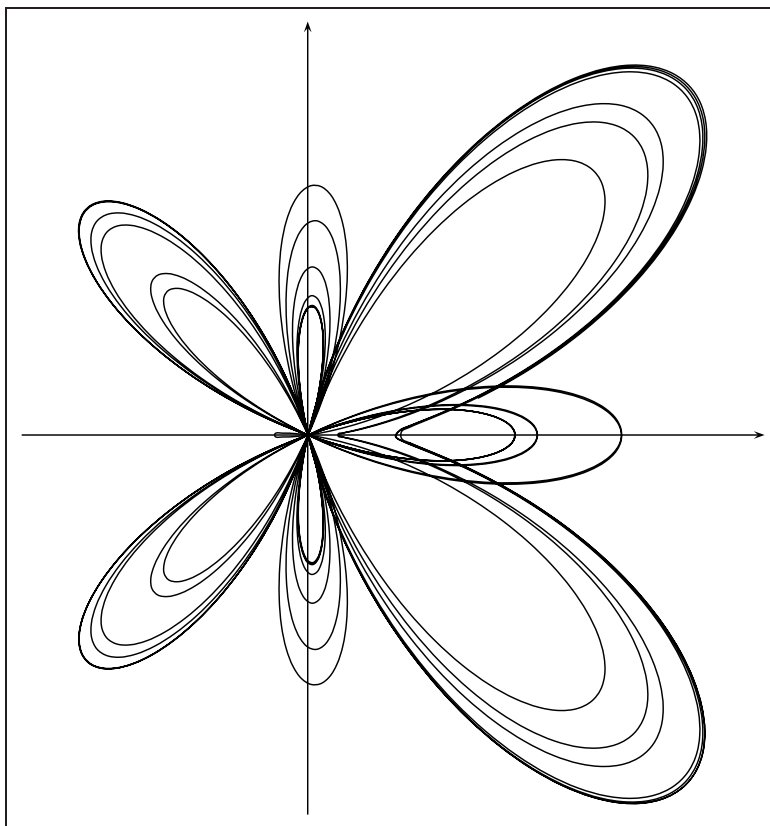




Universidad de Costa Rica
Escuela de Matemática



Serie: CABÉCAR

Ejercicios de Cálculo I

Área de Salud

4^a edición

Profs. Escuela de Matemática

2006

falta ISBN

Valor del ejemplar ¢3000

Contenidos

1	Ejercicios de límites y continuidad: I Parte	Prof. Ana Mondrus	1
	Soluciones de límites y continuidad: I Parte	Prof. Ana Mondrus	3
	Ejercicios de límites y continuidad: II Parte	Prof. Asdrúbal Duarte	9
	Soluciones ejercicios de límites y continuidad: II Parte	Prof. Asdrúbal Duarte	11
	Ejercicios de límites y continuidad: III Parte	Prof. Rosendo Pizarro	23
	Soluciones de límites y continuidad: III Parte	Rosendo Pizarro	24
2	Ejercicios de derivación: I Parte	Prof. Lester Izaguirre	29
	Soluciones de ejercicios de derivación: I Parte	Prof. Lester Izaguirre	31
	Ejercicios de derivación: II Parte	Prof. Lorena Salazar	37
	Soluciones de ejercicios de derivación: II Parte	Prof. Lorena Salazar	38
	Ejercicios de derivación: III Parte	Prof. Ana Mondrus	44
	Soluciones de ejercicios de derivación: III Parte	Prof. Ana Mondrus	46
	Ejercicios de derivación: IV Parte	Profs. Gerald Asch, Gloria Bonilla	53
	Soluciones de ejercicios de derivación: IV Parte	Profs. Gerald Asch, Gloria Bonilla	55
	Ejercicios de derivación: V Parte	Prof. Carlos Azofeifa	61
	Soluciones de ejercicios de derivación: V Parte	Prof. Carlos Azofeifa	62
3	Ejercicios de límites en el infinito	Prof. Angel Ruíz	65
	Soluciones de ejercicios de límites en el infinito	Prof. Angel Ruíz	66
	Ejercicios de límites en el infinito: II Parte	Prof. Carlos Avendaño	71
	Soluciones de ejercicios de límites en el infinito: II Parte	Prof. Carlos Avendaño	72
	Ejercicios de límites en el infinito: III Parte	Prof. Minor Chacón	75
	Soluciones de ejercicios de de límites en el infinito: III Parte	Prof. Minor Chacón	76
4	Ejercicios de Aplicaciones de la derivada: I Parte	Prof. Gerald Asch	81
	Soluciones de Aplicaciones de la derivada: I Parte	Prof. Gerald Asch	83

Ejercicios de Aplicaciones de la derivada: II Parte	Prof. Rosendo Pizarro	88
Soluciones de ejercicios de Aplicaciones de la derivada: II Parte	Prof. Rosendo Pizarro	89
Ejercicios de Aplicaciones de la derivada: III Parte	Profa. Ana Mondrus	94
Soluciones de ejercicios de aplicaciones de la derivada: III Parte	Profa. Ana Mondrus	95
Ejercicios de Aplicaciones de la derivada: IV Parte	Profa. Ana Mondrus	100
Soluciones de ejercicios de Aplicaciones de la derivada: IV Parte	Profa. Ana Mondrus	101
5 Ejercicios de integrales: I Parte	Prof. Lester Izaguirre	109
Soluciones de ejercicios de integrales: I Parte	Prof. Lester Izaguirre	110
Ejercicios de integrales: II Parte	Prof. Elvis Hurtado	114
Soluciones de ejercicios de integrales: II Parte	Prof. Elvis Hurtado	116
Ejercicios de integrales: III Parte	Prof. Mario Murillo	120
Soluciones de ejercicios de integrales: III Parte	Prof. Mario Murillo	121
Ejercicios de integrales: IV Parte	Profs: Lester Izaguirre, Julio Céspedes	125
Soluciones de ejercicios de integrales: IV Parte	Profs: Lester Izaguirre, Julio Céspedes	127
Ejercicios de integrales: V Parte	Prof. Carlos González	133
Soluciones de ejercicios de integrales: V Parte	Prof. Carlos González	134
6 Ejercicios de Funciones Exponenciales, Logarítmicas: I Parte	Profs. Roxana Meneses, Carlos González	137
Soluciones de ejercicios de Funciones Exponenciales, Logarítmicas: I Parte	Profs. Roxana Meneses, Carlos González	138
Ejercicios de Funciones Exponenciales, Logarítmicas: II Parte	Prof. Carlos González	141
Soluciones de ejercicios de Funciones Exponenciales, Logarítmicas: II Parte	Prof. Carlos González	143
Ejercicios de Funciones Exponenciales, Logarítmicas e Inversas: III Parte	Profs. Mario Murillo, Carlos González	149
Soluciones de ejercicios de Funciones Exponenciales, Logarítmicas e Inversas: III Parte	Profs. Mario Murillo, Carlos González	150
Ejercicios de Funciones Exponenciales, Logarítmicas e Inversas: IV Parte	Prof. Patricio Becerra	154

Soluciones de ejercicios de Funciones Exponenciales, Logarítmicas e Inversas: IV	
Parte Prof. Patricio Becerra	155
7 Ejercicios de funciones trigonométricas y funciones trigonométricas inversas: I Parte	
Prof. Angel Ruiz	157
Soluciones de ejercicios de funciones trigonométricas y funciones trigonométricas	
inversas: I Parte Prof. Angel Ruiz	158
Ejercicios de funciones trigonométricas y funciones trigonométricas inversas: II	
Parte Profa. Gloria Bonilla	160
Soluciones de ejercicios de funciones trigonométricas y funciones trigonométricas	
inversas: II Parte Gloria Bonilla	161
Ejercicios de funciones trigonométricas y funciones trigonométricas inversas: III	
Parte Profa. Coralia Malavasi	163
Soluciones de ejercicios de funciones trigonométricas y funciones trigonométricas	
inversas: III Parte Profa. Coralia Malavasi	164
Ejercicios de funciones trigonométricas y funciones trigonométricas inversas: IV	
Parte Prof. Rosendo Pizarro	167
Soluciones de ejercicios de funciones trigonométricas y funciones trigonométricas	
inversas: IV Parte Prof. Rosendo Pizarro	168
Ejercicios de funciones trigonométricas y funciones trigonométricas inversas: V	
Parte Prof. Jorge Poltronieri	171
Soluciones de ejercicios de funciones trigonométricas y funciones trigonométricas	
inversas: V Parte Prof. Jorge Poltronieri	172
Exámenes	175

Tema No. 1

Ejercicios de límites y continuidad: I Parte Profa. Ana Mondrus

I) Calcule cada uno de los siguientes límites:

- | | | |
|--|--|--|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 9x + 8}{x^3 - 1}.$ | 4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{sen} 7x}{4x^2 + \cos x}.$ | 7. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} + \cos 2x \right).$ |
| 2. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - x - 3}{x + 1}.$ | 5. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x + 1} - \sqrt{5 - x}}.$ | 8. $\lim_{t \rightarrow 4} t t - 4 .$ |
| 3. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 9x + 8}{x^3 - 1}.$ | 6. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{sen}(x + 1)}{5x + 5}.$ | 9. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x + 2} - 2}{\sqrt{2x + 5} - 3}.$ |

II) Para cada una de las funciones siguientes, calcule los límites en el punto indicado.

- | | |
|--|--------------------------|
| 1. $f(x) = \begin{cases} 4(x^2 + 1) & \text{si } x \leq 0 \\ 2x + 3 & \text{si } x > 0. \end{cases}$ | i) Laterales en 0 |
| | ii) Laterales en 5 |
| | iii) Laterales en -5 . |
| 2. $g(x) = \begin{cases} 4(x^2 + 1) & \text{si } x \leq 0 \\ 2x + 4 & \text{si } x > 0. \end{cases}$ | Laterales en 0. |

¿Qué puede concluir sobre la existencia de los límites siguientes, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -5} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$?

III) Calcule los siguientes límites (si existen):

- | | |
|--|--|
| a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{ x }$ | b) $\lim_{t \rightarrow 4} \frac{2t t - 4 }{t - 4}.$ |
|--|--|

IV) Para las siguientes funciones, determine en qué intervalos son continuas; encuentre los puntos de discontinuidad e indique el tipo de discontinuidad que hay en cada uno de ellos. Encuentre asíntotas verticales, si existen.

$$1. f(x) = \frac{x^2 - 9x + 8}{x^3 - 1}. \quad 2. g(x) = \frac{4 - x^3}{3 - \sqrt{x^2 + 5}}. \quad 3. h(x) = \frac{\operatorname{sen}(x + 1)}{x + 1}.$$

V 1) Encuentre el valor de k para que f sea continua en $\mathbb{R}$, siendo

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} 5x}{2x} & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

2) Encuentre los valores de las constantes a y b que haga que g sea continua en $\mathbb{R}$.

$$g(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq -1 \\ ax + b & \text{si } -1 < x < 3 \\ -2x & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$$

3) Use el teorema del valor intermedio para garantizar que $x^6 - 2x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$ tiene una solución en $[0, 1]$.

Soluciones de límites y continuidad: I Parte Prof. Ana Mondrus

1) Calcule los siguientes límites:

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 9x + 8}{x^3 - 1}.$$

Es el límite de una función racional (cociente de polinomios) en un punto en que el denominador se hace 0, por lo que NO admite sustitución directa. Si se intentara reemplazar x por 1, se llega a la “forma indeterminada $\frac{0}{0}$ ”, por lo que conviene transformar la función en otra equivalente. En este caso, lo adecuado es la factorización y simplificación posterior.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 9x + 8}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-8)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} \underset{\text{(pues } x \neq 1)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-8}{x^2 + x + 1} = \frac{1-8}{1+1+1} = -\frac{7}{3}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - x - 3}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2x-3)}{(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} (2x-3) = 2(-1) - 3 = -5.$$

Totalmente análogo al caso anterior.

$$3. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 9x + 8}{x^3 - 1}.$$

Sea $P(x) = x^2 - 9x + 8$ y $Q(x) = x^3 - 1$, observe que $Q(-1) = (-1)^3 - 1 = -2 \neq 0$, por lo tanto para calcular el límite basta hacer la sustitución directa.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 9x + 8}{x^3 - 1} = \frac{P(-1)}{Q(-1)} = \frac{(-1)^2 - 9(-1) + 8}{(-1)^3 - 1} = \frac{18}{-2} = -9.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 7x}{4x^2 + \cos x} = \frac{2 \sin 0}{4 \cdot 0^2 + \cos 0} = \frac{0}{0+1} = 0.$$

Combinando los teoremas sobre operaciones con límites, aquí también puede sustituirse directamente, ya que se trata de un cociente de funciones, en el que el límite del denominador no es cero. Las funciones que aparecen en el numerador y el denominador corresponden al conjunto de funciones cuyos límites pueden calcularse por sustitución directa (son las que se llaman “continuas en el punto”).

$$5. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x+1} - \sqrt{5-x}}. \text{ Note que los valores de } x \text{ están próximos a dos y por lo tanto las dos raíces están definidas.}$$

Nuevamente NO se puede sustituirse directamente ya que el denominador se anula. Si se intenta, se llega a la forma “indeterminada $\frac{0}{0}$ ”. La transformación adecuada se hace mediante la racionalización del denominador.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x+1} - \sqrt{5-x}} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x+1} - \sqrt{5-x}} \cdot \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{5-x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{5-x}} = \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x+1} + \sqrt{5-x})}{(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{5-x})^2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x+1} + \sqrt{5-x})}{x+1-5+x} = \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x+1} + \sqrt{5-x})}{2x-4} &\underset{\text{(pues } x \neq 2)}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x+1} + \sqrt{5-x})}{2(x-2)} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

6. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin(x+1)}{5x+5}$

¿Sustitución directa? No! Se caería en la indeterminación $\frac{0}{0}$. ¿Cómo transformar aquí? Ni la factorización ni la racionalización, son adecuadas en este caso. Como se trata de límite trigonométrico se podría intentar usar $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$.

