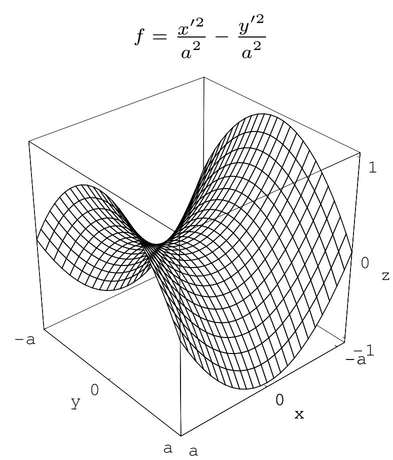


3. Dibujar $f(x,y) = \dfrac{2xy}{a^2}$. Efectúe el cambio de variable $x = \dfrac{x' - y'}{\sqrt{2}}$, $y = \dfrac{x' + y'}{\sqrt{2}}$.

   Solución Observemos que la ecuación de la superficie $z = \dfrac{2xy}{a^2}$, se obtiene por una rotación de ángulo $\frac{\pi}{4}$ alrededor del eje z.

   Denotando x', y' los nuevos ejes por la rotación $x = \dfrac{x' - y'}{\sqrt{2}}$, $y = \dfrac{x' + y'}{\sqrt{2}}$ la ecuación se escribe $z = \dfrac{x'^2}{a^2} - \dfrac{y'^2}{a^2}$ y la superficie es un paraboloide elíptico.

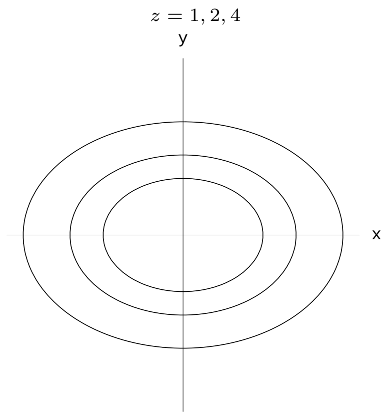


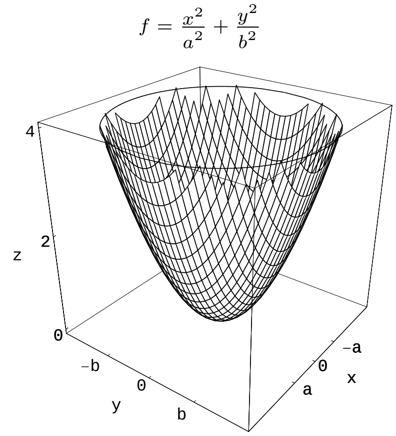


4. Sea $f(x,y) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$, dibujar las curvas de nivel para $h = 1, 2, 4$ y el gráfico de f.

   Solución Las curvas de nivel buscadas por las elipses de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, 2, 4.$

   Cuando intersecamos la superficie con el plano $y = 0$, tenemos la parábola $z = \dfrac{x^2}{a^2}$ y cuando $x = 0$ se tiene la parábola $z = \dfrac{y^2}{b^2}$.





5. Graficar la función $f(x, y) = d\,x^a y^b$, a, b, $d > 0$.

   Solución Las curvas de nivel están dadas por la ecuación $dx^a y^b = k$, donde k es una constante i.e. $y = \left(\frac{k}{d}\right)^{1/b} x^{-a/b}$, $x > 0$ i.e. la gráfica tiene la forma del tipo hiperbólico con asíntotas ejes $x = 0$, $y = 0$.

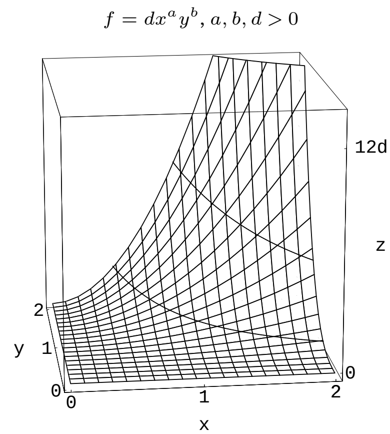
   La intersección del gráfico $f(x, y) = dx^a y^b$ y con los planos verticales $y = 0$ y $x = 0$, están dados por $z = 0$ y aportan poca información para el gráfico.

   La intersección de la superficie con los planos verticales paralelos al plano $y = 0$ (i.e. $y = k$) están dados por las curvas $z = dx^a k^b$, que son del tipo parabólico si $a > 1$ y del tipo raíz si $a < 1$.

   De manera similar se tiene que la intersección de la superficie con los planos $x = h$ i.e. $z = dh^a y^b$.

   El estudio hasta ahora no ha permitido determinar claramente la forma de la superficie. Cortemos la superficie con el plano $x = y$ por lo que se tiene $z = dx^{a+b}$.

Designemos por v la bisectriz (en el plano $z = 0$) y V el plano vertical que lo contiene. A cada x le corresponde $x' = x\sqrt{2}$, ya que $x^2 + x^2 = x'^2$, por lo que los puntos (x, x, dx^{a+b}) se encuentran en el plano V, $z = dx^{a+b} = \dfrac{d(x\sqrt{2})^{a+b}}{(\sqrt{2})^{a+b}} = cx'^{a+b}$ y la forma de la curva depende del valor de $a+b$.



— Si $a + b < 1$, la curva es de tipo raíz.

— Si $a + b = 1$, la curva es una recta.

— Si $a + b > 1$, la curva es de tipo parabólico.

6. Demostrar que si las derivadas parciales de f existen en una bola abierta $B(\mathbf{a}, \rho)$, $\rho > 0$ y son acotadas, entonces f es continua en $\mathbf{a}$.

Solución Dado que $\exists\ M > 0$ tal que $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})\right| \leq M$, $i = 1, \ldots, n$, $\forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{a}, \rho)$ y como $B(\mathbf{a}, \rho)$ es un convexo, entonces por el Teorema de incrementos finitos, existe c_i entre a_i y x_i, $i = 1, \ldots, n$, tales que:

$$\begin{aligned}|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| &= \left|\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_{i-1}, c_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)\right| \\ &\leq M\sum_{i=1}^{n}|x_i - a_i| = M\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_1 \longrightarrow 0, \text{ si } \mathbf{x} \to \mathbf{a}.\end{aligned}$$

7. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = y\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ y $f(0, 0) = 0$. Calcular las derivadas parciales de primero y segundo orden en el origen, cuando existan.

Solución $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim\limits_{h \to 0}\dfrac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0}\dfrac{0 - 0}{h} = 0,$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim\limits_{k \to 0}\dfrac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim\limits_{k \to 0}\dfrac{-k - 0}{k} = -1,$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, 0) = \lim\limits_{h \to 0}\dfrac{f(x + h, 0) - f(x, 0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0}\dfrac{0 - 0}{h} = 0,$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, y) = \lim\limits_{k \to 0}\dfrac{-y - k + y}{k} = \lim\limits_{k \to 0} -\dfrac{k}{k} = -1,$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = \lim_{h \to 0}\frac{f(h, y) - f(0, y)}{h} = \lim_{h \to 0}\frac{y\dfrac{h^2 - y^2}{h^2 + y^2} + y}{h} = \lim_{h \to 0}\frac{-y + \dfrac{2h^2}{h^2 + y^2} + y}{h} =$$

$\lim\limits_{h \to 0}\dfrac{2h}{h^2 + y^2} = 0,$

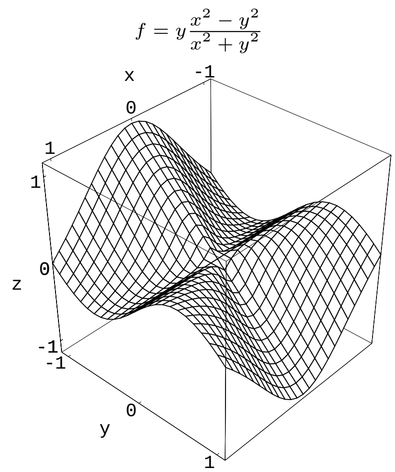
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(x,k)-f(x,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{k\dfrac{x^2-k^2}{x^2+k^2}-0}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{x^2-k^2}{x^2+k^2}=1,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(h,0)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,k)-\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{-1+1}{k}=0.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=\lim_{k\to 0^\pm}\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,k)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0^\pm}\frac{-1-0}{k}=\mp\infty.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0^\pm}\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(h,0)-\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0^\pm}\frac{1+1}{h}=\pm\infty.$$



8. Sea $f\colon\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } x\neq 0\\[2ex] 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$

Demostrar que $D_{\mathbf{u}}f(0,0)$ existe para todo $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^2$, $\|\mathbf{u}\|=1$, pero que f no es continua en $(0,0)$.

Solución Sea $\mathbf{u}=(u_1,u_2)$, con $\sqrt{u_1^2+u_2^2}=1$, entonces:

$$D_{\mathbf{u}}f(0,0)=\lim_{\lambda\to 0}\frac{f(\lambda u_1,\lambda u_2)-f(0,0)}{\lambda}=\lim_{\lambda\to 0}\frac{\lambda^3u_1u_2^2}{(\lambda^2u_1^2+\lambda^4u_2^4)\lambda}=\lim_{\lambda\to 0}\frac{u_1u_2^2}{u_1^2+\lambda^2u_2^4}=\frac{u_2^2}{u_1},$$

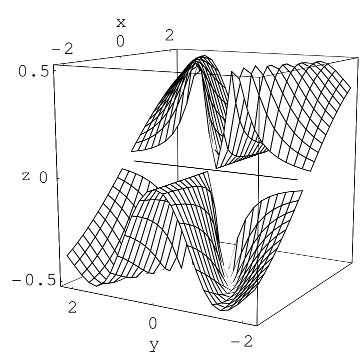
si $u_1\neq 0$.

Cuando $u_1=0$, $D_{\mathbf{u}}f(0,0)=\lim_{\lambda\to 0}\dfrac{f(0,u_2)-f(0,0)}{\lambda}=\lim_{\lambda\to 0}\dfrac{0-0}{\lambda}=0.$

Así tenemos que $D_{\mathbf{u}}f(0,0)$ existe $\forall\mathbf{u}\in\mathbb{R}^2$, $\|\mathbf{u}\|=1$.

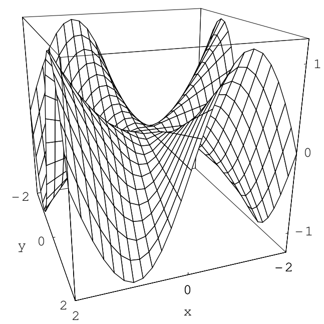
Verifiquemos que $f(x,y)$ no es continua en $(0,0)$.

En efecto, veamos que $f(0,0)=0$, pero si tomamos la trayectoria $(x,\sqrt{x})$, $x\geq 0$ se tiene que $f(x,\sqrt{x})=\dfrac{x(\sqrt{x})^2}{x^2+(\sqrt{x})^4}=\dfrac{x^2}{x^2+x^2}=\dfrac{1}{2}\not\to 0$, cuando $x\to 0^+$.



9. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Demostrar que $D_{12}f(0,0) \neq D_{21}f(0,0)$.



Solución $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$,

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x(y^4-4x^2y^2-x^4)}{(x^2+y^2)^2}$, si $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x,h)-f(x,0)}{h} = \frac{xh}{h}\frac{x^2-h^2}{x^2+h^2}\right] = x,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(h,y)-f(0,y)}{h} = \frac{hy}{h}\frac{h^2-y^2}{h^2+y^2}\right] = -y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \frac{0}{h}\right] = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = \frac{h-0}{h}\right] = 1,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{k\to 0}\left[\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,k) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} = \frac{-k-0}{k}\right] = -1.$$

Así, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ porque $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ no es continua en $(0,0)$.

10. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} x & \text{si } y = 0 \\ y & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

a) Demostrar que $D_1f(0,0)$ y $D_2f(0,0)$ existen y determinarlos.

b) Sea $\mathbf{u} = (a_1,a_2)$, con $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$. Demostrar que $D_{\mathbf{u}}f(0,0)$ no existe.

Solución

$$D_1f(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h-0}{h} = 1.$$

$$D_2f(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{k-0}{k} = 1.$$

Sin embargo, $D_{\mathbf{u}}f(0,0) = \displaystyle\lim_{\lambda\to 0^{\pm}}\frac{f(a_1\lambda,a_2\lambda)-f(0,0)}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0^{\pm}}\frac{1-0}{\lambda} = \pm\infty$, o sea $D_{\mathbf{u}}f(0,0)$ no existe si $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$.

11. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } x = y = 0. \end{cases}$

Demostrar que f no es continua en $(0,0)$, pero $D_1f(0,0)$ y $D_2f(0,0)$ existen y determinarlas.

Solución Es claro que $f(0,0)=0$ y que f no es continua en $(0,0)$, pues si tomamos la trayectoria (x,x) se tiene que $f(x,x)=\dfrac{x^2}{x^2+x^2}=\dfrac{1}{2}\not\to 0$, cuando $x\to 0$.

Verifiquemos que las derivadas parciales en $(0,0)$ existen. En efecto:

$$D_1f(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0.$$
$$D_2f(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{0-0}{k}=0.$$

12. Sea $f\colon\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x,y)=\begin{cases} x^2\arctan\frac{y}{x}-y^2\arctan\frac{x}{y} & \text{si } xy\neq 0\\ 0 & \text{si } xy=0.\end{cases}$

Demostrar que $D_{12}f(0,0)\neq D_{21}f(0,0)$.

Solución Es claro que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{0-0}{h}=0.$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{0-0}{k}=0.$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,0)-f(x,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0.$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,y)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,y+k)-f(0,y)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{0-0}{k}=0.$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,y)-f(0,y)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\arctan\frac{y}{h}-y^2\arctan\frac{h}{y}}{h}=0\cdot(\pm\tfrac{\pi}{2})-y=-y.$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(x,k)-f(x,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{x^2\arctan\frac{k}{x}-k^2\arctan\frac{x}{k}}{k}=x-0\cdot(\pm\tfrac{\pi}{2})=x.$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,k)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{-k-0}{k}=-1.$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h-0}{h}=1.$$

13. Dar un ejemplo de aplicaciones $f\colon\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$, $g\colon\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ tales que f admite derivadas parciales primeras en $(0,0)$ y g admite derivadas parciales primeras en $(0,0)$, $f(0,0)=(0,0)$, $g\circ f$ no admite derivadas parciales primeras en $(0,0)$.

Solución Sea $f(x,y)=(x^2+y^2,x^2+y^2)$, $g(u,v)=\begin{cases} 0 & \text{si } uv=0\\ 1 & \text{si } uv\neq 0.\end{cases}$

$f\in C^1(\mathbb{R}^2)$, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{g(h,0)-g(0,0)}{h}=\dfrac{0-0}{h}\right)=0$, $f(0,0)=(0,0)$, $g\circ f(x,y)$ es tal que $\dfrac{g\circ f(h,0)-g\circ f(0,0)}{h}=\dfrac{g(f(h,0))-g(f(0,0))}{h}=\dfrac{g(h^2,h^2)-g(0,0)}{h}=\dfrac{1}{h}$, por lo que $\dfrac{\partial g\circ f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{h\to 0^{\pm}}\dfrac{1}{h}=\pm\infty$.

14. Una aplicación $f\colon U\longrightarrow\mathbb{R}$ de clase C^2 sobre U abierto de $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$) se dice armónica sii $\triangle f=0$, donde $\triangle f=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ (resp. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$) es el Laplaciano de f.

a) Para $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, sea $z=x+\mathrm{i}y\in\mathbb{C}$ y $f(x,y)=\ln|\mathrm{e}^{z\mathrm{e}^{-z}}|$, probar que f es armónica en $\mathbb{R}^2$.

b) Demostrar que si f es armónica y de clase C^3, entonces $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $y\dfrac{\partial f}{\partial x}-x\dfrac{\partial f}{\partial y}$ son armónicas.

c) Verificar que $f(x,y,z)=\arctan\frac{y}{x}+\arctan\frac{z}{y}+\arctan\frac{x}{z}$ es armónica en $\mathbb{R}^{*3}$.

Solución

a) $\mathrm{e}^{-z}=\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y}=\mathrm{e}^{-x}(\cos y-\mathrm{i}\operatorname{sen} y)\Longrightarrow$

$z\mathrm{e}^{-z}=\mathrm{e}^{-x}(x\cos y+y\operatorname{sen} y)+\mathrm{i}\mathrm{e}^{-x}(y\cos y-x\operatorname{sen} y)$,

$\mathrm{e}^{z\mathrm{e}^{-z}}=\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-x}(x\cos y+y\operatorname{sen} y)+\mathrm{i}\mathrm{e}^{-x}(y\cos y-x\operatorname{sen} y)}$, por lo tanto $\ln|\mathrm{e}^{z\mathrm{e}^{-z}}|=\mathrm{e}^{-x}(x\cos y+y\operatorname{sen} y)$,

$\dfrac{\partial f}{\partial x}=-\mathrm{e}^{-x}(x\cos y+y\operatorname{sen} y-\cos y)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\mathrm{e}^{-x}(x\cos y-2\cos y+y\operatorname{sen} y)$,

$\dfrac{\partial f}{\partial y}=\mathrm{e}^{-x}(-x\operatorname{sen} y+\operatorname{sen} y+y\cos y)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\mathrm{e}^{-x}(-x\cos y+2\cos y-y\operatorname{sen} y)$, o sea $\Delta f=0$.

b) $\Delta\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial(\Delta f)}{\partial x}=0$, por el teorema de Schwarz.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(y\frac{\partial f}{\partial x}-x\frac{\partial f}{\partial y}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(y\frac{\partial f}{\partial x}-x\frac{\partial f}{\partial y}\right)=y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)-x\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)=0.$$

c) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{-\frac{y}{x^2}}{1+(\frac{y}{x})^2}+\dfrac{\frac{1}{z}}{1+(\frac{x}{z})^2}=-\dfrac{y}{x^2+y^2}+\dfrac{z}{x^2+z^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}-\dfrac{2xz}{(x^2+z^2)^2}$,

$\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\frac{1}{x}}{1+(\frac{y}{x})^2}+\dfrac{-\frac{z}{y^2}}{1+(\frac{z}{y})^2}=-\dfrac{z}{y^2+z^2}+\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\dfrac{2yz}{(y^2+z^2)^2}-\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$,

$\dfrac{\partial f}{\partial z}=\dfrac{\frac{1}{y}}{1+(\frac{z}{y})^2}-\dfrac{\frac{x}{z^2}}{1+(\frac{x}{z})^2}=\dfrac{y}{y^2+z^2}-\dfrac{x}{x^2+z^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}=-\dfrac{2yz}{(y^2+z^2)^2}+\dfrac{2xz}{(x^2+z^2)^2}$ $\therefore\ \Delta f=0$.

15. Estudiar la continuidad de $f\colon\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$, la existencia y continuidad de las derivadas parciales de orden 1.

a) $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\operatorname{sen}\dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ b) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

c) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\operatorname{sen} y-y\operatorname{sen} x}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ d) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

e) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} xy}{|x|+|y|} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ f) $f(x,y) = \begin{cases} e^{1/(x^2+y^2-1)} & \text{si } x^2+y^2 < 1 \\ 0 & \text{si } x^2+y^2 \geq 1 \end{cases}$

g) $f(x,y) = \begin{cases} y^2 \operatorname{sen} \frac{x}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$ h) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^x & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

i) $f(x,y) = \operatorname{sen}|xy|$ j) $f(x,y) = \begin{cases} 1-x^2-y^2 & \text{si } x^2+y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{si } x^2+y^2 > 1 \end{cases}$

k) $f(x,y) = \begin{cases} x^2 & \text{si } |x| > y \\ y^2 & \text{si } |x| \leq y. \end{cases}$

Solución

a) $|f(x,y)| \leq x^2+y^2 \longrightarrow 0$, si $(x,y) \to (0,0)$,

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \dfrac{h^2}{h}\operatorname{sen}\dfrac{1}{h^2}\right] = 0,$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \dfrac{h^2}{h}\operatorname{sen}\dfrac{1}{h^2}\right] = 0,$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\left[\operatorname{sen}\dfrac{1}{x^2+y^2} - \dfrac{1}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}\right],$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\left[\operatorname{sen}\dfrac{1}{x^2+y^2} - \dfrac{1}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}\right],$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 2x\left[\operatorname{sen}\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x^2}\right]$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) = 2y\left[\operatorname{sen}\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x^2}\right]$, que no tienen límite cuando $x \to 0$.

Así, f es de clase C^2 en $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, continua en $\mathbb{R}^2$, con derivadas de primer orden definidas en $\mathbb{R}^2$, pero no son continuas en $(0,0)$.

b) $|f(x,y)| \leq \dfrac{|x|^3+|y|^3}{x^2+y^2} = \dfrac{(|x|+|y|)|x^2+y^2-|x|\,|y||}{x^2+y^2} \leq 2(|x|+|y|) \longrightarrow 0$, si $(x,y) \longrightarrow (0,0)$, por lo que f es continua, $f(x,0) = x$, $f(0,y) = -y$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -1$.

En $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{x(x^3+3xy^2+2y^3)}{(x^2+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\lambda x) = \dfrac{1+3\lambda^2+2\lambda^3}{(1+\lambda^2)^2} \not\longrightarrow 1$, si $x \to 0$.

Lo mismo sucede con $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, por lo que f es de clase C^1 en $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, continua en $\mathbb{R}^2$, con derivadas definidas en $\mathbb{R}^2$, pero no son continuas en $(0,0)$.

c) $|f(x,y)| = \dfrac{|x(y-\frac{1}{3!}y^3+o(y^3)) - y(x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3))|}{x^2+y^2} = \dfrac{|-xy^3+yx^3+xo(y^3)+yo(x^3)|}{6(x^2+y^2)} \leq$

$\dfrac{|xy|(x^2+y^2)+|xy|y^2o_y(1)+|xy|x^2o_x(1)|}{6(x^2+y^2)} \leq \dfrac{|xy|}{6} + \dfrac{|xy|}{6}\left(\dfrac{y^2}{x^2+y^2}|o_y(1)| + \dfrac{x^2}{x^2+y^2}|o_x(1)|\right) \leq$

$\frac{|xy|}{6} + \frac{|xy|}{6}(|o_y(1)| + |o_x(1)|) \longrightarrow 0$, si $(x,y) \to (0,0)$ y es continua en $\mathbb{R}^2$.

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \frac{0}{h}\right) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0$,

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^2\operatorname{sen} y - x^2 y\cos x - y^3\cos x - x^2\operatorname{sen} y + 2xy\operatorname{sen} x}{(x^2+y^2)^2}$,

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h,0)-f(x,0)}{h} = \frac{0-0}{h}\right) = 0$,

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(h,y)-f(0,y)}{h} = \frac{h\operatorname{sen} y - y\operatorname{sen} h}{(y^2+h^2)h}\right) = \frac{\operatorname{sen} y - y}{y^2}$,

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \sim \frac{y^3 - \frac{1}{3!}y^5 - x^2y + \frac{1}{2}x^4y - y^3 + \frac{1}{2}y^3x^2 - x^2y + \frac{1}{3!}x^2y^3 + 2x^2y - \frac{1}{3!}2x^4y}{(x^2+y^2)^2} = A$,

pero $|A| \leq \frac{3\|(x,y)\|^5}{2\|(x,y)\|^4} = \frac{3}{2}\|(x,y)\| \longrightarrow 0$, si $(x,y) \to (0,0)$, o sea $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \longrightarrow 0$, si $(x,y) \to (0,0)$.

Similarmente $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \longrightarrow 0$, si $\|(x,y)\| \to (0,0)$. Finalmente $f \in C^1$ en $\mathbb{R}^2$.

d) $|f(x,y)| \leq \frac{x^2+y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} \longrightarrow 0$ y es continua e $\mathbb{R}^2$.

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(x^2+y^2)|y| - x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$, por lo que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \frac{|y|^3}{|y|^3} = 1 \not\longrightarrow 0$, si $y \to 0$,

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = -\frac{x}{|x|^3} \not\longrightarrow 0$, si $x \to 0$.

$\frac{\partial f}{\partial x}$ es continua en $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ y está definida en $\mathbb{R}^2$.

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \pm\frac{x}{|x|}$, por lo que $\frac{\partial f}{\partial y}$ existe y es continua en $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ y está definida en $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \cup \{(0,0)\}$. Así, f es de clase C^1 en $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

e) $|f(x,y)| \leq \frac{|xy|}{|x|+|y|} \leq \frac{(|x|+|y|)^2}{|x|+|y|} = |x|+|y| \longrightarrow 0$, si $(x,y) \to (0,0)$ i.e. f es continua en $\mathbb{R}^2$. Además, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x+h)\cdot 0}{|x+h|+0}\frac{1}{h} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen} xh}{|x|+|h|}\frac{1}{h} \sim \frac{x}{|x|}\right] = \pm 1$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen} hy}{|h|+|y|}\frac{1}{h} \sim \frac{y}{|y|}\right] = \pm 1$,

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} 0\cdot(y+h)}{|h+y|}\frac{1}{h} = 0$, por lo que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ existe y es continua en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, pero no es continua en $(0,0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ existe y es continua en $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, pero no es continua en $(0,0)$.

Finalmente, f es de clase C^1 en $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.

f) La función f tiene problemas en el círculo $x^2+y^2 = 1$. Sin embargo si $x^2+y^2 \longrightarrow 1^- \Longrightarrow x^2+y^2-1 < 0$, por lo que $\frac{1}{x^2+y^2-1} \longrightarrow -\infty$ y $e^{\frac{1}{x^2+y^2-1}} \longrightarrow 0$. Así, f tiene un límite

en el círculo $x^2+y^2=1$ y es continua en el círculo.
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-e^{\frac{1}{x^2+y^2-1}}\dfrac{2x}{(x^2+y^2-1)^2}\longrightarrow 0$, si $x^2+y^2\longrightarrow 1^-$ y es continua en $\mathbb{R}^2$. Sucede lo mismo con $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ por simetría de los ejes, con lo cual se tiene que f es de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$. De manera general se puede verificar que f es de clase C^∞ en $\mathbb{R}^2$.

g) $|f(x,y)|\leq |y|^2\longrightarrow 0$, si $(x,y)\to(0,0)$ y f es continua en $\mathbb{R}^2$.
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y\cos\frac{x}{y}$ y $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right|\leq |y|\longrightarrow 0$, si $(x,y)\to(0,0)$ i.e. $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ es continua en $\mathbb{R}^2$.
$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y\operatorname{sen}\frac{x}{y}-x\cos\frac{x}{y}$ y $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|\leq 2|y|+|x|\leq 2(|x|+|y|)\longrightarrow 0$, si $(x,y)\to(0,0)$ i.e. $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ es continua en $(0,0)$.
Sin embargo, a pesar que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,y)=0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0)=0$, se tiene que:
$\lim\limits_{y\to 0}\left[\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y\operatorname{sen}\frac{x}{y}-x\cos\frac{x}{y}\right]$ no existe si $x\neq 0$, por lo que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existe y es continua en $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}\cup\{(0,0)\}$. Así f es de clase C^1 en $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}\cup\{(0,0)\}$.

h) $f(x,y)=e^{x\ln(x^2+y^2)}\sim 1+x\ln(x^2+y^2)\longrightarrow 1$, si $(x,y)\longrightarrow(0,0)$ y f es continua en $\mathbb{R}^2$.
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\dfrac{h^{2h}-1}{h}=\dfrac{e^{2h\ln h}-1}{h}=2\ln h+2h\ln h+o(h\ln h)\right]=-\infty$, es decir $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ no existe, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\dfrac{h^0-1}{h}=0\right]=0$.
Además,
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=(x^2+y^2)^x\left(\dfrac{2x^2}{x^2+y^2}+\ln(x^2+y^2)\right)$, el límite es $-\infty$, si $(x,y)\longrightarrow(0,0)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ es continua en $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.
$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=(x^2+y^2)^x\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ que no es continua en $(0,0)$, pues si $x=y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,x)=(2x^2)^x\longrightarrow 1\neq\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. Así se tiene que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ es continua en $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.
Finalmente f es de clase C^1 en $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

i) Claramente f es continua en $\mathbb{R}^2$, pues $|f(x,y)|\leq|xy|\leq\|(x,y)\|\longrightarrow 0$, si $(x,y)\to(0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,0)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,y)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y)=\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f(h,y)-f(0,y)}{h}=\dfrac{\operatorname{sen}|hy|}{h}\right]=\pm|y|$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0)=\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f(x,h)-f(x,0)}{h}=\dfrac{\operatorname{sen}|xh|}{h}\right]=\pm|x|$, lo que nos indica que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ existe y es continua en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*\cup\{(0,0)\}$, al igual que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, la cual existe y es continua en $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}\cup\{(0,0)\}$. Así, f es de clase C^1 en $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*\cup\{(0,0)\}$.

j) La función f es continua en $\mathbb{R}^2$. Sea $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x^2+y^2=1\}$, entonces $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ está

definida en $(\mathbb{R}^2 \backslash C) \cup \{(0,1),(0,-1)\}$ y es continua solamente en $\mathbb{R}^2 \backslash C$, pues si $(x_0,y_0) \in C$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h} = \dfrac{2x_0h+h^2}{h} = -2x_0+h \longrightarrow -2x_0$, si $h<0$ y $\dfrac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h} = 0$, si $h>0$ y los límites son distintos salvo en $(0,1)$ y $(0,-1)$.
Sucede exactamente lo mismo para $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, por la simetría de los ejes, es decir $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ está definida en $(\mathbb{R}^2 \backslash C) \cup \{(1,0),(-1,0)\}$ y f es de clase C^1 en $\mathbb{R}^2 \backslash C$.

k) f es continua en $\mathbb{R}^2$. Sea $E = \{(x,|x|)/x \in \mathbb{R}\}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2x & \text{si } |x| > y \\ 2y & \text{si } |x| < y. \end{cases}$

Analicemos lo que sucede cuando $|x| = y$.
Caso (x,x): $x>0$, si $h>0$, $\dfrac{f(x+h,x)-f(x,x)}{h} = \dfrac{(x+h)^2-x^2}{h} = 2x+h \longrightarrow 2x$ y si $h<0$, $\dfrac{f(x+h,x)-f(x,x)}{h} = \dfrac{x^2-x^2}{h} = 0$. Así, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ no está definida en $(x,x)\in\mathbb{R}^2$, $x>0$.
Caso $(-x,x)$: De manera similar si $x<0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ no está definida en $(-x,x)\in\mathbb{R}^2$.
Por razones de simetría sucede lo mismo para $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ y tenemos que f es de clase C^1 en $\mathbb{R}^2 \backslash E$.

16. Se considera la función $(x,y) \longmapsto f(x,y)$ definida por $f(x,y) = xy \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}\dfrac{x+y}{x-y}\right)$ si $x \neq y$, $f(x,y)=0$, si $x=y$. Calcular $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Solución Tenemos que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0\cdot h \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - 0}{h} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{0\cdot k \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) - 0}{h} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,y)-f(0,y)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{hy \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\frac{h+y}{h-y}\right)}{h} = -y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(x,k)-f(x,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{xk \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\frac{x+k}{x-k}\right)}{k} = x,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,k) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{-k-0}{k} = -1,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h-0}{h} = 1.$$

Así tenemos que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$, ya que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ no es continua en $(0,0)$.

2.2 Diferenciabilidad

17. Linealizar la función $f(x,y,z) = (\sqrt{x}yz, x^2 - 2yz)$ en un vecindario de $\mathrm{x}_0 = (1,2,1)$.

Solución Se linealizan cada una de las componentes de f escribiendo:

$$f(x,y,z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z)),$$

con $f_1(x,y,z) = \sqrt{x}yz$, $f_2(x,y,z) = x^2 - 2yz$, es decir:

$f_j(x,y,z) \approx f_j(1,2,1) + \dfrac{\partial f_j}{\partial x}(1,2,1)(x-1) + \dfrac{\partial f_j}{\partial y}(1,2,1)(y-z) + \dfrac{\partial f_j}{\partial z}(1,2,1)(z-1),\ j = 1,2,$

por lo que:

$f_1(x,y,z) \approx 2 + (x-1) + (y-2) + 2(z-1)$

$f_2(x,y,z) \approx -3 + 2(x-1) - 2(y-2) - 4(z-1).$

Usando notación matricial, tenemos que la linearización de f es:

$$f(x,y,z) \approx \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-1 \end{pmatrix}.$$

Observemos que $J_f(1,2,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$.

18. Sea $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (x + 2y + z^2, xy)$, $g\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $g(u,v) = (u^2 + 3, uv)$, sea $h = g \circ f$ y sea $\mathbf{a} = (1,0,1)$. Calcular $J_f(\mathbf{a})$, $J_g(f(\mathbf{a}))$ y $J_h(\mathbf{a})$. Comprobar que $J_h(\mathbf{a}) = J_g(f(\mathbf{a})) \circ J_f(\mathbf{a})$.

Solución $f(x,y,z) = (x + 2y + z^2, xy)$ i.e. $f_1(x,y,z) = x + 2y + z^2$, $f_2(x,y,z) = xy$, $g(u,v) = (u^2+3, uv)$ i.e. $g_1(u,v) = u^2+3$, $g_2(u,v) = uv$, entonces $h(x,y,z) = g \circ f(x,y,z) = g(f(x,y,z)) = g(x + 2y + z^2, xy) = ((x + 2y + z^2)^2 + 3, xy(x + 2y + z^2))$.

De esta manera tenemos que $J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2z \\ y & x & 0 \end{pmatrix}$, $J_f(1,0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

$J_g(u,v) = \begin{pmatrix} 2u & 0 \\ v & u \end{pmatrix}$, $J_g(f(1,0,1)) = J_g(2,0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$;

$$J_h(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2(x+2y+z^2) & 4(x+2y+z^2) & 4z(x+2y+z^2) \\ 2xy+2y^2+2yz^2 & x^2+4xy+xz^2 & 2xyz \end{pmatrix},$$

$$J_h(1,0,1) = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Además, $J_g(f(1,0,1))J_f(1,0,1) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$

19. Sean $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $g\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x,y) = f(y,x)$, $\ell\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\ell(x) = f(x,x)$. Calcular las derivadas parciales primeras de g y ℓ en función de las de f, suponiendo que f es de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$.

    Solución $\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(x+h,y)-g(x,y)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(y,x+h)-f(y,x)}{h} = \dfrac{\partial f}{\partial y}(y,x)$, $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(y,x)$,
    $\dfrac{f(x+h,x+h)-f(x,x)}{h} = \dfrac{1}{h} df(x,x)(h,h) + \dfrac{|h|\sqrt{2}}{h} o(1) = \dfrac{1}{h}\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,x)h + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,x)h\right] + o(1) \Longrightarrow \ell'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h,x+h)-f(x,x)}{h} = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,x) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,x)$.

20. A partir de la definición, calcular el diferencial de las funciones siguientes en el punto indicado.

    a) Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, si $f(x,y) = xy$, Calcular $Df(1,1)$, $Df(x,y)$.

    b) Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, si $f(x,y) = \frac{1}{x} + y$, Calcular $Df(1,0)$, $Df(2,1)$, $Df(x,y)$.

    Solución

    a) $f(1+h,1+k) - f(1,1) = (1+h)(1+k) - 1 = 1+h+k+hk-1 = h+k+hk$, entonces tomamos $\ell(h,k) = h+k$ y $\|(h,k)\|\epsilon(h,k) = hk$.

    Es claro que ℓ es lineal i.e. $\ell = (1,1) = df(1,1)$. Falta verificar que $\epsilon(h,h) = \dfrac{hk}{\|(h,k)\|} \longrightarrow 0$, cuando $(h,k) \to (0,0)$.

    En efecto $|\epsilon(h,k)| \leq \dfrac{\|(h,k)\|^2}{\|(h,k)\|} = \|(h,k)\| \longrightarrow 0$, cuando $(h,k) \to (0,0)$.

    En general $f(x+h,y+k) - f(x,y) = (x+h)(y+k) - xy = xk + yh + hk$, por lo que $df(x,y) = (y,x)$ y $\epsilon(h,k) = \dfrac{hk}{\|(h,k)\|} \longrightarrow 0$, si $(h,k) \to (0,0)$.

    Observemos que $df(x,y) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$.

b) $f(1+h,k)-f(1,0)=\dfrac{1}{1+h}+k-1=\dfrac{1-h^2+h^2}{1+h}+k-1=$
$\dfrac{(1-h)(1+h)}{1+h}+\dfrac{h^2}{1+h}+k-1=-h+k+\dfrac{h^2}{1+h}$, entonces definimos $\ell(h,k)=-h+k$ y probemos que $\epsilon(h,k)=\dfrac{1}{\|(h,k)\|}\cdot\dfrac{h^2}{1+h}\longrightarrow 0$, cuando $(h,k)\to(0,0)$.

En efecto, $|\epsilon(h,k)|\le\dfrac{\|(h,k)\|^2}{\|(h,k)\|\ |1+h|}=\dfrac{\|(h,k)\|}{1+h}\longrightarrow 0$, cuando $(h,k)\to(0,0)$.

$f(2+h,1+k)-f(2,1)=\dfrac{1}{2+h}+1+k-\frac{1}{2}-1=\frac{1}{2}-\dfrac{h}{4}-\dfrac{h}{2+h}+1+k-\dfrac{3}{2}=-\dfrac{h}{4}+k+\dfrac{h^2}{4(2+h)}$.
Tomemos $\ell(h,k)=-\dfrac{h}{4}+k$, entonces $|\epsilon(h,k)|=\left|\dfrac{h^2}{4(2+h)}\right|\dfrac{1}{\|(h,k)\|}\le\dfrac{\|(h,k)\|^2}{4|2+h|\ \|(h,k)\|}=$
$\dfrac{\|(h,k)\|}{4|2+h|}\longrightarrow 0$, si $(h,k)\to(0,0)$; es decir $f(x,y)$ es diferenciable en $(2,1)$ y $df(2,1)=$
$\left(-\frac{1}{4},1\right)$.

Más generalmente, $f(x+h,y+k)=\dfrac{1}{x+h}+y+k-\dfrac{1}{x}-y=$
$\dfrac{1}{x}-\dfrac{h}{x^2}+\dfrac{h^2}{x^2(x+h)}+y+k-\dfrac{1}{x}-y=-\dfrac{h}{x^2}+k+\dfrac{h^2}{x^2(x+h)}$.
Se considera $\ell(h,k)=-\dfrac{h}{x^2}+k$ y verifiquemos que $\epsilon(h,k)=\dfrac{h^2}{x^2(x+h)}\dfrac{1}{\|(h,k)\|}\longrightarrow 0$, cuando $(h,k)\to(0,0)$.

En efecto, $|\epsilon(h,k)|\le\dfrac{\|(h,k)\|^2}{x^2|x+h|\ \|(h,k)\|}=\dfrac{\|(h,k)\|}{x^2(x+h)}\longrightarrow 0$, si $(h,k)\to(0,0)$.

21. a) Si $\begin{array}{l} f\colon\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2,\\ (u,v)\longmapsto(u^2,v)\end{array}$ calcular $Df(1,1)$, $Df(u,v)$ y escribir el resultado en forma de matriz.

b) Si $\begin{array}{l} f\colon\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3,\\ (u,v)\longmapsto(uv,u^2,v)\end{array}$ calcular $Df(2,1)$, $Df(u,v)$ y escribir el resultado en forma de matriz.

Solución

a) La función $f(u,v)=(u^2,v)$ es de clase C^∞, por lo que f es diferenciable.

$f(1+h,1+h)=\begin{pmatrix}1+2h+h^2\\ 1+k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}h^2\\0\end{pmatrix}$, donde $Df(1,1)=$
$\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$ y $\epsilon(h,k)=\dfrac{1}{\|(h,k)\|}\begin{pmatrix}h^2\\0\end{pmatrix}$ es tal que:

$\|\epsilon(h,k)\|=\dfrac{1}{\|(h,k)\|}\|(h^2,0)\|\le\dfrac{\|(h,k)\|^2}{\|(h,k)\|}=\|(h,k)\|\longrightarrow 0$, si $(h,k)\to(0,0)$.

En general tenemos:

$f(u+h,v+k) = \begin{pmatrix} u^2+2uh+h^2 \\ v+k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^2 \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h^2 \\ 0 \end{pmatrix}$, es decir $Df(u,v) = \begin{pmatrix} 2u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\epsilon(h,k) = \dfrac{1}{\|(k,h)\|} \begin{pmatrix} h^2 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, cuando $(h,k) \to (0,0)$.

b) $f(2+h,1+k) = \begin{pmatrix} 2+h+2k+hk \\ 4+4h+h^2 \\ 1+k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} hk \\ h^2 \\ 0 \end{pmatrix}$,

entonces $Df(2,1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\epsilon(h,k) = \dfrac{1}{\|(h,k)\|} \begin{pmatrix} hk \\ h^2 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, cuando el vector $(h,k) \to (0,0)$, pues:

$$\|\epsilon(h,k)\| = \frac{1}{\|(h,k)\|}\sqrt{h^2k^2+h^4} = \frac{1}{\|(h,k)\|}|h|\sqrt{k^2+h^2} = |h| \leq \|(h,k)\| \longrightarrow 0,$$

cuando $(h,k) \to (0,0)$. De manera general:

$f(u+h,v+k) = \begin{pmatrix} uv+vh+uk+hk \\ u^2+2uh+h^2 \\ v+k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} uv \\ u^2 \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v & u \\ 2u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} hk \\ h^2 \\ 0 \end{pmatrix}$, es decir

$Df(u,v) = \begin{pmatrix} v & u \\ 2u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\epsilon(h,k) = \dfrac{1}{\|(h,k)\|} \begin{pmatrix} hk \\ h^2 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ si $(h,k) \to (0,0)$.

22. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, demostrar que si f es diferenciable en (a_1,a_2), entonces $f^2(x,y) = [\,f(x,y)\,]^2$ es también diferenciable en (a_1,a_2) y calcular su diferencial.

Solución En efecto, $f^2(x+h,y+k) - f^2(x,y) = (f(x+h,y+k) - f(x,y))(f(x+h,y+k) + f(x,y))$, pero f es diferenciable, entonces: $f(x+h,y+k) - f(x,y) = df(x,y)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \|(h,k)\|\epsilon(h,k)$, con $\epsilon(h,k) \longrightarrow 0$ si $(h,k) \to (0,0)$. Así:

$f^2(x+h,y+k) = f^2(x,y) + df(x,y)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}(f(x+h,y+k) + f(x,y)) + (f(x+h,y+k) + f(x,y))\|(h,k)\|\epsilon(h,k) = 2f(x,y)df(x,y)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + df(x,y)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}(f(x+h,y+k) + f(x,y) - 2f(x,y)) + (f(x+h,y+k) + f(x,y))\|(h,k)\|\epsilon(h,k)$.

Así tenemos que $df^2(x,y) = 2f(x,y)df(x,y)$ y $\epsilon_1(h,k) = df(x,y)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}(f(x+h,y+k) - f(x,y)) + (f(x+h,y+k) + f(x,y))\|(h,k)\|\epsilon(h,k)$ es tal que $|\epsilon_1(h,k)| \leq$

$$\frac{M\|(h,k)\||f(x+h,y+k)-f(x,y)|+|f(x+h,y+k)+f(x,y)|\|(h,k)\|\,|\epsilon(h,k)|}{\|(h,k)\|} =$$

$M|f(x+h,y+k)-f(x,y)|+|f(x+h,y+k)+f(x,y)|\,|\epsilon(h,k)| \longrightarrow 0$, si $(h,k)\to(0,0)$.

Se usó el hecho que existe $M>0$ tal que $\|df(x,y)\|\le M$.

23. a) Calcular el diferencial de f en $(0,0)$, si $f(x,y)=|xy|$.

b) Sea $g(x,y)=\sqrt{|xy|}$, ¿existen $\dfrac{\partial g}{\partial x}$, $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ en $(0,0)$?

c) ¿Existe $dg(0,0)$?

d) Estudiar el diferencial de g en $\mathbb{R}\times\{0\}$ y en $\{0\}$.

Solución

a) Tenemos que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{h-h}{h}=0=\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, entonces podemos escribir $f(h,k)-f(0,0)=(0,0)\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}+\|(h,k)\|\dfrac{|hk|}{\|(h,k)\|}$, donde $\dfrac{|hk|}{\|(h,k)\|}\le\dfrac{\|(h,k)\|^2}{\|h,k\|}=\|(h,k)\|\longrightarrow(0,0)$, si $(h,k)\to(0,0)$, es decir hemos probado que f es diferenciable en $(0,0)$ y que $df(0,0)=(0,0)$.

b) $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{g(h,0)-g(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\sqrt{|h\cdot0|}-0}{h}=0=\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0)$.

c) No es diferenciable, pues de ser así $g(h,k)-g(0,0)=(0,0)\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}+\|(h,k)\|\varepsilon(h,k)$, donde $\varepsilon(h,k)\longrightarrow0$, cuando $(h,k)\to(0,0)$, pues se tendría que:

$\sqrt{|hk|}=\|(h,k)\|\varepsilon(h,k)\implies\varepsilon(h,k)=\dfrac{\sqrt{hk}}{\sqrt{h^2+k^2}}\longrightarrow0$, cuando $(h,k)\to(0,0)$, pero $\varepsilon(h,h)=\dfrac{|h|}{\sqrt2|h|}=\dfrac{1}{\sqrt2}\not\longrightarrow0$, cuando $(h,k)\to(0,0)$, lo que es una contradicción. Luego lo que se supuso es falso y g no es diferenciable en $(0,0)$.

d) Es claro que $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,0)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{g(x+h,0)-g(x,0)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{0-0}{h}=0$,

$\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,0)=\lim\limits_{k\to0}\dfrac{g(x,k)-g(x,0)}{k}=\lim\limits_{k\to0}\dfrac{\sqrt{|xk|}}{k}=\lim\limits_{k\to0^\pm}\dfrac{\sqrt{|x|}}{\pm\sqrt{|k|}}\longrightarrow\pm\infty$, es decir g no es diferenciable en $\mathbb{R}\times\{0\}$.

De manera similar se verifica que g no es diferenciable en $\{0\}\times\mathbb{R}$. Ver ejercicio 34, página 40.

24. Sea $f\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ diferenciable en a_1, $g\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ diferenciable en a_2, demostrar que la

aplicación $\begin{array}{rl} H\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto f(x)g(y) \end{array}$ es diferenciable en (a_1, a_2).

Solución En este caso $H(a_1+h, a_2+k) - H(a_1,a_2) = f(a_1+h)g(a_2+k) - f(a_1)g(a_2) =$

$(f(a_1) + hf'(a_1) + |h|\epsilon_1(h))(g(a_2) + kg'(a_2) + |k|\epsilon_2(k)) - f(a_1)g(a_2) =$

$f'(a_1)g(a_2)h + f(a_1)g'(a_2)k + |h|\epsilon_1(h)(g(a_2) + kg'(a_2) + |k|\epsilon_2(k)) + |k|\epsilon_2(k)(f(a_1) + hf'(a_1) +$

$|h|\epsilon_1(h))$, entonces $dH(a_1,a_2)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = f'(a_1)g(a_2)h + f(a_1)g'(a_2)k$ y $\epsilon(h,h)$ es tal que

$|\epsilon(h,k)| \le \dfrac{1}{\|(h,k)\|}(\|(h,k)\||\epsilon_1(h)||g(a_2) + kg'(a_2)| + |k|\epsilon_2(k)| + \|(h,k)\||\epsilon_2(k)||f(a_1) + hf'(a_1) +$

$|h|\epsilon_1(h)|) = |\epsilon_1(h)||g(a_2) + kg'(a_2) + |k|\epsilon_2(k)| + |\epsilon_2(k)||f(a_1) + hf'(a_1) +$

$|h|\epsilon_1(h)| \longrightarrow 0$, si $(h,k) \to (0,0)$.

25. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \ne (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Demostrar que f no es diferenciable en $(0,0)$.

Solución Si f es diferenciable en $(0,0)$ debemos tener que $df(0,0) = \Big(\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0), \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)\Big) =$ $(0,0)$ y que:

$$f(h,k) = f(0,0) + df(0,0)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \|(h,k)\|\epsilon(h,k) \Longrightarrow$$
$$\frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}} = \sqrt{h^2+k^2}\,\epsilon(h,k) \Longrightarrow \epsilon(h,k) = \frac{hk}{h^2+k^2},$$

pero $\epsilon(h,k) \not\longrightarrow 0$, cuando $(h,k) \to (0,0)$. En efecto, $\epsilon(h,k) = \frac{1}{2} \not\longrightarrow 0$, si $h \to 0$.

Así hemos probado que f es no diferenciable en $(0,0)$.

26. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\operatorname{sen}\dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \ne (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Demostrar que f es diferenciable en $(0,0)$ y calcular $df(0,0)$.

Solución Observemos que $f(h,k) = f(0,0) + 0{\cdot}h + 0{\cdot}k + \|(h,k)\|^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{h^2+k^2}$, pero $\epsilon(h,k) = \dfrac{1}{\|(h,k)\|}\|(h,k)\|^2 \operatorname{sen}\dfrac{1}{h^2+k^2} = \|(h,k)\| \operatorname{sen}\dfrac{1}{h^2+k^2} \Longrightarrow |\epsilon(h,k)| \le \|(h,k)\| \longrightarrow 0$, si $(h,k) \to (0,0)$, es decir hemos probado que f es diferenciable y que $df(0,0) = (0,0)$.

Ver ejercicio 15, página 27.

27. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } x = y = 0. \end{cases}$

Demostrar que f no es diferenciable en $(0,0)$.

Solución f es no diferenciable en $(0,0)$, pues si lo fuera, debemos que:

$$f(h,k) = f(0,0) + \ell(h,k) + \|(h,k)\|\epsilon(h,k),$$

con $\epsilon(h,k) \longrightarrow 0$, si $(h,k) \to (0,0)$, donde $\ell = df(0,0) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0), \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = (0,0)$. Así, $\dfrac{hk^2}{h^2+k^2} = \|(h,k)\|\epsilon(h,k) \implies \epsilon(h,k) = \dfrac{hk^2}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}} \not\longrightarrow 0$, si $(h,k) \to (0,0)$, pues $\epsilon(h,h) = \dfrac{h^3}{2^{\frac{3}{2}}h^3} = \dfrac{1}{2^{\frac{3}{2}}} \longrightarrow \dfrac{1}{2^{\frac{3}{2}}}$, si $h \to 0$.

Así, la función f es no diferenciable en $(0,0)$.

28. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^4-y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } x = y = 0. \end{cases}$

Demostrar que f no es diferenciable en $(0,0)$.

Solución La función f es no diferenciable en $(0,0)$, pues si lo fuera, f sería continua en $(0,0)$ y no lo es. En efecto, si tomamos la trayectoria $(x, \sqrt{x^4-x^5})$ tenemos $f(x,\sqrt{x^4-x^5}) = \dfrac{x^3\sqrt{x^4-x^5}}{x^4-(x^4-x^5)} = \dfrac{x^5\sqrt{1-x}}{x^5} \longrightarrow 1$, cuando $x \to 0$.

29. Sea N una norma en $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$; demostrar que N no es diferenciable en $\mathbf{0}$.

Solución Demostremos la propiedad por contradicción. Supongamos que existe una aplicación $\mathsf{L}\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ lineal y $\epsilon\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, tales que $\forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$, $N(\mathbf{h}) = \mathsf{L}(h) + \|\mathbf{h}\|\epsilon(\mathbf{h})$, con $\epsilon(\mathbf{h}) \longrightarrow \mathbf{0}$, si $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$. Sea $\mathbf{u} = \dfrac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|}$, $\dfrac{N(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = \mathsf{L}(\mathbf{u}) + \epsilon(\mathbf{h})$ y $\dfrac{N(-\mathbf{h})}{\|-\mathbf{h}\|} = \dfrac{N(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = -\mathsf{L}(\mathbf{u}) + \epsilon(\mathbf{h})$, o sea $\mathsf{L}(\mathbf{u}) = 0$ y se tiene $\epsilon(\mathbf{h}) = \dfrac{N(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} \longrightarrow \mathbf{0}$ que es una contradicción, pues si se escoge $\|\mathbf{h}\| = N(\mathbf{h})$ tenemos $\dfrac{\|\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{h}\|} = 1 \longrightarrow 0$, cuando $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$.

30. Demostrar que el diferencial es independiente de la norma equivalente que se utilice.

Solución Sea $f\colon E \longrightarrow F$ diferenciable y supongamos que hay dos diferenciales ℓ_a y ℓ_b de acuerdo a las normas $\|\ \ \|_a$ y $\|\ \ \|_b$, entonces $f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) - f(x_0) = \ell_a(\mathbf{h}) + \|\mathbf{h}\|_a\epsilon_a(\mathbf{h}) = \ell_b(\mathbf{h}) + \|\mathbf{h}\|_b\epsilon_b(\mathbf{h})$, $\forall \mathbf{h} \in E$.

Sea e_i un elemento de una base de E, entonces si $h = \lambda e_i$ tenemos $\lambda(\ell_a(e_i) - \ell_b(e_i)) =$

$|\lambda|(\|e_i\|_b\epsilon_b(\lambda e_i) - \|e_i\|_a\epsilon_a(\lambda e_i)) \Longrightarrow \ell_a(e_i) - \ell_b(e_i) = \pm(\|e_i\|_b\epsilon_b(\lambda e_i) - \|e_i\|_a\epsilon_a(\lambda e_i)) \longrightarrow 0$, si $\lambda \to 0$, por lo que $\ell_a = \ell_b$ sobre todos los elementos de la base de E, es decir $\ell_a = \ell_b$ y es independiente de la norma utilizada.

31. Sean $f_1, \dots, f_n$ funciones de una variable real, diferenciables en $[\,a, b\,]$. Se define sobre $[\,a, b\,]^n \subset \mathbb{R}^n$, la función $f\colon [\,a, b\,]^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{x} \longmapsto f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)$. Demostrar que es diferenciable en el cubo $[\,a, b\,]^n$.

Solución Dado que f_i es diferenciable, $f_i(x_i + h_i) = f_i(x_i) + \ell_i(h_i) + |h_i|\epsilon_i(h_i)$, con $x_i \in [\,a, b\,]$, donde ℓ_i es lineal y $\epsilon_i(h_i) \longrightarrow 0$, cuando $h_i \to 0$, $i = 1, \dots, n$, entonces: $\sum_{i=1}^{n} f(x_i + h_i) = f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + (\ell_1, \dots, \ell_n)(\mathbf{h}) + \|\mathbf{h}\|_1\epsilon(\mathbf{h})$, donde $(\ell_1, \dots, \ell_n)(\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^{n} \ell_i(h_i)$, $\epsilon(\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i(h_i)$, por lo tanto $\epsilon(\mathbf{h}) \longrightarrow \mathbf{0}$, si $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ y $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_n)$ es lineal i.e. $df(\mathbf{x}) = \ell$.

32. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

a) Demuestre que f es diferenciable, salvo tal vez en $(0, 0)$.

b) ¿Qué sucede en $(0, 0)$? En caso de existir el diferencial, determinarlo.

Solución

a) Como f es de clase C^∞ para $(x, y) \neq (0, 0)$, entonces f es diferenciable en $(x, y) \neq (0, 0)$.

b) $f(h, k) - f(0, 0) = hk\dfrac{h^2 - k^2}{h^2 + k^2} = (0, 0)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \|(h, k)\|\dfrac{hk(h^2 + k^2)}{\|(h, k)\|^{\frac{3}{2}}}$ y como

$$|\varepsilon(h, k)| = \frac{|hk(h^2 - k^2)|}{\|(h, k)\|^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{\|(h, k)\|^2 2\|(h, k)\|}{\|(h, k)\|^{\frac{3}{2}}} = 2\|(h, k)\|^{\frac{3}{2}} \longrightarrow 0, \text{ si } (h, k) \to (0, 0),$$

entonces f es diferenciable en $(0, 0)$ y $df(0, 0) = (0, 0)$. Ver ejercicio 9, página 25.

33. Sean $f_1, \dots, f_n$ aplicaciones definidas sobre $E \subset \mathbb{R}^n$ abierto, con valores en $\mathbb{R}$ y se supone $\lim\limits_{\mathbf{h} \to \mathbf{0}} \dfrac{f_i(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f_i(\mathbf{x})}{h_i} = A_i$. Demostrar que $f = \sum_{i=1}^{n} f_i$ es diferenciable sobre E.

Solución Sea $\eta > 0$, entonces $\exists\, \delta_i > 0$ tal que $\|\mathbf{h}\|_1 < \delta_i \Longrightarrow |f_i(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f_i(\mathbf{x}) - A_i h_i| \leq \eta|h_i|$, por lo tanto si $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$, se tiene:

$|\sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{h}) - (A_1, ..., A_n)\cdot\mathbf{h}| < \eta(|h_i| + \cdots + |h_n|) = \eta\|\mathbf{h}\|_1$. Así, la función $\epsilon(\mathbf{h})$ definida por $\epsilon(\mathbf{h}) = \dfrac{f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - A(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|_1}$ es tal que $\epsilon(\mathbf{h}) \longrightarrow 0$, cuando $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ y $A = (A_1, \ldots, A_n) = \ell$ es el diferencial de f.

34. Sea $\alpha > 0$, demostrar que la función $(x, y) \longmapsto |xy|^\alpha$ es diferenciable en $(0,0)$ sii $\alpha > \frac{1}{2}$.

Solución Dado que $|f(x,y) - f(0,0)| = |xy|^\alpha \leq \|(x,y)\|_\infty^{2\alpha} \leq \|(x,y)\|_\infty$, si $2\alpha > 1$, para $\|(x,y)\| < \delta < 1$, entonces $f(x,y) = f(0,0) + \mathbf{0}\cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \|(x,y)\|_\infty \epsilon(x,y)$, con $\epsilon(x,y) = \|(x,y)\|_\infty^{2\alpha-1} \longrightarrow 0$, si $(x,y) \to (0,0)$. Así f es diferenciable, si $\alpha > \frac{1}{2}$.

Para $\alpha = \frac{1}{2}$, $\dfrac{|xy|^{\frac{1}{2}}}{\|(x,y)\|_2} \not\longrightarrow 0$, si $(x,y) \to (0,0)$, pues si $x = y$, $\dfrac{|x|}{\sqrt{2x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{|x|}{|x|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \not\longrightarrow 0$.

En resumen, f es diferenciable $\Longleftrightarrow \alpha > \frac{1}{2}$.

35. Sea $f\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \longmapsto \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ y sea $g\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, tal que $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \longmapsto \mathbf{x} \times \mathbf{y}$, demostrar que f y g son diferenciables y calcular su diferencial ($\times$ denota el producto vectorial).

Solución Sabemos que $f(\mathbf{x}+\mathbf{h}, \mathbf{y}+\mathbf{k}) - f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}+\mathbf{h})\cdot(\mathbf{y}+\mathbf{k}) - \mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \mathbf{y}\cdot\mathbf{h} + \mathbf{x}\cdot\mathbf{k} + \mathbf{h}\cdot\mathbf{k} = (\mathbf{y}, \mathbf{x}) \begin{pmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} + \mathbf{h}\cdot\mathbf{k}$, donde $(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ es lineal y $\mathbf{h}\cdot\mathbf{k} = \|(\mathbf{h}, \mathbf{k})\|\epsilon(\mathbf{h}, \mathbf{k})$, con $\epsilon(\mathbf{h}, \mathbf{k}) \longrightarrow 0$, cuando $(\mathbf{h}, \mathbf{k}) \to (\mathbf{0}, \mathbf{0})$, pues $\dfrac{|\mathbf{h}\cdot\mathbf{k}|}{\|(\mathbf{h}, \mathbf{k})\|_1} \leq \dfrac{(\|\mathbf{h}\|_1 + \|\mathbf{k}\|_1)^2}{\|\mathbf{h}\|_1 + \|\mathbf{k}\|_1} = \|\mathbf{h}\|_1 + \|\mathbf{k}\|_1$.

Así $df(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}$ y es tal que $df(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \begin{pmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} = \mathbf{y}\cdot\mathbf{h} + \mathbf{x}\cdot\mathbf{k}$.

Similarmente $g(\mathbf{x}+\mathbf{h}, \mathbf{y}+\mathbf{k}) - g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}+\mathbf{h}) \times (\mathbf{y}+\mathbf{k}) - \mathbf{x} \times \mathbf{y} = \mathbf{h} \times \mathbf{y} + \mathbf{x} \times \mathbf{k} + \mathbf{h} \times \mathbf{k}$, es decir $dg(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \begin{pmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} = \mathbf{h} \times \mathbf{y} + \mathbf{x} \times \mathbf{k}$ es lineal y $\mathbf{h} \times \mathbf{k} = \|(\mathbf{h}, \mathbf{k})\|_1 \epsilon(\mathbf{h}, \mathbf{k})$, con $\epsilon(\mathbf{h}, \mathbf{k}) \longrightarrow 0$, si $(\mathbf{h}, \mathbf{k}) \to (0, 0)$.

Verifiquemos que $\mathbf{h} \times \mathbf{k} = \|(\mathbf{h}, \mathbf{k})\|\epsilon(\mathbf{h}, \mathbf{k})$, En efecto $\|\mathbf{h} \times \mathbf{k}\|_1 = \|(h_2k_3 - k_2h_3, h_1k_3 - k_1h_3, h_1k_2 - k_1h_2)\|_1 = |h_2k_3 - k_2h_3| + |h_1k_3 - k_1h_3| + |h_1k_2 - k_1h_2| \leq |h_2||k_3| + |k_2||h_3| + |h_1||k_3| + |k_1||h_3| + |h_1||k_2| + |k_1||h_2| = |h_1|(|k_2| + |k_3|) + |h_2|(|k_1| + |k_3|) + |h_3|(|k_1| + |k_2|) \leq (|h_1| + |h_2| + |h_3|)(|k_1| + |k_2| + |k_3|) = \|\mathbf{h}\|_1 \|\mathbf{k}\|_1$, por lo tanto $\|\mathbf{h} \times \mathbf{k}\|_1 \leq \|\mathbf{h}\|_1 \|\mathbf{k}\|_1$, es decir $\dfrac{\|\mathbf{h} \times \mathbf{k}\|_1}{\|(\mathbf{h}, \mathbf{k})\|} \leq \dfrac{\|\mathbf{h}\|_1 \|\mathbf{k}\|_1}{\|(\mathbf{h}, \mathbf{k})\|} \leq \|(\mathbf{h}, \mathbf{k})\| \longrightarrow 0$. Así, $\epsilon(\mathbf{h}, \mathbf{k}) \longrightarrow \mathbf{0}$, si $(\mathbf{h}, \mathbf{k}) \to (\mathbf{0}, \mathbf{0})$.

El diferencial $dg(\mathbf{x},\mathbf{y})\colon \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tiene por matriz asociada a:

$$dg(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & y_3 & -y_2 & 0 & -x_3 & x_2 \\ y_3 & 0 & -y_1 & -x_3 & 0 & x_1 \\ y_2 & -y_1 & 0 & -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

36. Sea $f\in \mathrm{L}(\mathbb{R}^3)$ y $F\colon\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ tal que $\mathbf{x}\longmapsto \mathbf{x}\times f(\mathbf{x})$, demostrar que F es diferenciable y calcular el diferencial.

Solución $F(\mathbf{x}+\mathbf{h})-F(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}+\mathbf{h})\times f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \mathbf{x}\times f(\mathbf{x}) = \cancel{\mathbf{x}\times f(\mathbf{x})} + \mathbf{x}\times f(\mathbf{h}) + \mathbf{h}\times f(\mathbf{x}) + \mathbf{h}\times f(\mathbf{h}) - \cancel{\mathbf{x}\times f(\mathbf{x})}$. Así tenemos que $dF(\mathbf{x})(\mathbf{h}) = \mathbf{x}\times f(\mathbf{h}) + \mathbf{h}\times f(\mathbf{x})$ es lineal y $\mathbf{h}\times f(\mathbf{h}) = \|\mathbf{h}\|\epsilon(\mathbf{h})$, con $\epsilon(\mathbf{h})\longrightarrow 0$, si $\mathbf{h}\to 0$.

En efecto, $dF(\mathbf{x})(\mathbf{h}+\mathbf{k}\lambda) = dF(\mathbf{x})(\mathbf{h})+\lambda dF(\mathbf{x})(\mathbf{k})$. Además $\|\mathbf{h}\times f(\mathbf{h})\| \le \|\mathbf{h}\|\,\|f(\mathbf{h})\|$, donde $f(\mathbf{h})\longrightarrow \mathbf{0}$, cuando $\mathbf{h}\to\mathbf{0}$, pues f es lineal i.e. $\mathbf{h}\times f(\mathbf{h}) = \|\mathbf{h}\|\epsilon(\mathbf{h})$, donde $\epsilon(\mathbf{h})\longrightarrow 0$, si $\mathbf{h}\to 0$. Note que $dF(\mathbf{x})(\cdot) = \mathbf{x}\times f(\cdot) - f(\mathbf{x})\times\cdot$.

37. Sea $n\in\mathbb{N}^*$, $f\colon\mathbb{R}^n\backslash\{\mathbf{0}\}\longrightarrow\mathbb{R}^n$ definida por $f(\mathbf{x}) = \dfrac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2}$, donde $\|\mathbf{x}\|$ es la norma euclídea clásica. Demostrar que f es diferenciable y calcular su diferencial.

Solución $f(\mathbf{x}+\mathbf{h})-f(\mathbf{x}) = \dfrac{\mathbf{x}+\mathbf{h}}{\|\mathbf{x}+\mathbf{h}\|^2} - \dfrac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2} = \dfrac{\|\mathbf{x}\|^2(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \mathbf{x}\|\mathbf{x}+\mathbf{h}\|^2}{\|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{x}+\mathbf{h}\|^2} =$

$$\frac{\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle\,\mathbf{x} + \langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle\,\mathbf{h} - \mathbf{x}\,\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle - 2\mathbf{x}\,\langle\mathbf{x},\mathbf{h}\rangle - \mathbf{x}\,\langle\mathbf{h},\mathbf{h}\rangle}{\|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{x}+\mathbf{h}\|^2} = \frac{\|\mathbf{x}\|^2\mathbf{h} - 2\mathbf{x}\,\langle\mathbf{x},\mathbf{h}\rangle - \mathbf{x}\|\mathbf{h}\|^2}{\|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{x}+\mathbf{h}\|^2}.$$

Por otro lado tenemos que $f(\mathbf{x}) = \big(\frac{x_1}{\|\mathbf{x}\|^2},\dots,\frac{x_n}{\|\mathbf{x}\|^2}\big) = (f_1,\dots,f_n)(\mathbf{x})$, o sea:

$$\begin{array}{llll}
\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) = \dfrac{\|\mathbf{x}\|^2-2x_1^2}{\|\mathbf{x}\|^4} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) = \dfrac{-2x_1x_2}{\|\mathbf{x}\|^4} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) = \dfrac{-2x_1x_n}{\|\mathbf{x}\|^4} \\
\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) = \dfrac{-2x_1x_2}{\|\mathbf{x}\|^4} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) = \dfrac{\|\mathbf{x}\|^2-2x_2^2}{\|\mathbf{x}\|^4} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) = \dfrac{-2x_1x_n}{\|\mathbf{x}\|^4} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}) = \dfrac{-2x_1x_n}{\|\mathbf{x}\|^4} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2}(\mathbf{x}) = \dfrac{-2x_2x_n}{\|\mathbf{x}\|^4} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}) = \dfrac{\|\mathbf{x}\|^2-2x_n^2}{\|\mathbf{x}\|^4},
\end{array}$$

es decir $df(\mathbf{x}) = \dfrac{1}{\|\mathbf{x}\|^4}(\|\mathbf{x}\|^2 I - 2\mathbf{x}\mathbf{x}')$, por lo que:

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h})-f(\mathbf{x}) = \frac{\|\mathbf{x}\|^2\mathbf{h} - 2\mathbf{x}\,\langle\mathbf{x},\mathbf{h}\rangle}{\|\mathbf{x}\|^4} +$$

$$\left[\frac{(\|\mathbf{x}\|^4 - \|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{x}+\mathbf{h}\|^2)\mathbf{h} - 2\mathbf{x}\,\langle\mathbf{x},\mathbf{h}\rangle\,(\|\mathbf{x}\|^2 - \|\mathbf{x}+\mathbf{h}\|^2) - \mathbf{x}\|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{h}\|^2}{\|\mathbf{x}\|^4\|\mathbf{x}+\mathbf{h}\|^2} = \|\mathbf{h}\|\epsilon(\mathbf{h})\right].$$

Hay que probar que $\epsilon(\mathbf{h})\longrightarrow\mathbf{0}$, si $\mathbf{h}\to\mathbf{0}$. En efecto,

$\|\epsilon(\mathbf{h})\| \leq \dfrac{\big|\,\|\mathbf{x}\|^4 - \|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{x}+\mathbf{h}\|^2\big|\,\|\mathbf{h}\| + 2\|\mathbf{x}\|\,\big|\langle \mathbf{x},\mathbf{h}\rangle\big|\,\big|\,\|\mathbf{x}\|^2 - \|\mathbf{x}+\mathbf{h}\|^2\big| + \|\mathbf{x}\|^3\|\mathbf{h}\|^2}{\|\mathbf{x}+\mathbf{h}\|^2\|\mathbf{x}\|^4\|\mathbf{h}\|} \leq$

$\dfrac{\big|\,\|\mathbf{x}\|^4 - \|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{x}+\mathbf{h}\|^2\big| + 2\|\mathbf{x}\|^2\big|\,\|\mathbf{x}\|^2 - \|\mathbf{x}+\mathbf{h}\|^2\big| + \|\mathbf{x}\|^3\|\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{x}+\mathbf{h}\|^2\|\mathbf{x}\|^4} \longrightarrow 0$, si $\mathbf{h} \to 0$, es decir f es diferenciable y $df(\mathbf{x}) = \dfrac{1}{\|\mathbf{x}\|^4}(\|\mathbf{x}\|^2 I - 2\mathbf{x}\mathbf{x}')$, o sea $df(\mathbf{x})(\mathbf{h}) = \dfrac{1}{\|\mathbf{x}\|^4}(\|\mathbf{x}\|^2\mathbf{h} - 2\mathbf{x}\langle\mathbf{x},\mathbf{h}\rangle)$.

38. Demostrar que la aplicación $f\colon \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ definida por $f(X) = X^2$ es diferenciable y calcular su diferencial.

Solución Es importante señalar que en realidad f está definida de $\mathbb{R}^{n^2}$ en $\mathbb{R}^{n^2}$, donde $X \in \mathbb{R}^{n^2}$ se escribe $X = (x_{11}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, \ldots, x_{2n}, \ldots, x_{n1}, \ldots, x_{nn})$. Sin embargo dejaremos la notación matricial $X_{n\times n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, pues nos va a facilitar la escritura.

Sea H una matriz $n \times n$, $H \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, entonces $f(X+H) - f(X) = (X+H)^2 - X^2 = X^2 + HX + XH + H^2 - X^2 = HX + XH + H^2$. Vamos a considerar $\ell(H) = XH + HX$ y $\epsilon(H)\|H\| = H^2$, ℓ es lineal y si probamos que $\epsilon(H) \longrightarrow \mathbf{0}$, cuando $H \to \mathbf{0}$ se tendrá que f es diferenciable y $df(H) = XH + HX$. En efecto, $\|\epsilon(H)\| = \left\| \dfrac{H^2}{\|H\|} \right\| = \dfrac{1}{\|H\|}\|H^2\|$.

Recordemos que $\|H\|^2 = \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n} h_{ij}^2 = \operatorname{tr}(HH')$ y que como vectores $A{\cdot}B = \sum\limits_{i,j} a_{ij}b_{ij} = \operatorname{tr}(AB')$, por lo que $\|H^2\|^2 = \operatorname{tr}(H^2H^{2'}) = \operatorname{tr}(HHH'H') = \sum\limits_{ij} a_{ij}^2$, donde $a_{ij} = \sum\limits_{l} h_{il}h_{lj}$, por lo tanto:

$$\|H^2\|^2 = \sum_{ij}\Big(\sum_l h_{il}h_{lj}\Big)^2 \leq \sum_{ij}\Big(\sum_l h_{il}^2\Big)\Big(\sum_l h_{lj}^2\Big) = \Big(\sum_{il} h_{il}^2\Big)\Big(\sum_{jl} h_{lj}^2\Big) = \|H\|^2\,\|H\|^2 = \|H\|^4,$$

con lo que concluimos que $\|H^2\| \leq \|H\|^2$.

Finalmente $\|\epsilon(H)\| = \dfrac{\|H^2\|}{\|H\|} \leq \|H\| \longrightarrow 0$, si $H \to \mathbf{0}$.

Observación Se ha probado en realidad que $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$, $\forall A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

39. Demostrar que la aplicación $f\colon \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ definida por $f(X) = X^3$ es diferenciable y calcular su diferencial.

Solución Sea H una matriz $n \times n$, $H \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, entonces:

$f(X+H) - f(X) = (X+H)^3 - X^3 = (X^2 + HX + XH + H^2 - X^2)(X+H) - X^3 = \cancel{X^3} + HX^2 + XHX + H^2X + X^2H + HXH + XH^2 + H^3 - \cancel{X^3}$.

Vamos a considerar $\ell(H) = XHX + HX^2 + X^2H$ y $\epsilon(H)\|H\| = H^2X + XH^2 + HXH + H^3$, ℓ es lineal y si probamos que $\epsilon(H) \longrightarrow \mathbf{0}$, cuando $H \to \mathbf{0}$ se tendrá que f es diferenciable y $df(X)(H) = XHX + HX^2 + X^2H$. En efecto, $\|\epsilon(H)\| \leq \frac{1}{\|H\|}(\|H\|^2\,\|X\| + \|X\|\,\|H\|^2 + \|H\|\,\|X\|\,\|H\| + \|H\|^3) = \|H\|(3\|X\| + \|H\|) \longrightarrow \mathbf{0}$, si $H \to \mathbf{0}$.

40. Sea considera $(\mathbb{R}^n, \|\ \ \|)$ con la norma usual y sea $f\colon \mathbb{R}^n\backslash\{\mathbf{0}\} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x_1,\ldots,x_n) = \dfrac{1}{\|(x_1,\ldots,x_n)\|}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i x_{n+1-i}$.

a) Demostrar que f es extendible por continuidad en $\mathbf{0}$.

b) ¿La aplicación extendida es diferenciable en $\mathbf{0}$?

Solución

a) Dado que:

$$|f(\mathbf{x})| = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\Big|\sum_{i=1}^{n} x_i x_{n+1-i}\Big| \leq \frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\sum_{i=1}^{n}|x_i||x_{n+1-i}| \leq \frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_{n+1-i}|^2} = \|\mathbf{x}\|,$$

se tiene que $f(\mathbf{x}) \longrightarrow 0$, cuando $\mathbf{x} \to \mathbf{0}$ i.e. si $\bar{f}$ es la extensión canónica de f, se tiene que $\bar{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ y hace que $\bar{f}$ sea continua en $\mathbb{R}^n$.

b) Si $\bar{f}$ es diferenciable en $\mathbf{0}$, $f(\mathbf{0}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{0}) = \ell(\mathbf{h}) + \|\mathbf{h}\|\epsilon(\mathbf{h})$, con $\epsilon(\mathbf{h}) \longrightarrow \mathbf{0}$, si $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ y $\ell = \big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{0}),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{0})\big) = \mathbf{0}$. Así $f(\mathbf{h}) = \|\mathbf{h}\|\epsilon(\mathbf{h})$, por lo tanto $\dfrac{f(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = \epsilon(\mathbf{h}) \longrightarrow \mathbf{0}$, si $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$, pero si $\mathbf{h} = \lambda\mathbb{1}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbb{1}' = (1,\ldots,1)$, tenemos que $\dfrac{f(\lambda\mathbb{1})}{\|\lambda\mathbb{1}\|} = \dfrac{1}{\sqrt{n}|\lambda|}\dfrac{n\lambda^2}{\sqrt{n}|\lambda|} = 1 \not\longrightarrow 0$, si $\lambda \to 0$. Así, f no es diferenciable en $\mathbf{0}$.

41. Estudiar la diferenciabilidad de $f\colon \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(X) = \sqrt{\operatorname{tr}(I + X'X)}$.

Solución Dado que $f(X) = \sqrt{n + \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij}^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(X)$ son continuas en $\mathbb{R}^{n^2}$ y por lo tanto f es diferenciable en $\mathbb{R}^{n^2} \cong \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Resulta interesante determinar el diferencial, $\dfrac{\partial f}{\partial x_{11}}(X) = \dfrac{x_{11}}{\sqrt{n + \|X\|^2}},\ldots,\dfrac{\partial f}{\partial x_{nn}} = \dfrac{x_{nn}}{\sqrt{n + \|X\|^2}}$ i.e. $df(X) = \dfrac{X}{\sqrt{n + \|X\|^2}} = \dfrac{X}{\sqrt{\operatorname{tr}(I + X'X)}}$.

Observe que se deja la notación matricial para la facilidad de la manipulación de los vectores (o matrices). Usando la notación matricial tenemos:

$$df(X) = \frac{\langle X, \cdot\rangle}{\sqrt{\operatorname{tr}(I + X'X)}} = \frac{\operatorname{tr}(X'\,\cdot)}{\sqrt{\operatorname{tr}(I + X'X)}}, \text{ o bien } df(X)(H) = \frac{\operatorname{tr}(X'H)}{\sqrt{\operatorname{tr}(I + X'X)}}.$$

42. Sea $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Demostrar que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ es abierto en $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Demostrar que la aplicación $f\colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dada por $f(X) = X^{-1}$ es diferenciable y calcular su diferencial.

Solución Recordemos que GL_n es el grupo de matrices $n \times n$ invertibles i.e. si $X \in \mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$, existe $X^{-1} \in \mathsf{GL}_n(\mathbb{R})$ y f está bien definida.

a) La aplicación $\det\colon \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $X \longmapsto \det X$ es continua y $\mathsf{GL}_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ que es un abierto.

b) $f(X+H)-f(X) = (X+H)^{-1}-X^{-1} = (X+H)^{-1}(X-(X+H))X^{-1} = -(X+H)^{-1}HX^{-1} = -X^{-1}HX^{-1}+X^{-1}HX^{-1}-(X+H)^{-1}HX^{-1} = -X^{-1}HX^{-1}-[(X+H)^{-1}-X^{-1}]\,HX^{-1} = -X^{-1}HX^{-1}+[\,X^{-1}-(X+H)^{-1}\,]\,HX^{-1} = -X^{-1}HX^{-1}+X^{-1}((X+H)-X)(X+H)^{-1})HX^{-1} = -X^{-1}HX^{-1} + X^{-1}H(X+H)^{-1}HX^{-1}$.

Es importante destacar que si $X \in \mathsf{GL}_n$, $\exists\, H$, con $\|H\|$ suficientemente pequeña tal que $X + H \in \mathsf{GL}_n$, por ser abierto i.e. $X + H$ es invertible.

Sea $\ell(H) = -X^{-1}HX^{-1}$, es lineal y si probamos que $\dfrac{1}{\|H\|}X^{-1}H(X+H)^{-1}HX^{-1} \longrightarrow \mathbf{0}$, cuando $H \to \mathbf{0}$, se verifica que f es diferenciable y que ℓ es el diferencial en X.

En efecto, la aplicación $H \longmapsto (X+H)^{-1}$ es acotada en un vecindario de $\mathbf{0}$, o sea $\exists\,\delta_1 > 0$ tal que $\|H\| < \delta_1 \implies \|(X+H)^{-1}\| < M$ y como $\|PQ\| \leq \|P\|\,\|Q\|$, se tiene que $\dfrac{1}{\|H\|}\|X^{-1}H(X+H)^{-1}HX^{-1}\| \leq \dfrac{1}{\|H\|}\|X^{-1}\|^2\|H\|^2\|(X+H)^{-1}\| \leq \|X^{-1}\|^2 M\|H\| \longrightarrow 0$, si $H \to 0$, es decir que f es diferenciable en X y $df(X)(H) = -X^{-1}HX^{-1}$.

43. Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \displaystyle\int_0^x \int_0^y \varphi(u,v)dv\,du$. Estudiar la diferenciabilidad de f.

Solución En $\mathbb{R}^2$, la función f tiene derivadas parciales primeras continuas y se tiene que $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \displaystyle\int_0^y \varphi(x,v)dv$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \displaystyle\int_0^x \varphi(u,y)du$.

Probemos la continuidad de las derivadas parciales. Sea $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ arbitrario pero fijo y sea $(h,k) \in [\,-1,1\,]^2$, entonces:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+h,y_0+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right| = \left|\int_0^{y_0+k} \varphi(x_0+h,v)dv - \int_0^{y_0} \varphi(x_0,v)dv\right| =$$

$$\left|\int_0^{y_0+k} \varphi(x_0+h,v)dv - \int_0^{y_0} \varphi(x_0+h,v)dv + \int_0^{y_0} (\varphi(x_0+h,v) - \varphi(x_0,v))dv\right| \leq$$

$$\int_{y_0}^{y_0+k} |\varphi(x_0+h,v)|dv + \int_0^{y_0} |\varphi(x_0+h,v) - \varphi(x_0,v)|dv.$$

Sabemos que φ es acotado en $[\,x_0-1,x_0+1\,] \times [\,y_0-1,y_0+1\,]$ y es uniformemente continua sobre $[\,x_0-1,x_0+1\,] \times [\,0,y_0\,]$, entonces sin pérdida de generalidad tomamos $h>0$, $k>0$,

$y_o > 0$ (si $y_0 = 0$ el resultado es inmediato).

Sea $\epsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tal que $\forall (x, y)$, $(x', y') \in [x_0 - 1, x_0 + 1] \times [0, y_0]$, $\|(x, y) - (x', y')\| < \eta \Longrightarrow$ $|\varphi(x, y) - \varphi(x', y')| < \frac{\epsilon}{2y_0}$. Además $\exists M > 0$ tal que $\forall (x, y) \in [x_0 - 1, x_0 + 1] \times [y_0 - 1, y_0 + 1]$ se tiene $|\varphi(x, y)| \leq M$.

Sea $\delta = \min\left\{1, \eta, \frac{\epsilon}{2M}\right\}$, entonces si $|k| \leq \|(h, k)\| < \delta \leq \frac{\epsilon}{2M}$ se tiene:

$$\int_{y_0}^{y_0+k} |\varphi(x_0 + h, v)|\, dv \leq M|k| < M\frac{\epsilon}{2M} = \frac{\epsilon}{2}$$

y también:

$$\int_0^{y_0} |\varphi(x_0 + h, v) - \varphi(x_0, v)|\, dv \leq \int_0^{y_0} \frac{\epsilon}{2y_0}\, dv = \frac{\epsilon}{2},$$

por lo que:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + h, y_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

y $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ es continua en (x_0, y_0).

Similarmente $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ es continua en (x_0, y_0), entonces por el criterio suficiente de diferenciabilidad f (es de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$) es diferenciable en $\mathbb{R}^2$ y además:

$$df(x, y) = h\int_0^y \varphi(x, v)dv + k\int_0^x \varphi(u, y)du.$$

44. Sea E el espacio vectorial de aplicaciones continuas y acotadas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, provisto de la norma $\|f\| = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$, $\Phi\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\Phi(f) = \displaystyle\int_0^{f(0)} f(t)\, dt$. Estudiar el diferencial de Φ.

Solución En este problema se puede decir que estamos a ciegas, pues no tenemos idea de la forma del diferencial, por lo que debemos utilizar la definición:

$$\phi(f+h)-\phi(f) = \int_0^{f(0)+h(0)} (f+h) - \int_0^{f(0)} f = \int_{f(0)}^{f(0)+h(0)} f + \int_0^{f(0)+h(0)} h = \ell_f(h) + \|h\|\epsilon(h)$$

y debemos determinar ℓ_f lineal y $\epsilon(h) \longrightarrow 0$, cuando $h \to 0$.