Para hacerlo una posible idea es hacer el “cambio de variable” $z = x + 1$ y claramente $z \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow -1$. El límite pedido se va transformando así:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin(x+1)}{5x+5} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin(x+1)}{5(x+1)} = \frac{1}{5} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin(x+1)}{x+1} = \frac{1}{5} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = \frac{1}{5} \cdot 1 = \frac{1}{5}.$$

7. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{x} + \cos 2x \right)$

Ahora no hay ningún problema en hacer sustitución directa (revise siempre como primera posibilidad la sustitución directa).

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{x} + \cos 2x \right) = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} + \cos 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} + \cos \pi = \frac{2}{\pi} - 1 = \frac{2 - \pi}{\pi}.$$

8. $\lim_{t \rightarrow 4} t|t-4|$

Es un producto de dos funciones que no sufren ninguna interrupción; ni la identidad ni la composición del valor absoluto con un polinomio crean dificultades, por lo que también aquí cabe la sustitución directa.

$$\lim_{x \rightarrow 4} t|t-4| = 4|4-4| = 4|0| = 4 \cdot 0 = 0.$$

9. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x+5}-3}$

Lleva a la forma indeterminada $\frac{0}{0}$; hay que racionalizar, pero aquí se requiere una doble racionalización, porque:

i) Al racionalizar el denominador:

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{2x+5}+3)}{2x+5-9} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{2x+5}+3)}{2x-4}$; permanece la indeterminación (es decir nuevamente tanto el numerador como el denominador se anula). A continuación se amplifica por $\sqrt{x+2}+2$ (es decir se multiplica numerador y denominador por $\sqrt{x+2}+2$):

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)(\sqrt{2x+5}+3)}{2(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2-4)(\sqrt{2x+5}+3)}{2(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{2x+5}+3)}{2(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} \underset{\text{(pues } x \neq 2)}{=} \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

II) Para cada una de las funciones siguientes, calcule los límites en el punto indicado.

1. $f(x) = \begin{cases} 4(x^2+1) & \text{si } x \leq 0 \\ 2x+3 & \text{si } x > 0. \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 4(x^2+1) = 4, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x+3) = 3.$$

El pedir aquí a continuación los límites laterales en 5, sólo tiene fines pedagógicos, ya que no hay ninguna irregularidad “cerca” de 5; tanto a la izquierda como a la derecha de 5 vale la ecuación $f(x) = 2x + 3$, por tanto se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} (2x + 3) = 13, \quad \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} (2x + 3) = 13.$$

De hecho, los cálculos hechos son innecesarios (pero no incorrectos), ya que basta notar que en todo el intervalo $]0, +\infty[$ se trata de una función polinomial (que no cambia); basta por lo tanto sustituir para calcular $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ y si el límite existe, los laterales también son iguales entre sí.

El razonamiento es análogo para los límites laterales $\lim_{x \rightarrow -5^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -5^+} f(x)$, pero ahora la ecuación de la función viene dada por: $f(x) = 4(x^2 + 1)$.

$$\lim_{x \rightarrow -5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -5} f(x) = \lim_{x \rightarrow -5} 4(x^2 + 1) = 4[(-5)^2 + 1] = 4 \cdot 26 = 104.$$

Nota: Nunca confunda “-5” con “5-”.

$$2. \quad g(x) = \begin{cases} 4(x^2 + 1) & \text{si } x \leq 0 \\ 2x + 4 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} 4(x^2 + 1) = 4; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x + 4) = 4.$$

De todo el análisis anterior, puede sacarse las siguientes conclusiones:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ no existe, ya que los laterales son distintos (4 y 3).

ii) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ existe y $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 13$; $\lim_{x \rightarrow -5} f(x)$ existe y $\lim_{x \rightarrow -5} f(x) = 104$.

iii) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ existe y es igual a 4, ya que los límites laterales existen y ambos son iguales a 4.

$$\text{III) a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{|x|}$$

Se sabe que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$; pero hay que relacionarlo ahora con el hecho que:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

por lo que la ecuación de la función en cuestión es diferente según que x sea menor o mayor que 0.

Note que:

$$\frac{\text{sen } x}{|x|} = \begin{cases} \frac{\text{sen } x}{x} & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{\text{sen } x}{-x} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{|x|} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{(-x)} = (-1) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{|x|} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 \end{aligned} \right\} \text{son diferentes.}$$

Por tanto se concluye que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{|x|}$ no existe.

$$b) \text{ Antes de calcular el límite, recuerde que: } |t-4| = \begin{cases} t-4 & \text{si } t-4 \geq 0, \text{ es decir } t \geq 4 \\ -(t-4) & \text{si } t-4 < 0, \text{ es decir } t < 4 \end{cases}$$

por lo tanto:

$$\frac{|t-4|}{t-4} = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 4 \\ -1 & \text{si } t < 4, \end{cases} \quad (1)$$

por lo que hay que calcular los límites laterales:

$$\lim_{t \rightarrow 4^-} 2t \frac{|t-4|}{t-4} = 2 \cdot 4 \cdot (-1) = -8, \quad \lim_{t \rightarrow 4^+} 2t \frac{|t-4|}{t-4} = 2 \cdot 4 \cdot (1) = 8, \text{ por lo tanto } \lim_{t \rightarrow 4} 2t \frac{|t-4|}{t-4} \text{ no existe ya que los límites laterales son diferentes.}$$

Nota: Equivalente a lo anterior, puede calcularse sin usar directamente (1):

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 4^+} \frac{2t|t-4|}{t-4} &= \lim_{t \rightarrow 4^+} \frac{(2t)(\cancel{t-4})}{\cancel{t-4}} = 2 \cdot 4 = 8 \text{ (pues } t \neq 4) \\ \lim_{t \rightarrow 4^-} \frac{2t|t-4|}{t-4} &= \lim_{t \rightarrow 4^-} \frac{(2t) \cdot (-1)(\cancel{t-4})}{\cancel{t-4}} = -8. \end{aligned}$$

IV) Para las siguientes funciones, determine en qué intervalos son continuas; encuentre los puntos de discontinuidad e indique de qué tipo son. Encuentre asíntotas verticales, si existen.

$$1. f(x) = \frac{x^2 - 9x + 8}{x^3 - 1}$$

Por tratarse de una función racional, sus únicos puntos de discontinuidad son aquellos en los que se hace cero el denominador, (es decir, los únicos que no están en el dominio en este caso). $x^3 - 1 = 0 \iff x = 1$, f es continua en $]-\infty, 1[$ y en $]1, +\infty[$.

Es discontinua en $x = 1$. La discontinuidad es EVITABLE, pues $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 9x + 8}{x^3 - 1} = -\frac{7}{3}$ (Ver I parte, ejercicio 1).

$$2. g(x) = \frac{4 - x^3}{3 - \sqrt{x^2 + 5}}$$

Se trata de un cociente de funciones g definidas en todo $\mathbb{R}$. Por lo tanto las únicas discontinuidades se dan en los puntos que anulan el denominador. Es decir, los puntos donde se indefine la función g .

Puntos de discontinuidad: los que aquí hacen 0 el denominador, es decir, los x para los que $\sqrt{x^2 + 5} = 3$, $x^2 + 5 = 9$, $x^2 = 4$, $x = \pm 2$.

g es continua en $]-\infty, -2[$, en $]-2, 2[$ y en $]2, +\infty[$. Es discontinua en $x = -2$ y en $x = 2$.

Observe que $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4 - x^3}{3 - \sqrt{x^2 + 5}} = +\infty$, ya que el $\lim_{x \rightarrow 2^+} (4 - x^3) = 4 - 2^3 = -4$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} 3 - \sqrt{x^2 + 5} = 0 \text{ (por valores menores que 0)}$$

Nota: aquí la racionalización no resuelve el problema.

Similarmente $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4 - x^3}{3 - \sqrt{x^2 + 5}} = -\infty$, de modo que $x = 2$ es asíntota vertical y la discontinuidad es inevitable.

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{4 - x^3}{3 - \sqrt{x^2 + 5}} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} (4 - x^3) = 4 - (-2)^3 = 12 \text{ y } \lim_{x \rightarrow -2^+} (3 - \sqrt{x^2 + 5}) = 0 \text{ (por valores mayores que 0) por}$$

$$\text{lo que } \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{4 - x^3}{3 - \sqrt{x^2 + 5}} = +\infty.$$

$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{4 - x^3}{3 - \sqrt{x^2 + 5}} = -\infty$, con un razonamiento análogo. También $x = -2$ es asíntota vertical y la discontinuidad en $x = -2$ es inevitable.

3. La función $h(x) = \frac{\sin(x+1)}{x+1}$ es el cociente de funciones continuas. Por lo tanto no está definida únicamente en los puntos que anule el denominador. Es decir, es discontinua si $x+1=0$ o equivalentemente $x=-1$, pero como $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin(x+1)}{x+1} = 1$, la discontinuidad es evitable.

Parte V)

1. Encuentre el valor de k para que f sea continua en $\mathbb{R}$, siendo $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 5x}{2x} & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Note que f es continua en $]-\infty, 0[$ y en $]0, +\infty[$ (cociente de funciones continuas). Pero $2x$ se anula en $x=0$, entonces hay peligro de discontinuidad en $x=0$. Para que f sea continua en 0, debe cumplirse:

$f(0)$ exista; condición que se cumple pues $f(0) = k$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ exista; } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin 5x}{2 \cdot 5x} = \frac{5}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = \frac{5}{2}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = k$. Para que se de esta igualdad, bastará tomar $k = \frac{5}{2}$. Por lo tanto f es continua en todo $\mathbb{R}$ si $k = \frac{5}{2}$.

2. Encuentre los valores de las constantes a y b que haga que g sea continua en $\mathbb{R}$.

Por tratarse de funciones polinomiales g es continua, en los intervalos $]-\infty, -1[$, $]-1, 3[$, $]3, +\infty[$, sea cual sea el valor de a y de b . Hay que asegurar continuidad en -1 y en 3 .

$g(-1)$ existe y $g(-1) = 2(-1) = -2$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = -2$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = a(-1) + b = -a + b$, luego $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$ existe y es igual a $g(-1) \iff \lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) \iff -a + b = -2$.

$g(3)$ existe y $g(3) = -6$; $\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = 3a + b$; $\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = -6 = 3a + b$, luego $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$ existe y es igual a $g(3) \iff \lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) \iff -6 = 3a + b$.

Resolviendo el sistema se tiene:

$$\left. \begin{array}{l} 3a + b = -6 \\ -a + b = -2 \end{array} \right\} \implies 4a = -4, a = -1, b = a - 2, b = -1 - 2 = -3.$$

Para $a = -1$, $b = -3$, g es continua en $x = -1$ y en $x = 3$, por lo que es continua en todo $\mathbb{R}$. (Verifíquelo graficando g con $a = -1$, $b = -3$).

3. Usando el teorema de los valores intermedios, garantizar que $x^6 - 2x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$ tiene una solución en el intervalo $[0, 1]$.

Recordemos que el teorema de los valores intermedios (T.V.I.) dice:

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua sobre $[a, b]$, entonces dado cualquier valor y_o entre $f(a)$ y $f(b)$ (o entre $f(b)$ y $f(a)$), existe $x_o \in [a, b]$ tal que $f(x_o) = y_o$.

Consideremos la función $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^6 - 2x^3 - 3x^2 + x + 1$. Esta función es un polinomio y por lo tanto será continua en $[0, 1]$. Observe que: $f(0) = 1$, $f(1) = -2$.

Tome $y_o = 0$, entonces claramente y_o está entre $f(1)$ y $f(0)$ pues $-2 < y_o = 0 < 1$. Por lo tanto, según T.V.I., existe $x_o \in [0, 1]$ tal que $f(x_o) = y_o$, es decir $f(x_o) = 0$, o lo que es lo mismo $x_o^6 - 2x_o^3 - 3x_o^2 + x_o + 1 = 0$ y $x_o \in [0, 1]$ es una solución de la ecuación.

Ejercicios de límites y continuidad: II Parte Prof. Asdrúbal Duarte

1. Calcular cada uno de los siguientes límites.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4x - 12}{x^4 - 16}.$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - x^2 - 1}{x^2 + x - 2}.$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x-3)}{x-1-\sqrt{x+1}}.$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x+1} + \sqrt{x+1}.$$

2. En cada caso, calcular los límites laterales $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ (si existen).

$$\text{a) } a = 3, \quad f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x < 3 \\ 3x-1 & \text{si } x > 3. \end{cases}$$

$$\text{b) } a = 1, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 4 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

$$\text{c) } a = 2, \quad k \text{ es una constante, } f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{si } x \leq 2 \\ k + x & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

Determinar el valor de k para que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ exista.

3. Calcular: a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{|x - 2|}$ b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-x)^2}{|2-x|}.$

4. Calcular cada uno de los siguientes límites.

$$\text{a) } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}, \text{ donde } f(x) = \frac{1}{x}.$$

$$\text{b) } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}, \text{ donde } f(x) = |x-3|.$$

5. Estudiar la continuidad de cada una de las siguientes funciones. (Estudiar puntos de discontinuidad si los hay e indicar el tipo de discontinuidad).

$$\text{a) } f(x) = \frac{4-x^3}{3-\sqrt{x^2+5}}.$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{|x|}{x}.$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{x^2-3x-10}{x+2}.$$

$$\text{d) } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

$$\text{e) } f(x) = \begin{cases} 4(x^2+1) & \text{si } x \leq 0 \\ 2x+3 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

$$\text{f) } f(x) = \begin{cases} \frac{|x|-1}{x^2-1} & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x = -1. \end{cases}$$

$$\text{g) } f(x) = x - [x].$$

$$\text{h) } f(x) = \begin{cases} |x-2|+3 & \text{si } x < 0 \\ x+5 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

6. En cada uno de los siguientes ejercicios, determine el valor de k para que la función sea continua en el punto indicado.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 + 1} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ kx^2 & \text{si } x < -1 \text{ } x > 1 \end{cases}, \text{ en } x = \pm 1.$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{si } x < 0 \\ x + k & \text{si } x \geq 0 \end{cases}, \text{ en } x = 0.$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^4 - x^2 + x - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases}, \text{ en } x = 1.$$

7. Determinar las asíntotas verticales de cada una de las siguientes funciones:

$$\text{a) } f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}.$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{x^3}{x^3 - 1}.$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{2x^2 + x + 2}.$$

8. Estudiar las asíntotas verticales y las discontinuidades evitables de las funciones:

$$\text{a) } f(x) = \frac{2x^2 - 12x + 16}{x^2 - 5x + 6}.$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{3(x^2 + x - 6)}{x(x - 1)(x - 2)}.$$

9. Calcular cada uno de los siguientes límites:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 4}{(x - 2)^2}.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x + 4}{3 - x}.$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{|x - 2|}.$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 8x - 9}{x^2 - 2x + 1}.$$

Soluciones ejercicios de límites y continuidad: II Parte Prof. Asdrúbal Duarte

1. Calcular cada uno de los siguientes límites.

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}.$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4x - 12}{x^4 - 16}.$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - x^2 - 1}{x^2 + x - 2}.$

d) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x-3)}{x-1-\sqrt{x+1}}.$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x+1} + \sqrt{x+1}.$

Solución

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}.$

Recordemos que cuando se quiere calcular un límite del tipo: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios tales que $P(x_0) = 0$ y $Q(x_0) = 0$ un buen camino es factorizar los dos polinomios y tratar de buscar factores comunes que se puedan simplificar.

En el problema nuestro $P(x) = x^3 - 1$, $Q(x) = x^2 - 1$ y $x_0 = 1$. Claramente $P(1) = Q(1) = 0$. Por lo tanto procedemos a factorizar los polinomios $P(x) = (x-1)(x^2+x+1)$ y $Q(x) = (x+1)(x-1)$.

Luego: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}$ y como $x \neq 1$, se tiene:

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$. Este último límite se puede evaluar de manera directa, con lo cual se tiene: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} = \frac{3}{2}$.

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4x - 12}{x^4 - 16}.$

Nuevamente $P(x) = x^2 + 4x - 12$ y $P(2) = 0$, $Q(x) = x^4 - 16$ y $Q(2) = 0$.

Factorizando, se obtiene $P(x) = x^2 + 4x - 12 = (x+6)(x-2)$, $Q(x) = x^4 - 16 = (x^2-4)(x^2+4) = (x-2)(x+2)(x^2+4)$ y como $x \neq 2$, simplificando resulta:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^2 + 4x - 12}{x^4 - 16} = \frac{(x+6)(x-2)}{(x-2)(x+2)(x^2+4)} = \frac{x+6}{(x+2)(x^2+4)}.$$

Así: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4x - 12}{x^4 - 16} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+6}{(x+2)(x^2+4)} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}.$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - x^2 - 1}{x^2 + x - 2}.$

$P(x) = 2x^3 - x^2 - 1$; $P(1) = 0$, $Q(x) = x^2 + x - 2$; $Q(1) = 0$.

Factorizando $P(x) = 2x^3 - x^2 - 1 = (2x^2 + x + 1)(x-1)$, $Q(x) = x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$ y como $x \neq 1$, $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{(2x^2 + x + 1)(x-1)}{(x+2)(x-1)} = \frac{2x^2 + x + 1}{x+2}.$

Por lo tanto: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - x^2 - 1}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x + 1}{x+2} = \frac{4}{3}.$

$$d) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x-3)}{x-1-\sqrt{x+1}}.$$

Observe que una evaluación directa nos lleva a una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$. Recordemos que cuando hay una forma indeterminada y aparecen raíces, un procedimiento recomendable es racionalizar.

$$\text{Así, } \frac{x(x-3)}{x-1-\sqrt{x+1}} = \frac{x(x-3)}{x-1-\sqrt{x+1}} \cdot \frac{x-1+\sqrt{x+1}}{x-1+\sqrt{x+1}} = \frac{x(x-3)[x-1+\sqrt{x+1}]}{(x-1-\sqrt{x+1})(x-1+\sqrt{x+1})} =$$

$$\frac{x(x-3)[x-1+\sqrt{x+1}]}{(x-1)^2 - [x+1]} = \frac{x(x-3)[x-1+\sqrt{x+1}]}{x^2 - 2x + 1 - x - 1} = \frac{x(x-3)[x-1+\sqrt{x+1}]}{x^2 - 3x} =$$

$$\frac{x(x-3)[x-1+\sqrt{x+1}]}{x(x-3)} = x-1+\sqrt{x+1}, \text{ para todo } x \neq 3.$$

$$\text{Luego, } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x-3)}{x-1-\sqrt{x+1}} = \lim_{x \rightarrow 3} (x-1+\sqrt{x+1}) = 4.$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x+1} + \sqrt{x+1}.$$

Aquí se utiliza el límite de una composición de funciones o simplemente ver que se puede evaluar directamente.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x+1} + \sqrt{x+1} = \sqrt{0+1} + \sqrt{0+1} = \sqrt{2}.$$

2. En cada caso, calcular los límites laterales $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ (si existen).

$$a) a = 3, f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x < 3 \\ 3x-1 & \text{si } x > 3. \end{cases} \quad b) a = 1, f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 4 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

$$c) a = 2, k \text{ es una constante, } f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{si } x \leq 2 \\ k + x & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

Determinar el valor de k para que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ exista.

Solución

a) Note que de acuerdo a la definición de $f(x)$, se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x+2) = 5 \text{ y } \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (3x-1) = 8.$$

Puesto que $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$, se concluye que el $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ no existe.

$$b) \text{ De acuerdo a la definición de la función } f, \text{ se ve que la función } f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x-1} & \text{si } x < 1 \\ 4 & \text{si } x = 1 \\ \frac{x^3-1}{x-1} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

$$\text{Luego, } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1^- \\ x \neq 1}} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2+x+1) = 3.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1^+ \\ x \neq 1}} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + x + 1) = 3.$$

Por lo tanto, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$ y en consecuencia $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ existe y además $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$.

Comentario Note que en este caso se pone en evidencia que la noción de límite de una función en un punto, no depende del valor de la función en ese punto. Inclusive puede suceder que la función ni siquiera esté definida en el punto. Aquí, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3 \neq f(1) = 4$.

$$c) \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + x) = 6 \text{ y } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (k + x) = k + 2.$$

Recordemos que: $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe si y sólo si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.

Por lo tanto para que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ exista, debe ocurrir que: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$.

O sea se requiere que $6 = k + 2$, es decir $k = 4$. Así, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ existe si y sólo si $k = 4$.

$$3. \text{ Calcular: } \quad a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{|x - 2|} \quad b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2 - x)^2}{|2 - x|}.$$

Solución

$$a) \text{ Vamos a analizar la expresión } |x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x - 2 \geq 0 \iff x \geq 2 \\ -(x - 2) & \text{si } x - 2 < 0 \iff x < 2. \end{cases}$$

Luego,

$$\frac{x^2 - 4}{|x - 2|} = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x > 2 \\ \frac{x^2 - 4}{-(x - 2)} & \text{si } x < 2. \end{cases}$$

Como la función $f(x) = \frac{x^2 - 4}{|x - 2|}$ tiene expresiones diferentes según se esté a la derecha o a la izquierda de $x = 2$, se requiere estudiar los límites laterales.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{|x - 2|} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{-(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x - 2)(x + 2)}{-(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} -(x + 2) = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{|x - 2|} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} x + 2 = 4.$$

Se ve que $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{|x - 2|} \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{|x - 2|}$. Por lo tanto se concluye que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{|x - 2|}$ no existe.

$$b) \text{ Note que } |2 - x| = \begin{cases} 2 - x & \text{si } 2 - x \geq 0 \iff x \leq 2 \\ -(2 - x) & \text{si } 2 - x < 0 \iff x > 2. \end{cases}$$

Luego,

$$\frac{(2 - x)^2}{|2 - x|} = \begin{cases} \frac{(2 - x)^2}{2 - x} & \text{si } x < 2 \\ \frac{(2 - x)^2}{-(2 - x)} & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

Por lo tanto, se deben analizar los límites laterales.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(2 - x)^2}{|2 - x|} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2^- \\ x \neq 2}} \frac{(2 - x)^2}{2 - x} = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2 - x) = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(2-x)^2}{|2-x|} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2^+ \\ x \neq 2}} \frac{(2-x)^2}{-(2-x)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} -(2-x) = 0.$$

Se observa que $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(2-x)^2}{|2-x|} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(2-x)^2}{2-x} = 0$ y por lo tanto $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-x)^2}{|2-x|}$ existe y además $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-x)^2}{|2-x|} = 0$.

4. Calcular cada uno de los siguientes límites.

a) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$, donde $f(x) = \frac{1}{x}$.

b) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$, donde $f(x) = |x-3|$.

Solución

a) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{2+h}\right) - \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2-(2+h)}{2(2+h)}}{h} =$
 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2-2-h}{h[2(2+h)]} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h[2(2+h)]} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{2(2+h)} = -\frac{1}{4}.$

b) Note que: $|x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{si } x-3 \geq 0 \iff x \geq 3 \\ -(x-3) & \text{si } x-3 < 0 \iff x < 3. \end{cases}$

Observe que:

- Si $h > 0$, entonces $3+h \geq 3$.
- Si $h < 0$, entonces $3+h < 3$.

Por lo tanto hay que analizar los límites laterales.

Así, $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|(3+h)-3| - |3-3|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1$

$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|(3+h)-3| - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1.$

Puesto que $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} \neq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$.

Se tiene que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$ no existe.

5. a) Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \frac{4-x^3}{3-\sqrt{x^2+5}}$.

Solución Recordemos que una función f es continua en un punto c , si:

- f está definida en el punto c ; es decir $f(c)$ existe.
- $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ existe.
- $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$.

Estudiaremos la expresión $3 - \sqrt{x^2+5}$, para determinar en qué punto o puntos se anula.

Así, $3 - \sqrt{x^2+5} = 0 \iff \sqrt{x^2+5} = 3 \iff x^2+5 = 9 \iff x^2 = 4 \iff x = \pm 2.$

Luego, para $x = 2 \wedge x = -2$, la función no está definida y por lo tanto falla la condición i).

Es decir, f es discontinua en los puntos 2 y -2 .

Seguidamente, vamos a estudiar qué tipo de discontinuidad se presenta en $x = 2$ y $x = -2$.

Recordemos que $x = c$ es una discontinuidad evitable de f , si $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ existe y es un número real.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^3}{3 - \sqrt{x^2 + 5}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(4 - x^3)(3 + \sqrt{x^2 + 5})}{(3 - \sqrt{x^2 + 5})(3 + \sqrt{x^2 + 5})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(4 - x^3)(3 + \sqrt{x^2 + 5})}{9 - (x^2 + 5)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(4 - x^3)(3 + \sqrt{x^2 + 5})}{4 - x^2} = \begin{cases} +\infty & \text{si } x \rightarrow 2^+ \\ -\infty & \text{si } x \rightarrow 2^-. \end{cases}$$

Como $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ no existe, f tiene una discontinuidad inevitable en $x = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4 - x^3}{3 - \sqrt{x^2 + 5}} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(4 - x^3)(3 + \sqrt{x^2 + 5})}{4 - x^2} = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \rightarrow -2^- \\ +\infty & \text{si } x \rightarrow -2^+. \end{cases}$$

Puesto que $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ no existe, se concluye que en $x = -2$, la función f tiene una discontinuidad inevitable.

b) Estudiar la continuidad de $f(x) = \frac{|x|}{x}$.

Solución Claramente la función no está definida en $x = 0$, por lo tanto f es discontinua en ese punto. Para ver si la discontinuidad en $x = 0$ es evitable o no, vamos a estudiar

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

$$\text{Recordemos que } |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Luego,

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1 & \text{si } x > 0 \\ -\frac{x}{x} = -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Por lo tanto, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$ y $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1$.

Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, se concluye que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ no existe y consecuentemente la discontinuidad en $x = 0$ es inevitable.

c) Estudiar la continuidad de $f(x) = \frac{x^2 - 3x - 10}{x + 2}$.

Solución Recordemos que $x + 2 = 0 \iff x = -2$. Por lo tanto, la función no está definida en $x = -2$ y en consecuencia f es discontinua en $x = -2$. Para ver el tipo de discontinuidad, estudiaremos $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 3x - 10}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)(x - 5)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} (x - 5) = -7, \text{ pues } x \neq -2.$$

Como $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ existe, la discontinuidad en $x = -2$ es evitable.

¿Cómo se evita? Definiendo $f(-2) = -7 = \lim_{x \rightarrow -2} f(x)$.

d) Estudiar la continuidad de $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Solución La única discontinuidad puede estar en el punto $x = 0$. Seguidamente vamos a estudiar las tres condiciones para la continuidad en un punto.

(i) Claramente la función está definida en $x = 0$, pues $f(0) = \frac{1}{2}$.