Sea $\ell_f(h) = \displaystyle\int_0^{f(0)} h + f^{(2)}(0)h(0)$, es lineal y

$$\|h\|\epsilon(h) = \int_{f(0)}^{f(0)+h(0)} h + \int_{f(0)}^{f(0)+h(0)} (f - f^{(2)}(0)),$$

con $f^{(2)}(0) = f(f(0))$. Probemos que $\epsilon(h) \longrightarrow 0$, si $h \to 0$. En efecto:

$$\left|\int_{f(0)}^{f(0)+h(0)} h\right| \leq \|h\|\ |h(0)| \leq \|h\|^2,$$

$$\left|\int_{f(0)}^{f(0)+h(0)} f - f^{(2)}(0)\right| \leq |h(0)| \sup_{t\in[\,f(0),f(0)+h(0)\,]} |f(t) - f^{(2)}(0)|$$

$$\leq \|h\| \sup_{t\in[\,f(0),f(0)+\|h\|\,]} |f(t) - f^{(2)}(0)| = \|h\| o(1),$$

pues $\sup\limits_{t\in[\,f(0),f(0)+\|h\|\,]} |f(t) - f^{(2)}(0)| \longrightarrow 0$, si $\|h\| \to 0$, ya que f es continua.

45. Sea E el espacio vectorial de aplicaciones continuas de $[\,0,1\,]$ en $\mathbb{R}$, provisto de la norma $\|f\| = \sup\limits_{x\in[\,0,1\,]} |f(x)|$, sea $\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 y sea $\Phi\colon E \longrightarrow E$ definida por $\Phi(f) = \varphi\circ f$. Demostrar que Φ es diferenciable y calcular su diferencial.

Solución Sea $f \in E$ y sea $\epsilon > 0$, como la función φ' es uniformemente continua en $I = [\,-\|f\| - 1, \|f\| + 1\,]$, existe $\eta > 0$ tal que $\forall (u,v) \in I^2$, $|u - v| < \eta \Longrightarrow |\varphi'(u) - \varphi'(v)| < \epsilon$.

Sea $h \in E$ tal que $\|h\| < \min\{1, \eta\}$, entonces existe $\zeta \in \mathbb{R}$ tal que $|\zeta - f(x)| \leq |h(x)|$ y $\varphi(f(x) + h(x)) - \varphi(f(x)) = h(x)\varphi'(\zeta)$, por lo tanto $|(\varphi\circ(f+h) - \varphi\circ f - (\varphi'\circ f)h)(x)| = |h(x)|\,|\varphi'(\zeta) - \varphi'(f(x))| \leq \|h\|\epsilon \Longrightarrow \|\varphi\circ(f+h) - \varphi\circ f - (\varphi'\circ f)h\| \leq \|h\|\epsilon$, es decir $\dfrac{1}{\|h\|}\|\varphi\circ(f+h) - \varphi\circ f - (\varphi'\circ f)h\| \longrightarrow 0$, si $h \to \mathbf{0}$.

Así tenemos que Φ es diferenciable y $d\Phi(f)(h) = (\varphi'\circ f)h$.

46. Sea $f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{si } x, y \text{ son racionales} \\ 0 & \text{si } x, y \text{ no son ambos racionales.} \end{cases}$

Probar que f es continua en un sólo punto. ¿Es diferenciable en un punto?

Solución Es claro que si $(x,y) \neq (0,0)$, f no es continua pues existe siempre $(x_n, y_n) \in \mathbb{Q}^2$ tales que $(x_n, y_n) \longrightarrow (x,y)$ y $\exists\ (r_n, s_n) \in \mathbb{I}^2$ tales que $(r_n, s_n) \longrightarrow (x,y)$, por lo que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = x^2 + y^2 \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(r_n, s_n) = 0$.

Probemos que es continua en $(0,0)$. En efecto, sea $\varepsilon > 0$ y sea $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, entonces si $\|(x,y) - (0,0)\| < \delta = \sqrt{\varepsilon} \Longrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$. Analicemos los casos:

a) $(x,y) \in \mathbb{Q}^2$, $\|(x,y)\| < \delta \Longrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} < \delta = \sqrt{\varepsilon} \Longrightarrow x^2 + y^2 < \varepsilon \Longrightarrow f(x,y) = x^2 + y^2 < \varepsilon$.

b) Si $(x,y) \notin \mathbb{Q}^2$, $\|(x,y)\| < \delta \Longrightarrow f(x,y) = 0 < \varepsilon$.

Así sea cual sea el caso de (x,y), tenemos que si $\|(x,y)\| < \delta \Longrightarrow |f(x,y)| < \varepsilon$ y la función es continua en $(0,0)$.

Observemos que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \begin{cases} \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{Q}}} \dfrac{h^2+0^2}{h} = 0 \\ \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\notin\mathbb{Q}}} \dfrac{0-0}{h} = 0. \end{cases}$

Igualmente, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Además, $f(h,k)-f(0,0) = (0,0)\begin{pmatrix} h\\ k\end{pmatrix} + \|(h,k)\|\varepsilon(h,k)$, donde:

$$\varepsilon(h,k) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} & \text{si } x,y \text{ son racionales} \\ 0 & \text{si } x,y \text{ no son ambos racionales.} \end{cases}$$

entonces $\varepsilon(h,k)$ tiene la propiedad que $\varepsilon(h,k) \longrightarrow 0$, si $(h,k)\to(0,0)$ y la función f es diferenciable en $(0,0)$, con $df(0,0) = (0,0)$.

2.3 Regla de la cadena

47. Sean $D = \mathbb{R}^2\backslash(\mathbb{R}_- \times \{0\})$, $\triangle = \,]-\pi,\pi[\, \times \mathbb{R}_+^*$, $\Phi\colon \triangle \longrightarrow D$ la aplicación tal que $\Phi(\theta,\rho) = (\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta)$, $f\colon D\longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2, $F = f\circ\Phi$, $U\colon D\longrightarrow\mathbb{R}$, $U(x,y) = y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$, $V = U\circ\Phi$. Calcular $V(\theta,\rho)$ en función de las primeras y segundas derivadas parciales de F y de θ, ρ.

Solución Sea $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = \arctan\dfrac{y}{x}$, entonces:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \tfrac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\theta, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \operatorname{sen}\theta,$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\cos^2\theta}{r},$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x\partial y} = -\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\operatorname{sen}2\theta}{2r}, \quad \frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\Big(-\frac{y}{x^2}\Big) = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{\operatorname{sen}\theta}{r},$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\cos\theta}{r}, \quad \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = y(x^2+y^2)^{-2}2x = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\operatorname{sen}2\theta}{r^2},$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{\operatorname{sen}2\theta}{r^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \Big(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial\theta\partial r}\frac{\partial\theta}{\partial x}\Big)\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \Big(\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial\theta}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}\frac{\partial\theta}{\partial x}\Big)\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} =$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}\cos^2\theta - \frac{\partial^2 F}{\partial\theta\partial r}\frac{1}{r}2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r^2} + \frac{\partial F}{\partial\theta}\frac{\operatorname{sen}2\theta}{r^2} + \frac{\partial F}{\partial r}\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r},$$

por lo tanto:

$$y^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}r^2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta - \frac{\partial^2 F}{\partial\theta\partial r}r\operatorname{sen}2\theta\operatorname{sen}^2\theta + \frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}\operatorname{sen}^4\theta + \frac{\partial F}{\partial r}r\operatorname{sen}^4\theta + \frac{\partial F}{\partial\theta}\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}2\theta,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}\big(\frac{\partial r}{\partial y}\big)^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial\theta\partial r}\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}\big(\frac{\partial\theta}{\partial y}\big)^2 + \frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial F}{\partial\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} =$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}\operatorname{sen}^2\theta + 2\frac{\partial^2 F}{\partial\theta\partial r}\frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{r} + \frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}\frac{\cos^2\theta}{r^2} + \frac{\partial F}{\partial r}\frac{\cos^2\theta}{r} - \frac{\partial F}{\partial\theta}\frac{\operatorname{sen}2\theta}{r^2},$$ por lo que

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}r^2\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta + \frac{\partial^2 F}{\partial\theta\partial r}r\operatorname{sen}2\theta\cos^2\theta + \frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}\cos^4\theta + \frac{\partial F}{\partial r}r\cos^4\theta - \frac{\partial F}{\partial\theta}\operatorname{sen}2\theta\cos^2\theta \Longrightarrow$$

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = r^2\frac{\partial^F}{\partial r^2}\big(\tfrac{1}{2}\operatorname{sen}^2 2\theta\big) + r\frac{\partial^2 F}{\partial\theta\partial r}\operatorname{sen}2\theta\cos 2\theta + \frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}(\cos^4\theta + \operatorname{sen}^4\theta) + r\frac{\partial F}{\partial r}(\cos^4\theta + \operatorname{sen}^4\theta) - \frac{\partial F}{\partial\theta}\operatorname{sen}2\theta\cos 2\theta =$$

$$r^2\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}\frac{1-\cos 4\theta}{4} + r\frac{\partial^2 F}{\partial\theta\partial r}\frac{1}{2}\operatorname{sen}4\theta + \frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}\frac{3+\cos 4\theta}{4} + r\frac{\partial F}{\partial r}\frac{3+\cos 4\theta}{4} - \frac{\partial F}{\partial\theta}\frac{\operatorname{sen}4\theta}{2}.$$

Recuerde que $\operatorname{sen}^4\theta = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 2\theta + \frac{1}{8}\cos 4\theta$ y que $\cos^4\theta = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 2\theta + \frac{1}{8}\cos 4\theta$.

48. Sean $f\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ de clase C^2, $g\colon\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } x\neq y \\ f'(x) & \text{si } x = y. \end{cases}$

Demostrar que g es de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$.

Solución Claramente g es de clase C^1 en $\mathbb{R}^2\backslash\Delta$, con $\Delta = \{(x,x)/x\in\mathbb{R}\}$. Sea $x_0\in\mathbb{R}$, $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\longrightarrow f'(x_0)$, si $(x,y)\to(x_0,x_0)$, pues $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(\zeta)$, con ζ real entre x y y. Por la continuidad de f' en x_0, tenemos la continuidad de g en $\mathbb{R}^2$.

Para $x_0\in\mathbb{R}$, $h\neq 0$, $\dfrac{g(x_0+h,x_0)-g(x_0,x_0)}{h} = \dfrac{1}{h}\left(\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0)\right) =$ $\dfrac{1}{h^2}(f(x_0+h)-f(x_0)-hf'(x_0)) \longrightarrow \frac{1}{2}f''(x_0)$, si $h\to 0$, por el desarrollo de Taylor de f y la continuidad de f'' en x_0. Así g tiene derivadas parciales primeras en (x_0,x_0) y $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0,x_0) = \dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0,x_0) = \frac{1}{2}f''(x_0)$.

Finalmente, para $(x,y)\in\mathbb{R}^2\backslash\Delta$, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \dfrac{f'(x)(x-y)+f(y)}{(x-y)^2} \longrightarrow \frac{1}{2}f''(x_0)$, cuando $(x,y)\to(x_0,x_0)$, por el teorema de los crecimientos finitos en $[\,x,y\,]$ y la continuidad de f'' en x_0.

49. Encontrar una aplicación $P\colon\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $f\colon\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ definida por

$f(x,y) = (P(x,y), 2xy)$ tenga por diferencial en todo punto una similitud i.e. si su matriz relativa a la base canónica es de la forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$.

Solución El Jacobiano de f es $J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial x} & \dfrac{\partial P}{\partial y} \\ 2y & 2x \end{pmatrix} \Longrightarrow \dfrac{\partial P}{\partial x} = \pm 2x,\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = \mp 2y,$ por lo que $P = \pm x^2 + h_1(y) = \mp y^2 + h_2(x)$, o sea $P = \pm(x^2 - y^2) + C$.

50. Sean $f, \varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dos aplicaciones de clase C^2 y sea $F\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x,y) = f(x+\varphi(y))$, verificar que $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\dfrac{\partial F}{\partial x} = 0$.
Solución $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = f'(x+\varphi(y))$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = f'(x+\varphi(y))\varphi'$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) = f''(x+\varphi(y))$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y) = f''(x+\varphi(y))\varphi'(y)$ y se tiene $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\dfrac{\partial F}{\partial x} = 0$.

51. Determinar todas las aplicaciones $\varphi\colon \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2, tales que la aplicación $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \varphi(x+y)$, verifique $\forall (x,y) \in U$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2\dfrac{f(x,y)}{(x+y)^2}$, donde $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x+y \neq 0\}$.
Solución Sustituyendo $\dfrac{\partial^2 \varphi(x+y)}{\partial x \partial y} = \dfrac{2\varphi(x+y)}{(x+y)^2} = \varphi''(x+y)$ i.e. $\varphi''(t) = \dfrac{2\varphi(t)}{t^2}$.

La solución es $\varphi(t) = \begin{cases} at^2 + b\dfrac{1}{t} & \text{si } t > 0, \\ ct^2 + d\dfrac{1}{t} & \text{si } t < 0. \end{cases}$

52. Encontrar las aplicaciones $\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 tales que la aplicación $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \varphi(\frac{y}{x})$, verifique $\forall (x,y) \in U$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{y}{x^3}$, donde $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq 0\}$.

Solución Se tiene que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \varphi'\big(\frac{y}{x}\big)\big(-\dfrac{y}{x^2}\big)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \varphi'\big(\frac{y}{x}\big)\big(\frac{1}{x}\big)$,
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \varphi''\big(\frac{y}{x}\big)\big(-\dfrac{y}{x^2}\big)^2 + \varphi'\big(\frac{y}{x}\big)\big(\dfrac{2y}{x^3}\big)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \varphi''\big(\frac{y}{x}\big)\big(\dfrac{1}{x^2}\big)$, por lo que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{y}{x^3} \Longleftrightarrow \varphi''\big(\frac{y}{x}\big)\big(\dfrac{y^2}{x^4} - \dfrac{1}{x^2}\big) + 2\varphi'\big(\frac{y}{x}\big)\big(\dfrac{y}{x^3}\big) = \dfrac{y}{x^3} \Longleftrightarrow \varphi''\big(\frac{y}{x}\big)\big(\dfrac{y^2}{x^2} - 1\big) + 2\varphi'\big(\frac{y}{x}\big)\big(\frac{y}{x}\big) = \dfrac{y}{x}$ $\therefore$ satisface la ecuación $\varphi''(t)(t^2-1) + 2\varphi(t)t = t$.

La solución es $\varphi(t) = \frac{1}{2}t + \mu$, $\mu \in \mathbb{R}$.

53. Encontrar las aplicaciones $\varphi\colon \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^3 tales que $f\colon \mathbb{R}^3 \backslash \{\mathbf{0}\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z) = \varphi(x^2+y^2+z^2)$, verifique $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \backslash \{\mathbf{0}\}$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}(x,y,z) = \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$.
Solución Se tiene que $\dfrac{\partial f}{\partial z} = \varphi'(x^2+y^2+z^2)2z$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \varphi''(x^2+y^2+z^2)4yz$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = 8\varphi'''(x^2+y^2+z^2)xyz \therefore \varphi'''(t) = \dfrac{1}{8t} \Longrightarrow \varphi''(t) = \frac{1}{8}\ln t + 2A \Longrightarrow \varphi'(t) = \frac{1}{8}t\ln t + 2At + B \Longrightarrow$

$\varphi(t) = \frac{1}{16}t^2 \ln t + At^2 + Bt + C$, A, B, $C \in \mathbb{R}$.

54. Transformar las ecuaciones en las derivadas parciales siguientes, utilizando el cambio de variables en la función indicada (f es desconocida de dos variables reales).

a) $2\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$, $u = x + y$, $v = x + 2y$.

b) $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2}$ en polares sobre $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

c) $x\dfrac{\partial f}{\partial y} - y\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$ en polares sobre $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

d) $2xy\dfrac{\partial f}{\partial x} + (1 + y^2)\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$, $x = \dfrac{u^2 + v^2}{2}$, $y = \frac{u}{v}$, $x > 0$.

e) $(x + y)\dfrac{\partial f}{\partial x} + (x - y)\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$, $u = x^2 - y^2 - 2xy$, $v = y$, $x \neq y$.

f) $\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y} + 3(x - y)f = 0$, $u = xy$, $v = x + y$, $x > y$.

g) $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} - 2f + 2 = 0$, $u = xy$, $v = \dfrac{y}{x}$, $x > 0$.

h) $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, $x = u$, $y = uv$, $x > 0$.

i) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2\dfrac{\partial f}{\partial y} - f = 0$, $g = f\mathrm{e}^y$, $u = x + y$, $r = x - y$.

j) $2(y^2 - x)\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2y\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} - (y^2 - x) = 0$, $x = u^2 + v^2$, $y = u + v$, $x > \dfrac{y^2}{2}$.

k) $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, $u = xy$, $v = \frac{x}{y}$, $x > 0$, $y > 0$.

Solución

a) Sea $F(u, v) = f(2u - v, v - u)$, pues $v - u = y$, $2u - v = x$, entonces:

$\dfrac{\partial F}{\partial u} = 2\dfrac{\partial f}{\partial x}(2u - v, v - u) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(2u - v, v - u) = 0$ y $F(u, v) = \varphi(v) \Longrightarrow f(x, y) = \varphi(x + 2y)$, $\varphi \in C^1$ en $\mathbb{R}$.

b) $F(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$, entonces $\dfrac{\partial F}{\partial r} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{sen}\,\theta \Longrightarrow r\dfrac{\partial F}{\partial r} = r$ i.e. $\dfrac{\partial F}{\partial r} = 1 \Longrightarrow F(r, \theta) = r + \varphi(\theta) \Longrightarrow f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + \varphi\big(\frac{y}{x}\big)$, $\varphi \in C^1$ en $\mathbb{R}$.

c) Sea $\dfrac{\partial F}{\partial \theta} = -\dfrac{\partial f}{\partial x}r\,\mathrm{sen}\,\theta + \dfrac{\partial f}{\partial y}r\cos\theta = -\big(\dfrac{\partial f}{\partial y}r\cos\theta - \dfrac{\partial f}{\partial x}r\,\mathrm{sen}\,\theta\big) = -\big(x\dfrac{\partial f}{\partial y} - y\dfrac{\partial f}{\partial x}\big) = 0$, por lo tanto $F(u, v) = \varphi(r) \Longrightarrow f(x, y) = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2})$, $\varphi \in C^1$ en $\mathbb{R}$.

d) Sea $x = \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$, $y = \frac{u}{v}$, $u = y\sqrt{\dfrac{2x}{1 + y^2}}$, $v = \sqrt{\dfrac{2x}{1 + y^2}}$, $F(u, v) = f(\frac{1}{2}(u^2 + v^2), \frac{u}{v}) \Longrightarrow$ $\dfrac{\partial F}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial x}u + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{1}{v}$.
Por otro lado $2xy\dfrac{\partial f}{\partial x} + (1 + y^2)\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \Longleftrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{u^2 + v^2}{v}u + \dfrac{u^2 + v^2}{v^2}\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \Longleftrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}u + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{1}{v} = 0 \Longleftrightarrow \dfrac{\partial F}{\partial u} = 0$ y se tiene $F(u, v) = \varphi(v)$, $f(x, y) = \varphi\big(\sqrt{\dfrac{2x}{1 + y^2}}\big)$, $\varphi \in C^1$ en $\mathbb{R}^*_+$.

e) Sea $u = x^2 + y^2 - 2xy$, $v = y$, $x \neq y$, $x = v \pm \sqrt{u + 2v^2}$, $y = v$, entonces:

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\big(\pm\frac{1}{2\sqrt{u+2v^2}}\big),$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\big(1 \pm \frac{4v}{2\sqrt{u+2v^2}}\big) + \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}\big(\frac{\sqrt{u+2v^2} \pm 2v}{\sqrt{u+2v^2}}\big) + \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Por otro lado $\frac{\partial f}{\partial x}(2v \pm \sqrt{u+2v^2}) + \frac{\partial f}{\partial y}(\pm\sqrt{u+2v^2}) = 0$, por lo tanto $\pm\frac{\partial f}{\partial x}\big(1 \pm \frac{2v}{2\sqrt{u+2v^2}}\big) + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, es decir $\frac{\partial F}{\partial v} = 0 \Longrightarrow F(u,v) = \varphi(u) \Longrightarrow f(x,y) = \varphi(x^2 - y^2 - 2xy)$, con $\varphi \in C^1$ en $\mathbb{R}$.

f) Sea $u = xy$, $v = x + y$, $x > y$, entonces $y = \frac{1}{2}(v \mp \sqrt{v^2 - 4u})$, $x = \frac{1}{2}(v \pm \sqrt{v^2 - 4u})$ y como $x > y$, se tiene $x = \frac{1}{2}(v + \sqrt{v^2 - 4u})$, $y = \frac{1}{2}(v - \sqrt{v^2 - 4u})$.

Sea $F(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$, entonces $\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{-1}{\sqrt{v^2-4u}} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{v^2-4u}}$, pero:

$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} + 3\sqrt{v^2-4u}f = 0 \Longrightarrow \dfrac{-\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{v^2-4u}} = 3f(x(u,v), y(u,v))$, por lo tanto $\frac{\partial F}{\partial u} = 3F \Longrightarrow F(u,v) = \mathrm{e}^{3u} + \varphi(v)$ y $f(x,y) = \mathrm{e}^{3xy} + \varphi(x+y)$, con $\varphi \in C^1$ sobre $\mathbb{R}$.

g) Sea $yx = u$, $v = \frac{y}{x}$, $x > 0 \Longrightarrow y = \sqrt{uv}$, $x = \sqrt{\frac{u}{v}}$ y sea $F(u,v) = f\big(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\big)$, entonces:

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{1}{2\sqrt{uv}} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{v}{2\sqrt{uv}} = \frac{1}{2}\big(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{uv}} + \frac{\partial f}{\partial y}\sqrt{\frac{v}{u}}\big).$$

Por otro lado $\frac{\partial f}{\partial x}\sqrt{\frac{u}{v}} + \sqrt{uv}\frac{\partial f}{\partial y} - 2F + 2 = 0 \Longrightarrow \frac{2(F-1)}{u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{uv}} + \frac{\partial f}{\partial y}\sqrt{\frac{v}{u}} = 2\frac{\partial F}{\partial u}$, o sea $u\frac{\partial F}{\partial u} = F - 1$ y $F(u,v) = u\varphi(v) + 1$, $f(x,y) = xy\varphi\big(\frac{y}{x}\big) + 1$, con $\varphi \in C^1$ en $\mathbb{R}$.

La solución se obtiene así: $\frac{\partial}{\partial u}\big(u\frac{\partial F}{\partial u}\big) = \frac{\partial F}{\partial u} \Longrightarrow \frac{\partial F}{\partial u} + u\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = \frac{\partial F}{\partial u} \Longrightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial F}{\partial u} = \varphi(v)$ y $F(u,v) = u\varphi(v) + C$. Pero $u\frac{\partial F}{\partial u} = u\varphi(v) = F - 1$ y $F(u,v) = u\varphi(v) + 1$.

h) Sea $x = u$, $y = uv$, $x > 0$, $u = x$, $v = \frac{y}{x}$, $u > 0$ y sea $F(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$, entonces $\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}v$, $\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2v\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + v^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Pero $u^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2u^2 v\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + u^2 v^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, por lo tanto $\frac{\partial F}{\partial u} = \varphi(v)$, $F(u,v) = u\varphi(v) + \psi(v)$, $f(x,y) = x\varphi\big(\frac{y}{x}\big) + \psi\big(\frac{y}{x}\big)$, con $\varphi, \psi \in C^2$ en $\mathbb{R}$.

i) Sea $g(x,y) = f(x,y)\mathrm{e}^y$, $f(x,y) = \mathrm{e}^{-y}g(x,y) \Longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \mathrm{e}^{-y}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -\mathrm{e}^{-y}g + \mathrm{e}^{-y}\frac{\partial g}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \mathrm{e}^{-y}\big(g - 2\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\big)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2\frac{\partial f}{\partial y} - f = \mathrm{e}^{-y}\big(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\big) = 0$.

Efectuemos el cambio de variable $u = x + y$, $v = x - y$, $x = \frac{1}{2}(u + v)$, $y = \frac{1}{2}(u - v)$. Sea $G(u,v) = g\big(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\big)$, entonces $\frac{\partial G}{\partial u} = \frac{1}{2}\big(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\big) \Longrightarrow \frac{\partial^2 G}{\partial u \partial v} = \frac{1}{4}\big(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} +$

$\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}) = \frac{1}{4}(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 g}{\partial y^2})$ y se tiene $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 G}{\partial u\partial v} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial G}{\partial v} = \varphi'(v) \Longrightarrow$ $G = \varphi(v) + \psi(u)$, con φ, $\psi \in C^2$ en $\mathbb{R}^2$.

Así $G(u,v) = \psi(u)+\varphi(v)$, $g(x,y) = \psi(x+y)+\varphi(x-y) \Longrightarrow f(x,y) = \mathrm{e}^{-y}(\psi(x+y)+\varphi(x-y))$.

j) Sea $x = u^2+v^2$, $y = u+v$, $x > \frac{1}{2}y^2$, $y^2 = u^2+v^2+2uv$, entonces $y^2 - x = 2uv = 2u(y-u) = 2uy - 2u^2 \Longrightarrow 2u^2 - 2yu + (y^2 - x) = 0 \Longrightarrow u = \frac{y \pm \sqrt{2x - y^2}}{2}$, $v = \frac{y \mp \sqrt{2x - y^2}}{2}$.

Dada la solución $x = u^2 + v^2$, $y = u + v$ es indiferente el $\pm$ en u y en v, escojamos $u = \frac{1}{2}(y + \sqrt{2x - y^2})$, $v = \frac{1}{2}(y - \sqrt{2x - y^2})$ y definamos $F(u,v) = f(u^2 + v^2, u + v)$, $\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}2u + \frac{\partial f}{\partial y} \Longrightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial v\partial u} = [\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\frac{\partial y}{\partial v}]2u + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial v} =$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}4uv + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(2u + 2v) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}2(y^2 - u) + 2y\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = y^2 - x = 2uv$ y $\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v} = 2uv \Longrightarrow \frac{\partial F}{\partial v} = u^2 v + \psi'(v) \Longrightarrow F(u,v) = \frac{1}{2}u^2v^2 + \psi(v) + \varphi(u)$, por lo que $f(x,y) = \frac{1}{8}(y^2 - x^2) + \varphi(y + \sqrt{2x - y^2}) + \psi(y - \sqrt{2x - y^2})$, con φ, $\psi \in C^2$ en $\mathbb{R}$.

k) Sea $u = xy$, $v = \frac{x}{y}$, $x > 0$, $y > 0$, $x = \sqrt{uv}$, $y = \sqrt{\frac{u}{v}}$, $F(u,v) = f\big(\sqrt{uv}, \sqrt{\frac{u}{v}}\big)$, entonces: $\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}}$, $\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}}$, $\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{2\sqrt{uv}}$, $\frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v^3}}$, $\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} = \frac{1}{4\sqrt{uv}}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v} = -\frac{1}{4\sqrt{uv^3}}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v} = \frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\big(-\frac{1}{4}\frac{1}{v}\big) + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\big(\frac{1}{4}\frac{1}{v}\big) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\big(-\frac{1}{4}\frac{1}{v^2}\big) + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{1}{4\sqrt{uv}} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{1}{4\sqrt{uv^3}} \Longrightarrow$ $4\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{1}{v^2} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{uv}} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{uv^3}} \Longrightarrow 4\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v} = -\frac{\partial f}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{uv^3}} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{uv}}$.

Por otro lado $\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v^3}} \Longrightarrow 2\frac{1}{u}\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{uv}} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{uv^3}}$ i.e.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v} = \frac{1}{2u}\frac{\partial F}{\partial v} \Longrightarrow \frac{\frac{\partial}{\partial u}\big(\frac{\partial F}{\partial v}\big)}{\frac{\partial F}{\partial v}} = \frac{1}{2u} \Longrightarrow \ln\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{1}{2}\ln u + \ln\varphi'(v) \Longrightarrow \frac{\partial F}{\partial v} = \sqrt{u}\varphi'(v) \Longrightarrow$$

$F(u,v) = \sqrt{u}\varphi(v) + \psi(u) \Longrightarrow f(x,y) = \sqrt{xy}\varphi\big(\frac{x}{y}\big) + \psi(xy)$, con φ, $\psi \in C^2$ en $]0,+\infty[$.

55. Sean A, B, $C \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, (E) la ecuación en derivadas parciales $A\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, donde $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función desconocida, de clase C^2. Efectuar el cambio de variable $u = x + \alpha y$, $v = x + \beta y$, α, $\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq \beta$, $f(x,y) = F(x + \alpha y, x + \beta y)$, demostrar que se pueden escoger α, β para llevar el sistema (E) a una de las tres ecuaciones:

$$(1)\ \frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v} = 0 \qquad (2)\ \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = 0 \qquad (3)\ \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = 0.$$

Solución Sea A, B, $C \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \alpha\frac{\partial F}{\partial u} + \beta\frac{\partial F}{\partial v}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \alpha^2\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2\alpha\beta\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v} + \beta^2\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \alpha\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + (\beta+\alpha)\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v} + \beta\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$, por lo tanto $A\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2B\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+C\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=(A+2B\alpha+C\alpha^2)\dfrac{\partial^2 F}{\partial u^2}+2(A+B(\alpha+\beta)+C\alpha\beta)\dfrac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}+$ $(A+2B\beta+C\beta^2)\dfrac{\partial^2 F}{\partial v^2}=0$.

Sea $P(t)=Ct^2+2Bt+A$ polinomio de grado 2, si $B^2-AC>0$, se escoge α, β las dos raíces del polinomio y se lleva al caso $\dfrac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}=0$.

Si $B^2-AC=0$, $C\neq 0$, se escoge $\alpha=-\dfrac{B}{C}$ y $\beta\neq\alpha$, entonces $A+2B\alpha+C\alpha^2=0$, $A+B(\alpha+\beta)+C\alpha\beta=0$, por lo que $\dfrac{\partial^2 F}{\partial v^2}=0$.

Si $B^2-AC<0$, existen $\alpha\neq\beta$ tales que $A+2B\alpha+C\alpha^2=A+2B\beta+C\beta^2$, $A+B(\alpha+\beta)+C\alpha\beta=0$, pues si no, existe $\alpha=\beta\Longrightarrow A+2B\alpha+C\alpha^2=0\Longrightarrow B^2-AC\geq 0$ que es una contradicción.

Así, llegamos al caso $\dfrac{\partial^2 F}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 F}{\partial v^2}=0$.

56. Sea $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$, $u(t)=\mathrm{e}^{-t}$, $v(t)=\mathrm{e}^{t}$. Dar el dominio de la función y la derivada de $F(t)=f(u(t),v(t))$.

Solución Dado que $F(t)=f(u(t),v(t))=\ln(\mathrm{e}^{-2t}+\mathrm{e}^{2t})$ tenemos que el dominio de F es $\mathbb{R}$. Vamos a calcular la derivada de dos maneras: una directa y otra usando la regla de la cadena para varias variables.

Así, $F'(t)=\dfrac{-2\mathrm{e}^{-2t}+2\mathrm{e}^{2t}}{\mathrm{e}^{-2t}+\mathrm{e}^{2t}}=2\dfrac{\operatorname{senh}2t}{\cosh 2t}=2\operatorname{tgh}2t$.

Usando la regla de la cadena $F'(t)=\dfrac{\partial f}{\partial x}u'(t)+\dfrac{\partial f}{\partial y}v'(t)=\dfrac{-\mathrm{e}^{-t}(2\mathrm{e}^{-t})+(2\mathrm{e}^{t})\mathrm{e}^{t}}{u^2(t)+v^2(t)}=$ $2\dfrac{\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{-2t}}{\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^{-2t}}=2\operatorname{tgh}2t$.

57. Sea $f(x,y)$ de clase C^2, $x=r\cos\theta$, $y=r\operatorname{sen}\theta$ i.e. $\varphi(r,\theta)=f(r\cos\theta,r\operatorname{sen}\theta)$. Determinar $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}$, $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial\theta}$, $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial\theta}$, $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}$, en función de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$.

Solución

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\operatorname{sen}\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=-r\operatorname{sen}\theta\frac{\partial f}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}=-y\frac{\partial f}{\partial x}+x\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}&=-r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}+r^2\operatorname{sen}^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2r^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}-r\operatorname{sen}\theta\frac{\partial f}{\partial y}+r^2\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\\&=r^2\operatorname{sen}^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2r^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+r^2\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}-r\operatorname{sen}\theta\frac{\partial f}{\partial y}\end{aligned}$$

$$= y^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + x^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} = \cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \operatorname{sen}^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$= \frac{x^2}{x^2+y^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{xy}{x^2+y^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \frac{y^2}{x^2+y^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial\theta} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta\partial r} = r(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} - r\operatorname{sen}\theta\cos\theta\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big) - \operatorname{sen}\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$= \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} - \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big) - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial f}{\partial y}.$$

58. La sustitución $t = g(x,y)$ de clase C^1 convierte a $F(t)$ en una función $f(x,y)$ de clase C^1, siendo $f(x,y) = F(g(x,y))$.

a) Determinar $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$.

b) Sea $F(t) = \mathrm{e}^{\operatorname{sen} t}$, $g(x,y) = \cos(x^2+y^2)$, calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Solución

a) Aplicando la regla de la cadena para varias variables se tiene $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = F'(g(x,y))\dfrac{\partial g}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = F'(g(x,y))\dfrac{\partial g}{\partial y}$.

b) Usando la parte a) tenemos: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -2x\mathrm{e}^{\operatorname{sen}(\cos(x^2+y^2))}\cos(\cos(x^2+y^2))\operatorname{sen}(x^2+y^2)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -2y\mathrm{e}^{\operatorname{sen}(\cos(x^2+y^2))}\cos(\cos^2(x^2+y^2))\operatorname{sen}(x^2+y^2)$.

59. Sea $f(x,y)$, una función, de clase C^2, $x = x(s,t)$, $y = y(s,t)$ y sea $F(s,t) = f(x(s,t), y(s,t))$. Determinar $\dfrac{\partial F}{\partial s}, \dfrac{\partial F}{\partial t}, \dfrac{\partial^2 F}{\partial s^2}, \dfrac{\partial^2 F}{\partial t^2}, \dfrac{\partial^2 F}{\partial s\partial t}$.

Solución La regla de la cadena permite escribir:

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s^2} = \frac{\partial}{\partial s}\Big(\frac{\partial F}{\partial s}\Big) = \frac{\partial}{\partial s}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + \frac{\partial}{\partial s}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial^2 s}$$

$$= \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\frac{\partial y}{\partial s}\Big)\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial s}\Big)\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big(\frac{\partial x}{\partial s}\Big)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big(\frac{\partial y}{\partial s}\Big)^2 + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}.$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big(\frac{\partial x}{\partial t}\Big)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big(\frac{\partial y}{\partial t}\Big)^2 + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}.$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\Big(\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial s}\Big) + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial s\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial s\partial t}.$$

60. Sea $f(x,y) = z$, con $y = F(x)$, calcular $\dfrac{dz}{dx}$, si f, F son de clase C^1.

Solución Sea $z(x) = f(x, F(x))$, entonces $\dfrac{dz}{dx} = z'(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, F(x)) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, F(x))F'(x)$.

61. Sea $f(x,y) = \sqrt{xy}$, $u(x) = x$, $v(x) = \operatorname{sen} x$. Demostrar que $F(x) = f(u(x), v(x))$ está definida y es derivable en $]\,0,\pi\,[$ y determinar $F'(x)$ usando la regla de la cadena para varias variables.

Solución Dado que si $x \in\,]\,0,\pi\,[$, $u(x) > 0$, $\operatorname{sen} x > 0$, entonces $\sqrt{x \operatorname{sen} x}$ está bien definida en $]\,0,\pi\,[$ i.e. $F(x) = f(x, \operatorname{sen} x) = \sqrt{x \operatorname{sen} x}$.

Por otro lado, $F'(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(u(x), v(x))u'(x) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(u(x), v(x))v'(x) =$
$\dfrac{v(x)}{2\sqrt{u(x)v(x)}}u'(x) + \dfrac{u(x)}{2\sqrt{u(x)v(x)}}v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x \operatorname{sen} x}}(\operatorname{sen} x + x\cos x)$.

62. Sea $f(x,y) = x^2 + 2xy + 4y^2$, con $y(x) = e^{-2x}$. Dar la derivada de $F(x) = f(x, y(x))$, usando la regla de la cadena para varias variables.

Solución Tenemos que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x + xy$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x + 8y$, $y'(x) = -2e^{-2x}$, entonces:
$F'(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}y'(x) = 2x + 2e^{-2x} + (-2e^{-2x})(2x + 8e^{-2x}) = 2x + 2e^{-2x} - 4xe^{-2x} - 16e^{-4x}$.

63. Sea $f(x,y) = x^2 + y^2$, $v(s,t) = e^s \operatorname{sen} t$, $v(s,t) = e^{-s}\cos t$, dar las derivadas parciales de $F(s,t) = f(u(s,t), v(s,t))$.

Solución Se tiene que $\dfrac{\partial F}{\partial s} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial s} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial s} = 2e^s \operatorname{sen} t \cdot e^s \operatorname{sen} t + 2e^{-s}\cos t(-e^{-s}\cos t) =$
$2e^{2s}\operatorname{sen}^2 t - 2e^{-2s}\cos^2 t$.

$\dfrac{\partial F}{\partial t} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial t}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial t} = 2e^s \operatorname{sen} t e^s \cos t + 2e^{-s}\cos t(-e^{-s}\operatorname{sen} t) = 2\operatorname{sen} t\cos t(e^{2s} - e^{-2s})$.

64. Si $f(x,y,z) = x^2z + y^2x + z^2y$, probar que $f_x + f_y + f_z = (x+y+z)^2$.

Solución En efecto, $f_x = 2xz + y^2$, $f_y = 2xy + z^2$, $f_z = x^2 + 2xz \Longrightarrow f_x + f_y + f_z = (x+y+z)^2$.

65. Determinar la expresión $\dfrac{1}{x^2}(\dfrac{\partial f}{\partial x})^2 + \dfrac{1}{y^2}(\dfrac{\partial f}{\partial y})^2$ en las nuevas variables $u = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$, $v = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$.

Solución Usando la regla de la cadena se tiene $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot x + \dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot x$,
$\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot y - \dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot y$, por lo tanto:
$\dfrac{1}{x^2}\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x}\Big)^2 + \dfrac{1}{y^2}\Big(\dfrac{\partial f}{\partial y}\Big)^2 = \dfrac{1}{x^2}x^2\Big(\Big(\dfrac{\partial f}{\partial u}\Big)^2 + 2\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial f}{\partial v} + \Big(\dfrac{\partial f}{\partial v}\Big)^2\Big) + \dfrac{1}{y^2}y^2\Big(\Big(\dfrac{\partial f}{\partial u}\Big)^2 - 2\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial f}{\partial v} +$
$\Big(\dfrac{\partial f}{\partial v}\Big)^2\Big) = 2\Big(\dfrac{\partial f}{\partial u}\Big)^2 + 2\Big(\dfrac{\partial f}{\partial v}\Big)^2$.

66. Determinar la ecuación $y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ en función de la

variable r de modo que $z = f(r)$, donde $r = \sqrt{x^2+y^2}$ y f es dos veces derivable.

Solución Se tiene que $\dfrac{\partial z}{\partial x} = f'(r)\frac{x}{r}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = f'(r)\frac{y}{r}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{yx}{r^2}f''(r) - \dfrac{xy}{r^3}f'(r)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{x^2}{r^2}f''(r) + \dfrac{y^2}{r^3}f'(r)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{y^2}{r^2}f''(r) + \dfrac{x^2}{r^3}f'(r)$, por lo que $y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x^2y^2}{r^2}f''(r) + \dfrac{y^4}{r^3}f'(r) - 2\dfrac{x^2y^2}{r^2}f''(r) + 2\dfrac{x^2y^2}{r^3}f'(r) + \dfrac{x^2y^2}{r^2}f''(r) + x^4\dfrac{f'(r)}{r^3} + \dfrac{xy}{r}f'(r) - \dfrac{xy}{r}f'(r) = \dfrac{(x^2+y^2)^2}{r^3}f'(r) = rf'(r)$.

67. Sea $z = xf(\frac{y}{x})$, con f de clase C^1, demostrar que $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$.

Solución Sea $u = \dfrac{y}{x}$, $z = xf(u)$, entonces $\dfrac{\partial z}{\partial x} = f(u) + xf'(u)(-\dfrac{y}{x^2}) = f(u) - \dfrac{y}{x}f'(u) \Longrightarrow x\dfrac{\partial z}{\partial x} = xf(u) - yf'(u)$, $y\dfrac{\partial z}{\partial y} = yf'(u)$ y se tiene $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = xf(u) = xf(\frac{y}{x}) = z$.

2.4 Aplicaciones

68. Determinar la razón espacial de cambio de $f(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 - z^2$ en la dirección hacia afuera de la normal a la esfera $x^2+y^2+z^2 = 14$, en el punto $(-3,2,1)$.

Solución Sea $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-14$, el gradiente es $\nabla g = (2x, 2y, 2z)$ y sea $\mathbf{u} = \dfrac{\nabla g(-3,2,1)}{\|\nabla g(-3,2,1)\|} = \dfrac{1}{\sqrt{14}}(-3,2,1)$, entonces la derivada direccional de f en la dirección de $\mathbf{u}$ es $D_{\mathbf{u}}f(-3,2,1) = \nabla f(-3,2,1)\cdot\mathbf{u} = (-12,12,-2)\cdot(-3,2,1)\dfrac{1}{\sqrt{14}} = \dfrac{36+24-2}{\sqrt{14}} = \dfrac{58}{\sqrt{14}}$.

69. Determinar la derivada direccional de $f(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$ en $(3,4,5)$, a lo largo de la curva de intersección de las superficies $2x^2+2y^2-z^2 = 25$ y $x^2+y^2 = z^2$.

Solución Sea $g_1(x,y,z) = 2x^2+2y^2-z^2-25 = 0$, $g_2(x,y,z) = x^2+y^2-z^2 = 0$, entonces los gradientes $\nabla g_1(3,4,5) = (12,16,-10)$ y $\nabla g_2(3,4,5) = (6,8,-10)$ son tales que $\nabla g_1 \times \nabla g_2$ es tangente a la curva. Así se tiene que $\mathbf{v} = \nabla g_1 \times \nabla g_2 = (-80,60,0)$ y el vector unitario $\mathbf{u} = \dfrac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{1}{5}(-4,3,0)$ es tal que $\nabla_{\mathbf{u}}f(3,4,5) = (6,8,-10)\cdot(-4/5,3/5,0) = 0$.

70. Demostrar que la curva $x = t^2$, $y = 3t$, $z = 2\sqrt{t}$ interseca la superficie $2x^2+y^2+2z = 15$ en un ángulo recto, en el punto $(1,3,2)$.

Solución La ecuación paramétrica de la curva $\mathbf{r}(t) = (t^2, 3t, 2\sqrt{t})$ y $\mathbf{r}'(t) = (2t, 3, 1/\sqrt{t})$ de modo que en $t = 1$, $\mathbf{r}'(t) = (2,3,1)$.

Sea $g(x,y,z) = x^2+y^2+2z-15 = 0$, entonces $\nabla g(x,y,z) = (4x, 2y, 2)$, $\nabla g(1,3,2) = (4,6,2)$ y se tiene que $\nabla g(1,3,2)$ y $\mathbf{r}'(t)$ son colineales, es decir un vector tangente a la curva en

$(1,3,2)$ es proporcional a un vector perpendicular a la superficie.

71. Sea $f(x,y)=x^2+xy-y^2$, determinar el incremento y el diferencial de f.

Solución El incremento $\Delta f = f(x+h,y+k)-f(x,y)=(x+h)^2+(x+h)(y+k)-(y+k)^2-x^2-xy+y^2=[(2x+y)h+(x-2y)k\,]+h^2+hk-k^2$.

El diferencial $df(x,y)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)h+\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)k=(2x+y)h+(x-2y)k$.

72. Si h es la altura de un cono de 30cm y el radio r de la base es de 10cm, determinar la variación del volumen, si h aumenta 3mm y r disminuye 1mm.

Solución la variación del volumen se aproxima por el diferencial $dV=\frac{1}{3}\pi(2rhdr+r^2dh)=\frac{1}{3}\pi(2(10)(30)(-0.1)+100(0.3))=-10\pi\text{cm}^3$.

73. Calcular aproximadamente $1.02^{3.01}$.

Solución Sea $f(x,y)=x^y$, $x=1$, $y=3$, $h=0.02$, $k=0.01$, entonces $f(x+h,y+k)\approx f(x,y)+df(x,y)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = x^y+yx^{y-1}h+(x^y\ln x)k$, por lo tanto $1.02^{3.01}\approx 1^3+3(0.02)+\ln 1\,(0.01)=1.06$.

74. Usando diferenciales, calcular aproximadamente el valor:

i) $\sqrt{26}\,\sqrt[3]{28}\,\sqrt[4]{17}$ ii) $(\sqrt{15}+\sqrt{99})^2$.

Solución

i) Sea $f(x,y,z)=\sqrt{x}\,\sqrt[3]{y}\,\sqrt[4]{z}$, entonces $f(x+h,y+k,z+l)\approx f(x,y,z)+\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)h+\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)k+\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)l$, con $x=25$, $y=27$, $z=16$, $h=1$, $k=1$, $l=1$; $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\sqrt[3]{y}\,\sqrt[4]{z}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{1}{3y^{2/3}}\sqrt{x}\,\sqrt[4]{z}$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}=\sqrt{x}\,\sqrt[3]{y}\dfrac{1}{4z^{3/4}}$. Así: $f(26,28,17)\approx 5\cdot3\cdot2+\dfrac{3\cdot2}{10}+5\dfrac{1}{3\cdot9}2+5\cdot3(\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{8})=30+0.60+0.37+0.47=31.44$.

ii) Sea $f(x,y)=(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$, $x=16$, $y=100$, $h=-1$, $k=-1$, entonces $f(x+h,y+k)\approx f(x,y)+\dfrac{\partial f}{\partial x}h+\dfrac{\partial f}{\partial y}k$, con $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{y}} \Longrightarrow f(15,99)\approx(14)^2+\frac{1}{4}(14)(-1)+\frac{1}{10}(14)(-1)=191.1$.

75. Determinar el plano tangente y la normal a la superficie $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{16}=3$, en el punto $(2,3,4)$.

Solución Sea $f(x,y,z)=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{16}-3=0$, entonces $\nabla f=(\frac{1}{2}x,\frac{2}{9}y,\frac{1}{8}z)$ es normal a la superficie i.e. $\nabla f(2,3,4) = (1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2})$, o sea $(x-2) + \frac{2}{3}(y-3) + \frac{1}{2}(z-4) = 0 \iff$ $x - 2 + \frac{2}{3}y - 2 + \frac{1}{2}z - 2 = x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{2}z - 6 = 0 \iff 6x + 4y + 3z - 36 = 0.$

La normal es $\boldsymbol{\eta} = \dfrac{1}{\sqrt{61}}(6,4,3)$.

76. Hallar un vector normal a la superficie $x^2 + y^2 - z = 1$, en el punto $(1,1,1)$.

Solución Sea $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z - 1 = 0$, entonces $\nabla f(2x, 2y, -1)$ es normal a la superficie, es decir $\nabla f(1,1,1) = (2,2,-1)$.

77. Hallar el ángulo de intersección en $(-1,2,1)$ entre las superficies $x^2y + z = 3$, $x \ln z - y^2 = -4$.

Solución El ángulo de intersección está determinado por el ángulo entre los vectores normales a las superficies, es decir si $f(x,y,z) = x^2y + z - 3 = 0$, $g(x,y,z) = x \ln z - y^2 + 4 = 0$, entonces $\nabla f(-1,2,1) = (-4,1,1)$, $\nabla g(-1,2,1) = (0,-4,1)$, por lo que $\cos\theta = \dfrac{(-4,1,1)\cdot(0,-4,1)}{\|(4,1,1)\|\,\|(0,-4,1)\|} = \dfrac{-3}{\sqrt{18}\sqrt{17}}$ i.e. $\theta = \arccos \dfrac{-3}{\sqrt{18}\sqrt{17}}$.

78. Encontrar la ecuación del plano tangente a la superficie dada en el punto indicado:

i) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $(3,4,25)$ ii) $f(x,y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$, $(4,-3,0)$.

Solución

i) El vector normal al plano en (x,y,z), es $(2x, 2y, -1)$, por lo que en $(3,4,25)$ es $(6,8,-1)$ y el plano tangente satisface $(x-3, y-4, z-25)\cdot(6,8,-1) = 0$, es decir $6x + 8y - z - 25 = 0$.

ii) En el punto $(4,-3,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{-x}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{-y}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}$ se indefinen, pero el vector $(4,-3,0)$ es perpendicular al plano tangente por lo que:

$(4,-3,0)\cdot(x-4, y-3, 2) = 0 \Longrightarrow 4x - 3y = 0.$

79. Sea $\mathbf{r}(x,y,z) = (x,y,z)$, $r(x,y,z) = \|\mathbf{r}(x,y,z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

i) Demostrar que $\nabla r(x,y,z)$ es un vector unitario en la dirección de $\mathbf{r}(x,y,z)$.

ii) Demostrar que $\nabla r^n = n r^{n-2}\mathbf{r}$, si $n \in \mathbb{Z}$.

iii) Encontrar un campo escalar f tal que $\nabla f = \mathbf{r}$.

Solución

i) En efecto, $\mathbf{r}(x,y,z) = (x,y,z)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ y $\nabla r = (x,y,z)\dfrac{1}{\|\mathbf{r}\|} = \dfrac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|}$.

ii) Dado que $r^n = (x^2+y^2+z^2)^{n/2}$, entonces $\nabla r^n = \frac{1}{2}n(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}-1}(2x,2y,2z) = n\mathbf{r}\|\mathbf{r}\|^{n-2}$.

iii) Sea $f(x,y,z) = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$, entonces $\nabla f = \mathbf{r}$.

80. La intersección de las dos superficies dada por las ecuaciones $2x^2+3y^2-z^2 = 25$ y $x^2+y^2 = z^2$, contiene una curva Γ que pasa por el punto $(\sqrt{7},3,4)$.

i) Determinar un vector tangente unitario $\mathbf{t}$ a Γ en el punto $(\sqrt{7},3,4)$, sin usar la representación paramétrica canónica de la curva.

ii) Verificar el resultado usando como parámetro a z, para la representación paramétrica de la curva Γ.

Solución

i) Sea $f_1(x,y,z) = 2x^2+3y^3-z^2-25 = 0$ y $f_2(x,y,z) = x^2+y^2-z^2 = 0$, entonces $\nabla f_1(x,y,z) = (4x,6y,-2z)$ y $\nabla f_2(x,y,z) = (2x,2y,-2z)$ son normales a las superficies, por lo que $\nabla f_1 \times \nabla f_2$ es tangente a la curva Γ. De esta forma $\nabla f_1(\sqrt{7},3,4) \times \nabla f_2(\sqrt{7},3,4) = (24,-4\sqrt{7},3\sqrt{7})$ y $\boldsymbol{\eta} = \pm\frac{1}{\sqrt{751}}(24,-4\sqrt{7},3\sqrt{7})$.

ii) Si $t = z$, entonces $2x^2+3y^2-t^2 = 25$, $x^2+y^2 = t^2 \Longrightarrow y^2+t^2 = 25 \Longrightarrow y = \sqrt{25-t^2}$, $x = \sqrt{2t^2-25}$. Así la curva parametrizada es $\mathbf{r}(t) = (\sqrt{2t^2-25},\sqrt{25-t^2},t)$, para $\frac{5}{2}\sqrt{2} \le t \le 5$.

Cuando $t = 4$, $\mathbf{r}(4) = (\sqrt{7},3,4)$ y un vector perpendicular a $\mathbf{r}(t)$ es el vector tangente $\mathbf{r}'(t) = (\frac{2t}{\sqrt{2t^2-25}},\frac{-t}{\sqrt{25-t^2}},1)$ y $\mathbf{r}'(4) = (8/\sqrt{7},-4/3,1)$, $\|\mathbf{r}'(4)\| = \frac{\sqrt{751}}{3\sqrt{7}}$, por lo que se tiene $\boldsymbol{\eta} = \pm\frac{\mathbf{r}'(4)}{\|\mathbf{r}'(4)\|} = \pm(24,-4\sqrt{7},3\sqrt{7})\frac{1}{\sqrt{751}}$.

81. Las tres ecuaciones $F(u,v) = 0$, $u = xy$, $v = \sqrt{x^2+z^2}$, donde F es de clase C^1, definen una superficie en $\mathbb{R}^3$. Determinar un vector normal a esta superficie en el punto $x = 1$, $y = 1$, $z = \sqrt{3}$, si se sabe que $\frac{\partial F}{\partial u}(1,1) = 1$, $\frac{\partial F}{\partial v}(1,1) = 2$.

Solución Sea $G(x,y,z) = F(u(x,y,z),v(x,y,z)) = 0$, entonces el vector normal a la superficie es $\nabla G(1,1,\sqrt{3}) = (\frac{\partial G}{\partial x}(1,1,\sqrt{3}),\frac{\partial G}{\partial y}(1,1,\sqrt{3}),\frac{\partial G}{\partial z}(1,1,\sqrt{3}))$.

Ahora, $\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \Longrightarrow \frac{\partial G}{\partial x}(1,1,\sqrt{3}) = \frac{\partial F}{\partial u}y + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}\Big|_{(1,1,\sqrt{3})} = 2$,

$\dfrac{\partial G}{\partial y} = \dfrac{\partial F}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} \Longrightarrow \dfrac{\partial G}{\partial y}(1,1,\sqrt{3}) = \dfrac{\partial F}{\partial u}x\Big|_{(1,1,\sqrt{3})} = 1.$

$\dfrac{\partial G}{\partial z} = \dfrac{\partial F}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial z} \Longrightarrow \dfrac{\partial G}{\partial z}(1,1,\sqrt{3}) = \dfrac{\partial F}{\partial v}\dfrac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}\Big|_{(1,1,\sqrt{3})} = \sqrt{3}$, es decir un vector normal a la superficie es $(2,1,\sqrt{3})$.

82. Calcule las derivadas direccionales de $f(x,y,z) = x^2+2y^2+3z^2$ en $(1,1,0)$, en la dirección $(1,-1,2)$ y de $f(x,y,z) = \left(\frac{x}{y}\right)^z$ en $(1,1,1)$, en la dirección $(2,1,-1)$.

    Solución El gradiente de f, $\nabla f = (2x, 4y, 6z)$ el cual evaluado en $(1,1,0)$ es $(2,4,0)$, por lo que $\nabla f(1,1,0)\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2) = (2,4,0)\cdot(1,-1,2)\frac{1}{\sqrt{6}} = -\frac{2}{\sqrt{6}}$.

    Por otro lado, $\nabla f = \left(\frac{x}{y}\right)^z(\frac{z}{x}, -\frac{z}{y}, \ln(\frac{x}{y}))$ y $\nabla f(1,1,1) = (1,-1,0)$. Así se tiene:

    $\nabla f(1,1,1)\cdot(-2,1,-1)\frac{1}{\sqrt{6}} = (1,-1,0)\cdot(2,1,-1)\frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

83. Determinar la ecuación del plano tangente a la superficie $z = x\sqrt{y}$ en el punto $(2,0,0)$.

    Solución Sea $f(x,y,z) = z - x\sqrt{y} = 0$, el gradiente ∇f determinar un vector normal a la superficie, pero en $(2,0,0)$, $\nabla f(2,0,0)$ no existe, pues $\nabla f = (-\sqrt{y}, \frac{-x}{2\sqrt{y}}, 1)$.

    Sin embargo observemos que si (x_0,y_0,z_0) es un punto de la superficie donde existe el gradiente, $(x-x_0, y-y_0, z-z_0)\cdot(-\sqrt{y_0}, -\frac{x_0}{2\sqrt{y_0}}, 1) = 0$, es el plano tangente en el punto (x_0,y_0,z_0). Así $-x\sqrt{y_0}+x_0\sqrt{y_0}-y\frac{x_0}{2\sqrt{y_0}}+\frac{x_0\sqrt{y_0}}{2}+z-z_0 = 0 \Longrightarrow -x\sqrt{y_0}-y\frac{x_0}{2\sqrt{y_0}}+z+\frac{z_0}{2} = 0$, pues $z_0 = x_0\sqrt{y_0} \Longrightarrow y + 2\frac{x}{x_0}y_0 - z\sqrt{y_0}\frac{2}{x_0} + \frac{2}{x_0}\sqrt{y_0}\frac{z_0}{2} = 0$ y si $(x_0,y_0,z_0) \longrightarrow (2,0,0)$ tenemos el plano $y = 0$.

    Otra manera de resolver el ejercicio, es observar que la misma superficie satisface $z^2 - x^2y = 0$; de esta forma $g(x,y,z) = z^2 - x^2y$ es tal que $\nabla g(2,0,0)$, donde $\nabla g(= (-2xy, -x^2, 2z))$ es normal a la superficie en $(2,0,0)$. De esta forma $\nabla f(2,0,0) = (0,-4,0)$ y $(x-2,y,z)\cdot(0,-4,0) = 0 = -4y$ es el plano tangente, es decir $y = 0$.

84. Determinar la ecuación del plano tangente a la superficie $z^3 + (x+y)z^2 + x^2 + y^2 = 13$ en el punto $(2,2,1)$.

    Solución Sea $f(x,y,z) = z^3 + (x+y)z^2 + x^2 + y^2 - 13$, entonces $\nabla f = (z^2+2x, z^2+2y, 3z^2+2(x+y)z)$ y $\nabla f(2,2,1) = (5,5,11)$. Así el plano tangente a la superficie es $(x-2, y-2, z-1)\cdot(5,5,11) = 0 \Longleftrightarrow 5x+5y+11z = 31$.

85. Sea $\mathbf{x}$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^p$, probar que:

a) Si $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, $A \in \mathsf{M}_{p\times n}$, entonces $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = A$.

b) Si $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}'\mathbf{x}$, entonces $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{a}'$.

c) Si $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'A\mathbf{x}$, con A matriz simétrica, entonces $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = 2A\mathbf{x}$.

d) Si $f(X) = \mathbf{a}'X\mathbf{b}$, con $X \in \mathsf{M}_{n,p}$, matriz $n \times p$, entonces $\dfrac{\partial f}{\partial X} = \mathbf{a}\mathbf{b}'$.

e) Si $f(X) = \mathbf{a}'X\mathbf{a}$, con $X \in \mathsf{M}_{n,n}$, (matriz simétrica $n\times n$), entonces $\dfrac{\partial f}{\partial X} = 2\mathbf{a}\mathbf{a}' - D(\mathbf{a}\mathbf{a}')$, donde $D(\mathbf{a}\mathbf{a}')$ es una matriz diagonal, cuyos elementos son los elementos de la diagonal de $\mathbf{a}\mathbf{a}'$.

Solución

a) Sea la función $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, con $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, entonces $f_i(\mathbf{x}) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$, $i = 1, \ldots, p$ y tenemos que $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_k} = a_{ik}$, es decir $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = A$, ya que la entrada ik de $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$ es a_{ik}.

b) Sea la función $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, con $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}'\mathbf{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i$, entonces $\dfrac{\partial f}{\partial x_k} = a_k$, es decir $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{a}'$.

c) Sea la función $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, con $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'A\mathbf{x} = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$, entonces $\dfrac{\partial f}{\partial x_k} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ki}x_i + \sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj}x_j = 2\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ki}x_i = (2A\mathbf{x})_k$ i.e. $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = 2A\mathbf{x}$.

d) Sea la función $f\colon \mathbb{R}^{n\cdot p} \longrightarrow \mathbb{R}$, de modo que $f(x) = \mathbf{a}'X\mathbf{b} = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{p} a_ib_jx_{ij}$, entonces $\dfrac{\partial f}{\partial x_{ij}} = a_ib_j$ i.e. $\left(\dfrac{\partial f}{\partial X}\right)_{ij} = a_ib_j \Longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial X} = \mathbf{a}\mathbf{b}'$.

e) Sea la función f de $\mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n+1)}$ en $\mathbb{R}$, definida por $f(X) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_ia_jx_{ij}$ y donde $x_{ij} = x_{ji}$.

Así, cuando $i \neq j$ tenemos $\dfrac{\partial f}{\partial x_{ij}} = a_ia_j + a_ja_i = 2a_ia_j$.

Cuando $i = j$, $f(X) = a_ia_ix_{ii} + \sum\limits_{\substack{i,j\\ i\neq j}} a_ia_jx_{ij} \Longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x_{ii}} = a_i^2$, entonces $\dfrac{\partial f}{\partial X} = 2\mathbf{a}\mathbf{a}' - D(\mathbf{a}\mathbf{a}')$.

86. Sea $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, U abierto, una función con derivadas de orden 3 continuas en U.

a) Probar que $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j^2} = \dfrac{\partial^3 f}{\partial x_j \partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^3 f}{\partial x_j^2 \partial x_i}$, sobre U.

b) Demostrar que $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}$ es la misma sobre U, si se permuta (i, j, k).

Solución Denotemos $f_{ij} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.

a) Observemos que $f_{ij} = f_{ji}$ siempre que f_{ij} sea continua, usando el teorema de Schwarz.

Así como f_{ijk} es continua para todo $(i,j,k)\in\{1,\dots,n\}^3$:

$f_{ji}=f_{ij}\Longrightarrow f_{jij}=f_{ijj}=f_{ij^2}$,

$f_{ij}=f_{ji}\Longrightarrow f_{jij}=f_{jji}=f_{j^2i}$ y tenemos el resultado.

b) Por otro lado, como:

$f_{ji}=f_{ij}\Longrightarrow f_{ijk}=f_{jik},\, f_{kij}=f_{kji}$,

$f_{jk}=f_{kj}\Longrightarrow f_{ijk}=f_{ikj},\, f_{jki}=f_{kji}$,

$f_{ik}=f_{ki}\Longrightarrow f_{jik}=f_{jki},\, f_{ikj}=f_{kij}$, se tiene que $f_{ijk}=f_{ikj}=f_{kij}=f_{kji}=f_{jki}=f_{jik}$.

2.5 Función implícita

87. Demostrar que la relación propuesta define implícitamente y en función de x, en un vecindario del par (a,b) indicado y dar el desarrollo de orden 3 en un vecindario de a, de la función $y=\varphi(x)$.

a) $\mathrm{e}^{x+y}+y-1=0,\quad (0,0)$

b) $xy^2-\operatorname{sen}(x+y)+y=0,\quad (1,-1)$

c) $xy-\operatorname{sen}y+x=0,\quad (0,0)$

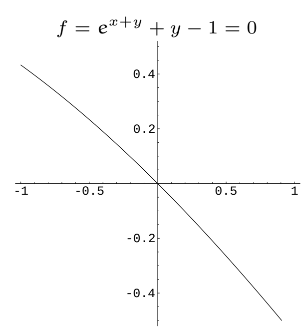
d) $1-y\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^y=0,\quad (0,1)$

e) $x^3+y^3-3xy-1=0,\quad (0,1)$

f) $2\mathrm{e}^{x+y-1}+\ln(x-y)-2x+y^3=0,\quad (1,0)$.

Solución

a) Dado que $f(x,y)=\mathrm{e}^{x+y}+y-1$ es de clase C^∞ y que $f_y(x,y)=\mathrm{e}^{x+y}+1\neq 0$, $\forall x,\ \forall y\in\mathbb{R}$ y en particular $f_y(0,0)=2\neq 0$, existe $\varphi\colon I_0\longrightarrow J_0$ única de clase C^∞, tal que $f(x,\varphi(x))=0$, con $\varphi(0)=0$.



Además, $\varphi'(x)=-\dfrac{f_x(x,\varphi(x))}{f_y(x,\varphi(x))}=-\dfrac{\mathrm{e}^{x+\varphi(x)}}{\mathrm{e}^{x+\varphi(x)}+1}$, $\varphi'(0)=-\frac{1}{2}$,

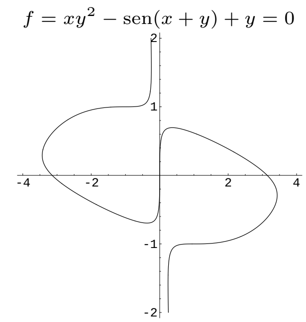
$$\varphi''(x)=-\frac{\mathrm{e}^{x+\varphi(x)}(1+\varphi'(x))(\mathrm{e}^{x+\varphi(x)}+1)-\mathrm{e}^{x+\varphi(x)}(1+\varphi'(x))\mathrm{e}^{x+\varphi(x)}}{(\mathrm{e}^{x+\varphi(x)}+1)^2}=$$

$-\dfrac{\mathrm{e}^{x+\varphi(x)}(1+\varphi'(x))}{(\mathrm{e}^{x+\varphi(x)}+1)^2}$, $\varphi''(0)=-\dfrac{(\frac{1}{2})}{4}=-\frac{1}{8}$,

$$\varphi'''(x)=-\frac{\mathrm{e}^{x+\varphi(x)}(1+\varphi'(x))^2(\mathrm{e}^{x+\varphi(x)}+1)+\mathrm{e}^{x+\varphi(x)}\varphi''(x)(\mathrm{e}^{x+\varphi(x)}+1)-\mathrm{e}^{x+\varphi(x)}(1+\varphi'(x))}{(\mathrm{e}^{x+\varphi(x)}+1)^3},$$

$\varphi'''(0)=-\dfrac{\frac{1}{4}\cdot 2-\frac{1}{8}\cdot 2-\frac{1}{2}}{8}=-\dfrac{-\frac{1}{4}}{8}=\frac{1}{32}$, $\varphi(x)=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{192}x^3+o(x^3)$.

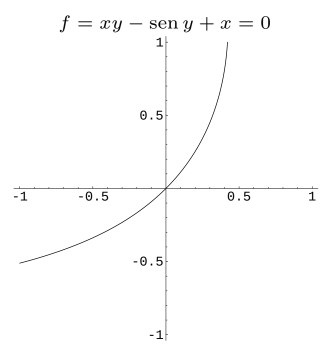
b) La función $f(x,y) = xy^2 - \operatorname{sen}(x+y) + y$ es de clase C^∞, $f_y(x,y) = 2xy - \cos(x+y) + 1$ y $f_y(1,-1) = -2 \neq 0$, $f_x = y^2 - \cos(x+y)$, entonces existe $\varphi: I_1 \longrightarrow I_{-1}$ única de clase C^∞, tal que $f(x,\varphi(x)) = 0$, con $\varphi(1) = -1$. Ahora, $x\varphi(x)^2 - \operatorname{sen}(x+\varphi(x)) + \varphi(x) = 0$, por lo que $\varphi^2 + 2x\varphi\varphi' - \cos(x+\varphi)(1+\varphi') + \varphi' = 0$ y $\varphi' = -\dfrac{\varphi^2 - \cos(x+\varphi)}{2x\varphi - \cos(x+\varphi) + 1} \Longrightarrow \varphi'(1) = 0$.



Además, $2\varphi\varphi' + \varphi\varphi' + 2x\varphi\varphi'' + \operatorname{sen}(x+\varphi)(1+\varphi')^2 - \cos(x+\varphi)\varphi'' + \varphi'' = 0$ y como $\varphi'(1) = 0 \Longrightarrow \varphi''(1)2(-1) + \varphi''(1) - \varphi''(1) = 0 \Longrightarrow \varphi''(1) = 0$.

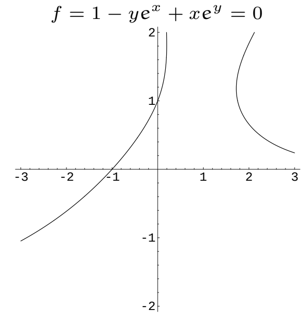
Por otro lado, $4\varphi'^2 + 4\varphi\varphi'' + 2\varphi'^2 + 2x(2\varphi'\varphi'') + 2\varphi\varphi'' + 2x\varphi'\varphi'' + 2x\varphi\varphi''' + \cos(x+\varphi)(1+\varphi')^2 + \operatorname{sen}(x+\varphi)2(1+\varphi')\varphi'' + \operatorname{sen}(x+\varphi)(1+\varphi')\varphi'' - \cos(x+\varphi)\varphi''' + \varphi''' = 0$ y como $\varphi'(1) = 0 = \varphi''(1)$ se tiene $2(-1)\varphi'''(1) + 1 - \varphi'''(1) + \varphi(1) = 0 \Longrightarrow \varphi'''(1) = \frac{1}{2} \Longrightarrow \varphi(x) = -1 + \frac{1}{12}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$.

c) $f(x,y) = xy - \operatorname{sen} y + x$ es de clase C^∞, $f_y(x,y) = x - \cos y$, $f_y(0,0) = -1 \neq 0$, $f_x = y+1$, por lo tanto $\exists \varphi: I_0 \longrightarrow J_0$ única de clase C^∞, tal que $f(x,\varphi(x)) = x\varphi(x) - \operatorname{sen}\varphi(x) + x = 0$, con $\varphi(0) = 0$. Ahora, derivando tenemos $\varphi(x) + x\varphi'(x) - \cos\varphi(x)\varphi'(x) + 1 = 0 \Longrightarrow \varphi'(0) = 1$. Calculando la derivada de nuevo, $\varphi'(x) + \varphi'(x) + x\varphi''(x) + \operatorname{sen}\varphi(x)\varphi'(x)^2 - \cos\varphi(x)\varphi''(x) = 0$.



Como $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$, tenemos $2 - \varphi''(0) = 0 \Longrightarrow \varphi''(0) = 2$. Así, $2\varphi''(x) + \varphi''(x) + x\varphi'''(x) + \cos\varphi(x)\varphi'(x)^3 + \operatorname{sen}\varphi(x)2\varphi'(x)\varphi''(x) + \operatorname{sen}\varphi(x)\varphi''(x) - \cos\varphi(x)\varphi'''(x) = 0 \Longrightarrow 3\varphi''(0) + 1 - \varphi'''(0) = 0 \Longrightarrow \varphi'''(0) = 7$ y se tiene $\varphi(x) = x + x^2 + \frac{7}{6}x^3 + o(x^3)$.

d) $f(x,y) = 1 - y\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^y$ es de clase C^∞, $f_y(x,y) = -\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^y$ y $f_y(0,1) = -1 \neq 0$, entonces $\exists \varphi\colon I_0 \longrightarrow J_1$ única de clase C^∞, tal que $f(x,\varphi(x)) = 0$, con $\varphi(0) = 1$.

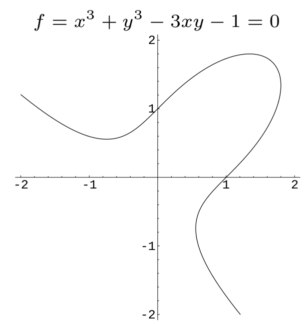


Ahora, $1 - \mathrm{e}^x\varphi(x) + x\mathrm{e}^{\varphi(x)} = 0$ y derivando tenemos $-\mathrm{e}^x\varphi(x) - \varphi'(x)\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{\varphi(x)} + x\mathrm{e}^{\varphi(x)}\varphi'(x) = 0$, por lo que $-1 - \varphi'(0) + \mathrm{e} = 0 \Longrightarrow \varphi'(0) = -1 + \mathrm{e}$.

Además, $-\mathrm{e}^x\varphi(x) - \mathrm{e}^x\varphi'(x) - \mathrm{e}^x\varphi'(x) - \mathrm{e}^x\varphi''(x) + \mathrm{e}^{\varphi(x)}\varphi'(x) + \varphi'(x)\mathrm{e}^{\varphi(x)} + x\varphi''(x)\mathrm{e}^{\varphi(x)} + x\varphi'(x)^2\mathrm{e}^{\varphi(x)} = 0$.

En $x = 0$, $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) = \mathrm{e} - 1$ y $-1 - 2(\mathrm{e}-1) - \varphi''(0) + 2(\mathrm{e}-1)\mathrm{e} = 0 \Longrightarrow \varphi''(0) = 1 - 4\mathrm{e} + 2\mathrm{e}^2$. Además, derivando de nuevo resulta $-\mathrm{e}^x\varphi - 3\mathrm{e}^x\varphi' - 3\mathrm{e}^x\varphi'' + 3\varphi''\mathrm{e}^\varphi - \mathrm{e}^x\varphi''' + 3(\varphi')^2\mathrm{e}^\varphi + 3x\varphi'\varphi''\mathrm{e}^\varphi + x\varphi'''\mathrm{e}^\varphi + x(\varphi')^3\mathrm{e}^\varphi = 0$, por lo tanto en $x = 0$, $\varphi'(0) = \mathrm{e} - 1$, $\varphi''(0) = 1 - 4\mathrm{e} + 2\mathrm{e}^2$ y $-1 - 3(\mathrm{e}-1) - 3(1 - 4\mathrm{e} + 2\mathrm{e}^2) + 3(1 - 4\mathrm{e} + 2\mathrm{e}^2)\mathrm{e} + 3(\mathrm{e}-1)^2\mathrm{e} = \varphi'''(0)$, o sea $\varphi'''(0) = -1 + 15\mathrm{e} - 24\mathrm{e}^2 + 9\mathrm{e}^3$. Así tenemos que $\varphi(x) = 1 + (\mathrm{e}-1)x + (\mathrm{e}^2 - 2\mathrm{e} + \frac{1}{2})x^2 + (\frac{3}{2}\mathrm{e}^3 - 4\mathrm{e}^2 + \frac{5}{2}\mathrm{e} - \frac{1}{6})x^3 + o(x^3)$.

e) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy + 1$, es de clase C^∞, $f_y(x,y) = 3y^2 - 3x$, $f_y(0,1) = 3 \neq 0$, entonces existe $\varphi\colon I_0 \longrightarrow I_1$ única de clase C^∞ tal que $f(x,\varphi(x)) = 0$, con $\varphi(0) = 1$. Ahora $x^3 + \varphi^3(x) - 3x\varphi(x) + 1 = 0 \Longrightarrow 3x^2 + 3\varphi^2(x)\varphi'(x) - 3\varphi(x) - 3x\varphi'(x) = 0$.



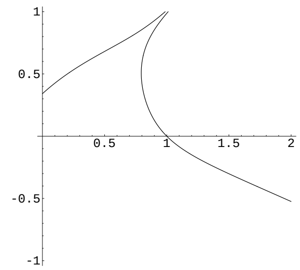
En $(0,1)$ tenemos $3\varphi'(0) - 3 = 0 \Longrightarrow \varphi'(0) = 1$.

Derivando de nuevo, $6x + 6\varphi(x)\varphi'(x)^2 + 3\varphi^2(x)\varphi'' - 3\varphi'(x) - 3\varphi'(x) - 3x\varphi''(x) = 0$.

En $(0,1)$ se tiene $6 + 3\varphi''(0) - 6 = 0 \Longrightarrow \varphi''(0) = 0$ y derivando por tercera vez tenemos $6 + 12\varphi'\varphi''\varphi + 6\varphi'^3 + 3\varphi'''\varphi^2 + 6\varphi''\varphi\varphi' - 6\varphi'' - 3\varphi'' - 3x\varphi''' = 0$.

Para $x = 0$ se tiene $6 + 6 + 3\varphi'''(0) = 0 \Longrightarrow \varphi'''(0) = -4$ y $\varphi(x) = 1 + x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$.

f) $f(x,y) = 2e^{x+y-1} + \ln(x-y) - 2x + y^3$ es de clase C^∞, $f_y(x,y) = 2e^{x+y-1} - \dfrac{1}{x-y} + 2y^2$, $f_y(1,0) = 1 \neq 0$ y existe $\varphi\colon I_1 \longrightarrow J_0$ única de clase C^∞ si $x > y$, tal que $f(x,\varphi(x)) = 0$, $\varphi(1) = 0$.



Así tenemos $2e^{x+\varphi(x)-1} + \ln(x-\varphi(x)) - 2x + \varphi^3(x) = 0 \Longrightarrow$ $2e^{x+\varphi-1}(1+\varphi') + \dfrac{1-\varphi'}{x-\varphi} - 2 + 3\varphi^2\varphi' = 0 \Longrightarrow 2 + 2\varphi'(1) - \varphi'(1) + 1 - 2 = 0 \Longrightarrow \varphi'(1) = -1$. Además, $2e^{x+\varphi-1}(1+\varphi')^2 + 2e^{x+\varphi-1}\varphi'' - \dfrac{\varphi''(x+\varphi) - (1-\varphi')^2}{(x-\varphi)^2} + 6\varphi\varphi'^2 + 3\varphi^2\varphi'' = 0 \Longrightarrow$ $2\varphi'' - \varphi'' - 4 = 0 \Longrightarrow \varphi''(1) = 4$. Derivando de nuevo, $2e^{x+\varphi-1}(1+\varphi')^3 + 4e^{x+\varphi-1}(1+\varphi')\varphi'' + 2e^{x+\varphi-1}\varphi'''(x-\varphi)^{-1} + \varphi''(x-\varphi)^2(1-\varphi') + 2(1-\varphi')\varphi''(x-\varphi)^2 + 2(1-\varphi')^3(x-\varphi) + 6(\varphi')^3 + 12\varphi\varphi'\varphi'' + 6\varphi\varphi'\varphi'' + 3\varphi^2\varphi''' = 0$.

En $x = 1$, $\varphi(1) = 0$, $\varphi'(1) = -1$, $\varphi''(1) = 4$ y $2\varphi'''(1) - \varphi'''(1) + 4(2) + 2(2)(4) + 2(2)^3 1 + 6(-1)^3 = 0 \Longrightarrow \varphi'''(1) = -34$ y $\varphi(x) = -(x-1) + 2(x-1)^2 - \frac{17}{3}(x-1)^3 + o(x-1)^3$.

88. Demostrar que la relación propuesta define implícitamente y en función de x sobre $\mathbb{R}$ y que la aplicación $y = \varphi(x)$ es de clase C^∞ en $\mathbb{R}$:

a) $y^3 + y + x = 0$

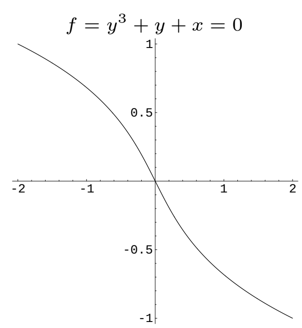
b) $y^3 + (x^2+1)y + x^4 = 0$

c) $y^5 + (x^2+1)y + 1 = 0$

d) $y^3 + e^x y + x^2 = 0$

Solución

a) Sea $f(x,y) = y^3 + y + x$, como $f_y(x,y) = 3y^2 + 1 \neq 0$, $\forall y \in \mathbb{R}$, se tiene que existe $\varphi\colon I_x \longmapsto J_y$ única, tal que $f(x,\varphi(x)) = 0$, $\varphi(x) = y$; φ es de clase C^∞, pues f es de clase C^∞. Preferiblemente debe escribirse como φ_x la aplicación φ única, pues depende localmente de x. Se debe probar que existe una única función φ global en $\mathbb{R}$.



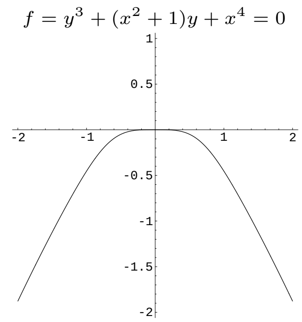
La función $f(x_0,\cdot)\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, con $f(x_0,\cdot)(y) = f(x,y)$ es estrictamente creciente, de modo que $\lim\limits_{y\to\pm\infty} f(x_0,y) = \pm\infty$, para cada x_0 fijo, pues $f'(x_0,y) = 3y^2 + 1 > 0$.

Así $\forall x_0$ existe un único $y_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0,y_0) = 0$. Así existe una aplicación $\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

tal que $f(x,\varphi(x))=0$ i.e. φ_x es la restricción de φ sobre cada I_x y φ es de clase C^∞.

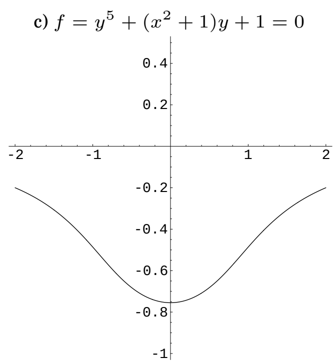
b) Sea $f(x,y) = y^3+(x^2+1)y+x^4$. Un razonamiento análogo prueba que como $f_y(x,y)=3y^2+x^2+1>0$, $f(x_0,\cdot)$ es estrictamente creciente con $\lim_{y\to\pm\infty} f(x_0,y) = \pm\infty$, para cada x_0, entonces $\exists ! y_0$ tal que $f(x_0,y_0)=0$, es decir existe $\varphi\colon \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ tal que $f(x,\varphi(x))=0$.

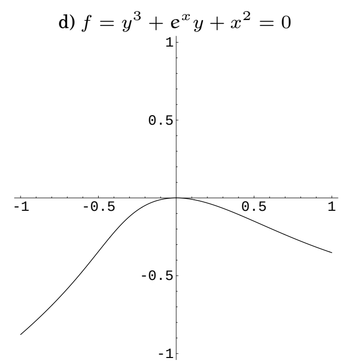
Por el teorema de la función implícita φ es única y de clase C^∞.



c) $f_y(x,y)=5y^4+x^2+1>0$, $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$ y usando el razonamiento de a) se tiene el resultado.

d) $f_y(x,y)=3y^2+e^x>0$, $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$ y usando el razonamiento de a) se tiene el resultado.





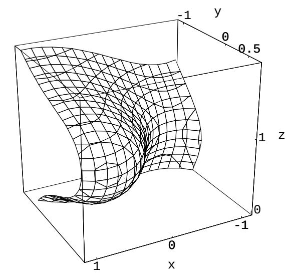
89. Demuestre que la relación propuesta define implícitamente z en función de (x,y) en un vecindario de (a,b,c) y dar el desarrollo limitado de orden 2 en un vecindario (a,b) de la función $z=\varphi(x,y)$.

a) $x^3+y^3+z^3-xz-x+y-2z+1=0$, $(0,0,1)$ b) $\ln(1+y-z)-x-z=0$, $(0,0,0)$

c) $(x^2+y^2+z^2)\ln(x+y+z)-e^{x+y}+1=0$, $(0,0,1)$.

Solución

a) Sea $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - xz - x + y - 2z + 1 = 0$, como $f_z(x,y,z) = 3z^2 - x - 2$ y $f_z(0,0,1) = 1 \neq 0$, existe una única función $\varphi\colon B((0,0),\epsilon) \longrightarrow J_1$ tal que $f(x,y,\varphi(x,y)) = 0$, con $\varphi(0,0) = 1$.



Dado que $f(x,y,\varphi(x,y)) = 0 = x^3 + y^3 + \varphi^3(x,y) - x\varphi(x,y) - x + y - 2\varphi(x,y) + 1$, entonces:

$3x^2 + 3\varphi^2(x,y)\varphi_x(x,y) - x\varphi_x(x,y) - \varphi(x,y) - 1 - 2\varphi_x(x,y) = 0 \Longrightarrow 3\varphi_x(0,0) - 2 - 2\varphi_x(0,0) = 0 \Longrightarrow \varphi_x(0,0) = 2$,

$3y^2 + 3\varphi^2(x,y)\varphi_y(x,y) - x\varphi_y(x,y) + 1 - 2\varphi_y(x,y) = 0 \Longrightarrow 3\varphi_y(0,0) + 1 - 2\varphi_y(0,0) = 0 \Longrightarrow \varphi_y(0,0) = -1$,

$6x + 6\varphi(x,y)\varphi_x^2(x,y) + 3\varphi^2(x,y)\varphi_{xx}(x,y) - x\varphi_{xx}(x,y) - 2\varphi_x(x,y) - 2\varphi_{xx}(x,y) = 0 \Longrightarrow 6{\cdot}4 + 3\varphi_{xx}(0,0) - 4 - 2\varphi_{xx}(0,0) = 0 \Longrightarrow \varphi_{xx}(0,0) = -20$,

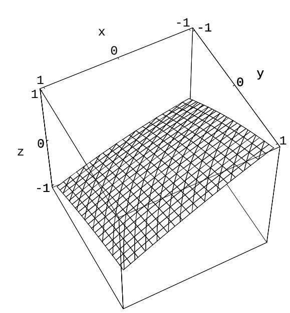
$6y + 6\varphi(x,y)\varphi_y^2(x,y) + 3\varphi^2(x,y)\varphi_{yy}(x,y) - x\varphi_{yy}(x,y) - 2\varphi_{yy}(x,y) = 0 \Longrightarrow 6 + 3\varphi_{yy}(0,0) - 2\varphi_{yy}(0,0) = 0 \Longrightarrow \varphi_{yy}(0,0) = -6$,

$6\varphi_x(x,y)\varphi_y(x,y) + 3\varphi^2(x,y)\varphi_{xy}(x,y) - x\varphi_{xy}(x,y) - \varphi_y(x,y) - 2\varphi_{xy}(x,y) = 0 \Longrightarrow -12 + 3\varphi_{xy}(0,0) + 1 - 2\varphi_{xy}(0,0) = 0 \Longrightarrow \varphi_{xy}(0,0) = 11$.

Así $\varphi(x,y) = \varphi(0,0) + \varphi_x x(0,0) + \varphi_y y(0,0) + \frac{1}{2!}\varphi_{xx}(0,0)x^2 + xy\varphi_{xy}(0,0) + \frac{1}{2!}\varphi_{yy}(0,0)y^2 + o(x^2+y^2) = 1 + (2x - y) + (-10x^2 + 11xy - 3y^2) + o(\|(x,y)\|^2)$.

b) Sea $f(x,y,z) = \ln(1+y-z) - x - z = 0$, $f_z(x,y,z) = -\dfrac{1}{1+y-z} - 1$, $f_z(0,0,0) = -2 \neq 0$, entonces existe $\varphi\colon B((0,0),\epsilon) \longrightarrow I_0$, única tal que $f(x,y,\varphi(x,y)) = 0$, con $\varphi(0,0) = 0$. Ahora $f(x,y,\varphi(x,y)) = 0 = \ln(1+y-\varphi(x,y)) - x - \varphi(x,y)$, entonces:

$f = \ln(1+y-z) - x - z = 0$



$\dfrac{-\varphi_x(x,y)}{1+y-\varphi(x,y)} - 1 - \varphi_x(x,y) = 0 \Longrightarrow 2\varphi_x(0,0) = -1$, es decir $\varphi_x(0,0) = -\frac{1}{2}$,

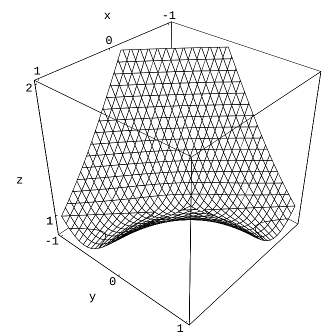
$\dfrac{1-\varphi_y(x,y)}{1+y-\varphi(x,y)} - \varphi_y(x,y) = 0 \Longrightarrow 1 - 2\varphi_y(0,0) = 0 \Longrightarrow \varphi_y(0,0) = \frac{1}{2}$,

$\dfrac{\varphi_{xx}(x,y)(1+y-\varphi(x,y)) + \varphi_x^2(x,y) + \varphi_{xx}(x,y)}{(1+y-\varphi(x,y))^2} = 0 \Longrightarrow 2\varphi_{xx}(0,0) + \frac{1}{4} = 0 \Longrightarrow \varphi_{xx}(0,0) =$

$-\frac{1}{8}$,
$\dfrac{-\varphi_{yy}(x,y)(1+y-\varphi(x,y))-(1-\varphi_y(x,y))^2}{(1+y-\varphi(x,y))^2}-\varphi_{yy}(x,y)=0 \Longrightarrow -2\varphi_{yy}(0,0)-\frac{1}{4}=0 \Longrightarrow$ $\varphi_{yy}(0,0)=-\frac{1}{8}$,
$\dfrac{\varphi_{xy}(x,y)(1+y-\varphi(x,y))-(1-\varphi_y(x,y))\varphi_x(x,y)}{(1+y-\varphi(x,y))^2}+\varphi_{xy}(x,y)=0 \Longrightarrow 2\varphi_{xy}(0,0)+\frac{1}{4}=$ $0 \Longrightarrow \varphi_{xy}(0,0)=-\frac{1}{8}$.

Así, $\varphi(x,y)=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{16}x^2-\frac{1}{8}xy-\frac{1}{16}y^2+o(\|(x,y)\|^2)=\frac{1}{2}(y-x)-\frac{1}{16}(x+y)^2+o(\|(x,y)\|^2)$.

c) Sea$f(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)\ln(x+y+z)-\mathrm{e}^{x+y}+1$, $f_z(x,y)=2z\ln(x+y+z)+\dfrac{(x^2+y^2+z^2)}{(x+y+z)}$ i.e. $f(0,0,1)=1\neq 0$, entonces existe $\varphi\colon B((0,0),\epsilon)\longrightarrow J_1$ única tal que $\varphi(0,0)=1$ y $f(x,y,\varphi(x,y))=0$, por lo que $(2x+2\varphi\varphi_x)\ln(x+y+\varphi)+\dfrac{(x^2+y^2+\varphi^2)}{x+y+\varphi}(1+\varphi_x)-\mathrm{e}^{x+y}=0 \Longrightarrow 1+\varphi_x(0,0)-1=0 \Longrightarrow \varphi_x(0,0)=\varphi_y(0,0)=0$, por simetría. Además:



$(2+2\varphi_x^2+2\varphi\varphi_{xx})\ln(x+y+\varphi)+\dfrac{2x+2\varphi\varphi_x}{x+y+\varphi}(1+\varphi_y)+$
$\dfrac{(2x+2\varphi\varphi_x)(x+y+\varphi)-(1+\varphi_x)(x^2+y^2+z^2)}{(x+y+\varphi)^2}(1+\varphi_x)+\dfrac{x^2+y^2+\varphi^2}{x+y+\varphi}\varphi_{xx}-\mathrm{e}^{x+y}=0 \Longrightarrow$
$-1+\varphi_{xx}(0,0)-1=0 \Longrightarrow \varphi_{xx}(0,0)=2=\varphi_{yy}(0,0)$,
$(2\varphi_y\varphi_x+2\varphi\varphi_{xy})\ln(x+y+\varphi)+\dfrac{(2x+2\varphi\varphi_x)}{x+y+\varphi}(1+\varphi_y)+$
$\dfrac{(2y+2\varphi\varphi_y)(x+y+\varphi)-(x^2+y^2+\varphi^2)(1+\varphi_y)}{x+y+\varphi}(1+\varphi_x)+\dfrac{x^2+y^2+\varphi^2}{x+y+\varphi}\varphi_{xy}-\mathrm{e}^{x+y}=0 \Longrightarrow$
$-1+\varphi_{xy}(0,0)-1=0 \Longrightarrow \varphi_{xy}(0,0)=2$.

Así, $\varphi(x,y)=1+(x^2+2xy+y^2)+o(\|(x,y)\|^2)=1+(x+y)^2+o(\|(x,y)\|^2)$.

90. Sea $A=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3/x_1+x_2+x_3+1\neq 0\}$. Sea $f\colon A\longrightarrow\mathbb{R}^3$, $f=(f_1,f_2,f_3)$, con $f_k(x_1,x_2,x_3)=\dfrac{x_k}{x_1+x_2+x_3+1}$, $k=1,2,3$. Demostrar que f es inyectiva, calcular f^{-1} y verificar que $|J_f(x_1,x_2,x_3)|=(x_1+x_2+x_3+1)^{-4}$.

Solución Se observa que $f(x_1,x_2,x_3)=f(x_1',x_2',x_3') \Longrightarrow f_i(x_1,x_2,x_3)=f_i(x_1',x_2',x_3')$, $i=1,2,3$, es decir $\dfrac{x_i}{x_1+x_2+x_3+1}=\dfrac{x_i'}{x_1'+x_2'+x_3'+1}$, $i=1,2,3 \Longrightarrow x_i(x_1'+x_2'+x_3'+1)=x_i'(x_1+x_2+x_3+1)$, $i=1,2,3$. Sumando tenemos $(x_1+x_2+x_3)(x_1'+x_2'+x_3'+1)=(x_1'+x_2'+x_3')(x_1+x_2+x_3+1) \Longrightarrow x_1+x_2+x_3=x_1'+x_2'+x_3'$. Así se tiene que si

$\dfrac{x_i}{x_1+x_2+x_3+1} = \dfrac{x_i'}{x_1'+x_2'+x_3'+1}$, $i = 1,2,3 \Longrightarrow x_i = x_i'$, $i = 1,2,3$, es decir f es inyectiva.

Por otro lado si definimos $x_0 = x_1+x_2+x_3$ y $y_0 = y_1+y_2+y_3$, donde $y_i = \dfrac{x_i}{x_0+1}$, entonces $x_i = y_i(x_0+1) \Longrightarrow x_0 = y_0(x_0+1)$ i.e $x_0 = \dfrac{y_0}{1-y_0}$, si $y_1+y_2+y_3 \neq -1$.

Así se tiene que $x_i = y_i(x_0+1) = \dfrac{y_i}{1-y_0}$, $i = 1,2,3$, es decir:

$$f^{-1}(y_1,y_2,y_3) = \left(\frac{y_1}{1-y_0}, \frac{y_2}{1-y_0}, \frac{y_3}{1-y_0}\right),$$

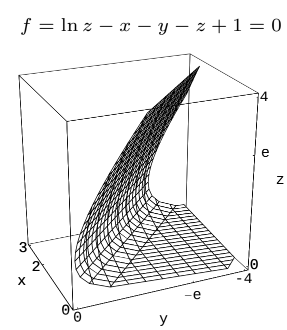
si $y_1+y_2+y_3 \neq -1$. Además , $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_i} = \dfrac{x_0-x_i+1}{(x_0+1)^2}$, $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} = -\dfrac{x_i}{(x_0+1)^2}$ si $i \neq j$, entonces:

$$J_f(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{(x_0+1)^2}\begin{pmatrix} x_0+1-x_1 & -x_1 & -x_1 \\ -x_2 & x_0+1-x_2 & -x_2 \\ -x_3 & -x_3 & x_0+1-x_3 \end{pmatrix}$$

y el Jacobiano es $\det J_f(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{(x_0+1)^2}{(x_0+1)^6} = \dfrac{1}{(x_1+x_2+x_3+1)^4}$.

91. Calcular las derivadas parciales primeras y segundas de la función $\varphi(x,y) = z$, definida implícitamente por $\ln z = x+y+z-1$, en $(2,-\mathrm{e},\mathrm{e})$.

Solución Sea $f(x,y,z) = \ln z - x - y - z + 1 = 0$, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \,]\,0,+\infty\,[)$, $f_z(x,y,z) = \frac{1}{z} - 1$, $f_z(2,-\mathrm{e},\mathrm{e}) = \frac{1}{\mathrm{e}} - 1 \neq 0$, entonces $\exists!\ \varphi\colon B((2,-\mathrm{e}),\epsilon) \longrightarrow J_\mathrm{e}$ tal que $f(x,y,\varphi(x,y)) = 0$, con $\varphi(2,-\mathrm{e}) = \mathrm{e}$. Como $\ln(\varphi(x,y)) - x - y - \varphi(x,y) + 1 = 0$, se tiene $\frac{\varphi_x}{\varphi} - 1 - \varphi_x = 0 \Longrightarrow \dfrac{\varphi_x(2,-\mathrm{e})}{\mathrm{e}} - 1 - \varphi_x(2,-\mathrm{e}) = 0 \Longrightarrow \varphi_x(2,-\mathrm{e}) = \dfrac{\mathrm{e}}{1-\mathrm{e}} = \varphi_y(2,-\mathrm{e})$,



$\dfrac{\varphi_{xx}\varphi - \varphi_x^2}{\varphi^2} - \varphi_{xx} = 0 \Longrightarrow \dfrac{\varphi_{xx}(2,-\mathrm{e})\mathrm{e} - \dfrac{\mathrm{e}^2}{(1-\mathrm{e})^2}}{\mathrm{e}^2} + \varphi_{xx}(2,-\mathrm{e}) = 0 \Longrightarrow \varphi_{xx}(\frac{1}{\mathrm{e}} - 1) = \dfrac{1}{(\mathrm{e}-1)^2} \Longrightarrow \varphi_{xx}(2,-\mathrm{e}) = \varphi_{xy}(2,-\mathrm{e}) = \varphi_{yy}(2,-\mathrm{e}) = \dfrac{\mathrm{e}}{(-\mathrm{e}+1)^3} = \dfrac{\mathrm{e}}{(1-\mathrm{e})^3}$.

92. a) Sea $n \in \mathbb{N}$, demuestre que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists! y \in \mathbb{R}$ que satisface $y^{2n+1} + y - x = 0$ y que la aplicación $\varphi(x) = y$ así definida es de clase C^1 en $\mathbb{R}$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, calcular $\displaystyle\int_0^x \varphi(t)\,dt$ en función de n, x y $\varphi(x)$.

Solución

a) Sea $f(x,y) = y^{2n+1} + y - x = 0$, entonces para x_0 fijo, $f(x_0,\cdot)(y) = y^{2n+1} + y - x_0$ es tal que $f'(x_0,\cdot)(y) = (2n+1)y^{2n} + 1 > 0$ i.e. es estrictamente creciente; además de que $\lim\limits_{y\to\pm\infty} f(x_0,\cdot)(y) = \pm\infty$, entonces $\exists!\, y_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0,y_0) = 0$.

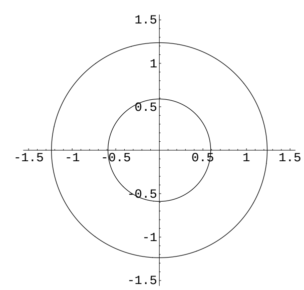
Así se define $\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x) = y$, con $f(x_0) = y_0$, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, o sea $f(x,\varphi(x)) = 0$.

Por otro lado, $f_y(x,y) = (2n+1)y^{2n} + 1 \neq 0 \Longrightarrow \exists!\psi\colon I_{x_0} \longrightarrow J_{y_0}$ tal que $f(x,\psi(x)) = 0$, $\psi(x_0) = y_0$ i.e. ψ es la restricción de φ a I_{x_0}, por lo que φ es de clase C^1.

b) Sabemos que $\varphi(0) = 0$, pues $\varphi(0)(\varphi(0)^{2n} + 1) = 0 \Longrightarrow \varphi(0) = 0$. Además, $\displaystyle\int_0^x (\varphi^{2n+1}(t)\varphi'(t) + \varphi(t)\varphi'(t) - t\varphi'(t))dt = 0 = \frac{\varphi^{2n+2}(x)}{2n+2} + \frac{\varphi^2(x)}{2} - \int_0^x (t\varphi'(t) + \varphi(t))dt + \int_0^x \varphi(t)dt \Longrightarrow \int_0^x \varphi(t)dt = -\frac{\varphi^{2n+2}(x)}{2n+2} - \frac{\varphi^2(x)}{2} + x\varphi(x)$. Como $\varphi^{2n+2}(t) = -\varphi^2(t) + t\varphi(t)$, entonces $\displaystyle\int_0^x \varphi(t)dt = \frac{2n+1}{2n+2}x\varphi(x) - \frac{n}{2n+2}\varphi^2(x)$.

93. Si $f(x,y) = (x^2+y^2)^3 - 3(x^2+y^2) + 1 = 0$, determinar y' y y'', suponiendo que $\dfrac{\partial f}{\partial y} \neq 0$.

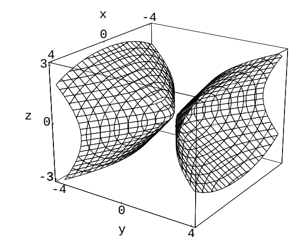
Solución Es claro que f es de clase C^∞. Dado que $f_x(x,y) = 3(x^2+y^2)^2 2x - 6x = 6x([x^2+y^2]-1)$ y $f_y(x,y) = 3(x^2+y^2)^2 2y - 6y = 6y([x^2+y^2]-1)$, por el teorema de la función implícita, si $f_y(x,y) \neq 0$ en un abierto, y se puede escribir en función de x de manera única en ese abierto.



Ahora, $f_y(x,y) \neq 0 \iff y \neq 0$ y $x^2+y^2 \neq 1$, por lo tanto existe y' y es tal que $y' = -\dfrac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)} = -\dfrac{x}{y}$ y $y'' = \dfrac{d}{dx}(-\frac{x}{y}) = -\dfrac{y - x\frac{dy}{dx}}{y^2} = -\dfrac{y + \frac{x^2}{y}}{y^2} = -\dfrac{x^2+y^2}{y^3}$, siempre y cuando $y \neq 0$ y $x^2+y^2 \neq 1$.

94. Determinar $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$, si $f(x,y,z) = x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0$, cuando $\dfrac{\partial f}{\partial z} \neq 0$.

Solución Dado que f es de clase C^∞, $f_x(x,y,z) = 2x$, $f_y(x,y,z) = -4y - z + 1$ y $f_z(x,y,z) = 6z - y$, entonces si $f_z(x,y,z) \neq 0$, por el teorema de la función implícita, existe una única función φ que es de clase C^∞, tal que $f(x,y,\varphi(x,y)) = 0$. Así, existen $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)$ y $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)$ en



$\mathbb{R}^2 \backslash \{(x,y)/ -y + 6\varphi(x,y) = 0\}$ y están dadas por:

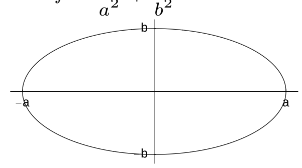
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y) = -\frac{f_x(x,y,\varphi(x,y))}{f_z(x,y,\varphi(x,y))} = -\frac{2x}{6\varphi(x,y) - y},$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y) = -\frac{f_y(x,y,\varphi(x,y))}{f_z(x,y,\varphi(x,y))} = -\frac{1 - 4y - \varphi(x,y)}{6\varphi(x,y) - y}.$$

95. Sean F y G funciones definidas por $F(x,y,u,v) = u + v - x - y$, $G(x,y,u,v) = xu + yv - 1$. Si $F(x,y,u,v) = G(x,y,u,v) = 0$, determinar $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$.

Solución Las funciones F y G son de clase C^∞. Además, como $J = \dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$ y $|J| \neq 0 \iff y - x \neq 0$, entonces existe una única función $\varphi(x,y) = (u,v)$ de clase C^∞ tal que $F(x,y,\varphi(x,y)) = G(x,y,\varphi(x,y)) = 0$, siempre que $x - y \neq 0$. Así, $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial x} = 1$, $u + x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$, por lo que $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{u+y}{x-y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{u+x}{x-y}$, si $x \neq y$.
Similarmente $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{v+y}{x-y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{v+x}{x-y}$.
Finalmente, $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = -\left(\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\right)^{-1}\left(\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right) = -\dfrac{1}{y-x}\begin{pmatrix} y & -1 \\ -x & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ u & v \end{pmatrix} =$
$\dfrac{1}{x-y}\begin{pmatrix} y+u & -y-u \\ x+u & x-u \end{pmatrix}$.

96. Sea $f(x,y) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, determinar $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, si $\dfrac{\partial f}{\partial y} \neq 0$.

Solución La función f es de clase C^∞, $f_x(x,y) = \dfrac{2x}{a^2}$, $f_y(x,y) = \dfrac{2y}{b^2} \neq 0 \iff y \neq 0$, entonces por le teorema de la función implícita y se expresa como función de x de forma única y tenemos:



$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)} = -\frac{x}{y}\frac{b^2}{a^2},\ \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{y - y'x}{y^2} = -\frac{y + \frac{x^2}{y}\frac{b^2}{a^2}}{y^2} = -\frac{y^2a^2 + x^2b^2}{a^2y^3} = -\frac{b^4}{a^2y^3},$$ si

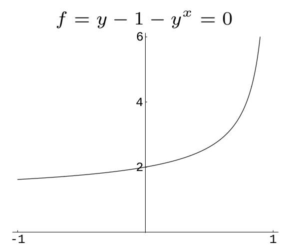
$y \neq 0$.

97. Sea $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2axy = 0$, $a > 1$, determinar que $y''(x) = 0$ y explicar el resultado.

Solución La función f es de clase C^∞, $f_x(x,y) = 2x + 2ay$, $f_y(x,y) = 2y + 2ax \neq 0 \iff y \neq -ax$, entonces por el teorema de la función implícita y se escribe en función de x,
$y'(x) = -\dfrac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)} = -\dfrac{x+ay}{y+ax}$, $\quad y''(x) = -\dfrac{(1+ay')(y+ax) - (y'+a)(x+ay)}{(y+ax)^2} =$
$-\dfrac{y + ax + ayy' + a^2xy' - xy' - ayy' - ax - a^2y}{(y+ax)^2} = -\dfrac{(1-a^2)(y-xy')}{(y+ax)^2} =$
$-\dfrac{(1-a^2)}{(y+ax)^2}\left(y + x\dfrac{x+ay}{y+ax}\right) = (1-a^2)\dfrac{y^2+2axy+x^2}{(y+ax)^2} = 0.$
Así, $y^2 + 2axy + x^2 = 0 \Longrightarrow y = \dfrac{-2ax \pm \sqrt{4a^2x^2 - 4x^2}}{4ax} = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2-1}}{2a}$ i.e. es la ecuación de un par de rectas.

98. Sea $f(x,y) = y - 1 - y^x = 0$, hallar $\dfrac{dy}{dx}$, si $\dfrac{\partial f}{\partial y} \neq 0$.

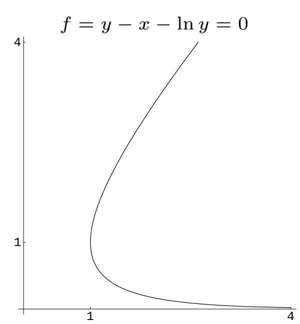
Solución La función $f(x,y)$ es de clase C^∞, para $y > 0$, $f_x(x,y) = -y^x \ln y$ y si $f_y(x,y) = 1 - xy^{x-1} \neq 0$, por el teorema de la función implícita existe y única en función de x tal que $f(x,y(x)) = 0$ y $y'(x) = -\dfrac{f_x(x,y(x))}{f_y(x,y(x))} = \dfrac{(y(x))^x \ln y(x)}{1 - x(y(x))^{x-1}}$, siempre que $x \neq (y(x))^{1-x}$.



99. Determinar $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$, si $f(x,y) = y - x - \ln y = 0$, con $\dfrac{\partial f}{\partial y} \neq 0$.

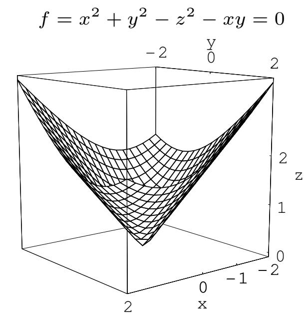
Solución La función $f(x,y) = y - x - \ln y$ es de clase C^∞, para $y > 0$, $f_x(x,y) = -1$, $f_y(x,y) = 1 - \frac{1}{y} \neq 0 \iff y \neq 1$.

Por el teorema de la función implícita, existe y única en función de x de clase C^∞, de modo que $f(x,y(x)) = 0$, siempre que $y \neq 1$. Además, $y'(x) = -\dfrac{f_x(x,y(x))}{f_y(x,y(x))} = \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{y(x)}} = \dfrac{y(x)}{y(x)-1}$ y $y''(x) = \dfrac{y'(x)(y(x)-1) - y'(x)y(x)}{(y(x)-1)^2} = \dfrac{y'(x)}{(y(x)-1)^2} = \dfrac{y(x)}{(y(x)-1)^3}$.



100. La función z viene dada por la ecuación $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 - xy = 0$. Determinar

$\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, en $x = -1$, $y = 0$, $z = 1$.



Solución Por el teorema de la función implícita existe una función $z(x,y)$ única tal que $f(x,y,z(x,y)) = 0$, si $f_z(x,y,z) = -2z \neq 0$, $f_x(x,y,z) = 2x - y$, $f_y(x,y,z) = 2y - x$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2x-y}{2z(x,y)}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}(x,y) = \dfrac{2y-x}{2z(x,y)}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial x}(-1,0) = -1$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}(-1,0) = \frac{1}{2}$.

101. Determinar $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, si $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

Solución Sea $f(x,y,z) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1$, es de clase C^∞ y como $f_z(x,y,z) = \dfrac{2z}{c^2} \neq 0 \Longleftrightarrow z \neq 0$, por el teorema de la función implícita existe $z(x,y)$ única tal que:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = -\frac{f_x(x,y,z(x,y))}{f_z(x,y,z(x,y))} = -\frac{x}{z(x,y)}\frac{c^2}{a^2},\ \frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = -\frac{f_y(x,y,z(x,y))}{f_z(x,y,z(x,y))} = -\frac{y}{z(x,y)}\frac{c^2}{b^2}.$$

Además:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y) &= -\frac{c^2}{a^2}\frac{z(x,y) - xz_x(x,y)}{z^2(x,y)} = -\frac{c^2}{a^2}\frac{z(x,y) + \dfrac{x^2}{z(x,y)}\dfrac{c^2}{a^2}}{z^2(x,y)} = -\frac{c^2}{a^2}\frac{z^2(x,y) + x^2\dfrac{c^2}{a^2}}{z^3(x,y)} \\
&= -\frac{c^4}{a^2}\frac{\dfrac{z^2(x,y)}{c^2} + \dfrac{x^2}{a^2}}{z^3(x,y)} = \frac{(y^2-b^2)c^4}{a^2b^2z^3(x,y)},
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x,y) = \frac{(x^2-b^2)c^4}{a^2b^2z^3(x,y)},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x,y) = -\frac{x}{z^2(x,y)}\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\frac{c^2}{a^2} = -\frac{xy}{z^3(x,y)}\frac{c^2}{a^2}\frac{c^2}{b^2} = -\frac{xyc^4}{a^2b^2z^3(x,y)}.$$

102. Si $f(x,y,z) = 0$, con f de clase C^1, demostrar que $\dfrac{\partial x}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x} = -1$, siempre que $f_x \neq 0$, $f_y \neq 0$, $f_z \neq 0$.

Solución Sea $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}$ tal que $f(x_0,y_0,z_0) = 0$, con $f_x(x_0,y_0,z_0) \neq 0$, $f_y(x_0,y_0,z_0) \neq 0$, $f_z(x_0,y_0,z_0) \neq 0$. Por el teorema de la función implícita existen $x(y,z)$, $y(x,z)$, $z(x,y)$ únicas, tales que $x(y_0,z_0) = x_0$, $y(x_0,z_0) = y_0$, $z(x_0,y_0) = z_0$, siempre que $f_x(x_0,y_0,z_0) \neq 0$, $f_y(x_0,y_0,z_0) \neq 0$, $f_z(x_0,y_0,z_0) \neq 0$, respectivamente.

Así tenemos que $\dfrac{\partial x}{\partial y}(y_0,z_0) = -\dfrac{f_y(x(y_0,z_0),y_0,z_0)}{f_x(x(y_0,z_0),y_0,z_0)}$, $\dfrac{\partial y}{\partial z}(x_0,z_0) = -\dfrac{f_z(x_0,y(x_0,z_0),z_0)}{f_y(x_0,y(x_0,z_0),z_0)}$,

$\dfrac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = -\dfrac{f_x(x_0, y_0, z(x_0, y_0))}{f_z(x_0, y_0, z(x_0, y_0))}$, lo que implica:

$$\frac{\partial x}{\partial y}(y_0, z_0)\cdot\frac{\partial y}{\partial z}(x_0, z_0)\cdot\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{f_y(x_0, y_0, z_0)}{f_x(x_0, y_0, z_0)}\cdot\frac{f_z(x_0, y_0, z_0)}{f_y(x_0, y_0, z_0)}\cdot\frac{f_x(x_0, y_0, z_0)}{f_z(x_0, y_0, z_0)} = -1,$$

siempre que $f_x(x_0, y_0, z_0)\cdot f_y(x_0, y_0, z_0)\cdot f_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

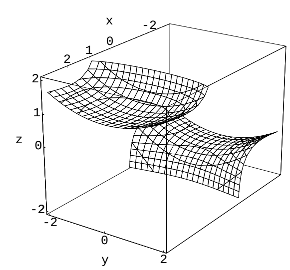
Como $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}$ es arbitrario, el resultado vale para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}$ tal que $f(x, y, z) = 0$, siempre que $f_x(x, y, z)\cdot f_y(x, y, z)\cdot f_z(x, y, z) \neq 0$.

103. Sea $z = \varphi(x, y)$, donde y está en función de x, determinada por la ecuación $\psi(x, y) = 0$. Determinar $\dfrac{dz}{dx}$, siempre que $\psi_y \neq 0$.

Solución Si $\psi_y(x, y) \neq 0$, entonces por el teorema de la función implícita existe $y(x)$ única, que satisface $\psi(x, y(x)) = 0$, de modo que $y'(x) = -\dfrac{\psi_x(x, y(x))}{\psi_y(x, y(x))}$. Por la regla de la cadena $z(x) = \varphi(x, y(x))$ tiene por derivada $z'(x) = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y(x))\dfrac{dx}{dx} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y(x))\dfrac{dy}{dx} =$ $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y(x)) - \dfrac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y(x))\dfrac{\partial \psi}{\partial x}(x, y(x))}{\dfrac{\partial \psi}{\partial y}(x, y(x))} = \begin{vmatrix} \varphi_x(x, y(x)) & \varphi_y(x, y(x)) \\ \psi_x(x, y(x)) & \psi_y(x, y(x)) \end{vmatrix} / \psi_y(x, y(x))$.

104. Sea z en función de (x, y) dada por la ecuación $f(x, y, z) = 2x^2 + xy^2 + z^2 - 8xz - z + 8 = 0$. Determinar dz y d^2z en $(2, 0, 1)$, dando claramente las condiciones de existencia.

Solución f es de clase C^∞ y si $f_z(x, y, z) = 2z - 8x - 1 \neq 0$, por el teorema de la función implícita existe $z(x, y)$ única de clase C^∞, de modo que $dz = (\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y})$ y $d^2z = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{pmatrix}$, si $2z - 8x - 1 \neq 0$.



Así, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{f_x}{f_z} = -\dfrac{4x - 8z + y^2}{2z - 8y - 1}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{f_y}{f_z} = -\dfrac{2xy}{2z - 8x - 1}$ i.e. $dz(2, 0) = (0, 0)$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{(4 - 8z_x)(2z - 8x - 1) - 2(z_x - 4)(4x + y^2 - 8z)}{(2z - 8x - 1)^2}; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(2, 0) = \tfrac{4}{15},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2x(2z - 8x - 1) - 2z_y xy}{(2z - 8x - 1)^2}; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(2, 0) = \tfrac{4}{15},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{2y(2z - 8x - 1) - (2z_x - 8)2xy}{(2z - 8x - 1)^2}; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(2, 0) = 0.$$

105. Determinar dz, d^2z, si $\ln z = x + y + z - 1$. Dar las condiciones de existencia de z en función de (x, y).

Solución Sea $f(x,y,z) = \ln z - x - y - z + 1 = 0$, por el teorema de la función implícita existe $z(x,y)$ única tal que $f(x,y,z(x,y)) = 0$, si $f_z(x,y,z) \neq 0$, es decir $f_z(x,y,z) = \frac{1}{z} - 1 = \frac{1-z}{z} \neq 0 \Longleftrightarrow z \neq 1$, $z > 0$ i.e. $z \neq 1$. Por lo tanto, $z(x,y)$ se puede determinar en todo punto (x,y) salvo para $z = 1$.

Como f es de clase C^∞, $z(x,y)$ también es de clase C^∞, las derivadas parciales son continuas y se tiene $dz = (z_x, z_y)$, $\quad d^2z = \begin{pmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{xy} & z_{yy} \end{pmatrix}$, donde $z_x = -\frac{f_x}{f_z} = -\frac{-1}{\frac{1-z}{z}} = \frac{z}{1-z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{-1}{(\frac{z}{1-z})^{-1}} = \frac{z}{1-z}$, $z_{xx} = (z_{yy} = z_{xy}) = \frac{z_x(1-z) + z_x z}{(1-z)^2} = \frac{z_x}{(1-z)^2} = \frac{z}{(1-z)^3}$.

Así, $dz = (\frac{z}{1-z}, \frac{z}{1-z})$; $\quad d^2z = \begin{pmatrix} \frac{z}{(1-z)^3} & \frac{z}{(1-z)^3} \\ \frac{z}{(1-z)^3} & \frac{z}{(1-z)^3} \end{pmatrix}$.

106. Sea z la función determinada por la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = \varphi(ax + by + cz)$, donde φ es diferenciable y a, b, c son constantes. Demostrar que $(cy - bz)\frac{\partial z}{\partial x} + (az - cx)\frac{\partial z}{\partial y} = bx$. Dar las condiciones de existencia de z en función de (x,y).

Solución Sea $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - \varphi(ax + by + cz) = 0$, f es diferenciable, entonces por el teorema de la función implícita existe $z(x,y)$ única tal que $f(x,y,z(x,y)) = 0$, si $f_z(x,y,z) = 2z - c\varphi'(ax + by + cz) \neq 0$. Además:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = -\frac{f_x(x,y,z(x,y))}{f_z(x,y,z(x,y))} = -\frac{2x - \varphi'(ax + by + cz(x,y))a}{2z(x,y) - \varphi'(ax + by + cz(x,y))c};$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = -\frac{f_y(x,y,z(x,y))}{f_z(x,y,z(x,y))} = -\frac{2y - \varphi'(ax + by + cz(x,y))b}{2z(x,y) - \varphi'(ax + by + cz(x,y))c}.$$

Para aligerar al escritura, denotemos φ' en vez de $\varphi'(ax + by + cz(x,y))$, entonces:

$$(cy - bz(x,y))\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) + (az(x,y) - cx)\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) =$$
$$-(cy - bz(x,y))\frac{2x - a\varphi'}{2z - c\varphi'} - (az(x,y) - cx)\frac{2y - b\varphi'}{2z - c\varphi'} =$$
$$-\frac{2cxy - acy\varphi' - 2bxz(x,y) + abz(x,y)\varphi' + 2ayz(x,y) - abz(x,y)\varphi' - 2cxy + bcx\varphi'}{(2z(x,y) - c\varphi'} =$$
$$-\frac{(2z(x,y) - c\varphi')(-bx + ay)}{2z(x,y) - c\varphi'} = bx - ay.$$

107. Demostrar que la función z, determinada por la ecuación $f(x - az, y - bz) = 0$, con f diferenciable, satisface $a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 1$. Dar las condiciones de existencia de z en función

de (x, y).

Solución Sea $F(x,y,z) = f(x-az, y-bz) = 0$, entonces F es diferenciable y por el teorema de la función implícita existe $z(x,y)$ única tal que que $F(x,y,z(x,y)) = 0$, si $F_z \neq 0$. Además, $F_z = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u}(-a) + \frac{\partial f}{\partial v}(-b) \neq 0$, donde $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial v}$ significa que las derivadas se hacen respecto a la primera y la segunda variable de f, respectivamente.

Así $z(x,y)$ existe, si $-a\frac{\partial f}{\partial u}(x-az, y-bz) - b\frac{\partial f}{\partial v}(x-az, y-bz) \neq 0$ y se tiene:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial u}}{-a\frac{\partial f}{\partial u} - b\frac{\partial f}{\partial v}};\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial v}}{-a\frac{\partial f}{\partial u} - b\frac{\partial f}{\partial v}} \text{ y se tiene } a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

108. Sea $F(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}) = 0$, demostrar que $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$, si F es de clase C^1. Dar las condiciones de existencia de z en función de (x,y).

Solución Sea $f(x,y,z) = F(u,v) = F(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}) = 0$, entonces f es de clase C^1 y por el teorema de la función implícita, existe $z(x,y)$ única de modo que $f(x,y,z(x,y)) = 0$, si $f_z(x,y,z) \neq 0$ i.e. $f_z(x,y,z) = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial F}{\partial u}(\frac{x}{z}, \frac{y}{z})\frac{x}{z^2} - \frac{\partial F}{\partial v}(\frac{x}{z}, \frac{y}{z})\frac{y}{z^2} \neq 0$. Ahora:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f_x(x,y,z)}{f_z(x,y,z)} = \frac{\frac{\partial F}{\partial u}(\frac{x}{z}, \frac{y}{z})\frac{1}{z}}{\left(\frac{\partial F}{\partial u}(\frac{x}{z}, \frac{y}{z})x + \frac{\partial F}{\partial v}(\frac{x}{z}, \frac{y}{z})y\right)\frac{1}{z^2}},\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{\partial F}{\partial v}(\frac{x}{z}, \frac{y}{z})\frac{1}{z}}{\left(\frac{\partial F}{\partial u}(\frac{x}{z}, \frac{y}{z})x + \frac{\partial F}{\partial v}(\frac{x}{z}, \frac{y}{z})y\right)\frac{1}{z^2}}$$

y se tiene $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$.

109. Demostrar que la función z determinada por $y = x\varphi(z) + \psi(z)$, satisface la ecuación $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = 0$, donde φ, ψ de clase C^2. Especificar las condiciones de existencia de z en función de (x,y).

Solución Sea $f(x,y,z) = y - x\varphi(z) - \psi(z) = 0$, f es de clase C^2 y por el teorema de la función implícita z está en función de (x,y) de modo que $f(x,y,z(x,y)) = 0$, si $f_z(x,y,z) \neq 0$ i.e. $f_z(x,y,z) = -x\varphi'(z) - \psi'(z) \neq 0$. Además:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f_x(x,y,z)}{f_z(x,y,z)} = -\frac{\varphi(z)}{x\varphi'(z) + \psi'(z)} = -\frac{\varphi}{x\varphi' + \psi'}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f_y(x,y,z)}{f_z(x,y,z)} = \frac{1}{x\varphi' + \psi'},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= -\frac{\varphi' z_x(x\varphi' + \psi') - \varphi(\varphi' + x\varphi'' z_x + \psi'' z_x)}{(x\varphi' + \psi')^2} \\ &= \frac{-xz_x\varphi'^2 - z_x\varphi'\psi' + \varphi\varphi' - xz_x\varphi\varphi'' - z_x\varphi\varphi''}{(x\varphi' + \psi')^2},\end{aligned}$$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\dfrac{xz_y\varphi'' + \psi'' z_y}{(x\varphi' + \psi')^2}, \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -\dfrac{\varphi' + x\varphi'' z_x + \psi'' z_x}{(x\varphi' + \psi')^2}.$

Sea $A = x\varphi' + \psi'$, entonces $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\big(\dfrac{\partial z}{\partial y}\big)^2 - 2\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\big(\dfrac{\partial z}{\partial x}\big)^2 =$

$\dfrac{1}{A^4}\big[-xz_x\varphi'^2 - z_x\varphi'\psi' + \varphi\varphi' - xz_x\varphi\varphi'' - z_x\varphi\varphi'' - 2\varphi\varphi' - 2x\varphi\varphi'' z_x - 2\varphi\psi'' z_x - x\varphi^2\varphi'' z_y -$
$\varphi^2\psi'' z_y\big] = \dfrac{1}{A^4}\big[x\dfrac{\varphi}{A}\varphi'^2 + \varphi\dfrac{\varphi'}{A}\psi' - \varphi\varphi' + x\varphi^2\dfrac{\varphi''}{A} + \varphi^2\dfrac{\psi''}{A} - x\varphi^2\dfrac{\varphi''}{A} - \varphi^2\dfrac{\psi''}{A}\big] =$
$\dfrac{1}{A^4}\big[\dfrac{1}{A}\varphi\varphi'(x\varphi' + \psi') - \varphi\varphi'\big] = 0.$

110. Las funciones $y(x)$, $z(x)$ se dan por el sistema $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4$. Determine y', z', y'', z'', para $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$. Dar las condiciones de existencia de z en función de (x, y).

Solución La función $F\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - z^2 \\ x^2 + 2y^2 + 3y^2 \end{pmatrix}$, es de clase C^∞ y por el teorema de la función implícita existe $(y(x), z(x))$ en función de x, de modo que $F(x, y(x), z(x)) = 0$, si $\det \dfrac{\partial F}{\partial(y,z)} \neq 0$.

Ahora $\dfrac{\partial F}{\partial(y,z)} = \begin{pmatrix} 2y & -2z \\ 4y & 6z \end{pmatrix}$ y $\det \dfrac{\partial F}{\partial(y,z)} = 20yz \neq 0 \iff yz \neq 0$. Además $\begin{pmatrix} y'(x) \\ z'(x) \end{pmatrix} =$
$-\left(\dfrac{\partial F}{\partial(y,z)}\right)^{-1}\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right) = -\dfrac{1}{20yz}\begin{pmatrix} 6z & 2z \\ -4y & 2y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2x \\ 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5}\frac{x}{y} \\ \frac{1}{5}\frac{x}{z} \end{pmatrix}.$

Así en $(1,0,1)$ no se satisface $y \neq 0$ i.e. no existe $y'(1)$ ni $y''(1)$, pero sí existe $z'(x)$, $z'(1) = \frac{1}{5}$. Como $z'(x) = \frac{1}{5}\frac{x}{z}$ se tiene que $z''(x) = \dfrac{1}{5}\big(\dfrac{z - z'x}{z^2}\big) = \dfrac{1}{5}\big(\dfrac{z - \frac{1}{5}\frac{x^2}{z}}{z^2}\big) = \dfrac{5z^2 - x^2}{25z^3}$ i.e. $z''(1) = \frac{4}{25}$.

111. Las funciones u, v de las variables x, y se dan por el sistema de ecuaciones implícitas $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$, con φ, ψ de clase C^1. Determinar $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$.

Solución Por el teorema de la función inversa (u,v) se escribe en función de (x,y), si $\dfrac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}$ es invertible, es decir si $\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{\partial\psi}{\partial v} - \dfrac{\partial\psi}{\partial u}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} \neq 0$. En este caso se tiene:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \left(\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}\right)^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix}}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\psi}{\partial v} & -\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} \\ -\dfrac{\partial\psi}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Así, $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{\begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix}} \dfrac{\partial \psi}{\partial v}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{1}{\begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix}} \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{1}{\begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix}} \dfrac{\partial \psi}{\partial u}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{1}{\begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{vmatrix}} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}$.

112. Sea $z = F(r, \theta)$, donde r y θ son funciones de las variables x, y, determinadas por el sistema de ecuaciones $x = r\cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\theta$. Determinar $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Solución Por la regla de la cadena $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial F}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial \theta}\dfrac{\partial \theta}{\partial x} = \dfrac{\partial F}{\partial r}\dfrac{x}{r} + \dfrac{\partial F}{\partial \theta} \cdot \dfrac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2}\dfrac{1}{y} =$ $\dfrac{\partial F}{\partial r}\cos\theta + \dfrac{\partial F}{\partial \theta}\dfrac{-r\operatorname{sen}\theta}{r^2} = \dfrac{\partial F}{\partial r}\cos\theta - \dfrac{\partial F}{\partial \theta}\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{r}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial F}{\partial r}\operatorname{sen}\theta + \dfrac{\partial F}{\partial \theta}\dfrac{\cos\theta}{r}$.

113. Considerando z como función de (x, y), determinar $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, si $x = a\cos\varphi\cos\psi$, $y = b\operatorname{sen}\varphi\cos\psi$, $z = c\operatorname{sen}\psi$.

Solución Por el teorema de la función inversa, para que exista z en función de (φ, ψ), debe tenerse que $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(\varphi,\psi)}\right| = \begin{vmatrix} -a\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi & -a\cos\varphi\operatorname{sen}\psi \\ b\cos\varphi\cos\psi & -b\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi \end{vmatrix} \neq 0 \iff ab\operatorname{sen}\psi\cos\psi \neq 0$.

Así tenemos:

$$\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,y)} = \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(\varphi,\psi)}\right)^{-1} = \frac{1}{ab\operatorname{sen}\psi\cos\psi}\begin{pmatrix} -b\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi & a\cos\varphi\operatorname{sen}\psi \\ -b\cos\varphi\cos\psi & -a\operatorname{sen}\varphi\cos\psi \end{pmatrix}$$

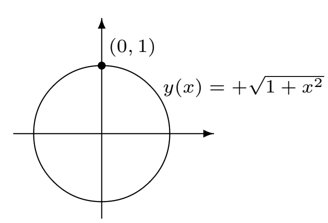
$$= \begin{pmatrix} -\dfrac{\operatorname{sen}\varphi}{a\cos\psi} & \dfrac{\cos\varphi}{b\cos\varphi} \\ -\dfrac{\cos\varphi}{a\operatorname{sen}\psi} & -\dfrac{\operatorname{sen}\varphi}{b\operatorname{sen}\psi} \end{pmatrix}, \text{ es decir:}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial x} = c\cos\psi\left(-\frac{\cos\varphi}{a\operatorname{sen}\psi}\right) = -\frac{c}{a}\cos\varphi\operatorname{cotg}\psi,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial y} = c\cos\psi\left(-\frac{\operatorname{sen}\varphi}{b\operatorname{sen}\psi}\right) = -\frac{c}{b}\operatorname{sen}\varphi\operatorname{cotg}\psi.$$

114. Sea $f(x, y) = x^2 + y^2$, demostrar que los resultados están acordes con el teorema de la función implícita en el punto $(0, 1)$.

Solución Sea $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, g es de clase C^∞; como $g(0, 1) = 0$, por el teorema de la función implícita existe $y(x)$ en función de x única tal que $g(x, y(x)) = 0$, si $g_y = 2y \neq 0$.



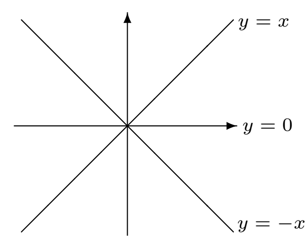
Dado que $g_y(0, 1) = 2 \neq 0$, $y'(x) = -\dfrac{g_x(x,y)}{g_y(x,y)} = -\dfrac{x}{y}$, $y'(0) = 0$. Además $y(x) = +\sqrt{1 - x^2}$.

115. Estudiar el conjunto de soluciones de la ecuación $f(x, y) = y^3 - x^2y = 0$.

Solución Sabemos que $y^3 - x^2y = y(y^2 - x^2) = 0 \Longleftrightarrow y = 0,\, y \pm x$.

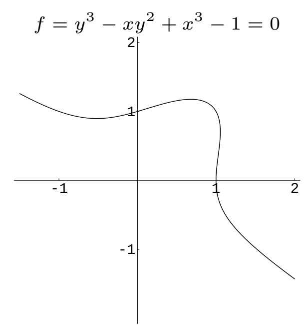
– Si $x \neq 0$ hay tres soluciones a la ecuación $f(x,y) = 0$, es decir la solución no es única. Para determinar la solución única del teorema de la función implícita se necesitan condiciones iniciales. Por ejemplo si se considera que la solución satisface $g(-1) = 1$, se define en un vecindario de $x = -1$, $g(x) = -x$, pues $f(-1,1) = 0$ y $f_y(-1,1) \neq 0$. Este resultado se asegura por la existencia y unicidad de la función continua que satisface $g(-1) = 1$, es decir $g(x) = -x$.

– Si $x = 0$, $f(x,y) = 0$, $f(0,y) = 0$ tiene solución única $y = 0$, pero $f(x,g(x)) = 0$ y $g(0) = 0$ no permite definir una única función continua en 0. En efecto, $g(x) = x$, $g(x) = -x$, $g(x) = 0$, $g(x) = |x|$, $g(x) = -|x|$ son soluciones y no se contradice el teorema de la función implícita ya que $f_y(0,0) = 0$.



116. Sea $f(x,y) = y^3 - xy^2 + x^3$, demostrar que la ecuación $f(x,y) = 1$ y la condición $g(1) = 1$ definen una función de clase C^∞ en $x = 1$. ¿La ecuación $f(x,y) = 1$ define otra función en un abierto de $x = 1$? En otras palabras se puede encontrar b para que la ecuación y la condición $h(1) = b$ definiendo una función continua h en un abierto de 1.

Solución Redefinamos $f(x,y) = y^3 - xy^2 + x^3 - 1$, es de clase C^∞ y se tiene $f(x,y) = 0$.

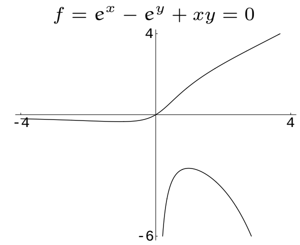


a) Sabemos que $f(1,1) = 0$, $f_y(x,y) = 3y^2 - 2xy$ y $f_y(1,1) = 1 \neq 0$, entonces $f(x,y) = 0$, $g(1) = 1$ define una función g de clase C^∞ en un vecindario de $x = 1$, de modo que $g'(x) = \dfrac{-g(x)^2 + 3x^2}{3(g(x)^2 - 2xg(x))}$ i.e. $g'(1) = -2$, pues $g(1) = 1$.

b) Si $f(1,y) = 1 \Longrightarrow y^3 - y = 0 \Longrightarrow y = 0$, $y = 1$, dando una solución doble, pero $f_y(1,0) = 0$ y no se aplica. Esto corresponde al hecho que $\forall x \in V_1$, vecindario de x_1, $f(x,y) = 0$ tiene una raíz cerca de 1, o sea la función $g(x)$ tiene dos raíces cerca de 0, lo que no permite escoger una en vez de la otra. Como $f_y(1,0) = 0$, el teorema de la función implícita no se aplica (no hay solución única).

117. Demostrar que la ecuación $e^x - e^y + xy = 0$, define y como función de x en un abierto de $x = 0$. Dar el desarrollo de Taylor hasta el orden 5.

Solución Para $x = 0$, $f(0, y) = 1 - e^y \Longrightarrow y = 0$. Además $f_x = e^x + y$, $f_y = -e^y + x$, pero $f_y(0, 0) = -1 \neq 0$, por el teorema de la función implícita la ecuación $f(x, g(x)) = 0$, $g(0) = 0$ tiene una solución única en $x = 0$ de clase C^∞ (pues f es de clase C^∞). Así:



$e^x + g(x) - e^{g(x)} g'(x) + x g'(x) = 0$ y $g'(0) = 1$,

$e^x + 2g'(x) - e^{g(x)}(g'(x))^2 - e^{g(x)} g''(x) + x g''(x) = 0$ y $g''(0) = 2$,

$e^x - e^{g(x)}(g'(x))^3 + 3g''(x) - 3e^{g(x)} g'(x) g''(x) - e^{g(x)} g'''(x) + x g'''(x) = 0$ y $g'''(0) = 0$,

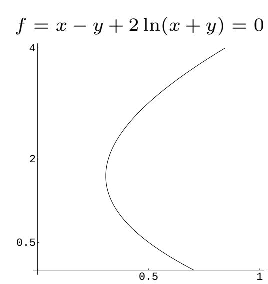
$e^x - e^{g(x)}(g'(x))^4 - 6e^{g(x)}(g'(x))^2 g''(x) - 3e^{g(x)}(g''(x))^2 + 4g'''(x) - 4e^{g(x)} g'(x) g'''(x) - e^{g(x)} g^{(4)}(x) + x g^{(4)}(x) = 0$ y $g^{(4)}(0) = 24$,

$e^x - e^{g(x)}(g'(x))^5 - 10e^{g(x)}(g'(x))^3 g''(x) - 15e^{g(x)} g'(x)(g''(x))^2 - 10e^{g(x)}(g'(x))^2 g'''(x) - 10e^{g(x)} g''(x) g'''(x) + 5g^{(4)}(x) - 5e^{g(x)} g'(x) g^{(4)}(x) - e^{g(x)} g^{(5)}(x) + x g^{(5)}(x) = 0$ y $g^{(5)}(0) = 320$,

i.e. $g(x) = x + x^2 + x^4 + \frac{8}{3}x^5 + o(x^5)$.

118. Sea $f(x, y) = x - y + 2\ln(x + y)$, demostrar que la ecuación $f(x, g(x)) = 0$ y la condición $g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, definen una función g derivable en un abierto de $\frac{1}{2}$. Dar el desarrollo de g hasta el orden 2.

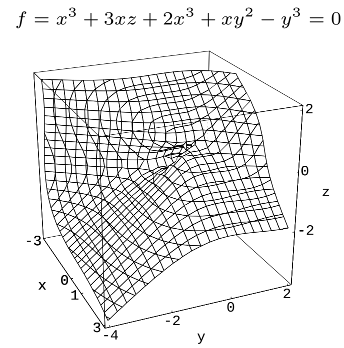
Solución Sabemos que $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 0$, $f_y(x, y) = -1 + \dfrac{2}{x + y}$ i.e. $f_y(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 1 \neq 0$, por el teorema de la función implícita la ecuación $f(x, g(x)) = 0$ y la condición $g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, definen una única función g en un vecindario de $\frac{1}{2}$. Como f es de clase C^∞ en un vecindario de $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, g es de clase C^∞ en un vecindario de $\frac{1}{2}$ y tenemos:



$1 - g'(x) + 2\dfrac{1 + g'(x)}{x + g(x)} = 0$, $g'(\frac{1}{2}) = -3$, $-g''(x) + 2\dfrac{g''(x)(x + g(x)) - (1 + g'(x))^2}{(x + g(x))^2} = 0$, $g''(\frac{1}{2}) = 8$ y $g(x) = \frac{1}{2} - 3(x - \frac{1}{2}) + \frac{4}{3}(x - \frac{1}{2})^2 + o((x - \frac{1}{2})^2)$.

119. Sea $f(x, y, z) = z^3 + 3xz + 2x^3 + xy^2 - y^3$, probar que la ecuación $f(x, y, g(x, y)) = 0$ y la

condición $g(1,-2)=-2$ definen una función $g(x,y)$ continua con derivadas parciales en un abierto de $(1,-2)$. Calcular $g_x(1,-2)$ y $g_y(1,-2)$.



Solución La función f es de clase C^∞ en $(1,-2,-2)$ y como $f(1,-2,-2)=0$, $f_z(1,-2,-2)=15\neq 0$, existe $g(x,y)$ única de clase C^∞ tal que $f(x,y,g(x,y))=0$, $g(1,-2)=-2$. Además:

$$g_x(x,y) = -\frac{f_x(x,y,g(x,y))}{f_z(x,y,g(x,y))} = -\frac{3g(x,y)+6x^2+y^2}{3g^2(x,y)+3x},$$

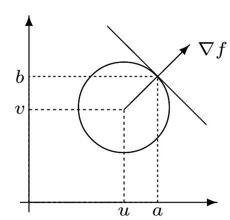
$g_x(1,-2) = -\frac{4}{15}$,

$$g_y(x,y) = -\frac{f_y(x,y,g(x,y))}{f_z(x,y,g(x,y))} = -\frac{2xy-3y^2}{3g^2(x,y)+3x}; \quad g_y(1,-2)=\tfrac{16}{15}.$$

120. Encontrar la ecuación de la tangente a un círculo y la ecuación del plano tangente a una esfera.

Solución Sea $f(x,y)=(x-u)^2+(y-v)^2-r^2=0$, entonces $\nabla f(x,y) = 2\begin{pmatrix} x-u \\ y-v \end{pmatrix}$.

Sea (a,b) un punto de la circunferencia ($f(a,b)=0$), entonces $\nabla f(a,b) = 2\begin{pmatrix} a-u \\ b-v \end{pmatrix}$.



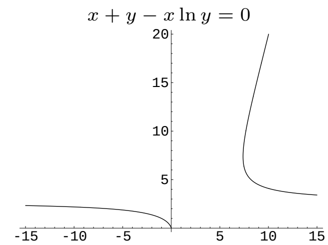
Sea (x,y) un punto de la recta tangente, entonces el vector $(x-a, y-b)$ es ortogonal al vector $\nabla f(a,b)$ i.e. $(x-a)(a-u)+(y-b)(b-v)=0$.

Similarmente $f(x,y,z)=(x-u)^2+(y-v)^2+(z-w)^2-r^2=0$ define la superficie de la esfera de centro (u,v,w) y radio r. El plano tangente a la esfera en el punto (a,b,c) (i.e. $f(a,b,c)=0$) es $(x-a)(a-u)+(y-b)(b-v)+(z-c)(c-w)=0$.

121. Sea $f\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ una aplicación de clase C^1 tal que existe $k\in\,]0,1[$ que cumple $\forall t\in\mathbb{R}$, $|f'(t)|\le k$. Sea $g\colon\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ definida por $g(x,y)=(x+f(y), y+f(x))$, demostrar que g es biyectiva.

Solución Es claro que $J_g(x,y) = \begin{vmatrix} 1 & f'(y) \\ f'(x) & 1 \end{vmatrix} = 1-f'(y)f'(x)\neq 0$, $\forall x, \forall y\in\mathbb{R}$, luego g es localmente invertible en todo $\mathbb{R}^2$ y por lo tanto es biyectiva.

122. Si $\mathrm{e}^{x+y} = y^x$, con $y > 0$, determinar $\dfrac{\partial y}{\partial x}$.



Solución Sea $f(x, y) = \mathrm{e}^{x+y} - y^x$, es de clase C^∞ si $y>0$. Además, $f(x, y) = 0$ y si $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \mathrm{e}^{x+y} - xy^{x-1} \neq 0$, entonces existe una aplicación $\varphi(x) = y$ de clase C^∞ única tal que $f(x, \varphi(x)) = 0$.

Por otro lado $\varphi'(x) = -\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))} = -\dfrac{\mathrm{e}^{x+\varphi(x)} - \varphi(x)^x \ln \varphi(x)}{\mathrm{e}^{x+\varphi(x)} - x\varphi(x)^{x-1}}$, pero $\mathrm{e}^{x+\varphi(x)} = \varphi(x)^x$ por lo que $\varphi'(x) = -\dfrac{\varphi(x)\mathrm{e}^{x+\varphi(x)}(1 - \ln \varphi(x))}{\varphi(x)\mathrm{e}^{x+\varphi(x)} - x\mathrm{e}^{x+\varphi(x)}} = -\dfrac{\varphi(x)(\ln \varphi(x) - 1)}{x - \varphi(x)}$.

Observemos que si $\mathrm{e}^{x+y} = y^x$, la condición $\mathrm{e}^{x+y} - xy^{x-1} = y^x - xy^{x-1} = y^{x-1}(y - x) \neq 0 \iff x \neq y$.

123. Sea f una función de clase C^1, determinar las condiciones para que la ecuación $\mathrm{e}^x \operatorname{sen} z = f(\mathrm{e}^y \cos z)$ defina z implícitamente en función de (x, y) y calcular $\dfrac{\partial z}{\partial y} \operatorname{sen}^2 z - \dfrac{\partial z}{\partial x} \cos^2 z$.

Solución Sea $\varphi(x, y, z) = \mathrm{e}^x \operatorname{sen} z - f(\mathrm{e}^y \cos z)$, es de clase C^1. Si $\dfrac{\partial \varphi}{\partial z} = \cos z\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y f'(\mathrm{e}^y \cos z) \operatorname{sen} z \neq 0$, el teorema de la función implícita garantiza la existencia de una función $z = g(x, y)$ tal que $\varphi(x, y, g(x, y)) = 0$, g de clase C^1. Además:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = -\frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y, g(x, y))}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}(x, y, g(x, y))} = \frac{-\operatorname{sen} g(x, y)\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x \cos g(x, y) + f'(\mathrm{e}^y \cos g(x, y)) \operatorname{sen} g(x, y)\mathrm{e}^y},$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = -\frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y, g(x, y))}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}(x, y, g(x, y))} = \frac{-f'(\mathrm{e}^y \cos g(x, y))\mathrm{e}^y \cos g(x, y)}{\mathrm{e}^x \cos g(x, y) + f'(\mathrm{e}^y \cos g(x, y)) \operatorname{sen} g(x, y)\mathrm{e}^y},$$

por lo que $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x, y) \operatorname{sen}^2 g(x, y) - \dfrac{\partial g}{\partial x}(x, y) \cos^2 g(x, y) =$

$$\operatorname{sen} g(x, y) \cos g(x, y) \frac{f'(\mathrm{e}^y \cos g(x, y))\mathrm{e}^y \operatorname{sen} g(x, y) + \mathrm{e}^x \cos g(x, y)}{\mathrm{e}^x \cos g(x, y) + f'(\mathrm{e}^y \cos g(x, y))\mathrm{e}^y \operatorname{sen} g(x, y)} = \operatorname{sen} g(x, y) \cos g(x, y).$$

124. Sea f una función de clase C^1 sobre $\mathbb{R}^2$, determinar las condiciones para que la ecuación $f(\ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \arctan \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}) = 0$, defina z implícitamente en términos de (x, y) y calcular $x\dfrac{\partial z}{\partial y} - y\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

Solución Sea $\varphi(x, y, z) = f(\ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \arctan \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}})$, que está definida sobre

$\mathbb{R}^3\backslash\{0\}\times\{0\}\times\mathbb{R}$, entonces si $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial z}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{z}{x^2+y^2+z^2}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2}\neq 0$, o sea $\dfrac{\partial f}{\partial u}z+\dfrac{\partial f}{\partial v}\sqrt{x^2+y^2}\neq 0$, donde $\dfrac{\partial f}{\partial u}$, $\dfrac{\partial f}{\partial v}$ son las derivadas parciales de f con respecto a la primera y segunda variable respectivamente, entonces el teorema de la función implícita garantiza que z se escribe en función de (x,y). Además, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}-\dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{xz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}}$,
$\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{y}{x^2+y^2+z^2}-\dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{yz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}}$, por lo que tenemos:

$$x\frac{\partial z}{\partial y}-y\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{z}{x^2+y^2+z^2}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2}}\Big(-\frac{xy}{x^2+y^2+z^2}\frac{\partial f}{\partial u}+$$
$$\frac{xyz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{xy}{x^2+y^2+z^2}\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{xyz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial f}{\partial v}\Big)=0.$$

125. Dado el sistema de ecuaciones $x^2+y^2+u^2-v^2=0$, $xy+uv=0$, determinar $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

Solución Sea $F\colon\mathbb{R}^4\longrightarrow\mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y,u,v)=\begin{pmatrix}x^2+y^2+u^2-v^2\\ xy+uv\end{pmatrix}$ es de clase C^∞, con $F=\begin{pmatrix}F_1\\ F_2\end{pmatrix}$ y $\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,v)}=\begin{pmatrix}2u & -2v\\ v & u\end{pmatrix}$ es invertible si $u^2+v^2\neq 0$, por lo que el Teorema de la función implícita implica que existe $g(x,y)=(u,v)$ de clase C^∞ tal que $F(x,y,g(x,y))=0$. Así escribimos $g(x,y)=(g_1(x,y),g_2(x,y))=(u(x,y),v(x,y))$. De esta forma tenemos que:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=-\left(\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,v)}\right)^{-1}\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}=-\frac{1}{2(u^2+v^2)}\begin{pmatrix}u & 2v\\ -v & 2u\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2x & 2y\\ y & x\end{pmatrix}=$$
$$-\frac{1}{2(u^2+v^2)}\begin{pmatrix}2xu+2vy & 2uy+2vx\\ -2xv+2uy & -2yv+2ux\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\dfrac{ux+vy}{u^2+v^2} & \dfrac{uy+vx}{u^2+v^2}\\ \dfrac{uy-xv}{u^2+v^2} & \dfrac{ux-yv}{u^2+v^2}\end{pmatrix}.$$

126. En el sistema de ecuaciones $x^3+y^3+z^3-3xyz=0$, $ax+y+z=0$, donde $a\neq 1$, determinar $\dfrac{dy}{dx}$ y $\dfrac{dz}{dx}$.

Solución La función $F(x,y,z)=\begin{pmatrix}x^3+y^3+z^3-3xyz\\ ax+y+z\end{pmatrix}$ es de clase C^∞. Así, si

$\dfrac{\partial F}{\partial(y,z)} = \begin{pmatrix} 3y^2-3xz & 3z^2-3xy \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ es invertible, i.e. si $3(y^2-xz-z^2+xy) = 3(y-z)(x+y+z) \neq 0$, por el Teorema de la función implícita existe $\varphi(x) = (y(x), z(x))$ de clase C^∞ tal que $F(x,\varphi(x)) = 0$. Además:

$$\varphi'(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial(y,z)}\right)^{-1}\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{1}{3(y^2-xz-z^2+xy)}\begin{pmatrix} 1 & -3z^2+3xy \\ -1 & 3y^2-3xz \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3x^2-3yz \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \dfrac{x^2-yz-z^2+xy}{y^2-xz-z^2+xy} \\ \dfrac{y^2-xz-x^2+zy}{y^2-xz-z^2+xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{(z-x)(z+x)+y(z-x)}{(y-z)(y+z)+x(y-z)} \\ -\dfrac{(x-y)(x+y)+z(x-y)}{(y-z)(y+z)+x(y-z)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x-z(x)}{y(x)-z(x)} \\ \dfrac{y(x)-x}{y(x)-z(x)} \end{pmatrix}.$$

127. Dadas las ecuaciones $9xy+v^2=0$, $xv-3u^2=0$, determinar $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

Solución Sea $F\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $F(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} 9xy+v^2 \\ xv-3u^2 \end{pmatrix}$, entonces F es de clase C^∞ y $\dfrac{\partial F}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} 0 & 2v \\ -6u & x \end{pmatrix}$ es invertible, si $uv \neq 0$. Así, existe $g(x,y) = (u,v)$ de clase C^∞ tal que $F(x,y,g(x,y)) = 0$ y se tiene:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = -\left(\frac{\partial F}{\partial(u,v)}\right)^{-1}\frac{\partial F}{\partial(x,y)} = -\frac{1}{12uv}\begin{pmatrix} x & -2v \\ 6u & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9y & 9x \\ v & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \dfrac{-9xy+2v^2}{12uv} & \dfrac{-3x^2}{4uv} \\ \dfrac{-9y}{2v} & \dfrac{-9x}{2v} \end{pmatrix}.$$

128. Sea $F\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 y sea $z = g(x,y)$ una función definida por la ecuación $z = F(x+y, yz)$. Determinar $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ en función de las derivadas parciales de F.

Solución Sea $H(x,y,z) = z - F(x+y, yz)$, es de clase C^1 y se supone que $\dfrac{\partial H}{\partial z} = 1 - \dfrac{\partial F}{\partial u}\cdot 0 - \dfrac{\partial F}{\partial v} y = 1 - \dfrac{\partial F}{\partial v} y \neq 0$, donde $\dfrac{\partial F}{\partial u}$, $\dfrac{\partial F}{\partial v}$ significan que se derivan en F con respecto a la primera y segunda variable respectivamente. El teorema de la función implícita garantiza que existe $z = g(x,y)$ de clase C^1 tal que $H(x,y,g(x,y)) = 0$, si $1 - \dfrac{\partial F}{\partial v}(x+y, yg(x,y))y \neq 0$. Además $\dfrac{\partial H}{\partial x}(x,y,g(x,y)) = -\dfrac{\partial F}{\partial u}(x+y, yg(x,y))$, $\dfrac{\partial H}{\partial y}(x,y,g(x,y)) = -\dfrac{\partial F}{\partial v}(x+y, yg(x,y))g(x,y)$, por lo tanto:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -\frac{\dfrac{\partial H}{\partial x}(x,y,g(x,y))}{\dfrac{\partial H}{\partial z}(x,y,g(x,y))} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial u}(x+y,yg(x,y))}{1-\dfrac{\partial F}{\partial v}(x+y,yg(x,y))y},$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -\frac{\dfrac{\partial H}{\partial y}(x,y,g(x,y))}{\dfrac{\partial H}{\partial z}(x,y,g(x,y))} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial v}(x+y,yg(x,y))g(x,y)}{1-\dfrac{\partial F}{\partial v}(x+y,yg(x,y))y}.$$

2.6 Formas diferenciales

129. Estudiar las formas diferenciales ω siguientes, en dos variables. ¿Es ω cerrada? ¿ω es exacta? En caso afirmativo, calcular las primitivas de ω; si ω no es cerrada, buscar una función $\varphi(x,y) \neq 0$ en el que la forma diferencial $\omega_1(x,y) = \varphi(x,y)\omega(x,y)$ sea cerrada (φ es el factor integrante de ω) ¿Es ω_1 exacta? En caso afirmativo calcular las primitivas de ω_1:

a) $(2x+2y+\mathrm{e}^{x+y})(dx+dy)$

b) $\dfrac{xdy-ydx}{(x-y)^2}$

c) $\dfrac{xdx+ydy}{x^2+y^2} - ydy$

d) $((1+2xy)dx+2y^2dy)\cos(x^2+y^2) + ((1-2xy)dy-2x^2dx)\operatorname{sen}(x^2+y^2)$

e) $\dfrac{y^2dx+x^2dy}{(x+y)^2}$

f) $\dfrac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}$

g) $(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}((1+x^2)dy+(xy-2x^2-1)dx)$

h) $\dfrac{1}{(1-x^2)^2+y^4}(2xy^2dx+2(1-x^2)ydy)$

i) $\dfrac{(ax+by)(xdy-ydx)}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $a,\ b \in \mathbb{R}$

j) $\dfrac{1}{x^2y}dx - \dfrac{1}{xy^2}dy$, $\varphi(x,y)$ depende sólo de x^2+y^2

k) $(x^2+y^2-1)dx-2ydy$, $\varphi(x,y)$ depende sólo de x

l) y^2dx+x^2dy, $\varphi(x,y)$ depende sólo de $x+y$

m) $\dfrac{ydx-xdy}{xy-1}$, $\varphi(x,y)$ depende sólo de xy

n) $2x(y-1)dx-(x^2-1)dy$, $\varphi(x,y)$ depende sólo de x

o) $(x^2+y^2-1)dx-2xydy$, $\varphi(x,y)$ depende sólo de x^2-y^2

p) $y(1+x)\mathrm{e}^{-y}dx + x(1-y)\mathrm{e}^{-y}dy$, $\varphi(x,y)$ depende sólo de x

q) $(1+(x+y)y)dx + (1+(x+y)x)dy$, $\varphi(x,y)$ depende sólo de xy.

Solución

a) $w = (2x+2y+\mathrm{e}^{x+y})dx + (2x+2y+\mathrm{e}^{x+y})dy = Pdx + Qdy$; w es exacta en $\mathbb{R}^2$, pues $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2 + \mathrm{e}^{x+y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Además:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x+2y+\mathrm{e}^{x+y} \Longrightarrow f = x^2+2xy+\mathrm{e}^{x+y}+C_1(y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x+2y+\mathrm{e}^{x+y} \Longrightarrow f = 2xy+y^2+\mathrm{e}^{x+y}+C_2(x) \end{array}\right\} \Longrightarrow f = (x+y)^2 + \mathrm{e}^{x+y} + C.$$

Las primitivas de w son las aplicaciones $f(x,y) = (x+y)^2 + \mathrm{e}^{x+y} + C$, $C \in \mathbb{R}$.

b) $w = \dfrac{x}{(x-y)^2}dy - \dfrac{y}{(x-y)^2}dx = Pdx + Qdy$

$\dfrac{\partial Q}{\partial x} = -\dfrac{x+y}{(x-y)^2} = \dfrac{\partial P}{\partial y} \Longrightarrow w$ es cerrado sobre $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq y\}$ y es w exacta sobre $U_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x - y > 0\}$ y $U_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x - y < 0\}$. Por otro lado, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = -\dfrac{y}{(x-y)^2} \Longrightarrow f = \dfrac{y}{x-y} + C_1(y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x}{(x-y)^2} \quad \Longrightarrow f = -\dfrac{x}{x+y} + C_2(x) \end{array}\right\} \Longrightarrow f = \dfrac{y}{x-y} + C.$$

Las primitivas de w son $f(x,y) = \dfrac{x}{x-y} + C_i$, sobre U_i, $C_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,2$.

c) $w = \dfrac{x}{x^2+y^2}dx + \dfrac{y - y(x^2+y^2)}{x^2+y^2}dy = Pdx + Qdy$.

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} \Longrightarrow w$ es exacta sobre $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Además:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{x}{x^2+y^2} \qquad \Longrightarrow f = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + C_1(y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{y}{x^2+y^2} - y \Longrightarrow f = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) - \frac{1}{2}y^2 + C_2(x) \end{array}\right\} \Longrightarrow f = \tfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2) - \tfrac{1}{2}y^2 + C.$$

Las primitivas de w son las funciones $f(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) - \frac{1}{2}y^2 + C$, $C \in \mathbb{R}$.

d) $w = \big((1+2y)\cos(x^2+y^2) - 2x^2\operatorname{sen}(x^2+y^2)\big)\,dx +$

$((1-2xy)\operatorname{sen}(x^2+y^2) - 2y^2\cos(x^2+y^2))dy = Pdx + Qdy$.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial P}{\partial y} = 2x\cos(x^2+y^2) - (1+2xy)2y\operatorname{sen}(x^2+y^2) - 4x^2y\cos(x^2+y^2) \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = -2y\operatorname{sen}(x^2+y^2) + (1-2xy)2x\cos(x^2+y^2) - 4xy^2\operatorname{sen}(x^2+y^2) \end{array}\right\} \Longrightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x},$$

y w es exacta sobre $\mathbb{R}^2$. Además:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = P \Longrightarrow f = y\,\mathrm{sen}(x^2+y^2) + x\cos(x^2+y^2) + C_1(y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = Q \Longrightarrow f = x\cos(x^2+y^2) + y\,\mathrm{sen}(x^2+y^2) + C_2(x) \end{array}\right\} \Longrightarrow$$
$$f = x\cos(x^2+y^2) + y\,\mathrm{sen}(x^2+y^2) + C.$$

Las primitivas de w es la familia de funciones $f(x,y) = x\cos(x^2+y^2) + y\,\mathrm{sen}(x^2+y^2) + C$.

e) $w = \dfrac{y^2}{(x+y)^2}dx + \dfrac{x^2}{(x+y)^2}dy = P\,dx + Q\,dy$

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, por lo tanto w es cerrada sobre $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x+y \neq 0\}$ y es exacta sobre $U_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x+y > 0\}$ y sobre $U_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x+y < 0\}$.

Por otro lado:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{y^2}{(x+y)^2} \Longrightarrow f = \dfrac{xy}{x+y} + C_1(y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x^2}{(x+y)^2} \Longrightarrow f = \dfrac{xy}{x+y} + C_2(y) \end{array}\right\} \Longrightarrow f = \dfrac{xy}{x+y} + C.$$

Las primitivas de w sobre U_i es la familia $f(x,y) = \dfrac{xy}{x+y} + C_i$, $C_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,2$.

f) $w = \dfrac{x-y}{x^2+y^2}dx + \dfrac{x+y}{x^2+y^2}dy = P\,dx + Q\,dy$.

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{-x^2+y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}$, por lo que w es exacta sobre $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ y se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{x-y}{x^2+y^2} \Longrightarrow f(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) - \arctan\frac{x}{y} + C_1(y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{x+y}{x^2+y^2} \Longrightarrow f(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + \arctan\frac{y}{x} + C_2(x) \end{array}\right\} \Longrightarrow$$
$$f(x,y) = \tfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + \arctan\tfrac{x}{y} + C,$$

es la familia de primitivas de w. Recuerde que $\arctan\alpha + \arctan\dfrac{1}{\alpha} = \frac{\pi}{2}$.

g) $w = \dfrac{xy-2x^2-1}{\sqrt{1+x^2}}dx + \sqrt{1+x^2}dy = Pdx + Qdy$.

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, por lo que w es exacta en $\mathbb{R}^2$. Además:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{xy-2x^2-1}{\sqrt{1+x^2}} \Longrightarrow f(x,y) = (y-x)\sqrt{1+x^2} + C_1(y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{1+x^2} \qquad\quad \Longrightarrow f(x,y) = y\sqrt{1+x^2} + C_2(x) \end{array}\right\} \Longrightarrow$$
$$f(x,y) = (y-x)\sqrt{1+x^2} + C,$$

es la familia de primitivas de w sobre $\mathbb{R}^2$.

h) $w = \dfrac{2xy^2}{(1-x^2)^2+y^4}dx + \dfrac{2(1-x^2)y}{(1-x^2)^2+y^4}dy = Pdx + Qdy.$

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{4xy((1-x^2)-y^4)}{((1-x^2)^2+y^4)^2} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ i.e. w es exacta sobre $U = \mathbb{R}^2 \backslash \{(-1,0),(1,0)\}$.

Ahora:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{2xy^2}{(1-x^2)+y^4} \Longrightarrow f = -\arctan\dfrac{1-x^2}{y^2} + c_1(y), \text{ si } y \neq 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{2(1-x^2)y}{(1-x^2)+y^4} \Longrightarrow f = \arctan\dfrac{y^2}{1-x^2} + c_2(x), \text{ si } y \neq 0\end{array}\right\} \Longrightarrow$$
$$f(x,y) = -\arctan\frac{1-x^2}{y^2} + C, \text{ si } y \neq 0,$$

pues $\arctan\alpha + \arctan\frac{1}{\alpha} = \frac{\pi}{2}$.

Cuando $y = 0$ y $|x| < 1$, se tiene que $f(x,y) = -\frac{\pi}{2} + C$.

Cuando $y = 0$ y $|x| > 1$, se tiene que $f(x,y) = \frac{\pi}{2} + C$.

De esta manera tenemos que las primitivas de w sobre U son las funciones:

$$f(x,y) = \begin{cases} -\arctan\dfrac{1-x^2}{y^2} + C & \text{si } y \neq 0,\ C \in \mathbb{R}, \\ \frac{\pi}{2} + C & \text{si } y = 0,\ |x| > 1,\ C \in \mathbb{R} \\ -\frac{\pi}{2} + C & \text{si } y = 0,\ |x| < 1,\ C \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

i) $w = -\dfrac{(ax+by)y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dx + \dfrac{(ax+by)x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dy = P\,dx + Q\,dy.$

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{ax^3+2bx^2y-2axy^2-by^3}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} \Longrightarrow w$ es exacta sobre $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$. Así:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{(ax+by)y}{x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \Longrightarrow f = \dfrac{ay}{\sqrt{x^2+y^2}} - \dfrac{bx}{\sqrt{x^2+y^2}} + C_1(y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{ax^2+bxy}{x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \Longrightarrow f = \dfrac{ay}{\sqrt{x^2+y^2}} - \dfrac{bx}{\sqrt{x^2+y^2}} + C_2(x)\end{array}\right\} \Longrightarrow$$
$$f(x,y) = \frac{ay-bx}{\sqrt{x^2+y^2}} + C,$$

es decir las primitivas de w es la familia de funciones $f(x,y) = \dfrac{ay-bx}{\sqrt{x^2+y^2}} + C$, $C \in \mathbb{R}$, sobre $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

j) $w = \dfrac{1}{x^2y}dx - \dfrac{1}{xy^2}dy = Pdx + Qdy.$

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{1}{x^2y^2} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{1}{x^2y^2} \Longrightarrow w$ no es cerrada sobre $\mathbb{R}^{*^2} = \mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}^*_+ \cup \mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{R}^*_- \cup$

$\mathbb{R}^*_- \times \mathbb{R}^*_+ \cup \mathbb{R}^*_- \times \mathbb{R}^*_-$.

Si existe un factor integrante de la forma $\varphi(x,y) = g(x^2+y^2)$, $g \in C^1$, $z = x^2+y^2$, debemos tener que $w_1 = \dfrac{g(z)}{x^2y}dx - \dfrac{g(z)}{xy^2}dy$ es exacta, es decir:
$\dfrac{g'2x^2y^2 - x^2g}{x^4y^2} = -\dfrac{g'2x^2y^2 - y^2g}{x^2y^4} \Longrightarrow g'(x^2+y^2)2x^2y^2 = 2x^2y^2g \Longrightarrow \dfrac{g'(z)}{g(z)} = \dfrac{1}{x^2+y^2} = \dfrac{1}{z} \Longrightarrow \ln y = \ln z \Longrightarrow g(z) = z = x^2+y^2$. De esta manera tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{x^2+y^2}{x^2y} = \frac{1}{y} + \dfrac{y}{x^2} \quad \Longrightarrow f = \frac{x}{y} - \frac{y}{x} + C_1(y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{x^2+y^2}{xy^2} = -\dfrac{x}{y^2} - \frac{1}{x} \Longrightarrow f = \frac{x}{y} - \frac{y}{x} + C_2(y) \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x,y) = \frac{x}{y} - \frac{y}{x} + C.$$

Finalmente, las primitivas de w_1 son las familias de funciones $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{xy} + C_i$, sobre cada uno de los cuatro cuadrantes U_i, $i = 1,2,3,4$.

k) $w = (x^2+y^2-1)dx - 2ydy = Pdx + Qdy$.

Dado que $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2y \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 0$ se tiene que w no es cerrada sobre $\mathbb{R}^2$. Si existe un factor integrante de la forma $\varphi(x,y) = g(x)$, $g \in C^1$ entonces debemos tener que $w_1 = g(x)(x^2+y^2-1)dx - g(x)2ydy$ es exacta, es decir:

$g(x)2y = -g'(x)2y \Longrightarrow \dfrac{g'(x)}{g(x)} = -1 \Longrightarrow \ln g(x) = -x$ i.e. $g(x) = \mathrm{e}^{-x}$.

Finalmente tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = (x^2+y^2-1)\mathrm{e}^{-x} \Longrightarrow f = -(x^2+2x+1+y^2)\mathrm{e}^{-x} + C_1(y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -2y\mathrm{e}^{-x} \qquad\qquad \Longrightarrow f = -y^2\mathrm{e}^{-x} + C_2(x) \end{array}\right\} \Longrightarrow$$
$$f(x,y) = -((x+1)^2+y^2)\mathrm{e}^{-x} + C,$$

es decir las primitivas de w, son las familias de funciones $f(x,y) = -((x+1)^2+y^2)\mathrm{e}^{-x}+C$, $C \in \mathbb{R}$.

l) $w = y^2dx + x^2dy = Pdx + Qdy$.

Como $\dfrac{\partial P}{\partial x} = 2y \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2x$, w no es cerrada sobre $\mathbb{R}^2$.

Si existe un factor integrante de la forma $\varphi(x,y) = g(x+y)$, $g \in C^1$, $z = x+y$, entonces $w_1 = y^2g(z)dx + x^2g(z)dy$ es exacta y tenemos que:

$2yg + y^2g' = 2xg + x^2g' \Longrightarrow 2(y-x)g = (x^2-y^2)g' \Longrightarrow \dfrac{g'(z)}{g(z)} = -\frac{2}{z} \Longrightarrow$

$\ln g(z) = -\ln z^2 \Longrightarrow g = \dfrac{1}{z^2} = \dfrac{1}{(x+y)^2} \Longrightarrow w_1 = \dfrac{y^2}{(x+y)^2}dx + \dfrac{x^2}{(x+y)^2}dy$

es la forma diferencial del ejercicio e).

m) $w = \dfrac{y}{xy-1}dx - \dfrac{x}{xy-1}dy = Pdx + Qdy$.

Tenemos que $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{-1}{(xy-1)^2} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{1}{(xy-1)^2}$ i.e. w no es cerrada sobre $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / xy \neq 1\}$. Si existe un factor integrante de la forma $\varphi(x,y) = g(xy)$, $g \in C^1$, $xy = z$, entonces debemos tener que:

$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{g(z)y}{xy-1}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(-\dfrac{g(z)x}{xy-1}\right) \Longrightarrow \dfrac{(g'(z)xy + g(z))(xy-1) - xyg(z)}{(xy-1)^2} = \dfrac{-(g'(z)xy + g(z))(xy-1) + xyg(z)}{(xy-1)^2} \Longrightarrow g'(z)xy(xy-1) = g(z) \Longrightarrow \dfrac{g'(z)}{g(z)} = \dfrac{1}{z(z-1)} = \dfrac{1}{z-1} - \dfrac{1}{z} \Longrightarrow \ln g(z) = \ln\dfrac{z-1}{z} \Longrightarrow g(z) = \dfrac{z-1}{z} = \dfrac{xy-1}{xy}$, si $xy \neq 1$, $xy \neq 0$.