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{2} \text{ pues } x \neq 0.$$

(iii) Es claro que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = \frac{1}{2}$.

Así, la función satisface las condiciones de continuidad en un punto y en consecuencia la función es continua en 0.

e) Estudiar la continuidad de $f(x) = \begin{cases} 4(x^2+1) & \text{si } x \leq 0 \\ 2x+3 & \text{si } x > 0. \end{cases}$

Solución Dado que la expresión para la función f es diferente según se esté a la derecha o a la izquierda de $x = 0$, vamos a estudiar qué pasa con la continuidad en $x = 0$. Note que la función está definida en $x = 0$ y que $f(0) = 4(0^2+1) = 4$.

Vamos a estudiar el $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Así: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 4(x^2+1) = 4$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x+3 = 3$.

Como $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, se concluye que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ no existe y por lo tanto la función tiene una discontinuidad en $x = 0$. Puesto que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ no existe, la discontinuidad no es evitable.

f) Estudiar la continuidad de $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|-1}{x^2-1} & \text{si } x \in \mathbb{R} - \{1, -1\} \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x = -1. \end{cases}$

Solución Por la manera como está definida la función, los puntos de posibles discontinuidades son: $x = 1$ y $x = -1$.

Caso $x = 1$: Vamos a estudiar las tres condiciones de continuidad.

(i) f está definida en $x = 1$ y además $f(1) = \frac{1}{2}$.

(ii) Estudio del $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$. Primeramente observemos que hay un valor absoluto.

Por lo tanto, vamos a definir más explícitamente la función f . Así,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x-1}{x^2-1} & \text{si } x \in]-\infty, -1[\cup]-1, 0[\\ \frac{x-1}{x^2-1} & \text{si } x \in [0, 1[\cup]1, +\infty[\\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x = -1. \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2} \text{ pues } x \neq 1.$$

Note que en este caso como $x \rightarrow 1$, entonces $x > 0$.

- (iii) Claramente se ve que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{2} = f(1)$. Por lo tanto la función es continua en $x = 1$.

Caso $x = -1$: Análogamente, se estudiarán las tres condiciones de continuidad en un punto.

- (i) Es claro que f está definida en $x = -1$ y $f(-1) = -\frac{1}{2}$.

- (ii) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-(x+1)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-1}{x-1} = \frac{1}{2}$ pues $x \neq -1$.

Luego: $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{1}{2}$. Note que como $x \rightarrow -1$, $x < 0$.

- (iii) Puesto que $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{1}{2} \neq f(-1) = -\frac{1}{2}$, se concluye que la función tiene una discontinuidad en $x = -1$. La discontinuidad es evitable pues $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ existe. ¿Cómo se evita?

Definiendo $f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{1}{2}$.

g) Estudiar la continuidad de $f(x) = x - [x]$.

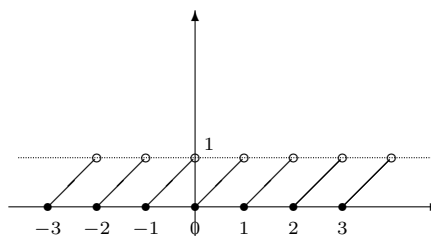
Solución Recordemos que $[x]$ es el mayor entero menor o igual a x .

Ejemplo

$$\begin{aligned} [0] &= 0, & [0.5] &= 0, & [0.99] &= 0, & [1] &= 1, & [1.5] &= 1, & [1.99] &= 1, \\ [2] &= 2, & [2.5] &= 2, & [2.89] &= 2, & [-0.5] &= -1, & [-0.99] &= -1, & [-1] &= -1, \\ [-1.01] &= -2, & [-1.85] &= -2, & [-2] &= -2. \end{aligned}$$

Para tener una idea del comportamiento de la función $f(x) = x - [x]$, vamos a esbozar la gráfica.

Observando la gráfica, nos damos cuenta inmediatamente que hay discontinuidad en cada entero y además son discontinuidades no evitables, pues el $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ no existe, si p es entero.



h) Estudiar la continuidad de $f(x) = \begin{cases} |x-2|+3 & \text{si } x < 0 \\ x+5 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

Solución Primero vamos a analizar el valor absoluto.

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{si } x-2 \geq 0 \iff x \geq 2 \\ -(x-2) & \text{si } x-2 < 0 \iff x < 2. \end{cases}$$

$$\text{Luego: } |x-2|+3 = \begin{cases} (x-2)+3 & \text{si } x \geq 2 \\ -(x-2)+3 & \text{si } x < 2. \end{cases}$$

Como: $f(x) = |x-2|+3$ si $x < 0$, en particular $x < 2$ y por lo tanto:

$$f(x) = \begin{cases} -(x-2)+3 & \text{si } x < 0 \\ x+5 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Vamos a estudiar la continuidad en el punto $x = 0$.

(i) Es claro que la función está definida en $x = 0$ y además $f(0) = 0 + 5 = 5$.

(ii) Seguidamente estudiaremos $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} [-(x-2)+3] = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x+5) = 5 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x+5 = 5.$$

Puesto que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, se concluye que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existe y además $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 5$.

(iii) Resulta inmediato que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 5$, por lo tanto la función es continua en $x = 0$.

Nota En todos los casos anteriores, se estudió los puntos que presentaban posibles discontinuidades. En los restantes puntos siempre hay continuidad.

6. a) Valor de k para que f sea continua en el punto indicado.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+1} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ kx^2 & \text{si } x < -1 \text{ ó } x > 1 \end{cases}; \text{ en } x = \pm 1.$$

Solución

Caso $x = 1$

(i) f está definida en $x = 1$ y además $f(1) = \frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{2}$.

(ii) Estudio del $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

$$\text{Así, } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} kx^2 = k.$$

Una condición para la continuidad de f en $x = 1$, es que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ exista.

Sabemos que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ existe $\iff \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$. Por lo tanto: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ existe $\iff k = \frac{1}{2}$.

- (iii) Note que si $k = \frac{1}{2}$, se tiene que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ existe y además $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = \frac{1}{2}$ y, consecuentemente la función es continua en $x = 1$.

Caso $x = -1$

- (i) f está definida en $x = -1$ y además $f(-1) = \frac{1}{(-1)^2 + 1} = \frac{1}{2}$.
- (ii) Estudio de $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.
- Así, $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} kx^2 = k$ y $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{1}{2}$.
- Luego, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ existe $\iff \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \iff k = \frac{1}{2}$.
- (iii) Note que si $k = \frac{1}{2}$, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{1}{2}$ y además: $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$, por lo tanto f es continua en $x = -1$.

b) Valor de k para la continuidad en $x = 0$, de $f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{si } x < 0 \\ x + k & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$

Solución Vamos a estudiar las tres condiciones de la continuidad en un punto:

- (i) f está definida en $x = 0$ y además $f(0) = 0 + k = k$.
- (ii) Estudio del $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Así, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (3x - 2) = -2$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + k) = k$.
- Luego, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existe $\iff \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \iff k = -2$.
- (iii) Observe que si $k = -2$, entonces $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existe y además: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -2 = f(0)$ y consecuentemente la función es continua en $x = 0$.

c) Encontrar el valor de k para la continuidad en $x = 1$ de $f(x) = \begin{cases} \frac{x^4 - x^2 + x - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ k & \text{si } x = 1. \end{cases}$

Solución La posible discontinuidad está en $x = 1$, entonces vamos a estudiar las tres condiciones de continuidad en un punto.

- (i) Claramente f está definida en $x = 1$ y además $f(1) = k$.
- (ii) Estudio de $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.
- $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - x^2 + x - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^3 + x^2 + 1)}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$ pues $x \neq 1$.
- (iii) Para que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$, debe ser $k = 3$. Así si $k = 3$ la función es continua en $x = 1$.

7. a) Asíntotas verticales de la gráfica de $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$.

Solución Recordemos que una asíntota vertical es una recta $x = a$, para la cual:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{o} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty.$$

Aquí, nos interesa estudiar los casos $x = 1$ y $x = -1$ que son los puntos que anulan el denominador.

Nota Para el caso en que $f(x)$ es un cociente de polinomios, los puntos importantes de estudiar son los ceros del denominador.

Observe que $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x^2 - 1} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x^2 - 1} = -\infty$ y $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{x^2 - 1} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{x^2 - 1} = -\infty$.

Por lo tanto las rectas $x = 1$ y $x = -1$ son asíntotas verticales de la gráfica de f .

b) Asíntotas verticales de la gráfica de $f(x) = \frac{x^3}{x^3 - 1}$.

Solución Como la función f es una fracción racional (cociente de polinomios), vamos a estudiar los ceros del denominador, es decir vamos a estudiar el punto $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3}{x^3 - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3}{x^3 - 1} = +\infty.$$

Por lo tanto $x = 1$ es asíntota vertical de la gráfica de f .

c) Asíntotas verticales de la gráfica de $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{2x^2 + x + 2}$.

Solución De nuevo vamos a estudiar los ceros del denominador. Así: $2x^2 + x + 2$ es una ecuación cuadrática cuyo discriminante es: $\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(2)(2) = -15 < 0$. Por lo tanto, $2x^2 + x + 2 = 0$ no tiene soluciones reales, lo que implica que no hay asíntotas verticales.

UN TRUCO !

Si $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ y x_o es tal que: $P(x_o) \neq 0$ y $Q(x_o) = 0$, entonces $x = x_o$ es una asíntota vertical de la gráfica de f .

8. Asíntotas verticales y discontinuidades evitables de:

a) $f(x) = \frac{2x^2 - 12x + 16}{x^2 - 5x + 6}$.

Solución Nuevamente, $f(x)$ es una fracción racional cuyo denominador $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$, se anula en $x = 2 \wedge x = 3$.

Observe que: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 12x + 16}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-2)(x-4)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-4)}{(x-3)} = 4$, para $x \neq 2$.

Por lo tanto $x = 2$ no es asíntota vertical de la gráfica de f (el $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ no es $\pm\infty$).

En este caso, en $x = 2$ la función tiene una discontinuidad evitable. La discontinuidad en $x = 2$ se puede evitar definiendo $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$. ¿Qué pasa con $x = 3$?

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 12x + 16}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(x-2)(x-4)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(x-4)}{(x-3)} = ?$$

Analizando los límites laterales se obtiene: $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2(x-4)}{(x-3)} = -\infty \wedge \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2(x-4)}{(x-3)} = +\infty$.

Por lo tanto $x = 3$ es asíntota vertical de la gráfica de f .

Otra manera (usando el TRUCO).

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x^2 - 12x + 16}{x^2 - 5x + 6}.$$

Luego: $P(x) = 2x^2 - 12x + 16 \implies P(3) = -2$ y $Q(x) = x^2 - 5x + 6 \implies Q(3) = 0$.

Resulta que $x = 3$ es asíntota vertical.

$$b) f(x) = \frac{3(x^2 + x - 6)}{x(x-1)(x-2)}.$$

Solución Como $f(x)$ es una fracción racional, vamos a estudiar los ceros del denominador.

Los ceros son : $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$.

Tenemos que:

$$P(x) = 3(x^2 + x - 6) = 3(x-2)(x+3) \implies P(0) = -18.$$

$$Q(x) = x(x-1)(x-2) \implies Q(0) = 0.$$

Por lo tanto: $x = 0$ es asíntota vertical de la gráfica de f .

Además: $P(1) = -12$ y $Q(1) = 0$, entonces: $x = 1$ es asíntota vertical.

Finalmente: $P(2) = 0$ y $Q(2) = 0$.

Vamos a estudiar el $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

$$\text{Así: } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x-2)(x+3)}{x(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x+3)}{x(x-1)} = \frac{15}{2}, \text{ pues } x \neq 2.$$

Por lo tanto en $x = 2$ no hay asíntota vertical (el límite no es infinito).

En $x = 2$, la función tiene una discontinuidad evitable.

Esta discontinuidad se evita definiendo $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{15}{2}$.

9. Calcular cada uno de los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-4}{(x-2)^2}.$$

Solución Observe que: $(x-2)^2 \xrightarrow{x \rightarrow 2} 0^+$ $\wedge$ $x-4 \xrightarrow{x \rightarrow 2} -2 \implies \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-4}{(x-2)^2} = -\infty$.

$$b) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x+4}{3-x}.$$

Solución Vamos a estudiar los límites laterales.

$$\text{Luego: } \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x+4}{3-x} = +\infty \text{ pues: } 3-x \xrightarrow{x \rightarrow 3^-} 0^+ \wedge 2x+4 \xrightarrow{x \rightarrow 3^-} 10.$$

$$\text{Luego: } \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x+4}{3-x} = -\infty \text{ pues: } 3-x \xrightarrow{x \rightarrow 3^+} 0^- \wedge 2x+4 \xrightarrow{x \rightarrow 3^+} 10.$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{|x-2|}.$$

Solución Vamos a estudiar los límites laterales.

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{si } x-2 \geq 0 \iff x \geq 2 \\ -(x-2) & \text{si } x-2 < 0 \iff x < 2 \end{cases}$$

$$\text{Luego: } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3}{|x-2|} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3}{-(x-2)} = +\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{|x-2|} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{x-2} = +\infty.$$

$$\text{Así: } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{|x-2|} = +\infty.$$

Otra manera :

$$\text{Observe que: } |x-2| \xrightarrow{x \rightarrow 2} 0^+ \implies \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{|x-2|} = +\infty.$$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 8x - 9}{x^2 - 2x + 1}.$

Solución $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 8x - 9}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+9)}{(x-1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+9}{x-1};$ si $x \neq 1$.