De esta manera la región U se particiona en 6 regiones convexas y para cada una va a existir una familia de funciones que son primitivas de w. Finalmente tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{y}{xy-1}\cdot\dfrac{xy-1}{xy} = \dfrac{1}{x} \Longrightarrow f = \ln|x| + C_1(y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x}{xy-1}\cdot\dfrac{xy-1}{xy} = \dfrac{1}{y} \Longrightarrow f = \ln|y| + C_2(x) \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x,y) = \ln|x| - \ln|y| + C,$$

es decir las primitivas de w_1 son las familias de funciones $f(x,y) = \ln\left|\dfrac{x}{y}\right| + C_i$, $i = 1,\ldots,6$. Observemos que en este caso, las aplicaciones son extendibles con continuidad sobre el conjunto U.

n) $w = 2x(y-1)dx - (x^2-1)dy = Pdx + Qdy$.

Se observa que w no es cerrada en $\mathbb{R}^2$, ya que $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2x \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x} = -2x$.

Si existe un factor integrante de la forma $\varphi(x,y) = g(x)$, $g \in C^1$, debemos tener que $\dfrac{\partial}{\partial y}(2xg(x)(y-1)) = -\dfrac{\partial}{\partial x}(g(x)(x^2-1)) \Longrightarrow 2xg(x) = -2xg(x) - (x^2-1)g'(x) \Longrightarrow \dfrac{g'(x)}{g(x)} = \dfrac{-4x}{x^2-1} = -\dfrac{2}{x+1} - \dfrac{2}{x-1} \Longrightarrow g(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2(x+1)^2} = \dfrac{1}{(x^2-1)^2}$. Así:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{2x(y-1)}{(x^2-1)^2} \Longrightarrow f = \dfrac{1-y}{x^2-1} + C_1(y) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{x^2-1} \qquad \Longrightarrow f = \dfrac{y}{x^2-1} + C_2(x) \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x,y) = \dfrac{1-y}{x^2-1} + C.$$

Finalmente la primitiva de w, son las familias de funciones $f(x,y) = \dfrac{1-y}{x^2-1} + C_i$, $i = 1,2,3$, sobre cada una de las tres regiones $U_1 = \,]-\infty,-1[\,\times\mathbb{R}$, $U_2 = \,]-1,1[\,\times\mathbb{R}$, $U_3 =$

$]\,1,+\infty\,[\,\times\mathbb{R}$.

o) $w = (x^2+y^2-1)dx - 2xydy = Pdx + Qdy$.

Es claro que $\dfrac{\partial P}{\partial x} = 2x \neq \dfrac{\partial Q}{\partial y} = -2x$ i.e. w no es cerrada en $\mathbb{R}^2$.

Si existe un factor integrante $\varphi(x,y) = g(x^2-y^2)$, $g \in C^1$, $z = x^2-y^2$, tenemos que $\dfrac{\partial}{\partial y}(g(z)(x^2+y^2-1)) = \dfrac{\partial}{\partial x}(g(z)2xy) \Longrightarrow g'(z)(-2y)(x^2+y^2-1)+2yg(z) = -g'(z)2x(2xy)-g(z)2y \Longrightarrow g'(z)2y(-x^2-y^2+1+2x^2) = -4yg(z) \Longrightarrow \dfrac{g'(z)}{g(z)} = \dfrac{2}{x^2-y^2+1} = \dfrac{2}{z+1} \Longrightarrow g(z) = \dfrac{1}{(z+1)^2} = \dfrac{1}{(x^2-y^2+1)^2}$, es decir $\varphi(x,y) = \dfrac{1}{(x^2-y^2+1)^2}$ es un factor integrante de w, sobre $U = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x^2-y^2+1\neq 0\}$. Así w es exacta y

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{x^2+y^2-1}{(x^2-y^2+1)^2} \Longrightarrow f = \dfrac{-x}{x^2-y^2+1} + C_1(y)\\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{-2xy}{(x^2-y^2+1)^2} \Longrightarrow f = \dfrac{-x}{x^2-y^2+1} + C_2(x)\end{array}\right\} \Longrightarrow$$
$$f(x,y) = \frac{-x}{x^2-y^2+1} + C_i,\ i = 1,2,3,$$

son las primitivas de w_1 sobre cada una de las tres regiones convexas de U, que parten el plano por la ecuación $x^2-y^2+1=0$.

p) $w = y(1+x)\mathrm{e}^{-y}dx + x(1-y)\mathrm{e}^{-y}dy = Pdx + Qdy$.

La forma diferencial w no es exacta sobre $\mathbb{R}^2$ ya que $\dfrac{\partial P}{\partial y} = (1+x)(1-y)\mathrm{e}^{-y} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x} = (1-y)\mathrm{e}^{-y}$. Si w tiene un factor integrante de la forma $\varphi(x,y) = g(x)$, $g\in C^1$, entonces debemos tener que:

$\dfrac{\partial}{\partial y}(g(x)(1+x)y\mathrm{e}^{-y}) = \dfrac{\partial}{\partial x}(g(x)x(1-y)\mathrm{e}^{-y}) \Longrightarrow g(x)(1+x)(1-y)\mathrm{e}^{-y} = (g'(x)x+g(x))(1-y)\mathrm{e}^{-y} \Longrightarrow \dfrac{g'(x)}{g(x)} = 1 \Longrightarrow g(x) = \mathrm{e}^x$.

De esta forma tenemos:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial x} = y(1+x)\mathrm{e}^{x-y} \Longrightarrow f = xy\mathrm{e}^{x-y} + C_1(y)\\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = x(1-y)\mathrm{e}^{x-y} \Longrightarrow f = xy\mathrm{e}^{x-y} + C_2(x)\end{array}\right\} \Longrightarrow f(x,y) = xy\mathrm{e}^{x-y} + C,$$

es la familia de primitivas de w, sobre $\mathbb{R}^2$.

q) $w = (1+(x+y)y)dx + (1+(x+y)x)dy = Pdx + Qdy$.

La forma diferencial w no es exacta sobre $\mathbb{R}^2$, ya que $\dfrac{\partial P}{\partial y} = x+2y \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2x+y$. Si w tiene un factor integrante de la forma $\varphi(x,y) = g(x,y)$, $z = xy$, $g\in C^1$, se tiene que:

$\dfrac{\partial}{\partial y}(g(z)(1+(x+y)y)) = \dfrac{\partial}{\partial x}(g(z)(1+(x+y)x)) \Longrightarrow g'(z)x(1+(x+y)y)+g(z)(2y+x) =$ $g'(z)y(1+(x+y)x)+g(z)(2x+y) \Longrightarrow g'(z)(x-y) = g(z)(x-y) \Longrightarrow \dfrac{g'(x)}{g(x)} = 1$, es decir $g(z) = \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{xy}$. Así obtenemos que:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial x} = \mathrm{e}^{xy}(1+(x+y)y) \Longrightarrow f = (x+y)\mathrm{e}^{xy} + C_1(y)\\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = \mathrm{e}^{xy}(1+(x+y)x) \Longrightarrow f = (x+y)\mathrm{e}^{xy} + C_2(x)\end{array}\right\} \Longrightarrow f(x,y) = (x+y)\mathrm{e}^{xy} + C,$$

es una familia de primitivas de w en $\mathbb{R}^2$.

130. La misma pregunta anterior, para el caso de formas diferenciales en tres variables.

a) $3(x^2+2xy+2xz)dx + 3(x^2+y^2)dy + 3(x^2+z^2)dz$

b) $\left(\frac{1}{y} - \frac{z}{x^2}\right)dx + \left(\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}\right)dy + \left(\frac{1}{x} - \frac{y}{z^2}\right)dz$

c) $2xzdx - 2yzdy + (z^2-x^2+y^2)dz$, $\varphi(x,y,z)$ depende sólo de z

d) $(y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$, $\varphi(x,y,z)$ depende sólo de $y-z$

e) $yz(y+z)dx + zx(z+x)dy + xy(x+y)dz$, $\varphi(x,y,z)$ depende sólo de $x+y+z$.

Solución

a) $w = 3(x^2+2xy+2xz)dx + 3(x^2+y^2)dy + 3(x^2+z^2)dz = Pdx + Qdy + Rdz$.

Dado que $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 6x$, $\dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{\partial R}{\partial z} = 6x$, $\dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial y} = 0$, la forma diferencial w es exacta en $\mathbb{R}^2$, por lo que:

$$\left.\begin{array}{l}P = \dfrac{\partial f}{\partial x} \Longrightarrow f = x^3 + 3x^2y + 3x^2z + C_1(y,z)\\[2ex] Q = \dfrac{\partial f}{\partial y} \Longrightarrow f = 3x^2y + y^3 + C_2(x,z)\\[2ex] R = \dfrac{\partial f}{\partial z} \Longrightarrow f = 3x^2z + z^3 + C_3(x,y)\end{array}\right\} \Longrightarrow$$
$$f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2y + 3x^2z + C,$$

es una familia de primitivas de w.

b) $w = \left(\frac{1}{y} - \frac{z}{x^2}\right)dx + \left(\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}\right)dy + \left(\frac{1}{x} - \frac{y}{z^2}\right)dx = Pdx + Qdy + Rdz$.

Es claro que debemos tener $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$. Además:

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = -\dfrac{1}{y^2}$, $\dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x} = -\dfrac{1}{x^2}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial y} = -\dfrac{1}{z^2} \Longrightarrow w$ es exacta en cada una de los ocho octantes de $\mathbb{R}^{*3}$ y tenemos:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{y}-\dfrac{z}{x^2}\Longrightarrow f=\frac{x}{y}+\frac{z}{x}+C_1(y,z)\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{z}-\dfrac{x}{y^2}\Longrightarrow f=\frac{y}{z}+\frac{x}{y}+C_2(x,z)\\ \dfrac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{x}-\dfrac{y}{z^2}\Longrightarrow f=\frac{z}{x}+\frac{y}{z}+C_3(x,y)\end{array}\right\}\Longrightarrow$$

las primitivas sobre cada uno de los octantes, son las familias $f(x,y,z)=\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+C_i$, $i=1,\ldots,8$.

c) $w=2xzdx-2yzdy+(z^2-x^2+y^2)dz\Longrightarrow Pdx+Qdy+Rdz$.

Dado que $\dfrac{\partial P}{\partial z}=2x\neq\dfrac{\partial R}{\partial x}=-2x$, w no es cerrada en $\mathbb{R}^3$.

Si w admite un factor integrante de la forma $\varphi(x,y,z)=g(z)$, $g\in C^1$, tenemos $\dfrac{\partial}{\partial z}(2xzg(z))=\dfrac{\partial}{\partial x}((z^2-x^2+y^2)g(z))$, $\dfrac{\partial}{\partial y}(2xzg(z))=\dfrac{\partial}{\partial x}(-2yzg(z))=0$,
$\dfrac{\partial}{\partial z}(2yzg(z))=\dfrac{\partial}{\partial y}((z^2-x^2+y^2)g(z))$, por lo que:

$$2x(g(z)+zg'(z))=-2xg(z)\Longrightarrow 2g(z)=-zg'(z)\Longrightarrow g(z)=-\frac{1}{z^2},$$

es decir w_1 es exacta sobre los conexos $U_1=\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^*_+$ y sobre $U_2=\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^*_-$. Además:

$$\left.\begin{array}{lll}\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{2x}{z} & \Longrightarrow f=\dfrac{x^2}{z}+C_1(y,z)\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=-\dfrac{xy}{z} & \Longrightarrow f=\dfrac{-y^2}{z}+C_2(x,z)\\ \dfrac{\partial f}{\partial z}=1+\dfrac{-x^2+y^2}{z^2} & \Longrightarrow f=z+\dfrac{x^2-y^2}{z}+C_3(x,y)\end{array}\right\}\Longrightarrow f=\frac{x^2-y^2}{z}+z+C_i,$$

es una familia de primitivas sobre cada U_i, $i=1,2$.

d) $w=(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz=Pdx+Qdy+Rdz$.

La forma diferencial w no es cerrada en $\mathbb{R}^3$, pues, $\dfrac{\partial P}{\partial y}=1\neq\dfrac{\partial Q}{\partial x}=-1$.

Si w admite un factor integrante $\varphi(x,y,z)=g(y-z)$, $g\in C^1$, $v=y-z$, entonces debemos tener que: $\dfrac{\partial}{\partial y}((y-z)g)=\dfrac{\partial}{\partial x}((z-x)g)$, $\dfrac{\partial}{\partial z}((y-z)g)=\dfrac{\partial}{\partial x}((x-y)g)$, $\dfrac{\partial}{\partial z}((z-x)g)=\dfrac{\partial}{\partial x}((x-y)g)$, entonces $g+(y-z)g'=-g\Longrightarrow\dfrac{g'}{g}=-\dfrac{2}{y-z}=-\dfrac{2}{v}\Longrightarrow\dfrac{1}{v^2}=\dfrac{1}{(y-z)^2}$, i.e. w_1 es exacta sobre los conexos $U_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/y>z\}$ y sobre $U_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/y<z\}$.

Así:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{y-z} \Longrightarrow f = \frac{x}{y-z} + C_1(y,z) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{z-x}{(y-z)^2} \Longrightarrow f = -\frac{z-x}{y-z} = -\frac{z}{y-z} + \frac{x}{y-z} + C_2(y,z) \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{x-y}{(y-z)^2} \Longrightarrow f = \frac{x-y}{y-z} = \frac{x}{y-z} - \frac{y}{y-z} + C_3(x,y) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow f = \frac{x-z}{y-z} + C_i,$$

son las primitivas de w sobre cada U_i, $i = 1, 2$. Observe que $\frac{y}{y-z} = -\frac{z}{y-z} + 1$.

e) $w = yz(y+z)dx + zx(z+x)dy + xy(x+y)dz = Pdx + Qdy + Rdz$.

La forma diferencial no es cerrada en $\mathbb{R}^3$ ya que $\frac{\partial P}{\partial y} = 2yz + z^2 \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xz + z^2$.

Si existe un factor integrante $\varphi(x,y,z)$ de la forma $g(x+y+z)$, $g \in C^1$, $x+y+z = v$ debemos tener que:

$\frac{\partial}{\partial y}((yz+y+z)g(v)) = \frac{\partial}{\partial x}((zx(z+x)g(v)) \Longrightarrow z(y+z)g + yzg + yz(x+z)g' = z(x+z)g + xzg + xz(x+z)g' \Longrightarrow 2(y-x)g = (y-x)(x+y+z)g' \Longrightarrow \frac{g'}{g} = \frac{2}{v} \Longrightarrow g(v) = \frac{1}{v^2} = \frac{1}{(x+y+z)^2}$, por lo que w_1 es exacta sobre los conjuntos conexos $V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y+z > 0\}$ y sobre $V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y+z < 0\}$. Así tenemos:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{yz(y+z)}{(x+y+z)^2} \Longrightarrow f = -\frac{yz(y+z)}{x+y+z} + yz + C_1(y,z) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{zx(z+x)}{(x+y+z)^2} \Longrightarrow f = -\frac{zx(z+x)}{x+y+z} + xz + C_2(x,z) \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{xy(x+y)}{(x+y+z)^2} \Longrightarrow f = -\frac{xy(x+y)}{x+y+z} + xy + C_3(x,y) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow f = \frac{xyz}{x+y+z} + C_i,$$

es una familia de primitivas de w, sobre los conjuntos U_i, $i = 1, 2$.

Observemos que $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xyz}{x+y+z}\right) = \frac{yz(y+z)}{(x+y+z)^2}$.

131. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 y ω la forma diferencial definida por:

$$\omega(x,y) = \frac{(x^2+y^2+f(x,y))(ydx - xdy)}{x^2+y^2}.$$

¿Cómo escoger f para que ω sea exacta en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$?

Solución Para que $w = Pdx + Qdy$ sea exacta en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ debemos tener:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 + \frac{f(x,y)}{x^2+y^2} + y\frac{f_y(x,y)(x^2+y^2) - 2yf(x,y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x} =$$
$$-\left[1 + \frac{f(x,y)}{x^2+y^2} + x\frac{f_x(x,y)(x^2+y^2) - 2xf(x,y)}{(x^2+y^2)^2}\right] \Longrightarrow$$

$$2+\frac{2f(x,y)}{x^2+y^2}+\frac{yf_y(x,y)(x^2+y^2)-2y^2f(x,y)+xf_x(x,y)(x^2+y^2)-2x^2f(x,y)}{(x^2+y^2)^2}=0\Longrightarrow$$
$$2+\frac{2f}{x^2+y^2}+\frac{yf_y+xf_x}{x^2+y^2}-\frac{2f}{x^2+y^2}=0\Longrightarrow yf_y+xf_x=-2(x^2+y^2).$$

Si tomamos f de la forma $f(x,y)=-(x^2+y^2)+g(x,y)$, transformamos la ecuación diferencial en homogénea, pues $yf_y+xf_x=y(-2y+g_y)+x(-2x+g_x)=-2(x^2+y^2)+xg_x+yg_y\Longrightarrow xg_x+yg_y=0$.

Podemos resolver esta ecuación diferencial escribiéndola $g_x+g_y\frac{y}{x}=0$, y tomando $g(x,y)=h\left(\frac{y}{x}\right)$, $h\in C^1$ ya que $g_x+g_y\frac{y}{x}=h'\left(\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right)+h'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x}\frac{y}{x}=0$.

Así tenemos que $f(x,y)=-(x^2+y^2)+h\left(\frac{y}{x}\right)$, con $h\in C^1$, w es exacta.

132. Determinar f, $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ de clase C^1 para que la forma diferencial ω definida por $\omega(x,y,z)=2xzdx+f(y)g(z)dy+(x^2+\frac{1}{2}y^2)dz$ sea cerrada en $\mathbb{R}^3$. Calcular las primitivas.

Solución Para que $w=2xzdx+f(y)g(z)dy+\left(x^2+\frac{1}{2}y^2\right)dz=Pdx+Qdy+Rdz$ sea cerrada debemos tener:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=0=\frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}\Longrightarrow f(y)g'(z)=y\Longrightarrow\frac{f(y)}{y}=g'(z)=a\in\mathbb{R}\Longrightarrow$$
$$f(y)=ay,\ g(z)=\frac{1}{\alpha}z\alpha\beta.$$

Así tenemos que las primitivas de w satisfacen:

$$\left.\begin{array}{ll}\dfrac{\partial f}{\partial x}=2xz & \Longrightarrow f=x^2z+C_1(y,z)\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=\alpha y\left(\frac{z}{\alpha}+\beta\right) & \Longrightarrow f=\frac{1}{2}\alpha y^2\left(\frac{z}{\alpha}+\beta\right)+C_2(x,z)\\ \dfrac{\partial f}{\partial z}=x^2+\frac{1}{2}y^2 & \Longrightarrow f=x^2z+\frac{1}{2}y^2z+C_3(x,y)\end{array}\right\}\Longrightarrow$$
$$f(x,y,z)=x^2z+\tfrac{1}{2}y^2z+\tfrac{1}{2}\alpha\beta y^2+C.$$

133. A cada aplicación $\varphi:\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}\longrightarrow\mathbb{R}$ de clase C^1 se asocia la forma diferencial ω_φ definida sobre $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$, por $\omega_\varphi(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}\left[(x-y\varphi(x,y))dx+(x\varphi(x,y)+y)dy\right]$.

a) Demostrar que ω_φ es cerrada sii φ verifica una ecuación en derivadas parciales (E).

b) Demostrar que $\varphi_0(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ es solución de (E).

c) ¿La forma diferencial ω_{φ_0} es exacta en $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$?

Solución

a) La forma diferencial $w_\varphi=\dfrac{x-y\varphi(x,y)}{x^2+y^2}dx+\dfrac{x\varphi(x,y)+y}{x^2+y^2}dy=Pdx+Qdy$ es cerrada si

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ sobre $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, es decir que:

$$\frac{x(2y)}{(x^2+y^2)^2} - \frac{(\varphi - y\varphi_x)(x^2+y^2) - 2y(y\varphi)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y(2x)}{(x^2+y^2)^2} + \frac{(y - x\varphi_x)(x^2+y^2) - 2x^2\varphi}{(x^2+y^2)^2}$$

$\Longrightarrow (\varphi - x\varphi_x)(x^2+y^2) + (\varphi - y\varphi_y)(x^2+y^2) = 2(x^2+y^2)\varphi = 0 \Longrightarrow x\varphi_x + y\varphi_y = 0$, es decir la ecuación diferencial en derivadas parciales que debe satisfacer φ es:

$$x\frac{\partial \varphi}{\partial x} + y\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \tag{E}$$

b) Verifiquemos que $\varphi_0 = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ satisface la ecuación diferencial (E).

En efecto, $x\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + y\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = x\dfrac{(2x(x^2+y^2) - 2x^3)}{(x^2+y^2)^2} - y\dfrac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{2x^2y^2 - 2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0.$

c) w_{φ_0} es exacta en $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ ya que:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} - \frac{x^2(x^2+y^2)^2 - x^2y2(x^2+y^2)2y}{(x^2+y^2)^4} = -\frac{x(x^3+2x^2y-3xy^2+2y^3)}{(x^2+y^2)^3},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{3x^2(x^2+y^2)^2 - x^3 2(x^2+y^2)2x}{(x^2+y^2)^4} + \frac{2xy(x^2+y^2) - 2x^3y}{(x^2+y^2)^2} =$$

$-\dfrac{x(x^3+2x^2y-3xy^2+2y^3)}{(x^2+y^2)^3}$, i.e. $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ en $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

Capítulo 3

Máximos y mínimos de funciones en varias variables

3.1 Matrices simétricas y formas cuadráticas

Recordemos que si A es una matriz $n \times n$ simétrica se tiene que $A = A'$ y que:

- Los valores propios de A son reales.
- $\exists\ P$ matriz ortogonal ($P' = P^{-1}$) tal que $D = P'AP$, donde D es la matriz diagonal de los vectores propios de A.

Definición 3.1.1 *Sea A una matriz simétrica $n \times n$.*

1. *Si todos los valores propios de A son positivos, se dice que A es definida positiva.*
2. *Si todos los valores propios de A son negativos, se dice que A es definida negativa.*
3. *Si los valores propios son positivos o nulos, se dice que A es semidefinida positiva.*
4. *Si los valores propios son negativos o nulos, se dice que A es semidefinida negativa.*
5. *Si existen valores propios positivos y negativos, se dice que A es indefinida.*

Teorema 3.1.1 *Sea A una matriz simétrica, entonces:*

1. *A es definida positiva si $a_{11} > 0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots, \det A > 0$, (semidefinida positiva si algún determinante es igual a 0).*
2. *A es definida negativa si $a_{11} < 0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots, (-1)^n \det A > 0$, (semidefinida negativa si algún determinante es igual a 0).*

3.1.1 Formas cuadráticas

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz $n \times n$, $Q: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{x} \mapsto Q(\mathbf{x})$ se denomina forma cuadrática si $Q(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \mathbf{x}' A \mathbf{x}$. La matriz A es una matriz asociada a la forma cuadrática.

Proposición 3.1.1 *Una forma cuadrática tiene una única matriz simétrica asociada.*

Signo de una forma cuadrática

Sea $Q: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática.

1. Q se dice definida positiva si y sólo si $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $Q(\mathbf{x}) > 0$ (semidefinida positiva si $\exists\, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ tal que $Q(\mathbf{x}) = 0$).
2. Q se dice definida negativa si y sólo si $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $Q(\mathbf{x}) < 0$ (semidefinida negativa si $\exists\, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ tal que $Q(\mathbf{x}) = 0$).
3. Q se dice indefinida si $\exists\, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ tales que $Q(\mathbf{x}_1) > 0$ y $Q(\mathbf{x}_2) < 0$.

Proposición 3.1.2 *Sea $Q: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática $Q(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle$, con A matriz simétrica asociada a Q, entonces $Q(\mathbf{x}) > 0$, $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ sii A es definida positiva.*

3.2 Máximos y mínimos de funciones de varias variables

Definición 3.2.1 *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f: U \longrightarrow \mathbb{R}$, se dice que f alcanza un máximo (resp. mínimo) en un punto $\mathbf{x}_0 \in U$, si existe una bola abierta $B(\mathbf{x}_0, \rho) \subset U$ de modo que $f(\mathbf{x}_0) \geq f(\mathbf{x})$ (resp. $f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x})$), para todo $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \rho)$.*

Se dice que la función f tiene un extremo en $\mathbf{x}_0$, si ahí alcanza un máximo o un mínimo.

Proposición 3.2.1 *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, $f: U \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en $\mathbf{x}_0 \in U$. Si f alcanza (tiene) un extremo en $\mathbf{x}_0$, entonces $D_k f(\mathbf{x}_0) = 0$, para $k = 1, \ldots, n$, es decir en un extremo todas las derivadas parciales se anulan.*

Definición 3.2.2 *Sea $B \subset \mathbb{R}^n$, $f: B \longrightarrow \mathbb{R}$, se dice que f alcanza un máximo absoluto (resp. un mínimo absoluto) en $\mathbf{x}_0 \in B$ si $f(\mathbf{x}_0) \geq f(\mathbf{x})$ (resp. $f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x})$), $\forall \mathbf{x} \in B$.*

a) Si f no es diferenciable en $\mathbf{x}_0$, no se puede asegurar la existencia de las derivadas parciales y sin embargo f puede tener un extremo en $\mathbf{x}_0$.

b) Las derivadas parciales pueden anularse todas en un punto $\mathbf{x}_0$ y sin embargo la función puede no tener un extremo ahí.

c) f puede alcanzar un máximo absoluto en $\mathbf{x}_0 \in B$, si B no es abierto (o un mínimo absoluto en $\mathbf{x}_0 \in B$) y sin embargo no es necesario que todas las derivadas parciales se anulen en $\mathbf{x}_0$.

Podemos decir que si

1. $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, con U abierto.

2. f es diferenciable en U, entonces los extremos de f en U se encuentran entre los puntos $\mathbf{x} \in U$ tales que $D_k f(\mathbf{x}) = 0$, $\forall k = 1, \ldots, n$. En otras palabras los puntos donde las $D_k f(\mathbf{x})$ $(k = 1, \ldots, n)$ se anulan, se les llama puntos críticos de f o candidatos a extremos de f.

Definición 3.2.3 *Sea $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{x}_0 \in U$ abierto, f de clase C^2, la matriz $H_f(\mathbf{x}_0) = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0)\right)$ se llama hessiano[1]de f en $\mathbf{x}_0$.*

Fórmula de Taylor de segundo orden

Proposición 3.2.2 *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ con derivadas de segundo orden continuas en $\mathbf{x}_0 \in U$. Si $df(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ (i.e. $D_k f(\mathbf{x}_0) = 0$, $k = 1, \ldots, n$), entonces:*

Si $d^2 f(\mathbf{x}_0) < 0$ se tiene un máximo en $\mathbf{x}_0$.

Si $d^2 f(\mathbf{x}_0) > 0$ se tiene un mínimo en $\mathbf{x}_0$.

[1]**Ludwig Otto Hesse (1811-1874)** Nace el 22 de abril de 1811 en Königsberg, Alemania (hoy Kaliningrado, Rusia). Muere el 4 de agosto de 1874 en Münich, Alemania. Otto Hesse estudia bajo la supervisión de Jacobi en Königsberg y fue maestro de física y de química antes de graduarse en Königsberg en 1840. Hesse llega a ser un conferenciante en Königsberg y publicó durante 16 años Journal de Crelle. En 1856 fue designado en Heidelberg y permanecido allí hasta que 1868, cuando se trasladó a Munich. Su trabajo principal se relaciona con teoría las funciones algebraicas y la teoría de invariantes. El introdujo el determinante hessiano en un artículo en 1842, en el estudio de curvas cúbicas y cuadráticas. Su trabajo fue influenciado por Steiner, particularmente en la interpretación geométrica de transformaciones algebraicas. Hesse trabaja en algunos temas que Cayley trabaja también y ambos producen una teoría de formas homogéneas que publicaron al mismo tiempo.

Si $d^2f(\mathbf{x}_0)$ *cambia de signo,* $\mathbf{x}_0$ *es un punto de ensilladura y* $f(\mathbf{x}_0)$ *no es ni máximo ni mínimo.*

Si $d^2f(\mathbf{x}_0) = 0$*, no hay criterio.*

3.3 Extremos de una función de varias variables con restricciones

3.3.1 Multiplicadores de Lagrange

Teorema 3.3.1 Teorema de los multiplicadores de Lagrange[2]

Consideremos $f(\mathbf{x})$*,* $g_j(\mathbf{x})$*,* $j = 1,\ldots,p$*, funciones reales de* n *variables (*$n > p$*) con derivadas parciales continuas en* $\mathbf{a}\in U$ *abierto,* $U \subset \mathbb{R}^n$*, tales que* $g_j(\mathbf{a}) = 0$*,* $j = 1,\ldots,p$ *y tales que la matriz jacobiana de los* g_j *sea de rango* p *en* $\mathbf{a}$*, entonces si* f *tiene un extremo en* $\mathbf{a}$ *con las restricciones* $g_j(\mathbf{x}) = 0$*,* $j = 1,\ldots,p$*, existen* $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ *tales que:*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = 0, \qquad i = 1,\ldots,n. \tag{3.1}$$

Los números λ_j *se llaman multiplicadores de Lagrange y la función* $\mathsf{L}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j g_j(\mathbf{x})$ *es llamada función de Lagrange o lagrangiano. Con esta notación escribimos* $\frac{\partial \mathsf{L}}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = 0,\ i = 1,\ldots,n$ *o* $\nabla \mathsf{L}(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$*. Los puntos* $\mathbf{a}$ *que satisfacen esta condición, son puntos críticos bajo restricciones.*

Para la búsqueda de los extremos se procede en dos etapas.

[2]**Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)** Nace el 25 de Enero de 1736 en Turín, Sardinia-Piedmont (hoy Italia). Muere el 10 de Abril de 1813 en París, Francia. Lagrange, procedía de una ilustre familia parisiense, que tenía profundo arraigo en Cerdeña y algún rastro de noble linaje italiano. Pasó sus primeros años en Turín, su activa madurez en Berlín y sus últimos años en París, donde logró su mayor fama. En la escuela, sus intereses infantiles eran Homero y Virgilio y cuando una memoria de Halley le cayó en las manos, se alumbró la chispa matemática. A los dieciséis años de edad, fue nombrado profesor de matemáticas en la Escuela Real de Artillería de Turín. A los diecinueve años de edad, obtuvo fama resolviendo el así llamado problema isoperimétrico, que había desconcertado al mundo matemático durante medio siglo. En realidad Lagrange no sólo había resuelto un problema, también había inventado un nuevo método, el cálculo de variaciones, que sería el tema central de la obra de su vida. Este cálculo pertenece a la historia del mínimo esfuerzo, que comenzó en los espejos reflectores de Heron y continuó cuando Descartes reflexionó sobre la curiosa forma de sus lentes ovales. Lagrange podía demostrar que los postulados newtonianos de materia y movimiento, un tanto modificados, se adaptaban al amplio principio de economía de la naturaleza. El principio ha conducido a los resultados aún más fructíferos de Hamilton, Maxwell, en la obra de Einstein y en las últimas fases de la mecánica ondulatoria.

1. Se buscan todos los puntos que pueden ser extremos:

   a) resolviendo la desigualdad $\operatorname{rang} \dfrac{\partial(g_1,\ldots,g_p)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(\mathbf{x})<p$, con $x\in U$ y $g_j(\mathbf{x})=0$, $j=1,\ldots,p$.

   b) resolviendo las ecuaciones $\operatorname{rang} \dfrac{\partial(g_1,\ldots,g_p)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(\mathbf{x})=p$, con el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rl} g_j(\mathbf{x})=0, & j=1,\ldots,p \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})+\lambda_1\dfrac{\partial g_1}{\partial x_i}(\mathbf{x})+\cdots+\lambda_n\dfrac{\partial g_p}{\partial x_i}(\mathbf{x})=0, & i=1,\ldots,n, \end{array}\right. \tag{3.2}$$

   con $\mathbf{x}\in U$.

   Este sistema tiene $n{+}p$ variables y $n{+}p$ ecuaciones y a cada solución $(x_1,\ldots,x_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_p)$ tal que la matriz jacobiana de los g_j sea de rango p, corresponde un punto crítico $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)$.

2. Se examina cada uno de estos puntos críticos para determinar si es un extremo o no. En caso afirmativo, se precisa si es un máximo o un mínimo.

La búsqueda de los puntos que satisfacen 1.a) o 1.b) se puede realizar de una sola vez, resolviendo el sistema:

$$g_j(\mathbf{x})=0,\qquad j=1,\ldots,p,$$

$$\lambda_0\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})+\lambda_1\frac{\partial g_1}{\partial x_i}(\mathbf{x})+\cdots+\lambda_n\frac{\partial g_p}{\partial x_i}(\mathbf{x})=0,\qquad i=1,\ldots,n,\quad \mathbf{x}\in U.$$

En efecto, si este sistema se satisface con $\lambda_0=0$, entonces las p líneas de $\dfrac{\partial(g_1,\ldots,g_p)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(\mathbf{x})$ son linealmente dependientes (si unos de los λ_j al menos es no nulo) y se está en el caso 1.a).

Si $\lambda_0\neq 0$, se pude considerar $\lambda_0=1$ y se satisface el sistema (3.2), es decir se está en el caso 1.b).

3.3.2 Condiciones de segundo orden

Teorema 3.3.2 *Sean f, g_j, $j=1,\ldots,p$, aplicaciones de U ($\subset\mathbb{R}^n$ abierto) en $\mathbb{R}$, $\mathbf{a}\in U$, $p<n$, de clase C^2 en una bola abierta $B_{\mathbf{a}}\subset U$ tal que $g_j(\mathbf{a})=0$, $j=1,\ldots,p$. Suponemos que:*

i) el rango de la matriz jacobiana de los g_j en $\mathbf{a}$ es igual a p

ii) *existen* $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ *tales que* $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) + \sum\limits_{j=1}^{p} \lambda_j \dfrac{\partial g_i}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Sea $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n / g_j(\mathbf{x}) = 0,\ j = 1, \ldots, p\}$ *y sea* $\mathsf{L}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \sum\limits_{j=1}^{p} \lambda_j g_j(\mathbf{x})$*; así para todo* $\mathbf{x} \in S$*, se tiene* $\mathsf{L}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ *y en particular* $\mathbf{a}$ *es un extremo de* f *bajo las restricciones* $g_j(\mathbf{x}) = 0$ *si y sólo si es un extremo de* L *bajo las mismas restricciones.*

Teorema 3.3.3 *Sean* f, g_j, $j = 1, \ldots, p$ *aplicaciones de* $U \subset \mathbb{R}^n$ *abierto sobre* $\mathbb{R}$, $\mathbf{a} \in U$, $p < n$, *de clase* C^2 *en una bola abierta* $B_{\mathbf{a}} \subset U$ *tal que* $g_j(\mathbf{a}) = 0$, $j = 1, \ldots, p$ *y tales que las condiciones siguientes se verifican:*

i) $\operatorname{rang} \dfrac{\partial(g_1, \ldots, g_p)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(\mathbf{a}) = p$,

ii) *existen* $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ *tales que* $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) + \sum\limits_{j=1}^{p} \lambda_j \dfrac{\partial g_j}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Sea $\mathsf{L}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \sum\limits_{j=1}^{p} \lambda_j g_j(\mathbf{x})$, *entonces se tiene:*

a) *Si* f *tiene un máximo bajo las restricciones* $g_j(\mathbf{x}) = 0$, $j = 1, \ldots, p$, *se satisface:*

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial^2 \mathsf{L}}{\partial x_k \partial x_r}(\mathbf{a}) h_k h_r \leq 0, \quad \forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n, \tag{3.3}$$

con la condición $\dfrac{\partial(g_1, \ldots, g_p)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(\mathbf{a})\,\mathbf{h} = \mathbf{0}$.

b) *Si la condición siguiente se satisface:*

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial^2 \mathsf{L}}{\partial x_k \partial x_r}(\mathbf{a}) h_k h_r < 0, \ \ \forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n, \ \ \mathbf{h} \neq \mathbf{0} \tag{3.4}$$

$\mathbf{h}$ *satisfaciendo la condición* $\dfrac{\partial(g_1, \ldots, g_p)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(\mathbf{a})\,\mathbf{h} = \mathbf{0}$, *entonces* $\mathbf{a}$ *es un máximo local estricto de la función* f *con las restricciones* $g_j(\mathbf{x}) = 0,\ j = 1, \ldots, p$.

Estos resultados son válidos, con las desigualdades invertidas en el caso de un mínimo.

Otro método elegante a menudo utilizado, consiste en pasar por la matriz hessiana orlada de L en a:

$$H_{\mathsf{L}}(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \mathsf{L}_{x_1x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \mathsf{L}_{x_nx_1}(\mathbf{a}) & (g_1)_{x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & (g_p)_{x_1}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathsf{L}_{x_1x_n}(\mathbf{a}) & \cdots & \mathsf{L}_{x_nx_n}(\mathbf{a}) & (g_1)_{x_n}(\mathbf{a}) & \cdots & (g_p)_{x_n}(\mathbf{a}) \\ (g_1)_{x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & (g_1)_{x_n}(\mathbf{a}) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (g_p)_{x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & (g_p)_{x_n}(\mathbf{a}) & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathsf{L}''(\mathbf{a}) & J_g'(\mathbf{a}) \\ J_g(\mathbf{a}) & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

y los menores principales orlados $\det H_i(\mathbf{a})$, donde

$$H_i(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \mathsf{L}_{x_1x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & \mathsf{L}_{x_ix_1}(\mathbf{a}) & (g_1)_{x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & (g_p)_{x_1}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathsf{L}_{x_1x_i}(\mathbf{a}) & \cdots & \mathsf{L}_{x_ix_i}(\mathbf{a}) & (g_1)_{x_i}(\mathbf{a}) & \cdots & (g_p)_{x_i}(\mathbf{a}) \\ (g_1)_{x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & (g_1)_{x_i}(\mathbf{a}) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (g_p)_{x_1}(\mathbf{a}) & \cdots & (g_p)_{x_i}(\mathbf{a}) & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \qquad i = p+1, \ldots, n.$$

Teorema 3.3.4 *Con las hipótesis del teorema anterior tenemos:*

a) **Condiciones suficientes**

- *Si* $(-1)^p \det H_i(\mathbf{a}) > 0$, $i = p+1, \ldots, n$, *es decir si los determinantes de los* $H_i(\mathbf{a})$ *son todos del mismo signo que* $(-1)^p$, *entonces* f *tiene un mínimo estricto en* $\mathbf{a}$ *bajo las restricciones* $g_j(\mathbf{x}) = 0$.

- *Si* $(-1)^i \det H_i(\mathbf{a}) > 0$, $i = p+1, \ldots, n$, *es decir si los determinantes de los* $H_i(\mathbf{a})$ *son de signo alternado del mismo signo que* $(-1)^i$, *entonces* f *tiene un máximo estricto en* $\mathbf{a}$ *bajo las restricciones* $g_j(\mathbf{x}) = 0$.

b) **Condiciones necesarias**

- *Si* f *tiene un mínimo en el punto* $\mathbf{a}$ *con las restricciones* $g_j(\mathbf{x}) = 0$, *entonces se tiene que* $(-1)^p \det H_i(\mathbf{a}) \geq 0$, $i = p+1, \ldots, n$.

- *Si* f *tiene un máximo en el punto* $\mathbf{a}$ *con las restricciones* $g_j(\mathbf{x}) = 0$, *entonces se tiene que* $(-1)^i \det H_i(\mathbf{a}) \geq 0$, $i = p+1, \ldots, n$.

3.4 Teorema de Kuhn–Tucker[3]

Definición 3.4.1 Restricciones saturadas *Sea* $\mathbf{a} \in S$*,* $g_j(\mathbf{a}) \geq 0$*,* $j = 1, \ldots, m$*, se dice que la restricción* g_k *es saturada en* $\mathbf{a}$*, si* $g_k(\mathbf{a}) = 0$*.*

Definición 3.4.2 Restricciones regulares *Sean* g_j*,* $j = 1, \ldots, m$*, funciones diferenciables en* $\mathbf{a}$ *tales que* $g_j(\mathbf{a}) \geq 0$*. Se dice que las restricciones* $g_j(\mathbf{x}) \geq 0$ *son regulares en* $\mathbf{a}$*, si ninguna de ellas es saturada en* $\mathbf{a}$ *(es decir* $g_j(\mathbf{a}) > 0$*,* $j = 1, \ldots, m$*) o si el rango de la matriz jacobiana de las restricciones saturadas en* $\mathbf{a}$*, es igual al número de restricciones.*

En otros términos, si $g_j(\mathbf{a}) = 0$ *para* $j \in J = \{j_1, \ldots, j_p\}$ *y si* $g_j(\mathbf{a}) > 0$*,* $j \notin J$*, las restricciones* $g_j(\mathbf{x}) \geq 0$*,* $j = 1, \ldots, m$ *se dicen regulares si la matriz jacobiana de los* $g_{j_1}, \ldots, g_{j_p}$ *es de rango* p *en* $\mathbf{a}$*.*

Teorema 3.4.1 Kuhn–Tucker *Sean* $f(\mathbf{x})$*,* $g_j(\mathbf{x})$*,* $j = 1, \ldots, m$ *funciones con derivadas parciales continuas en un abierto de* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$*, tales que* $g_j(\mathbf{a}) \geq 0$ *y tales que las restricciones* $g_j(\mathbf{x})$ *son regulares en* $\mathbf{a}$*, entonces si* $\mathbf{a}$ *es un extremo local de* f *con las* m *restricciones, existen* λ_j*,* $j = 1, \ldots, m$ *tales que:*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n \tag{3.5}$$

$$\lambda_j g_j(\mathbf{a}) = 0, \qquad j = 1, \ldots, m \tag{3.6}$$

$$\lambda_j \geq 0, \qquad j = 1, \ldots, m, \ \textit{si } \mathbf{a} \textit{ es un máximo} \tag{3.7}$$

$$\lambda_j \leq 0, \qquad j = 1, \ldots, m, \ \textit{si } \mathbf{a} \textit{ es un mínimo.} \tag{3.8}$$

Estas condiciones son llamadas condiciones de Kuhn–Tucker. La condición (3.6) *se llama relación de exclusión.*

[3]**Teorema de Kuhn–Tucker** Es lanzado en la teoría de programación no lineal en 1950. Este teorema da las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una solución óptima a un problema de programación no lineal. El teorema se probó en un artículo “Nonlinear Programming” escrito colectivamente por dos matemáticos de Princeton: Albert W. Tucker y de Harold W. Kuhn. Pero resultó que este teorema ya se había probado, dos veces: anteriormente, primero en 1939 en una tesis de William Karush de la Universidad de Chicago. Este resultado nunca se publicó. El segundo por Fritz John en un artículo rechazado por el Duke Mathematics Journal, pero luego publicado en una colección de ensayos para el volumen de Aniversario del Courant en 1948. Es curioso el impacto que ha tenido este teorema en el mundo de la historia de la matemática, pues representa un caso de un redescubrimiento múltiple. Teorema también se conoce con el nombre de Karush-John-Kuhn y Tucker.

– El teorema se aplica en la búsqueda de extremos locales de una función $f(\mathbf{x})$ bajo las restricciones $g_j(\mathbf{x}) \geq 0$, $j = 1, \ldots, m$, cuando las funciones f, g_j, $j = 1, \ldots, m$ son derivables con derivadas continuas en un abierto U.

Se procede en 2 etapas:

1. Se buscan los puntos de U para los cuales una de las condiciones siguientes se satisface:

a) las restricciones no son regulares (ni calificadas).

b) las restricciones son regulares (o calificables) y existen λ_j (todos positivos, todos negativos) tales que las condiciones de Kuhn-Tucker se satisfacen.

Se encuentran así los puntos susceptibles de ser extremos.

2. Se examinan cada uno de los puntos encontrados en 1, para saber si se trata efectivamente de máximo o un mínimo. Este estudio puede realizarse directamente considerando los valores de la función en un vecindario del punto estudiado o bien utilizando los criterios de segundo orden que veremos más adelante.

El teorema de Kuhn-Tucker da las condiciones necesarias para que f tenga un extremo en $\mathbf{a}$, bajo las restricciones $g_j(\mathbf{x}) \geq 0$, cuando las condiciones son regulares en $\mathbf{a}$. El siguiente teorema da criterios para precisar la naturaleza de los puntos candidatos.

Teorema 3.4.2 Criterio del hessiano orlado *Sean $f(\mathbf{x})$, $g_j(\mathbf{x})$, $j = 1, \ldots, m$ funciones de clase C^2 en un vecindario de $\mathbf{a}$ tales que $g_j(\mathbf{a}) \geq 0$, $j = 1, \ldots, m$ y tales que las restricciones $g_j(\mathbf{x}) \geq 0$ sean regulares en $\mathbf{a}$. Supongamos que las condiciones de Kuhn-Tucker se satisfacen en $\mathbf{a}$, es decir existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ tales que:*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{3.5}$$

$$\lambda_j g_j(\mathbf{a}) = 0, \qquad j = 1, \ldots, m. \tag{3.6}$$

Para facilitar la escritura se supone que las restricciones se numeran de modo que $g_j(\mathbf{a}) > 0$, $j = 1, \ldots, q$, y que $g_j(\mathbf{a}) = 0$, $j = q+1, \ldots, m$ (por lo que $\lambda_j = 0$, $j = 1, \ldots, q$) y las restricciones son por hipótesis regulares en $\mathbf{a}$, la matriz jacobiana $\dfrac{\partial(g_{q+1}, \ldots, g_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(\mathbf{a})$ es de rango $m - q \leq n$. Se supone además que las variables x_i se numeran de modo que la *matriz cuadrada* $\dfrac{\partial(g_{q+1},\ldots,g_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_{m-q})}(\mathbf{a})$ *sea regular.*

Condiciones suficientes

Para que $\mathbf{a}$ *sea un mínimo de* f *bajo las restricciones* $g_j(\mathbf{x}) \geq 0$*,* $j = 1,\ldots,m$ *es suficiente que:*

$$\lambda_j < 0, \qquad j = q+1,\ldots,m, \tag{3.9}$$

$$(-1)^{m-q} \det H_k(\mathbf{a}) > 0, \qquad k = m-q+1,\ldots,n, \tag{3.10}$$

y para que $\mathbf{a}$ *sea un máximo de* f *bajo las restricciones* $g_j(\mathbf{x}) \geq 0$*,* $j = 1,\ldots,m$ *es suficiente que:*

$$\lambda_j > 0, \qquad j = q+1,\ldots,m, \tag{3.11}$$

$$(-1)^{k} \det H_k(\mathbf{a}) > 0, \qquad k = m-q+1,\ldots,n, \tag{3.12}$$

donde los $\det H_k(\mathbf{a})$ *son los menores principales orlados de la matriz hessiana orlada* H *en* $\mathbf{a}$*, del lagrangiano* $L(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(\mathbf{x})$*:*

$$H(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} L''(\mathbf{a}) & \left(\dfrac{\partial g^*}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{a})\right)' \\ \dfrac{\partial g^*}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{a}) & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

y donde $\dfrac{\partial q^*}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{a}) = \dfrac{\partial(g_{q+1},\ldots,g_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(\mathbf{a})$*. Además este mínimo (respectivamente máximo) es estricto.*

Condiciones necesarias

Si f *tiene un mínimo en* $\mathbf{a}$ *bajo las restricciones* $g_j(\mathbf{x}) \geq 0$*,* $j = 1,\ldots,m$ *se tiene:*

$$\lambda_j \leq 0, \qquad j = q+1,\ldots,m, \tag{3.9$'$}$$

$$(-1)^{m-q} \det H_k(\mathbf{a}) \geq 0, \qquad k = m-q+1,\ldots,n. \tag{3.10$'$}$$

Si f *tiene un máximo en* $\mathbf{a}$ *bajo las restricciones* $g_j(\mathbf{x}) \geq 0$*,* $j = 1,\ldots,m$ *se tiene:*

$$\lambda_j \geq 0, \qquad j = q+1,\ldots,m, \tag{3.11$'$}$$

$$(-1)^{k} \det H_k(\mathbf{a}) \geq 0, \qquad k = m-q+1,\ldots,n. \tag{3.12$'$}$$

Este teorema es similar al caso de restricciones con igualdades (el cual se utiliza para demostrarlo, utilizando las variables cuadráticas z_j usadas en el teorema de Kuhn–Tucker, pues fuera de la condición de signo de los λ_j se trabaja como si se tomara en cuenta las restricciones saturadas (pero que queda bien claro, que las condiciones de signo (3.9) y (3.11) y el número de restricciones m, juega un papel importante.

En el caso en que ninguna de las restricciones es saturada en el punto candidato a, $(m = q)$, la matriz $H(\mathbf{a})$ se reduce a $L''(\mathbf{a}) = F''(\mathbf{a})$, pues $\lambda_j = 0$, $j = 1, \ldots, m$. Así somos llevados al caso en que el candidato puede ser un extremo (sin restricciones).

Capítulo 4

Ejercicios de máximos y mínimos de funciones en varias variables

4.1 Ejercicios

4.1.1 Extremos sin restricciones

1. Determinar los extremos locales de las funciones siguientes:

a) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$

b) $f(x,y) = x^3 + y^3$

c) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

d) $f(x,y) = (x-y)^2 + (x+y)^3$

e) $f(x,y) = x^3 + x^2 + y^2$

f) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ en $\mathbb{R}_+^{*\,2}$

g) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$

h) $f(x,y) = x^2y^3(1 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y)$

i) $f(x,y) = x^2y + \ln(1+y^2)$

j) $f(x,y) = x((\ln x)^2 + y^2)$ en $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$

k) $f(x,y) = \mathrm{e}^{x \operatorname{sen} y}$

l) $f(x,y) = (3x+4y)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$

m) $f(x,y) = x\mathrm{e}^y + y\mathrm{e}^x$

n) $f(x,y) = (x-y)\mathrm{e}^{xy}$

o) $f(x,y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \cos(x+y)$ en $]\,0,\pi\,[^2$

p) $f(x,y) = x^2 + y^2 + \cos(x^2+y^2)$ en $]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\,[^2$

q) $f(x,y) = \dfrac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$ en $\mathbb{R}_+^{*\,2}$

r) $f(x,y,z) = (x+z^2)\mathrm{e}^{x(y^2+z^2+1)}$

s) $f(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 + xyz + y - z$

t) $f(x,y,z) = x\mathrm{e}^y + y\mathrm{e}^z + z\mathrm{e}^x$

u) $f(x,y,z) = xy\mathrm{e}^z + yz\mathrm{e}^x + zx\mathrm{e}^y$

v) $f(x,y,z) = xyz(4-x-y-z)$

w) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$

Solución

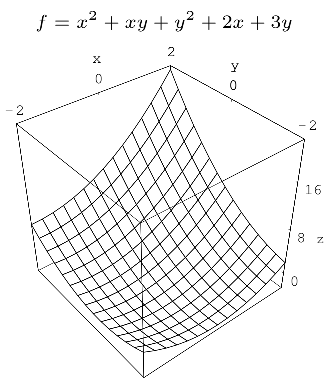
a) $f_x = 2x+2+y = 0$, $f_y = x+2y+3 = 0 \Longrightarrow x = -\frac{1}{3}$, $y = -\frac{4}{3}$, $f(-\frac{1}{3}+h, -\frac{4}{3}+k) - f(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}) = (-\frac{1}{3}+h)^2 + (-\frac{1}{3}+h)(-\frac{4}{3}+k) + (-\frac{4}{3}+k)^2 + 2(-\frac{1}{3}+h) + 3(-\frac{4}{3}+k) - f(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}) = h^2 + kh + k^2 \geq 0$, entonces $(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3})$ es un mínimo con $f(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}) = -\frac{7}{3}$.

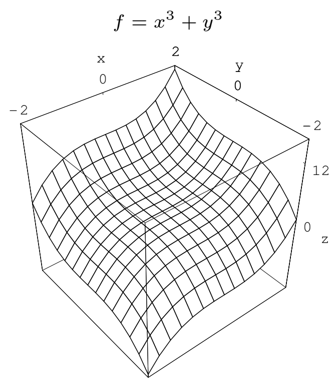
b) $f_x = 3x^2 = 0$, $f_y = 3y^2 = 0 \Longrightarrow (0,0)$ es un punto crítico, pero $f(x,x) = 2x^3 > 0$, si $x > 0$ y $f(x,x) < 0$, si $x < 0$ i.e. $(0,0)$ no es un extremo.

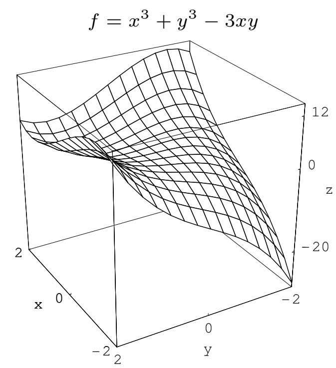
c) $f_x = 3x^2 - 3y = 0$, $f_y = 3y^2 - 3x = 0 \Longrightarrow x^4 = x \Longrightarrow x(x^3 - 1) = 0 \Longrightarrow x = 0$, $x = 1$. Los puntos críticos son $(0,0)$ y $(1,1)$.

En $(0,0)$, $f(h,h) = 2h^3 - 3h^2 < 0$, si $h \to 0$ y $f(h,-h) = 3h^2 > 0$ y $(0,0)$ no es un extremo.

En $(1,1)$, $f(1+h, 1+k) - f(1,1) = 3(h^2 - hk + k^2) + h^3 + k^3 = 3(h^2 - hk + h^2) + (k + h)(h^2 - hk + k^2) = (3 + k + h)(h^2 - hk + k^2) > 0$, si $(h,k) \to (0,0)$ y $(1,1)$ es un mínimo con $f(1,1) = -1$.







d) $f_x = 2(x-y) + 3(x+y)^2 = 0$, $f_y = -2(x-y) + 3(x+y)^2 = 0 \Longrightarrow x - y = 0 \Longrightarrow x = y \Longrightarrow x = 0$, $y = 0$.

En $(0,0)$ se tiene que $f(h,h) = 8h^3$, que cambia de signo en $0 \therefore (0,0)$ no es un extremo.

e) $f_x = 3x^2 + 2x = 0$, $f_y = 2y = 0 \Longrightarrow x(3x+2) = 0$, $y = 0 \Longrightarrow x = 0$, $x = -\frac{2}{3}$, $y = 0$.

En $(0,0)$, $f(h,k) = h^3 + h^2 + k^2 = h^2(1+k) + k^2 \geq 0$ en un vecindario de $(0,0)$ i.e. $(0,0)$ es un mínimo.

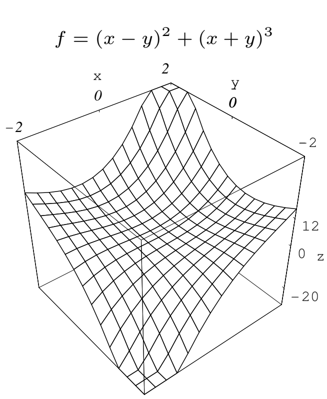
En $(-\frac{2}{3}, 0)$, $f(-\frac{2}{3}+h, k) - f(-\frac{2}{3}, 0) = k^2 - h^2 + h^3$. En particular $f(-\frac{2}{3}+h, h) - f(-\frac{2}{3}, 0) = h^3$ que cambia de signo y no es un extremo.

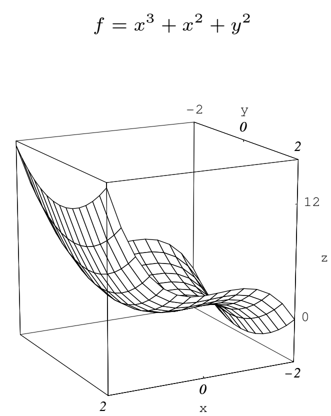
f) $f_x = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0$, $f_y = 6xy - 12 = 0 \Longrightarrow x^2 + y^2 = 5$, $xy = 2 \Longrightarrow x^2 + \dfrac{4}{x^2} = 5 \therefore x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Longrightarrow x^2 = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 4(1)(4)}}{2} = \dfrac{5 \pm 3}{2} = 1, 4 \therefore\ x = \pm 1, \pm 2.$

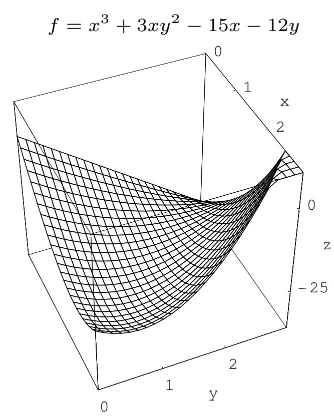
Los puntos críticos son $(1,2), (2,1), (-1,-2), (-2,-1)$. Se toman en cuenta solamente $(1,2), (2,1)$. Así, $H(x,y) = 6\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$, el hessiano tiene la propiedad siguiente:

En $(1,2)$, $H(1,2) = 6\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, pues $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 < 0$ no es un extremo, es un punto silla ya que los valores propios del hessiano son -3 y 1.

En $(2,1)$, $H(2,1) = 6\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, con $\Delta_1 = 12 > 0$, $\Delta_2 = 36{\cdot}3 > 0$ y es un mínimo.







g) $f_x = 4x^3 - 4y = 0$, $f_y = 4y^3 - 4x = 0 \Longrightarrow y = x^3$, $y^3 = x \Longrightarrow y^9 = y \Longrightarrow y = 0$, $y = \pm 1$, es decir $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$. Además, $f_{xx} = 12x^2$, $f_{yy} = 12y^2$, $f_{xy} = -4$ y $H_f = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}$.

En $(0,0)$ el hessiano no aporta al criterio; se debe analizar alrededor de $(0,0)$. De este modo $f(h,h^2) = h^4 + h^8 - 4h^3 = h^3(h + h^5 - 4) \sim -4h^3$, si $h \to 0$ i.e. f cambia de signo en $(0,0)$ y $(0,0)$ no es un extremo, es un punto silla pues los valores propios del hessiano son ± 4.

En $(1,1)$ o $(-1,-1)$ el hessiano $H = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}$ y H es positiva por lo que son mínimos.

h) $f_x = 2xy^3 - x^2y^3 - xy^4 = xy^3(2-x-y) = 0$, $f_y = 3x^2y^2 - x^3y^2 - 2x^2y^3 = x^2y^2(3-x-2y) = 0$, entonces las soluciones son $(0,0), (x_0, 0)$, si $x_0 \neq 0$; $(0, y_0)$, si $y_0 \neq 0$ y para $x_0 \neq 0$ y $y_0 \neq 0$, $2 - x - y = 0$, $3 - x - 2y = 0 \Longrightarrow x = 1$, $y = 1$.

En $(0,0)$, $f(h,h) = h^5 - \frac{1}{3}h^6 - \frac{1}{2}h^6 = h^5(1 - \frac{1}{3}h - \frac{1}{2}h) \sim h^5$, si $h \to 0$ i.e. en $(0,0)$ cambia de signo y no es un extremo.

En $(0, y_0)$, $f(h, y_0 + k) - f(0, y_0) = h^2(y_0 + k)^3 - \frac{1}{3}h^3(y_0 + k)^3 - \frac{1}{2}h^2(y_0 + k)^4 =$
$h^2(y_0 + k)^3(1 - \frac{1}{2}y_0 - \frac{1}{3}h - \frac{1}{2}k)$.

– Si $y_0 > 2$, $f(h, y_0 + k) - f(0, y_0) = h^2y_0^3(1 - \frac{1}{2}y_0) < 0$ i.e. $(0, y_0)$ es un máximo.

– Si $y_0 < 0$, $f(h, y_0 + k) - f(0, y_0) = h^2y_0^3(1 - \frac{1}{2}y_0) < 0$ i.e. $(0, y_0)$ es un máximo.

– Si $0 < y_0 < 2$, $f(h, y_0 + k) - f(0, y_0) = h^2y_0^3(1 - \frac{1}{2}y_0) > 0$ i.e. $(0, y_0)$ es un mínimo.

– Si $y_0 = 2$, $f(h, 2 + k) - f(0, y_0) = -h^2(2 + k)^3(\frac{1}{3}h + \frac{1}{2}k)$ i.e. $(0, 2)$ es un punto silla.

En $(x_0, 0)$, $f(x_0 + h, k) - f(x_0, 0) = (x_0 + h)^2k^3 - \frac{1}{3}(x_0 + h)^3k^3 - \frac{1}{2}(x_0 + h)^2k^4 =$
$(x_0 + h)^2k^3(1 - \frac{1}{3}(x_0 + h) - \frac{1}{2}k) \sim x_0^2k^3(1 - \frac{1}{3}x_0)$ y cambia de signo para $x_0 \neq 3$ i.e. $(x_0, 0)$ no es un extremo.

En $(3, 0)$, $f(3 + h, k) - f(3, 0) = -(3 + h)^2k^3(\frac{1}{3}h + \frac{1}{2}k)$ se tiene:

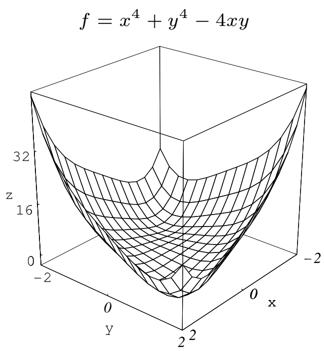
– Si $h > 0$, $k > 0$, $f(3 + h, k) - f(3, 0) < 0$.

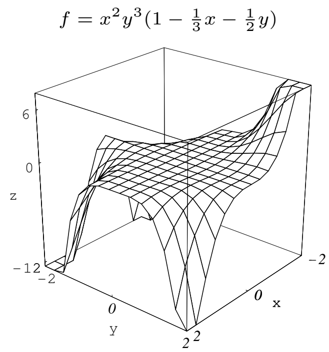
– Si $h < 0$, $k > 0$ con $h < -\frac{3}{2}k$, $f(3 + h, k) - f(3, 0) > 0$, y $(3, 0)$ no es extremo.

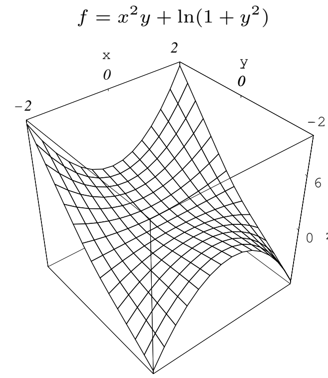
Además, como $f_{xx} = 2y^3 - 2xy^3 - y^4$, $f_{xy} = 6xy^2 - 3x^2y^2 - 4xy^3$, $f_{yy} = 6x^2y - 2x^3y - 6x^2y^2$, en $(1, 1)$, el hessiano $H = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$ y hay un máximo en $(1, 1)$.

i) $f_x = 2xy = 0$, $f_y = x^2 + \dfrac{2y}{1 + y^2} = 0$. Si $x \neq 0$, $y = 0 \Longrightarrow x = 0$ que es una contradicción. La única solución es $x = 0$, $y = 0$.

Ahora $f(0, h) = \ln(1 + h^2) > 0$, pero $f(h^{\frac{1}{3}}, h) = h^{\frac{2}{3}}h + \ln(1 + h^2) \sim h^{\frac{2}{3}}h < 0$, si $h < 0$, por lo que f no es un extremo.







j) $f_x = (\ln x)^2 + y^2 + 2x \ln x \dfrac{1}{x} = (\ln x)^2 + y^2 + \ln x^2 = 0$, $f_y = x(2y) = 2xy = 0$.

Si $x > 0 \Longrightarrow y = 0$ y $(\ln x)^2 = -\ln x^2 \Longrightarrow q^2 = -2q \Longrightarrow q = 0$, $q = -2$, o sea $x = 1$, $x = \mathrm{e}^{-2}$ y $(1, 0)$, $(\mathrm{e}^{-2}, 0)$ son los puntos críticos.

Además, $f_{xx} = \dfrac{2\ln x}{x} + \dfrac{2}{x}$, $f_{xy} = 2y$, $f_{yy} = 2x$, el hessiano en $(1, 0)$ es $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $(1, 0)$ es un mínimo.

En $(e^{-2}, 0)$, el hessiano es $\begin{pmatrix} \dfrac{-3}{\mathrm{e}^{-2}} & 0 \\ 0 & \dfrac{2}{\mathrm{e}^{-2}} \end{pmatrix}$ y $(\mathrm{e}^{-2}, 0)$ es un punto silla, ya que tiene un valor propio positivo y otro negativo.

Se pudo analizar la función sin usar el hessiano, de modo que $f(1 + h, k) - f(1, 0) = (1 + h)((\ln(1 + h))^2 + k^2) > 0$, es decir $(1, 0)$ es un mínimo.

En $(\mathrm{e}^{-2}, 0)$, $f(\mathrm{e}^{-2} + h, 0) - f(\mathrm{e}^{-2}, 0) = (\mathrm{e}^{-2} + h)\ln^2(\mathrm{e}^{-2} + h) - \mathrm{e}^{-2}\ln^2(\mathrm{e}^{-2}) =$
$(\mathrm{e}^{-2} + h)(\ln^2 \dfrac{1 + \mathrm{e}^2 h}{\mathrm{e}^2}) - \mathrm{e}^{-2}\ln^2 \mathrm{e}^{-2} = (\mathrm{e}^{-2} + h)(\ln^2(1 + \mathrm{e}^2 h) - 4\ln(1 + \mathrm{e}^2 h) + 4) - 4\mathrm{e}^{-2} =$
$\mathrm{e}^{-2}\ln^2(1 + \mathrm{e}^2 h) - 4\mathrm{e}^{-2}\ln(1 + \mathrm{e}^2 h) + h\,[\ln^2(1 + \mathrm{e}^2 h) - 4\ln(1 + \mathrm{e}^2 h + 4\,] = h - \frac{1}{2}h^2\mathrm{e}^2 + h^2\mathrm{e}^2 +$
$o(h^2) - 4\mathrm{e}^{-2}(h\mathrm{e}^2 - \frac{1}{2}h^2\mathrm{e}^{-2} + h^2\mathrm{e}^{-2} + o(h^2)) + 4h = h - \frac{1}{2}h^2\mathrm{e}^2 - 4h + o(h^2) + 4h \sim h + o(h)$,
o sea f cambia de signo y $(\mathrm{e}^{-2}, 0)$ es un punto silla.

k) $f_x = \mathrm{e}^{x \operatorname{sen} y} \operatorname{sen} y = 0$, $f_y = \mathrm{e}^{x \operatorname{sen} y} x \cos y = 0 \Longrightarrow \operatorname{sen} y = 0$, $y = 0 + n\pi$, $x = 0$ y $(0, n\pi)$, con $n \in \mathbb{Z}$ son los puntos críticos.

Ahora, $f(h, n\pi + k) - f(0, n\pi) = \mathrm{e}^{h \operatorname{sen}(n\pi + k)} - 1 \sim \mathrm{e}^{hk(-1)^n} - 1 = hk(-1)^n + \mathrm{o}(hk)$, con lo que f cambia de signo en $(0, n\pi)$ y no es un extremo.

l) $f_x = 3\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} + (3x + 4y)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}(-2x) = 0$, $f_y = 4\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} + (3x + 4y)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}(-2y) = 0$, con lo que $\dfrac{3}{4} = \dfrac{x}{y} \Longleftrightarrow 3y = 4x$, o sea $3 = 2x\dfrac{9 + 16}{3}x \Longrightarrow 9 = 2{\cdot}25x^2 \Longrightarrow x = \pm\dfrac{3\sqrt{2}}{10}$,

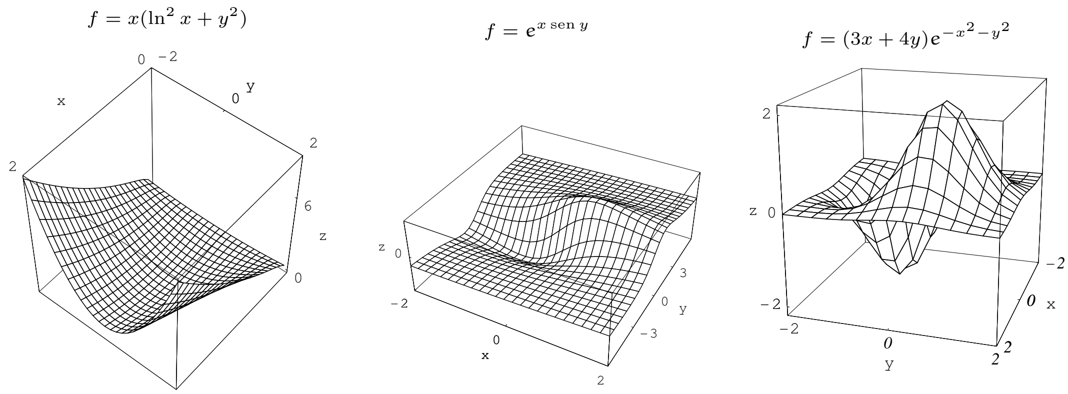
$y = \pm\dfrac{4\sqrt{2}}{10}$.

Los puntos críticos son $(\frac{3\sqrt{2}}{10}, \frac{4\sqrt{2}}{10})$ y $(-\frac{3\sqrt{2}}{10}, -\frac{4\sqrt{2}}{10})$.

$f_{xx} = (-18x - 8y + 12x^3 + 16x^2y)e^{-x^2-y^2}$, $f_{yy}(-6x - 24y + 12xy^2 + 16y^3)e^{-x^2-y^2}$, $f_{xy} = (-8x - 6y + 12x^2y + 16xy^2)e^{-x^2-y^2}$. Así tenemos:

$H(\frac{3\sqrt{2}}{10}, \frac{4\sqrt{2}}{10}) = \begin{pmatrix} \frac{-34\sqrt{2}}{5}e^{-\frac{1}{2}} & \frac{-12\sqrt{2}}{5}e^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{-12\sqrt{2}}{5}e^{-\frac{1}{2}} & \frac{-41\sqrt{2}}{5}e^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$, $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 = 100e^{-1} > 0$ y es un máximo.

$H(-\frac{3\sqrt{2}}{10}, -\frac{4\sqrt{2}}{10}) = \begin{pmatrix} \frac{34\sqrt{2}}{5}e^{-\frac{1}{2}} & \frac{12\sqrt{2}}{5}e^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{12\sqrt{2}}{5}e^{-\frac{1}{2}} & \frac{41\sqrt{2}}{5}e^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$, $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 = 100e^{-1} > 0$ y es un mínimo.



m) $f_x = e^y + ye^x = 0$, $f_y = xe^y + e^x = 0 \Longrightarrow xy = 1$, entonces $-\frac{1}{x}e^x = e^{\frac{1}{x}} \Longleftrightarrow xe^{\frac{1}{x}} + e^x = 0$. La función $x \longmapsto xe^{\frac{1}{x}} + e^x$ es estrictamente creciente en $]-\infty, 0]$ y se anula en $x = -1$. El único punto crítico es $(-1, -1)$. Las derivadas de orden dos son $f_{xx} = ye^y$, $f_{yy} = xe^y$, $f_{xy} = e^y + e^x$, el hessiano en $(-1, -1)$ es $H = \begin{pmatrix} -\frac{1}{e} & \frac{2}{e} \\ \frac{2}{e} & -\frac{1}{e} \end{pmatrix}$ i.e. $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 < 0$ y no es un máximo ni un mínimo, es un punto silla.

n) $f_x = e^{xy} + (x-y)ye^{xy} = 0$, $f_y = -e^{xy} + (x-y)xe^{xy} = 0 \Longrightarrow 1 = (y-x)y = y^2 - xy$, $1 = (x-y)x = x^2 - xy \Longrightarrow x^2 - y^2 = 0$, $x = -y$, $x = y$, pero la solución $x = y$ no sirve. Por lo tanto, $1 = -2x(-x)$, $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ y los puntos críticos son $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Las derivadas de orden dos son $f_{xx} = 2ye^{xy} + (x-y)y^2e^{xy}$, $f_{yy} = -2xe^{xy} + (x-y)y^2e^{xy}$, $f_{xy} = xe^{xy} + (x-2y)e^{xy} + (x-y)xye^{xy}$, por lo que el hessiano $H(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}}$, $\Delta_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}} < 0$, $\Delta_2 = -4e^{-\frac{1}{2}} < 0$, no es máximo ni mínimo (punto silla).

Similarmente para $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, el hessiano $H(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}}$ y se tiene $\Delta_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}} < 0$, $\Delta_2 = -4e^{-\frac{1}{2}} < 0$, no es máximo ni mínimo (punto silla).

o) $f_x = \cos x - \operatorname{sen}(x+y) = 0$, $f_y = \cos y - \operatorname{sen}(x+y) = 0$, entonces $\cos x = \cos y \Longrightarrow x = y$ en $]\,0, \pi\,[^2$. Así, $\cos x - 2 \operatorname{sen} x \cos x = \cos x(1 - 2\operatorname{sen} x) = 0 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$.

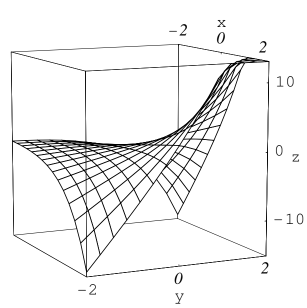
Los puntos críticos son $(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$, $(\frac{5}{6}\pi, \frac{5}{6}\pi)$. Además, las derivadas de orden 2 son $f_{xx} = -\operatorname{sen} x - \cos(x+y)$, $f_{xy} = -\cos(x+y)$, $f_{yy} = -\operatorname{sen} y - \cos(x+y)$.

El hessiano $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ falla, por lo que se impone un estudio más fino en el punto.

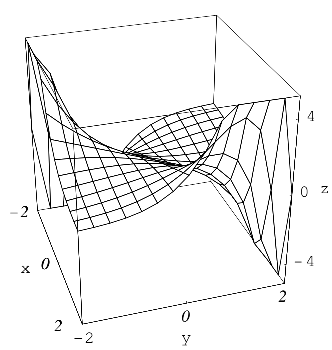
En $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $f(\frac{\pi}{2}+h, \frac{\pi}{2}+k) - f(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = \cos h + \cos k - \cos(h+k) - 1 = \cos h + \cos k - \cos h \cos k + \operatorname{sen} h \operatorname{sen} k - 1 = 1 + h^2 + 1 + k^2 - (1+h^2)(1+k^2) - 1 + hk + o(h^2) + o(k^2) = hk + o(\|(h,k)\|^2)$ y cambia de signo; no es un extremo.

En $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$, el hessiano $H(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}) = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$, $\Delta_1 = -1 < 0$, $\Delta_2 = \frac{3}{4} > 0$ i.e. es un máximo. Similarmente, $H(\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}) = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$ y $(\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$ es un máximo.

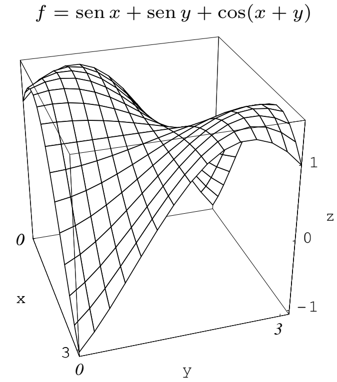
$f = xe^y + ye^x$



$f = (x-y)e^{xy}$



$f = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \cos(x+y)$

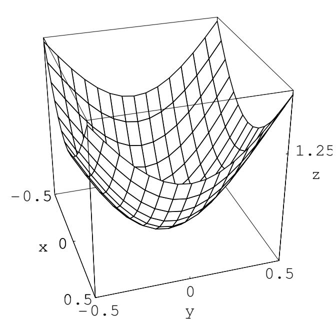


p) $f_x = 2x - 2x \operatorname{sen}(x^2+y^2) = 0$, $f_y = 2y - 2y \operatorname{sen}(x^2+y^2) = 0$. Así, se tiene que una solución es $x = 0$, $y = 0$. Si $x \neq 0$, $\operatorname{sen}(x^2+y^2) = 1 \Longrightarrow x^2 + y^2 = \frac{\pi}{2}$, pero el círculo de radio $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ se sale del cuadrado $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\,[\times]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\,[$ y la única solución es $(0,0)$. Claramente, $f(x,y) = 1 + x^2 + y^2 + o(x^2+y^2)$ y $(0,0)$ es un mínimo.

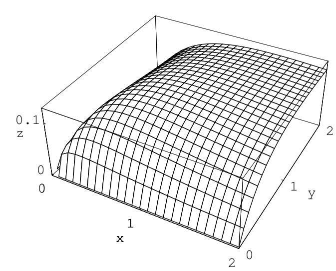
q) $f_x = \dfrac{y(xy^2+x^2y+x^2+y^2+2xy+x+y)-xy(xy^2+2xy+2x+2y+1)}{(xy^2+x^2y+x^2+y^2+2xy+x+y)^2} = 0 \iff -x^2y^2- x^2y+y^3+y^2 = 0 \iff (1+y)y(y-x^2)=0 \iff y=x^2$.

También, $f_y = 0 \iff (1+x)x(x-y^2)=0 \iff x=y^2 \implies y=y^4 \implies y=0, y=1$ y el único punto crítico es $(1,1)$. De esta forma $f(1+h,1+k)-f(1,1) = \dfrac{(1+h)(1+k)}{(2+h)(2+k)(2+h+k)} - \dfrac{1}{8} = \dfrac{-2(h^2+k^2-hk)+o(h^2)+o(k^2)}{8(2+h)(2+k)(2+h+k)} \sim -\dfrac{(h^2+k^2-hk)}{32} < 0$, $\forall (h,k) \neq (0,0)$ i.e. es un máximo.

$f = x^2+y^2+\cos(x^2+y^2)$



$f = \dfrac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$



r) $f_x = e^{x(y^2+z^2+1)} + (x+z^2)(y^2+z^2+1)e^{x(y^2+z^2+1)} = 0 \iff (x+z^2)(y^2+z^2+1) = -1$, $f_y = (x+z^2)2xye^{x(y^2+z^2+1)} = 0 \implies xy(x+z^2)=0$, $f_z = 2ze^{x(y^2+z^2+1)} + 2xz(x+z^2)e^{x(y^2+z^2+1)} = 0 \implies 2z(1+x(x+z^2))=0$, se deduce que $x+z^2 \neq 0$ i.e. $xy=0$.

Si $x=0 \implies z=0$ que es imposible pues $x+z^2\neq 0$; así, $x\neq 0 \implies y=0$ y $x=-1$ i.e. el único punto crítico es $(-1,0,0)$.

Ahora $f(-1+x,y,z)-f(-1,0,0) = (-1+x+z^2)e^{(-1+x)(y^2+z^2+1)} + e^{-1} = e^{-1}(1-x+z^2)e^{-y^2-z^2+xy^2+xz^2+x} - e^{-1} = e^{-1}(1-x+z^2)(1-y^2-z^2+xy^2+xz^2+x+\frac{1}{2}x^2+o(\|(x,y,z)\|^2) = e^{-1}(-1+y^2+z^2-x-\frac{1}{2}x^2+x+z^2+o(\|(x,y,z)\|^2)+e^{-1} = e^{-1}(\frac{1}{2}x^2+y^2+z^2)+o(\|(x,y,z)\|^2)>0$, para $(x,y,z)\to(0,0,0)$ y $(-1,0,0)$ es un mínimo y $f(-1,0,0) = -\dfrac{1}{e}$.

s) $f_x = x+yz = 0$, $f_y = xz+1 = 0$, $f_z = xy-1 = 0 \implies x = -\frac{1}{z}$, $x = \frac{1}{y}$ y se tiene $x + \frac{1}{x}\big(-\frac{1}{x}\big) = 0 \implies x = \dfrac{1}{x^2} \implies x^3 = 1 \implies x=1, y=1, z=-1$ y $(1,1,-1)$ es el único punto crítico.

Las derivadas parciales son $f_{xx} = 1$, $f_{xy} = z$, $f_{xz} = y$, $f_{yy} = 0$, $f_{yx} = z$ y $f_{zz} = 0$, por lo que el hessiano es $H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\Delta_1 = 1 > 0$, $\Delta_2 = -1 < 0$, $\Delta_3 = -3 < 0$ y no es un extremo.

Se puede llegar a la misma conclusión analizando la función alrededor del punto $(1, 1, -1)$. En efecto, $f(1 + h, 1, -1) - f(1, 1, -1) = \frac{1}{2}(1 + h)^2 - (1 + h) + 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}h^2 > 0$ y $f(1 + h, 1 + h, -1) - f(1, , 1, -1) = \frac{1}{2}(1 + h)^2 - (1 + h)^2 + (1 + h) + 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}h^2 < 0$ y claramente no es ni máximo ni mínimo.

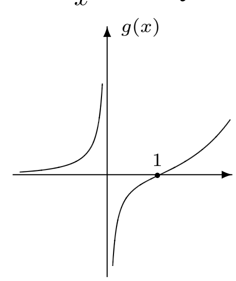
t) Sea (x, y, z) una solución del sistema $f_x = \mathrm{e}^y + z\mathrm{e}^x = 0$, $f_z = y\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^x = 0$, $f_y = x\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^z = 0$, entonces el hessiano es $H_f = \begin{pmatrix} z\mathrm{e}^x & \mathrm{e}^y & \mathrm{e}^x \\ \mathrm{e}^y & x\mathrm{e}^y & \mathrm{e}^z \\ \mathrm{e}^x & \mathrm{e}^z & y\mathrm{e}^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^y & \mathrm{e}^y & \mathrm{e}^x \\ \mathrm{e}^y & -\mathrm{e}^z & \mathrm{e}^z \\ \mathrm{e}^x & \mathrm{e}^z & -\mathrm{e}^x \end{pmatrix}$.

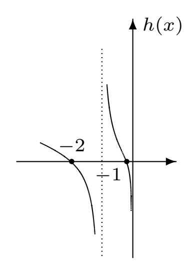
Ahora, como $-\mathrm{e}^y < 0$, la única posibilidad es que (x, y, z) sea un máximo. El determinante de orden 2 debe ser positivo y el determinante $\det H = \mathrm{e}^y(\mathrm{e}^{x+z} - \mathrm{e}^{2z}) + \mathrm{e}^y(\mathrm{e}^{x+y} + \mathrm{e}^{x+z}) + \mathrm{e}^x(\mathrm{e}^{y+z} + \mathrm{e}^{z+x}) = \mathrm{e}^{z+y+x} + \mathrm{e}^{2x+z} + \mathrm{e}^{x+2y} + \mathrm{e}^{y+2z} > 0$ y debería ser negativo. Así, cualquiera que fuera la solución, no puede ser un máximo y no hay puntos extremos.

u) $f_x = y\mathrm{e}^z + yz\mathrm{e}^x + z\mathrm{e}^y = 0$, $f_y = x\mathrm{e}^z + z\mathrm{e}^x + xz\mathrm{e}^y = 0$, $f_z = xy\mathrm{e}^z + y\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^y = 0$. Se observa que $(0, 0, 0)$ es una solución. Además, tenemos que si $x = 0 \Longrightarrow y = 0$ y $z = 0$.

Si $x \neq 0$ (i.e. $y \neq 0$ y $z \neq 0$) se tiene $xy\mathrm{e}^z + xyz\mathrm{e}^x = -xz\mathrm{e}^y = xyz\mathrm{e}^y + yz\mathrm{e}^x \Longrightarrow z(x-1)\mathrm{e}^x = x(z - 1)\mathrm{e}^z \Longrightarrow \dfrac{x-1}{x}\mathrm{e}^x = \dfrac{z-1}{z}\mathrm{e}^z = \dfrac{y-1}{y}\mathrm{e}^y$.

Consideremos la función $g(x) = \dfrac{x-1}{x}\mathrm{e}^x$. Para $\alpha = \dfrac{x-1}{x}\mathrm{e}^x$ hay una o dos soluciones.