Vamos a estudiar los límites laterales.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+9}{x-1} = +\infty \text{ pues: } x+9 \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} 10 \quad \wedge \quad x-1 \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} 0^+.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+9}{x-1} = -\infty, \text{ pues: } x+9 \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} 10 \quad \wedge \quad x-1 \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} 0^-.$$

CONCLUSIÓN:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 8x - 9}{x^2 - 2x + 1} = +\infty \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 8x - 9}{x^2 - 2x + 1} = -\infty.$$

Ejercicios de límites y continuidad: III Parte Prof. Rosendo Pizarro

1. Determine los siguientes límites (si existen)

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4x + 3} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} & \text{c) } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(2 + \Delta x)^2 - 4}{\Delta x} \\
 \text{d) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 7}{(x - 2)^2} & \text{e) } \lim_{x \rightarrow 4} \left| \frac{x + 5}{x - 4} \right| & \text{f) } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}{h} \\
 \text{g) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x| - x}{x - 1} & \text{h) } \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x} - x & \text{i) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3x^2 + x}}{x} \\
 \text{j) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 3x^2}{2x^2 - 4x - 7}
 \end{array}$$

2. Sea f una función definida por: $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0. \end{cases}$

Hallar si existen:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 3} f(x)
 \end{array}$$

3. Compruebe que f definida por:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 2 \\ 5 & \text{si } x = 2 \\ -x + 6 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

Es discontinua en $x = 2$.

b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ es continua en $(-1, 1)$ pero no en $[-1, 1]$.

c) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ es continua en $[-1, 1]$.

d) $f(x) = \sqrt{x-1}$ es continua en $[1, \infty]$.

$$\text{e) } f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 + 3 & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ 4x + 3 & \text{si } 3 < x. \end{cases}$$

tiene discontinuidades evitables en $x = 1$ y $x = 3$.

Soluciones de límites y continuidad: III Parte Rosendo Pizarro

1. Determine los siguientes límites (si existen)

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4x + 3} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} & \text{c) } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(2 + \Delta x)^2 - 4}{\Delta x} \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 7}{(x - 2)^2} & \text{e) } \lim_{x \rightarrow 4} \left| \frac{x + 5}{x - 4} \right| & \text{f) } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}{h} \\ \text{g) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x| - x}{x - 1} & \text{h) } \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x} - x & \text{i) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3x^2 + x}}{x} \\ \text{j) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 3x^2}{2x^2 - 4x - 7} \end{array}$$

Solución

$$\text{a) } \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x \neq 3}} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4x + 3} \begin{array}{l} \nearrow 0 \\ \searrow 0 \end{array} = \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x \neq 3}} \frac{(x+3)(x-3)}{(x-3)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)}{(x-1)} = \frac{3+3}{3-1} = \frac{6}{2} = 3.$$

$$\text{b) } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \neq 1}} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} \begin{array}{l} \nearrow 0 \\ \searrow 0 \end{array} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \neq 1}} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1}{(x+1)} = \frac{1+1+1}{1+1} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{c) } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(2 + \Delta x)^2 - 4}{\Delta x} \begin{array}{l} \nearrow 0 \\ \searrow 0 \end{array} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4 + 4\Delta x + (\Delta x)^2 - 4}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x \neq 0}} \frac{\Delta x(4 + \Delta x)}{\Delta x} = 4 + 0 = 4.$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 7}{(x - 2)^2}.$$

i) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x - 7}{(x - 2)^2} = -\infty$, pues si nos aproximamos a 2^- , por ejemplo para $x = 1.99$, el cociente $\frac{1.99 - 7}{(1.99 - 2)^2} = -\frac{5.01}{(0.01)^2} = -\frac{5.01}{0.0001} = -50100$, es siempre negativo (el denominador tiende a cero positivamente) y tiende a $-\infty$.

ii) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 7}{(x - 2)^2} = -\infty$, pues si nos aproximamos a 2^+ , por ejemplo para $x = 2.01$, el cociente $\frac{2.01 - 7}{(2.01 - 2)^2} = -\frac{4.99}{(0.01)^2} = -\frac{4.99}{0.0001} = -49900$, es siempre negativo (el denominador tiende a cero positivamente) y tiende a $-\infty$.

Así, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 7}{(x - 2)^2} = -\infty$.

Nota Observe que $(x - 2)^2 \rightarrow 0^+$ y $x - 7 \rightarrow -5$, cuando $x \rightarrow 2$, por lo tanto $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 7}{(x - 2)^2} = -\infty$.

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 4} \left| \frac{x + 5}{x - 4} \right|.$$

i) Para $x > 4$, $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x+5}{x-4} = +\infty$, ya que si nos acercamos a 4 con valores mayores que 4, por ejemplo 4.01, el cociente $\frac{4.01+5}{4.01-4} = \frac{9.01}{0.01} = 901$ (crece a $+\infty$). Observe que $x-4$ tiende a cero positivamente.

ii) Para $x < 4$, $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x+5}{-x+4} = +\infty$, pues si los valores son menores que 4, por ejemplo 3.99, el cociente $\frac{3.99+5}{-3.99+4} = \frac{8.99}{0.01} = 899$ (crece a $+\infty$). Observe que el denominador tiende a cero positivamente.

Finalmente, $\lim_{x \rightarrow 4} \left| \frac{x+5}{x-4} \right| = +\infty$.

$$\text{f) } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \begin{matrix} \nearrow 0 \\ \searrow 0 \end{matrix} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})}{h} \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h})^2 - (\sqrt{x})^2}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x| - x}{x - 1} \begin{matrix} \nearrow 0 \\ \searrow 0 \end{matrix}$$

$$\text{Para } x > 1, \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x| - x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{0}{x - 1} = 0.$$

$$\text{Para } x < 1 \text{ y } x \geq 0, \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x| - x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{0}{x - 1} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x| - x}{x - 1} = 0.$$

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x$ ($\infty - \infty$) indeterminado.

Se multiplica y divide por $\sqrt{x^2 + x} + x$ y tenemos $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) \frac{\sqrt{x^2 + x} + x}{\sqrt{x^2 + x} + x} =$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2(1 + \frac{1}{x})} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0} + 1} = \frac{1}{2}.$$

Note que como $x \rightarrow +\infty$, $x > 0$ y $|x| = x$.

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3x^2 + x}}{x} \begin{matrix} \nearrow \infty \\ \searrow \infty \end{matrix} \quad (\frac{\infty}{\infty} \text{ indeterminado}).$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2(3 + \frac{x}{x^2})}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x|\sqrt{3 + \frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x\sqrt{3 + \frac{1}{x}}}{x} = \sqrt{3 + 0} = \sqrt{3}.$$

j) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 3x^2}{2x^2 - 4x - 7}$ indeterminado.

Se divide tanto el numerador y denominador por x elevada a la mayor potencia que

aparezca en el denominador, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2x^3}{x^2} - \frac{3x^2}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{4x}{x^2} - \frac{7}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 3}{2 - \frac{4}{x} - \frac{7}{x^2}} = -\infty$.

2. Sea f una función definida por $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0. \end{cases}$

Hallar si existen:

a) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

Solución

a) Como $x \rightarrow -2 \implies x < 0$, $f(x) = x$, por lo tanto $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} x = -2$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existe, pues $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0$ y $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$.

Observe que la función no es continua en 0 ya que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \neq f(0) = 1$.

c) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9$.

3. Compruebe que f definida por:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 2 \\ 5 & \text{si } x = 2 \\ -x + 6 & \text{si } x > 2, \end{cases}$

es discontinua en $x = 2$

b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ es continua en $] -1, 1 [$, pero no en $[-1, 1]$.

c) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ es continua en $[-1, 1]$.

d) $f(x) = \sqrt{x-1}$ es continua en $[1, \infty [$.

e) $f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 + 3 & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ 4x + 3 & \text{si } 3 < x, \end{cases}$

tiene discontinuidades evitables en $x = 1$ y $x = 3$.

Solución

Recordemos que f es continua en x_0 si:

i) f está definida en x_0 , es decir $f(x_0)$ existe.

ii) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe

$$\text{iii) } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

f es continua en $[a, b]$, si es continua en cada punto de $]a, b[$ y es continua por la derecha en a y por la izquierda en b .

a) Como $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2^2 = 4$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -2 + 6 = 4 \neq f(2) = 5 \implies f$ es discontinua en $x = 2$, pues falla iii). Observe que $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2^2 = 4$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -2 + 6 = 4$.

b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ es continua en $] -1, +1 [$, pues la función que aparece en el denominador $\sqrt{1-x^2}$ nunca se anula en $] -1, +1 [$, no es continua en $[-1, 1]$ ya que $f(-1)$ ni $f(1)$ están definidas.

c) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ es continua en $[-1, 1]$, veamos que:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1) = 0 \text{ y } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = 0.$$

d) $f(x) = \sqrt{x-1}$ es continua en $[1, \infty)$, puesto que $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x-1} = f(1) = 0$.

e) f está definida en $\mathbb{R}$.

Observemos que:

i) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 4$ y $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4 \implies \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4$, lo que implica que en $x = 1$ hay una discontinuidad **evitable**.

ii) Por otra parte, $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 12$ y $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 15 \implies \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ **no existe**, por lo que en $x = 3$ hay una discontinuidad **inevitable** (y es de salto finito).

Tema No. 2

Ejercicios de derivación: I Parte Prof. Lester Izaguirre

- Usando la definición de derivada $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, halle $f'(x)$, si $f(x) = x^3 + 2x$.
- Halle la ecuación de la recta tangente a la parábola $f(x) = x^2$, en el punto $P(1, 1)$.
- Halle $f'(x)$, si:
 - $f(x) = (3x - 2)(x + 4)(5 - 2x)$
 - $f(x) = (a + x)^m(b + x)^n$
 - $f(x) = 8(x + 1)^2(x + 2)^3$
 - $f(x) = \frac{2}{7}x^3\sqrt{x} - \frac{4}{11}x^5\sqrt{x} + \frac{2}{15}x^7\sqrt{x}, x \geq 0$
 - $f(x) = \frac{2 - 3\sqrt{x} + 4\sqrt[3]{x} + x^2}{x}, x > 0$
 - $f(x) = \frac{a}{(a - x)\sqrt{a^2 - x^2}}, |x| < a$
 - $f(x) = \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}, |x| < a$
 - $f(x) = \left(\frac{2x+1}{3x-1}\right)^4, x \neq \frac{1}{3}$
 - $f(x) = (2x - 1)^4(3x + 1)^2$
 - $f(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{(a^2 - x^2)^2}, x \neq a$
 - $f(x) = (3x + 2)^3\sqrt{2x + 1}, x > -\frac{1}{2}$
 - $f(x) = |x^2 - 4|$
 - $f(x) = |x^3 + x|$
 - $x^2y^2 + xy = 2$, utilice derivación implícita.
- Halle las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la curva $x^2 + 2xy^2 + 3y^4 - 6 = 0$ en el punto $Q(1, -1)$.
- Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto indicado.
 - $xy = 8 + y$ en $P(3, 4)$.
 - $x^5 + y^5 - 2xy = 0$ en $P(1, 1)$.
- ¿En qué punto de la curva $y^2 = 2x^3$, la tangente es perpendicular a la recta $4x - 3y + 2 = 0$? Resuelva los problemas siguientes.
- El radio de la base de un cono circular recto disminuye a razón de $4\text{cm}/\text{min}$ y la altura aumenta a razón de $6\text{cm}/\text{min}$. Encontrar la velocidad con la que cambia el volumen cuando la altura es de 12cm y el radio es de 6cm .
- La arena que empieza a vaciarse de una tolva, a razón de $10\text{m}^3/\text{s}$, forma una pila cónica

cuya altura es el doble de su radio. ¿A qué razón aumenta el radio de la pila cuando su altura es de $5m$?

9. Una mancha circular de petróleo de grosor uniforme ha sido causada por el derrame de $10m^3$ de petróleo. El grosor de la mancha está disminuyendo a razón de $1cm/s$. ¿A qué razón aumenta el radio de la mancha cuando mide $8m$?
10. Una piedra se lanza verticalmente hacia arriba (desde el suelo), suponiendo que el sentido de la velocidad es positiva hacia arriba y que la posición instantánea está dada por $s(t) = 20t - 5t^2$.
 - (a) Halle la velocidad instantánea de la piedra al término de $1s$.
 - (b) Halle la velocidad instantánea de la piedra al término de $3s$.

Soluciones de ejercicios de derivación: I Parte Prof. Lester Izaguirre

1. Usando la definición de derivada $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, halle $f'(x)$, si $f(x) = x^3 + 2x$.

Solución Se debe tener claro que $f(x+h)$ es la imagen de $(x+h)$ bajo la función f , por lo tanto $f(x+h) = (x+h)^3 + 2(x+h)$. De modo que:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(x+h)^3 + 2(x+h)] - (x^3 + 2x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 + 2x + 2h] - (x^3 + 2x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 + 2x + 2h - x^3 - 2x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2 + 2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2 + 2) = 3x^2 + 2. \end{aligned}$$

2. Halle la ecuación de la recta tangente a la parábola $f(x) = x^2$, en el punto $P(1, 1)$.

Solución La pendiente de la recta tangente es $m = f'(1) = 2$, pues $f'(x) = 2x$ y la ecuación de la recta tangente a la curva está dada por la ecuación $y - y_0 = m(x - x_0)$. Por lo tanto, evaluando en el punto $P(1, 1)$ se tiene $y - 1 = m(x - 1)$ y en este caso la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado es $y = 2x - 1$.

Otra alternativa es calcular la pendiente¹. En efecto:

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2.$$

Luego $y - 1 = 2(x - 1)$, por lo tanto la ecuación se puede escribir $2x - y - 1 = 0$.

3. Halle $f'(x)$, si:

a) $f(x) = (3x - 2)(x + 4)(5 - 2x)$

g) $f(x) = \left(\frac{2x+1}{3x-1}\right)^4, x \neq \frac{1}{3}$

b) $f(x) = (a + x)^m(b + x)^n$

h) $f(x) = (2x - 1)^4(3x + 1)^2$

c) $f(x) = 8(x + 1)^2(x + 2)^3$

i) $f(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{(a^2 - x^2)^2}, x \neq a$

ch) $f(x) = \frac{2}{7}x^3\sqrt{x} - \frac{4}{11}x^5\sqrt{x} + \frac{2}{15}x^7\sqrt{x}, x \geq 0$

j) $f(x) = (3x + 2)^3\sqrt{2x + 1}, x > -\frac{1}{2}$

d) $f(x) = \frac{2 - 3\sqrt{x} + 4\sqrt[3]{x} + x^2}{x}, x > 0$

k) $f(x) = |x^2 - 4|$

e) $f(x) = \frac{a}{(a-x)\sqrt{a^2 - x^2}}, |x| < a$

l) $f(x) = |x^3 + x|$

f) $f(x) = \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}, |x| < a$

m) $f(x) = x^2y^2 + xy = 2$ utilice derivación implícita.

Solución

a) Para hallar $f'(x)$ si $f(x) = (3x - 2)(x + 4)(5 - 2x)$, se puede usar la regla del producto, definiendo $h(x) = (3x - 2)(x + 4)$ y $g(x) = (5 - 2x)$, de modo que se procede como sigue:

¹ $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, la cual se puede usar en el caso de que se conozca el punto específico donde se desea calcular la pendiente

$$f'(x) = [(3x-2)(x+4)] \cdot \frac{d}{dx}(5-2x) + (5-2x) \cdot \frac{d}{dx} [(3x-2)(x+4)] \text{ lo que significa que}$$

$$f'(x) = (3x-2)(x+4)(-2) + (5-2x)[(3x-2)(1) + (x+4)(3)] = -2(3x-2)(x+4) + (5-2x)(6x+10)$$

$$f'(x) = -2(3x^2 + 10x - 8) + 50 + 10x - 12x^2 = -6x^2 - 20x + 16 + 50 + 10x - 12x^2 =$$

$$-18x^2 - 10x + 66. \text{ Observe que para derivar } h(x) \text{ utilizamos la regla del producto.}$$

b) Para derivar $f(x) = (a+x)^m(b+x)^n$ se utilizará el teorema del producto, usado en el caso anterior. Además, se debe tener claro el uso de la expresión $f(x)$, pues ella indica que la función es de variable x y toda letra que no sea x es una constante. Por lo anterior se tiene:

$$f'(x) = (a+x)^m \cdot \frac{d}{dx}(b+x)^n + (b+x)^n \cdot \frac{d}{dx} [(a+x)^m]$$

$$f'(x) = (a+x)^m \cdot n(b+x)^{n-1} + (b+x)^n \cdot m(a+x)^{m-1}$$

$$f'(x) = (a+x)^{m-1}(b+x)^{n-1} [n(a+x) + m(b+x)].$$

c) La derivada de $f(x) = 8(x+1)^2(x+2)^3$ se obtiene en forma similar al caso anterior:

$$f'(x) = 8(x+1)^2(3)(x+2)^2 + 8(x+2)^3(2)(x+1). \text{ Factorizando se obtiene:}$$

$$f'(x) = 8(x+1)(x+2)^2 [3(x+1) + 2(x+2)] = 8(x+1)(x+2)^2(5x+7).$$

ch) Para derivar $f(x) = \frac{2}{7}x^3\sqrt{x} - \frac{4}{11}x^5\sqrt{x} + \frac{2}{15}x^7\sqrt{x}$, $x \geq 0$, conviene escribir los términos que están en notación de radical en notación exponencial, como sigue:

$$f(x) = \frac{2}{7}x^3x^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{11}x^5x^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{15}x^7x^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{11}x^{\frac{11}{2}} + \frac{2}{15}x^{\frac{15}{2}}.$$

$$\text{Ahora la derivada es } f'(x) = (\frac{2}{7})(\frac{7}{2})x^{\frac{5}{2}} - (\frac{4}{11})(\frac{11}{2})x^{\frac{9}{2}} + (\frac{2}{15})(\frac{15}{2})x^{\frac{13}{2}} = x^{\frac{5}{2}} - 2x^{\frac{9}{2}} + x^{\frac{13}{2}} =$$

$$x^2\sqrt{x} - 2x^4\sqrt{x} + x^6\sqrt{x}.$$

d) En $f(x) = \frac{2-3\sqrt{x}+4\sqrt[3]{x}+x^2}{x}$, $x > 0$ conviene trasladar la x del denominador al numerador, efectuar el producto y luego derivar, es decir:

$$f(x) = x^{-1}(2-3x^{\frac{1}{2}}+4x^{\frac{1}{3}}+x^2) = 2x^{-1} - 3x^{-\frac{1}{2}} + 4x^{-\frac{2}{3}} + x,$$

$$\text{luego } f'(x) = -2x^{-2} - 3(-\frac{1}{2})x^{-\frac{3}{2}} + 4(-\frac{2}{3})x^{-\frac{5}{3}} + 1 = -\frac{2}{x^2} + \frac{3}{2x\sqrt{x}} + \frac{-8}{3x\sqrt[3]{x^2}} + 1.$$

e) Debe recordarse la regla para derivar un cociente², por lo tanto:

$$f'(x) = \frac{-a[(a-x)(\frac{1}{2})(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) + \sqrt{a^2-x^2}(-1)]}{(a-x)^2(\sqrt{a^2-x^2})^2}$$

$$f'(x) = \frac{-a[\frac{-x(a-x)}{\sqrt{a^2-x^2}} - \sqrt{a^2-x^2}]}{(a-x)^2(a^2-x^2)} = \frac{ax(a-x) + a(a^2-x^2)}{(a-x)^2(a^2-x^2)} \Rightarrow$$

²Si $f(x) = \frac{a}{g(x)}$, entonces $f'(x) = \frac{-a \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

$$f'(x) = \frac{a(a-x)[x+(a+x)]}{(a-x)^2(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{a(2x+a)}{(a-x)(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

f) Al obtener la derivada de la función propuesta se utiliza:

- regla de las potencias
- regla del cociente
- regla de la cadena

Se escribe $f(x) = \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ como $f(x) = \left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{\frac{1}{2}}$ y derivando se obtiene:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{(a-x)(1) - (a+x)(-1)}{(a-x)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{a-x}{a+x}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{a-x+a+x}{(a-x)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{a-x}}{2\sqrt{a+x}} \cdot \frac{2a}{(a-x)^2} = \frac{a\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}(a-x)^2}, \text{ de donde:}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{a}{2}}{(a-x)^{\frac{3}{2}}\sqrt{a+x}} = \frac{a}{(a-x)(\sqrt{a-x})(\sqrt{a+x})} = \frac{a}{(a-x)\sqrt{a^2-x^2}}.$$

$$\text{g) } f'(x) = 4 \left(\frac{2x+1}{3x-1}\right)^3 \left[\frac{(3x-1)(2) - (2x+1)(3)}{(3x-1)^2} \right] = 4 \left(\frac{2x+1}{3x-1}\right)^3 \left[\frac{6x-2-6x-3}{(3x-1)^2} \right] =$$

$$\frac{-20(2x+1)^3}{(3x-1)^5}.$$

$$\text{h) } f'(x) = (2x-1)^4(2)(3x+1)(3) + (3x+1)^2(4)(2x-1)^3(2) =$$

$$2(2x-1)^3(3x+1)[(2x-1)3 + (3x+1)4] = 2(2x-1)^3(3x+1)[6x-3+12x+4] =$$

$$2(3x+1)(2x-1)^3(18x+1).$$

$$\text{i) } f'(x) = \frac{(a^2-x^2)^2(\frac{1}{2})(a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}(2x) - \sqrt{a^2+x^2}(2)(a^2-x^2)(-2x)}{(a^2-x^2)^4} =$$

$$\frac{\frac{x(a^2-x^2)^2}{\sqrt{a^2+x^2}} + 4x(a^2-x^2)\sqrt{a^2+x^2}}{(a^2-x^2)^4} \text{ y simplificando la expresión anterior se obtiene:}$$

$$f'(x) = \frac{x(5a^2+3x^2)}{(a^2-x^2)^3} \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

$$\text{j) } f'(x) = (3x+2)^3(\frac{1}{2})(2x+1)^{-\frac{1}{2}}(2) + \sqrt{2x+1}(3)(3x+2)^2(3) =$$

$$\frac{(3x+2)^3}{\sqrt{2x+1}} + 9\sqrt{2x+1}(3x+2)^2 = \frac{(3x+2)^3 + 9(2x+1)(3x+2)^2}{\sqrt{2x+1}}, \text{ y simplificando la expresión anterior se obtiene:}$$

$$f'(x) = \frac{(3x+2)^2 \cdot [21x+11]}{\sqrt{2x+1}}.$$

k) Al obtener la derivada de $f(x) = |x^2 - 4|$ se debe recordar³ la derivada del valor absoluto de una función. Así que tomando $u = x^2 - 4$ se obtiene:

$$f'(x) = \frac{(x^2-4)(2x)}{|x^2-4|}, \text{ si } x \neq \pm 2.$$

³ $\frac{d}{dx} [|u|] = \frac{u \cdot u'}{|u|}$

l) En forma similar se obtiene la derivada de $f(x) = |x^3 + x|$, es decir $f'(x) = \frac{(x^3 + x)(3x^2 + 1)}{|x^3 + x|}$, $x \neq 0$.

m) Usando derivación implícita en la ecuación $x^2y^2 + xy = 2$, se tiene $x^2 \cdot 2yy' + y^2(2x) + xy' + y(1) = 0$, agrupando y' en el miembro izquierdo de la ecuación:

$$2x^2yy' + xy' = -2xy^2 - y \implies y'(2x^2y + x) = -(2xy^2 + y) \implies y' = \frac{-(2xy^2 + y)}{2x^2y + x}.$$

4. Halle las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la curva $x^2 + 2xy^2 + 3y^4 - 6 = 0$ en el punto $Q(1, -1)$.

Solución Como ya se dijo la ecuación de la recta tangente a una curva está dada por la ecuación $y - y_0 = m(x - x_0)$ y la ecuación de la recta normal está dada por la ecuación $y - y_0 = -\frac{1}{m}(x - x_0)$.

Por otro lado se trata de encontrar las ecuaciones en el punto $Q(1, -1)$, entonces se procede a hallar primero la ecuación de la recta tangente, esto es, $y + 1 = m(x - 1)$.

Hay que determinar la pendiente, y en este caso la conveniencia es derivar en forma implícita, esto es $2x + 2[x \cdot 2yy' + y^2(1)] + 3 \cdot 4y^3y' = 2x + 4xyy' + 2y^2 + 12y^3y' = 0 \implies$

$$4xyy' + 12y^3y' = -2x - 2y^2 \implies y'(4xy + 12y^3) = -2x - 2y^2 \implies y' = \frac{-2x - 2y^2}{4xy + 12y^3}.$$

y' evaluada en el punto $(1, -1)$ es $y'_{(1,-1)} = \frac{-2(1) - 2(-1)^2}{4(1)(-1) + 12(-1)^3} = \frac{1}{4}$, luego $y + 1 = \frac{1}{4}(x - 1)$ y por consiguiente, la ecuación de la tangente es $x - 4y - 5 = 0$.

Ahora la ecuación de la normal es $y + 1 = -4(x - 1)$, de donde $4x + y - 3 = 0$.

5. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto indicado.

a) $xy = 8 + y$ en $P(3, 4)$.

b) $x^5 + y^5 - 2xy = 0$ en $P(1, 1)$.

Solución

a) $y - 4 = m(x - 3)$, hay que hallar m .

$$xy' + y(1) = 0 + y' \implies xy' - y' = -y \implies y'(x - 1) = -y \implies y' = -\frac{y}{x - 1}. \text{ Así, } y'_{(3,4)} = \frac{-4}{3-1} = -2, \text{ entonces } y - 4 = -2(x - 3) \implies y = -2x + 10.$$

b) $y - 1 = m(x - 1)$, hay que hallar m .

$$5x^4 + 5y^4y' - 2[xy' + y(1)] = 5x^4 + 5y^4y' - 2xy' - 2y = 0 \implies 5y^4y' - 2xy' = 2y - 5x^4 \implies y'(5y^4 - 2x) = 2y - 5x^4 \implies y' = \frac{2y - 5x^4}{5y^4 - 2x}.$$

$$y'_{(1,1)} = \frac{2(1) - 5(1)^4}{5(1)^4 - 2(1)} = -1, \text{ entonces } y - 1 = -1(x - 1), \text{ o sea } x + y - 2 = 0.$$

6. ¿En qué punto de la curva $y^2 = 2x^3$, la tangente es perpendicular a la recta $4x - 3y + 2 = 0$?

Solución $4x - 3y + 2 = 0 \iff y = \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$, es decir la pendiente m de la recta dada es: $m_1 = \frac{4}{3}$. Para que dos pendientes sean perpendiculares, se requiere que su producto sea igual a -1 , es decir si m_1 es la pendiente de la recta dada y m_2 es la pendiente de la recta tangente, entonces son perpendiculares $\iff m_1 \cdot m_2 = -1$, o sea $\frac{4}{3} \cdot m_2 = -1$ o $m_2 = -\frac{3}{4}$.

Vamos a buscar el punto donde la pendiente es igual a m_2 , entonces derivando se tiene $2yy' = 6x^2$ o sea $y' = \frac{3x^2}{y}$.