Si hay una solución, $0 < x < 1$ y se deduce que $x = y = z \Longrightarrow x = 0$ o $x = -2$, que no puede ser. Si hay dos soluciones iguales, y como hay tres ecuaciones deben existir dos valores x, y, z que son iguales.

Por ejemplo $x = z$, entonces $2x\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^y = 0 \Longrightarrow -2\mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^y \Longrightarrow \mathrm{e}^y = -\frac{2}{x}\mathrm{e}^x$. Además $y(\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x) = -x\mathrm{e}^y = x\big(-\frac{2}{x}\big)\mathrm{e}^x \Longrightarrow y = \dfrac{2}{1+x}$. Así $y = \ln\big(\frac{-2}{x}\big) + x = \ln 2 - \ln(-x) +$

$x = \dfrac{2}{1+x}$ y la función $h(x) = \dfrac{2}{1+x} - x - \ln 2 + \ln(-x)$ en $\mathbb{R}_-^*$ tiene dos soluciones $x = \alpha \approx -0.1585$ y $x = -2$, por lo que $\alpha = x = z \approx -0.1585 < 0$, $\beta = y = \dfrac{2}{1+\alpha} > 2$ y no es ni máximo ni mínimo. En efecto, las soluciones son (α, α, β), (α, β, α) y (β, α, α). Si analizamos por ejemplo (α, α, β), entonces las derivadas de orden dos, evaluadas en este punto son: $f_{xx} = \alpha\beta e^{\alpha}$, $f_{yy} = \alpha^2 e^{\beta}$, $f_{zz} = \alpha\beta e^{\alpha}$, $f_{xy} = e^{\alpha} + \alpha(e^{\alpha} + e^{\beta})$, $f_{xz} = e^{\beta} + 2\beta e^{\alpha}$, $f_{yz} = e^{\alpha} + \alpha(e^{\alpha} + e^{\beta})$.

Dado que $f_{xx} < 0$, sólo podría tenerse un máximo y $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = \alpha^3\beta e^{\alpha+\beta} - (e^{\alpha} + \alpha(e^{\alpha} + e^{\beta}))^2 < 0$, debería ser positivo. Así, el hessiano tiene valores propios positivos y negativos por lo que no es máximo ni mínimo.

Si las tres soluciones son iguales, entonces $x = y = z = -2$.

El hessiano en $(0,0,0)$ es $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y en $(-2,-2,-2)$, $\begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ -3 & 4 & -3 \\ -3 & -3 & 4 \end{pmatrix} \dfrac{1}{e^2}$.

Ahora $\det(H - \lambda I)$ nos determina los valores propios de H en $(0,0,0)$ y en $(-2,-2,-2)$.

Así $\det \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda(\lambda^2-1)-(\lambda-1)+(1-\lambda) = (\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-2) = (\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda+2)$

y los valores propios permiten decir que la matriz es indefinida.

Además, $\det \begin{pmatrix} 4-\lambda & -3 & -3 \\ -3 & 4-\lambda & -3 \\ -3 & -3 & \lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)((4-\lambda)^2-9)-3(3(4-\lambda)+9)+(-3)(9+3(4-\lambda)) = (4-\lambda)^3-9(4-\lambda)-6(9+3(4-\lambda))^3 = 64-48\lambda+12\lambda^2-\lambda^3-36+9\lambda-54-72+18\lambda = -98+12\lambda^2-21\lambda-\lambda^3 = 0 \Longleftrightarrow (\lambda+2)(\lambda-7)^2 = 0$ y la matriz también es indefinida. Por lo tanto no hay máximos ni mínimos.

v) $f_x = 4yz - 2xyz - y^2z - yz^2 = 0$, $f_y = 4xz - x^2z - 2xyz - xz^2 = 0$, $f_z = 4xy - x^2y - xy^2 - 2xyz = 0 \Longrightarrow 4yz - y^2z - yz^2 = 4xz - x^2z - xz^2 = 4xy - x^2y - xy^2$, por lo tanto $z(y-x)(4-x-y-z) = 0$, $x(z-y)(4-x-y-z) = 0$ y $y(z-x)(4-x-y-z) = 0$.

Observemos que las variables x, y, z son simétricas en cuanto al resultado y basta analizarse, fijando por ejemplo los valores de x. Por simetría se procede con y y z.

Claramente $x = 0$ es una solución, para algún y y algún z. En efecto:

– si $x = 0 \Longrightarrow 0 = 4yz - y^2z = yz(4 - y - z) = 0$. Hay dos posibilidades $y = 0$ o $y \neq 0$.

Si $y = 0$, $z = z_0$ forman la solución $(0, 0, z_0)$ del sistema.

Si $y \neq 0$, $y_0 = 4 - z_0$, pues la solución $(0, y_0, 0)$ ya está contemplada (caso $(0, 0, z_0)$). Otra solución es $(0, 4 - z_0, z_0)$.

– Si $x \neq 0$, hay dos posibilidades $z = y$ o $z \neq y$.

Si $z = y \Longrightarrow 4y^2 - 2xy^2 - y^3 - y^3 = 2y^2(2 - x - y) = 0$ y $4xy - x^2 - y - xy^2 - 2xy^2 = xy(4 - x - 3y) = 0$, por lo tanto debemos considerar $y = 0$, $y \neq 0$.

Si $y = 0 \Longrightarrow z = 0$ y $(x_0, 0, 0)$ ya está contemplado en $(0, 0, z_0)$, por simetría.

Si $y \neq 0 \Longrightarrow 4 - 3y = x \Longrightarrow 2 - y = x = 4 - 3y \Longrightarrow 2y = 2$ i.e. $y = 1$, $z = 1$, $x = 1$. Otra solución es $(1, 1, 1)$.

Si $z \neq y \Longrightarrow 4 - x - y - z = 0$ i.e. $z = 4 - x - y$. Como $f_z = 4xy - x^2y - xy^2 - 2xy(4 - x - y) = 0 \Longrightarrow -4xy + x^2y + xy^2 = 0 \Longrightarrow -xy(4 - x - y) = 0$.

Si $y = 0$ la solución es $(x_0, 4 - x_0, 0)$ que ya está considerada.

Si $y \neq 0 \Longrightarrow y = 4 - x$ y la solución es $(x_0, 4 - x_0, 0)$ que ya está tomada en cuenta.

En definitiva, las soluciones son $(0, 0, z_0)$, $(0, 4 - z_0, z_0)$, $(1, 1, 1)$.

– En $(0, 0, z_0)$, $f(h, h, z_0 + h) = h^2(z_0 + h)(4 - z_0 - 3h) \sim h^2 z_0(4 - z_0)$, si $h \to 0$ y $f(-h, h, z_0 + h) = -h^2(z_0 + h)(4 - z_0 - h) \sim -h^2 z_0(4 - z_0)$, si $h \to 0$ y no hay extremo.

– En $(0, 4 - z_0, z_0)$, $f(h, 4 - z_0 + h, z_0 + h) = h(4 - z_0 + h)(-3h) \sim -3h^2(4 - z_0)z_0$ y $f(-h, 4 - z_0 + h, z_0 + h) = h^2(4 - z_0 + h)(z_0 + h) \sim h^2(4 - z_0)z_0$ y no hay extremo.

– En $(1, 1, 1)$ el hessiano es $H(1, 1, 1) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, pues $f_{xx} = -2yz$, $f_{yy} = -2xz$, $f_{zz} = -2xy$, $f_{xy} = yz - 2xz - 2yz - z^2$, $f_{xz} = 4y - 2xy - y^2 - 2yz$, $f_{yz} = 4x - x^2 - 2xy - 2xz$. Ahora $\Delta_1 = -2 < 0$, $\Delta_2 = 4 - 1 = 3 > 0$, $\Delta_3 = -2(4 - 1) - (-1)(2 - 1) - 1(1 - 2) = -6 + 1 + 1 = -4 < 0$ y $(1, 1, 1)$ es un máximo, con $f(1, 1, 1) = 1$.

w) $$\begin{array}{lclclcl} f_x = 2x - 2yz = 0 & & x = yz & & x = y^2x & & x(1 - y^2) = 0 \\ f_y = 2y - 2xz = 0 & \Longrightarrow & y = xz & \Longrightarrow & y = x^2y & \Longrightarrow & y(1 - x^2) = 0 \\ f_z = 2z - 2xy = 0 & & z = xy & & z = y^2z & & z(1 - y^2) = 0. \end{array}$$

Si $x = 0 \Longrightarrow y = 0$, $z = 0$ i.e. $(0, 0, 0)$ es una solución del sistema.

Si $x \neq 0 \Longrightarrow y^2 = 1$ i.e. $y = \pm 1 \Longrightarrow x^2 = 1 \Longrightarrow x = \pm 1$.

Si $y = 1 \Longrightarrow x = z \Longrightarrow x = z = 1$ o $x = z = -1$.

Si $y = -1 \Longrightarrow x = -z \Longrightarrow x = -z = 1$ o $x = -z = -1$.

Las soluciones son $(0,0,0)$, $(1,1,1)$, $(-1,1,-1)$, $(1,-1,-1)$, $(-1,-1,1)$.

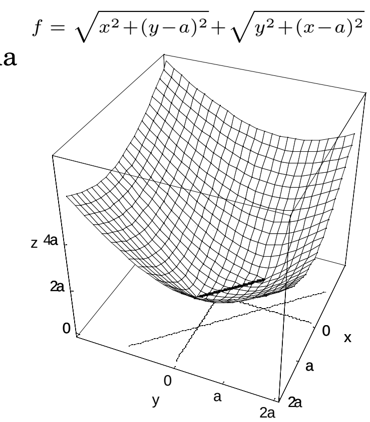
– En $(0,0,0)$ el hessiano es $H(0,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y hay un mínimo de valor $f(0,0,0) = 0$.

– En $(1,1,1)$, $f(1+h,1+h,1+h) - f(1,1,1) = (1+h)^2(5-2h) - 1 = -h^2(3+2h) < 0$, si $h \to 0$, $f(1+h,1,1) - f(1,1,1) = (1+h)^2 + 2 - 2(1+h) - 1 = 1 + 2h + h^2 + 2 - 2 - 2h - 1 = h^2 > 0$, si $h \to 0$ y no hay extremo.

– En $(-1,1,-1)$, $f(-1+h,1+h,-1+h) - f(-1,1,-1) = (1+h)^2(3-2-2h) - 1 = -h^2(3-2h) < 0$, si $h \to 0$, $f(-1-h,1,-1) - f(-1,1,-1) = 2 + (-1-h)^2 - 2(1+h) - 1 = h^2 > 0$ si $h \to 0$ y no hay extremo.

De manera similar se verifica que los otros casos no son extremos. Esto también sale de observar que la función tiene el mismo comportamiento en los cuatro puntos.

2. Sea $a > 0$, encontrar el mínimo de $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \sqrt{x^2 + (y-a)^2} + \sqrt{y^2 + (x-a)^2}$.



Solución Se tiene que:

$$f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + (y-a)^2}} + \frac{(x-a)}{\sqrt{y^2 + (x-a)^2}} = 0,$$

$$f_y = \frac{(y-a)}{\sqrt{x^2 + (y-a)^2}} + \frac{y}{\sqrt{y^2 + (x-a)^2}} = 0 \Longrightarrow$$

$$\frac{(x-a)(y-a)}{\sqrt{y^2 + (x-a)^2}} = \frac{xy}{\sqrt{y^2 + (x-a)^2}} \Longrightarrow a = x + y.$$

Observemos que para la existencia de la solución debe tenerse que el signo de xy debe ser el mismo que el signo de $(x-a)(y-a)$. Así tenemos que:

Si $x > 0$ y $y > 0 \Longrightarrow x - a < 0$ y $y - a < 0$, o sea $0 < x < a$ y $0 < y < a$.

Si $x > 0$ y $y < 0 < a \Longrightarrow x > a$ y $y < 0$.

Si $y > 0$ y $x < 0 < a \Longrightarrow y > a$ y $x < 0$.

Si $x < 0$ y $y < 0$, no nos sirve pues $x + y \neq a$.

De esta forma la solución $x + y = a$ vale en $0 < x < a$ y $0 < y < a$, en $x > a$ y $y < 0$ y en $y > a$ y $x < 0$.

El valor de la función es:

$$f(x, a-x) = \sqrt{x^2 + x^2} + \sqrt{(a-x)^2 + (a-x)^2} = \sqrt{2}(|x| + |a-x|)$$
$$= \begin{cases} \sqrt{2}a & \text{si } 0 < x < a \text{ y } 0 < y < a \\ \sqrt{2}(a-2x) > \sqrt{2}a & \text{si } x < 0 \text{ y } y > a \\ \sqrt{2}(2x-a) > \sqrt{2}a & \text{si } y < 0 \text{ y } x > a. \end{cases}$$

Así el mínimo se debe dar cuando $0 \leq x \leq a$ y $0 \leq y \leq a$ y vale $\sqrt{2}a$.

En efecto, sean x, y reales tales que $x + y = a$, $0 < x < a$ y $0 < y < a$.

Así, $f(x+h, y+k) - f(x,y) = \sqrt{(x+h)^2 + (y-a+k)^2} + \sqrt{(y+k)^2 + (x-a+h)^2} - \sqrt{2}a =$
$\sqrt{(x+h)^2 + (x-k)^2} + \sqrt{(y+k)^2 + (y-h)^2} - \sqrt{2}a =$
$\sqrt{2}x\sqrt{1 + \frac{1}{x}(h-k) + \dfrac{h^2+k^2}{2x^2}} + \sqrt{2}y\sqrt{1 + \frac{1}{y}(k-h) + \dfrac{h^2+k^2}{2y^2}} - \sqrt{2}a =$
$\sqrt{2}x(1 + \dfrac{1}{2x}(h-k) + \dfrac{1}{2x^2}(h^2+k^2) - \dfrac{1}{8x^2}(h-k)^2) +$
$\sqrt{2}y(1 + \dfrac{1}{2y}(k-h) + \dfrac{1}{2y^2}(h^2+k^2) - \dfrac{1}{8y^2}(h-k)^2) - \sqrt{2}a + o(\|(h,k)\|^2) =$
$\sqrt{2}(x+y-a) + \dfrac{\sqrt{2}}{4x}(h^2+k^2-\frac{1}{2}h^2-\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{4}hk) + \dfrac{\sqrt{2}}{4y}(h^2+k^2-\frac{1}{2}h^2-\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{4}hk) + o(\|(h,k)\|^2) =$
$\dfrac{\sqrt{2}}{8x}(h^2 + k^2 + \frac{1}{2}hk) + \dfrac{\sqrt{2}}{8y}(h^2 + k^2 + \frac{1}{2}hk) + o(\|(h,k)\|^2) \geq 0$, cuando $\|(h,k)\| \to 0$, pues $h^2 + k^2 + \frac{1}{2}hk = (h + \frac{1}{4}k)^2 + \frac{15}{16}k^2 > 0$, si $(h,k) \neq (0,0)$.

Si $x = 0$, $f(0,y) = |y-a| + \sqrt{y^2+a^2} = a - y + \sqrt{y^2+a^2}$ y es mínimo en $y = a$ pues $f_y(0,a) < 0$.

Si $y = 0$, $f(x,0) = |x-a| + \sqrt{x^2+a^2} = a - x + \sqrt{x^2+a^2}$ y es mínimo en $x = a$ pues $f_x(a,0) < 0$.

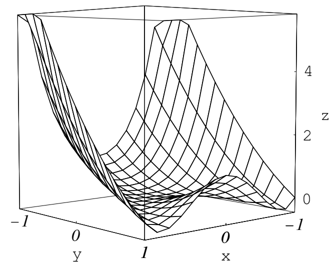
Observemos que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ o existen en $(x, x-a)$.

3. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = (x^2 - y)(3x^2 - y)$.

a) Probar que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $g_\lambda\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g_\lambda(x) = f(x, \lambda x)$ tiene un mínimo en 0.

b) ¿f admite un mínimo local en $(0,0)$?

Solución



a) $g_\lambda(x) = (x^2 - \lambda x)(3x^2 - \lambda x) = 3x^4 - 4\lambda x^3 + \lambda^2 x^2$ y $g'_\lambda(x) = 12x^3 - 12\lambda x^2 + 2\lambda^2 x = 0 \Longrightarrow x = 0$. Además, $g''_\lambda(x) = 36x^2 - 24\lambda x + 2\lambda^2$ y $g''_\lambda(0) = 2\lambda^2 > 0$ i.e. $g_\lambda(0) = 0$ es el mínimo.

b) Las derivadas parciales $f_x = 12x^3 - 8xy = 4x(3x^2 - 2y) = 0$ y $f_y = -4x^2 + 2y = -2(2x^2 - y) = 0$ implican que $3x^2 = x^2 \Longleftrightarrow x = 0$ y $y = 0$.

Ahora $f(x, \lambda x) - f(0,0) \geq 0$ y por otro lado $f(x, 2x^2 + x^3) = -x^2(1+x)(x^2 - x^3) = -x^4(1 - x^2) < 0$ y no hay mínimo local en $(0,0)$.

4. Se considera el modelo $y = ax + b$, se dispone de n observaciones de x y de y denotadas (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, n$ y se requiere estimar gracias a ellas los parámetros desconocidos a y b. Para esto se minimiza la suma de los cuadrados de los errores o residuos $y_i - ax_i - b$. La función $f(a,b) = \sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2$ debe minimizarse, es decir se deben determinar los valores de a y de b para los cuales f es mínima.

Solución Sea $f(a,b) = \sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2$, entonces:

$f_b = -2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b) = 0 \Longleftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} y_i - a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i - nb = 0 \Longleftrightarrow \bar{y} - a\bar{x} - b = 0$, o sea $\bar{y} = a\bar{x} + b$,

$$f_a = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)x_i = 0 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - b\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \Longleftrightarrow$$

$$0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - a\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - b\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\bar{y} - a\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a\bar{x}^2 \Longrightarrow$$

$$a = \frac{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2}, \quad b = \bar{y} - a\bar{x}.$$

El punto (a,b) es un mínimo pues $\dfrac{\partial^2 f}{\partial a^2} = 2\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial b^2} = 2n$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial a \partial b} = 2n\bar{x}$ y se tiene

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a^2} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0, \quad \begin{vmatrix} 2\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 & 2n\bar{x} \\ 2n\bar{x} & 2n \end{vmatrix} = 4n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 4n^2\bar{x} = 4n\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 > 0.$$

5. Encontrar los extremos de la función $f(x,y,z) = x^3 z + y^3 - 3x^2 y - 2z^2$.

Solución Las derivadas son $f_x = 3x^2 z - 6xy = 0$, $f_y = 3y^2 - 3x^2 = 0$, $f_z = x^3 - 4z = 0$.

– Si $x = 0$, o $y = 0$ o $z = 0$ las otras son cero, $(0, 0, 0)$ es una solución.

– Si $x \neq 0$, $3xz = 6y$, $y^2 = x^2$, $z = \frac{1}{4}x^3 \Longrightarrow xz = \frac{1}{4}x^4 \Longrightarrow x^4 = 8y$ y como $y^2 = x^2$ se tiene $y^3 = 8$, i.e. $y = 2$, $x = \pm 2$, $x = z$. Así $(2, 2, 2)$, $(-2, 2, -2)$ también son soluciones.

– En $(0, 0, 0)$, $f(0, k, 0) = k^3$ cambia de signo y no es extremo.

– En $(2, 2, 2)$ no hay extremo. En efecto $f(2, y, 2) = y^3 - 12y + 8$ tiene un mínimo en $y = 2$, pues $f_y(2, y, 2) = 3y^2 - 12$, $f_y(2, 2, 2) = 0$ y $f_{yy}(2, y, 2) = 6y$, $f_{yy}(2, 2, 2) = 12 > 0$. Por otro lado $f(2, 2, z) = 8z - 16 - 2z^2$, $f_z(2, 2, z) = 8 - 4z$, $f_z(2, 2, 2) = 0$, $f_{zz}(2, 2, z) = -4 < 0$, que es un máximo en $z = 2$.

– En $(-2, 2, -2)$ no es extremo pues $f(x, y, z) = f(-x, y, -z)$ y la función se comporta de manera similar.

6. Se consideran p puntos $m_i \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, \dots, p$, encontrar el punto $m \in \mathbb{R}^3$ tal que la suma de los cuadrados de las distancia de m a m_i, $i = 1, \dots, p$, sea mínima.

   Solución Sea $f(x, y, z) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2$, entonces $f_x = -2\sum_{i=1}^{n}(x_i - x) = 0$, $f_y = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - y) = 0$, $f_z = -2\sum_{i=1}^{n}(z_i - z) = 0 \Longrightarrow x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$, $z = \bar{z}$.
   Además $f_{xx} = f_{yy} = f_{zz} = 2n$, $f_{xy} = f_{xz} = f_{yz} = 0$ y la matriz Hessiana $H(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \begin{pmatrix} 2n & 0 & 0 \\ 0 & 2n & 0 \\ 0 & 0 & 2n \end{pmatrix}$ es definida positiva, por lo que $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ es un mínimo.

7. Determinar los extremos de las siguientes funciones:

   a) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

   b) $f(x, y) = xy(a - x - y)$

   c) $f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$

   d) $f(x, y) = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$

   e) $f(x, y) = (2ax - x^2)(2by - y^2)$

   f) $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \cos(x + y)$
   $0 \leq x, y \leq \frac{1}{4}\pi$

   g) $f(x, y) = \dfrac{a + bx + cy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$

   h) $f(x, y) = y\sqrt{1 + x} + x\sqrt{1 + y}$

   i) $f(x, y, z) = \ln(x^3y^2z^5(22 - x - y - z))$

   j) $f(x, y) = 4(x - y) + x^2 - y^2$

   k) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$

   l) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + \dfrac{a^3}{x} + \dfrac{a^3}{y}$

   m) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 4xy - 2y^2$

   n) $f(x, y) = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$

o) $f(x,y) = x^3y^2(12 - x - y)$

p) $f(x,y) = 2x^2 - 4xy + y^2 - x + 2y$

q) $f(x,y) = (x^2 + (y+1)^2)(x^2 + (y-1)^2)$

r) $f(x,y) = x^2y + y^2x$

s) $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2$

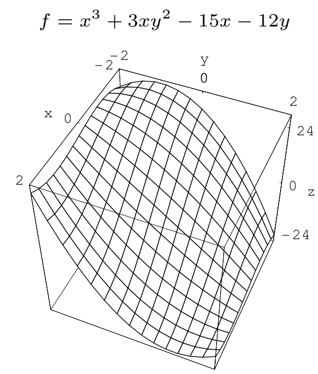
t) $f(x,y) = \log(x^2 + y^2 + 1)$

u) $f(x,y) = x^5y + xy^5 + xy$

v) $f(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz$

Solución

a) Las derivadas parciales $f_x = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0$, $f_y = 6xy - 12 = 0 \Longrightarrow xy = 2$, $x^2 + y^2 = 5 \Longrightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ i.e. $x^2 = 1, x^2 = 4$ por lo que $x = \pm 1$, $x = \pm 2$ y los puntos críticos son $(1,2)$, $(-1,-2)$, $(2,1)$, $(-2,-1)$.



Las derivadas de orden 2 son: $f_{xx} = 6x$, $f_{xy} = 6y$, $f_{yy} = 6x$ y el hessiano $H = \begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix}$, con $\det H = 36x^2 - 36y^2 = 36(x^2 - y^2) = \Delta_2$, $\Delta_1 = 6x$.

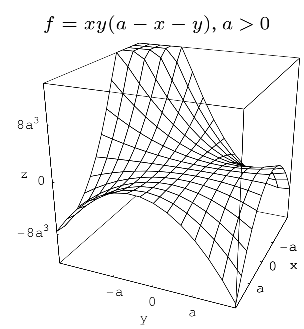
— En $(1,2)$, $\Delta_1 = 6$, $\Delta_2 = -108 < 0$ no hay extremo (punto silla).

— En $(-1,-2)$, $\Delta_1 = -6$, $\Delta_2 = -108 < 0$ no hay extremo, es un punto silla.

— En $(2,1)$, $\Delta_1 = 12 > 0$, $\Delta_2 = 108 > 0$ es un mínimo.

— En $(-2,-1)$, $\Delta_1 = -12 < 0$, $\Delta_2 = 108 > 0$ es un máximo.

b) Las derivadas parciales son $f_x = y(a - x - y) - xy = (a - 2x - y)y = 0$, $f_y = x(a - x - 2y) = 0 \Longrightarrow y = 0$ o $a - 2x - y = 0$ y $x = 0$ o $a - x - 2y = 0$. Así las soluciones son $(0,0)$; $y = 0$, $a = x$; $x = 0$, $a = y$; $x = \frac{1}{3}a$, $y = \frac{1}{3}a$.



Las derivadas de orden dos son $f_{xx} = -2y$, $f_{xy} = a - 2x - 2y$, $f_{yy} = -2x$ y el hessiano de f es:

$$H = \begin{pmatrix} -2y & a - 2x - 2y \\ a - 2x - 2y & -2x \end{pmatrix}.$$

— En $(0,0)$, $H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$, $\det(H + \lambda I) = \begin{vmatrix} \lambda & a \\ a & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - a^2 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = \pm a$, por lo que es un punto silla.

— En $(0,a)$, $H(0,a)=\begin{pmatrix} -2a & -a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, $\Delta_1=-2a$, $\Delta_2=-a^2$.

– Si $a>0$, $\Delta_1<0$, $\Delta_2<0$ es indefinida (punto silla).

– Si $a<0$, $\Delta_1>0$, $\Delta_2<0$ es indefinida (punto silla).

— En $(a,0)$, $H(a,0)=\begin{pmatrix} 0 & -a \\ -a & -2a \end{pmatrix}$ y es indefinida (punto silla).

— En $(\frac{1}{3}a,\frac{1}{3}a)$, $H(\frac{1}{3}a,\frac{1}{3}a)=\begin{pmatrix} -\frac{2}{3}a & -\frac{1}{3}a \\ -\frac{1}{3}a & -\frac{2}{3}a \end{pmatrix}$, $\Delta_1=-\frac{2}{3}a$, $\Delta_2=\frac{1}{3}a^2$.

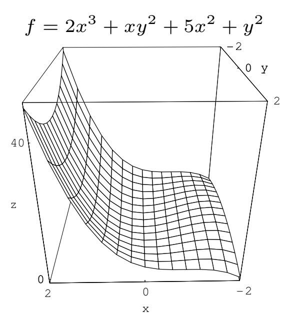
- Si $a<0$ es un mínimo

- Si $a>0$ es un máximo.

c) $f_x=6x^2+y^2+10x=0$, $f_y=2xy+2y=0 \Longrightarrow y=0$ o $x=-1$.

— Si $y=0$, $6x^2+10x=2x(3x+5) \Longrightarrow x=0$ o $x=-\frac{5}{3}$.

— Si $x=-1$, $y^2=4 \Longrightarrow y=\pm 2$.



Los puntos críticos son $(0,0)$, $(-\frac{5}{3},0)$, $(-1,2)$, $(-1,-2)$. Las derivadas de orden dos son $f_{xx}=12x+10$, $f_{xy}=2y$, $f_{yy}=2x+2$ y el hessiano es $H=\begin{pmatrix} 12x+10 & 2y \\ 2y & 2x+2 \end{pmatrix}$.

— En $(0,0)$, $H=\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ es definida positiva i.e. es un mínimo.

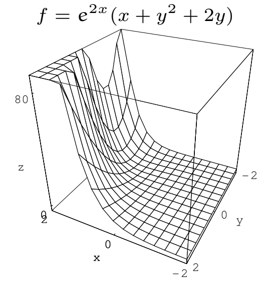
— En $(-\frac{5}{3},0)$, $H=\begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\Delta_1=-10<0$, $\Delta_2=-20<0$ es un punto silla.

— En $(-1,2)$, $H=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, $\Delta_1=-2<0$, $\Delta_2=-16<0$ es un punto silla.

— En $(-1,-2)$, $H=\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$, $\Delta_1=-2<0$, $\Delta_2=-16<0$ es un punto silla.

d) $f_x=2\mathrm{e}^{2x}(x+y^2+2y+\frac{1}{2})=0$, $f_y=\mathrm{e}^{2x}(2y+2)=0=2\mathrm{e}^{2x}(y+1) \Longrightarrow y=-1$, $x=\frac{1}{2}$.

$f = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$

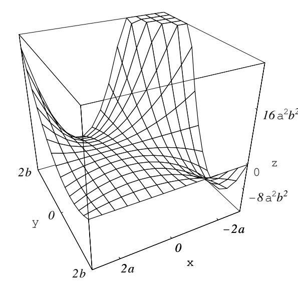


Además $f_{xx} = 4e^{2x}(x + y^2 + 2y + 1)$, $f_{xy} = 4e^{2x}(y + 1)$, $f_{yy} = 2e^{2x}$.

Así, $H(\frac{1}{2}, -1) = 2 \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}$, por lo que $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$ y es un mínimo.

e) $f_x = 2(a - x)y(2b - y) = 0$, $f_y = 2(b - y)x(2a - x) = 0$.

$f = (2ax - x^2)(2by - y^2)$



— Si $x = 0 \Longrightarrow y = 0$ o $y = 2b$.

— Si $x = a \Longrightarrow y = b$.

— Si $y = 0 \Longrightarrow x = 0$, $x = 2a$.

— Si $y = 2b \Longrightarrow x = 0$ o $x = 2a$, por lo que las soluciones son $(0, 0)$, (a, b), $(2a, 0)$, $(0, 2b)$, $(2a, 2b)$.

Además, $f_{xx} = -2y(2b - y)$, $f_{xy} = 4(a - x)(b - y)$, $f_{yy} = -2x(2a - x)$ y se tiene que el hessiano es $H = \begin{pmatrix} -2y(2b - y) & 4(a - x)(b - y) \\ 4(a - x)(b - y) & -2x(2a - x) \end{pmatrix}$.

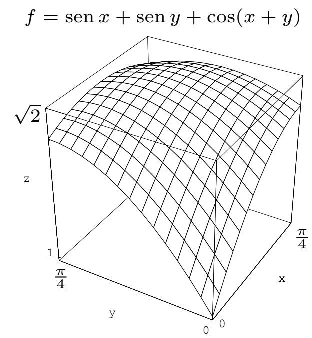
— En $(0, 0)$, $H = \begin{pmatrix} 0 & 4ab \\ 4ab & 0 \end{pmatrix}$ y $\det(H - \lambda I) = \lambda^2 - 16a^2b^2 = 0 \Longrightarrow \lambda = \pm 4ab$, por lo que es un punto silla.

— En (a, b), $H = \begin{pmatrix} -2b^2 & 0 \\ 0 & -2a^2 \end{pmatrix}$, $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$ y tenemos un máximo.

— En $(2a, 0)$, $H = \begin{pmatrix} 0 & -4ab \\ -4ab & 0 \end{pmatrix}$ es un punto silla.

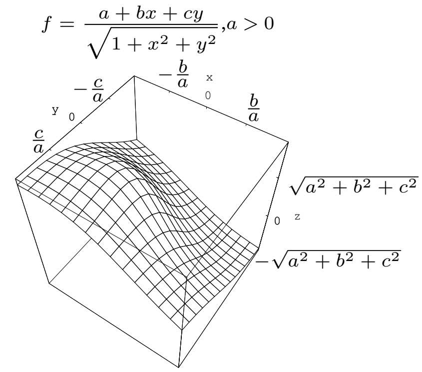
— En $(0, 2b)$, $H = \begin{pmatrix} 0 & -4ab \\ -4ab & 0 \end{pmatrix}$ es un punto silla.

— En $(2a, 2b)$, $H = \begin{pmatrix} 0 & 4ab \\ 4ab & 0 \end{pmatrix}$ es un punto silla.



f) $f_x = \cos x - \operatorname{sen}(x+y) = 0$, $f_y = \cos y - \operatorname{sen}(x+y) = 0 \Longrightarrow \cos x = \cos y \Longrightarrow x = y$, por lo que $\cos x - 2\operatorname{sen} x \cos x = 0 \Longleftrightarrow \cos x(1 - 2\operatorname{sen} x) = 0 \Longrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$, pues $0 \leq x, y \leq \frac{\pi}{4}$. Así tenemos que $x = y = \frac{\pi}{6}$. Además $f_{xx} = -\operatorname{sen} x - \cos(x+y)$, $f_{xy} = -\cos(x+y)$, $f_{yy} = -\operatorname{sen} y - \cos(x+y)$ y el hessiano es:

$H(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}) = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$, $\Delta_1 = -1 < 0$, $\Delta_2 = \frac{3}{4} > 0$ y $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$ es un máximo.



g) $f_x = \dfrac{b(x^2 + y^2 + 1) - x(bx + cy + a)}{(x^2 + y^2 + 1)^{3/2}} = 0$,

$f_y = \dfrac{c(x^2 + y^2 + 1) - y(bx + cy + a)}{(x^2 + y^2 + 1)^{3/2}} = 0$.

Tomando $yf_x = xf_y = 0 \Longrightarrow by(1 + x^2 + y^2) = cx(1 + x^2 + y^2)$ i.e. $by = cx$ por lo que sustituyendo en $f_x = 0$, se tiene $b(y^2 + 1) - by^2 - xa = 0 \Longrightarrow x = \frac{b}{a}$, $y = \frac{c}{a}$. Así tenemos:

$f_{xx} = \dfrac{2x^2(cy + a) - 3bx(y^2 + 1) - (cy + a)(y^2 + 1)}{(x^2 + y^2 + 1)^{5/2}}$,

$f_{xy} = -\dfrac{cx^3 - 2bx^2y - x(2cy^2 + 3ayc) + by(y^2 + 1)}{(x^2 + y^2 + 1)^{5/2}}$,

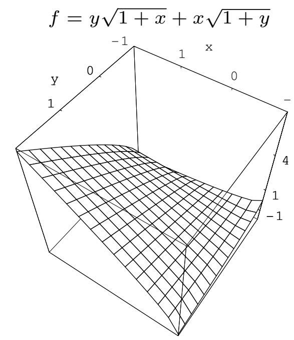
$f_{yy} = -\dfrac{bx^3 + x^2(3cy + a) - bx(2y^2 - 1) - (2ay^2 - 3cy - a)}{(x^2 + y^2 + 1)^{5/2}}$.

Evaluando, $f_{xx}(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}) = f_{yy}(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}) = -\dfrac{a(a^2 + c^2)|a|}{(a^2 + b^2 + c^2)^{3/2}}$, $f_{xy}(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}) = \dfrac{abc|a|}{(a^2 + b^2 + c^2)^{3/2}}$ y el determinante del hessiano $\det H = \dfrac{a^6}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} > 0$. Así:

— si $a > 0$, $(\frac{b}{a}, \frac{c}{a})$ es un máximo,

— si $a < 0$, $(\frac{b}{a}, \frac{c}{a})$ es un mínimo.

h) $f_x = \dfrac{y}{2\sqrt{1+x}} + \sqrt{1+y} = 0$, $f_y = \sqrt{1+x} + \dfrac{x}{2\sqrt{1+y}} = 0 \Longrightarrow \sqrt{1+x} = -\dfrac{x}{2\sqrt{1+y}} = \dfrac{x\sqrt{1+x}}{y} \Longrightarrow \sqrt{1+x}(1 - \frac{x}{y}) = 0 \Longrightarrow x = y \Longrightarrow 1 + x = -\frac{1}{2}x \Longrightarrow x = -\frac{2}{3}$, $y = -\frac{2}{3}$.



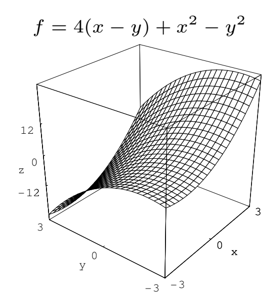
Por otro lado, $f_{xx} = \dfrac{-y}{4(1+x)^{3/2}}$, $f_{yy} = \dfrac{-x}{4(1+y)^{3/2}}$, $f_{xy} = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}} + \dfrac{1}{2\sqrt{1+y}}$ y si $x = y$, el hessiano es:

$$H = \begin{pmatrix} \dfrac{-x}{4(1+x)^{3/2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1+x}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{1+x}} & \dfrac{-x}{4(1+x)^{3/2}} \end{pmatrix},$$

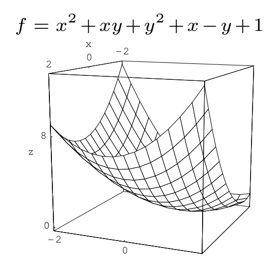
$\Delta_1 = \dfrac{-x}{4(1+x)^{3/2}}$, $\Delta_2 = -\dfrac{15x^2+32x+16}{16(1+x)^3}$,

por lo que cuando $x = -\frac{2}{3}$, $\Delta_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} > 0$, $\Delta_2 = -\dfrac{9}{4} < 0$ y no es ni máximo ni mínimo (es un punto de silla).

i) $f_x = \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{22-x-y-z} = 0$, $f_y = \dfrac{2}{y} - \dfrac{1}{22-x-y-z} = 0$, $f_z = \dfrac{5}{z} - \dfrac{1}{22-x-y-z} = 0$, entonces $\frac{3}{x} = \frac{2}{y} = \frac{5}{z} \Longrightarrow 66 - 4x - 2x - 5x = 0 \Longrightarrow x = 6,\ y = 4,\ z = 10$. Además, $f_{xx} = -\dfrac{3}{x^2} - \dfrac{1}{(22-x-y-z)^2}$, $f_{xy} = f_{xz} = f_{yz} = \dfrac{-1}{(22-x-y-z)^2}$, $f_{yy} = -\dfrac{2}{y^2} - \dfrac{1}{(22-x-y-z)^2}$, $f_{zz} = -\dfrac{5}{z^2} - \dfrac{1}{(22-x-y-z)^2}$. El hessiano en $(6,4,10)$ es $H(6,4,10) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{11}{36} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{7}{8} \end{pmatrix}$, $\Delta_1 = -\frac{1}{3} < 0$, $\Delta_2 = -\frac{7}{108} < 0$ no hay extremo.

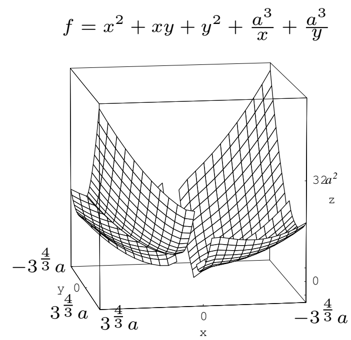


j) $f_x = 4 + 2x = 0$, $f_y = -4 - 2y = 0 \Longrightarrow x = -2$, $y = -2$. Además, $f_{xx} = 2$, $f_{yy} = -2$, $f_{xy} = 0$ y el hessiano $H(-2,-2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 < 0$ es un punto silla.

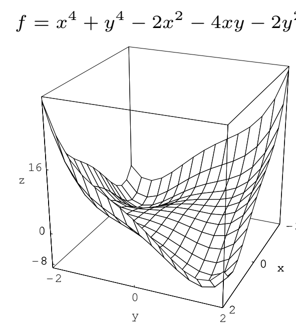


k) $f_x = 2x + y + 1 = 0$, $f_y = x + 2y - 1 = 0 \Longrightarrow -3y + 3 = 0 \Longrightarrow y = 1$, $x = -1$. Además, $f_{xx} = 2$, $f_{xy} = 1$, $f_{yy} = 2$ y el hessiano es $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = 3 > 0$ es un mínimo.

l) $f_x = 2x+y-\dfrac{a^3}{x^2} = 0$, $f_y = x+2y-\dfrac{a^3}{y^2} = 0 \Longrightarrow 2x^3+x^2y = 2y^3+y^2x = a^3 \Longrightarrow 2(x^3-y^3)+xy(x-y) = 0 \Longrightarrow (x-y)(2x^2+2xy+2y^2+xy) = 2(x-y)\left[(x-\tfrac{3}{4}y)^2+\tfrac{7}{16}y^2\right] = 0 \Longrightarrow x = y$. Así $2x^3+x^3 = a^3 \Longrightarrow x = \dfrac{a}{\sqrt[3]{3}} = y$. Además $f_{xx} = 2+2\dfrac{a^3}{x^3}$, $f_{xy} = 1$, $f_{yy} = 2+2\dfrac{a^3}{y^3}$, el hessiano es $H(\frac{a}{\sqrt[3]{3}}, \frac{a}{\sqrt[3]{3}}) = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$, $\Delta_1 = 8 > 0$, $\Delta_2 = 63 > 0$ y es un mínimo.



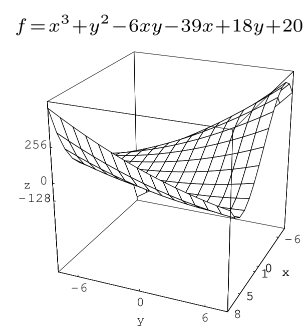
m) $f_x = 4x^3-4x-4y = 0$, $f_y = 4y^3-4y-4x = 0 \Longrightarrow x^3-y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2) = 0 \Longleftrightarrow x = y$. Así, $x = y \Longrightarrow 4x^3-8x = 4x(x^2-2) = 0 \Longrightarrow x = 0$, $x = \pm\sqrt{2}$ y los puntos críticos son $(0,0)$, $(\sqrt{2},\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$. Además las derivadas de segundo orden son $f_{xx} = 12x^2-4$, $f_{xy} = -4$, $f_{yy} = 12y^2-4$.



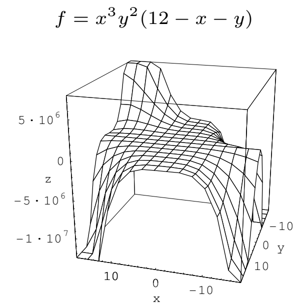
En $(0,0)$, $H = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$ y el criterio falla. Si analizamos comportamiento en $(0,0)$, $f(x,0) = x^4-2x^2 = x^2(x^2-2) < 0$ y como $f(x,y) = x^4+y^4-2(x+y)^2$ se toma $f(x,-x) = 2x^4 > 0$ y se concluye que $(0,0)$ no es un extremo.

Los puntos $\pm(\sqrt{2},\sqrt{2})$ tienen el mismo hessiano: $H = \begin{pmatrix} 20 & -4 \\ -4 & 20 \end{pmatrix}$, $\Delta_1 = 20 > 0$, $\Delta_2 = 384 > 0$ y son mínimos.

n) $f_x = 3x^2-6y-39 = 0$, $f_y = 2y-6x+18 = 0 \Longrightarrow y = 3x-9$, $x^2-2(3x-9)-13 = 0 \Longrightarrow x^2-6x+5 = 0$ i.e. $x = 1, 5$ y los puntos críticos son $(5,6)$, $(1,-6)$. Las derivadas de orden dos son $f_{xx} = 6x$, $f_{xy} = -6$, $f_{yy} = 2$ y se tiene: $H(1,-6) = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$, $\Delta_1 = 6 > 0$, $\Delta_2 = -24 < 0$ y es un punto de silla.



$H(5,6) = \begin{pmatrix} 30 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$, $\Delta_1 = 30 > 0$, $\Delta_2 = 24 > 0$ es un mínimo.



o) $f_x = x^2y^2(36-4x-3y) = 0$, $f_y = x^3y(24-2x-3y) = 0$ y las soluciones son $(0,0)$; $(0,y)$, $y \neq 0$; $(x,0)$, $x \neq 0$; y si $y \neq 0$ y $x \neq 0 \implies 12-2x = 0 \implies x = 6$, $y = 4$. Las derivadas de orden dos son $f_{xx} = 6xy^2(12-2x-y)$, $f_{xy} = x^2y(72-8x-9y)$, $f_{yy} = 2x^3(12-x-3y)$.

El criterio del hessiano en $(0,0)$, $(0,y)$, $y \neq 0$, $(x,0)$, $x \neq 0$, falla pues $\det H = 0$. Así que se debe analizar la función en estos puntos.

— En $(0,0)$, $f(h,h) - f(0,0) = h^5(12-2h) \sim 12h^5$ y la diferencia cambia de signo. No es un extremo.

— En $(0,y)$, $y \neq 0$, $f(h,y+k) - f(0,y) = h^3(y+k)^2(12-y-h-k)$.

- Si $12-y \neq 0$, $f(h,y+k) - f(0,y) \sim h^3y^2(12-y)$ y cambia de signo.

- Si $y = 12$, $f(h,12+k) - f(0,12) = h^3(12+k)^2(-h-k) \sim -144h^3(h+k)$

$$= \begin{cases} -288h^4 < 0, & \text{si } k = h \\ 288h^4 > 0, & \text{si } k = -3h \text{ y cambia de signo.} \end{cases}$$

— En $(x,0)$, $x \neq 0$; $f(x+h,k) - f(x,0) = (x+h)^3k^2(12-x-h-k) \sim x^3k^2(12-x-h-k)$:

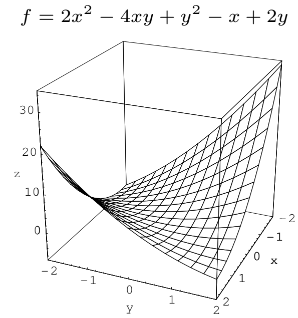
- si $x \neq 12$, $f(x+h,k) - f(x,0) \sim x^3k^2(12-x)$, por lo que tenemos:

-si $x(12-x) > 0$, es decir $0 < x < 12$ es un mínimo,

-si $x(12-x) < 0$, es decir $x > 12$ o $x < 0$ es un máximo,

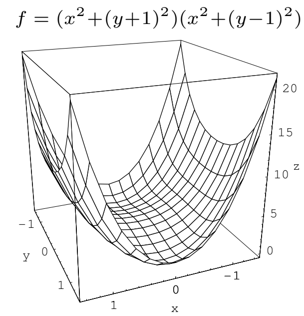
-si $x = 12$, $f(12+h,k) - f(12,0) = (12+h)^3h^2(-h-h) \sim 2{\cdot}12^3h^3$ y cambia de signo.

— En $(6,4)$, $f_{xx}(6,4) = -2304$, $f_{yy}(6,4) = -2592$, $f_{xy}(6,4) = -1728$, por lo que $\Delta_1 = -2304 < 0$, $\Delta_2 = 2985984 > 0$ y es un máximo.



p) $f_x = 4x - 4y - 1 = 0$, $f_y = -4x + 2y + 2 = 0 \Longrightarrow -2y + 1 = 0 \Longrightarrow y = \frac{1}{2}$, $x = \frac{3}{4}$. Además $f_{xx} = 4$, $f_{xy} = -4$, $f_{yy} = 2$, entonces $H = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\Delta_1 = 4 > 0$, $\Delta_2 = -8 < 0$ por lo que $(\frac{3}{4}, \frac{1}{2})$ es un punto de silla.

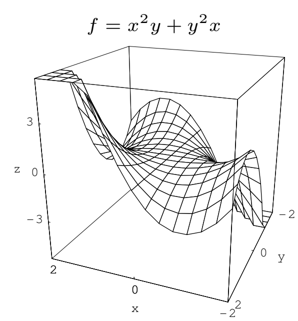
q) $f_x = 4x(x^2 + y^2 + 1) = 0$, $f_y = 4y(x^2 + y^2 - 1) = 0$, así $x = 0$, $4y(y-1)(y+1) = 0$, por lo que $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$ son puntos críticos. Por otro lado, $f_{xx} = 12x^2 + 4y^2 + 4$, $f_{xy} = 8xy$, $f_{yy} = 4x^2 + 12y^2 - 4$.



— En $(0,0)$ el hessiano es $H = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ y $(0,0)$ es un punto de silla, pues sus valores propios cambian de signo.

— En $(0,1)$ el hessiano es $H = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ y $(0,1)$ es un mínimo.

— En $(0,-1)$ el hessiano es $H = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ y $(0,-1)$ es un mínimo.

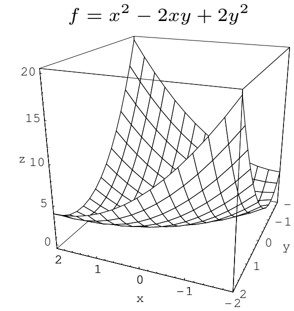


r) $f_x = 2xy + y^2 = 0$, $f_y = 2xy + x^2 = 0 \Longrightarrow x^2 = y^2$, o sea $x = \pm y$.

— Si $x = y \Longrightarrow 3x^2 = 0$, o sea $x = y = 0$.

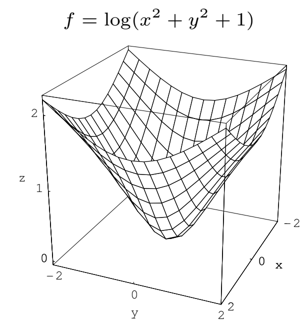
— Si $x = -y \Longrightarrow -2x^2 + x^2 = -x^2 = 0$. El único punto crítico es $(0,0)$.

Las derivadas de orden son $f_{xx} = 2y$, $f_{xy} = 2x + 2y$, $f_{yy} = 2x$, por lo que el hessiano se anula y el criterio falla. Observamos que $f(x,x) = 2x^3$ y hay cambio de signo de la función. El punto $(0,0)$ no es máximo ni mínimo.



s) $f_x = 2x - 2y = 0$, $f_y = -2x + 4y = 0 \Longrightarrow x = y$, $y = \frac{1}{2}x \Longrightarrow$ $x = y = 0$, el hessiano en (0,0) es $H = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = 4 > 0$, por lo que $(0,0)$ es un mínimo de valor $f(0,0) = 0$.

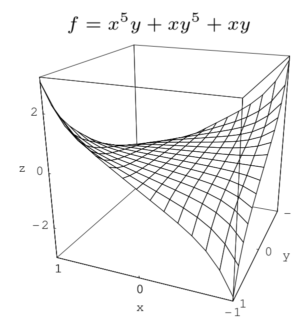
Otra manera de verlo, es observando que $f(x,y) = (x-y)^2 + y^2 \geq 0$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ y que $f(0,0) = 0$ es un mínimo absoluto.



t) $f_x = \dfrac{2x}{x^2+y^2+1} = 0$, $f_y = \dfrac{2y}{x^2+y^2+1} = 0 \Longrightarrow x = y = 0$. Las derivadas de orden dos son $f_{xx} = \dfrac{2+2y^2-2x^2}{(x^2+y^2+1)^2}$, $f_{xy} = \dfrac{-4xy}{(x^2+y^2+1)^2}$, $f_{yy} = \dfrac{2+2x^2-2y^2}{(x^2+y^2+1)^2}$, por lo que el hessiano en $(0,0)$, $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, es definido positivo y $(0,0)$ es un mínimo de valor $f(0,0) = 0$.

Sin embargo, $f(x,y) = \ln(x^2+y^2+1) \geq 0 = f(0,0)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ y $(0,0)$ es un mínimo absoluto.

u) $f_x = 5x^4y + y^5 + y = y(5x^4 + y^4 + 1) = 0$, $f_y = x(5x^4 + x^4 + 1) = 0 \Longrightarrow x = y = 0$. Las derivadas de segundo orden son $f_{xx} = 20x^3y$, $f_{yy} = 20xy^3$, $f_{xy} = 5x^4 + 5y^4 + 1$.



El hessiano en $(0,0)$: $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, por lo que sus valores propios satisfacen $\det(H - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \iff \lambda = \pm 1$. Así se tiene que la matriz Hessiana es indefinida y $(0,0)$ es un punto silla.

v) $f_x = 4x^3 - 4yz = 0$, $f_y = 4y^3 - 4xz = 0$, $f_z = 4z^3 - 4xy = 0 \Longrightarrow x^3 = yz$, $y^3 = xz$, $z^3 = xy \Longrightarrow x^4 = y^4 = z^4 = xyz \Longrightarrow x = \pm y$, $x = \pm z$, $y = \pm z$. Dada la relación $x^4 = y^4 = z^4 = xyz$, permite ver que todos los valores son positivos o dos negativos y uno positivo.

Ahora $x^3 = \pm y^3 = yz \Longrightarrow y^2 = \pm z = \pm y \Longrightarrow y^2 + y = 0$, $y^2 - y = 0 \Longrightarrow y = 0$, $y = \pm 1$. Así las soluciones son $(0,0,0)$, $(1,1,1)$, $(1,-1,-1)$, $(-1,1,-1)$, $(-1,-1,1)$. Las derivadas de orden dos son: $f_{xx} = 12x^2$, $f_{yy} = 12y^2$, $f_{zz} = 12y^2$, $f_{xy} = -4z$, $f_{xz} = -4y$, $f_{yz} = -4x$ y el hessiano es:

$$H = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4z & -4y \\ -4z & 12y^2 & -4x \\ -4y & -4x & 12y^2 \end{pmatrix}, \det H = -64(3x^4 + 3y^4 + 3z^4 - 27x^2y^2z^2 + 2xyz).$$

— En $(0,0,0)$ el hessiano se anula, pero vemos que $f(x,x,x) = 3x^4 - 4x^3 = -x^3(4-3x)$ y hay cambio de signo.

— En $(1,1,1)$ el hessiano es: $H(1,1,1) = \begin{pmatrix} 12 & -4 & -4 \\ -4 & 12 & -4 \\ -4 & -4 & 12 \end{pmatrix}$, $\Delta_1 = 12 > 0$, $\Delta_2 = 128 > 0$, $\Delta_3 = 1024 > 0$ y así $(1,1,1)$ es un mínimo de valor $f(1,1,1) = -1$.

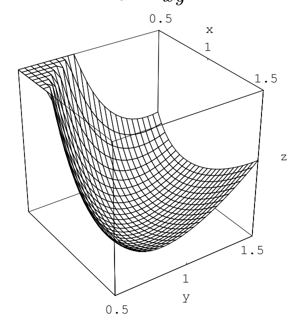
— En $(1,-1,-1)$, $(-1,1,-1)$, $(-1,-1,1)$ se observa que por un argumento geométrico el comportamiento de $f(x,y,z)$ es el mismo en los tres puntos. Así, es suficiente analizar un sólo caso, digamos $(1,-1,-1)$:

$H(1,-1,-1) = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 4 \\ 4 & 12 & -4 \\ 4 & -4 & 12 \end{pmatrix}$, $\Delta_1 = 12 > 0$, $\Delta_2 = 128 > 0$, $\Delta_3 = 1024 > 0$, por lo que los tres puntos son mínimos con valor $f(1,-1,-1) = f(-1,-1,1) = f(-1,1,-1) = -1$.

8. La gráfica de la función $g(x,y) = \dfrac{1}{xy}$ es una superficie en $\mathbb{R}^3$. Determinar los puntos de la superficie más próximos al origen $(0,0,0)$.

Solución El cuadrado de la distancia al origen está dada por $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, por lo que si $z = \frac{1}{xy}$, la función $f(x,y,\frac{1}{xy})$ mide la distancia al origen al cuadrado de los elementos de la superficie. El problema es equivalente a minimizar la función $h(x,y) = f(x,y,\frac{1}{xy}) = x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2y^2}$, así tenemos que $h_x = 2x - \frac{2}{x^3y^2} = 0$,

$f = \frac{1}{xy}$



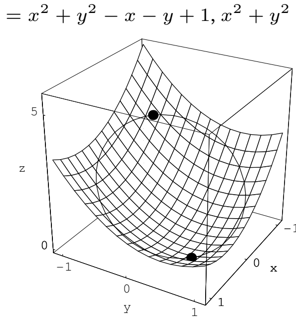
$h_y = 2y - \frac{2}{y^3x^2} = 0 \Longrightarrow x^4y^2 = 1$, $x^2y^4 = 1$ y se tiene $y^2 = \frac{1}{x^4} \Longrightarrow x^6 = 1$ i.e. $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, es decir hay cuatro puntos críticos $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$.

Las derivadas de orden dos son: $h_{xx} = 2 + \frac{6}{x^4y^2}$, $h_{xy} = \frac{4}{x^3y^3}$, $h_{yy} = 2 + \frac{6}{x^2y^4}$ y el hessiano es $H = \begin{pmatrix} 8 & \pm 4 \\ \pm 4 & 8 \end{pmatrix}$, $\Delta_1 = 8 > 0$, $\Delta_2 = 48 > 0$ y los puntos son mínimos de valor $h(\pm 1, \pm 1) = 3$, es decir de distancia es $\sqrt{3}$.

9. Determinar los valores máximos y mínimos de la función $f(x,y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$ en $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Solución Se tiene que $f_x = 2x - 1 = 0$, $f_y = 2y - 1 = 0 \Longrightarrow x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$ y $(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \in D$ es el único punto crítico en D. Por otro lado, dado que D es un conjunto compacto y $f(x,y)$ es continua, existen $(x_0,y_0) \in D$, $(x_1,y_1) \in D$ tales que $f(x_0,y_0) = \min\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$, $f(x_1,y_1) = \max\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$, lo que demuestra que debemos tener al menos un máximo en la frontera, ya que $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ es un mínimo.

$f = x^2 + y^2 - x - y + 1,\ x^2 + y^2 \leq 1$



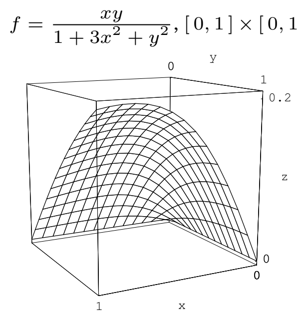
Verificamos que $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ es un mínimo. Las derivadas de orden dos son $f_{xx} = 2$, $f_{xy} = 0$, $f_{yy} = 2$ y el hessiano $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ es definido positivo, lo que implica que $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ es un mínimo de valor $f(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.

Sea $(x,y) \in D$ tal que $x^2 + y^2 = 1$, entonces se puede escribir $x = \operatorname{sen} t$, $y = \cos t$, $t \in [0, 2\pi]$, por lo que $f(\cos t, \operatorname{sen} t) = 2 - \operatorname{sen} t - \cos t = g(t)$. Para determinar los extremos de $g(t)$

derivamos, lo que nos permite escribir: $g'(t) = \operatorname{sen} t - \cos t = 0 \Longrightarrow t = \frac{1}{4}\pi,\ \frac{5\pi}{4}$ y como $g''(t) = \cos t + \operatorname{sen} t$ se tiene $g''(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} > 0$, $g''(\frac{5\pi}{4}) = -\sqrt{2} < 0$ y $g(\frac{\pi}{4}) = f(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = 2 - \sqrt{2}$ es un mínimo. Además $g(\frac{5\pi}{4}) = f(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = 2 + \sqrt{2}$ es un máximo. También debe evaluarse la función en los puntos 0 y 2π. Ahora bien, si se comparan los valores tenemos $\frac{1}{2}$, $2 - \sqrt{2}$, $2 + \sqrt{2}$, $1 = f(1, 0)$ y los extremos se dan en: $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ máximo absoluto; $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ mínimo absoluto.

10. Sea $f\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación definida por $f(x, y) = \dfrac{xy}{1 + 3x^2 + y^2}$, sobre el conjunto $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$. Determinar los extremos de la función f.

Solución Dada la definición de la función f, $f(0, 0) = 0 = \min\{f(x, y)/(x, y) \in E\}$. Por otro lado, como f es continua y E es compacto, f alcanza el máximo en E y este máximo se tiene en el interior del conjunto E, $\overset{\circ}{E} = \{(x, y) \in E / 0 < y < 1,\ 0 < x < 1\}$ o en la frontera de E.



Derivando parcialmente tenemos $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{y(1 - 3x^2 + y^2)}{1 + 3x^2 + y^2} = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x(1 - 3x^2 + y^2)}{1 + 3x^2 + y^2} = 0$ y este sistema no tiene solución en $\overset{\circ}{E}$, por lo que no tiene puntos estacionarios. Así, los extremos se alcanzan en la frontera de E. Estudiaremos la función en la frontera:

— Si $x = 0$, $f(0, y) = 0$, $\forall y \in [0, 1]$.

— Si $y = 0$, $f(x, 0) = 0$, $\forall x \in [0, 1]$.

— Si $y = 1$, $f(x, 1) = \dfrac{x}{2 + 3x^2}$, derivando obtenemos $f'(x, 1) = \dfrac{2 - 3x^2}{(2 + 3x^2)^2} = 0 \Longleftrightarrow x = \sqrt{\frac{2}{3}}$ y el máximo es $\max\limits_{0 \leq x \leq 1} f(x, 1) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}$.

— Si $x = 1$, $f(1, y) = \dfrac{y}{4 + y^2}$, $f'(1, y) = \dfrac{4 - y^2}{(4 + y^2)^2}$, pero si $0 \leq y \leq 1$, la derivada es mayor que 0 y el máximo se obtiene en $y = 1$ i.e. $\max\limits_{0 \leq y \leq 1} f(1, y) = \frac{1}{5}$.

En conclusión, dado que $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}} > \frac{1}{5}$, el máximo sucede en $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $y = 1$.

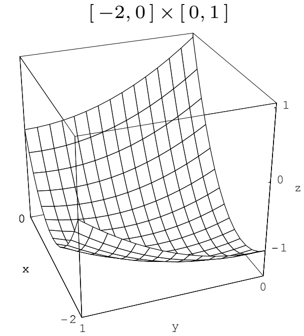
El mínimo es 0 y se alcanza en $\{0\} \times [0, 1] \cup \times [0, 1] \times \{0\}$.

11. Sea $f\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$, sobre le conjunto $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -2 \leq x \leq 0,\ 0 \leq y \leq 1\}$. Determinar los extremos de f.

Solución La función f es continua sobre E que es compacto, entonces f alcanza los extremos en los puntos estacionarios o sobre la frontera de E.

$f = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1,$

$[-2, 0] \times [0, 1]$



En el interior $\overset{\circ}{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -2 < x < 0,\ 0 < y < 1\}$, el sistema $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x - y + 3 = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -x + 2y - 2 = 0 \Longrightarrow y = \frac{1}{3}$, $x = -\frac{4}{3}$. Dado que $f_{xx} = 2$, $f_{yy} = 2$, $f_{xy} = -1$, el hessiano tiene por matriz $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, que es definida positiva y alcanza un mínimo en $(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$ de valor $f(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}) = -\frac{4}{3}$. Analicemos f sobre la frontera.

— Si $x = 0$, $f(0, y) = (y-1)^2$, para $0 \leq y \leq 1$ y alcanza el máximo en $y = 0$ y el mínimo en $y = 1$, por lo que se tiene $\max\limits_{0 \leq y \leq 1} f(0, y) = 1$, $\min\limits_{0 \leq y \leq 1} f(0, y) = 0$.

— Si $y = 0$, $f(x, 0) = x^2 + 3x + 1$, para $-2 \leq x \leq 0$, $f'(x, 0) = 2x + 3 = 0 \Longrightarrow x = -\frac{3}{2}$. Así, hay un mínimo en $x = -\frac{3}{2}$ y un máximo en $x = 0$, es decir $\min\limits_{-2 \leq x \leq 0} f(x, 0) = -\frac{5}{4}$, $\max\limits_{-2 \leq x \leq 0} f(x, 0) = 1$.

— Si $y = 1$, $f(x, 1) = x^2 + 2x$ en $[-2, 0]$, $f'(x, 1) = 2x + 2 = 0 \Longrightarrow x = -1$, por lo que $f(x, 1)$ alcanza el máximo en $x = -2$ y en $x = 0$; y el mínimo en $x = -1$, es decir $\min\limits_{-2 \leq x \leq 0} f(x, 0) = -1$, $\max\limits_{-2 \leq x \leq 0} f(x, 0) = 0$.

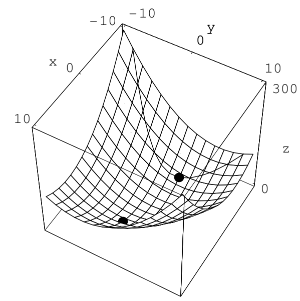
— Si $x = -2$, $f(-2, y) = y^2 - 1$ en $[0, 1]$, por lo que $\min\limits_{0 \leq y \leq 1}(-2, y) = -1$, $\max\limits_{0 \leq y \leq 1} f(-2, y) = 0$.

En conclusión, f alcanza un máximo en $(0, 0)$ de valor $1 = \max\limits_{(x,y) \in E} f(x, y)$ y un mínimo en $(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$ de valor $-\frac{4}{3} = \min\limits_{(x,y) \in E} f(x, y)$.

12. Sea $f \colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$, donde $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - y^2 = 25\}$. Determinar el mínimo de f.

Solución Consideremos la parametrización $x = 5\cosh t$, $y = 5 \operatorname{senh} t$, entonces $h(t) = f(5\cosh t, 5\operatorname{senh} t) = \frac{25}{4}(3e^{2t} + e^{-2t})$, por lo que $h'(t) = \frac{25}{2}e^{-2t}(3e^{4t} - 1)$, $h'(t) = 0 \iff t = -\frac{1}{4}\ln 3$ y tenemos que es un mínimo, es decir $\min\limits_{t\in\mathbb{R}} g(t) = g(-\frac{1}{4}\ln 3) = \frac{25}{2}\sqrt{3} = f(x_0, y_0)$.

$f = x^2 + y^2 + xy,\ x^2 - y^2 = 25$



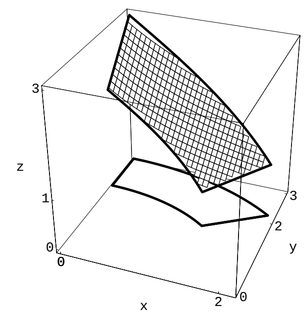
Observamos que esta parametrización no genera toda la curva $x^2 - y^2 = 25$, sin embargo, dado que $f(x, y) = f(-x, y)$ también alcanza un mínimo en $(-x_0, y_0)$ y $f(-x_0, y_0) = \min\limits_{(x,y)\in E} f(x, y) = \frac{25}{2}\sqrt{3}$.

13. Sea $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9,\ 0 \leq x \leq y\}$, determinar los extremos de la función $f\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = \dfrac{y^2}{x + y}$.

    Solución Parametrizando la función con $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, $2 \leq r \leq 3$, $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Así $g(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) = r\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta} = r\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1 + \operatorname{cotg}\theta}$, sobre $D = [\,2, 3\,] \times [\,\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\,]$.

    $f = \dfrac{y^2}{x + y},\ 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9,$

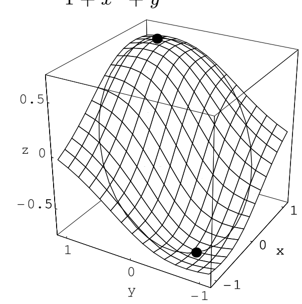
    $0 \leq x \leq y$

    Dado que $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1 + \operatorname{cotg}\theta}$ es estrictamente creciente en $[\,\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\,]$, se tiene que $\max\limits_{(x,y)\in E} f(x, y) = \max\limits_{(r,\theta)\in D} g(r, \theta) = g(3, \frac{\pi}{2}) = 3$, $\min\limits_{(x,y)\in E} f(x, y) = \min\limits_{(r,\theta)\in D} g(r, \theta) = g(2, \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

14. Sea $E = \{(x, y) \in \mathbb{R} / x^2 + y^2 \leq 1\}$, encontrar los extremos de $f\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \dfrac{x + y}{1 + x^2 + y^2}$.

    $f = \dfrac{x + y}{1 + x^2 + y^2},\ x^2 + y^2 \leq 1$

    Solución Parametrizando la región E, con $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, entonces $g(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) = \dfrac{r}{1 + r^2}(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)$, sobre $D = [\,0, 1\,] \times [\,0, 2\pi\,[$.

    Por otro lado, $\dfrac{r}{1 + r^2}$ es estrictamente creciente en $[\,0, 1\,]$; la función $h(\theta) = \cos\theta + \operatorname{sen}\theta$ es tal que su derivada es $h'(\theta) = -\operatorname{sen}\theta + \cos\theta = 0 \iff \cos\theta = \operatorname{sen}\theta$ i.e. $\theta \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\}$, con un máximo en $\frac{\pi}{4}$ y un mínimo en $\frac{5\pi}{4}$, pues $h''(\frac{\pi}{4}) < 0$, $h''(\frac{5\pi}{4}) > 0$, $\max\limits_{(x,y)\in E} f(x,y) = \max\limits_{(r,\theta)\in D} g(r,\theta) = g(1,\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\min\limits_{(x,y)\in E} f(x,y) = \min\limits_{(r,\theta)\in D} g(r,\theta) = g(1,\frac{5\pi}{4}) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

En este ejercicio se presenta el caso en que el máximo y el mínimo se presentan en la frontera $x^2+y^2=1$. En efecto:

$f_x = -\dfrac{x^2+2xy-(y^2+1)}{(x^2+y^2+1)^2} = 0$, $f_y = -\dfrac{y^2+2xy-(x^2+1)}{(x^2+y^2+1)^2} = 0 \Longrightarrow -\dfrac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2+1)^2} = 0$ i.e. $x = \pm y$. Así, $2x^2 = 1$ y se tiene $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ y los puntos críticos son $\pm(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ y $\pm(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$.

Las derivadas de segundo orden son:

$$f_{xx} = \frac{2(x^2(x+3y)-(y^2+1)(3x+y)}{(x^2+y^2+1)^3},$$
$$f_{yy} = \frac{2(y^2(y+3x)-(x^2+1)(3y+x)}{(x^2+y^2+1)^3},$$
$$f_{xy} = -\frac{2(x+3y)(x^2-4xy+y^2+1)}{(x^2+y^2+1)^3}.$$

El hessiano en $\pm(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ es $H = \mp\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, de modo que tenemos en $(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ un máximo de valor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ y en $-(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ un mínimo de valor $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

El hessiano en $\pm(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$ es $H = \mp\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, de modo que tenemos dos puntos silla.

15. Sea $E = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \le 4\}$ y sea $f\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x,y) = \lim\limits_{t\to 0}(\cos tx + y\,\mathrm{sen}\,tx)^{1/t}$.

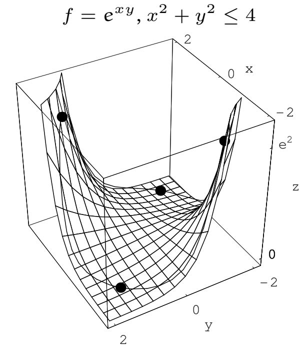
a) Probar que $\forall (x,y)\in E$, $f(x,y) = e^{xy}$.

b) Determinar los extremos de la función f.

Solución

a) Es importante destacar que $\lim\limits_{t\to 0}(\cos tx + y\,\mathrm{sen}\,tx) = 1$, por lo que dado $\epsilon = \frac{1}{2}$, existe $\delta > 0$ tal que si $|x| < \delta \Longrightarrow \frac{1}{2} < \cos tx + y\,\mathrm{sen}\,tx < \frac{3}{2}$. Así podemos definir $(\cos tx + y\,\mathrm{sen}\,tx)^{1/t} = e^{1/t\ln(\cos tx + y\,\mathrm{sen}\,tx)} = e^{1/t\ln(1+\frac{1}{2}t^2x^2+ytx+o(t^2))} = e^{1/t(\frac{1}{2}t^2x^2+xyt+o(t^2))} = e^{xy+o(1)} \longrightarrow e^{xy}$, si $t \longrightarrow 0$.

b) Dado que f es continua sobre E compacto, la función alcanza sus extremos en el interior de E o en la frontera de E.



El interior de E, $\overset{\circ}{E} = \{(x, y) \in E/x^2 + y^2 < 4\}$ y las derivadas parciales $f_x = ye^{xy} = 0$, $f_y = xe^{xy} = 0 \Longrightarrow x = y = 0$ y $f(0, 0) = 1$.

Además $f_{xx} = y^2e^{xy}$, $f_{yy} = x^2e^{xy}$, $f_{xy} = e^{xy} + yxe^{xy}$, por lo que el hessiano en $H(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, de modo que $\det(H - \lambda) = 0 = \lambda^2 - 1$ i.e. $\lambda = \pm 1$. El punto $(0, 0)$ es un punto de silla.

Estudiemos la función en la frontera de E. Usando la parametrización $x = 2\cos\theta$, $y = 2\operatorname{sen}\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, por lo que $g(\theta) = f(2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta) = e^{2\operatorname{sen}2\theta}$. La derivada $g'(\theta) = 4e^{2\operatorname{sen}2\theta}\cos 2\theta = 0 \Longleftrightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7}{2}\pi$, o sea $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{7}{4}\pi$.

Así $\max\limits_{0\leq\theta\leq 2\pi} g(\theta) = g(\frac{\pi}{4}) = g(\frac{5\pi}{4}) = e^2$, $\min\limits_{0\leq\theta\leq 2\pi} g(\theta) = g(\frac{3\pi}{4})) = g(\frac{7\pi}{4})e^{-2}$, con lo cual $\max\limits_{(x,y)\in\mathfrak{Fr}(E)} f(x, y) = \max\limits_{0\leq\theta\leq 2\pi} g(\theta) = e^2$, $\min\limits_{(x,y)\in\mathfrak{Fr}(E)} f(x, y) = \min\limits_{0\leq\theta\leq 2\pi} g(\theta) = e^{-2}$.

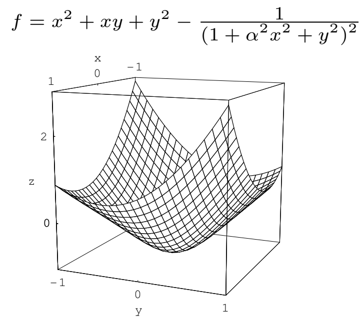
Finalmente, la función f tiene dos máximos en $\pm(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ de valor $\max\limits_{(x,y)\in E} f(x, y) = e^2$ y tiene dos mínimos en $\pm(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ de valor $\min\limits_{(x,y)\in E} f(x, y) = e^{-2}$.

16. Determinar la menor distancia entre dos rectas d_1 y d_2 definidas por $d_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3/x = 2 - t,\ y = 3 + t,\ z = 1 - 2t,\ t \in \mathbb{R}\}$, $d_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3/x = 1 - s,\ y = 2 - s,\ z = 3 + s,\ s \in \mathbb{R}\}$.

Solución Sea $f(t, s)$ la función que mide la distancia al cuadrado entre dos puntos arbitrarios de d_1 y d_2 i.e $f(t, s) = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = (1 - t + s)^2 + (1 + t + s)^2 + (2 + 2t + s)^2$.

Ahora, $f_t = -2(1 - t + s) + 2(1 + t + s) + 2(2 + 2t + s)2 = 8 + 12t + 4s = 0$, $f_s = 4t + 6s + 8 = 0 \Longrightarrow 2 + 7t = 0 \Longrightarrow t = -\frac{2}{7}$, $s = -\frac{8}{7}$. Además, $f_{tt} = 12$, $f_{ts} = 4$, $f_{ss} = 6$ y el hessiano es $\begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ es definida positiva. Así $(-\frac{2}{7}, -\frac{8}{7})$ es un mínimo y $f(-\frac{2}{7}, -\frac{8}{7}) = \frac{2}{7}$.

17. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, demostrar que la función $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - \dfrac{1}{(1+\alpha^2x^2+y^2)^2}$ tiene un mínimo local en $(0,0)$.



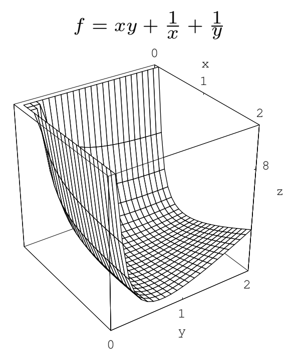
Solución Dado que $f_x = 2x + y + \dfrac{4\alpha^2 x}{(1+\alpha^2x^2+y^2)^3} = 0$, $f_y = x + 2y - \dfrac{4y}{(1+\alpha^2x^2+y^2)^3} = 0$, claramente $(0,0)$ es un punto crítico. Por otro lado:

$f_{xx} = 2 - \dfrac{20\alpha^2}{(1+\alpha^2x^2+y^2)^3} + \dfrac{24\alpha^2(y^2+1)}{(1+\alpha^2x^2+y^2)^4}$;

$f_{yy} = 2 - \dfrac{24y^2}{(1+\alpha^2x^2+y^2)^4} + \dfrac{4}{(1+\alpha^2x^2+y^2)^3}$;

$f_{xy} = 1 - \dfrac{24\alpha^2 xy}{(1+\alpha^2x^2+y^2)^4}$ y en $(0,0)$, se tiene que el hessiano es $H = \begin{pmatrix} 2+4\alpha^2 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$, con $\Delta_1 = 2 + 4\alpha^2 > 0$, $\Delta_2 = 12(1+2\alpha^2) - 1 = 11 + 24\alpha^2 > 0$. H es definida positiva e indica que $(0,0)$ es un mínimo de f.

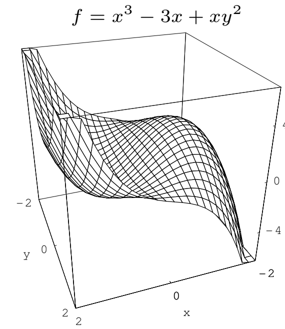
18. Sea $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / xy \neq 0\}$, encontrar el punto estacionario de la función $f\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $f(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ y estudiar su naturaleza.



Solución Dado que $f_x = y - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{x^2}(x^2y - 1) = 0$, $f_y = x - \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{y^2}(xy^2 - 1) = 0$, se tiene $x^2y = 1$, $xy^2 = 1 \Longrightarrow y = \dfrac{1}{x^2}$, $y^2 = \dfrac{1}{x}$, es decir $\dfrac{1}{x^4} = \dfrac{1}{x} \Longleftrightarrow x^4 - x = 0 \Longleftrightarrow x(x^3-1) = 0 \Longrightarrow x = 1$, $y = 1$, pues $x \neq 0$.

Ahora, $f_{xx} = \dfrac{2}{x^3}$, $f_{yy} = \dfrac{2}{y^3}$, $f_{xy} = 1$ y el hessiano en $(1,1)$ es $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ con $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = 3 > 0$, por lo que $(1,1)$ es un mínimo de valor $f(1,1) = 3$.

19. Determinar los puntos estacionarios de la función $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^3 - 3x + xy^2$ y estudiar su naturaleza.



Solución Tenemos que $f_x = 3x^2 - 3 + y^2 = 0$ y que $f_y = 2xy = 0 \Longrightarrow x = 0$ o $y = 0$.

— Si $x = 0$, $y^2 = 3 \Longrightarrow y = \pm\sqrt{3}$.

— Si $y = 0$, $x^2 = 1 \Longrightarrow x = \pm 1$.

— Si $x = 0$ y $y = 0$, no hay solución.

Los puntos críticos son $(0, \sqrt{3})$, $(0, -\sqrt{3})$, $(1, 0)$, $(-1, 0)$. Además $f_{xx} = 6x$, $f_{xy} = 2y$, $f_{yy} = 2x$, por lo que el hessiano es $H = \begin{pmatrix} 6x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$.

— En $(0, \sqrt{3})$, $\det(H - \lambda I) = \lambda^2 - 4(\sqrt{3})^2 = 0 \Longrightarrow \lambda = \pm 2\sqrt{3}$, es decir H tiene un valor propio positivo y otro negativo; es un punto silla.

— En $(0, -\sqrt{3})$, $\det(H - \lambda I) = \lambda^2 - 4(\sqrt{3})^2 = 0$ y es un punto silla.

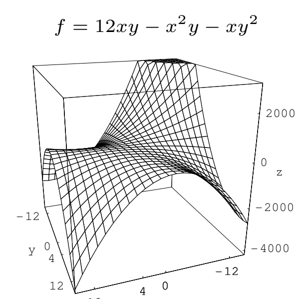
— En $(1, 0)$, $H = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ es definida positiva y es un mínimo.

— En $(-1, 0)$, $H = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ es definida negativa y es un máximo.

20. a) Determinar los puntos críticos de la función $f \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = 12xy - x^2y - xy^2$ y estudiar su naturaleza.

b) ¿El máximo obtenido en a) es un máximo global?

Solución



a) Derivando parcialmente se tiene $f_x = 12y - 2xy - y^2 = (12 - 2x - y)y = 0$, $f_y = 12x - x^2 - 2xy = (12 - x - 2y)x = 0$.

— Si $y = 0 \Longrightarrow x = 0$ o $x = 12$.

— Si $y \neq 0 \Longrightarrow 12 - 2x - y = 0$, con lo que se deben contemplar dos casos:

– $x = 0 \Longrightarrow y = 12$.

– $x \neq 0 \Longrightarrow 12 - x - 2y = 0 \Longrightarrow 3y = 12$ i.e. $y = 4 \Longrightarrow x = 4$.

Las soluciones son $(0,0)$, $(12,0)$, $(0,12)$ y $(4,4)$.

Las segundas derivadas son $f_{xx} = -2y$, $f_{xy} = 12 - 2x - 2y$, $f_{yy} = -2x$.

— En $(0,0)$ el hessiano es $H = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}$, por lo que $\det(H - \lambda I) = \lambda^2 - 12^2 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = \pm 12$ y los valores propios cambian de signo: $(0,0)$ es un punto silla.

— En $(0,12)$ el hessiano es $H = \begin{pmatrix} -24 & -12 \\ -12 & 0 \end{pmatrix}$, $\Delta_1 < 0$ y $\Delta_2 < 0$, por lo que $(0,12)$ es punto silla.

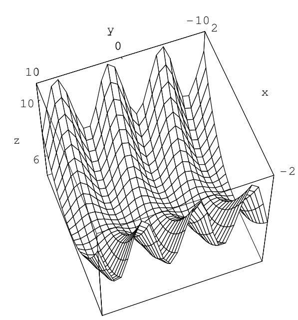
— En $(12,0)$ el hessiano es $H = \begin{pmatrix} 0 & -12 \\ -12 & -24 \end{pmatrix}$ por lo tanto $\det(H - \lambda I) = \lambda^2 - 24\lambda - 144 = 0$ tiene una raíz positiva y otra negativa $\lambda = -12 \pm 12\sqrt{2}$ y se tiene un punto silla.

— En $(4,4)$ el hessiano es $H = \begin{pmatrix} -8 & -4 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}$, $\Delta_1 = -8 < 0$ y $\Delta_2 = 48 > 0$ y se tiene que $(4,4)$ es un máximo.

b) No, pues $f(-1,y) = -12y - y + y^2 = -13y + y^2 = y(y-13) \longrightarrow \infty$, si $y \to \infty$.

21. Determinar los puntos críticos de $f(x,y) = x^2 + x \operatorname{sen} y + \frac{1}{4}\cos y + 5$ definida sobre $\mathbb{R}$ y estudiar su naturaleza.

$f = x^2 + x \operatorname{sen} y + \frac{1}{4}\cos y + 5$



Solución Derivando parcialmente tenemos $f_x = 2x + \operatorname{sen} y = 0$, $f_y = x\cos y - \frac{1}{4}\operatorname{sen} y = 0$. Así tenemos que $\operatorname{sen} y = -2x \Longrightarrow x(\cos y + \frac{1}{2}) = 0 \Longrightarrow x = 0$ o $\cos y = -\frac{1}{2}$.

— Si $x = 0 \Longrightarrow \operatorname{sen} y = 0$, $y = n\pi$; $n \in \mathbb{Z}$.

— Si $x \neq 0 \Longrightarrow \cos y = -\frac{1}{2} \Longrightarrow y = \pm\frac{2\pi}{3} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z} \Longrightarrow x = -\frac{1}{2}\operatorname{sen} y = \mp\frac{1}{4}\sqrt{3}$.

Así las soluciones son $(0, n\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$; $(\frac{1}{4}\sqrt{3}, -\frac{2\pi}{3} + 2n\pi)$, $(-\frac{1}{4}\sqrt{3}, \frac{2\pi}{3} + 2n\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$. Además $f_{xx} = 2$, $f_{yy} = -x\operatorname{sen} y + \frac{1}{4}\cos y$, $f_{xy} = \cos y$, por lo tanto el hessiano es $(0, n\pi)$ es:

— $H(0, n\pi) = \begin{pmatrix} 2 & (-1)^n \\ (-1)^n & \frac{1}{4}(-1)^n \end{pmatrix}$; $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = \frac{1}{2}(-1)^n - 1 < 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ y es un punto silla.

— $H(\frac{1}{4}\sqrt{3}, -\frac{2\pi}{3}+2n\pi) = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{4}\sqrt{3} \end{pmatrix}$; $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 = \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{4} > 0$ y se tiene un mínimo.