Ahora de $y^2 = 2x^3$, se tiene $|y| = \sqrt{2x^3}$, $x \geq 0 \implies y' = \pm \frac{3x^2}{(2x^3)^{\frac{1}{2}}} = \pm \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{x} \implies y' = \pm \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{x}$.

Signo positivo: $y' = \frac{3}{\sqrt{2}} \sqrt{x} = m_2 = -\frac{3}{4} \implies \sqrt{x} = -\frac{3\sqrt{2}}{3 \cdot 4} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ **imposible!**.

Signo negativo: $y' = -\frac{3}{\sqrt{2}} \sqrt{x} = -\frac{3}{4} \implies \sqrt{x} = \frac{\sqrt{2}}{4} \implies x = \frac{1}{8} \implies y = -\sqrt{2 \left(\frac{1}{8}\right)^3} = -\sqrt{2 \frac{1}{2^9}} = -\sqrt{\frac{1}{2^8}} = -\frac{1}{2^4} \implies y = -\frac{1}{16}$.

Resuelva los problemas siguientes:

7. El radio de la base de un cono circular recto disminuye a razón de $4\text{cm}/\text{min}$ y la altura aumenta a razón de $6\text{cm}/\text{min}$. Encontrar la velocidad a que está cambiando el volumen cuando la altura es de 12cm y el radio es de 6cm .

Solución Los datos del problema son: $\frac{dr}{dt} = -4$ se toma negativa, pues disminuye $\frac{dh}{dt} = 6$, $h = 12$, $r = 6$.

Hay que determinar la razón de cambio del volumen, es decir $\frac{dV}{dt}$.

Como la fórmula del volumen de un cono es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ se tiene que:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{3}\pi \left[r^2 \frac{dh}{dt} + 2rh \frac{dr}{dt} \right] = \frac{\pi}{3} [6^2(6) + 2(6)(12)(-4)],$$

de donde $\frac{dV}{dt} = -120\pi$. El hecho de que el resultado da negativo, expresa que el volumen está disminuyendo a razón de $-120\pi\text{cm}^3/\text{min}$.

8. La arena que empieza a vaciarse de una tolva a razón de $10\text{m}^3/\text{s}$, forma una pila cónica cuya altura es el doble de su radio. ¿A qué razón aumenta el radio de la pila cuando su altura es de 5m .

Solución Datos: $h = 2r$, $h = 5$, $\frac{dV}{dt} = 10$, hay que hallar $\frac{dr}{dt}$. El volumen del cono es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Como $h = 2r$ y como $h = 5$, entonces $r = \frac{5}{2}$, se puede sustituir en la fórmula del volumen:

$V = \frac{1}{3}\pi r^2(2r) = \frac{2\pi}{3}r^3 \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{2\pi}{3} [3r^2 \frac{dr}{dt}]$ y sustituyendo los datos, se tiene:

$$10 = \frac{2\pi}{3} [3(\frac{5}{2})^2 \frac{dr}{dt}].$$

Despejando $\frac{dr}{dt} = \frac{4}{5\pi} m/s$. El radio aumenta a razón de $\frac{4}{5\pi} m/s$.

9. Una mancha circular de petróleo de grosor uniforme ha sido causada por el derrame de $10m^3$ de petróleo. El grosor de la mancha está disminuyendo a razón de $1cm/s$. ¿A qué razón aumenta el radio de la mancha cuando mide $8m$?

Solución Datos del problema: $V = 10m^3$, $\frac{dh}{dt} = -0.01$ (el equivalente de $1cm/s$, o en metros es $0.01m/s$), $r = 8$. Hay que hallar $\frac{dr}{dt}$.

Puesto que $\pi r^2 h = 10 \Rightarrow h = \frac{10}{64\pi}$ y por otro lado, $\frac{dV}{dt} = \pi [r^2 \frac{dh}{dt} + 2rh \frac{dr}{dt}]$. Como el volumen es una constante, se tiene $0 = [8^2(-0.01) + 2(8)\frac{10}{64\pi} \frac{dr}{dt}]$. Despejando se tiene $\frac{dr}{dt} = \frac{32\pi}{125}$.

10. Una piedra se lanza verticalmente hacia arriba (desde el suelo), suponiendo que el sentido de la velocidad es positiva hacia arriba y que la posición instantánea está dada por $s(t) = 20t - 5t^2$.

a) Halle la velocidad instantánea de la piedra al término de $1s$.

b) Halle la velocidad instantánea de la piedra al término de $3s$.

Solución

a) La velocidad instantánea está dada por la derivada del espacio con respecto del tiempo, es decir

$$v(t) = s'(t) = 20 - 10t.$$

Sólo se requiere evaluar la derivada en $t = 1s$, es decir $v(1) = 20 - 10(1) = 10$. En este caso la piedra está subiendo a la velocidad $10m/s$.

b) Es similar al caso anterior, por lo tanto evaluando $t = 3$ se tiene $v(3) = 20 - 10(3) = -10$ de donde se concluye que la piedra está bajando con una velocidad de $-10m/s$.

Ejercicios de derivación: II Parte Profa. Lorena Salazar

1. En los siguientes ejercicios, use la definición de derivada para hallar $f'(x)$.

a) $f(x) = \frac{2}{3x+1}, x \neq -\frac{1}{3}$ b) $f(x) = \sqrt{2x-1}, x \geq \frac{1}{2}$ c) $f(x) = x^{2/3}$

2. Determine si la función dada es derivable o no en el punto x indicado.

a) $f(x) = \begin{cases} -x+2 & x \leq 2 \\ 2x-4 & x > 2 \end{cases}; x=2$ b) $f(x) = \begin{cases} 3x & x < 0 \\ -4x & x \geq 0 \end{cases}; x=0$

c) $f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 2 \\ x & x < 2 \end{cases}; x=2$ d) $f(x) = \frac{1}{x-1}, x \neq 1.$

3. Halle la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 6x^2 + \frac{1}{x^2}$ b) $f(x) = (x^2 - 7)(x^3 + 4x + 2)$

c) $f(x) = \frac{3x+1}{2x-5}$ d) $f(x) = \frac{2-x^{-3}}{3+x^{-2}}$

e) $f(t) = \frac{t^2(t^3-6)}{2t^2+t+1}$ f) $f(x) = (\sec 4x + \tan 2x)^2$

g) $f(x) = \sqrt{x} \cos \sqrt{x}$ h) $f(x) = [\cos(x^3 + x^2)]^{-4}$

i) $f(x) = \sin 3x + 4x \cos 5x$ j) $f(x) = (2x+1)^3 \tan x^2$

k) $f(s) = (s+1)^2(s+2)^3(s+3)^4$ l) $f(x) = \sin^4(\cos x^3) + 3$

ll) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ m) $f(s) = \sqrt[5]{(s^4+1)^2}.$

4. Use derivación implícita para hallar $\frac{dy}{dx}$ o dx/dy según se indique.

a) $x^3y^2 = 2x^2 + y^2, \frac{dy}{dx}$ b) $(x-1)^2 + (y+4)^2 = 25, \frac{dy}{dx}$

c) $x+y = \cos(xy), \frac{dy}{dx}$ d) $y^2 = \frac{x-1}{x+2}, \frac{dx}{dy}.$

5. Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto dado en cada caso.

a) $y = x^2 + 4x + 2; (-3, -1)$ b) $e^x + \cos y - 2 = 0; (0, \pi/3)$

6. Halle los puntos de la gráfica de $f(x)$ donde la recta tangente es horizontal.

a) $f(x) = x/3 + 3/x$ b) $f(x) = \cos x$

7. Halle la ecuación de la recta normal a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto dado.

a) $4x^2 + 9y^2 = 40; (1, 2)$ b) $f(x) = x^3; (1/2, 1/8).$

Soluciones de ejercicios de derivación: II Parte Profa. Lorena Salazar

1. En los siguientes ejercicios use, la definición de derivada para hallar $f'(x)$.

(a) $f(x) = \frac{2}{3x+1}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{3(x+\Delta x)+1} - \frac{2}{3x+1}}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{6x+2-6x-6\Delta x-2}{(3x+3\Delta x+1)(3x+1)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-6\Delta x}{\Delta x(3x+3\Delta x+1)(3x+1)} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-6}{(3x+3\Delta x+1)(3x+1)} = \frac{-6}{(3x+1)^2}. \end{aligned}$$

(b) $f(x) = \sqrt{2x-1}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2(x+\Delta x)-1} - \sqrt{2x-1}}{\Delta x}, \text{ racionalizando tenemos:} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{2(x+\Delta x)-1} - \sqrt{2x-1})(\sqrt{2(x+\Delta x)-1} + \sqrt{2x-1})}{\Delta x(\sqrt{2(x+\Delta x)-1} + \sqrt{2x-1})} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(2(x+\Delta x)-1) - (2x-1)}{\Delta x(\sqrt{2(x+\Delta x)-1} + \sqrt{2x-1})} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x+2\Delta x-1-2x+1}{\Delta x(\sqrt{2x+2\Delta x-1} + \sqrt{2x-1})} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x(\sqrt{2x+2\Delta x-1} + \sqrt{2x-1})} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{2x+2\Delta x-1} + \sqrt{2x-1}} = \\ &= \frac{2}{2\sqrt{2x-1}} = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}. \end{aligned}$$

(c) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x+\Delta x)^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[(x+\Delta x)^2]^{\frac{1}{3}} - [(x)^2]^{\frac{1}{3}}}{\Delta x}.$$

Multiplicando arriba y abajo por $(x+\Delta x)^{\frac{4}{3}} + (x+\Delta x)^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{4}{3}}$ se obtiene:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[(x+\Delta x)^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}][(x+\Delta x)^{\frac{4}{3}} + (x+\Delta x)^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{4}{3}}]}{\Delta x [(x+\Delta x)^{\frac{4}{3}} + (x+\Delta x)^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{4}{3}}]}, \text{ con lo que el numerador es de la}$$

forma $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$, donde $a = (x+\Delta x)^{\frac{2}{3}}$ y $b = x^{\frac{2}{3}}$, entonces se tiene:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x [(x+\Delta x)^{\frac{4}{3}} + (x+\Delta x)^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{4}{3}}]} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x [(x+\Delta x)^{\frac{4}{3}} + (x+\Delta x)^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{4}{3}}]} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x [(x+\Delta x)^{\frac{4}{3}} + (x+\Delta x)^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{4}{3}}]} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x [(x+\Delta x)^{\frac{4}{3}} + (x+\Delta x)^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{4}{3}}]} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x + \Delta x}{(x+\Delta x)^{\frac{4}{3}} + (x+\Delta x)^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{4}{3}}} = \\ &= \frac{2x}{x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{4}{3}}} = \frac{2x}{3x^{\frac{4}{3}}} = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}. \end{aligned}$$

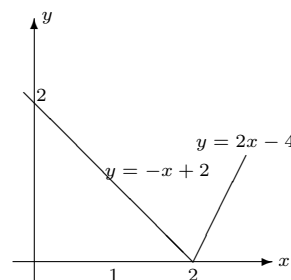
2. Determine si la función dada es derivable o no en el punto x indicado.

$$(a) f(x) = \begin{cases} -x + 2 & x \leq 2 \\ 2x - 4 & x > 2 \end{cases}; x = 2.$$

Primero probamos que f es continua en $x = 2$. En efecto:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} -x + 2 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 2x - 4 = 0.$$

Por lo tanto $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$. Además $f(2) = 0$, así que f es continua en $x = 2$. ¿Es f derivable en $x = 2$?



Usando la definición para un número de $x = c$ específico:

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}, \text{ así se tiene, } f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x - 4 - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2(x - 2)}{x - 2} = 2.$$

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x + 2 - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x - 2)}{x - 2} = -1.$$

Como los límites laterales no coinciden, concluimos que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ no existe, por lo que f no es derivable en $x = 2$.

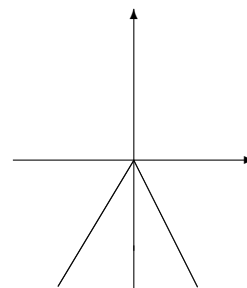
Gráficamente podemos notar que en $x = 2$ la gráfica tiene una esquina.

$$(b) f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x < 0 \\ -4x & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Note que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, pues $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 3x = 0$,

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -4x = 0$ y además $f(0) = 0$.

$\therefore f$ es continua en $x = 0$.



Para ver si es derivable en $x = 0$, debemos hallar $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$. Pero $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} =$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-4x - 0}{x} = -4, \text{ mientras que } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x - 0}{x} = 3.$$

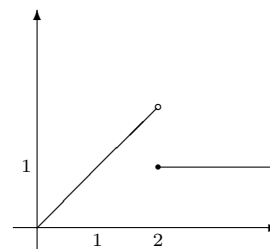
$\therefore f'(0)$ no existe $\implies f$ no es derivable en $x = 0$. Nuevamente, note que la gráfica de f tiene una esquina en $x = 0$.

$$(c) f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 2 \\ x & \text{si } x < 2. \end{cases}$$

Note que f no es continua en $x = 2$ pues:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x = 2 \text{ mientras que } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 1 = 1,$$

$\therefore f$ no es continua en $x = 2$.

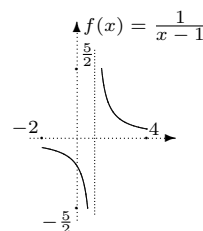


Por lo tanto f no puede ser derivable en $x = 2$, pues si lo fuera, debería ser continua en $x = 2$ según el teorema que dice: f derivable en $x = c \implies f$ continua en $x = c$.

(d) $f(x) = \frac{1}{x-1}, x \neq 1.$

f no es continua en $x = 1$, de hecho ahí f tiene una asíntota vertical.