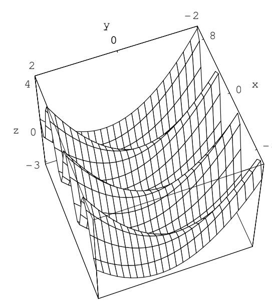
— $H(-\frac{1}{4}\sqrt{3}, \frac{2\pi}{3}+2n\pi) = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{4}\sqrt{3} \end{pmatrix}$ y tenemos un mínimo.

22. a) Determinar los puntos estacionarios de la función $f(x,y) = y^2 + y\cos x - \operatorname{sen} x - 2$ definida sobre $\mathbb{R}$ y estudiar su naturaleza.

b) Demostrar que $\min\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = -3$.

Solución

$f = y^2 + y\cos x - \operatorname{sen} x - 2$



a) Las derivadas parciales de orden uno son $f_x = -y\operatorname{sen} x - \cos x = 0$, $f_y = 2y + \cos x = 0 \Longrightarrow \cos x = -2y \Longrightarrow -2y\operatorname{sen} x + 2y = 0 \Longrightarrow 2y(\operatorname{sen} x - 1) = 0$.

— Si $y = 0 \Longrightarrow \cos x = 0 \Longrightarrow x = \pm\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

— Si $y \neq 0$, $\operatorname{sen} x = 1 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z} \Longrightarrow y = 0$ y no es consistente la solución.

Finalmente, los puntos críticos son $(\frac{\pi}{2}+2k\pi, 0)$, $k\in\mathbb{Z}$, $(-\frac{\pi}{2}+2n\pi, 0), n\in\mathbb{Z}$. Las derivadas de orden dos son $f_{xx} = -y\cos x + \operatorname{sen} x$, $f_{xy} = -\operatorname{sen} x$, $f_{yy} = 2$ y tenemos:

— $H(\frac{\pi}{2}+2k\pi, 0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\Delta_1 = 1 > 0$, $\Delta_2 = 1 > 0$ y se tiene un mínimo.

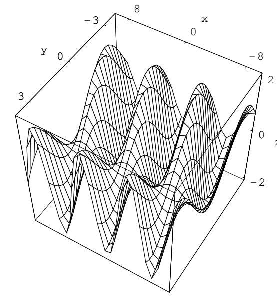
— $H(-\frac{\pi}{2}+2n\pi, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\Delta_1 = -1 < 0$, $\Delta_2 = -3 < 0$ y no es ni máximo ni mínimo, es un punto silla.

b) Observamos que $f(x,y) - f(\frac{\pi}{2}+2n\pi, 0) = y^2 + y\cos x - \operatorname{sen} x + 1 = (y + \frac{1}{2}\cos x)^2 - \frac{1}{4}\cos^2 x - \operatorname{sen} x + 1 = (y + \frac{1}{2} + \cos x)^2 - \frac{1}{4}(3 + 4\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x) \geq 0$. En efecto, el primer factor es positivo; el segundo también pues $-\frac{1}{4}(3 + \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x) = \frac{1}{4}(1 - \operatorname{sen} x)(3 - \operatorname{sen} x) \geq 0$.

Finalmente, $f(x,y) \geq f(\frac{\pi}{2}+2n\pi, 0) = -3$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, es decir $\min\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = -3$.

23. Determinar los puntos críticos de la función $f(x,y) = \cos(x+y) + \operatorname{sen} y$, sobre $\mathbb{R}^2$ y

estudiar su naturaleza.



Solución Anulando las derivadas parciales $f_x = -\operatorname{sen}(x+y) = 0$, $f_y = -\operatorname{sen}(x+y) + \cos y = 0$, se tiene $\cos y = 0$ i.e. $y = \frac{\pi}{2} + n\pi$. Así $\operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{2} + n\pi) = 0 \iff x + \frac{\pi}{2} + n\pi = -n'\pi$, por lo tanto $x = -\frac{\pi}{2} + n''\pi = \frac{\pi}{2} + (n''-1)\pi$, $n, n', n'' \in \mathbb{Z}$.

La solución es $(\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + m\pi)$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

Las segundas derivadas son $f_{xx} = -\cos(\pi + (n+m)\pi) = -(-1)^{n+m+1} = (-1)^{n+m}$, $f_{yy} = (-1)^{n+m} - \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} + m\pi) = (-1)^{n+m} - (-1)^m$, $f_{xy} = (-1)^{n+m}$. Además $\Delta_1 = (-1)^{n+m}$, $\Delta_2 = 1 - (-1)^{2m+n} - 1 = (-1)^{n+1}$.

— Si n es par, $\Delta_2 = -1 < 0$ y no hay extremo en $(\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + m\pi)$.

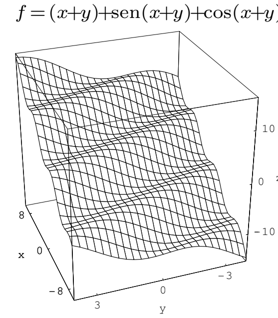
— Si n es impar y m es impar, $\Delta_1 = 1 > 0$; $\Delta_2 = 1 > 0$ y hay un mínimo en $(\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + m\pi)$.

— Si n es impar y m par, $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$ y hay un máximo en $(\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + m\pi)$.

24. Estudiar los puntos críticos de la función $f(x,y) = (x+y) + \operatorname{sen}(x+y) + \cos(x+y)$, en $\mathbb{R}^2$.

Solución Las derivadas parciales iguales a cero son:

$f_x = 1 + \cos(x+y) - \operatorname{sen}(x+y) = 0$, $f_y = 1 + \cos(x+y) - \operatorname{sen}(x+y) = 0$, pero $1 + \cos(x+y) - \operatorname{sen}(x+y) = 1 + \cos^2 \frac{1}{2}(x+y) - \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}(x+y) - 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(x+y) \cos \frac{1}{2}(x+y) = 2\cos\frac{1}{2}(x+y)(\cos\frac{1}{2}(x+y) - \operatorname{sen}\frac{1}{2}(x+y)) = 0 \Longrightarrow \frac{1}{2}(x+y) = \frac{\pi}{2} + n\pi$, o $\frac{1}{2}(x+y) = \frac{\pi}{4} + n\pi$, es decir $x + y = \pi + 2n\pi$ o $x + y = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.



Por otro lado, las derivadas de orden 2 son $f_{xx} = -\operatorname{sen}(x+y) - \cos(x+y)$, $f_{yy} = -\operatorname{sen}(x+y) - \cos(x+y)$, $f_{xy} = -\operatorname{sen}(x+y) - \cos(x+y)$ y siempre tenemos $\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = 0$, por lo que el criterio falla.

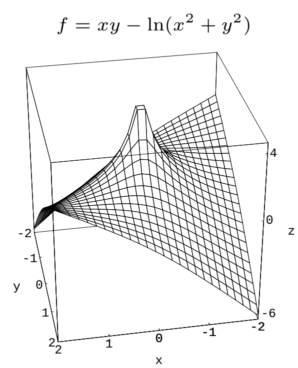
Consideremos la función $g(t) = t + \operatorname{sen} t + \cos t$, su derivada $g'(t) = 1 + \cos t + \operatorname{sen} t$ se anula en $t = \pi + 2n\pi$ o en $t = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, por lo que $g''(t) = -\operatorname{sen} t - \cos t$ es tal que $g''(\pi + 2n\pi) = 1 > 0$ y $g''(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = -1 < 0$, o sea g tiene un máximo en $\frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ y un mínimo en $\pi + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Probemos que $H' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = \pi + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}$ son mínimos de $f(x, y)$ y que $H'' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = \frac{\pi}{2} + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}$ son máximos de $f(x, y)$.

En efecto, sea $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ tal que $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi + 2n\pi$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2$ tal que $\beta_1 + \beta_2 = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, entonces $\exists \eta > 0$ tal que si $|t - (\alpha_1 + \alpha_2)| < \eta \Longrightarrow g(t) \geq g(\alpha_1 + \alpha_2)$ y si $|t - (\beta_1 + \beta_2)| < \eta \Longrightarrow g(t) \leq g(\beta_1 + \beta_2)$.

Sea $\delta = \frac{1}{2}\eta$, entonces si $(x_1, y_1) \in B(\boldsymbol{\alpha}, \delta)$ y $(x_2, y_2) \in B(\boldsymbol{\beta}, \delta) \Longrightarrow \|(x_1, y_1) - (\alpha_1, \alpha_2)\| = \|(x_1 - \alpha_1, y_1 - \alpha_2)\| \leq \delta \Longrightarrow |x_1 - \alpha_1| \leq \delta$ y $|x_2 - \alpha_2| \leq \delta \Longrightarrow |x_1 + y_1 - \alpha_1 - \alpha_2| \leq |x_1 - \alpha_1| + |y_1 - \alpha_2| < 2\delta = \eta \Longrightarrow g(x_1 + y_1) - g(\alpha_1 + \alpha_2) = f(x_1, y_1) - f(\alpha_1, \alpha_2) \geq 0$. De manera similar se verifica que si $\|(x_2, y_2) - (\beta_1, \beta_2)\| \leq |x_2 - \beta_1| + |y_2 - \beta_2| < 2\delta = \eta \Longrightarrow g(x_2 + y_2) - g(\beta_1 + \beta_2) = f(x_2, y_2) - f(\beta_1, \beta_2) \leq 0$.

25. Determinar los extremos de la función $f(x, y) = xy - \ln(x^2 + y^2)$.



Solución Dado que $f_x = y - \dfrac{2x}{x^2 + y^2} = 0$, $f_y = x - \dfrac{2y}{x^2 + y^2} = 0$, no se puede tener $x = y = 0$, pues no está definida en $(0, 0)$.

Si $x = 0 \Longrightarrow y = 0$ (caso excluido) y si $y = 0 \Longrightarrow x = 0$ (caso excluído).

Así $x^2 + y^2 = \frac{2x}{y} = \frac{2y}{x}$ i.e. $x = \pm y$.

– Si $x = y$, $x^2 = 1 \Longrightarrow x = \pm 1$ i.e. se tienen los puntos $(1, 1)$, $(-1, -1)$.

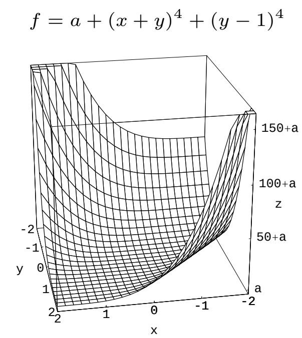
– Si $x = -y$, $x^2 = -1$ y no hay solución.

Finalmente, $H(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} & 1 + \dfrac{4xy}{(x^2 + y^2)^2} \\ 1 + \dfrac{4xy}{(x^2 + y^2)^2} & -\dfrac{2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} \end{pmatrix}$, $H(\pm 1, \pm 1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

La forma cuadrática $(h, k) H \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = 4hk$ es indefinida, pues sobre la recta (h, h) es positiva y sobre la recta $(h, -h)$ es negativa. Así $(1, 1)$ y $(-1, -1)$ son puntos de ensilladura y f no tiene extremos.

26. Determinar los extremos de la función de $f(x,y) = a + (x-y)^4 + (y-1)^4$.

Solución De las derivadas parciales $f_x = 4(x-y)^3 = 0$, $f_y = -4(x-y)^3 + 4(y-1)^3 = 0$, se tiene que $x = y \Longrightarrow x = y = 1$; $(1,1)$ es un punto crítico.



El hessiano de la función f está dado por:

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 12(x-y)^2 & -12(x-y)^2 \\ -12(x-y)^2 & 12(x-y)^2 + 12(y-1)^2 \end{pmatrix}$$

i.e. $H(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y el hessiano no sirve como criterio.

Se debe efectuar un análisis alrededor de $(1,1)$, $f(1+h,1+k) - f(1,1) = (k-h)^4 + k^4 > 0$, $\forall (h,k) \neq (0,0) \Longrightarrow (1,1)$ es un mínimo.

27. Determinar si $x = y = z = 0$ es un extremo de $f(x,y,z) = ax^2 \mathrm{e}^y + y^2 \mathrm{e}^z + z^2 \mathrm{e}^x$.

Solución Las derivadas parciales de orden uno y dos son:

$$\begin{array}{lll} f_x = 2ax\mathrm{e}^y + z^2\mathrm{e}^x, & f_{xx} = 2a\mathrm{e}^y + z^2\mathrm{e}^x, & f_{xy} = 2ax\mathrm{e}^y, \\ f_y = ax^2\mathrm{e}^y + 2y\mathrm{e}^z, & f_{yy} = ax^2\mathrm{e}^y + 2\mathrm{e}^z, & f_{xz} = 2z\mathrm{e}^x, \\ f_z = y^2\mathrm{e}^z + 2z\mathrm{e}^x, & f_{zz} = y^2\mathrm{e}^z + 2\mathrm{e}^x, & f_{yz} = 2y\mathrm{e}^z. \end{array}$$

El punto $(0,0,0)$ es un punto crítico, pues anula las derivadas parciales primeras.

El hessiano en $(0,0,0)$ es $H(0,0,0) = \begin{pmatrix} 2a & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

– Si $a > 0$, en $(0,0,0)$ hay un mínimo.

– Si $a < 0$, en $(0,0,0)$ es un punto de ensilladura, pues H tiene dos valores propios positivos y uno negativo.

Si $a = 0$, no hay criterio y es necesario un estudio en $(0,0,0)$. Así, $f(x,y,z) - f(0,0,0) = y^2\mathrm{e}^z + z^2\mathrm{e}^x > 0$ y $(0,0,0)$ es un mínimo.

Observemos que $f(x,0,0) = f(0,0,0) = 0$ y tenemos un mínimo en $(x,0,0)$, $x \in \mathbb{R}$.

28. Determine los extremos de las funciones $f(x,y)$ en la región indicada.

a) $f(x,y)=x^2-y^2$ sobre $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/0\le x^2+y^2\le 4\}$.

b) $f(x,y)=x^2+2xy-4x+8y$ sobre $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$.

c) $f(x,y)=x^2y(4-x-y)$ sobre $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x\ge 0,\ y\ge 0,\ 0\le x+y\le 6\}$.

d) $f(x,y)=\mathrm{e}^{-x^2-y^2}(2x^2+3y^2)$ sobre $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/0\le x^2+y^2\le 4\}$.

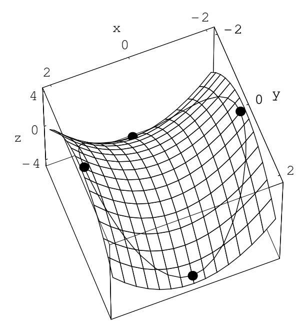
e) $f(x,y)=\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}y+\operatorname{sen}(x+y)$ sobre $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/0\le x,\ y\le \frac{\pi}{2}\}$.

f) $f(x,y)=x^2-2xy+y^2-2x+2y$ sobre $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/0\le x,y\le 2\}$.

g) $f(x,y)=\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y\operatorname{sen}(x+y)$ sobre $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/0\le x,y\le \pi\}$.

Solución

$f=x^2-y^2,\ x^2+y^2\le 4$



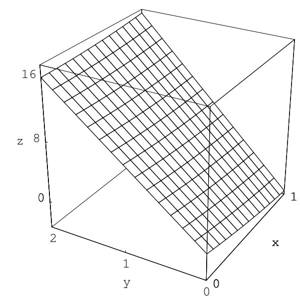
a) Las derivadas $f_x=2x=0$, $f_y=-2y=0$ determinan el punto $(0,0)$, pero no es un extremo pues cambia de signo alrededor de $(0,0)$. En efecto $f(h,k)=h^2-k^2$ es tal que $f(0,k)=-k^2<0$ y $f(h,0)=h^2>0$.

Por otro lado, la función alcanza su máximo y su mínimo sobre E compacto, por lo que los puntos extremos si no están en el interior, están en la frontera.

De esta forma analizaremos la función sobre la frontera ya que en el interior no tiene extremos.

Sobre la frontera $x^2+y^2=4$, entonces $f(x,y)=x^2-y^2=2x^2-4=\phi(x)$. Esta función es tal que $\phi'(x)=4x$, $\phi''(x)=4>0$, por lo que en $[-2,2]$ la función tiene un mínimo en $x=0$ y un máximo en $x=-2$, $x=2$; pero en $x=0$ hay dos valores asociados $y=\pm 2$ y en $x=\pm 2$ hay un valor $y=0$ asociado. De esta forma $\max\limits_{(x,y)\in E} f(x,y)=4=f(2,0)=f(-2,0)$, $\min\limits_{(x,y)\in E} f(x,y)=-4=f(0,2)=f(0,-2)$.

$f = x^2 + 2xy - 4x + 8y$



b) Las derivadas $f_x = 2x + 2y - 4 = 0$, $f_y = 2x + 8 = 0 \Longrightarrow$ $x = -4$, $y = 6$, pero este valor está fuera del conjunto E. Recordemos que f es continua definida sobre el conjunto E, por lo que alcanza un máximo y un mínimo en E. Dado que no tiene extremos en el interior de E, están en la frontera de E.

— Para $x = 0$, $0 \leq y \leq 2$, $f(0, y) = 8y$ tiene el mínimo 0 en $y = 0$ y el máximo 16 en $y = 2$.

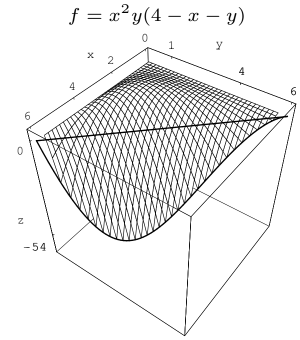
— Para $x = 1$, $0 \leq y \leq 2$, $f(1, y) = -3 + 10y$ tiene el mínimo -3 en $y = 0$ y máximo 9 en $y = 2$.

— Para $0 \leq x \leq 1$, $y = 0$, $f(x, 0) = x^2 - 4x = \phi(x)$ y $\phi'(x) = 2x - 4 < 0$, si $0 \leq x \leq 1$, por lo que tiene el mínimo -3 en $x = 1$ y el máximo 0 en $x = 0$.

— Para $0 \leq y \leq 1$, $y = 2$, $f(x, 2) = x^2 + 16$, es estrictamente creciente en $[\,0, 1\,]$ y tiene el mínimo 16 en $x = 0$ y el máximo 17 en $x = 1$.

Finalmente f tiene el mínimo -3 en $(1, 0)$ y el máximo 17 en $(1, 2)$.

$f = x^2 y(4 - x - y)$



c) Las derivadas parciales son $f_x = xy(8 - 3x - 2y) = 0$, $f_y = x^2(4 - x - 2y) = 0$, por lo que las soluciones son: si $x = 0$, $y \geq 0$; si $y = 0$, $x = 4$.

— Si $x \neq 0$, $y \neq 0$, $8 - 3x - 2y = 0$, $4x - 2y = 0 \Longrightarrow$ $-2x + 4 = 0 \Longrightarrow x = 2$, $y = 1$. Así tenemos los puntos $(0, y)$, $y \in [\,0, 6\,]$, $(4, 0)$ y $(2, 1)$.

Las derivadas de orden dos son: $f_{xx} = 8y - 6xy - 2y^2$, $f_{xy} = 8x - 3x^2 - 4xy$, $f_{yy} = -2x^2$.

— En $(0, y)$, el criterio del hessiano falla y se debe analizar el comportamiento de la función alrededor de $(0, y)$, es decir: $f(h, y{+}k) - f(0, y) = h^2(y{+}k)(4{-}y{-}h{-}k) \sim h^2 y(4{-}y)$ y es un mínimo si $0 < y < 4$ y un máximo si $4 < y < 6$.

– Si $y = 4$, $f(h, 4 + k) - f(0, 4) = h^2(4 + k)(-h - k)$ cambia de signo.

— En $(0, 0)$, $f(h, h) = h^3(4 - 2h)$ y cambia de signo.

— En $(4,0)$, $f(4+h,k) = (4+h)^2k(-h-k) \sim -16h^2(h+k)$ cambia de signo.

— En $(x,0)$, $f(x+h,k) - f(x,0) = (x+h)^2k(4-x-h-k) \sim x^2(4-x)k$ cambia el signo si $x \neq 4$.

— En $(2,1)$, el hessiano $H(2,1) = \begin{pmatrix} -6 & -4 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}$, $\Delta_1 = -6 < 0$, $\Delta_2 = 32 > 0$ es un máximo valor $f(2,1) = 4$.

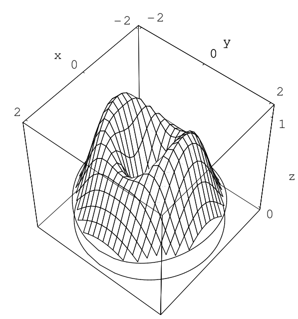
— En $x+y=6$, $0 \leq x \leq 6$, $f(x, 6-x) = x^2(6-x)(4-x-6+x) = 2x^3 - 12x^2$, es tal que la derivada es $6x(x-4) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$, $x = 4$ y alcanza el máximo 0 en $x = 0$, $x = 6$ y el mínimo -64 en $x = 4$.

Finalmente, tiene el mínimo -64 en $(4,2)$ y el máximo 4 en $(2,1)$.

d) Las derivadas $f_x = -2x(2x^2+3y^2-2)\mathrm{e}^{-x^2-y^2} = 0$, $f_y = -2y(2x^2+3y^2-3)\mathrm{e}^{-x^2-y^2} = 0$, permiten concluir que si $x = 0$, $y = 0$ ó $y = \pm 1$ y si $y = 0$, $x = 0$ ó $x = \pm 1$.

$f = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}(2x^2+3y^2)$,

$x^2+y^2 \leq 4$



Así las soluciones son $(0,0)$, $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$.

Las segundas derivadas son:

$f_{xx} = (8x^4 + 12x^2y^2 - 20x^2 - 6y^2 + 4)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$,

$f_{yy} = (8x^2y^2 - 4x^2 + 12y^4 - 30y^2 + 6)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$,

$f_{xy} = 4xy(2x^2+3y^2-5)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$.

— En $(0,0)$, $H(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ es definida positiva y $f(0,0) = 0$ es un mínimo.

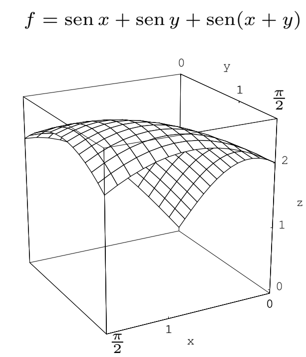
— En $(\pm 1, 0)$, $H(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} -\frac{8}{\mathrm{e}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\mathrm{e}} \end{pmatrix}$ es indefinida (punto silla).

— En $(0, \pm 1)$, $H(0, \pm 1) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\mathrm{e}} & 0 \\ 0 & -\frac{12}{\mathrm{e}} \end{pmatrix}$ es definida negativa y $f(0, \pm 1) = \frac{3}{\mathrm{e}}$ es un máximo.

— En la frontera $x^2 + y^2 = 4$, por lo que $f(x,y) = \mathrm{e}^{-4}(8+y^2)$, $0 \leq y \leq 2$, la cual tiene un mínimo en $y = 0$ y un máximo en $y = \pm 2$, pero $f(0, \pm 2) = 12\mathrm{e}^{-4} < \frac{3}{\mathrm{e}}$.

Finalmente, f tiene el mínimo 0 en $(0,0)$ y el máximo $\frac{3}{\mathrm{e}}$ en $(0, \pm 1)$.

e) Igualando las derivadas parciales a 0 se tiene: $f_x = \cos x + \cos(x+y) = 0$, $f_y = \cos y + \cos(x+y) = 0 \Longrightarrow \cos x = \cos y \Longrightarrow x = y$, por lo que $\cos x + \cos 2x = \cos x + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$. La ecuación $2y^2 + y - 1 = 0$ toma las soluciones $y = -1, \frac{1}{2}$ i.e. $\cos x = -1 \Longrightarrow x = y = -\pi$, $\cos x = \frac{1}{2} \Longrightarrow x = y = \frac{\pi}{3}$ y se elimina $x = y = -\pi$.



Por otro lado, $f_{xx} = -\operatorname{sen} y - \operatorname{sen}(x+y)$, $f_{xy} = -\operatorname{sen}(x+y)$, $f_{yy} = -\operatorname{sen} y - \operatorname{sen}(x+y)$, es decir $H(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$, $\Delta_1 = -\sqrt{3} < 0$, $\Delta_2 = \frac{9}{4} > 0$ es un máximo con valor $f(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) = \frac{3}{2}\sqrt{3}$.

Observemos que para $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \operatorname{sen} x \leq 1 \Longrightarrow \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen}(x+y) \geq 0$, por lo que $f(x,y) \geq 0$, $\forall (x,y) \in E$ y $f(0,0) = 0 = \min\limits_{(x,y)\in E} f(x,y)$.

Analizamos el comportamiento en la frontera.

– Para $(0,y)$, $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, $f(0,y) = 2\operatorname{sen} y$ que es creciente, el máximo es $f(0, \frac{\pi}{2}) = 2$.

– Para $(x,0)$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $f(x,0) = 2\operatorname{sen} x$ y el máximo en $f(\frac{\pi}{2}, 0) = 2$.

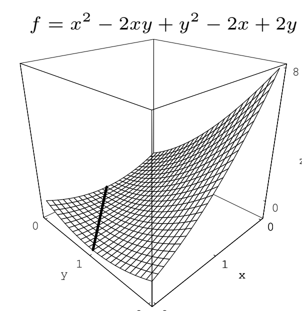
– Para $(\frac{\pi}{2}, y)$, $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, $1 + \operatorname{sen} y - \cos y$ es creciente, el máximo es $f(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = 2$.

– Para $(x, \frac{\pi}{2})$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $1 + \operatorname{sen} x - \cos x$ es creciente, el máximo es $f(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = 2$.

Finalmente la función tiene el mínimo 0 en $(0,0)$ y el máximo $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ en $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$.

f) Tenemos que $f_x = 2x - 2y - 2 = 0$, $f_y = -2x + 2y + 2 = 0 \Longrightarrow x - y - 1 = 0$. Además, $f_{xx} = 2$, $f_{yy} = 2$, $f_{xy} = -2$ y el hessiano es $H = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ y el criterio falla al calcularse el determinante.

— Cuando $y = x - 1$, $f(x, x-1) = \phi(x) = (x-y)^2 - 2(x-y) = -1$.



Ahora, $f(x+h, x-1+k) = (1+h-k)(h-k-1) = (h-k)^2 - 1 > -1 = f(x, x-1)$, por lo que $(x, x-1)$ es un mínimo para $1 \leq x \leq 2$.

Queda por analizar el comportamiento de la función en la frontera.

— En $(0, y)$, $0 \le y \le 2$, $f(0, y) = y^2 + 2y$ y como $f'(0, y) = 2y + 2 > 0$, para $0 \le y \le 2$, es estrictamente creciente y tiene el mínimo 0 en $y = 0$ y el máximo 8 en $y = 2$.

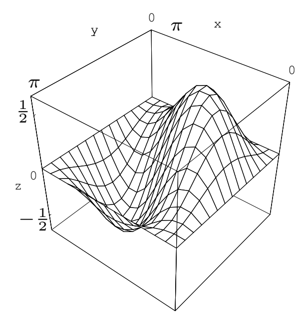
— En $(2, y)$, $0 \le y \le 2$, $f(2, y) = y^2 - 2y$, $f'(2, y) = 2y - 2 = 0$ y alcanza el mínimo en $y = 1$ y el máximo en $y = 0$, $y = 2$. El mínimo $f(2, 1) = -1$ y el máximo $f(2, 0) = f(2, 2) = 0$.

— En $(x, 0)$, $f(x, 0) = x^2 - 2x$, por lo que hay un mínimo $f(2, 0) = -1$ y un máximo $f(0, 0) = f(2, 0) = 0$.

— En $(x, 2)$, $f(x, 2) = x^2 - 6x + 8$, pero $f'(x, 2) = 2x - 6 < 0$ en $[0, 2]$ y el máximo es $f(0, 2) = 8$ y el mínimo es $f(2, 2) = 0$.

Finalmente hay un máximo absoluto en $(0, 2)$ que vale 8 y un mínimo sobre “el segmento de recta” $y = x - 1$, $1 \le x \le 2$ que vale -1.

$f = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \operatorname{sen}(x + y)$



g) Las derivadas parciales de la función son:

$f_x = \operatorname{sen} y \cos x \operatorname{sen}(x + y) + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \cos(x + y) = \operatorname{sen} y \operatorname{sen}(2x + y) = 0$,

$f_y = \operatorname{sen} x \cos y \operatorname{sen}(x + y) + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \cos(x + y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(x + 2y) = 0$.

— Si $\operatorname{sen} y = 0 \Longrightarrow y = 0, \pi$; al sustituirlo en la segunda ecuación se tiene:

- $y = 0 \Longrightarrow \operatorname{sen}^2 x = 0 \Longrightarrow x = 0, \pi$
- $y = \pi \Longrightarrow \operatorname{sen}^2 x = 0 \Longrightarrow x = 0, \pi$.

— Si $\operatorname{sen}(2x + y) = 0 \Longrightarrow 2x + y = 0$ o $2x + y = \pi, 2\pi, 3\pi$.

- si $2x + y = 0 \Longrightarrow y = -2x$ y no es válida la solución
- si $2x + y = \pi \Longrightarrow y = \pi - 2x$, por lo que $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

Así se tiene en la segunda ecuación $\operatorname{sen} x \operatorname{sen}(x + 2\pi - 4x) = -\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3x = 0 \Longrightarrow x = 0$, π, $3x = 0, \pi \Longrightarrow x = 0, \frac{\pi}{3} \Longrightarrow y = \pi, \frac{\pi}{3}$.

— Si $2x + y = 2\pi \Longrightarrow y = 2\pi - 2x$, por lo que $0 \le x \le \pi$. La segunda ecuación nos dice $\operatorname{sen} x \operatorname{sen}(x + 4\pi - 4x) = -\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3x = 0 \Longrightarrow x = 0, \pi$; $3x = 0, \pi, 2\pi, 3\pi$, es decir $x = 0$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2}{3}\pi$, π, pero si se eliminan $x = 0$, $\frac{\pi}{3}$, se tiene $x = \frac{2}{3}\pi$, $y = \frac{2}{3}\pi$, $x = 0$, $y = \pi$.

Si $2x + y = 3\pi$, también se obtiene la solución $x = \pi$, $y = \pi$.

En conclusión, las soluciones son $(0,0)$, $(0,\pi)$, $(\pi,0)$, (π,π), $(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$, $(\frac{2}{3}\pi,\frac{2}{3}\pi)$.

Por otro lado $f_{xx} = 2\operatorname{sen} y\cos(2x+y)$, $f_{yy} = 2\operatorname{sen} x\cos(x+2y)$, $f_{xy} = \cos y\operatorname{sen}(2x+y) + \operatorname{sen} y\cos(2x+y) = \operatorname{sen}(2x+2y)$.

— En $(0,0)$, el criterio del hessiano falla pues se anula el determinante. Si se analiza la función alrededor de $(0,0)$, $f(h,k) = \operatorname{sen} h\operatorname{sen} k\operatorname{sen}(h+k) \sim hk(h+k) \geq 0$, pues $h\geq 0$, $k\geq 0$ en E, o sea es un mínimo.

— En $(0,\pi)$ se tiene $f(h,\pi+k) = -f(h,k)$, con $h>0$, $k<0$, o sea $f(h,\pi+k) \sim -hk(h+k)$ y cambia de signo.

— El caso $(\pi,0)$ es similar al caso $(0,\pi)$ y cambia de signo.

— En (π,π) se tiene $f(\pi+h,\pi+k) = -f(h,k)$, $h<0$, $k<0$ y es un máximo.

— En $(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$ el hessiano $H = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\sqrt{3}\end{pmatrix}$, $\Delta_1 = -\sqrt{3}<0$, $\Delta_2 = \frac{9}{4}>0$ y es un máximo de valor $f(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}) = \frac{3}{8}\sqrt{3}$.

— En $(\frac{2}{3}\pi,\frac{2}{3}\pi)$ el hessiano $H = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \sqrt{3}\end{pmatrix}$, $\Delta_1 = \sqrt{3}>0$, $\Delta_2 = \frac{9}{4}>0$ y es un mínimo de valor $f(\frac{2}{3}\pi,\frac{2}{3}\pi) = -\frac{3}{8}\sqrt{3}$.

Finalmente, f tiene el mínimo en $(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3})$, de valor $-\frac{3}{8}\sqrt{3}$ y el máximo en $(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$, de valor $\frac{3}{8}\sqrt{3}$.

4.1.2 Extremos con restricciones

29. Determinar los extremos de $f(x,y) = x^2+y$ bajo la restricción $g(x,y) = x^3+y = 0$.

Solución La función de Lagrange es $L(x,y) = x^2+y+\lambda(x^3+y)$ y derivando $L_x = 2x+3\lambda x^2 = 0$, $L_y = 1+\lambda = 0$, entonces $\lambda=-1$, $x=0$, $x=\frac{2}{3}$, por lo que los puntos críticos son $(0,0)$, $(\frac{2}{3},-\frac{8}{27})$ y donde $\dfrac{\partial g}{\partial(x,y)} = (3x^2,1) \neq (0,0)$ en esos puntos críticos. Además $L_{xx} = 2+6\lambda$, $L_{xy} = 0$, $L_{yy} = 0$. Resolveremos el problema de tres maneras distintas.

a) $L(h,k)-L(0,0) = h^2-h^3 = h^2(1-h) \sim h^2 > 0 \Longrightarrow (0,0)$ es un mínimo.

$L(\frac{2}{3}+h,-\frac{8}{27}+k)-L(\frac{2}{3},-\frac{8}{27}) = (\frac{2}{3}+h)^2-(\frac{2}{3}+h)^3-(\frac{2}{3})^2+(\frac{2}{3})^3 = (\frac{2}{3})^2+\frac{4}{3}h+h^2-(\frac{2}{3})^3-3(\frac{2}{3})^2h-3(\frac{2}{3})h^2-h^3-(\frac{2}{3})^2+(\frac{2}{3})^3 = -h^2-h^3 = -h^2(1+h) \sim -h^2 \Longrightarrow (\frac{2}{3},-\frac{8}{27})$ es un máximo.

b) Usando el hessiano orlado $H = \left(\begin{array}{cc|c} 2+6\lambda x & 0 & 3x^2 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 3x^2 & 1 & 0 \end{array}\right)$, $p=1$, $n=2$. Hay que considerar un sólo determinante.

– En $(0,0)$, $\det H(0,0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$ y como $(-1)^1 \det H(0,0) > 0$, se tiene que $(0,0)$ es un mínimo con restricción.

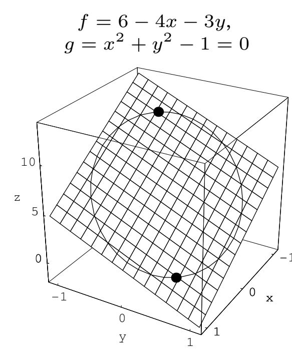
– En $(\frac{2}{3}, -\frac{8}{27})$, $\det H(\frac{2}{3}, -\frac{8}{27}) = \begin{vmatrix} -2 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{4}{3} & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$ y como $(-1)^2 \det H(0,0) > 0$, $(\frac{2}{3}, -\frac{8}{27})$ es un máximo con restricción.

c) $g(x,y) = 0 \iff y = x^3$ i.e. $h(x) = f(x, y(x)) = x^2 - x^3$, $h'(x) = 0 \iff x = 0$, $x = \frac{2}{3}$, $h''(x) = 2 - 6x$, por lo que:

– $x = 0$, $h''(0) > 0 \Longrightarrow (0,0)$ es un mínimo.

– $x = \frac{2}{3}$, $h''(\frac{2}{3}) < 0 \Longrightarrow (\frac{2}{3}, -\frac{8}{27})$ es un máximo.

30. Determinar los extremos de $f(x,y) = 6 - 4x - 3y$ bajo la restricción $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$.



Solución El Lagrangiano $L = 6 - 4x - 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$, por lo que $L_x = -4 + 2x\lambda = 0$, $L_y = -3 + 2\lambda y = 0$ y $x^2 + y^2 = 1$. Así se tiene que $\lambda \neq 0$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, por lo que $\lambda = \dfrac{2}{x} = \dfrac{3}{2y} \Longrightarrow y = \frac{3}{4}x$ i.e. $x^2 + (\frac{3}{4}x)^2 = \frac{25}{16}x^2 = 1 \Longrightarrow x = \pm\frac{4}{5}$, $y = \pm\frac{3}{5}$.

Las soluciones son: $(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$, $\lambda = \frac{5}{2}$ y $(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$, $\lambda = -\frac{5}{2}$.

La matriz Jacobiana de la restricción $\dfrac{\partial g}{\partial(x,y)} = (2x, 2y) \neq (0,0)$ en las soluciones.

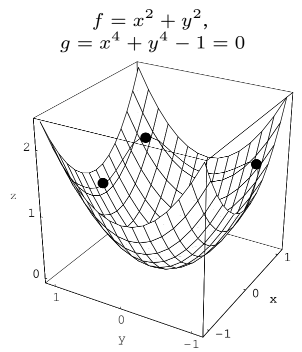
Las derivadas de orden dos son $L_{xx} = 2\lambda$, $L_{xy} = 0$, $L_{yy} = 2\lambda$ y el hessiano orlado:
$H = \left(\begin{array}{cc|c} 2\lambda & 0 & 2x \\ 0 & 2\lambda & 2y \\ \hline 2x & 2y & 0 \end{array}\right)$, con $\det H = -2\lambda(4y^2) + 2x(-4\lambda x) = -8\lambda(y^2 + x^2)$.

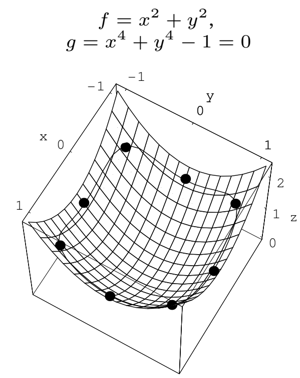
– En $(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$, $\lambda = \frac{5}{2}$, $\det H = -20$ y es un mínimo de valor $f(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}) = 1$.

– En $(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$, $\lambda = -\frac{5}{2}$, $\det H = 20$ y es un máximo de valor $f(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}) = 11$.

31. Determinar los extremos de $f(x,y) = x^2 + y^2$ sujeto a $g(x,y) = x^4 + y^4 - 1 = 0$.

Solución El Lagrangiano $L = f(x,y) + \lambda g(x,y)$ es tal que $L_x = 2x + 4\lambda x^3 = 2x(1 + 2\lambda x^2) = 0$, $L_y = 2y + 4\lambda y^3 = 2y(1 + 2\lambda y^2) = 0$,





– Si $x = 0 \Longrightarrow y = \pm 1$, $\lambda = \pm\frac{1}{2}$.

– Si $y = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$, $\lambda = \pm\frac{1}{2}$.

– Si $x \neq 0$, $y \neq 0$, $x^2 = -\dfrac{1}{2\lambda} = y^2$ y $2x^4 = 1$, o sea $x + \pm\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$, $\lambda = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

También $\dfrac{\partial g}{\partial(x,y)} = 4(x^3, y^3) \neq (0,0)$ en los puntos críticos.

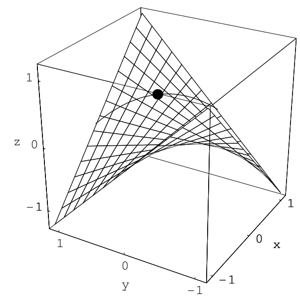
Además $L_{xx} = 2 + 12\lambda x^2$, $L_{xy} = 0$, $L_{yy} = 2 + 12\lambda y^2$, $g_x = 4x^3$, $g_y = 4y^3$.

El hessiano orlado es: $\left(\begin{array}{cc|c} 2 + 12\lambda x^2 & 0 & 4x^3 \\ 0 & 2 + 12\lambda y^2 & 4y^3 \\ \hline 4x^3 & 4y^3 & 0 \end{array}\right)$, con $\det H = -32(x^6(6\lambda y^2 + 1) + y^6(6\lambda x^2 + 1) = -32(6x^2y^2\lambda(x^4 + y^4) + x^6 + y^6)$.

– En $(0, \pm 1)$, $(\pm 1, 0)$, $\lambda = -\frac{1}{2}$, $\det H = -32$ y $(-1)^1 \det H_i > 0$, $i = 2$ y son mínimos con $f(0, \pm 1) = f(\pm 1, 0) = 1$.

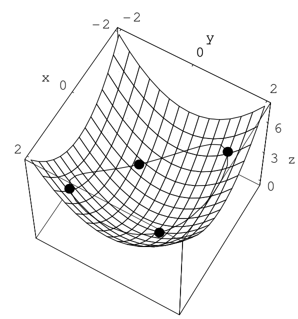
– En $(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}})$, $(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}})$, $\lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\det H_i = 32\sqrt{2}$ y $(-1)^i \det H_i > 0$, $i = 2$ y son máximos con $f(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}) = f(\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}) = \sqrt{2}$.

32. Determine los valores extremos de $f(x,y) = xy$ con la condición $x + y = 1$.



Solución Sea $L = xy + \lambda(x+y-1)$, con $g(x,y) = x+y-1$, entonces $L_x = y + \lambda = 0$, $L_y = x + \lambda = 0 \Longrightarrow x = y = -\lambda$, por lo que si $x + y = 1 \Longrightarrow x = y = \frac{1}{2}$, $\lambda = -\frac{1}{2}$. Además $L_{xx} = 0 = L_{yy}$, $L_{xy} = 1$, $\dfrac{\partial g}{\partial(x,y)} = (1,1) \neq (0,0)$ y el hessiano orlado es $\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$, con $\det H = 2$, por lo que en $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ se tiene un máximo de valor $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$.
Otra forma de resolver el problema es considerar $f(x, 1-x) = x - x^2$, $f'(x, 1-x) = 1 - 2x = 0 \Longrightarrow x = \frac{1}{2}$, $f''(x, 1-x) = -2 < 0$ y se tiene un máximo con valor $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$.

33. Determinar las distancias mínimas y máximas del origen a la curva $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$.



Solución Sea $f(x,y) = x^2 + y^2$ con la restricción $g(x,y) = 5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 = 0$, entonces $L = x^2 + y^2 + \lambda(5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8)$ es tal que $L_x = 2x + 10\lambda x + 6\lambda y = 0$, $L_y = 2y + 10\lambda y + 6\lambda x = 0 \Longrightarrow 2xy + 10\lambda xy + 6\lambda y^2 - 2xy - 10\lambda xy - 6\lambda x^2 = 6\lambda(y^2 - x^2) = 0 \Longrightarrow x = \pm y$, pues $\lambda \neq 0$ ya que si $\lambda = 0 \Longrightarrow x = y = 0$ y $g(0,0) \neq 0$.

Si $x = y$ se tiene $5x^2 + 6x^2 + 5x^2 - 8 = 0 \Longrightarrow x^2 = \frac{1}{2}$, por lo que $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\lambda = -\frac{1}{8}$.

Si $x = -y$ se tiene $4x^2 = 8 \Longrightarrow x^2 = 2 \therefore x = \pm\sqrt{2}$, $\lambda = -\frac{1}{2}$ y las soluciones son $\pm(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $\lambda = -\frac{1}{8}$ y $\pm(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $\lambda = -\frac{1}{2}$. Además $\dfrac{\partial g}{\partial(x,y)} \neq (0,0)$ en los puntos críticos.
Las derivadas de orden dos son $L_{xx} = 2 + 10\lambda$, $f_{yy} = 2 + 10\lambda$, $f_{xy} = 6\lambda$, el gradiente $\dfrac{\partial g}{\partial(x,y)} = (10x + 6y, 10y + 6x) \neq (0,0)$ en las soluciones, por lo que el hessiano orlado es:

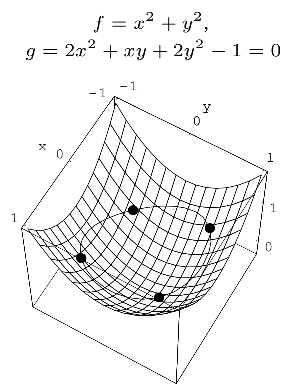
— En $\pm(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $\lambda = -\frac{1}{8}$, $H = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & \pm 8\sqrt{2} \\ -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \pm 8\sqrt{2} \\ \pm 8\sqrt{2} & \pm 8\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$, $\det H = -384$ y son mínimos, de valor $f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = 1$.

— En $\pm(\sqrt{2},-\sqrt{2})$, $\lambda=-\frac{1}{2}$, $H=\begin{pmatrix} -3 & -3 & \pm4\sqrt{2} \\ -3 & -3 & \mp4\sqrt{2} \\ \pm4\sqrt{2} & \mp4\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$, $\det H=384$ y son máximos de valor $f(\sqrt{2},-\sqrt{2})=f(-\sqrt{2},\sqrt{2})=4$.

Así las distancias son: mínima 1 y máxima 2.

34. Determinar los ejes de la elipse de ecuación $2x^2+xy+2y^2-1=0$.

Solución La elipse $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/2x^2+xy+2y^2=1\}$ está centrada en el origen y sus ejes son ortogonales. Así se observa que el tamaño de los ejes tienen la particularidad que la longitud de los ejes, son extremos de la función $f(x,y)=x^2+y^2$ sujeta a la restricción $g(x,y)=2x^2+xy+2y^2-1=0$. De esta forma el Lagrangiano $L=x^2+y^2+\lambda(2x^2+xy+2y^2-1)$ tiene derivadas parciales:



$$L_x=2x(1+2\lambda)+\lambda y=0,\ L_y=2y(1+2\lambda)+\lambda x=0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2+4\lambda & \lambda \\ \lambda & 2+4\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Notemos que $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, pues $(x,y)\in E \Longrightarrow \det\begin{pmatrix} 2+4\lambda & \lambda \\ \lambda & 2+4\lambda \end{pmatrix}=(2+4\lambda)^2-\lambda^2=(2+3\lambda)(2+5\lambda)=0$, es decir $\lambda=-\frac{2}{5}$, $\lambda=-\frac{2}{3}$.

— Si $\lambda=-\frac{2}{5}\Longrightarrow \frac{2}{5}x=\frac{2}{5}y$ i.e. $x=y$.

— Si $\lambda=-\frac{2}{3}\Longrightarrow -2x\frac{1}{3}=\frac{2}{3}y$, o sea $x=-y$.

— Si $x=y$, $g(x,x)=5x^2-1=0\Longrightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$, $f(-\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}})=\frac{2}{5}$.

— Si $x=-y$, $g(x,-x)=3x^2-1=0\Longrightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, $f(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}})=f(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{2}{3}$.

Observamos que $\dfrac{(x+y)^2}{4/5}+\dfrac{(x-y)^2}{4/3}=1=2x^2+xy+2y^2$. Las derivadas de orden dos son $L_{xx}=2+4\lambda$, $L_{yy}=2+4\lambda$, $L_{xy}=\lambda$ y como la matriz Jacobiana $\dfrac{\partial g}{\partial(x,y)}=$

$(4x+4, 4y+x) \neq (0,0)$, el hessiano orlado es $H = \left(\begin{array}{cc|c} 2+4\lambda & \lambda & 4x+y \\ \lambda & 2+4\lambda & 4y+x \\ \hline 4x+y & 4y+x & 0 \end{array}\right)$.

— En $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$, $\lambda = -\frac{2}{3}$, $\det H_2 = 8$ y como $(-1)^i \det H_i > 0$, $i = 2$ es un máximo.

— En $(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}})$, $\lambda = -\frac{2}{5}$, $\det H_2 = -8$ y como $(-1)^1 \det H_i > 0$, $i = 2$ es un mínimo.

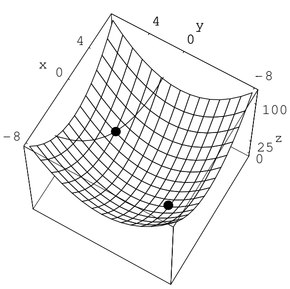
35. Determinar la menor distancia del origen a la hipérbola $x^2 + 8xy + 7y^2 - 225 = 0$.

Solución El problema equivalente a minimizar la función $f(x,y) = x^2 + y^2$, sujeta a la restricción $g(x,y) = x^2 + 8xy + 7y^2 - 225 = 0$.

Sea $L(x,y) = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + 8xy + 7y^2 - 225)$, entonces $L_x = 2x + 2\lambda x + 8\lambda y = 2x(1+\lambda) + 8\lambda y = 0$, $L_y = 2y + 14\lambda y + 8\lambda x = 2y(1+7\lambda) + 8\lambda x = 0$, que es equivalente a $\begin{pmatrix} 2(1+\lambda) & 8\lambda \\ 8\lambda & 2(1+7\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y como $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ se tiene $\begin{vmatrix} 2\lambda+2 & 8\lambda \\ 8\lambda & 2+14\lambda \end{vmatrix} = (2\lambda+2)(2+14\lambda) - 64\lambda^2 = 4(-9\lambda^2 + 8\lambda + 1) = 0 \Longrightarrow \lambda = 1, -\frac{1}{9}$.

$f = x^2 + y^2,$

$g = x^2 + 8xy + 7y^2 - 225 = 0$



— Si $\lambda = 1$, $x = -2y$, solución que no vale pues implica que $-5y^2 - 225 = 0$.

— Si $\lambda = -\frac{1}{9}$, $x = \frac{1}{2}y$, por lo que $45x^2 - 225 = 0 \Longrightarrow x^2 = 5$, $x = \pm\sqrt{5}$, $y = \pm 2\sqrt{5}$.

Observamos que $\dfrac{\partial g}{\partial(x,y)} = (2x+8y, 8x+14y)$ es de rango 1. Las derivadas de orden dos $L_{xx} = 2 + 2\lambda$, $L_{yy} = 2(1+7\lambda)$, $L_{xy} = 8\lambda$ y el hessiano orlado es:

$$H = \left(\begin{array}{cc|c} 2\lambda+2 & 8\lambda & 2x+8y \\ 8\lambda & 2+14\lambda & 8x+14y \\ \hline 2x+8y & 8x+14y & 0 \end{array}\right), \det H = 8(x^2(9\lambda-17) + 8xy(5\lambda-8) + y^2(63\lambda-65)).$$

— En $(\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$, $\lambda = -\frac{1}{9}$, $\det H = -18000$, $(-1)^1 \det H_i > 0$, $i = 2$ y es un mínimo.

— En $(-\sqrt{5}, -2\sqrt{5})$, $\lambda = -\frac{1}{9}$, $\det H = -18000$, $(-1)^1 \det H_i > 0$, $i = 2$ y es un mínimo.

En conclusión $f(\pm(\sqrt{5}, 2\sqrt{5})) = 25$, por lo que la menor distancia entre el origen y la hipérbola $x^2 + 8xy + 7y^2 - 225 = 0$, vale 5.

36. Determinar entre los triángulos rectángulos que tienen área a, el triángulo de menor hipotenusa.

Solución El problema equivale a encontrar $(x, y) \in E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0,\ y > 0\}$, donde la función $f \colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 + y^2$, obtenga el mínimo bajo la restricción $g(x, y) = xy - 2a = 0$.

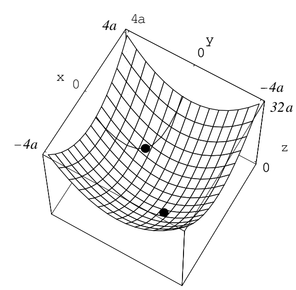
Sea $L = x^2 + y^2 + \lambda(xy - 2a)$, el rango de $\dfrac{\partial g}{\partial(x, y)} = (y, x)$ es 1, ya que $xy = 2a$. Las derivadas parciales $L_x = 2x + \lambda y = 0$, $L_y = 2y + \lambda x = 0 \Longrightarrow (y - x)(2 - \lambda) = 0$.

— Si $x = y \Longrightarrow \lambda = -2$ y $y = x = \sqrt{2a}$.

— Si $\lambda = 2 \Longrightarrow x = -y$ y la solución no es válida.

Las derivadas de orden dos son $L_{xx} = 2$, $L_{yy} = 2$, $L_{xy} = \lambda$. El hessiano orlado es:

$f = x^2 + y^2,\ g = xy - 2a = 0$



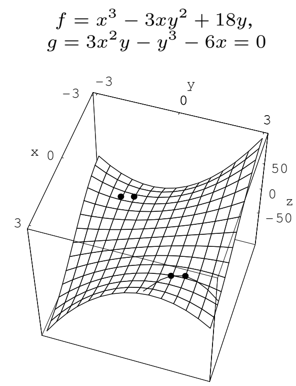
$$H = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & \lambda & y \\ \lambda & 2 & x \\ \hline y & x & 0 \end{array}\right), \quad \det H = -2x^2 + 2\lambda xy - 2y^2.$$

— En $(\sqrt{2a}, \sqrt{2a})$, $\lambda = -2$, $\det H = -16A$ y como $(-1)^1 \det H_i > 0$, $i = 2$ es un mínimo.

Así el triángulo rectángulo de menor hipotenusa de área a, es isósceles de lado $\sqrt{2a}$ y la hipotenusa es $2\sqrt{a}$.

37. Sea $f(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 18y$ sujeta a la restricción $g(x, y) = 3x^2y - y^3 - 6x = 0$, demostrar que f alcanza dos extremos en los puntos $x = y = \pm\sqrt{3}$.

Solución Sea $L = x^3 - 3xy^2 + 18y + \lambda(3x^2y - y^3 - 6x)$, $L_x = 3x^2 - 3y^2 + 6\lambda xy - 6\lambda = 0$, $L_y = -6xy + 18 + 3\lambda x^2 - 3\lambda y^2 = 0$.



Observemos que si $x = y$, $-6x^2 + 18 = 0$ i.e. $x = \pm\sqrt{3} = y$, $6\lambda{\cdot}3 - 6\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 0$.

Por otro lado, $\dfrac{\partial g}{\partial(x,y)} = (6xy - 6, 3x^2 - 3y^2) \neq (0,0)$, para $x = y = \pm\sqrt{3}$. Las derivadas de orden dos son $L_{xx} = 6x + 6\lambda y$, $L_{yy} = -6x - 6\lambda y$, $L_{xy} = 6\lambda x - 6y$ y el hessiano orlado es:

$$H = \left(\begin{array}{cc|c} 6x + 6\lambda y & 6\lambda x - 6y & 6xy - 6 \\ 6\lambda x - 6y & 6x - 6\lambda y & 3x^2 - 3y^2 \\ \hline 6xy - 6 & 3x^2 - 3y^2 & 0 \end{array}\right),$$

$\det H = -54\,[\,x^5 - 3\lambda x^4 y + 2x^3(3y^2 + 2\lambda) - 2x^2y(\lambda y^2 + 6) - x(3y^4 - 4\lambda y^2 - 4) + y(\lambda y^4 + 4y^2 - 4\lambda)\,]$.

— En $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$, $\lambda = 0$, $H = \begin{pmatrix} 6\sqrt{3} & -6\sqrt{3} & 12 \\ -6\sqrt{3} & 6\sqrt{3} & 0 \\ 12 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\det H = -864\sqrt{3}$, hay un mínimo.

— En $-(\sqrt{3}, \sqrt{3})$, $\lambda = 0$, $H = \begin{pmatrix} -6\sqrt{3} & 6\sqrt{3} & 12 \\ 6\sqrt{3} & -6\sqrt{3} & 0 \\ 12 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\det H = 864\sqrt{3}$, hay un máximo.

Observación Usando métodos algebraicos de resolución de ecuaciones, tenemos que existen otros puntos que satisfacen las ecuaciones:

$\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{2}3^{1/4}(1 - \sqrt{3})$, $x = \frac{1}{2}2^{1/4}3^{1/8}(1 + \sqrt{3})$, $y = \sqrt[8]{\frac{27}{4}}$, $\det H = -108\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{3}(13 + 3\sqrt{3}) < 0$ hay un mínimo, de valor $2^{2+\frac{3}{4}}3^{\frac{3}{8}}$,

$\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{2}3^{1/4}(1 - \sqrt{3})$, $x = -\frac{1}{2}2^{1/4}3^{1/8}(1 + \sqrt{3})$, $y = -\sqrt[8]{\frac{27}{4}}$, $\det H = 108\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{3}(13 + 3\sqrt{3}) > 0$ hay un máximo de valor $-2^{2+\frac{3}{4}}3^{\frac{3}{8}}$.

38. Encontrar la distancia más corta del punto $(1, 0)$ a la parábola $y^2 = 4x$.

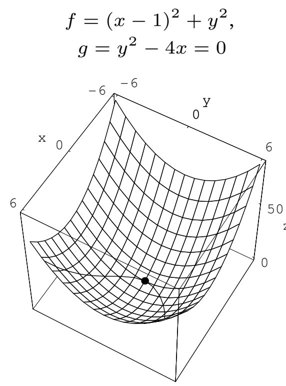
Solución Sea $L = (x-1)^2 + y^2 + \lambda(4x - y^2)$, entonces

$L_x = 2(x-1) + 4\lambda = 0$, $L_y = 2y - 2\lambda y = 0 \Longrightarrow x = 1 - 2\lambda$,

$2y(1-\lambda) = 0$.

– Si $y \neq 0 \Longrightarrow \lambda = 1$, $x = -1$ y $y^2 = 4x$ que es imposible.

Así $y = 0 \Longrightarrow x = 0$, $\lambda = \frac{1}{2}$, por lo que el hessiano orlado

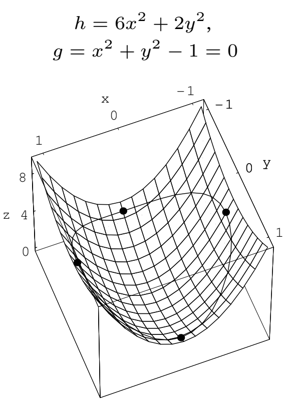


$$H = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2-2\lambda & 2y \\ \hline 4 & 2y & 0 \end{array}\right), \; H(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\det H = -16$ y como $(-1)^1 \det H > 0$ se tiene un mínimo en $(0,1)$ con valor 1.

39. Determinar los puntos (x,y) y las direcciones para las cuales la derivada direccional de $f(x,y) = 3x^2 + y^2$, tiene valor máximo, si $f(x,y)$ está en el círculo $x^2 + y^2 = 1$.

Solución La derivada direccional es el gradiente de f: $\nabla f(x,y) = (6x, y)$ evaluada en (x,y), es decir $\nabla f(x,y) \cdot (x,y) = h(x,y) = 6x^2 + 2y^2$ debe maximizarse sobre $x^2 + y^2 = 1$.



Sea $L = 6x^2 + 2y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$, por lo que $L_x = 2x(6+\lambda) = 0$, $L_y = 2y(2+\lambda) = 0$.

— Si $x = 0 \Longrightarrow y = \pm 1$, $\lambda = -2$.

— Si $y = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$, $\lambda = -6$.

Además $L_{xx} = 12 + 2\lambda$, $L_{yy} = 4 + 2\lambda$, $Lxy = 0$ por lo que el hessiano orlado es

$$\left(\begin{array}{cc|c} 12+2\lambda & 0 & 2x \\ 0 & 4+2\lambda & 2y \\ \hline 2x & 2y & 0 \end{array}\right).$$

— En $(0, \pm 1)$, $\lambda = -2$, $H(0,\pm 1) = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 2 \\ 0 & \pm 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\det H = -32$ y como $(-1)^1 \det H_i > 0$, $i = 2$, $(0, \pm 1)$ son mínimos.

— En $(\pm 1, 0)$, $\lambda = -6$, $H(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \pm 2 \\ 0 & -8 & 0 \\ \pm 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\det H = 32$ y como $(-1)^2 \det H_i > 0$, $i = 2$, $(\pm 1, 0)$ son máximos. Así la derivada direccional es máxima en $(\pm 1, 0)$, en la dirección $(\pm 1, 0)$.

40. Determine si las funciones f con las restricciones g que se dan a continuación tienen extremos:

a) $f(x, y) = x^m + y^m$, $g(x, y) = x + y - 2 = 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $m > 1$.

b) $f(x, y) = xy$, $g(x, y) = x^2 + y^2 - 2a^2 = 0$.

c) $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, $g(x, y) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} - \dfrac{1}{a^2}$, $a > 0$.

d) $f(x, y) = a\cos^2 x + b\cos^2 y$, $g(x, y) = y - x - \frac{\pi}{4} = 0$.

e) $f(x, y, z) = x + y + z$, $g(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.

f) $f(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2$, $a, b, c > 0$, $g(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0$.

g) $f(x, y, z) = y^2 + 4z^2 - 4yz - 2xz - 2xy$, $g(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + 6z^2 - 1 = 0$.

h) $f(x, y, z) = x + z$, $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

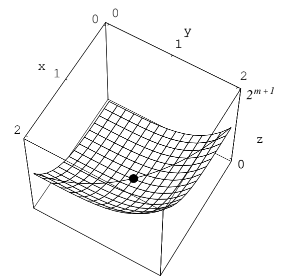
i) $f(x, y, z) = xyz$, $g(x, y, z) = xy + xz + yz - 5 = 0$.

Solución

a) $f(x, y) = x^m + y^m$, $g(x, y) = x + y - 2 = 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $m > 1$.

Solución Sea $L(x, y) = x^m + y^m + \lambda(x + y - 2)$, $L_x = mx^{m-1} + \lambda = 0$, $L_y = my^{m-1} + \lambda = 0 \Longrightarrow x^{m-1} = y^{m-1}$ y como $x \geq 0$, $y \geq 0 \Longrightarrow x = y \Longrightarrow x = y = 1$. Además $\nabla g = (1, 1) \neq (0, 0)$ y las derivadas en orden dos son $L_{xx} = m(m-1)x^{m-2}$, $L_{yy} = m(m-1)y^{m-2}$, $L_{xy} = 0$.

$f = x^m + y^m$,
$g = x + y - 2 = 0$



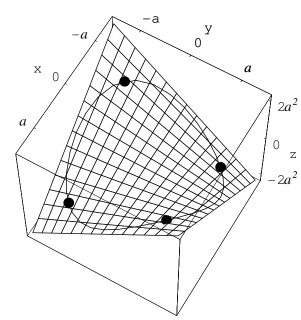
El hessiano orlado en $(1, 1)$ es:

$$H = \left(\begin{array}{cc|c} m(m-1) & 0 & 1 \\ 0 & m(m-1) & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

$\det H = -2m(m-1) < 0$, $\quad (-1)^1 \det H_2 > 0$, por lo que $(1, 1)$ es un mínimo de valor $f(1, 1) = 2$.

b) $f(x, y) = xy$, $g(x, y) = x^2 + y^2 - 2a^2 = 0$.

$f = xy, \ g = x^2 + y^2 - 2a^2 = 0$



Solución Sea $L = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 2a^2)$, $L_x = y + 2\lambda x = 0$, $L_y = x + 2\lambda y = 0 \Longrightarrow x + 2\lambda(-2\lambda x) = 0 \Longrightarrow x(1 - 4\lambda^2) = 0$, $y(1 - 4\lambda^2) = 0$.

Si $x = 0$, $y = \pm\sqrt{2}a$ y $y = 0$ que es una contradicción. Así $x \neq 0$, por lo que $\lambda = \pm\frac{1}{2}$.

Si $\lambda = -\frac{1}{2}$, $y = x$, $x = \pm a$ i.e. se tienen los puntos (a, a), $(-a, -a)$, $\lambda = -\frac{1}{2}$.

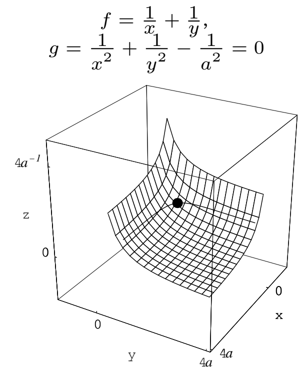
Si $\lambda = \frac{1}{2}$, $y = -x$, $x \pm a$ i.e. se tienen los puntos $(a, -a)$, $(-a, a)$, $\lambda = \frac{1}{2}$.

La matriz Jacobiano de la restricción $\dfrac{\partial g}{\partial(x, y)} = (2x, 2y) \neq (0, 0)$ en los puntos críticos.

Las derivadas de orden dos son $L_{xx} = L_{yy} = 2\lambda$, $L_{xy} = 1$ y el hessiano orlado $H = \begin{pmatrix} 2\lambda & 1 & 2x \\ 1 & 2\lambda & 2y \\ 2x & 2y & 0 \end{pmatrix}$, $\det H = -8(\lambda x^2 - xy + \lambda x^2)$.

— En (a, a), $(-a, -a)$, $\lambda = -\frac{1}{2}$, $\det H = 16a^2$ y hay dos máximos de valor $a^2 = f(a, a) = f(-a, -a)$.

— En $(a, -a)$, $(-a, a)$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $\det H = -16a^2$ y hay dos mínimos de valor $f(a, -a) = f(-a, a) = -a^2$.



c) $f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, $g(x,y) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{a^2}$, $a > 0$.

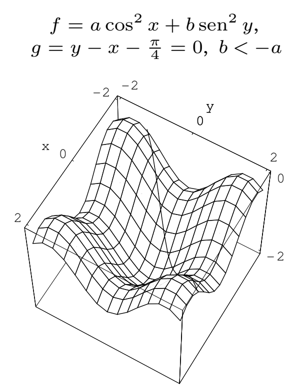
Solución $L = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \lambda(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{a^2})$, $L_x = -\frac{1}{x^3}(x + 2\lambda) = 0$, $L_y = -\frac{1}{y^3}(y + 2\lambda) = 0 \Longrightarrow -2\lambda = x = y \Longrightarrow \frac{2}{x^2} = \frac{1}{a^2}$, o sea $x = y = \pm a\sqrt{2}$, $\lambda = \mp\frac{a}{\sqrt{2}}$. Además, $\frac{\partial g}{\partial(x,y)} = (-\frac{2}{x^3}, -\frac{2}{y^3}) \neq (0,0)$ en los puntos críticos.

Las derivadas de orden dos son $L_{xx} = \dfrac{2(x+3\lambda)}{x^4}$, $L_{yy} = \dfrac{2(y+3\lambda)}{y^4}$, $L_{xy} = 0$ y el hessiano orlado es:

$$H = \left(\begin{array}{cc|c} \dfrac{2(x+3\lambda)}{x^4} & 0 & -\dfrac{2}{x^3} \\ 0 & \dfrac{2(y+3\lambda)}{y^4} & -\dfrac{2}{y^3} \\ \hline -\dfrac{2}{x^3} & -\dfrac{2}{y^3} & 0 \end{array}\right), \quad \det H = -8\frac{x^3 + 3\lambda x^2 + y^3 + 3\lambda y^2}{x^6 y^6}.$$

— En $(a\sqrt{2}, a\sqrt{2})$, $\lambda = -\frac{a}{\sqrt{2}}$, $\det H = \frac{\sqrt{2}}{4a^9} > 0$ y tenemos un máximo de valor $f(a\sqrt{2}, a\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{a}$.

— En $(-a\sqrt{2}, -a\sqrt{2})$, $\lambda = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $\det H = -\frac{\sqrt{2}}{4a^9} < 0$ y tenemos un mínimo de valor $f(-a\sqrt{2}, -a\sqrt{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{a}$.



d) $f(x,y) = a\cos^2 x + b\cos^2 y$, $g(x,y) = y - x - \frac{\pi}{4} = 0$.

Solución Sea $L = a\cos^2 x + b\cos^2 y + \lambda(y - x - \frac{\pi}{4})$, $L_x = -a\,\mathrm{sen}\,2x - \lambda = 0$, $L_y = -b\,\mathrm{sen}\,2y + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -a\,\mathrm{sen}\,2x = b\,\mathrm{sen}\,2y = b\,\mathrm{sen}(2x + \frac{\pi}{2}) = b\cos 2x \Longrightarrow \tan 2x = -\frac{b}{a}$, es decir $x = -\frac{1}{2}\arctan\frac{b}{a}$, $y = -\frac{1}{2}\arctan\frac{b}{a} + \frac{\pi}{4}\frac{1}{2}(-\arctan\frac{b}{a} + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}\arctan\frac{a}{b}$, pues $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.

Además $\nabla g = (-1,1) \neq (0,0)$ en los puntos críticos y las derivadas de orden dos son

$L_{xx} = -2a\cos 2x$, $L_{yy} = -2b\cos 2y$, $L_{xy} = 0$ y el hessiano orlado es

$$H = \left(\begin{array}{cc|c} -2a\cos 2x & 0 & -1 \\ 0 & -2b\cos 2y & 1 \\ \hline -1 & 1 & 0 \end{array}\right), \quad \det H = 2a\cos 2x + 2a\cos 2y.$$

— En $(-\frac{1}{2}\arctan\frac{b}{a}, \frac{1}{2}\arctan\frac{a}{b})$, $\det H = \dfrac{2a|a| + 2b|b|}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{cases} > 0 & \text{si } b > -a, \\ < 0 & \text{si } b < -a, \end{cases}$

es decir hay un máximo si $b > -a$ y un mínimo si $b < -a$.

e) $f(x,y,z) = x + y + z$, $g(x,y,z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.

Solución Sea $L = x + y + z + \lambda(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z})$, $L_x = 1 - \dfrac{\lambda}{x^2} = 0$, $L_y = 1 - \dfrac{\lambda}{y^2} = 0$, $L_z = 1 - \dfrac{\lambda}{z^2} = 0 \Longrightarrow x^2 = \lambda = y^2 = z^2 \Longrightarrow x = \pm y$, $x = \pm z$, $y = \pm z$.

Si $x = -y \Longrightarrow \frac{1}{z} = 1 \Longrightarrow z = 1$, $\lambda = 1 \Longrightarrow y = \pm 1$, $x = \mp 1$. Analizando los otros casos x, z y y, z, por simetría de los ejes, finalmente se tienen los puntos $(1,-1,1)$, $(1,1,-1)$, $(1,1,-1)$, $\lambda = 1$.

Si $x = y = z \Longrightarrow \frac{3}{x} = 1$ i.e. $x = y = z = 3$, $\lambda = 9$.

Recordemos que $\nabla g = (-\dfrac{1}{x^2}, -\dfrac{1}{y^2}, -\dfrac{1}{z^2}) \neq (0,0,0)$ en los puntos críticos, $L_{xx} = \dfrac{2\lambda}{x^3}$, $L_{yy} = \dfrac{2\lambda}{y^3}$, $L_{zz} = \dfrac{2\lambda}{z^3}$, $L_{xy} = L_{xz} = L_{yz} = 0$ y los hessianos orlados:

$$H_2 = \left(\begin{array}{cc|c} 2\lambda x^3 & 0 & -\frac{1}{x^2} \\ 0 & \frac{2\lambda}{y^3} & -\frac{1}{y^2} \\ \hline -\frac{1}{x^2} & -\frac{1}{y^2} & 0 \end{array}\right), \quad H_3 = \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{2\lambda}{x^3} & 0 & 0 & -\frac{1}{x^2} \\ 0 & \frac{2\lambda}{y^3} & 0 & -\frac{1}{y^2} \\ 0 & 0 & \frac{2\lambda}{z^3} & -\frac{1}{z^3} \\ \hline -\frac{1}{x^2} & -\frac{1}{y^2} & -\frac{1}{z^2} & 0 \end{array}\right),$$

son tales que $\det H_2 = -\dfrac{2\lambda}{x^3y^3}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)$, $\det H_3 = -\dfrac{4\lambda^2}{x^4y^4z^4}(xy + xz + yz)$.

— En $(3,3,3)$, $\lambda = 9$, $\det H_2 = -\dfrac{4}{243} < 0$, $\det H_3 = -\dfrac{4}{243} < 0$, por lo que es un mínimo de valor 9.

— En $(-1,1,1)$, $(1,1,-1)$, $(1,-1,1)$, $\lambda = 1$ observemos que $\det H_2 = 0$ en $(-1,1,1)$ y $(1,-1,1)$ por lo que el criterio falla. Sin embargo por un argumento puramente geométrico (simetría de los ejes) tenemos que la función f tiene exactamente el mismo comportamiento en los tres puntos. Así se tiene que $\det H_2(1,1,-1) = -4$ y el criterio no falla.

De esta forma tenemos $\det H_2 = -4$, $\det H_3 = 4$, pero la única opción que tienen estos puntos es que sean máximos, pero $(-1)^i \det H_i > 0$, $i = 2, 3$ no se cumple, por lo que no son máximos ni mínimos.

f) $f(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2$, a, b, $c > 0$, $g(x,y,z) = x + y + z - 1 = 0$.

Solución Sea $L = ax^2 + by^2 + cz^2 + \lambda(x + y + z - 1)$, $L_x = 2ax + \lambda = 0$, $L_y = 2by + \lambda = 0$, $L_z = 2cz + \lambda = 0 \Longrightarrow x + y + z = 1 = -\lambda(\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c}) = -\lambda(\frac{ab + ac + bc}{2abc}) \Longrightarrow \lambda = -\frac{2abc}{ab + bc + ac}$, con lo que $x_0 = \frac{bc}{ab + bc + ac}$, $y_0 = \frac{ac}{ab + bc + ac}$, $z_0 = \frac{ab}{ab + bc + ac}$.

La matriz Jacobiana $\frac{\partial g}{\partial(x,y,z)} = (1,1,1) \neq (0,0,0)$. Las derivadas de orden dos son $L_{xx} = 2a$, $L_{yy} = 2b$, $L_{zz} = 2c$, $L_{xy} = L_{xz} = L_{yz} = 0$ y el hessiano orlado:

$$H = \left(\begin{array}{ccc|c} 2a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2b & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2c & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right), \qquad H_2 = \left(\begin{array}{cc|c} 2a & 0 & 1 \\ 0 & 2b & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

donde $\det H_2 = -2a - 2b$, $\det H_3 = -4(ab + bc + ac)$ y como $(-1)^1 \det H_i > 0$, $i = 2{,}3$ se tiene un mínimo, de valor $f(x_0, y_0, z_0) = \frac{ab^2c^2 + ba^2c^2 + ca^2b^2}{(ab + bc + ac)^2} = \frac{abc}{ab + bc + ac}$.

g) $f(x,y,z) = y^2 + 4z^2 - 4yz - 2xz - 2xy$, $g(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 + 6z^2 - 1 = 0$.

Solución Sea $L = y^2 + 4z^2 - 4yz - 2xz - 2xy + \lambda(2x^2 + 3y^2 + 6z^2 - 1)$, entonces $L_x = -2z - 2y + 4\lambda x = 0$, $L_y = 2y - 4z - 2x + 6\lambda y = 0$, $L_z = 8z - 4y - 2x + 12\lambda z = 0 \Longrightarrow$ $\begin{pmatrix} 4\lambda & -2 & -2 \\ -2 & 2 + 6\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 12\lambda + 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Pero la solución del sistema es $\neq (0,0,0)$, pues $2x^2 + 3y^2 + 6z^2 = 1$ y $\begin{vmatrix} 4\lambda & -2 & -2 \\ -2 & 2 + 6\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 12\lambda + 8 \end{vmatrix} = 72(\lambda + 1)(4\lambda^2 - 1) = 0$.

— Si $\lambda = -1$, $y = -z \Longrightarrow x = 0$, por lo que $3y^2 + 6z^2 = 9y^2 = 1 \Longrightarrow y = \pm\frac{1}{3}$, $z = \mp\frac{1}{3}$, $x = 0$, $\lambda = -1$.

— Si $\lambda = -\frac{1}{2}$, $y = 2z$, $x = -3z \Longrightarrow 36z^2 = 1 \Longrightarrow z = \pm\frac{1}{6}$, $y = \pm\frac{1}{3}$, $x = \mp\frac{1}{2}$.

— Si $\lambda = \frac{1}{2}$, $y = 2z$, $x = 3z \Longrightarrow 36z^2 = 1 \Longrightarrow z = \pm\frac{1}{6}$, $y = \pm\frac{1}{3}$, $x = \pm\frac{1}{2}$.

Por otro lado, $\dfrac{\partial g}{\partial(x,y,z)} = (4x, 6y, 12z) \neq (0,0,0)$ en las soluciones. Las derivadas de orden dos son $L_{xx} = 4\lambda$, $L_{yy} = 6\lambda + 2$, $L_{zz} = 12\lambda + 8$, $L_{xy} = -2$, $L_{xz} = -2$, $L_{yz} = -4$, por lo que:

$$H_2 = \begin{pmatrix} 4\lambda & -2 & 4x \\ -2 & 6\lambda+2 & 6y \\ 4x & 6y & 0 \end{pmatrix}, \qquad H_3 = \left(\begin{array}{ccc|c} 4\lambda & -2 & -2 & 4x \\ -2 & 6\lambda+2 & -4 & 6y \\ -2 & -4 & 12\lambda+8 & 12z \\ \hline 4x & 6y & 12z & 0 \end{array}\right).$$

— En $\pm(0, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$, $\lambda = -1$, $\det H_2 = 16$, $\det H_3 = -432$, es decir $(-1)^i \det H_i > 0$, $i = 2, 3$ y se tiene dos máximos de valor $f(0, \pm\frac{1}{3}, \mp\frac{1}{3}) = 1$.

— En $\pm(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})$, $\lambda = -\frac{1}{2}$, $\det H_2 = 28$, $\det H_3 = 288$, por lo que no son máximos ni mínimos.

— En $\pm(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $\det H_2 = -44$, $\det H_3 = -864$, entonces $(-1)^1 \det H_i > 0$, $i = 2, 3$ y se tienen dos mínimos de valor $f(\pm(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})) = -\frac{1}{2}$.

h) $f(x,y,z) = x + z$, $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

Solución Por el teorema de Lagrange se tiene que $L = x + z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$ y $L_x = 1 + 2\lambda x = 0$, $L_y = 2\lambda y = 0$, $L_z = 1 + 2\lambda z = 0 \Longrightarrow x \neq 0$, $\lambda \neq 0$, $z \neq 0$ i.e. $y = 0$. Además se tiene que $x = z \Longrightarrow 2x^2 = 1$, $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = z$, $\lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Los puntos críticos son $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $\lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$. El hessiano es (puesto que $\dfrac{\partial g}{\partial(x,y,x)} = (2x, 2y, 2z) \neq (0,0,0)$):

$$H = \left(\begin{array}{ccc|c} 2\lambda & 0 & 0 & 2x \\ 0 & 2\lambda & 0 & 2y \\ 0 & 0 & 2\lambda & 2z \\ \hline 2x & 2y & 2z & 0 \end{array}\right), \qquad H_2 = \left(\begin{array}{cc|c} 2\lambda & 0 & 2x \\ 0 & 2\lambda & 2y \\ \hline 2x & 2y & 0 \end{array}\right)$$

y tenemos $\det H_2 = -8\lambda(x^2 + y^2)$, $\det H_3 = 16\lambda^2(x^2 + y^2 + z^2)$.

— En $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $\lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\det H_2 = 2\sqrt{2}$, $\det H_3 = -8$ i.e. $(-1)^i \det H_i > 0$, $i = 2, 3$ y es un máximo de valor $f(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}$.

— En $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\det H_2 = -2\sqrt{2}$, $\det H_3 = -8$ i.e. $(-1)^1 \det H_i > 0$, $i = 2, 3$ y tenemos un mínimo de valor $f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\sqrt{2}$.

i) $f(x,y,z) = xyz$, $g(x,y,z) = xy + xz + yz - 5 = 0$.

Solución Sea $L = xyz + \lambda(xy + xz + yz - 5)$, $L_x = yz + \lambda(y+z) = 0$, $L_y = xz + \lambda(x+z) = 0$, $L_z = xy + \lambda(x+y) = 0$. Observemos que $x \neq 0$, pues si $x = 0 \Longrightarrow yz = 5$, $\lambda z = 0 \Longrightarrow \lambda = 0$ y $yz = 0$, que es contradictorio.

Así $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$, $x + y \neq 0$, $x + z \neq 0$, $y + z \neq 0$, $\lambda \neq 0$, por lo que $-\lambda = \dfrac{xz}{x+z} = \dfrac{xy}{x+y} \Longleftrightarrow x^2 z = x^2 y \Longleftrightarrow y = z$ i.e. $x = y = z \Longrightarrow 3x^2 = 5$, o sea $x = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}$ y los puntos críticos son $\pm(\sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}})$, $\lambda = \mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}$.

La matriz Jacobiana $\dfrac{\partial g}{\partial(x,y,z)} = (y+z, x+z, x+y) \neq (0,0,0)$ en las soluciones. Las derivadas de orden dos son $L_{xx} = L_{yy} = L_{zz} = 0$, $L_{xy} = \lambda + z$, $L_{xz} = \lambda + y$, $L_{yz} = \lambda + x$ y el hessiano orlado es:

$$H = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \lambda+z & \lambda+y & y+z \\ \lambda+z & 0 & \lambda+x & x+z \\ \lambda+y & \lambda+x & 0 & x+y \\ \hline y+z & x+z & x+y & 0 \end{array}\right), \quad H_2 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda+z & y+z \\ \lambda+z & 0 & x+z \\ y+z & x+z & 0 \end{pmatrix},$$

con $\det H = -4\big[x^2(y(z+\lambda) + \lambda z) + x(y^2(z+\lambda) + y(z^2+\lambda^2) + \lambda z(z+\lambda)) + \lambda yz(x+y+\lambda)\big]$,

$\det H_2 = 2(x+\lambda)(y+z)(x+z)$.

— En $-(\sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}})$, $\lambda = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}$, $\det H = -\frac{25}{3}$, $\det H_2 = -\frac{20\sqrt{15}}{9}$, $(-1)^1 \det H_i > 0$, $i = 2, 3$, es un mínimo de valor $-\frac{5}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}$.

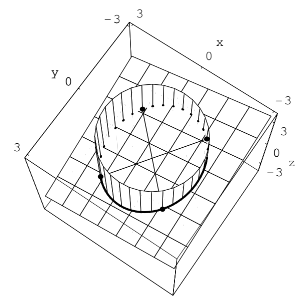
— En $(\sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}})$, $\lambda = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}$, $\det H = -\frac{25}{3}$, $\det H_2 = \frac{20\sqrt{15}}{9}$, $(-1)^i \det H_i > 0$, $i = 2, 3$, es un máximo de valor $\frac{5}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}$.

41. Determinar los ejes de la elipse dada por la intersección del cilindro $x^2 + y^2 - 4 = 0$ y el plano $x + y + 2z - 2 = 0$.

Solución El plano se escribe $x + y + 2(z - 1) = 0$, la elipse tiene el centro en $(0, 0, 1)$ y los ejes de la elipse son perpendiculares y pasan por $(0, 0, 1)$.

De esta forma la distancia de los puntos (x, y, z) a $(0, 0, 1)$, sujeta a las restricciones $g(x, y, z) = x^2+y^2-4 = 0$, $h(x, y, z) = x+y+2(z-1) = 0$ son tales que los vértices maximizan y minimizan esta distancia.

$x + y + 2z = 2,\ x^2 + y^2 = 4$



La matriz Jacobiana de las restricciones $\dfrac{\partial(g, h)}{\partial(x, y, z)} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ es de rango 2, pues si $x = y = 0$ no satisface la restricción $x^2 + y^2 = 4$.

La función de Lagrange es $L = x^2 + y^2 + (z - 1)^2 + \lambda_1(x^2 + y^2 - 4) + \lambda_2(x + y + 2z - 2)$ y se tiene $L_x = 2x(1 + \lambda_1) + \lambda_2 = 0$, $L_y = 2y(1 + \lambda_1) + \lambda_2 = 0$, $L_z = 2z - 2 + 2\lambda_2 = 0$, por lo que $\lambda_2 = -z + 1$, $(x - y)(1 + \lambda_1) = 0$.

— Si $x = y \Longrightarrow x = y = \pm\sqrt{2}$, $z = 1 - \frac{1}{2}(x + y) = 1 \mp \sqrt{2}$, $\lambda_2 = \pm\sqrt{2}$, $\lambda_1 = -\frac{3}{2}$.

— Si $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$, $z = 1$, $2x^2 = 4 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{2}$, $x + y = 0$, $y = \mp\sqrt{2}$.

Queda por verificar que los puntos obtenidos son extremos. Las derivadas de orden dos son $L_{xx} = 2(1 + \lambda_1)$, $L_{yy} = 2(1 + \lambda_1)$, $L_{zz} = 2$, $L_{xy} = 0 = L_{xz} = L_{yz}$ y el hessiano orlado es $H = \left(\begin{array}{ccc|cc} 2+2\lambda_1 & 0 & 0 & 2x & 1 \\ 0 & 2+2\lambda_1 & 0 & 2y & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ \hline 2x & 2y & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right)$, $\det H = 8(x^2(4\lambda_1 + 5)) - 2xy + y^2(4\lambda_1 + 5))$.

— En $(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}, 1 \mp \sqrt{2})$, $\lambda_1 = -\frac{3}{2}$, $\lambda_2 = \pm\sqrt{2}$, $\det H = -64$ y es un máximo.

— En $(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2}, 1)$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$, $\det H = 64$ y es un mínimo.

Finalmente las rectas que contienen a los ejes de la elipse son:

$$d_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = t,\ y = -t,\ z = 1,\ t \in \mathbb{R}\},$$

$$d_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = t,\ y = t,\ z = 1 - t,\ t \in \mathbb{R}\}.$$

42. Determinar entre los triángulos de perímetro $2p$, los que tienen área máxima.

Solución Es conocido que el área de un triángulo de lados x, y, z, está dada por la fórmula $p(p-x)(p-y)(p-z)$, con $p=\frac{1}{2}(x+y+z)$ semi–perímetro del triángulo. Así, el problema es determinar el punto $(x,y,z)\in E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^2/x>0,\ y>0,\ z>0\}$ que maximiza la función $f(x,y,z)=p(p-x)(p-y)(p-z)$, sujeta a la restricción $g(x,y,z)=x+y+z-2p=0$.

El Lagrangiano es $L=p(p-x)(p-y)(p-z)+\lambda(x+y+z-2p)$ y las derivadas parciales: $L_x=-p(p-y)(p-z)+\lambda=0$, $L_y=-p(p-x)(p-z)+\lambda=0$, $L_z=-p(p-x)(p-y)+\lambda=0$.

Dado que $p(p-x)(p-y)(p-z)\neq 0\Longrightarrow \lambda=-p(p-x)(p-z)=-p(p-y)(p-z)=-p(p-x)(p-y)\neq 0\Longrightarrow p-x=p-y=p-z\Longrightarrow x=y=z=\frac{2}{3}p$, $\lambda=\frac{1}{9}p^3$.

Por otro lado $\dfrac{\partial g}{\partial(x,y,z)}=(1,1,1)\neq(0,0,0)$. Las derivadas de orden dos son $L_{xx}=0=L_{yy}=L_{zz}$, $L_{xy}=p(p-z)$, $L_{xz}=p(p-y)$, $L_{yz}=p(p-x)$ y el hessiano orlado:

$$H=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & p(p-z) & p(p-y) & 1\\ p(p-z) & 0 & p(p-x) & 1\\ p(p-y) & p(p-x) & 0 & 1\\ \hline 1 & 1 & 1 & 0\end{array}\right),\qquad H_2=\begin{pmatrix}0 & p(p-z) & 1\\ p(p-z) & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix},$$

$\det H_3=p^2(x^2+x(-2y-2z+2p)+y^2+y(2p-2z)+(z-p)(z+3p))$, $\det H_2=-2p(z-p)$.

Los hessianos evaluados en $(\frac{2}{3}p,\frac{2}{3}p,\frac{2}{3}p)$, $\lambda=\frac{1}{9}p^2$, indican: $\det H_2=\frac{2}{3}p^2$, $\det H_3=-\frac{1}{3}p^4$ y como $(-1)^i\det H_i>0$, $i=2,3$, se tiene un máximo. Así el triángulo buscado es un triángulo equilátero de lado $\frac{2}{3}p$ y de área $\frac{1}{27}p^4$.

43. Encontrar los extremos de la función $f(x,y,z)=z$, bajo las restricciones $g(x,y,z)=x^2+y^2-2=0$, $h(x,y,z)=x+y+z=0$.

Solución

a) Los puntos en que $\dfrac{\partial(g,h)}{\partial(x,y,z)}=\begin{pmatrix}2x & 2y & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ es de rango <2, son los puntos en que $x=y=0$, z arbitrario, pero no satisfacen $g(x,y,z)=0$.

Así el punto $(0,0,z)\notin S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/g(x,y,z)=h(x,y,z)=0\}$ que es regular i.e. todo extremo de f sobre S es regular.

b) Los puntos críticos se obtienen de las ecuaciones $g(x,y,z)=x^2+y^2-2=0$, $h(x,y,z)=$

$x+y+z=0$, $f_x+\lambda_1 g_x+\lambda_2 h_x = 2\lambda_1 x+\lambda_2 = 0$, $f_y+\lambda_1 g_y+\lambda_2 h_y = 2\lambda_1 y+\lambda_2=0$, $f_z+\lambda_1 g_z+\lambda_2 h_z = 1+\lambda_2=0 \Longrightarrow \lambda_2=-1$, $\lambda_1 x=\lambda_1 y=-\frac{1}{2}$, por lo que $\lambda_1\neq 0$, $x=y\neq 0$. Así, tenemos $2x^2-2=0 \Longrightarrow x=\pm 1$, $2x+z=0$, es decir $z=-2x$ y los puntos críticos son $(1,1,-2)$, $\lambda_1=\frac{1}{2}$, $\lambda_2=-1$ y $(-1,-1,2)$, $\lambda_1=-\frac{1}{2}$, $\lambda_2=-1$.

Se verifica que $(-1,-1,2)$ es un máximo y que $(1,1,-2)$ es un mínimo.

En efecto, el hessiano orlado es $H=\left(\begin{array}{ccc|cc} 2\lambda_1 & 0 & 0 & 2x & 1\\ 0 & 2\lambda_1 & 0 & 2y & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ \hline 2x & 2y & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0\end{array}\right)$, $p=2$, $i=p+1=3,\ldots,n=3$, por lo que un sólo determinante debe calcularse. Así,

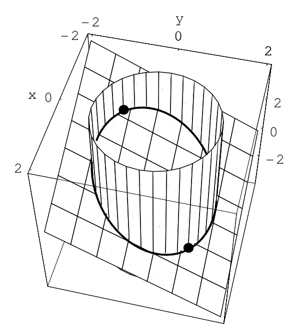
$$\det H = 2\lambda_1\begin{vmatrix} 2\lambda_1 & 0 & 2y & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 2y & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{vmatrix} - 2x\begin{vmatrix} 0 & 2\lambda_1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 2x & 2y & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 2\lambda_1 & 0 & 2y\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 2x & 2y & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{vmatrix} =$$

$$2\lambda_1\left(2y\begin{vmatrix} 2y & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix} + 4\lambda_1 x\begin{vmatrix} 2x & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}\right) = 8\lambda_1(x^2+y^2).$$

– Si $\lambda_1=-\frac{1}{2}$, $\lambda_2=-1$, $(-1,-1,2)$, entonces $\det H=-8$ y es un máximo de valor $f(-1,-1,2)=2$.

– Si $\lambda_1=\frac{1}{2}$, $\lambda_2=-1$, $(1,1,-2)$, entonces $\det H=8$ y es un mínimo de valor $f(1,1,-2)=-2$.

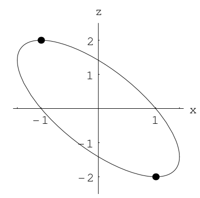
$g=x^2+y^2-2=0$,
$h=x+y+z=0$



El problema también puede interpretarse como el determinar los extremos de z, bajo las restricciones $g(x,y,z)=0$, $h(x,y,z)=0$, o sea los extremos de z sobre la elipse $(x,\pm\sqrt{2-x^2},-x\pm\sqrt{2-x^2})$, $-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}$.

Así se puede tomar la función $z=\varphi(x)=-x\pm\sqrt{2-x^2}$, $-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}$, entonces $\varphi'(x)=-1\mp\dfrac{x}{\sqrt{2-x^2}}=0 \Longrightarrow$

$2 - x^2 = x^2$, i.e. $x^2 = 1$ y como $1 = \mp\dfrac{x}{\sqrt{2-x^2}}$, las soluciones son $x = \pm 1$, $y = \mp 1$, $z = \pm 2$. Además, $\varphi''(x) = \mp\dfrac{2}{\sqrt{(2-x^2)^3}}$ por lo que $(-1,1,2)$ es un máximo y $(1,-1,-2)$ es un mínimo.



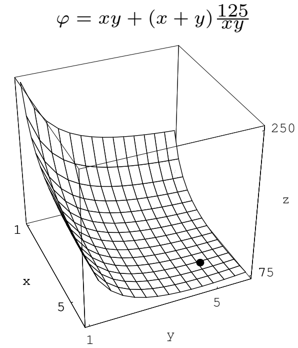
44. Determinar los extremos de $f(x,y,z) = xy + xz + yz$ bajo la restricción $xyz = 125$.

Solución Sea $g(x,y,z) = xyz - 125$, $L(x,y,z) = xy + xz + yz + \lambda(125 - xyz)$, entonces $L_x = y + z - \lambda yz = 0$, $L_y = x + z - \lambda xz = 0$, $L_z = x + y - \lambda xy = 0$, $xyz = 125 \Longrightarrow x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$. Además $xy + xz = xy + zy = zy + zx = \lambda xyz \Longrightarrow zx = zy$, $x = y$ y $x = y = z \Longrightarrow x = y = z = 5$, $\lambda = -\frac{2}{5}$.

El Jacobiano $\dfrac{\partial g}{\partial(x,y)} = (yz, xz, xy)$ y en $(5,5,5)$ es de rango 1. El hessiano orlado
$$H(5,5,5) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & 25 \\ -1 & 0 & -1 & 25 \\ -1 & -1 & 0 & 25 \\ \hline 25 & 25 & 25 & 0 \end{array}\right),$$
$p = 1$ y hay que calcular dos menores principales orlados.
$$\det H_2 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 25 \\ -1 & 0 & 25 \\ 25 & 25 & 0 \end{vmatrix} = -1250, \ \det H_3 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 25 \\ -1 & 0 & -1 & 25 \\ -1 & -1 & 0 & 25 \\ 25 & 25 & 25 & 0 \end{vmatrix} = -1875.$$
Como $(-1)^1 \det H_i > 0$, $i = 2,3$, el punto $(5,5,5)$ es un mínimo de valor $f(5,5,5) = 75$.

Si se considera que $z = \frac{125}{xy}$, buscamos determinar los extremos de $\varphi(x,y) = xy + (x+y)\frac{125}{xy}$. Así, $\varphi_x = y - \dfrac{125}{x^2} = 0$, $\varphi_y = x - \dfrac{125}{y^2} = 0 \Longrightarrow y = \dfrac{y^4}{125} \Longrightarrow y = 0$ (que se elimina), $y = 5$, $x = 5$. Además, $\varphi_{xx} = \dfrac{250}{x^3}$, $\varphi_{yy} = \dfrac{250}{y^3}$, $\varphi_{xy} = 1$, entonces el hessiano $H(5,5) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ es una matriz definida positiva y hay un mínimo.

$\varphi = xy + (x+y)\frac{125}{xy}$



45. Determinar los extremos de $f(x,y,z) = xyz$ bajo las restricciones $x+y+z = 5$, $xy + yz + xz = 8$.

Solución Sean $g(x,y,z) = x+y+z-5$, $h(x,y,z) = xy+yz+xz-8$, el Lagrangiano $L(x,y,z) = xyz + \lambda_1(x+y+z-5) + \lambda_2(xy+yz+xz-8)$ nos determina las ecuaciones $L_x = yz + \lambda_1 + \lambda_2(y+z) = 0$, $L_y = xz + \lambda_1 + \lambda_2(x+z) = 0$, $L_z = xy + \lambda_1 + \lambda_2(x+y) = 0 \Longrightarrow z(x-y) = \lambda_2(x-y) = 0$.

Si $x \neq y \Longrightarrow z = -\lambda_2$ y sumando las tres ecuaciones da $8 + 3\lambda_1 + 10\lambda_2 = 0$. Restando la primera ecuación multiplicada por x y la segunda ecuación multiplicada por y, se tiene $\lambda_1(y-x) + \lambda_2 z(y-x)$ y como $x \neq y \Longrightarrow \lambda_1 + \lambda_2 z = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = -\lambda_2 z = z^2$, con lo cual tenemos $3z^2 - 10z + 8 = 0 \Longrightarrow z = 2$, $z = \frac{4}{3}$.

Caso $z = \frac{4}{3}$ Dado que $x + y = 5 - z = \frac{11}{3} \Longrightarrow xy + z(x+y) = xy + \frac{11}{3} = 8 \Longrightarrow xy = \frac{28}{9}$ y $y^2 - \frac{11}{3}y + \frac{28}{9} = 0$. Las soluciones son $y = \frac{7}{3}, \frac{4}{3}$. Si $y = \frac{7}{3} \Longrightarrow x = \frac{4}{3}$ y si $y = \frac{4}{3} \Longrightarrow x = \frac{7}{3}$.

Si $x = y$, se llega a que $x = y = \frac{4}{3}$ o 2, $z = \frac{7}{3}$. Así, hay tres ($\frac{3!}{2!1!} = 3$) soluciones que son las permutaciones posibles de $\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}$, para las cuales $\lambda_1 = \frac{16}{9}$, $\lambda_2 = -\frac{4}{3}$.

Caso $z = 2$ En este caso $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -2$ y si $x \neq y$ tenemos $x = 2$, $y = 1$.

Si $x = y$ tenemos $x = y = 2$, $z = 1$ y hay tres soluciones.

Condiciones de segundo orden

La matriz Jacobiana de las restricciones $\dfrac{\partial(g,h)}{\partial(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y+z & x+z & x+y \end{pmatrix}$ es de rango dos para todas las soluciones que se encontraron y son regulares. El hessiano orlado es

$$H = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & z+\lambda_2 & y+\lambda_2 & 1 & y+z \\ z+\lambda_2 & 0 & x+\lambda_2 & 1 & x+z \\ y+\lambda_2 & x+\lambda_2 & 0 & 1 & x+y \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ y+z & x+z & x+y & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$p = 2$, $i = p+1 = 3, \ldots, n = 3$, por lo sólo un determinante es necesario calcular en cada solución.

– En el caso $(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3})$, $\lambda_1 = \frac{16}{9}$, $\lambda_2 = -\frac{4}{3}$, tenemos que $\det H$ es:

$$\det H = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{11}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{11}{3} \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{8}{3} & \frac{11}{3} & \frac{11}{3} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{11}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{11}{3} \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ \frac{8}{3} & \frac{11}{3} & \frac{11}{3} & 0 \end{vmatrix} + \frac{8}{3}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ \frac{8}{3} & \frac{11}{3} & \frac{11}{3} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$-\begin{vmatrix} 0 & 1 & \frac{11}{3} \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{8}{3} & \frac{11}{3} & 0 \end{vmatrix} + \frac{11}{3}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{8}{3} & \frac{11}{3} & \frac{11}{3} \end{vmatrix} + \frac{8}{3}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{8}{3} & \frac{11}{3} & 0 \end{vmatrix} - \frac{8}{3}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{8}{3} & \frac{11}{3} & \frac{11}{3} \end{vmatrix} =$$

$-\frac{11}{3}(\frac{11}{3} - \frac{8}{3}) - (\frac{11}{3} - \frac{8}{3}) + \frac{8}{3}(\frac{11}{3} - \frac{8}{3}) = -(\frac{11}{3} + 1 - \frac{8}{3}) = -2.$

Es importante hacer notar que al sustituir los puntos $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3})$, $(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3})$, con sus respectivos λ_1 y λ_2, se tiene la matriz anterior permutando una fila y una columna, por lo que tienen el mismo signo que $\det H(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3})$, $\lambda_1 = \frac{16}{9}$, $\lambda_2 = -\frac{4}{3}$.

Ahora, como $(-1)^i \det H_3 > 0$, con $i = p + 1 = 3 = n$ tenemos un máximo de valor $f(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}) = \frac{112}{37}$, bajo las restricciones $x + y + z = 5$, $xy + yz + xz = 8$, resultado que vale para los puntos $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3})$, $(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3})$, $(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3})$.

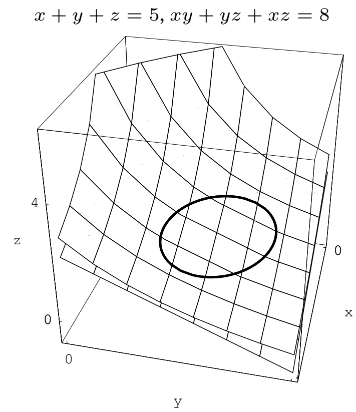
Para el caso $(2, 1, 2)$, $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -2$, el determinante del hessiano es:

$$\det H = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$-\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -3(4-3)+4(4-3)-4(3-4)+3(3-4) = 2>0.$$

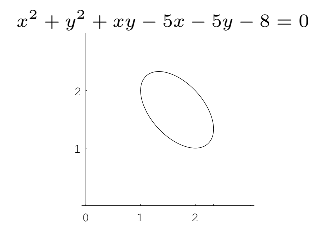
Igual que en el caso anterior, los hessianos orlados para los casos $(2, 2, 1)$, $(1, 2, 2)$ se obtienen permutando una fila y una columna.

Dado que $(-1)^p \det H > 0$, los puntos $(2, 1, 2)$, $(2, 2, 1)$ y $(1, 2, 2)$ son mínimos de valor $f(2, 1, 2) = 4$, bajo las restricciones las restricciones $x + y + z = 5$, $xy + yz + xz = 8$.

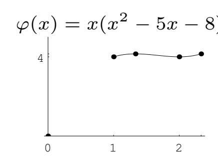


Observemos que cuando $z = 5 - x - y = \dfrac{8 - xy}{x + y}$, tenemos que $x^2 + y^2 + xy - 5x - 5y + 8 = 0$: (1), es decir que la curva intersección de las superficies $x + y + z = 5$, $xy + yz + xz = 8$, proyectada sobre el plano xy es una elipse de ecuación (1). La solución de la ecuación (1) es $y = \frac{1}{2}(5 - x \pm \sqrt{-2x^2 + 10x - 7})$, $1 \leq x \leq \frac{7}{3}$, $z = 5 - x - y$

y la curva intersección es x, $\frac{1}{2}(5 - x \pm \sqrt{-2x^2 + 10x - 7})$, $\frac{1}{2}(5 - x \mp \sqrt{-2x^2 + 10x - 7})$, $1 \leq x \leq \frac{7}{3}$, y se pretende determinar los extremos $\varphi(x) = xy(x)z(x)$ en $1 \leq x \leq \frac{7}{3}$.



Simplificando $\varphi(x) = x\frac{1}{4}((5 - x)^2 - (-2x^2 + 10x - 7)) = x(x^2 - 5x - 8)$, $\varphi'(x) = 3x^2 - 10x + 8 = 0 \Longrightarrow x = \frac{4}{3}$, $x = 2$ y $\varphi''(x) = 6x - 10$.



Como $\varphi''(\frac{4}{3}) = -2$, es un máximo i.e. hay un máximo en $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3})$ y en $(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3})$, cuando se usan las soluciones $y = \frac{1}{2}(5 - x \pm \sqrt{-2x^2 + 10x - 7})$, $z = 5 - x - y$.

Otro máximo de $\varphi(x)$ en $1 \leq x \leq \frac{7}{3}$, se obtiene en $x = \frac{7}{3}$ i.e. $y = \frac{4}{3}$, $z = \frac{4}{3}$. Así tenemos el máximo de valor $\frac{112}{27}$.

Como $\varphi''(2) = 2 > 0$, es un mínimo i.e. hay un mínimo en $(2, 2, 1)$, $(2, 1, 2)$. Otro mínimo de φ sucede en $x = 1$ y tenemos el punto $(1, 2, 2)$.

Finalmente, los mínimos son $(2, 2, 1)$, $(2, 1, 2)$, $(1, 2, 2)$, de valor 4.

46. Determinar los extremos de $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$ en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

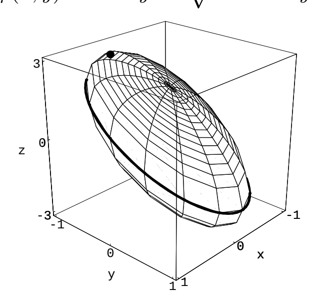
Solución Sea $L = x - 2y + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$, entonces $L_x = 1 + 2\lambda x = 0$, $L_y = -2 + 2\lambda y = 0$, $L_z = 2 + 2\lambda z = 0$, por lo que $\lambda \neq 0$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$. Así se tiene que $4\lambda x + 2\lambda y = 2\lambda(2x + y) = 0 \Longrightarrow y = -2x$, $\lambda z = -1$ y además $2\lambda(y + z) = 0 \Longrightarrow y = -z$. Así se tiene $x = -\frac{1}{2}y = \frac{1}{2}z \Longrightarrow x^2 + 4x^2 + 4x^2 = 1$, o sea $9x^2 = 1 \Longrightarrow x = \pm\frac{1}{3}$, con lo cual tenemos como solución $(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, $\lambda = -\frac{3}{2}$ y $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$, $\lambda = \frac{3}{2}$.

Las derivadas de orden dos son $L_{xx} = 2\lambda$, $L_{yy} = 2\lambda$, $L_{zz} = 2\lambda$ y el gradiente de $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ es $(2x, 2y, 2z) \neq (0,0,0)$ en las soluciones.

El hessiano orlado es $H = \left(\begin{array}{ccc|c} 2\lambda & 0 & 0 & 2x \\ 0 & 2\lambda & 0 & 2y \\ 0 & 0 & 2\lambda & 2z \\ \hline 2x & 2y & 2z & 0 \end{array}\right)$, $H_2 = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 & 2x \\ 0 & 2\lambda & 2y \\ 2x & 2y & 0 \end{pmatrix}$.

— En $(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, $\lambda = -\frac{3}{2}$, $\det H_2 = \frac{20}{3}$, $\det H_3 = -36$ i.e. $(-1)^i \det H_i > 0$, $i = 2,3$ y es un máximo con valor 3.

— En $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$, $\lambda = \frac{3}{2}$, $\det H_2 = -\frac{20}{3}$, $\det H_3 = -36$, i.e. $(-1)^1 \det H_i > 0$, $i = 2,3$ y es un mínimo con valor -3.



La función f sobre la esfera se escribe $\varphi(x,y) = x - 2y \pm 2\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ y se quiere determinar los extremos de φ sobre el círculo $x^2 + y^2 \leq 1$. Así, $\varphi_x = 1 - \dfrac{\pm 2x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = 0$, $\varphi_y = -2 - \dfrac{\pm 2y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = 0 \Longrightarrow \sqrt{1 - x^2 - y^2} = \pm 2x = \mp y$ i.e. $2x = -y$, $\sqrt{1 - 4x^2 - x^2} = \pm 2x \Longrightarrow 1 - 5x^2 = 3x^2$, o sea $x = \pm\frac{1}{3}$, $y = \mp\frac{2}{3}$, $z = \mp\frac{2}{3}$.

Finalmente, las soluciones son $(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ cuando en φ se usa el $+$ y $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ cuando en φ se usa el $-$.

Las derivadas de orden dos son $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\pm 2(y^2 - 1)}{(1 - x^2 - y^2)^{3/2}}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\pm 2(x^2 - 1)}{(1 - x^2 - y^2)^{3/2}}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\mp 2xy}{(1 - x^2 - y^2)^{3/2}}$, por lo que el hessiano de φ es:

$$H(\tfrac{1}{3}, -\tfrac{2}{3}) = \begin{pmatrix} -\frac{15}{4} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -6 \end{pmatrix}, \text{ es definida negativa y tenemos un máximo}$$

$$H(-\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}) = \begin{pmatrix} \frac{15}{4} & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}, \text{ es definida positiva y tenemos un mínimo.}$$

47. Determinar los puntos de la curva que es la intersección de las dos superficies $g_1(x,y,z) = x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1$ y $g_2(x,y,z) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, que están más próximos al origen.

Solución Sea $L = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1(x^2 - xy + y^2 - z^2 - 1) + \lambda_2(x^2 + y^2 - 1)$, entonces

$L_x = 2x(1+\lambda_1+\lambda_2) - \lambda_1 y = 0$, $L_y = 2y(1+\lambda_1+\lambda_2) - \lambda_1 x = 0$, $L_z = 2z(1-\lambda_1) = 0$.

— Si $z = 0$, $x^2 + y^2 - xy = 1$, $x^2 + y^2 = 1 \Longrightarrow xy = 0 \Longrightarrow x = 0$ o $y = 0$.

— Si $x = 0$, $y = \pm 1$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$.

— Si $y = 0$, $x = \pm 1$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$.

— Si $z \neq 0$, $\lambda_1 = 1$, $2x(2+\lambda_2) = y$, $2y(2+\lambda_2) = x \Longrightarrow 4x(2+\lambda_2)^2 = x$.

— Si $x = 0 \Longrightarrow y = \pm 1$ y $y^2 - z^2 = 1 \Longrightarrow z = 0$ que es imposible.

Así $x \neq 0 \Longrightarrow 4(2+\lambda_2)^2 = 1 \Longleftrightarrow 4\lambda_2^2 + 16\lambda_2 + 15 = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}$.

— Si $\lambda_2 = -\frac{3}{2}$, $\lambda_1 = 1$, $2x(2-\frac{3}{2}) = x = y \Longrightarrow x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, $z^2 = -\frac{1}{2}$ que no puede ser.

— Si $\lambda_2 = -\frac{5}{2}$, $\lambda_1 = 1$, $2x(2-\frac{5}{2}) = -x = y \Longrightarrow x = -y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, $z^2 = \frac{1}{2}$.

Finalmente la soluciones son $(\pm 1, 0, 0)$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$; $(0, \pm 1, 0)$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$; $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\frac{5}{2}$; $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\frac{5}{2}$.

Las derivadas de orden dos son $L_{xx} = L_{yy} = 2(1+\lambda_1+\lambda_2)$, $L_{zz} = 2(1-\lambda_1)$, $L_{xy} = -\lambda_1$, $L_{xz} = 0$, $L_{yz} = 0$.

La matriz Jacobiana de las restricciones $\dfrac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(x, y, z)} = \begin{pmatrix} 2x-y & 2y-x & -2z \\ 2x & 2y & 0 \end{pmatrix}$ tiene rango 2 al evaluarse en las soluciones.

El hessiano orlado es $\left(\begin{array}{ccc|cc} 2(\lambda_1+\lambda_2+1) & -\lambda_1 & 0 & 2x-y & 2x \\ -\lambda_1 & 2(\lambda_1+\lambda_2+1) & 0 & 2y-x & 2y \\ 0 & 0 & -2(\lambda_1-1) & -2z & 0 \\ \hline 2x-y & 2y-x & -2z & 0 & 0 \\ 2x & 2y & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

– En $(0, \pm 1, 0)$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mp 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 2 & \pm 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \mp 1 & \pm 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\det H = 8$ y es un mínimo.

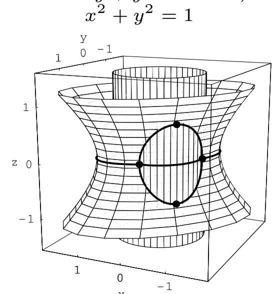
– En $(\pm 1,0,0)$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mp 2 & \mp 2 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \mp 2 & \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mp 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\det H = 8$ y es un mínimo.

– En $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\frac{5}{2}$, $H = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & \frac{3}{2}\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -1 & -1 & 0 & -\frac{3}{2}\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & \mp\sqrt{2} & 0 \\ \frac{3}{2}\sqrt{2} & -\frac{3}{2}\sqrt{2} & \mp\sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\det H = -16$ y en ambos casos hay un máximo.

– En $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\frac{5}{2}$, $H = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -\frac{3}{2}\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & -1 & 0 & \frac{3}{2}\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & \mp\sqrt{2} & 0 \\ -\frac{3}{2}\sqrt{2} & \frac{3}{2}\sqrt{2} & \mp\sqrt{2} & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\det H = -16$ y en ambos casos hay un máximo.

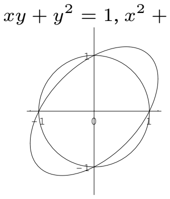
Los mínimos son $(0,\pm 1,0)$, $(\pm 1,0,0)$ de valor 1.

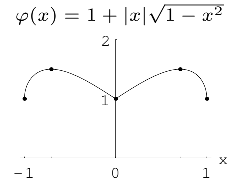
$x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1$,
$x^2 + y^2 = 1$



Por otro lado, la intersección de las superficies $x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1$ y $x^2 + y^2 - 1 = 0$, satisfacen $z = \pm\sqrt{-xy}$ y buscamos los extremos de $\varphi(x) = x^2 + y^2 + z^2 = 1 + z^2 = 1 - xy = 1 + |x|\sqrt{1-x^2}$, para $-1 \le x \le 1$, ya que $-xy \ge 0$, o sea cuando $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ se tiene $-xy = |x|\sqrt{1-x^2}$. Es suficiente analizar $\varphi(x)$ para $0 \le x \le 1$; la derivada es $\varphi'(x) = -\dfrac{2x^2-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \implies x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\varphi''(x) = \dfrac{x(2x^2-3)}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$, $\varphi(\frac{1}{\sqrt{2}}) < 0$ y es un máximo. Igualmente sucede con $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$x^2 - xy + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 1$





Además hay tres mínimos: $x = 0$, $x = \pm 1$.

Los puntos $\pm(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ son máximos.

Los puntos $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$ son mínimos.

48. Representar el número positivo a de manera que el producto de cuatro factores positivos sea de suma mínima.

Solución El problema se plantea de esta forma: minimizar $f(x, y, z, w) = x + y + z + w$ sujeta a la restricción $g(x, y, z, w) = xyzw - a = 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $w \geq 0$.

El Lagrangiano $L = x+y+z+w+\lambda(xyzw-a)$ tiene derivadas parciales $L_x = 1+\lambda yzw = 0$, $L_y = 1 + \lambda xzw = 0$, $L_z = 1 + \lambda xyw = 0$, $L_w = 1 + \lambda xyz = 0$, por lo que $\lambda \neq 0$, $y \neq 0$, $x \neq 0$, $z \neq 0$, $w \neq 0$. Restando dos ecuaciones tenemos $\lambda zw(x - y) = 0$, $\lambda xw(y - z) = 0$, $\lambda xy(w - z) = 0$, $\lambda yz(x - w) = 0 \Longrightarrow x = y = z = w = a^{\frac{1}{4}}$, $\lambda = -a^{-\frac{3}{4}}$.

Las derivadas de orden dos son $L_{xx} = L_{yy} = L_{zz} = L_{ww} = 0$, $L_{xy} = \lambda zw$, $L_{xz} = \lambda yw$, $L_{xw} = \lambda yz$, $L_{yz} = \lambda xw$, $L_{yw} = \lambda xz$, $L_{zw} = \lambda xy$.

Además $\dfrac{\partial g}{\partial(x, y, z, w)} = (yzw, xzw, xyw, xyz) \neq (0, 0, 0, 0)$ en la solución.

Desarrollando el hessiano orlado evaluado en $(\sqrt[4]{a}, \sqrt[4]{a}, \sqrt[4]{a}, \sqrt[4]{a})$ tenemos: $p = 1$, $i = 2, 3, 4$, $\det H_2 = \begin{vmatrix} 0 & -a^{\frac{5}{4}} & a^{\frac{3}{4}} \\ -a^{\frac{5}{4}} & 0 & a^{\frac{3}{4}} \\ a^{\frac{3}{4}} & a^{\frac{3}{4}} & 0 \end{vmatrix} = -2a^{\frac{11}{4}}$, $\det H_3 = \begin{vmatrix} 0 & -a^{\frac{5}{4}} & -a^{\frac{5}{4}} & a^{\frac{3}{4}} \\ -a^{\frac{5}{4}} & 0 & -a^{\frac{5}{4}} & a^{\frac{3}{4}} \\ -a^{\frac{5}{4}} & -a^{\frac{5}{4}} & 0 & a^{\frac{3}{4}} \\ a^{\frac{3}{4}} & a^{\frac{3}{4}} & a^{\frac{3}{4}} & 0 \end{vmatrix} = -3a^4$,

$\det H_4 = \begin{vmatrix} 0 & -a^{\frac{5}{4}} & -a^{\frac{5}{4}} & -a^{\frac{5}{4}} & a^{\frac{3}{4}} \\ -a^{\frac{5}{4}} & 0 & -a^{\frac{5}{4}} & -a^{\frac{5}{4}} & a^{\frac{3}{4}} \\ -a^{\frac{5}{4}} & -a^{\frac{5}{4}} & 0 & -a^{\frac{5}{4}} & a^{\frac{3}{4}} \\ -a^{\frac{5}{4}} & -a^{\frac{5}{4}} & -a^{\frac{5}{4}} & 0 & a^{\frac{3}{4}} \\ a^{\frac{3}{4}} & a^{\frac{3}{4}} & a^{\frac{3}{4}} & a^{\frac{3}{4}} & 0 \end{vmatrix} = -4a^{\frac{21}{4}}$, por lo que $(-1)^p \det H_i > 0$, $i = 2, 3, 4$ y $(a^{\frac{1}{4}}, a^{\frac{1}{4}}, a^{\frac{1}{4}}, a^{\frac{1}{4}})$, $\lambda = -a^{\frac{3}{4}}$ es un mínimo con restricciones. El valor mínimo es $4a^{\frac{1}{4}}$.

Por ejemplo si deseamos descomponer $20736 = 12{\cdot}12{\cdot}12{\cdot}12$ de forma que el mínimo es $4{\cdot}12 = 48$.

49. Descomponer un número positivo en tres sumandos positivos de modo que el producto sea máximo.

Solución El problema se va a resolver usando dos caminos distintos.

a) El problema planta maximizar $f(x,y,z) = xyz$ bajo la restricción $g(x,y,z) = x+y+z = a$, con $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

Si consideramos el Lagrangiano $L = xyz + \lambda(x+y+z-a)$, tenemos $L_x = yz + \lambda = 0$, $L_y = xz + \lambda = 0$, $L_z = xy + \lambda = 0 \Longrightarrow -\lambda = xy = xz = yz \Longrightarrow x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$, pues en caso contrario $x = y = z = 0$ que contradice $x + y + z = a > 0$. Así tenemos que $x = y = z = \frac{1}{3}a$, $\lambda = -\frac{1}{9}a^2$ y $\dfrac{\partial g}{\partial(x,y,z)} = (1,1,1) \neq (0,0,0)$.

Por otro lado $L_{xx} = 0$, $L_{xy} = z$, $L_{xz} = y$, $L_{yy} = 0$, $L_{yz} = x$, $L_{zz} = 0$. Como $p = 1$, se deben de calcular dos determinantes $i = 2,3$, con:

$$\det H_2 = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{3}a & 1 \\ \frac{1}{3}a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{2}{3}a, \quad \det H_3 = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{3}a & \frac{1}{3}a & 1 \\ \frac{1}{3}a & 0 & \frac{1}{3}a & 1 \\ \frac{1}{3}a & \frac{1}{3}a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}a^2.$$

Así tenemos $(-1)^i \det H_i > 0$, $i = 2,3$ y $\frac{1}{3}(a,a,a)$ es un máximo de $f(x,y,z)$ bajo la restricción $g(x,y,z)$. El valor es $\frac{1}{27}a^3$.

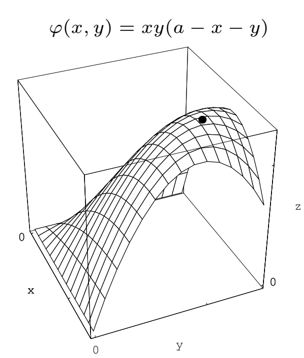
b) Sobre el conjunto $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x, y \leq a,\ 0 \leq x + y \leq a\}$, se busca maximizar la función $\varphi(x,y) = f(x,y,z(x,y)) = xy(a-x-y)$.

Las derivadas parciales son $f_x = y(a-2x-y) = 0$, $f_y = x(a-2y-x) = 0$ y tenemos que si $x = 0 \Longrightarrow y = 0$ o $y = a$.

– Si $x \neq 0$ y $y \neq 0 \Longrightarrow a - 2x - y = 0$, $a - 2y - x = 0 \Longrightarrow 3y = a$, $y = \frac{1}{3}a$, $x = \frac{1}{3}a$.

– Si $x \neq 0$ y $y = 0 \Longrightarrow x = a$.

Las soluciones son $(0,0)$, $(0,a)$, $(a,0)$, $(\frac{1}{3}a, \frac{1}{3}a)$. Las derivadas de orden dos son $f_{xx} = -2y$, $f_{xy} = a - 2x - 2y$, $f_{yy} = -2x$.



– En $(0,0)$, $H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ es indefinida (punto de silla).

– En $(0,a)$, $H(0,a) = \begin{pmatrix} -2a & -a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, $\Delta_1 = -2a < 0$, $\Delta_2 = -a^2 < 0$ (punto de silla).

– En $(a,0)$, $H(a,0) = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ -a & -2a \end{pmatrix}$ es indefinida (punto de silla).

– En $(\frac{1}{3}a, \frac{1}{3}a)$, $H(\frac{1}{3}a, \frac{1}{3}a) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}a & -\frac{1}{3}a \\ -\frac{1}{3}a & -\frac{2}{3}a \end{pmatrix}$, $\Delta_1 = -\frac{2}{3}a < 0$, $\Delta_2 = \frac{1}{3}a^2 \geq 0$ es un máximo con valor $f(\frac{1}{3}a, \frac{1}{3}a) = \frac{1}{27}a^3$. Queda por analizar la función en la frontera.

– En $(0,y)$, $f(0,y) = 0$.

– En $(x,0)$, $f(x,0) = 0$.

– En $(x, a-x)$, $f(x, a-x) = x(a-x)\cdot 0 = 0$.

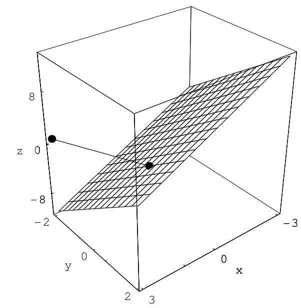
Finalmente el máximo de f es $\frac{1}{27}a^3$ en $(\frac{1}{3}a, \frac{1}{3}a)$.

50. Determinar el punto del plano $2x - 3y + z = 1$ más próximo al punto $(3, -2, 1)$.

Solución La distancia de un punto (x,y,z) del plano al punto $(3,-2,1)$, está dada por $f(x,y,z) = (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2$ sujeta a la restricción $g(x,y,z) = 2x - 3y + z - 1 = 0$, entonces el Lagrangiano es $L = (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 + \lambda(2x - 3y + z - 1)$, con $L_x = 2(x-3) + 2\lambda = 0$, $L_y = 2(y+2) - 3\lambda = 0$, $L_z = 2(z-1) + \lambda = 0 \Longrightarrow x = -\lambda + 3$, $y = -\frac{3}{2} + \lambda - 2$, $z = -\frac{1}{2}\lambda + 1 \Longrightarrow 2x - 3y + z - 1 = 0 = -7\lambda + 12$ i.e. $\lambda = \frac{12}{7}$, $x = \frac{9}{7}$, $y = \frac{4}{7}$, $z = \frac{1}{7}$. La matriz Jacobiana $\dfrac{\partial g}{\partial(x,y,z)} = (2,-3,1) \neq (0,0,0)$. Las derivadas de orden dos son $L_{xx} = 2$, $L_{xy} = 0$, $L_{xz} = 0$, $L_{yy} = L_{zz} = 2$ y el hessiano es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ \hline 2 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ \hline 2 & -3 & 0 \end{array}\right),$$

$$\det H_2 = -26, \quad \det H_3 = -56,$$



entonces como $p = 1$, $(-1)^p \det H_i > 0$, $i = 2, 3$ y tenemos un mínimo en $(\frac{9}{7}, \frac{4}{7}, \frac{1}{7})$. La distancia mínima es $\sqrt{f(\frac{9}{7}, \frac{4}{7}, \frac{1}{7})} = \sqrt{\frac{72}{7}} = 6\sqrt{\frac{2}{7}}$.

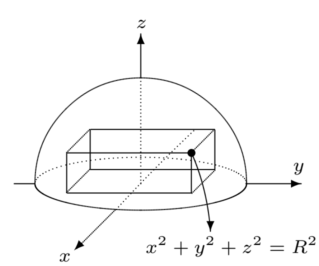
Otra manera de resolver el problema es minimizar la función $\phi(x, y) = (x-3)^2 + (y+2)^2 + (-2x+3y)^2$. Las derivadas parciales son $\phi_x = 2(x-3) + 4(2x-3y) = 2(5x-6y-3) = 0$, $\phi_y = 2(-6x+10y+2) = 0$ por lo que $x = \frac{9}{7}$, $y = \frac{4}{7}$, $z = \frac{1}{7}$.

Es claro que este punto $(\frac{9}{7}, \frac{4}{7})$ minimiza la función, pero es necesario verificarlo. Las derivadas de orden dos son $\phi_{xx} = 10$, $\phi_{yy} = 20$, $\phi_{xy} = -12$, por lo que el hessiano es $H = \begin{pmatrix} 10 & -12 \\ -12 & 20 \end{pmatrix}$, $\Delta_1 = 10 > 0$, $\Delta_2 = 56 > 0$ y se tiene un mínimo en $(\frac{9}{7}, \frac{4}{7})$.

Finalmente, el punto que minimiza la distancia del punto $(3, -2, 1)$ al plano $2x - 3y + z - 1 = 0$, es el punto $(\frac{9}{7}, \frac{4}{7}, \frac{1}{7})$. Ver ejercicio 67, página 201.

51. Determinar el volumen máximo de una caja de base rectangular inscrita en una semiesfera de radio R.

Solución Si colocamos la caja y la semi-esfera centradas en el origen, entonces el volumen será $f(x, y, z) = 4xyz$, con la restricción $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$. La función de Lagrange es $L = 4xyz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)$, entonces $L_x = 4yz + 2x\lambda = 0$, $L_y = 4xz + 2y\lambda = 0$,



$L_z = 4xy + 2z\lambda = 0$. Así, $\lambda \neq 0$, pues si no f tendríamos $x = y = z = 0$ que no está en la superficie de la esfera. De este modo $xL_x + yL_y + zL_z = 12xyz + 2\lambda(x^2 + y^2 + z^2) = 0 \Longrightarrow 6xyz = -\lambda R^2$. Además, $4yx = -2\lambda x = -\dfrac{2\lambda R^2}{3x} \Longrightarrow x^2 = \frac{1}{3}a^2$ i.e. $x = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$, $y = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$, $z = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$, $\lambda = -\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$. La matriz Jacobiana $\dfrac{\partial g}{\partial(x, y, z)} = (2x, 2y, 2z) \neq (0, 0, 0)$. Por otro lado,

$L_{xx} = 2\lambda = L_{yy} = L_{zz}$, $L_{xy} = 4z$, $L_{xz} = 4y$, $L_{yz} = 4x$,

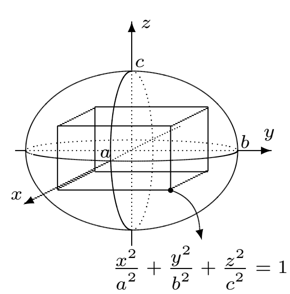
$$H = \left(\begin{array}{ccc|c} 2\lambda & 4z & 4y & 2x \\ 4z & 2\lambda & 4x & 2y \\ 4y & 4x & 2\lambda & 2z \\ \hline 2x & 2y & 2z & 0 \end{array}\right), \quad H = \frac{2\sqrt{3}}{3}a \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right), \quad |H| = -\frac{256}{3}a^4,$$

$$H_2 = \left(\begin{array}{cc|c} 2\lambda & 4z & 2x \\ 4z & 2\lambda & 2y \\ \hline 2x & 2y & 0 \end{array}\right), \quad H_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}a \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array}\right), \quad |H_2| = \frac{64\sqrt{3}}{9}a^3,$$

$(-1)^i \det H_i > 0$, $i = 2, 3$ y es un máximo.

Se pudo considerar maximizar $V = (2x)(2y)z$, donde $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. Así se maximiza $V(x, y) = 4xy\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, por lo que $\dfrac{\partial V}{\partial x} = \dfrac{4yR^2 - 8x^2y - 4y^3}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} = 0$, $\dfrac{\partial V}{\partial y} = \dfrac{4xR^2 - 8xy^2 - 4x^3}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} = 0$, o bien $y(R^2 - 2x^2 - y^2) = 0$, $x(R^2 - 2y^2 - x^2) = 0$.
Como $x > 0$ y $y > 0$ se tiene $2x^2 + y^2 = R^2 = 2y^2 + x^2 \implies x = y$ y se tiene $x = y = \frac{1}{3}\sqrt{3}R \implies z = x = y = \frac{1}{3}\sqrt{3}R$ y el volumen es $V = 4xyz = \frac{4}{9}\sqrt{3}R^3$.

52. Determine el volumen máximo de una caja de base rectangular inscrita en el elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.



Solución El volumen que queremos maximizar es $f(x, y) = 8xyz$, bajo la restricción $g(x, y, z) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, la función de Lagrange es $8xyz + \lambda\big(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1\big)$, por lo que $L_x = 8yz + 2\lambda\dfrac{x}{a^2} = 0$, $L_y = 8xz + 2\lambda\dfrac{y}{b^2} = 0$, $L_z = 8xy + 2\lambda\dfrac{z}{c^2} = 0$, $xL_x + yL_y + zL_z = 24xyz + 2\lambda \implies \lambda = -12xyz$,
$8yz = -2\lambda\dfrac{x}{a^2} = -\dfrac{2\lambda}{3x} \implies x^2 = \dfrac{a^2}{3} \implies x = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$. Similarmente, $y = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$, $z = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$, $\lambda = -\dfrac{4}{\sqrt{3}}abc$. La matriz jacobiana $\dfrac{\partial g}{\partial(x, y, z)} = \big(\dfrac{2x}{a^2}, \dfrac{2y}{b^2}, \dfrac{2z}{c^2}\big) \neq (0, 0, 0)$ en la solución.
Por otro lado, las derivadas de orden dos son $L_{xx} = \dfrac{2\lambda}{a^2}$, $L_{yy} = \dfrac{2\lambda}{b^2}$, $L_{zz} = \dfrac{2\lambda}{c^2}$, $L_{xy} = 8z$,

$L_{xz} = 8y$, $L_{yz} = 8x$ y el hessiano orlado es:

$$H = \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{2\lambda}{a^2} & 8z & 8y & \frac{2x}{a^2} \\ 8z & \frac{2\lambda}{b^2} & 8x & \frac{2y}{b^2} \\ 8y & 8x & \frac{2\lambda}{c^2} & \frac{2z}{c^2} \\ \hline \frac{2x}{a^2} & \frac{2y}{b^2} & \frac{2z}{c^2} & 0 \end{array}\right), \quad H = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{4bc}{a} & 4c & 4b & \frac{1}{a} \\ 4c & -\frac{4ac}{b} & 4a & \frac{1}{b} \\ 4b & 4a & -\frac{4ab}{c} & \frac{1}{c} \\ \hline \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} & 0 \end{array}\right),$$

$$\det H = -\frac{1024}{3}, \quad H_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\begin{array}{cc|c} -\frac{4bc}{a} & 4c & \frac{1}{a} \\ 4c & -\frac{4ac}{b} & \frac{1}{b} \\ \hline \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & 0 \end{array}\right), \quad \det H_2 = \frac{128\sqrt{3}c}{9ab},$$

con $(-1)^i \det H_i > 0$, $i = 2, 3$ y tenemos un máximo. Finalmente, las aristas valen $\frac{2a}{\sqrt{3}}$, $\frac{2b}{\sqrt{3}}$, $\frac{2c}{\sqrt{3}}$ y el volumen máximo es $\frac{8abc}{3\sqrt{3}}$.

El problema se puede resolver de otra manera, maximizando la función:

$$V(x, y) = 8xyc\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}},$$

por lo que $V_x = \dfrac{8cy\left(1 - \frac{2x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} = 0$, $V_y = \dfrac{8cx\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{2y^2}{b^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} = 0$ y como $x \neq 0$, $y \neq 0 \implies 1 = \frac{2x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{2y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} \implies \frac{x}{a} = \frac{y}{b} \implies 1 - \frac{3x^2}{a^2} = 0 \implies x = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $y = \frac{b}{\sqrt{3}} \implies z = \frac{c}{\sqrt{3}}$.

Las derivadas de orden dos son:

$V_{xx} = \dfrac{8bcxy(2b^2x^2 - 3a^2(b^2 - y^2))}{a(a^2b^2 - b^2x^2 - a^2y^2)^{\frac{3}{2}}}$, $V_{yy} = \dfrac{8acxy(3b^2x^2 + a^2(2y^2 - 3b^2))}{b(a^2b^2 - b^2x^2 - a^2y^2)^{\frac{3}{2}}}$,

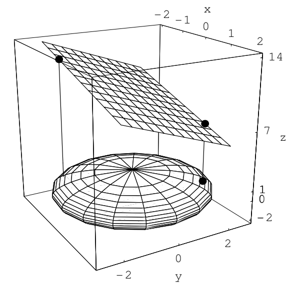
$V_{xy} = ab\left(\frac{8c}{ab}\sqrt{a^2b^2 - b^2x^2 - a^2y^2} - \dfrac{8c(b^2x^2 + a^2y^2)}{ab\sqrt{a^2b^2 - b^2x^2 - a^2y^2}} - \dfrac{8abcx^2y^2}{(a^2b^2 - b^2x^2 - a^2y^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$.

El hessiano es:

$$H = \begin{pmatrix} -\frac{32\sqrt{3}bc}{3a} & -\frac{16\sqrt{3}c}{3} \\ -\frac{16\sqrt{3}c}{3} & -\frac{32\sqrt{3}ac}{3b} \end{pmatrix}, \quad \Delta_1 = -\frac{32\sqrt{3}bc}{3a} < 0, \quad \Delta_2 = 256c^2,$$

con lo cual tenemos un máximo.

53. Determinar los puntos del elipsoide $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{8}+\frac{z^2}{4}=1$, cuya distancia al plano $x+y+z-10=0$ es máxima y mínima.



Solución Recordemos que la distancia de un punto al plano es $\frac{|x+y+z-10|}{\sqrt{3}}$ y como la distancia del origen al plano es $\frac{10}{\sqrt{3}}$ y la distancia del origen a un punto del elipsoide como máximo es $2\sqrt{2}$, se deben determinar los extremos de $f(x,y,z)=\frac{10-x-y-z}{\sqrt{3}}$ sujeta a la restricción $g(x,y,z)=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{8}+\frac{z^2}{4}-1=0$.

Sea $L=\frac{10-x-y-z}{\sqrt{3}}+\lambda\big(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{8}+\frac{z^2}{4}-1\big)$, entonces $L_x=-\frac{1}{\sqrt{3}}+\lambda\frac{x}{2}=0$, $L_y=-\frac{1}{\sqrt{3}}+\lambda\frac{y}{4}=0$, $L_z=-\frac{1}{\sqrt{3}}+\lambda\frac{z}{2}=0$.

Se observa que $\lambda\neq 0$, $x\neq 0$, $y\neq 0$, $z\neq 0$ y se tiene $x=\frac{1}{2}y=z$ por lo que $\frac{x^2}{4}+\frac{4x^2}{8}+\frac{x^2}{4}=x^2=1\Longrightarrow x=\pm 1$, $y=\pm 2$, $z=\pm 1$. Así se tiene $\lambda=\frac{2}{\sqrt{3}}$, $(1,2,1)$ y $\lambda=-\frac{2}{\sqrt{3}}$, $(-1,-2,-1)$. Se observa que para las soluciones, la matriz Jacobiana $\frac{\partial g}{\partial(x,y)}=\big(\frac{x}{2},\frac{y}{4},\frac{z}{2}\big)\neq(0,0,0)$.

Las condiciones de segundo orden son $L_{xx}=\frac{1}{2}\lambda$, $L_{yy}=\frac{1}{4}\lambda$, $L_{zz}=\frac{1}{2}\lambda$, $L_{xy}=L_{xz}=L_{yz}=0$.

El hessiano orlado es $H=\left(\begin{array}{ccc|c}\frac{1}{2}\lambda & 0 & 0 & \frac{1}{2}x\\ 0 & \frac{1}{4}\lambda & 0 & \frac{1}{4}y\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\lambda & \frac{1}{2}z\\ \hline \frac{1}{2}x & \frac{1}{4}y & \frac{1}{2}z & 0\end{array}\right)$, $H_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\lambda & 0 & \frac{1}{2}x\\ 0 & \frac{1}{4}\lambda & \frac{1}{4}y\\ \frac{1}{2}x & \frac{1}{4}y & 0\end{pmatrix}$, donde

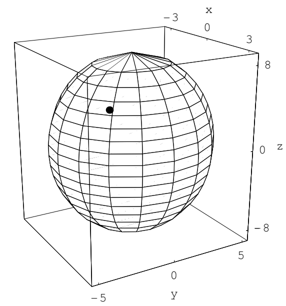
$\det H_2=-\frac{\lambda x^2}{16}-\frac{\lambda y^2}{32}$, $\det H=-\frac{\lambda^2x^2}{32}-\frac{\lambda^2(y^2+2z^2)}{64}$.

– En $(1,2,1)$, $\lambda=\frac{2}{\sqrt{3}}$, $\det H_2=-\frac{\sqrt{3}}{8}$, $\det H_3=-\frac{1}{6}$ i.e. $(-1)^1\det H_i>0$, $i=2,3$, por lo que $(1,2,1)$ es un mínimo y $f(1,2,1)=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$.

– En $(-1,-2,-1)$, $\lambda=-\frac{2}{\sqrt{3}}$, $\det H_2=\frac{\sqrt{3}}{8}$, $\det H_3=-\frac{1}{6}$ i.e. $(-1)^i\det H_i>0$, $i=2,3$, por lo que $(-1,-2,-1)$ es un máximo y $f(-1,-2,-1)=\frac{14}{\sqrt{3}}$.

54. Determinar el elipsoide de volumen mínimo con ejes en los ejes coordenados que pasa

por $(2,-3,5)$.



Solución El elipsoide debe satisfacer que $\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{9}{b^2}+\dfrac{25}{c^2}=1$ y su volumen es $8abc$. Así se debe minimizar $f(a,b,c)=8abc$, con la restricción $g(a,b,c)=\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{9}{b^2}+\dfrac{25}{c^2}=1$.

El Lagrangiano $L=8abc+\lambda\left(\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{9}{b^2}+\dfrac{25}{c^2}-1\right)$ satisface que: $L_a=8bc-\lambda\dfrac{8}{a^3}=0$, $L_b=8ac-\lambda\dfrac{18}{b^3}=0$, $L_c=8ab-\lambda\dfrac{50}{c^3}=0\Longrightarrow a^3bc=\lambda=\dfrac{4}{9}ab^3c=\dfrac{4}{25}abc^3\Longrightarrow$ $\dfrac{4abc}{\lambda}=\dfrac{4}{a^2}$, $\dfrac{4abc}{\lambda}=\dfrac{9}{b^2}$, $\dfrac{4abc}{\lambda}=\dfrac{25}{c^2}\Longrightarrow\dfrac{12abc}{\lambda}=1$, o sea $\lambda=12abc$. Así $a^3bc=12abc\Longrightarrow a^2=12$, $\dfrac{4}{9}ab^3c=12abc\Longrightarrow b^2=27$, $\dfrac{4}{25}abc^3=12abc\Longrightarrow c^2=75$, $\lambda=1080\sqrt{3}$. La matriz Jacobiana $\dfrac{\partial g}{\partial(a,b,c)}$ es de rango 1 en la solución.

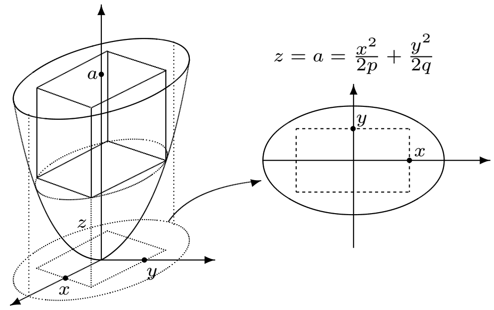
Las derivadas de orden 2 son: $L_{aa}=\dfrac{24\lambda}{a^4}$, $L_{bb}=\dfrac{54\lambda}{b^4}$, $L_{cc}=\dfrac{150\lambda}{c^4}$, $L_{ab}=8c$, $L_{ac}=8b$, $L_{bc}=8a$.

El hessiano orlado $H=\left(\begin{array}{ccc|c}\dfrac{24\lambda}{a^4} & 8c & 8b & -\dfrac{8}{a^3}\\ 8c & \dfrac{54\lambda}{b^4} & 8a & -\dfrac{9}{b^3}\\ 8b & 8a & \dfrac{150\lambda}{c^4} & -\dfrac{25}{c^3}\\ \hline -\dfrac{8}{a^3} & -\dfrac{9}{b^3} & -\dfrac{25}{c^3} & 0\end{array}\right)$, $H_2=\begin{pmatrix}\dfrac{24\lambda}{a^4} & 8c & -\dfrac{8}{a^3}\\ 8c & \dfrac{54\lambda}{b^4} & -9b^3\\ -\dfrac{8}{a^3} & -\dfrac{9}{b^3} & 0\end{pmatrix}$.

En $(2\sqrt{3},3\sqrt{3},5\sqrt{3})$, $\lambda=1080\sqrt{3}$, $\det H_2=-\dfrac{220\sqrt{3}}{81}$, $\det H_3=-\dfrac{1792}{9}$ y como $(-1)^1\det H_i>0$, para $i=2,3$, se tiene un mínimo, de valor $720\sqrt{3}$.

Finalmente el elipsoide de volumen mínimo es $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{27}+\dfrac{z^2}{75}=1$.

55. Un paraboloide elíptico de ecuación $\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}=z$, se corta por el plano $z=a$. Determinar el volumen del mayor paralelepípedo recto rectangular que se puede inscribir en esta figura.



Solución El problema plantea maximizar la función $f(x,y,z) = 4xy(a-z)$, sujeta a la restricción $g(x,y,z) = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} - z = 0$. La función de Lagrange es $L = 4xy(a-z) + \lambda\big(\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} - z\big)$, $L_x = 4y(a-z) + \lambda\frac{x}{p} = 0$, $L_y = 4x(a-z) + \lambda\frac{y}{q} = 0$, $L_z = -4xy - \lambda = 0$ $\Longrightarrow 2xy(a-z) = -\lambda\frac{x^2}{2p}$, $2xy(a-z) = -\lambda\frac{y^2}{2q}$, $\lambda = -4xy$, entonces tenemos que $4xy(a-z) = -\lambda(a-z) = -\lambda\big(\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}\big) = -\lambda z$, i.e. $a - z = z \Longrightarrow z = \frac{a}{2}$. Pero $4xy(a-z) = 2ay = -\lambda\frac{x}{p}$, $2ax = -\lambda\frac{y}{q} \Longrightarrow 2ay = \frac{\lambda}{p}\frac{\lambda y}{2aq} \Longrightarrow \lambda^2 = 4a^2pq$, o sea $\lambda = \pm 2a\sqrt{pq}$ y tomamos $\lambda = -2a\sqrt{pq}$, ya que $\lambda = -4xy$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. Así tenemos $4xy(a-z) = -\lambda\frac{x^2}{p} \Longrightarrow -\lambda\frac{a}{2} = -\lambda\frac{x^2}{p} \Longrightarrow x = \sqrt{\frac{ap}{2}}$, $y = \sqrt{\frac{aq}{2}}$, $z = \frac{a}{2}$, $\lambda = -2a\sqrt{pq}$. La matriz jacobiana $\frac{\partial g}{\partial(x,y,z)} = \big(\frac{x}{p}, \frac{y}{q}, -1\big) \neq (0,0,0)$. Las derivadas de orden dos son $L_{xx} = \frac{\lambda}{p}$, $L_{yy} = \frac{\lambda}{q}$, $L_{zz} = 0$, $L_{xy} = 4(a-z)$, $L_{xz} = -4y$, $L_{yz} = -4x$. El hessiano orlado es:

$$H = \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{\lambda}{p} & 4(a-z) & -4y & \frac{x}{p} \\ 4(a-z) & \frac{\lambda}{q} & -4x & \frac{y}{p} \\ -4y & -4x & 0 & -1 \\ \hline \frac{x}{p} & \frac{y}{q} & -1 & 0 \end{array}\right), \quad H_2 = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{\lambda}{p} & 4(a-z) & \frac{x}{p} \\ 4(a-z) & \frac{\lambda}{q} & \frac{y}{p} \\ \hline \frac{x}{p} & \frac{y}{q} & 0 \end{array}\right),$$

$$H = \left(\begin{array}{ccc|c} -2a\sqrt{\frac{q}{p}} & 2a & -2\sqrt{2aq} & \sqrt{\frac{a}{2p}} \\ 2a & -2a\sqrt{\frac{p}{q}} & -2\sqrt{2ap} & \sqrt{\frac{a}{2q}} \\ -2\sqrt{2aq} & -2\sqrt{2ap} & 0 & -1 \\ \hline \sqrt{\frac{a}{2p}} & \sqrt{\frac{a}{2q}} & -1 & 0 \end{array}\right), \quad H_2 = \left(\begin{array}{cc|c} -2a\sqrt{\frac{q}{p}} & 2a & \sqrt{\frac{a}{2p}} \\ 2a & -2a\sqrt{\frac{p}{q}} & \sqrt{\frac{a}{2q}} \\ \hline \sqrt{\frac{a}{2p}} & \sqrt{\frac{a}{2q}} & 0 \end{array}\right),$$

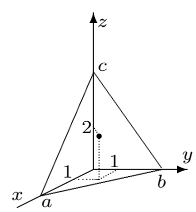
$\det H_2 = 4a^2$, $\det H_3 = -32a^2$, $(-1)^i \det H_i > 0$, $i = 2,3$ y tenemos un máximo.

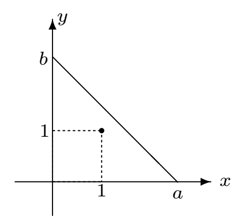
Se pudo resolver este problema considerando el volumen $V = 4xy\left(a - \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q}\right)$, por lo que $V_x = 4y\left(a - \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q}\right) - \frac{x}{p}4xy = 4y\left(a - \frac{3x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q}\right) = 0$, $V_y = 4x\left(a - \frac{x^2}{2p} - \frac{3}{2}\frac{y^2}{q}\right) = 0$. Si $y = 0 \Longrightarrow x = 0$ o $x = \sqrt{2ap}$. Si $x = 0 \Longrightarrow y = 0$ o $y = \sqrt{2aq}$. Así se tiene que $(0,0)$, $(0, \sqrt{2aq})$, $(\sqrt{2ap}, 0)$ son puntos críticos tales que $V = 0$ (i.e. es un mínimo).

Si $x \neq 0$, $y \neq 0$, $a - \dfrac{3x^2}{2p} = \dfrac{y^2}{2q} \Longrightarrow a - \dfrac{x^2}{2p} - 3\left(a - \dfrac{3}{2}\dfrac{x^2}{p}\right) = -2a - \dfrac{8x^2}{2p} \Longrightarrow \dfrac{x^2}{2p} = \dfrac{a}{4}$, $x = \sqrt{\dfrac{ap}{2}} \Longrightarrow y = \sqrt{\dfrac{aq}{2}}$, $z = \dfrac{a}{2}$, por lo que $V = 4\sqrt{\dfrac{ap}{2}}\sqrt{\dfrac{aq}{2}}\left(a - \dfrac{a}{2}\right) = a^2\sqrt{pq}$.
Queda por verificar que es un máximo. En efecto, las derivadas de orden dos: $V_{xx} = -\dfrac{12xy}{p}$, $V_{yy} = -\dfrac{12xy}{q}$, $V_{xy} = 4a - \dfrac{6x^2}{p} - \dfrac{6y^2}{q}$ y evaluando el hessiano en $(\sqrt{\dfrac{ap}{2}}, \sqrt{\dfrac{aq}{2}})$ es tal que $H = \begin{pmatrix} -6a\sqrt{\dfrac{p}{q}} & -2a \\ -2a & -6a\sqrt{\dfrac{q}{p}} \end{pmatrix}$, $\Delta_1 = -6a\sqrt{\dfrac{p}{q}} < 0$, $\Delta_2 = 32a^2 > 0$, lo que indica un máximo.

56. Por el punto $(1,1,2)$ pasa el plano que forma con los tres planos coordenados un tetraedro. Determinar las ecuaciones del plano, cuando el volumen del tetraedro formado es mínimo.

Solución Si consideramos que el plano tiene por ecuación $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, entonces $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{2}{c} = 1$. De esta forma el problema se transforma en determinar el volumen $V = \dfrac{1}{6}abc$ bajo la restricción $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{2}{c} = 1$.





El Lagrangiano $L = \dfrac{1}{6}abc + \lambda\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{2}{c} - 1\right)$ y se tiene que: $L_a = \dfrac{1}{6}bc - \dfrac{\lambda}{a^2} = 0$, $L_b = \dfrac{1}{6}ac - \dfrac{\lambda}{b^2} = 0$, $L_c = \dfrac{1}{6}ab - \dfrac{2\lambda}{c^2} = 0 \Longrightarrow \dfrac{1}{6}abc = \dfrac{\lambda}{a} = \dfrac{\lambda}{b} = \dfrac{2\lambda}{c} \Longrightarrow \lambda\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{2}{c}\right) = \dfrac{abc}{2}$, por lo que $\dfrac{1}{6}bc = \dfrac{abc}{2a^2} \Longrightarrow a = 3$, $b = 3$, $c = 6$, $\lambda = 27$. Así $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{6} = 1 \Longrightarrow 2x + 2y + z - 6 = 0$ y $V = \dfrac{1}{6}(3)(3)(6) = 9$. Queda por verificar que la solución es un mínimo.
En efecto, $V_{aa} = \dfrac{2\lambda}{a^3}$, $V_{bb} = \dfrac{2\lambda}{b^3}$, $V_{cc} = \dfrac{4\lambda}{c^3}$, $V_{ab} = \dfrac{1}{6}c$, $V_{ac} = \dfrac{1}{6}b$, $V_{bc} = \dfrac{1}{6}a$.

El hessiano orlado es: $H = \left(\begin{array}{ccc|c} \dfrac{2\lambda}{a^3} & \dfrac{1}{6}c & \dfrac{1}{6}b & -\dfrac{1}{a^2} \\ \dfrac{1}{6}c & \dfrac{2\lambda}{b^3} & \dfrac{1}{6}a & -\dfrac{1}{b^2} \\ \dfrac{1}{6}b & \dfrac{1}{6}a & \dfrac{4\lambda}{c^3} & -\dfrac{2}{c^2} \\ \hline -\dfrac{1}{a^2} & -\dfrac{1}{b^2} & -\dfrac{2}{c^2} & 0 \end{array}\right)$, $H_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{2\lambda}{a^3} & \dfrac{1}{6}c & -\dfrac{1}{a^2} \\ \dfrac{1}{6}c & \dfrac{2\lambda}{b^3} & -\dfrac{1}{b^2} \\ -\dfrac{1}{a^2} & -\dfrac{1}{b^2} & 0 \end{pmatrix}$.

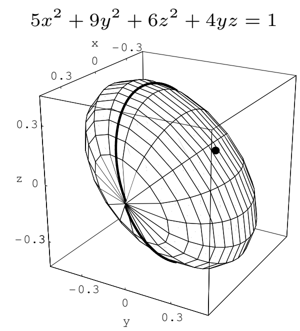
En $(3,3,6)$, $\lambda = 27$ se tiene $H_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -\frac{1}{9} \\ 1 & 2 & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & 0 \end{pmatrix}$, $H_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{9} \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{18} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{18} & 0 \end{pmatrix}$,

$\det H_2 = -\frac{2}{81}$, $\det H_3 = -\frac{1}{108}$. Ahora como $(-1)^1 \det H_i > 0$, $i = 2, 3$, se tiene que $(3, 3, 6)$ es un mínimo.

57. Determinar los extremos de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ bajo la restricción $g(x, y, z) = 5x^2 + 9y^2 + 6z^2 + 4yz - 1 = 0$.

Solución El problema se puede interpretar como la mayor y menor distancias al origen del elipsoide $5x^2 + 9y^2 + 6z^2 + 4yz - 1 = 0$. Derivando el Lagrangiano $L = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(5x^2 + 9y^2 + 6z^2 + 4yz - 1)$ se tiene: $L_x = 2x(1 + 5\lambda) = 0$, $L_y = 2(y(1 + 9\lambda) + 2\lambda z) = 0$, $L_z = 2(z(1 + 6\lambda) + 2\lambda y) = 0$.

— Si $x \neq 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{1}{5}$, $z = -2y$ y como $5x^2 + 9y^2 + 6z^2 + 4yz - 1 = 0$ se tiene $5x^2 + 25y^2 = 1$, o sea $x = \pm\sqrt{\frac{1}{5} - 5y^2}$, $z = -2y$, $-\frac{1}{5} \leq y \leq \frac{1}{5}$.



—Si $x = 0$, entonces si $y = 0 \Longrightarrow z = 0$, pero $(0, 0, 0)$ no satisface g. Así, $y \neq 0$ y $z \neq 0 \Longrightarrow z = (1 + 6\lambda) = \dfrac{-2\lambda(-2\lambda z)}{1 + 9\lambda} \Longrightarrow (1+6\lambda)(1+9\lambda) = 4\lambda^2$ i.e. $50\lambda^2 + 15\lambda + 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{1}{5}$, o $\lambda = -\frac{1}{10}$.

— Si $\lambda = -\frac{1}{5} \Longrightarrow z = -2y$ y tenemos $y = \pm\frac{1}{5}$, $z = \mp\frac{2}{5}$.

— Si $\lambda = -\frac{1}{10}$ se tiene $y = 2z$, por lo que $50z^2 = 1 \Longrightarrow z = \pm\sqrt{\frac{1}{50}}$, $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{5}$, $x = 0$.

En resumen tenemos las soluciones $\lambda = -\frac{1}{10}$, $\pm(0, \frac{\sqrt{2}}{5}, \frac{1}{5\sqrt{2}})$, y las soluciones $\lambda = -\frac{1}{5}$, $(\pm\sqrt{\frac{1}{5} - 5y^2}, y, -2y)$, $-\frac{1}{5} \leq y \leq \frac{1}{5}$ (círculo de radio $\frac{1}{\sqrt{5}}$).

Las derivadas de segundo orden de L y las derivadas parciales de g son: $L_{xx} = 2 + 10\lambda$, $L_{xy} = 0$, $L_{xz} = 0$, $g_x = 10x$, $L_{xy} = 0$, $L_{yy} = 2 + 18\lambda$, $L_{yz} = 4\lambda$, $g_y = 18y + 4z$, $L_{zx} = 0$, $L_{zy} = 4\lambda$, $L_{zz} = 2 + 12\lambda$, $g_z = 12z + 4y$. El hessiano orlado es:

$$H = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 + 10\lambda & 0 & 0 & 10x \\ 0 & 2 + 18\lambda & 0 & 18y + 4z \\ 0 & 0 & 2 + 12\lambda & 12z + 4y \\ \hline 10x & 18y + 4z & 12z + 4y & 0 \end{array}\right).$$

— En $\pm(0, \frac{\sqrt{2}}{5}, \frac{1}{5\sqrt{2}})$, $\lambda = -\frac{1}{10}$,

$$H = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & \pm\frac{13\sqrt{2}}{5} \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} & \pm\frac{14\sqrt{2}}{5} \\ \hline 0 & \pm\frac{13\sqrt{2}}{5} & \pm\frac{14\sqrt{2}}{5} & 0 \end{array}\right), \quad H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & \pm\frac{13\sqrt{2}}{5} \\ 0 & \pm\frac{13\sqrt{2}}{5} & 0 \end{pmatrix},$$

$\det H_2 = -\frac{338}{25}$, $\det H_3 = -\frac{1744}{25}$, $(-1)^1 \det H_i > 0$, $i = 2, 3$ es un mínimo de valor $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

— En $(\pm\sqrt{\frac{1}{5} - 5y^2}, y, -2y)$, $\lambda = -\frac{1}{5}$, $-\frac{1}{5} \leq y \leq \frac{1}{5}$,

$$H = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & \pm 2\sqrt{5}\sqrt{\frac{1}{5} - 5y^2} \\ 0 & -\frac{8}{5} & 0 & 10y \\ 0 & 0 & -\frac{2}{5} & -20y \\ \hline \pm 2\sqrt{5}\sqrt{\frac{1}{5} - 5y^2} & 10y & -20y & 0 \end{array}\right),$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \pm 2\sqrt{5}\sqrt{\frac{1}{5} - 5y^2} \\ 0 & -\frac{8}{5} & 10y \\ \pm 2\sqrt{5}\sqrt{\frac{1}{5} - 5y^2} & 10y & 0 \end{pmatrix},$$

$\det H_2 = 32(1 - 25y^2)$, $\det H_3 = -\dfrac{64}{5}(1 - 25y^2)$, $(-1)^i \det H_i > 0$, $-\frac{1}{5} < y < \frac{1}{5}$, por lo que se tiene un máximo de valor $\frac{1}{5}$.

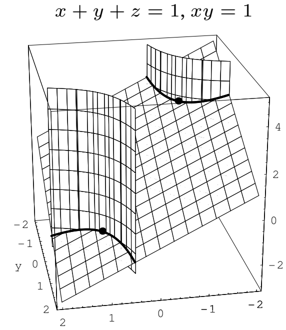
En $y = \pm\frac{1}{5}$, también son máximos aunque $\det H_i = 0$, $i = 2, 3$.

58. Determinar los extremos de la función $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, bajo las restricciones $g(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0$, $h(x, y, z) = xy - 1 = 0$.

Solución La función de Lagrange es $L(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1(x + y + z - 1) + \lambda_2(xy - 1)$.

Derivando, $L_x = 2x + \lambda_1 + \lambda_2 y = 0$, $L_y = 2y + \lambda_1 + \lambda_2 x = 0$, $L_z = 2z + \lambda_1 = 0$, por lo que $2(x - y) + \lambda_2(y - x) = (y - x)(\lambda_2 - 2) = 0$.

$x + y + z = 1,\ xy = 1$



— Si $y = x \Longrightarrow x^2 = 1$, o sea $x = \pm 1$.

— Si $x = 1 \Longrightarrow y = 1$, $z = -1 \Longrightarrow \lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -4$.

— Si $x = -1$, $y = -1$, $z = 3 \Longrightarrow \lambda_1 = -6$, $\lambda_2 = -8$.

— Si $x \neq y \Longrightarrow \lambda_2 = 2$, entonces $\lambda_1 = -2(x+y)$, $\lambda_1 = -2z$, pero $x+y+z=1$ y $x+y-z=0 \Longrightarrow \lambda_1 = -1$, $z=\frac{1}{2}$, $x+y=\frac{1}{2}$. Así, $x(\frac{1}{2}-x)=1$ y la ecuación $2x^2-x+2=0$ no tiene solución. De esta forma $x=y$ y los puntos críticos son $(1,1,-1)$, $\lambda_1=-4$, $\lambda_2=2$ y $(-1,-1,3)$, $\lambda_1=-4$, $\lambda_2=-6$.

Por otro lado $\dfrac{\partial(g,h)}{\partial(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & x & 0 \end{pmatrix}$ es de rango 2, para las soluciones encontradas.

Las derivadas de segundo orden son: $L_{xx}=2$, $L_{xy}=\lambda_2$, $L_{xz}=0$, $L_{xy}=\lambda_2$, $L_{yy}=2$, $L_{yz}=0$, $L_{xz}=0$, $L_{yz}=0$, $L_{zz}=2$, el hessiano orlado es:

$H = \left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & \lambda_2 & 0 & 1 & y \\ \lambda_2 & 2 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ y & x & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ y el determinante $\det H = 4x^2 - 2xy(\lambda_2+2) + 4y^2$.

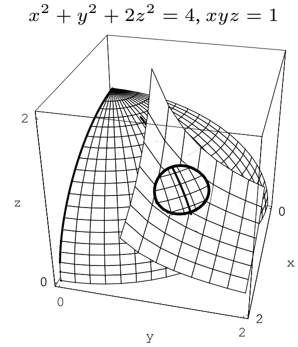
— En $(1,1,-1)$, $\lambda_1=2$, $\lambda_2=-4$, $\det H = 4-2\lambda_2 = 12 > 0$ y como $(-1)^2 \det H_3 > 0$ es un mínimo, de valor $f(1,1,-1)=3$.

— En $(-1,-1,3)$, $\lambda_1=-4$, $\lambda_2=-6$, $\det H = 4-2\lambda_2 = 16$ y como $(-1)^2\det H_3 > 0$ es un mínimo, de valor $f(-1,-1,1)=11$.

Este problema se pudo haber resuelto de otra forma. En efecto, por las restricciones se tiene $y=\frac{1}{x}$ y $z=1-x-\frac{1}{x}$, por lo que $\Phi(x) = f(x,y,z) = \dfrac{2x^4-2x^3+3x^2-2x+2}{x^2}$, $\Phi'(x) = \dfrac{2(2x^4-x^3+x-2)}{x^3}$ y $\Phi'(1)=0$. Así, $\Phi''(x) = \dfrac{4(x^4-x+3)}{x^4}$ y como $\Phi''(1)=12>0$ se tiene un mínimo en $(1,1,-1)$. Además $\Phi'(-1)=0$, $\Phi''(-1)=20>0$ y $(-1,-1,3)$ es un mínimo.

59. Determinar los extremos de $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ sobre $\mathbb{R}^3$, bajo las restricciones $g(x,y,z) = x^2+y^2+2z^2-4=0$, $h(x,y,z) = xyz-1=0$.

Solución Sea $L = x^2+y^2+z^2+\lambda_1(x^2+y^2+2z^2-4)+\lambda_2(xyz-1)$, entonces $L_x = 2x+2\lambda_1 x+\lambda_2 yz = 0$, $L_y = 2y+2\lambda_1 y+\lambda_2 xz=0$, $L_z = 2z+4\lambda_1 z+\lambda_2 xy = 0 \Longrightarrow (x^2-y^2)(1+\lambda_1)=0$.



Si $x^2 \neq y^2$ se tiene que $\lambda_1 = -1 \Longrightarrow \lambda_2 yz = 0 \Longrightarrow \lambda_2 xyz = \lambda_2 = 0$ y $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$, pues $xyz = 1 \neq 0$. Así tenemos: $2z(1 + 2\lambda_1) + \lambda_2 xy = 2z(1 + 2\lambda_1) = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = -\frac{1}{2}$ que es una contradicción. Así, $x^2 = y^2$ y como $x^2y^2z^2 = 1$ se tiene $x^2 + z^2 = 2$, $x^4(2 - x^2) - 1 = -x^6 + 2x^4 - 1 = 0$ i.e. $x^6 - 2x^4 + 1 = 0$.

Consideremos la ecuación $y^3 - 2y^2 + 1 = 0$, $y = 1$ es solución, por lo que $y^3 - 2y^2 + 1 = (y^2-y+1)(y-1) = (y-a)(y-b)(y-1) = 0$, con $a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $b = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$. Pero $y = x^2 > 0$, por lo que se elimina la solución b. Las soluciones satisfacen $x^2 = 1$, $x^2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x^2 = y^2$, $z^2 = 2 - x^2$, $xyz > 0$ y se tiene (si llamamos α una solución del sistema): $2\alpha^2(1 + \lambda_1) + \lambda_2 = 0$, $2(2 - \alpha^2)(1 + 2\lambda_1) + \lambda_2 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \dfrac{2(\alpha^2 - 1)}{4 - 3\alpha^2}$, $\lambda_2 = -\dfrac{2\alpha^2(2 - \alpha^2)}{4 - 3\alpha^2}$.

Las derivadas de orden dos de L y las derivadas de orden uno de las restricciones son: $L_{xx} = 2 + 2\lambda_1$, $L_{xy} = \lambda_2 z$, $L_{xz} = \lambda_2 y$, $L_{yy} = 2 + 2\lambda_1$, $L_{yz} = \lambda_2 x$, $L_{zz} = 2 + 4\lambda_1$, $g_x = 2x$, $g_y = 2y$, $g_z = 4z$, $h_x = yz$, $h_y = xz$, $h_z = xy$.

El hessiano orlado es $H = \left(\begin{array}{ccc|cc} 2+2\lambda_1 & \lambda_2 z & \lambda_2 y & 2x & yz \\ \lambda_2 z & 2+2\lambda_1 & \lambda_2 x & 2y & xz \\ \lambda_2 y & \lambda_2 x & 2+4\lambda_1 & 4z & xy \\ \hline 2x & 2y & 4z & 0 & 0 \\ yz & xz & xy & 0 & 0 \end{array}\right)$.

Observemos que la matriz Jacobiana $\dfrac{\partial(g,h)}{\partial(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 4z \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}$ tiene rango 2, pues si bien las dos primeras columnas son iguales en las soluciones, no es así para la primera y la tercera columnas pues: $\det \begin{pmatrix} 2x & 4z \\ yz & xy \end{pmatrix} = 2x^2y - 4yz^2 = 2y(x^2 - 2(2 - x^2)) = -2y(4 - 3x^2) \neq 0$, para cualquier solución $x = \alpha$.

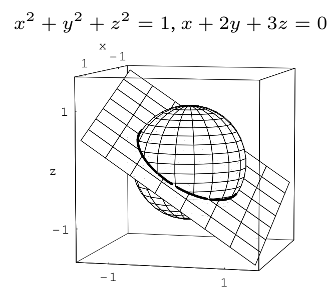
Las soluciones evaluadas en los determinantes de los hessianos orlados son:

	$\alpha = 1$	$\alpha = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$
$(\alpha, \alpha, \sqrt{2-\alpha^2})$	32	$64\sqrt{5} - 160 < 0$
$(-\alpha, -\alpha, \sqrt{2-\alpha^2})$	32	$64\sqrt{5} - 160 < 0$
$(-\alpha, \alpha, -\sqrt{2-\alpha^2})$	32	$64\sqrt{5} - 160 < 0$
$(\alpha, -\alpha, -\sqrt{2-\alpha^2})$	32	$64\sqrt{5} - 160 < 0$

por lo que para $\alpha = 1$, los puntos son mínimos de valor 2 y para $\alpha = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$, los puntos son máximos de valor $\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$.

60. Determinar los extremos de la función $f(x,y,z) = x+y+z$ sobre $\mathbb{R}$, bajo las restricciones $g(x,y,z) = (x-4)+2(y-2)+3(z-3) = 0$, $h(x,y,z) = (x-4)^2+(y-2)^2+(z-3)^2-1 = 0$.

Solución Sea $L(x,y,z) = x+y+z-9+\lambda_1(x+2y+3z)+\lambda_2(x^2+y^2+z^2-1)$ el Lagrangiano de la función $f(x,y,z)$, trasladando el origen a $(4,2,3)$. Las derivadas parciales de L son $L_x = 1+\lambda_1+2\lambda_2 x = 0$, $L_y = 1+2\lambda_1+2\lambda_2 y = 0$, $L_z = 1+3\lambda_1+2\lambda_2 z = 0$ y sumando $L_x + 2L_y + 3L_z = 6+14\lambda_1 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = -\frac{3}{7}$, por lo que $\lambda_2 x = -\frac{2}{7}$, $\lambda_2 y = -\frac{1}{14}$, $\lambda_2 z = \frac{1}{7}$; esto nos indica $\lambda_2 \neq 0$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$.



Por otro lado, $1 = x^2+y^2+z^2 = \dfrac{4}{49\lambda_2^2} + \dfrac{1}{14^2\lambda_2^2} + \dfrac{1}{49\lambda_2^2} \Longrightarrow \lambda_2 = \pm\frac{\sqrt{21}}{14}$, con lo cual tenemos las soluciones: $-\frac{1}{\sqrt{21}}(4,1,-2)$, $\lambda_1 = -\frac{3}{7}$, $\lambda_2 = \frac{\sqrt{21}}{14}$; $\frac{1}{\sqrt{21}}(4,1,-2)$, $\lambda_1 = -\frac{3}{7}$, $\lambda_2 = -\frac{\sqrt{21}}{14}$.

La matriz Jacobiana de las restricciones $\dfrac{\partial(g,h)}{\partial(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$ es de rango 2 y las derivadas de segundo orden son $L_{xx} = 2\lambda_2$, $L_{xy} = 0$, $L_{xz} = 0$, $L_{yy} = 2\lambda_2$, $L_{yz} = 0$, $L_{zz} = 2\lambda_2$. El hessiano orlado es:

$$H = \left(\begin{array}{ccc|cc} 2\lambda_2 & 0 & 0 & 1 & 2x \\ 0 & 2\lambda_2 & 0 & 2 & 2y \\ 0 & 0 & 2\lambda_2 & 3 & 2z \\ \hline 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2x & 2y & 2z & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$\det H = 8\lambda_2(13x^2 - 4xy - 6xz + 10y^2 - 12yz + 5z^2)$.

— En $(\frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{1}{\sqrt{21}}, -\frac{2}{\sqrt{21}})$, $\lambda_1 = -\frac{3}{7}$, $\lambda_2 = -\frac{\sqrt{21}}{14}$, $\det H = 112\lambda_2 = -8\sqrt{21}$ y es un máximo.

El máximo de la función original es $9 + \frac{3}{\sqrt{21}}$.

— En $(-\frac{4}{\sqrt{21}}, -\frac{1}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}})$, $\lambda_1 = -\frac{3}{7}$, $\lambda_2 = \frac{\sqrt{21}}{14}$, $\det H = 112\lambda_2 = 8\sqrt{21}$ y es un mínimo.

El mínimo de la función original es $9 - \frac{3}{\sqrt{21}}$.

61. Determinar los extremos de $f(x,y,z) = xyz$ sobre $\mathbb{R}^3$, bajo las restricciones $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 < 1$ y $h(x,y,z) = 1 - 2\operatorname{sen}(x^2+y^2+z^2) = 0$.

Solución Observamos que las condiciones $x^2+y^2+z^2<1$ y $1-2\operatorname{sen}(x^2+y^2+z^2)=0$ es equivalente a la condición $g^*(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-\frac{1}{6}\pi = 0$, por lo que tenemos una sola restricción. El Lagrangiano es $L = xyz + \lambda(x^2+y^2+z^2-\frac{1}{6}\pi)$ y las derivadas parciales son $L_x = yz + 2x\lambda = 0$, $L_y = xz + 2y\lambda = 0$, $L_z = xy + 2z\lambda = 0$.

Si $\lambda = 0 \implies x = y = z = 0$, pero no es solución del sistema, por lo que $\lambda \neq 0$. Así $2x^2\lambda = 2y^2\lambda = 2z^2\lambda = -xyz$, o sea $x^2 = y^2 = z^2 \implies 3x^2 = \frac{1}{6}\pi$, $x^2 = \frac{1}{18}\pi$ y $\lambda = -\dfrac{yz}{2x}$. Las derivadas de orden dos son $L_{xx} = 2\lambda$, $L_{xy} = z$, $L_{xz} = y$, $L_{yy} = 2\lambda$, $L_{yz} = x$, $L_{zz} = 2\lambda$.

El hessiano orlado $H = \left(\begin{array}{ccc|c} 2\lambda & z & y & 2x \\ z & 2\lambda & x & 2y \\ y & x & 2\lambda & 2z \\ \hline 2x & 2y & 2z & 0 \end{array}\right)$, $H_2 = \begin{pmatrix} 2\lambda & z & 2x \\ z & 2\lambda & 2y \\ 2x & 2y & 0 \end{pmatrix}$,

$\det H_2 = -8(\lambda x^2 - xyz + \lambda y^2)$,

$\det H = 4(x^4 - 2x^2(y^2+z^2+2\lambda^2) + 12\lambda xyz + y^4 - 2y^2(z^2+2\lambda^2) + z^2(z^2-\lambda^2))$.

Si $x^2 = y^2 = z^2$, $\det H = -12\lambda^2(x^2 - 4(\pm x)\lambda + 4\lambda^2) = -12x^2(\pm x - 2\lambda)^2$. La matriz Jacobiana $\dfrac{\partial g^*}{\partial(x,y,z)} = (2x, 2y, 2z) \neq (0,0,0)$ y es de rango 1. Al evaluar los determinantes de los hessianos orlados se tiene $\det H_2 = \pm\frac{4\sqrt{2}}{27}\pi^{3/2}$, $\det H_3 = \mp\frac{4}{27}\pi^2$, según sean los puntos $(\pm c, \pm c, \pm c)$, $\lambda = \pm\frac{1}{2}c$, $c = \sqrt{\frac{\pi}{18}}$. Los resultados se resumen es la siguiente tabla:

$c=\sqrt{\frac{\pi}{18}}$	λ	$\det H_2$	$\det H_3$
(c,c,c)	$-\frac{1}{2}c$	$+$	$-$
$(c,c,-c)$	$\frac{1}{2}c$	$-$	$-$
$(-c,c,c)$	$\frac{1}{2}c$	$-$	$-$
$(c,-c,c)$	$\frac{1}{2}c$	$-$	$-$
$(-c,-c,c)$	$-\frac{1}{2}c$	$+$	$-$
$(-c,c,-c)$	$-\frac{1}{2}c$	$+$	$-$
$(c,-c,-c)$	$-\frac{1}{2}c$	$+$	$-$
$(-c,-c,-c)$	$\frac{1}{2}c$	$-$	$-$

Así se tiene que la solución (c,c,c), $\lambda=-\frac{1}{2}c$, con $c=\sqrt{\frac{\pi}{18}}$ tal que $\det H_2=\frac{4\sqrt{2}}{27}\pi^{3/2}$, $\det H^3=-\frac{4}{27}\pi^2$, pero como $p=1$, $(-1)^i\det H_i>0$, $i=2,3$ y se tiene un máximo.

Similarmente la solución $(-c,-c,-c)$, $\lambda=\frac{1}{2}c$, con $c=\sqrt{\frac{\pi}{18}}$, es tal que $\det H_2=-\frac{4\sqrt{2}}{27}\pi^{3/2}$, $\det H_3=-\frac{4}{27}\pi^2$ y como $p=1$, $(-1)^1\det H_i>0$, $i=2,3$ y se tiene un mínimo.

Finalmente los máximos son (c,c,c), $(-c,-c,c)$, $(-c,c,-c)$, $(c,-c,-c)$, con $c=\sqrt{\frac{\pi}{18}}$ y los mínimos son $(c,c,-c)$, $(-c,c,c)$, $(c,-c,c)$, $(-c,-c,-c)$, con $c=\sqrt{\frac{\pi}{18}}$. Además: $f(c,c,c)=f(-c,-c,c)=f(-c,c,-c)=f(c,-c,-c)=\frac{1}{54}\pi\sqrt{\frac{1}{2}\pi}$ y $f(c,c,-c)=f(-c,c,c)=f(c,-c,c)=f(-c,-c,-c)=-\frac{1}{54}\pi\sqrt{\frac{1}{2}\pi}$.

62. Determinar los puntos extremos de la función $f(x,y,z)=xy+xz+yz$ bajo la restricción $g(x,y,z)=x^2+y^2-z^2-1=0$.

Solución El Lagrangiano es $L=xy+xz+yz+\lambda(x^2+y^2-z^2-1)$, por lo que $L_x=y+z+2\lambda x=0$, $L_y=x+z-2\lambda y=0$, $L_z=x+y-2\lambda z=0\Longrightarrow(1-2\lambda)(x-y)=0\Longrightarrow x=y$ o $\lambda=\frac{1}{2}$.

Si $x=y$, $x-\lambda z=0$, $x+z+2\lambda x=0\Longrightarrow z(2\lambda^2+\lambda+1)=0$ y las soluciones $\lambda\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, que no puede ser. Así, $x\neq y\Longrightarrow\lambda=\frac{1}{2}$, $y+x+z=0$, $y+x-z=0\Longrightarrow x+y=0$, $z=0\Longrightarrow 2x^2=1\Longrightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}$, $z=0$.

La matriz Jacobiana $\dfrac{\partial g}{\partial(x,y,z)}=(2x,2y,2z)\neq(0,0,0)$ en las soluciones. Las derivadas de orden dos son $L_{xx}=2\lambda$, $L_{xy}=1$, $L_{xz}=1$, $L_{yy}=2\lambda$, $L_{yz}=1$, $L_{zz}=-2\lambda$ y el hessiano orlado es: $H = \left(\begin{array}{ccc|c} 2\lambda & 1 & 1 & 2x \\ 1 & 2\lambda & 1 & 2y \\ 1 & 1 & -2\lambda & 2z \\ \hline 2x & 2y & 2z & 0 \end{array}\right)$, $H_2 = \begin{pmatrix} 2\lambda & 1 & 2x \\ 1 & 2\lambda & 2y \\ 2x & 2y & 0 \end{pmatrix}$ de modo que $\det H_2 = -8(\lambda x^2 - xy + \lambda y^2)$,

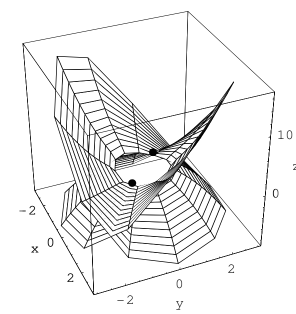
$\det H = 4(x^2(4\lambda^2+1) - 2x(y(2\lambda+1) + z(1-2\lambda) + y^2(4\lambda^2+1) + 2yz(2\lambda-1) + z^2(1-4\lambda^4))$.

— En $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $\det H_2 = -8 < 0$, $\det H_3 = 16 > 0$ y no es máximo ni mínimo.

— En $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $\det H_2 = -8 < 0$, $\det H_3 = 16 > 0$ y no es máximo ni mínimo.

Se pudo tratar de resolver este problema usando la función $\varphi(x,y) = xy \pm (x+y)\sqrt{x^2+y^2-1}$, sin embargo presenta el problema que las primeras y segundas derivadas se indefinen en las soluciones aportadas por el sistema de ecuaciones $\varphi_x = 0$, $\varphi_y = 0$: $\pm(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ y hace imposible el tratamiento con el hessiano. Si vemos el gráfico adjunto, notamos que estos puntos no son máximos ni mínimos.

$\varphi(x,y) = xy \pm (x+y)\sqrt{x^2+y^2-1}$



63. Determinar los extremos de $f(x,y,z) = xy + xz + yz$ bajo la restricción $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

Solución El Lagrangiano es $L = xy + xz + yz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$ y se tiene $L_x = y+z+2\lambda x = 0$, $L_y = x+z+2\lambda y = 0$, $L_z = x+y+2\lambda z = 0 \Longrightarrow (x-y)(1-2\lambda) = 0 \Longrightarrow x = y$ o $\lambda = \frac{1}{2}$.

— Si $x = y$, se tiene que $x = -\lambda z \Longrightarrow y + z(1-2\lambda^2) = 0$.

Si $\lambda = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \Longrightarrow x = y = z = 0$ que se descarta pues $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Si $\lambda \neq \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$, $z = -\dfrac{y}{1-2\lambda^2} \Longrightarrow 2\lambda^2 + \lambda - 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1$, $\lambda = \frac{1}{2}$.

— Si $\lambda = -1 \Longrightarrow x = y = z = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

— Si $\lambda = \frac{1}{2}$, $x + y + z = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Longrightarrow x^2 + y^2 + xy = \frac{1}{2}$. Por otro lado, $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 0 \Longrightarrow xy + xz + yz = -\frac{1}{2} = f(x,y,z)$.

La matriz Jacobiana $\frac{\partial g}{\partial(x,y,z)} = (2x, 2y, 2z) \neq (0,0,0)$ es de rango 1. Las derivadas de orden dos son $L_{xx} = 2\lambda$, $L_{xy} = 1$, $L_{xz} = 1$, $L_{yy} = 2\lambda$, $L_{yz} = 1$, $L_{zz} = 2\lambda$ y el hessiano orlado es:

$$H = \left(\begin{array}{ccc|c} 2\lambda & 1 & 1 & 2x \\ 1 & 2\lambda & 1 & 2y \\ 1 & 1 & 2\lambda & 2z \\ \hline 2x & 2y & 2z & 0 \end{array}\right), \quad H_2 = \begin{pmatrix} 2\lambda & 1 & 2x \\ 1 & 2\lambda & 2y \\ 2x & 2y & 0 \end{pmatrix},$$

$\det H_2 = -8(\lambda x^2 - xy + \lambda y^2)$,

$\det H_3 = -4(x^2(4\lambda^2 - 1) - 2x((2\lambda - 1)(y+z) + y^2(4\lambda^2 - 1) - 2yz(2\lambda - 1) + z^2(4\lambda^2 - 1))$.

— En $\pm(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $\lambda = -1$, $\det H_2 = 8$, $\det H_3 = -36$ y es un máximo.

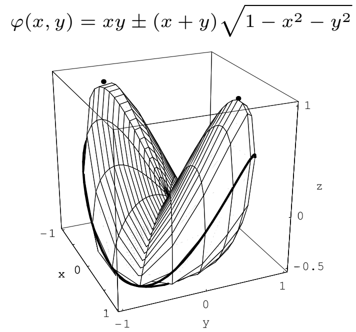
El conjunto $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x+y+z = 0\}$ es una circunferencia sobre el plano $x+y+z=0$, pues este plano corta la esfera $x^2+y^2+z^2 = 1$.

Anteriormente se determinó que $f(x,y,z) = xy + yz + xz = -\frac{1}{2}$ sobre E, pero sobre E,

$$\det H_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2x \\ 1 & 1 & 1 & 2y \\ 1 & 1 & 1 & 2z \\ 2x & 2y & 2z & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ y el criterio falla.}$$

Por el otro lado, sobre $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x+y+z = 0\}$, f es continua y alcanza el máximo y el mínimo sobre el compacto. Además el Teorema de Lagrange nos garantiza que si existen estos extremos, satisfacen las ecuaciones de la Lagrange, por lo tanto deben ser los puntos $(x,y,z) \in E$ y son mínimos.

El problema se pudo resolver considerando la función $f(x,y) = xy \pm (x+y)\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, ya que $z = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}$.



Tomenos $f(x,y) = xy + (x+y)\sqrt{1-x^2-y^2}$, entonces

$f_x = y + \sqrt{1-x^2-y^2} - \dfrac{x(x+y)}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = 0,$

$f_y = x + \sqrt{1-x^2-y^2} - \dfrac{y(x+y)}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = 0 \Longrightarrow$

$(x-y)\big(1 + \dfrac{x+y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\big) = 0 \Longrightarrow x = y$, o $x+y = -\sqrt{1-x^2-y^2}$ con lo cual debe tenerse $x+y \leq 0$.

– Si $x = y$, se debe tener $x \neq \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, entonces $x + \sqrt{1-2x^2} - \dfrac{2x^2}{\sqrt{1-2x^2}} = 0 \Longrightarrow x\sqrt{1-2x^2} + 1 - 2x^2 - 2x^2 = 0 \Longrightarrow x\sqrt{1-2x^2} = 4x^2 - 1$. Si elevamos al cuadrado, $x^2(1-2x^2) = 16x^4 - 8x^2 + 1$ i.e. $18x^4 - 9x^2 + 1 = 0 \Longrightarrow x^2 = \frac{9\pm\sqrt{9}}{2\cdot 18} = \frac{1}{6}, \frac{1}{3}$, o sea $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$. Sin embargo al elevar al cuadrado, aparecen soluciones no válidas en el sistema de ecuaciones original. Veamos que $x = y = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ y $x = y = \frac{1}{\sqrt{6}}$, no sirven como soluciones. En efecto, $x = y = \frac{1}{\sqrt{6}}$ se tiene que $x + \sqrt{1-2x^2} = \dfrac{2x^2}{\sqrt{1-2x^2}} \Longrightarrow x + \sqrt{1-2x^2} = \dfrac{2x^2}{\sqrt{1-2x^2}} \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{6}} + \sqrt{\frac{2}{3}} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{2}{3}}} \Longrightarrow \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ que no puede ser.

Si $x = y = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $-\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{1}{3}} = 0 = \dfrac{\frac{2}{3}}{\sqrt{\frac{1}{3}}}$ que tampoco puede ser.

Así tenemos las soluciones $x = y = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $z = \frac{1}{\sqrt{3}}$ y $x = y = -\frac{1}{\sqrt{6}}$, $z = -\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Si $x + y = -\sqrt{1-x^2-y^2} \Longrightarrow (x+y)^2 = 1 - x^2 - y^2 \Longrightarrow x^2 + xy + y^2 = \frac{1}{2}$ y la solución es una parte de la elipse dada por $(x, \frac{1}{2}(-x \pm \sqrt{2-3x^2}))$, $-\sqrt{\frac{2}{3}} \leq x \leq \sqrt{\frac{2}{3}}$, donde $x + y = x \pm \sqrt{2-3x^2} < 0$.

Para $f(x,y) = xy + (x+y)\sqrt{1-x^2-y^2}$, las derivadas de segundo orden son:

$f_{xx} = \dfrac{-3x-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} - \dfrac{x^2(x+y)}{(1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}$, $f_{yy} = \dfrac{-3y-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} - \dfrac{y^2(x+y)}{(1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}$,

$f_{xy} = \dfrac{-x-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} - \dfrac{xy(x+y)}{(1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} + 1.$

En $\big(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\big)$ el hessiano es $H = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$ y tenemos un máximo con $f\big(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\big) = 1$.

En $-\big(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\big)$ el hessiano es $H=\begin{pmatrix}\frac{9}{4} & \frac{9}{4}\\ \frac{9}{4} & \frac{9}{4}\end{pmatrix}$ y el criterio no aporta sobre si es máximo o mínimo. Debemos analizar la función f en alrededor de $-\big(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\big)$.

Así, $f\big(-\frac{1}{\sqrt{6}}+h,-\frac{1}{\sqrt{6}}+k\big)-f\big(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\big)=$

$hk-\frac{1}{\sqrt{6}}h-\frac{1}{\sqrt{6}}k+\frac{1}{6}+\big(-\frac{2}{\sqrt{6}}+h+k\big)\sqrt{1-\big(-\frac{1}{\sqrt{6}}+h\big)^2-\big(-\frac{1}{\sqrt{6}}+k\big)^2}+\frac{1}{2}=$

$hk-\frac{1}{\sqrt{6}}(h+k)+\frac{2}{3}+\big(-\frac{2}{\sqrt{6}}+h+k\big)\sqrt{\frac{2}{3}+\frac{2}{\sqrt{6}}h+\frac{2}{\sqrt{6}}k-h^2-k^2}=$ [1]

$hk-\frac{1}{\sqrt{6}}(h+k)+\frac{2}{3}+\big(-\frac{2}{\sqrt{6}}+h+k\big)\sqrt{\frac{2}{3}}\big(1-\frac{3}{8}hk+\frac{\sqrt{6}}{4}(h+k)-\frac{15}{16}h^2-\frac{15}{16}k^2+o((h+k)^2)=$

$\frac{9}{8}(h^2+2hk+k^2)+o((h+k)^2)=\frac{9}{8}(h+k)^2+o((h+k)^2)$, por lo que tenemos un mínimo en $-\big(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\big)$, de valor $f\big(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\big)=-\frac{1}{2}$.

Un estudio similar muestra que para $(x,\frac{1}{2}(-x\pm\sqrt{2-3x^2}))$, $-\sqrt{\frac{2}{3}}\leq x\leq\sqrt{\frac{2}{3}}$, donde $x+y=x\pm\sqrt{2-3x^2}<0$ es un mínimo de valor $f(x,\frac{1}{2}(-x\pm\sqrt{2-3x^2}))=-\frac{1}{2}$.

De manera similar, la función $f(x,y)=xy-(x+y)\sqrt{1-x^2-y^2}$ nos da las soluciones $x=y=-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $z=-\frac{1}{\sqrt{3}}$; $x=y=\frac{1}{\sqrt{6}}$, $z=-\sqrt{\frac{2}{3}}$ y $(x,\frac{1}{2}(-x\pm\sqrt{2-3x^2}))$, $-\sqrt{\frac{2}{3}}\leq x\leq\sqrt{\frac{2}{3}}$, donde $x+y=x\pm\sqrt{2-3x^2}>0$.

En este caso, un estudio similar al anterior nos lleva a que $\big(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\big)$ es un máximo de valor $f\big(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\big)=1$.

En $\big(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\big)$ tenemos un mínimo de valor $f\big(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\big)=-\frac{1}{2}$.

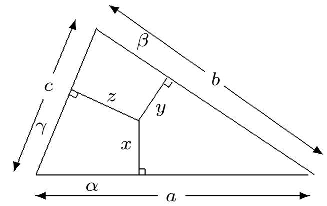
En $(x,\frac{1}{2}(-x\pm\sqrt{2-3x^2}))$, $-\sqrt{\frac{2}{3}}\leq x\leq\sqrt{\frac{2}{3}}$, donde $x+y=x\pm\sqrt{2-3x^2}>0$, se tiene un mínimo de valor $f(x,\frac{1}{2}(-x\pm\sqrt{2-3x^2}))=-\frac{1}{2}$.

Veamos que:

$$\begin{aligned}
x+y=x+\sqrt{2-3x^2}<0 &\quad \text{si } -\sqrt{\tfrac{2}{3}}\leq x<-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\\
x+y=x-\sqrt{2-3x^2}<0 &\quad \text{si } -\sqrt{\tfrac{2}{3}}\leq x<\tfrac{1}{\sqrt{2}}\\
x+y=x+\sqrt{2-3x^2}>0 &\quad \text{si } -\tfrac{1}{\sqrt{2}}<x\leq\sqrt{\tfrac{2}{3}}\\
x+y=x-\sqrt{2-3x^2}>0 &\quad \text{si } \tfrac{1}{\sqrt{2}}<x\leq\sqrt{\tfrac{2}{3}}.
\end{aligned}$$

64. Determinar en el interior de un triángulo dado de área A, el punto cuyo producto de las distancias a los tres lados sea máxima.

[1] Usamos que $\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)$



Solución Primeramente necesitamos conocer el área del triángulo con lados a, b, c y de distancias a los tres lados x, y, z a través de x, y, z, a, b, c. En efecto, dado que se tienen 6 triángulos, el área es:

$$\frac{1}{2}(\alpha x + (a-\alpha)x + \beta y + (b-\beta)y + \gamma z + (c-\gamma)z) = \frac{1}{2}(ax + by + cz) = A.$$

De esta forma el problema que nos interesa equivale a maximizar la función $f(x, y, z) = xyz$, sujeta a la restricción $g(x, y, z) = ax + by + cz - 2A = 0$.

Es claro que la matriz Jacobiana $\dfrac{\partial g}{\partial(x, y, z)} = (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

El Lagrangiano $L = xyz + \lambda(ax + by + cz - 2A)$ es tal que $L_x = yz + \lambda a = L_y = xz + \lambda b = L_z = xy + \lambda c = 0$, por lo que $-xyz = \lambda ax = \lambda by = \lambda cz \neq 0 \Longrightarrow ax = by = cz = \frac{2}{3}A$, es decir $x = \frac{2A}{3a}$, $y = \frac{2A}{3b}$, $z = \frac{2A}{3c}$, $\lambda = -\frac{4A^2}{9abc}$.

Las derivadas de orden dos son $L_{xx} = 0 = L_{yy} = Lzz$, $L_{xy} = z$, $L_{xz} = y$, $L_{yz} = x$ y el hessiano orlado es $H = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & z & y & a \\ z & 0 & x & b \\ y & x & 0 & c \\ \hline a & b & c & 0 \end{array}\right)$, $H_2 = \begin{pmatrix} 0 & z & a \\ z & 0 & b \\ a & b & 0 \end{pmatrix}$,

$\det H = a^2x^2 - 2ax(by + cz) + (by - cz)^2$, $\det H_2 = 2abz$.

— En $(\frac{2A}{3a}, \frac{2A}{3b}, \frac{2A}{3c})$, $\lambda = -\frac{4A^2}{9abc}$, $\det H_2 = \frac{4ab}{3c}A$, $\det H_3 = -\frac{4}{3}A^2$ y como $(-1)^i \det H_i > 0$, $i = 2, 3$, se tiene un máximo.

Así tenemos que el punto $(\frac{2A}{3a}, \frac{2A}{3b}, \frac{2A}{3c})$ maximiza el producto de las distancias a los tres lados, con valor máximo $\frac{8A^3}{27abc}$.

65. Determine los extremos de la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, bajo la restricciones $g_1(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0$, $g_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

Solución El Lagrangiano $L = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1(x + y + z - 1) + \lambda_2(x^2 + y^2 - z^2)$, $L_x = 2x + \lambda_1 + 2x\lambda_2 = 0$, $L_y = 2y + \lambda_1 + 2y\lambda_2 = 0$, $L_z = 2z + \lambda_1 - 2\lambda_2 z = 0$. Así tenemos $2(x - y) + 2(x - y)\lambda_2 = 2(x - y)(1 + \lambda_2) = 0$.

Si $\lambda_2 = -1 \Longrightarrow \lambda_1 = 0$ y $2z + 2z = 0 \Longrightarrow z = 0$, $x^2 + y^2 = 0$ i.e. $x = y = z = 0$, que es imposible ya que $x + y + z = 1$.

Así, $\lambda_2 \neq -1$ y $x = y \Longrightarrow z = 1 - 2x$ y $2x^2 = 1 - 4x + 4x^2 \Longrightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 0$, es decir $x = \frac{4\pm 2\sqrt{2}}{4} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, $z = -1 \mp \sqrt{2}$, $\lambda_2 = 3 \pm 2\sqrt{2}$, $\lambda_1 = -4(3 \pm 2\sqrt{2})$.

Además, $L_{xx} = 2 + 2\lambda_2 = L_{yy}$, $L_{zz} = 2 - 2\lambda_2$, $L_{xy} = L_{xz} = L_{yz} = 0$ y el hessiano orlado es

$$H = \left(\begin{array}{ccc|cc} 2+2\lambda_2 & 0 & 0 & 1 & 2x \\ 0 & 2+2\lambda_2 & 0 & 1 & 2y \\ 0 & 0 & 2-2\lambda_2 & 1 & -2z \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2x & 2y & -2z & 0 & 0 \end{array}\right).$$

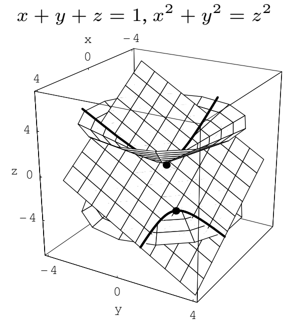
Así en $(1+\frac{1}{\sqrt{2}}, 1+\frac{1}{\sqrt{2}}, -1-\sqrt{2})$, $\lambda_1 = -4(3+2\sqrt{2})$, $\lambda_2 = 3+2\sqrt{2}$, $\det H = 32+16\sqrt{2}$, hay un mínimo de valor $\frac{2(17+12\sqrt{2})}{3+2\sqrt{2}}$.

En $(1-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1-\frac{1}{\sqrt{2}}, -1+\sqrt{2})$, $\lambda_1 = -4(3-2\sqrt{2})$, $\lambda_2 = 3-2\sqrt{2}$, $\det H = 32-16\sqrt{2}$, hay un mínimo de valor $\frac{2(17-12\sqrt{2})}{3-2\sqrt{2}}$.

Se observa que se puede ver este problema como determinar la menor distancia al origen de la curva intersección de las superficies $g_1(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0$ y $g_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

En el gráfico se muestran los puntos de la curva más cercanos al origen.

$x + y + z = 1,\ x^2 + y^2 = z^2$



66. Determinar el pie de la perpendicular de $(6, 2, 3)$ al plano $z = 5x - y + 2$ que minimiza la distancia al punto (x, y, z) en el plano.

Solución Sea $f(x, y, z) = (x-6)^2+(y-2)^2+(z-3)^2$ sujeto a la restricción $5x-y-z+2 = 0$, entonces $L = (x-6)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 + \lambda(5x - y - z + 2)$, $L_x = 2(x-6) + 5\lambda = 0$, $L_y = 2(y-2) - \lambda = 0$, $L_z = 2(z-3) - \lambda = 0$. Sustituyendo tenemos $5(12 - 5\lambda) - (4 + \lambda) - (6 + \lambda) + 4 = -27\lambda + 54 = 0 \Longrightarrow \lambda = 2$. Así se tiene $x = 1$, $y = 3$, $z = 4$. Queda por verificar que efectivamente se tiene un mínimo. El hessiano orlado es:

$$H = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ \hline 5 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right), \quad H_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$\det H_2 = -58$, $\det H = -108$, por lo que se tiene un mínimo, ya que $(-1)^1 \det H_i > 0$, $i = 2, 3$.

67. Determinar la distancia mínima de un punto (x_0, y_0, z_0) al plano $ax + by + cz + d = 0$.

Solución Sea $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ que no está en el plano $ax + by + cz + d = 0$, entonces el problema es equivalente a minimizar $f(x, y, z) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$, sujeta a la restricción $ax + by + cz + d = 0$.

Sea $L = (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2+\lambda(ax+by+cz+d)$, entonces $L_x = 2(x-x_0)+\lambda a = 0$, $L_y = 2(y - y_0) + \lambda b = 0$, $L_z = 2(z - z_0) + \lambda c = 0 \Longrightarrow 2ax - 2ax_0 + \lambda a^2 = 2by - 2by_0 + \lambda b^2 = 2cz - 2cz_0 + \lambda c^2 = 0 \Longrightarrow -2d_0 - 2(ax_0 + by_0 + cz_0) + \lambda(a^2 + b^2 + c^2) = 0 \Longrightarrow \lambda = \dfrac{2(ax_0 + by_0 + cz_0 + d)}{a^2 + b^2 + c^2}$. Así $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \dfrac{\lambda^2}{4}(a^2 + b^2 + c^2) = \dfrac{(ax_0 + by_0 + cz_0 + d)^2}{a^2 + b^2 + c^2}$, por lo que la distancia mínima es $\dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

El punto en que se alcanza el mínimo es $(x_0, y_0, z_0) - \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)\dfrac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Queda por verificar que la distancia es mínima. En efecto, $L_{xx} = L_{yy} = L_{zz} = 2$, $L_{xy} = L_{xz} = L_{yz} = 0$ y el gradiente de la restricción es $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, por lo que el hessiano orlado es $H = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 & b \\ 0 & 0 & 2 & c \\ \hline a & b & c & 0 \end{array}\right)$, $H_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & 2 & b \\ a & b & 0 \end{pmatrix}$, $\det H_2 = -2a^2 - 2b^2$, $\det H_3 = -4a^2 - 4b^2 - 4c^2$ y $(-1)^1 \det H_i > 0$, $i = 2, 3$ y se tiene un mínimo.

Otra forma de resolver el problema es observar que la superficie $f(x, y, z) = ax + by + cz + d = 0$ tiene por vector normal $\nabla f(a, b, c)$. Así la cantidad buscada es el vector $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ proyectado sobre el vector unitario $(a, b, c)\dfrac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$, es decir el producto punto $\left|(x - x_0, y - y_0, z - z_0)\cdot\dfrac{(a, b, c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right| = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$, pues $ax + by + cz = -d$.

68. Consideremos la función $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $\forall(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 4$,

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)<0$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=1$. Determinar en $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/x^2+z^2\leq 1,\ 0\leq y\leq 3\}$, los máximos y mínimos de la función.

Solución Dado que E es un conjunto compacto, F alcanza el máximo y el mínimo en E, es decir $\exists(a_1,b_1,c_1)$, $(a_2,b_2,c_2)\in E$ tales que $\max\limits_{(x,y,z)\in E} f(x,y,z) = f(a_1,b_1,c_1)$ y $\min\limits_{(x,y,z)\in E} f(x,y,z)=f(a_2,b_2,c_2)$.

Por otro lado $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a_1,y,c_1)<0$ y la función $f(a_1,y,c_1)$ es estrictamente decreciente en $[0,3]$, por lo que $0=b_1$ y $y=3$. Además $f(x,0,z)$ es tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,0,z)\neq 0$ y no tiene puntos estacionarios, por lo que el máximo sucede en la frontera, es decir cuando $a_1^2+c_1^2=1$.

Observamos que la función $f(x,0,z)$ está sujeta a la condición $x^2+z^2=1$, para determinar el extremo. La condición del gradiente de esta restricción $(2x,2y)$ es tal que $(2a_1,2c_1)\neq(0,0)$, por lo que existe una constante λ tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a_1,0,c_1)+2\lambda a_1 = 4+2\lambda a_1=0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a_1,0,c_1)+2\lambda c_1 = 1+2\lambda c_1=0 \Longrightarrow a_1=4c_1$, $a_1=\pm\frac{4}{\sqrt{17}}$, $c_1=\pm\frac{1}{\sqrt{17}}$.

Por otro lado, dado que $f(\frac{4}{\sqrt{17}},0,z)$ y $f(x,0,-\frac{1}{\sqrt{17}})$ son estrictamente crecientes (ya que $\dfrac{\partial f}{\partial z}(\frac{4}{\sqrt{17}},0,z)>0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,0,-\frac{1}{\sqrt{17}})>0$), se tiene que:

$$f(\tfrac{4}{\sqrt{17}},0,\tfrac{1}{\sqrt{17}})>f(\tfrac{4}{\sqrt{17}},0,-\tfrac{1}{\sqrt{17}})>f(-\tfrac{4}{\sqrt{17}},0,-\tfrac{1}{\sqrt{17}}),$$

lo que implica que $a_1=\frac{4}{\sqrt{17}}$, $c_1=\frac{1}{\sqrt{17}}$ y la función tiene un máximo $f(\frac{4}{\sqrt{17}},0,\frac{1}{\sqrt{17}})$.

De manera similar se prueba que $f(\frac{4}{\sqrt{17}},3,\frac{1}{\sqrt{17}})$ es un mínimo.

69. Sea $E\subset\mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado y sea $f\colon\bar{E}\longrightarrow\mathbb{R}$ una función continua que es constante en la frontera de E y que es de clase C^1 sobre E. Probar que f tiene al menos un punto estacionario.

Solución Dado que E es acotado, $\bar{E}$ también es acotado y compacto en $\mathbb{R}^n$. De esta forma, dado que f es continua, existen **a**,**b**$\in\bar{E}$ tales que $f(\mathbf{a})=\sup\limits_{\mathbf{x}\in\bar{E}} f(\mathbf{x})$, $f(\mathbf{b})=\inf\limits_{\mathbf{x}\in\bar{E}} f(\mathbf{x})$.

— Si $f(\mathbf{a})=f(\mathbf{b})$ se tiene que la función es constante y todos los puntos de $\bar{E}$ son estacionarios.

— Si $f(\mathbf{a})\neq f(\mathbf{b})$ y como f es constante en la frontera, se tiene $\mathbf{a}\in E$ o $\mathbf{b}\in E$, pues en caso contrario implicaría que a y b están en la frontera, es decir $f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{b})$. Así, si $\mathbf{a} \in E$ o $\mathbf{b} \in E$ y son puntos estacionarios.

70. Sea $E \subset \mathbb{R}^n$, una bola abierta y sea $f\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$, una función de clase C^1 tal que $\forall \mathbf{x} \in E$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) = \cdots = \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) = 0$. Probar que f es constante.

Solución En efecto, sean $\mathbf{a}, \mathbf{a}' \in E$ entonces $f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{a}') + \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a} + \theta_{\mathbf{a}'}(\mathbf{a}' - \mathbf{a}))(a_i - a_i')$, con $\theta_{\mathbf{a}'} \in \,]\,0,1\,[$, es decir $f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{a}')$ y como son arbitrarios sirve $\forall \mathbf{a}, \mathbf{a}' \in E$.

71. Sea $n \in \mathbb{N}^*$, determinar el máximo de la función $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x_1, \ldots, x_n) = \prod\limits_{k=1}^{n} x_k^2$, bajo la restricción $\|\mathbf{x}\| = 1$, con $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Deducir que $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\prod\limits_{k=1}^{n} y_k \leq \left(\dfrac{\|\mathbf{y}\|}{\sqrt{n}}\right)^n$.

Solución Sea $f(x_1, \ldots, x_n) = \prod\limits_{k=1}^{n} x_k^2$ sujeta a la restricción $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 = 1$, entonces la función de Lagrange es $L = \prod\limits_{k=1}^{n} x_k^2 + \lambda(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 - 1)$, por lo que $\dfrac{\partial L}{\partial x_k} = 2x_k \prod\limits_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} x_l^2 + 2\lambda x_k = 0$, $k = 1, \ldots, n \Longrightarrow 2 \prod\limits_{k=1}^{n} x_l^2 = -2\lambda x_k^2$, $k = 1, \ldots, n \Longrightarrow \lambda x_k^2 = \lambda x_s^2$, para $1 \leq k, s \leq n$.

— Si $\lambda = 0$, $\prod\limits_{l=1}^{n} x_l^2 = f(\mathbf{x}) = 0$.

— Si $\lambda \neq 0 \Longrightarrow n\lambda x_k^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda x_l^2 = \lambda \Longrightarrow x_k^2 = \dfrac{1}{n}$, $k = 1, \ldots, n$, $\lambda = \prod\limits_{\substack{l \neq 1 \\ l \neq k}}^{n} x_k^2 = \dfrac{1}{n^{n-1}}$.

El gradiente de la restricción $(2x_1, \ldots, 2x_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$. Las derivadas de orden dos son $L_{kk} = 4\lambda$, $L_{kl} = 4\lambda$, $k \neq l$ y el hessiano orlado es $H = \left(\begin{array}{cccc|c} 4\lambda & 4\lambda & \cdots & 4\lambda & 2x_1 \\ 4\lambda & 4\lambda & \cdots & 4\lambda & 2x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 4\lambda & 4\lambda & & 4\lambda & 2x_n \\ \hline 2x_1 & 2x_2 & \cdots & 2x_n & 0 \end{array}\right)$.

Dada la relación $x_k^2 = \dfrac{1}{n}$, $k = 1, \ldots, n$ implica que al menos dos x_i son iguales, por lo que dos filas o dos columnas de H son iguales y el determinante se anula y el criterio falla. Ahora, como la función logaritmo es estrictamente creciente, maximizar $\prod\limits_{k=1}^{n} x_k^2$ es equivalente a maximizar la función $f_1(x_1, \ldots, x_n) = 2 \sum\limits_{k=1}^{2} \log x_k$, sujeta a la restricción $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 = 1$. El Lagrangiano $L = 2 \sum\limits_{k=1}^{n} \log x_k + \lambda(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 - 1)$ es tal que $L_k = 2\dfrac{1}{x_k} + 2\lambda x_k =$

$0 \Longrightarrow \lambda = -\dfrac{1}{x_k^2}$, $k = 1, \ldots, n \Longrightarrow \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 = 1 = -\dfrac{n}{\lambda}$, o sea $\lambda = -n$ y $x_k^2 = \dfrac{1}{n}$, $k = 1, \ldots, n$.

Las derivadas de orden dos son $L_{kk} = -\dfrac{2}{x_k} + 2\lambda$, $L_{kl} = 0$, $k \neq l$, $1 \leq k, l \leq n$. El hessiano orlado evaluado en los x_k, $k = 1, \ldots, n$, $\lambda = -n$ es:

$$H = \left(\begin{array}{cccc|c} -2\sqrt{n} - 2n & 0 & \cdots & 0 & \frac{2}{\sqrt{n}} \\ 0 & -2\sqrt{n} - 2n & \cdots & 0 & \frac{2}{\sqrt{n}} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & & -2\sqrt{n} - 2n & \frac{2}{\sqrt{n}} \\ \hline \frac{2}{\sqrt{n}} & \frac{2}{\sqrt{n}} & \cdots & \frac{2}{\sqrt{n}} & 0 \end{array}\right),$$

por lo que $\det H_2 = \det \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} - 2n & 0 & \frac{2}{\sqrt{n}} \\ 0 & -2\sqrt{n} - 2n & \frac{2}{\sqrt{n}} \\ \frac{2}{\sqrt{n}} & \frac{2}{\sqrt{n}} & 0 \end{pmatrix} = 16\dfrac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}}$,

$\det H_3 = -48(\sqrt{n}+1)^2$, $\det H_4 = 128\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)^3$, $\det H_5 = -320n(\sqrt{n}+1)^4, \ldots, \det H_n = (-1)^n 2^{n+1} n^{\frac{1}{2}(n-1)}(\sqrt{n}+1)^{n-1}$.

Así $(-1)^i \det H_i > 0$, $i = 2, \ldots, n$ y se tiene un máximo.

Para la segunda parte si $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, la desigualdad es evidente. Si $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, se tiene que $f\left(\dfrac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|}\right) = \prod\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{y_k}{\|\mathbf{y}\|}\right)^2 \leq f(\sqrt{\tfrac{1}{n}}, \ldots, \sqrt{\tfrac{1}{n}}) = \dfrac{1}{n^n} \Longrightarrow \left|\prod\limits_{k=1}^{n} y_k\right| \leq \left(\dfrac{\|\mathbf{y}\|}{\sqrt{n}}\right)^n$.

72. Sea $n \in \mathbb{N}^*$ y $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, donde no todos los α_i son nulos. Determinar el mínimo de la función $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x_1, \ldots, x_n) = \|\mathbf{x}\|^2$, bajo la restricción $\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{x} - 1 = 0$.

Solución Sea $L = x_1^2 + \cdots + x_n^2 + \lambda(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n - 1)$, entonces $L_k = 2x_k + \lambda\alpha_k = 0$, $k = 1, \ldots, n \Longrightarrow 2 + \lambda \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k^2 = 0 \Longrightarrow \lambda = -\dfrac{2}{\|\boldsymbol{\alpha}\|^2} \Longrightarrow x_k = \dfrac{\alpha_k}{\|\boldsymbol{\alpha}\|^2}$, $k = 1, \ldots, n$.

La matriz Jacobiana de la restricción $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq (0, \ldots, 0)$ y las derivadas de orden dos de L: $L_{kk} = 2$, $L_{kl} = 0$, $k \neq l$, $1 \leq k, l \leq n$.

El hessiano orlado es $H = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & \alpha_n \\ \hline a_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n & 0 \end{array}\right)$, $\det H_2 = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 2 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \end{pmatrix} = -2(\alpha_1^2+\alpha_2^2)$, $\det H_3 = -4(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2), \ldots, \det H = -2^{n-1}\|\boldsymbol{\alpha}\|^2$, por lo que $(-1)^1 \det H_i > 0$,

$i = 2, \ldots, n$ y se tiene un mínimo.

De esta forma el mínimo de la función es $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{\alpha_k}{\|\boldsymbol{\alpha}\|^2} \right)^2 = \dfrac{1}{\|\boldsymbol{\alpha}\|^2}$.

73. Demostrar que $\frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \geq \left(\frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \right)^2$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Solución Sea $f(x) = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} {x_i}^2$ sujeto a la restricción $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = a$, entonces $L = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + \lambda\big(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i - a\big)$ es tal que $L_{x_i} = \dfrac{2x_i}{n} + \lambda = 0$, $\forall i = 1, \ldots n$, lo que implica $x_1 = \cdots = x_n$, por lo que $x_i = \frac{a}{n}$, $i = 1, \ldots, n$. Las derivadas de orden dos son $L_{x_i x_i} = \frac{2}{n}$, $L_{x_i x_j} = 0$, $i \neq j$, el hessiano orlado es $H = \left(\begin{array}{cccc|c} \frac{2}{n} & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \frac{2}{n} & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{2}{n} & 1 \\ \hline 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{array} \right)$ y se tiene $\det H_2 = -2(\frac{2}{n})$, $\det H_3 = -3(\frac{2}{n})^2, \ldots, \det H_n = -n(\frac{2}{n})^{n-1}$, por lo que $(-1)^1 \det H_i > 0$, $i = 2, \ldots, n$, con lo cual tenemos un mínimo en $(\frac{a}{n}, \ldots, \frac{a}{n})$.

Observemos que $f(\frac{a}{n}, \ldots, \frac{a}{n}) \leq f(x_1, \ldots, x_n)$ y si tomamos $a = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, se tiene:

$f(\frac{a}{n}, \ldots, \frac{a}{n}) = \frac{1}{n} n \Big(\frac{a}{n} \Big)^2 = \Big(\frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \Big)^2 \leq f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$.

Se observa que este resultado es válido en general: $\frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^k \geq \Big(\frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \Big)^k$, $k \in \mathbb{N}$.

4.1.3 Extremos con restricciones en forma de desigualdad (Khan–Tucker)

74. Determinar los extremos de la función $f(x, y, z) = 40x + 16y + 10z$, bajo las restricciones sobre las variables $x + y + z \geq 100$, $4x + y \geq 200$, $x \leq y$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

Solución Observamos que los extremos solo pueden ser mínimos. En efecto, los puntos de la frontera $(0, y, 0)$ toman valores $f(0, y, 0) = 16y$ y que pueden ser todo lo grande que se quiera.

El lagrangiano $\mathrm{L}(x, y, z) = 40x + 16y + 10z + \lambda_1(x + y + z - 100) + \lambda_2(4x + y - 200) + \lambda_3(y - x) + \lambda_4 x + \lambda_5 y + \lambda_6 z$ es tal que:

$$\begin{array}{lll} \mathrm{L}_x = 40 + \lambda_1 + 4\lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 = 0, & \lambda_1(x + y + z - 100) = 0, & \lambda_4 x = 0, \\ \mathrm{L}_y = 16 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_5 = 0, & \lambda_2(4x + y - 200) = 0, & \lambda_5 y = 0, \\ \mathrm{L}_z = 10 + \lambda_1 + \lambda_6 = 0, & \lambda_3(y - x) = 0, & \lambda_6 z = 0. \end{array}$$

La solución del sistema está lejos de ser inmediata. Nos vamos ha enfocar sobre todo en las tres primeras restricciones.

– Si las tres primeras restricciones se saturan, la solución es $x = y = 40$, $z = 20$. Como x, y, $z > 0$ se deduce que $\lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0$ y así $\lambda_1 = -10$, $\lambda_2 = -\frac{36}{5}$, $\lambda_3 = \frac{6}{5}$.

Los λ_j no verifican las condiciones de Kuhn-Tucker y $(40, 40, 20)$ no es el extremo buscado.

– Si sólo la segunda y tercera restricciones se saturan, $\lambda_1 = 0$, $x = y$, $4x + y = 200$, o sea $x = y = 40$, $\lambda_4 = 0$, $\lambda_5 = 0$, $\lambda_6 = -10$ (pues $\lambda_1 = 0$) i.e. $z = 0$. Pero el punto $(40, 40, 0)$ no verifica la restricción $x + y + z \geq 100$ y no es el extremo buscado.

– Si solo la primera y la tercera restricciones se saturan, $\lambda_2 = 0$, $y = x$, $x = 50 - \frac{1}{2}z$. Como x es no negativo, debe tenerse $0 \leq z \leq 100$.

a) Si $z = 0$, entonces $x = 50$, $\lambda_4 = 0$ y como $y = x > 0$, $\lambda_5 = 0$, $\lambda_1 = -28$, $\lambda_2 = 12$. Los λ_j no son del mismo signo y $(50, 50, 0)$ no es el extremo buscado.

b) Si $0 < z < 100$ se tendrá $\lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0$, $\lambda_1 = -10$, $\lambda_5 = \frac{6}{5}$ y los λ_j no tienen el mismo sino y no tienen el extremo buscado.

c) $z = 100$, $x = 0$, $y = 0$ y la segunda restricción no se da.

– Si sólo las dos primeras restricciones se saturan, $\lambda_3 = 0$, $z = 3x - 100$, $y = 200 - 4x$. Para tener una solución no negativa, se necesita $\frac{100}{3} \leq x \leq 50$.

a) Si $\frac{100}{3} < x < 50$, entonces $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ i.e. $\lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 0$, $\lambda_1 = -10$, $\lambda_2 = -6$, $\lambda_2 = 7.5$ no hay un extremo.

b) Si $x = \frac{100}{3}$, $z = 0$, $y = \frac{200}{3}$, $\lambda_4 = 0 = \lambda_5$, así $\lambda_2 = -8$, $\lambda_1 = -8$, $\lambda_6 = -2$, es decir los λ_j son no positivos y $(\frac{100}{3}, \frac{200}{3}, 0)$ es el mínimo buscado.

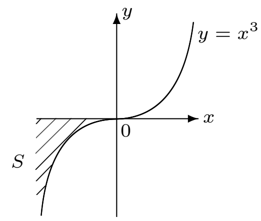
Este punto, es el único posible (para estar seguro, se debe continuar analizando los casos en que sólo una de las restricciones se cumple).

75. Determinar los extremos de la función $f(x, y) = x + y$ con $y \leq 0$, $y \geq x^3$.

Solución Las restricciones son $g_1(x, y) = -y \geq 0$, $g_2(x, y) = y - x^3 \geq 0$. El lagrangiano es $\mathsf{L}(x, y) = x + y + \lambda_1(-y) + \lambda_2(y - x^3)$ con lo que:

$$\mathrm{L}_x = 1 - 3\lambda_2 x^2 = 0, \qquad \lambda_1(-y) = 0,$$

$$\mathrm{L}_y = 1 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \qquad \lambda_2(y - x^3) = 0.$$



Por la ecuación $\mathrm{L}_x = 1 - 3\lambda_2 x^2 = 0$, se deduce que $\lambda_2 \neq 0$ y $x \neq 0$. Así, $y = x^3$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$, $x^2 = -1$ y tenemos que no hay punto que verifique Kuhn-Tucker, pero como se debe tener $x \leq 0$, $y \leq 0$, se ve que $(0,0)$ en estas condiciones es un máximo. Pero este punto no verifica las condiciones de Kuhn-Tucker.

Esto demuestra que las restricciones no son calificadas en este punto. Si lo fueran, las condiciones de Kuhn-Tucker se verificarían en este máximo.

Se constata directamente que las restricciones no son regulares en $(0,0)$ pues:

$$\frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(x, y)}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, las restricciones no son calificadas por arcos. En efecto, las condiciones $\mathbf{x}\cdot\nabla g_j(0) \geq 0$, $j = 1,2$ se escriben (con $\mathbf{x} = (x,y)$) $-y \geq 0$, $y \geq 0$, por lo que los puntos que satisfacen estas condiciones son los puntos $(x,0)$ con $x \in \mathbb{R}$.

Por otro lado, existe una función $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$ definida para $t \in [\,0,1\,]$ tal que $\mathbf{x}(0) = (0,0)$ y tal que $\mathbf{x}(t) \in S$, $x(t) \leq 0$. Por lo tanto, si $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{1}{t}x(t)$ existe es ≤ 0.

Se deduce que si $\mathbf{x} = (x,0)$ con $x > 0$ ($\mathbf{x}$ satisface las condiciones $\mathbf{x}\cdot\nabla g_j(\mathbf{0}) \geq 0$, $j = 1,2$) es imposible encontrar $\mathbf{x}(t)$ y $\gamma > 0$ tales que $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\mathbf{x}(t) = \gamma\mathbf{x}$, puesto que esta igualdad implica $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{1}{t}x(t) = \gamma x > 0$.

76. Encontrar los extremos de la función $f(x,y) = y - x^2$, bajo las restricciones $x^2 + y^2 \geq 1$, $y \leq 1$.

Solución Las restricciones se escriben $g_1(x,y) = x^2 + y^2 - 1 \geq 0$, $g_2(x,y) = 1 - y \geq 0$. Busquemos los puntos para los cuales las restricciones son calificadas.

Los gradientes $\nabla g_1(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$, $\nabla g_2(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. El único punto donde $\nabla g_1 =$

$(0,0)$, es en $(0,0)$ y como g_1 no es nulo, se deduce que todo punto en que g_1 es nulo pero g_2 no, las restricciones son regulares. Por otro lado, $\nabla g_2 \neq 0$, las restricciones son regulares en todo punto donde g_2 es nulo pero no g_1.

El único punto en donde las restricciones son saturadas es el punto $\mathbf{a} = (0,1)$; en este punto la matriz jacobiana de las restricciones es $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y las restricciones no son regulares.

Observemos sin embargo, que en el punto $\mathbf{a} = (0,1)$ las restricciones satisfacen las condiciones clásicas de calificación. En efecto, el conjunto de $\mathbf{x}$ tales que $(\mathbf{x}-\mathbf{a})\cdot\nabla g_1(\mathbf{a}) \geq 0$, $(\mathbf{x}-\mathbf{a})\cdot\nabla g_2(\mathbf{a}) \geq 0$, es la recta de la ecuación $y = 1$, pues si $\mathbf{x} = (x,y)$ se tiene que la primera de estas desigualdades es $2(y-1) \geq 0$ y la segunda $-(y-1) \geq 0$.

Todo punto de esta recta es $\mathbf{x} = (x,1)$ y para $x \neq 0$, ($\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$) se considera $\mathbf{x}(t) = (tx, 1)$, $t \in [0,1]$. Se tiene entonces $\mathbf{x}(0) = \mathbf{a}$, $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{1}{t}(\mathbf{x}(t) - \mathbf{a}) = \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{1}{t}(tx, 0) = \mathbf{x} - \mathbf{a}$. La condición de calificación se satisface para $\rho = 1$.

Las restricciones son por tanto calificadas en todo punto de $\mathbb{R}^2$ y se encuentran los extremos resolviendo las condiciones de Kuhn-Tucker.

El lagrangiano es $\mathrm{L}(x,y) = y - x^2 + \lambda_1(x^2 + y^2 - 1) + \lambda_2(1-y)$ y las condiciones de Kuhn-Tucker son:

$$\begin{aligned} &\mathrm{L}_x(x,y) = -2x + 2\lambda_1 x = 2x(\lambda_1 - 1) = 0, && \lambda_1(x^2+y^2-1) = 0, \\ &\mathrm{L}_y(x,y) = 1 + 2\lambda_1 y - \lambda_2 = 0, && \lambda_2(1-y) = 0. \end{aligned}$$

Si $x \neq 0$, $\lambda_1 = 1$ y como $y^2 = 1 - x^2$ se tiene $y < 1$ (pues $x \neq 0$). Así, $\lambda_2 = 0$ y la segunda ecuación es $1 + 2y = 0$ i.e. $y = -\frac{1}{2}$, $x^2 = \frac{3}{4}$. Así tenemos dos candidatos tales que $x \neq 0$:

$$(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}, -\tfrac{1}{2}), \qquad (\tfrac{\sqrt{3}}{2}, -\tfrac{1}{2}), \qquad \text{con } \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0.$$

Las condiciones $g_1(x,y) \geq 0$, $g_2(x,y) \geq 0$ se satisfacen en estos puntos y por los signos de los λ_i son candidatos a ser máximos.

Consideremos el caso $x = 0$. Aquí la condición $g_1(x,y) \geq 0$ se escribe $y^2 - 1 \geq 0$, o sea $|y| \leq 1$. Como se tiene $g_2(x,y) = 1 - y \geq 0$, se debe tener $y = 1$ o $y \leq -1$.

Para el punto $(0,1)$ vimos que las restricciones no son regulares, pero son calificadas por arcos. Las condiciones de Kuhn-Tucker se reducen en este punto a la única ecuación $1+2\lambda_1-\lambda_2=0$, la cual tiene una infinidad de soluciones (λ_1,λ_2), por ejemplo, $(-\frac{1}{2},0)$, $(0,1)$, $(1,3)$, $(-1,-1)$,... Las condiciones de Kuhn-Tucker se satisfacen en a, pero no permiten preveer, en el caso en que a sea efectivamente un extremo (si se trata de un máximo o de un mínimo), pues se satisfacen igualmente con los λ_j negativos $(-11,-1)$, que con los positivos $(1,3)$.

El estudio directo de la función $f(x)=y-x^2$ demuestra que tiene un máximo global estricto en a. En efecto, $\forall\,\mathbf{x}=(x,y)$ satisfaciendo $g_1(x,y)\geq 0$, $\mathbf{x}\neq \mathbf{a}$, se tiene $x\neq 0$, $y\leq 1$ o $x=0$, $y\leq -1$ y se deduce $f(x,y)=y-x^2<1=f(0,1)$.

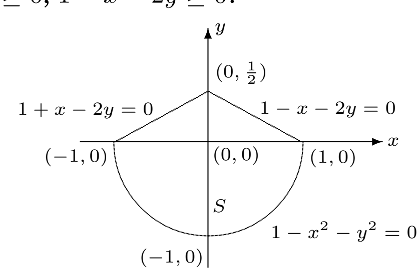
Consideremos ahora los puntos $(0,y)$, $y\leq -1$ y veamos para cuales puntos se puede encontrar λ_1 y λ_2 tales que las condiciones de Kuhn-Tucker se satisfacen.

Como $x=0$, la primera ecuación se satisface y como $y\leq -1$, i.e. $y\neq 1$, la cuarta ecuación implica $\lambda_2=0$ y la segunda se escribe $1+2\lambda_1 y=0$. Se deduce $-\dfrac{1}{2y}=\lambda_1\neq 0$ y dado que por la tercera ecuación $y^2-1=0$, se deduce $\lambda_1=-1$ y $\lambda_1=\frac{1}{2}$. Así, entre los puntos de la forma $(0,y)$ con $y\leq -1$, sólo el punto $(0,-1)$ es un candidato y si es un extremo es un máximo por el signo de los λ_j.

77. a) Determinar los extremos de la función $f(x,y)=x^2+2y^2$, que satisfacen las restricciones $g_1(x,y)=1-x^2-y^2\geq 0$, $g_2(x,y)=1+x-2y\geq 0$ y $g_3(x,y)=1-x-2y\geq 0$.

b) ¿Los puntos $(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ y $(0,-1)$ son extremos de la función $f(x,y)=x^2+2y^2$, si x y y están bajo las restricciones $1-x^2-y^2\geq 0$, $1+x-2y\geq 0$, $1-x-2y\geq 0$?

Solución



a) Sea $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/g_j(x,y)\geq 0,\ j=1,2,3\}$ y sea $\mathrm{L}(x,y)=x^2+2y^2+\lambda_1(1-x^2-y^2)+\lambda_2(1+x-2y)+\lambda_3(1-x-2y)$,

$$\mathrm{L}_x = 2x - 2\lambda_1 x + \lambda_2 - \lambda_3 = 0, \qquad \mathrm{L}_y = 4y - 2\lambda_1 y - 2\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0,$$
$$\lambda_1(1 - x^2 - y^2) = 0, \quad \lambda_2(1 + x - 2y) = 0, \quad \lambda_3(1 - x - 2y) = 0.$$

– Supongamos que una solución de este sistema de ecuaciones sea tal que las restricciones no son saturadas. En este caso, se debe tener por las relaciones de exclusión $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ i.e. $x = 0$, $y = 0$, puede ser un máximo o un mínimo de f (todos los λ_j son del mismo signo). Pero $f(x, y) \geq 0$, $\forall\,(x, y) \in S$, i.e. $(0, 0)$ es un mínimo.

– Supongamos que la 1^a y la 2^a restricciones no se saturan. Este caso $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, como se supone que la 3^a restricción se satura, $1 - x = 2y$ y se obtiene $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{3}$, $\lambda_3 = \frac{2}{3}$. Así el punto $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ cumple las condiciones necesarias para ser un máximo, pues $\lambda_j \geq 0$, $j = 1, 2, 3$. Sin embargo, esta conclusión es falsa. En efecto, si se verifica la 3^a restricción $1-x-2y = 0$, el punto de la forma $(x, \frac{1}{2}(1-x))$ toma el valor $f(x, \frac{1}{2}(1-x)) = \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$. La derivada se anula en $x = \frac{1}{3}$ y como su derivada segunda es $3 > 0$, $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ es un mínimo en el caso en que $g_3(x, y) = 1 - x - 2y = 0$ ((x, y) recorre la frontera de la restricción $g_3(x, y) = 0$). Por lo tanto, $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ no puede ser un máximo, aunque las condiciones $\lambda_j \geq 0$ se verifiquen.

– Si se supone que la 1^a y la 3^a restricciones no se saturan (i.e. $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$) y la segunda se satura, se tiene $x = -\frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{3}$, $\lambda_2 = \frac{2}{3}$ y el punto $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ cumple las condiciones necesarias ($\lambda_j \geq 0$) para ser un máximo.

Pero un razonamiento idéntico al caso anterior (si se recorre la frontera de la segunda restricción se ve $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ es un mínimo) demuestra que $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ no es un extremo.

– Si se supone que la 2^a y la 3^a restricciones no se saturan (i.e. $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$) y la primera se satura, se tiene $2x(1 - \lambda_1) = 0$, $2y(2 - \lambda_1) = 0$. No se puede tener $x = y = 0$ pues la primera restricción $1 - x^2 - y^2 = 0$ no se da, como lo habíamos supuesto.

Si $y = 0$, $x \neq 0$ y se tiene que $x = \pm 1$, $\lambda_1 = 1$, pero $(1, 0)$ satura la tercera restricción mientras que $(-1, 0)$ satura la segunda. Estos casos no cumplen las condiciones, es decir no son extremos.

Veamos que efectivamente no son extremos:

$f(1+h,k)-f(1,0)=h(2+h)+k^2$. Observemos que solo podemos tomar valores de $h<0$ para hacer que $(1+h,k)\in S$, por lo que puede tomar valores positivos y negativos.

Un estudio similar permite verificar también que $(-1,0)$ no es un extremo.

Si $x=0$, $y=\pm 1$, $\lambda_1=2$ y el punto $(0,1)$ se elimina pues no está en S.

El punto $(0,-1)$ verifica las condiciones necesarias de Kuhn-Tucker para ser un máximo. Un estudio local del punto muestra que es un máximo y que es un máximo absoluto de f bajo las restricciones dadas.

En efecto, $f(h,-1+k)-f(0,-1)=h^2+2(-1+k)^2-2$. Como $k\geq 0$ para que $(h,-1+k)\in S$, debe tenerse que $h^2+(-1+k)^2\leq 1$, por lo que $f(h,-1+k)-f(0,-1)=h^2+(-1+k)^2+(1-k)^2-2\leq 1+(1-k)^2-2=k(-2+k)\leq 0$, es decir $(0,-1)$ es un máximo. Luego se verá que un máximo absoluto.

– Si se supone que solamente la primera restricción no se satura (i.e. $\lambda_1=0$), se tiene que $1+x-2y=0$, $1-x-2y=0$, o sea $x=0$, $y=\frac{1}{2}$, $\lambda_2=\lambda_3=\frac{1}{2}$. Así el punto $(0,\frac{1}{2})$ cumple las condiciones necesarias para que sea un máximo. Un estudio local del punto permite ver que es un máximo.

En efecto, $f(h,\frac{1}{2}+k)-f(0,\frac{1}{2})=h^2+k(2+k)$, pero $k\leq 0$ para que $(h,\frac{1}{2}+k)\in S$. Así:

Si $h\leq 0\Longrightarrow 1+h-2(\frac{1}{2}+k)\geq 0\Longrightarrow h\geq 2k\Longrightarrow 0\leq -h\leq -2k$.

Si $h\geq 0\Longrightarrow 1-h-2(\frac{1}{2}+k)\geq 0\Longrightarrow -h\geq 2k\Longrightarrow 0\leq h\leq -2k$.

Se concluye que $|h|\leq -2k$, entonces $f(h,\frac{1}{2}+k)-f(0,\frac{1}{2})=h^2+k(2+k)\leq 4k^2+2k+k^2=5k^2+2k=k(2+5k)\leq 0$ y se tiene un máximo en $(0,\frac{1}{2})$.

– Si se supone que solamente la segunda restricción no se satura ($\lambda_2=0$), se tiene $1-x^2-y^2=0$, $1-x-2y=0$ i.e. $x=1$, $x=-\frac{3}{5}$. Se elimina $x=-\frac{3}{5}$ pues se tiene que $y=\frac{4}{5}$ y $(-\frac{3}{5},\frac{4}{5})\notin S$.

Si $x=1$, $y=0$, $\lambda_3=0$, $\lambda_1=1$. El punto $(1,0)$ cumple las condiciones necesarias para ser un máximo, pero un estudio local del punto muestra que no es nada; es suficiente alejarse de este punto recorriendo el círculo $x^2+y^2=1$ hacia abajo, es decir en el sentido que y^2 crezca para que $f(x,y)$ aumente y $(1,0)$ no puede ser un extremo.

Observemos que el punto $(1,0)$ presenta la particularidad de ser tal que se tiene a la vez la tercera restricción saturada $g_3(1,0)=0$ y $\lambda_3=0$.

– Si se supone que solamente la tercera restricción no se satura ($\lambda_3=0$), se obtienen los puntos $(-1,0)$ y $(\frac{3}{5},\frac{4}{5})\notin S$.

Así para $(-1,0)$, los $\lambda_j\geq 0$, pero no es un máximo por un argumento similar al anterior. En este caso se tiene $g_2(-1,0)=0$, $\lambda_2=0$.

Así se han considerado todos los casos posibles, lo que nos permite ver que hay siete punto verificando las condiciones de Kuhn-Tucker. Este ejemplo simple nos muestra lo pesado del método de Kuhn-Tucker, la cual es inevitable y también el interés del estudio gráfico cuando sea posible.

b) En la parte a) se encontraron que siete puntos verifican las condiciones de Kuhn–Tucker y se estudiaron gráficamente su naturaleza. Vamos a verificar estos resultados en los candidatos $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ y $(0,-1)$.

Punto $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$, $\lambda_1=\lambda_2=0$, $\lambda_3=\frac{2}{3}$.

El lagrangiano asociado a este punto (solo se tiene las restricciones saturadas) en $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ es:

$$\mathrm{L}(x,y)=x^2+2y^2+\tfrac{2}{3}(1-x-2y),$$

por lo que el Hessiano orlado en $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ es:

$$H\left(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3}\right)=\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \\ \hline -1 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

Como se tienen dos restricciones no saturadas $q=2$, $m=3$, $n=2$ y un solo valor posible de $k=3-2+1=2$. Así tenemos que buscar el signo del menor principal correspondiente, que es el $\det H=-12$.

Se tiene que $(-1)^{3-2}(-12)=12>0$, por lo que $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ debe ser un mínimo, pero $\lambda_3>0$, entonces se concluye que $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ no es un extremo.

Se llega al mismo resultado si se considera el candidato $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

Punto $(0,-1)$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

El lagrangiano asociado a este punto es $\mathsf{L} = x^2 + y^2 + 2(1 - x^2 - y^2)$ y el Hessiano orlado es:

$$H_2(0,-1) = \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 2 & 0 \end{array}\right), \qquad \det H_2 = 8.$$

Como $\lambda_1 > 0$ (en la única restricción saturada) y $(-1)^2 \det H_2 > 0$ (se tiene un sólo menor principal orlado puesto que $m = 3$, $q = 2$) se concluye que $(0,-1)$ es un máximo.

Notemos que el teorema del Hessiano orlado para Kuhn–Tucker, no se puede aplicar a los puntos candidatos tales como $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, porque la condición $m - q < n$ no se verifica en este punto, ya que $m = 3$, $q = 1$, $n = 2$.

78. Determinar los extremos de la función $f(x,y,z,t) = xy + zt$, bajo las restricciones $g_1(x,y,z,t) = 2 - x^2 - y^2 \geq 0$, $g_2(x,y,z,t) = 8 - z^2 - t^2 \geq 0$.

Solución Las funciones f, g_1 y g_2 son de clase C^∞ y podemos aplicar el teorema de Kuhn–Tucker.

– Se buscan los puntos en $\mathbb{R}^4$ que satisfacen $g_j(x) \geq 0$, $j = 1, 2$ y para los cuales existen λ_1 y λ_2 tales que las condiciones de Kuhn–Tucker se verifiquen:

i) Anulen las derivadas parciales del lagrangiano $\mathsf{L} = xy + zt + \lambda_1(2 - x^2 - y^2) + \lambda_2(8 - z^2 - t^2)$.

ii) $\lambda_j g_j(x,y,z,t) = 0$, $j = 1, 2$.

Las condiciones se escriben:

$2 - x^2 - y^2 \geq 0$, $y - 2\lambda_1 x = 0$, $x - 2\lambda_1 y = 0$, $\lambda_1(2 - x^2 - y^2) = 0$, $8 - z^2 - t^2 \geq 0$, $t - \lambda_2 z = 0$, $z - 2\lambda_2 t = 0$, $\lambda_2(8 - z^2 - t^2) = 0$.

– Para $\lambda_1 = 0$ tenemos $y = 0$, $x = 0$.

– Para $\lambda_1 \neq 0$ tenemos $2 - x^2 - y^2 = 0$ y no se pude tener $x = 0$, $y = 0$. Se concluye que ambos valores son distintos de cero i.e. $2\lambda_1 = \frac{y}{x} = \frac{x}{y} \Longrightarrow x^2 = y^2$ i.e. $x^2 = 1$. Además $y = 2\lambda_1 x = 4\lambda_1^2 y \Longrightarrow \lambda_1 = \pm\frac{1}{2}$, por lo que si $x = y$, $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ y si $y = -x$, $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$. De esta manera tenemos:

x	0	1	-1	1	-1
y	0	1	-1	-1	1
λ_1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

De forma similar se obtiene:

z	0	2	-2	2	-2
t	0	2	-2	-2	2
λ_2	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

con lo cual se tienen 25 soluciones (x, y, z, t), λ_1, λ_2 distintas.

Análisis de $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $t = 0$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$.

Es un candidato libre (no satura ninguna restricción). Se debe considerar únicamente el signo de los menores principales del Hessiano de f en $(0, 0, 0, 0)$:

$$H(0,0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Los menores parciales de esta matriz son 0, -1, 0, 1 y la matriz es ni semidefinida, ni definida en $(0, 0, 0, 0)$ y no es un extremo.

Es claro que la función alrededor de $(0, 0, 0, 0)$ puede tener valores positivos y negativos.

Análisis del caso $(0, 0, \pm 2, \pm 2)$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \pm\frac{1}{2}$.

Para estos puntos $g_1 > 0$, $g_2 = 0$ y el Jacobiano $\dfrac{\partial g_2}{\partial(x, y, z, t)} = (0, 0, -2z, -2t)$ es de rango 1.

Para aplicar el criterio del Hessiano orlado para Kuhn–Tucker, tememos el orden z, t, x, y de manera que el primer término del Jacobiano $\dfrac{\partial g_2}{\partial(z, t, x, y)}$ sea diferente de 0. Así el Hessiano orlado (con $\mathsf{L} = f + \lambda_2 g_2$) es:

$$H = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathsf{L}_{zz} & \mathsf{L}_{zt} & \mathsf{L}_{zx} & \mathsf{L}_{zy} & (g_2)_z \\ \mathsf{L}_{tz} & \mathsf{L}_{tt} & \mathsf{L}_{tx} & \mathsf{L}_{ty} & (g_2)_t \\ \mathsf{L}_{xz} & \mathsf{L}_{xt} & \mathsf{L}_{xx} & \mathsf{L}_{xy} & (g_2)_x \\ \mathsf{L}_{yz} & \mathsf{L}_{yt} & \mathsf{L}_{yx} & \mathsf{L}_{yy} & (g_2)_y \\ \hline (g_2)_z & (g_2)_t & (g_2)_x & (g_2)_y & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} -2\lambda_2 & 1 & 0 & 0 & -2z \\ 1 & -2\lambda_2 & 0 & 0 & -2t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline -2z & -2t & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Aquí, $n = 4$, $m = 2$, $q = 1$ (una restricción saturada), por lo que se consideran $n - (m - q) = 4 - 1 = 3$ menores orlados principales de H:

$$\det H_2 = \begin{pmatrix} -2\lambda_2 & 1 & -2z \\ 1 & -2\lambda_2 & -2t \\ -2z & -2t & 0 \end{pmatrix} = 8(\lambda_2(z^2 + t^2) + zt) = \begin{cases} 4(z+t)^2, & \text{si } \lambda_2 = \frac{1}{2} \\ -4(z-t)^2, & \text{si } \lambda_2 = -\frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$\det H_3 = \begin{pmatrix} -2\lambda_2 & 1 & 0 & -2z \\ 1 & -2\lambda_2 & 0 & -2t \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2z & -2t & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0, \qquad \det H_4 = \det H = -\det H_2.$$

Así, las condiciones del Teorema no se satisfacen, ni para un máximo, ni para un mínimo.

Se verifica de manera similar que los cuatro candidatos para los cuales $\lambda_1 = \pm\frac{1}{2}$, $\lambda_2 = 0$ no son extremos.

– Se consideran ahora los 16 candidatos para los cuales $\lambda_1 = \pm\frac{1}{2}$, $\lambda_2 = \pm\frac{1}{2}$.

Así tenemos que $g_1 = g_2 = 0$ y el rango de $\dfrac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(x, y, z, t)} = \begin{pmatrix} -2x & -2y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2z & -2z \end{pmatrix}$ es 2.

Es claro que las condiciones $\lambda_j \leq 0$ ó $\lambda_j \geq 0$, $j = q+1, \ldots, m$ i.e. $j = 1, 2$, son necesarias para ver que los ocho puntos que toman los valores de $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ ó $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ no pueden ser extremos.

Finalmente, restan para estudio los ocho puntos para los cuales $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$ ó $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{2}$.

Tomando el orden (x,z,y,t) para que las 2 primeras columnas del Jacobiano sea de rango 2 i.e. $\dfrac{\partial(g_1,g_2)}{\partial(x,z,y,t)} = \begin{pmatrix} -2x & 0 & -2y & 0 \\ 0 & -2z & 0 & -2t \end{pmatrix}$, por lo que el Hessiano orlado es:

$$H = \left(\begin{array}{cccc|cc} -2\lambda_1 & 0 & 1 & 0 & -2x & 0 \\ 0 & -2\lambda_2 & 0 & 1 & 0 & -2z \\ 1 & 0 & -2\lambda_1 & 0 & -2y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2\lambda_2 & 0 & -2t \\ \hline -2x & 0 & -2y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2z & 0 & -2t & 0 & 0 \end{array}\right),$$

donde $n=4$, $m=2$, $q=0$ y $n-(m-q)=2$ menores orlados principales deben calcularse:

$$\det H_3 = \begin{vmatrix} -2\lambda_1 & 0 & 1 & -2x & 0 \\ 0 & -2\lambda_2 & 0 & 0 & -2z \\ 1 & 0 & -2\lambda_1 & -2y & 0 \\ -2x & 0 & -2y & 0 & 0 \\ 0 & -2z & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 32z^2(-\lambda_1(x^2+y^2)-xy)$$

$$= \begin{cases} -16z^2(x+y)^2 \ \text{ si } \ \lambda_1 = \frac{1}{2} \\ \ \ 16z^2(x-y)^2 \ \text{ si } \ \lambda_1 = -\frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$\det H_4 = \det H = 64(\lambda_1(x^2+y^2)+xy)(\lambda_2(z^2+t^2)+zt)$$

$$= \begin{cases} 16(x+y)^2(z+t)^2 \text{ si } \lambda_1=\lambda_2=\frac{1}{2} \\ 16(x-y)^2(z-t)^2 \text{ si } \lambda_1=\lambda_2=-\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Así, tenemos la siguiente tabla de los 8 candidatos a extremos:

x	y	z	t	λ_1	λ_2	$\det H_3$	$\det H_4$	f	tipo
1	1	2	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-$	$+$	5	máximo
-1	-1	2	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-$	$+$	5	máximo
1	1	-2	-2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-$	$+$	5	máximo
-1	-1	-2	-2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-$	$+$	5	máximo
1	-1	2	-2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+$	$+$	-5	mínimo
1	-1	-2	2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+$	$+$	-5	mínimo
-1	1	2	-2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+$	$+$	-5	mínimo
-1	1	-2	2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+$	$+$	-5	mínimo

Observe que para los primeros 4 candidatos de la tabla se tiene:

$(-1)^3 \det H_3 = (-1)(-256) = 256 > 0$,

$(-1)^4 \det H_4 = 1024 > 0$,

$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2} > 0$, i.e. son máximos.

Para los cuatro últimos candidatos de la tabla se tiene:

$(-1)^{m-q} \det H_3 = (-1)^2 256 > 0$,

$(-1)^{m-q} \det H_4 = (-1)^2 1024 > 0$,

$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{2} < 0$, i.e. son mínimos.

Bibliografía

[1] Archinard Gabriel, Guerrien Bernard 1988 *Analyse mathématique pour economistes*, 3^a édition, Editorial Economica, Paris.

[2] Apostol Tom 1977 *Análisis Matemático*, Editorial Reverté, Barcelona.

[3] Apostol Tom, 1967 *Calculus*, Volumen II, Blaisdell Publishing Company, Massachusetts.

[4] Attali P., Guillard J., Tissier A. 1995 *Analyse 2: Collection exercices et problémes*, Editions Breal, Rosny.

[5] Attali P., Guillard J., Tissier A. 1993 *Géométrie 1: Collection exercices et problèmes*, Editions Breal, Rosny.

[6] Attali P., Guillard J., Tissier A. 1992 *Géométrie 2: Collection exercices et problèmes*, Editions Breal, Rosny.

[7] Bass J. 1970 *Curso de matemáticas*, Tomo I, Editorial Toray–Masson, Barcelona

[8] Berman G.N. 1983 *Problemas y ejercicios de análisis matemático*, 2^a edición, Editorial MIR, Moscú.

[9] Bronshtein I., Semendiaev K. 1982 *Manual de matemáticas para ingenieros y estudiantes*, 4^a edición, Editorial MIR, Moscú.

[10] Cartan Henri 1997 *Cours de Calcul différentiel*, Editorial Hermann, Paris.

[11] Churchill R.V., Brown G.H. 1992 *Variable compleja y aplicaciones*, 5^a edición, McGraw-Hill, Madrid

[12] De Castro Korgi, Rodrigo 2003 *El universo LaTeX*, Editorial Panamericana, Bogotá, Colombia.

[13] Del Castillo F. 1980 *Análisis matemático*, Vol.2, Editorial Alhambra, Madrid.

[14] Demidovich Boris P. 1976 *5000 Problemas de Análisis Matemático* Editorial Paraninfo, Madrid.

[15] Demidovich Boris P. 1973 *Problemas y ejercicios de análisis matemático*, 4^a edición, Editorial MIR, Moscú.

[16] Dixmier J. 1976 *Cours de Mathématiques*, Editorial Dunod, Paris

[17] Douchet Jacques, Zwahlen Bruno 1983 *Calcul différentiel et intégral. Fonctions réelles d'une variable réelle*, Vol.1, Editorial Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, Suisse.

[18] Douchet Jacques, Zwahlen Bruno 1987 *Calcul différentiel et intégral. Fonctions réelles d'une variable réelle, Exercices résolus*, Vol.3, Editorial Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, Suisse.

[19] Douchet Jacques, Zwahlen Bruno 1986 *Calcul différentiel et intégral. Fonctions réelles de plusieurse variables réelles*, Vol.2, Editorial Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, Suisse.

[20] Douchet Jacques, Zwahlen Bruno 1989 *Calcul différentiel et intégral. Fonctions réelles de plusieurse variables réelles, Exercices résolus*, Vol.4, Editorial Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, Suisse.

[21] Doneddu A. 1981 *Fonctions vectorielles. Séries. quations différentielles*, Tome 5, 2^a édition, Vuibert, Paris.

[22] Doneddu A. 1981 *Géométrie différentielle. Intégrales multiples*, Tome 6, 2^a édition, Vuibert, Paris.

[23] Efimov A., Demidovich Boris 1983 *Problemas de las matemáticas superiores*, Vol.1, Editorial MIR, Moscú.

[24] Edwards Jr., C.H. 1973 *Advanced calculus of several variables*, Dover, New York.

[25] Efimov A., Demidovich Boris 1983 *Problemas de las matemáticas superiores*, Vol.2, Editorial MIR, Moscú.

[26] Fogiel M. 1994 *Handbook of Mathematical, Scientific and Engineering*, New Jersey.

[27] Goossens Michel, Mittelbach Frank, Samarin Alexander 1994, *The LaTeX Companion*, Addison Wesley Publishing Company.

[28] Goossens Michel, Rahtz Sebastian 1999, *The LaTeX Web Companion*, Addison Wesley Publishing Company.

[29] Hobby John 1997, *The MetaPost System*.

[30] Hobby John 1997, *Drawing Graphs with MetaPost*.

[31] Hobby John 1998, *A User's Manual for MetaPost*.

[32] Knuth, Donald 1986, *The METAFONTbook*, Addison Wesley Publishing Company.

[33] Knuth, Donald 1995, *The TeXbook*, Addison Wesley Publishing Company.

[34] Krée P. 1969 *Introduction aux mathématiques et a leurs applications fondamentales*, Editorial Dunod, Paris.

[35] Kreysig Erwin 1993 *Matemáticas avanzadas para ingeniería*, Vol 1, Limusa, México.

[36] Lamport, Leslie 1994 *LaTeX: A document preparation system*, Addison Wesley Publishing Company, 2^a Edition.

[37] Lang Serge 1990 *Introducción al Análisis Matemático*, Addison–Wesley Iberoamericana, Delaware.

[38] Lang Serge 1994 *Calculus of several variables*, Sringer–Verlag.

[39] Lelong–Ferrand Jaqueline 1963 *Géométrie différentielle*, Masson, Paris.

[40] Liret F., Zisman M. 1984 *Maths*, Tome 2, Editorial Dunod, Paris

[41] Liret F., Zisman M. 1987 *Maths*, Tome 3, Editorial Dunod, Paris

[42] Marsden J, Tromba A. 1991 *Cálculo vectorial*, 3^a edición, Addison Wesley Iberoamericana, Delaware.

[43] Nikolsky S.M. 1977 *A course of Mathematical Analysis*, Vol.1, Editorial MIR, Moscú.

[44] Nikolsky S.M. 1977 *A course of Mathematical Analysis*, Vol.2, Editorial MIR, Moscú.

[45] Monier J.M. 1990 *Analyse: Exercices résolus*, Tome 1, Dunod, Paris.

[46] Monier J.M. 1990 *Analyse: Exercices résolus*, Tome 2, Dunod, Paris.

[47] Monier J.M. 1993 *Géométrie: Exercices résolus*, Dunod, Paris.

[48] Monier J.M. 1997 *Analyse*, Tome 4, Dunod, Paris.

[49] Monier J.M. 1997 *Géométrie*, Tome 7, Dunod, Paris.

[50] Ohl Thorsten 1997, *EMP: Encapsulated METAPOST for LaTeX*.

[51] Piskunov N. 1978 *Cálculo diferencial e integral*, Vol I, Editorial MIR,

[52] Piskunov N. 1978 *Cálculo diferencial e integral*, Vol II, Editorial MIR, Moscú.

[53] Quinet J. 1978 *Cours élémentaire de mathématiques supérieures, Geométrie, Tomo 5*, 6^a édition, Dunod, Paris.

[54] Quinet J. 1996 *Cours élémentaire de mathématiques supérieures, Calcul intégral et séries, Tomo 3*, 6^a édition, Dunod, Paris.

[55] Restrepo G. 1997 *Análisis en* $\mathbb{R}^n$, Editorial Universidad del Valle, Cali.

[56] Reckdahl Keith *Using Imported Graphics un LaTeX2e*.

[57] Ríbnikov K. 1987 *Historia de las matemáticas*, Editorial MIR, Moscú.

[58] Ruskeepää, Heikki 1999, *Mathematica Navigator*, Academic Press.

[59] Spiegel M.R. 1992 *Manual de főrmulas y tablas matemáticas*, Editorial McGraw-Hill, México.

[60] Taylor A., Mann W. Robert 1989 *Fundamentos de cálculo avanzado*, Editorial Limusa, Mexico.

[61] Tauvel, Patrice 1999 *Analyse complexe*, Dunod, Paris.

Indice