Por lo tanto f tampoco es derivable en $x = 1$.



3. Halle la derivada de las siguientes funciones.

(a) $f(x) = 6x^2 + x^{-2}.$

Usando $(x^n)' = nx^{n-1}$ obtenemos: $f'(x) = 12x - 2x^{-3}.$

(b) $(x^2 - 7)(x^3 + 4x + 2) = f(x).$

Aquí se puede multiplicar los dos polinomios primero y luego derivar término a término, o simplemente usar la regla del producto.

$$f'(x) = (x^2 - 7)'(x^3 + 4x + 2) + (x^2 - 7)(x^3 + 4x + 2)' = 2x(x^3 + 4x + 2) + (x^2 - 7)(3x^2 + 4) = 2x^4 + 8x^2 + 4x + 3x^4 + 4x^2 - 21x^2 - 28.$$

(c) $\frac{3x+1}{2x-5} = f(x).$

Usando la regla del cociente se tiene:

$$f'(x) = \frac{3(2x-5) - (3x+1)2}{(2x-5)^2} = \frac{6x-15-6x-2}{(2x-5)^2} = \frac{-17}{(2x-5)^2}$$

(d) $f(x) = \frac{2 - \frac{1}{x^3}}{3 + \frac{1}{x^2}}$

Primero se puede escribir la función $f(x) = \frac{\frac{2x^3-1}{x^3}}{\frac{3x^2+1}{x^2}} = \frac{x^2(2x^3-1)}{x^3(3x^2+1)} = \frac{2x^3-1}{3x^3+x}$

Ahora se tiene: $f'(x) = \frac{6x^2(3x^3+x) - (2x^3-1)(9x^2+1)}{(3x^3+x)^2}$

(e) $f(t) = \frac{t^2(t^3-6)}{2t^2+t+1}$

Aplicando la regla del cociente se tiene :

$$f'(t) = \frac{[t^2(t^3-6)]'(2t^2+t+1) - t^2(t^3-6)(2t^2+t+1)'}{(2t^2+t+1)^2} =$$

$$\frac{[2t(t^3-6) + t^2 \cdot 3t^2](2t^2+t+1) - t^2(t^3-6)(4t+1)}{(2t^2+t+1)^2} =$$

$$\frac{(2t^4 - 12t + 3t^4)(2t^2+t+1) - (t^5 - 6t^2)(4t+1)}{(2t^2+t+1)^2}$$

Simplificando se tiene:

$$\frac{4t^6 + 2t^5 + 2t^4 - 24t^3 - 12t^2 - 12t + 6t^6 + 3t^5 + 3t^4 - 4t^6 - t^5 + 24t^3 + 6t^2}{(2t^2+t+1)^2} =$$

$$\frac{6t^6 + 4t^5 + 5t^4 - 6t^2 - 12t}{(2t^2 + t + 1)^2}$$

(f) $f(x) = (\sec 4x + \tan 2x)^2$.

Aplicando la regla de la cadena se tiene:

$$f'(x) = 2(\sec 4x + \tan 2x)(\sec 4x + \tan 2x)' = 2(\sec 4x + \tan 2x)(4 \sec 4x \tan 4x + 2 \sec^2 2x).$$

(g) $f(x) = \sqrt{x} \cos \sqrt{x}$.

Aplicamos regla del producto y regla de la cadena se tiene:

$$f'(x) = (\sqrt{x})' \cos \sqrt{x} + \sqrt{x}(\cos \sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos \sqrt{x} - \sqrt{x}(\sin \sqrt{x}) \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}(\cos \sqrt{x} - \sqrt{x} \sin \sqrt{x}).$$

(h) $f(x) = [\cos(x^3 + x^2)]^{-4}$.

Aplicando la regla de la cadena se tiene:

$$f'(x) = -4[\cos(x^3 + x^2)]^{-5}[\cos(x^3 + x^2)]' = -4[\cos(x^3 + x^2)]^{-5}[-\sin(x^3 + x^2)](3x^2 + 2x).$$

(i) $f(x) = \sin 3x + 4x \cos 5x$.

$$f'(x) = \cos 3x \cdot 3 + (4x)' \cos 5x + 4x(\cos 5x)' = 3 \cos 3x + 4 \cos 5x + 4x(-\sin 5x \cdot 5) = 3 \cos 3x + 4 \cos 5x - 20x \sin 5x.$$

(j) $f(x) = (2x + 1)^3 \tan x^2$.

Usamos la regla del producto y regla de la cadena:

$$f'(x) = [(2x + 1)^3]' \tan x^2 + (2x + 1)^3(\tan x^2)' = 6(2x + 1)^2 \tan x^2 + 2x(2x + 1)^3 \sec^2 x^2.$$

(k) $f(s) = (s + 1)^2(s + 2)^3(s + 3)^4$.

Aplicamos regla del producto y de la cadena.

$$\begin{aligned} f'(s) &= [(s + 1)^2(s + 2)^3]'(s + 3)^4 + (s + 1)^2(s + 2)^3[(s + 3)^4]' \\ &= \{ [(s + 1)^2]'(s + 2)^3 + (s + 1)^2[(s + 2)^3]' \}(s + 3)^4 + (s + 1)^2(s + 2)^3[(s + 3)^4]' \\ &= [2(s + 1)(s + 2)^3 + (s + 1)^2 \cdot 3(s + 2)^2](s + 3)^4 + (s + 1)^2(s + 2)^3 \cdot 4(s + 3)^3 \\ &= 2(s + 1)(s + 2)^3(s + 3)^4 + 3(s + 1)^2(s + 2)^2(s + 3)^4 + 4(s + 1)^2(s + 2)^3(s + 3)^3. \end{aligned}$$

(l) $f(x) = \sin^4(\cos x^3) + 3$.

Aplicamos regla de la cadena y que $(3)' = 0$

$$f'(x) = 4 \sin^3(\cos x^3) \cdot \cos(\cos x^3) \cdot (-\sin x^3)(3x^2) = -12x^2 \sin^3(\cos x^3) \cdot \cos(\cos x^3) \sin x^3.$$

(ll) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

$$\text{Rescribimos } f(x) = x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}, f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x\sqrt{x}} \right].$$

(m) $f(s) = \sqrt[5]{(s^4 + 1)^2}$

Aplicamos regla de la cadena

$$f'(s) = \frac{1}{5}[(s^4 + 1)^2]^{-\frac{4}{5}} \cdot [(s^4 + 1)^2]' = \frac{1}{5}[(s^4 + 1)^2]^{-\frac{4}{5}} \cdot 2(s^4 + 1) \cdot 4s^3 = \frac{8}{5}[(s^4 + 1)^2]^{-\frac{4}{5}} \cdot (s^4 + 1)s^3.$$

4. Use derivación implícita para hallar $\frac{dy}{dx}$ ó $\frac{dx}{dy}$ según se indique.

(a) $x^3y^2 = 2x^2 + y^2$; $\frac{dy}{dx}$.

Suponemos que y es función de x , así usamos la regla del producto al lado izquierdo de la ecuación: $3x^2 \cdot y^2 + x^3 \cdot 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 4x + 2y \cdot \frac{dy}{dx}$

Despejando $\frac{dy}{dx}$ obtenemos $\frac{dy}{dx} \cdot 2y(x^3 - 1) = 4x - 3x^2 \cdot y^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{4x - 3x^2 \cdot y^2}{2y(x^3 - 1)}$.

(b) $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 25$; $\frac{dy}{dx}$.

$2(x - 1) + 2(y + 4) \cdot \frac{dy}{dx} = 0$, usando la Regla de la cadena, $\frac{dy}{dx} = \frac{-2(x - 1)}{2(y + 4)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1 - x}{y + 4}$.

(c) $x + y = \cos(xy)$; $\frac{dy}{dx}$.

$1 + \frac{dy}{dx} = -\sin(xy) \cdot (y + x \cdot \frac{dy}{dx}) \Rightarrow 1 + \frac{dy}{dx} = -y \sin(xy) - x \sin(xy) \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} (1 + x \sin xy) = -y \sin xy - 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-y \sin xy - 1}{1 + x \sin xy}$.

(d) $y^2 = \frac{x-1}{x+2}$; $\frac{dx}{dy}$

$y^2(x+2) = x-1$. Ahora suponemos que x es función de y , así:

$2y(x+2) + y^2 \frac{dx}{dy} = \frac{dx}{dy} \Rightarrow 2y(x+2) = \frac{dx}{dy} (1 - y^2) \Rightarrow \frac{2y(x+2)}{1 - y^2} = \frac{dx}{dy}$.

5. Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto dado en cada caso.

(a) $f(x) = x^2 + 4x + 2$; $(-3, -1)$.

La ecuación de tal recta tangente a f en $(-3, -1)$ es $y = mx + b$, donde $m = f'(-3)$, pero $f'(x) = 2x + 4 \Rightarrow f'(-3) = -2 \Rightarrow y = -2x + b$.

Como pasa por $(-3, -1)$ sustituimos $x = -3$ y $y = -1$ en la ecuación, $-1 = -2 \cdot (-3) + b \Rightarrow -7 = b$. $\therefore \boxed{y = -2x - 7}$.

(b) La función $y = f(x)$ está dada implícitamente por la ecuación: $e^x + \cos y - 2 = 0$ en $(0, \frac{\pi}{3})$.

Derivando implícitamente $e^x + -\sin y \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{\sin y}$, así la pendiente de la recta tangente a $y = f(x)$ en $(0, \frac{\pi}{3})$ es:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(0, \frac{\pi}{3})} = \left[\frac{e^x}{\sin y} \right] \Big|_{(0, \frac{\pi}{3})} = \frac{e^0}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \therefore y = \frac{2}{\sqrt{3}}x + b.$$

Sustituyendo el punto $(0, \frac{\pi}{3})$, $\frac{\pi}{3} = b \Rightarrow y = \frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{\pi}{3}$.

6. Halle los puntos de la curva $y = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}$ en donde la recta tangente es horizontal.

(a) La recta tangente es horizontal si tiene pendiente igual a cero $y' = 0$, pero:

$y' = \left(\frac{1}{3}x + 3x^{-1} \right)' = \frac{1}{3} + -3x^{-2} = 0 \iff \frac{1}{3} = \frac{3}{x^2} \iff x^2 = 9 \iff x = \pm 3$.

Sustituyendo en la ecuación obtenemos los puntos $(3, 2)$ y $(-3, -2)$.

(b) $y = \cos x$

Igual que el anterior, buscamos los puntos de x , donde $y' = 0$

$$y' = -\sin x = 0 \implies \sin x = 0 \implies x = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots \text{ etc.}, \text{ es decir } x = n\pi, n = 0, 1, \dots$$

7. Halle la recta normal a la gráfica $y = f(x)$ en el punto dado.

(a) $4x^2 + 9y^2 = 40, \quad (1, 2)$

Aquí y está dado en forma implícita, así que usaremos derivación implícita para hallar

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

$$4 \cdot 2x + 18y \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \implies \frac{dy}{dx} = \frac{-8x}{18y} = \frac{-4x}{9y}.$$

La pendiente de la recta normal o perpendicular es $-\frac{dx}{dy}$ pues, $\frac{dy}{dx} \cdot \left(-\frac{dx}{dy}\right) = -1$.

De modo que la pendiente de la normal que buscamos es $\frac{9y}{4x}$.

Como se quiere que esta recta pase por $(1, 2)$, tenemos que $m = \frac{9y}{4x} \Big|_{(1,2)} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$, por lo que la ecuación de la recta satisface $y = \frac{9}{2}x + b$.

Sustituimos (x, y) por $(1, 2)$ para despejar b , por tanto se tiene que:

$$2 = \frac{9}{2} \cdot 1 + b \implies 2 - \frac{9}{2} = b \implies -\frac{5}{2} = b$$

Por lo tanto la ecuación de la recta en $(1, 2)$ es $\boxed{y = \frac{9}{2}x - \frac{5}{2}}$.

(b) $f(x) = x^3, \quad f'(x) = 3x^2$.

La pendiente de la recta normal es $-\frac{1}{3x^2}$. En $(\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$ obtenemos, $m = -\frac{1}{3x^2} \Big|_{x=\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\frac{3}{4}} =$

$-\frac{4}{3}$, luego la recta normal es de la forma $y = -\frac{4}{3}x + b$.

Sustituyendo $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{8}$, se tiene: $\frac{1}{8} = -\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} + b \implies \frac{1}{8} + \frac{2}{3} = b \implies \frac{19}{24} = b$.

Por lo tanto la ecuación de la recta normal es $\boxed{y = -\frac{4}{3}x + \frac{19}{24}}$.

Ejercicios de derivación: III Parte Profa. Ana Mondrus

- Determine la pendiente de la recta tangente a la curva dada por $f(x) = x^3$ en el punto $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8})$ de cada una de las siguientes maneras:
 - Usando la definición de derivada en un punto.
 - Usando la definición de la función derivada $f'(x)$ y evaluando después en el punto dado.
 - Mediante la *forma alternativa de la derivada*.
 - Mediante la fórmula para derivar una potencia.
- Use el resultado del problema 1) para escribir las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la curva $y = x^3$, en el punto $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8})$.
- La función de posición de una partícula en movimiento en una recta horizontal está dada por $x = -16t^2 + 80t - 1$. Se supone unidades de medición adecuadas.
 - Calcule la velocidad media de la partícula entre $t = 1$ y $t = 2$.
 - Calcule la velocidad instantánea de la partícula en $t = \frac{1}{2}$ y en $t = \frac{3}{2}$.
 - Determinar la posición x cuando la velocidad v es cero.
 - ¿Cuál es la aceleración de la partícula en $t = 0$ y en $t = 2$? ¿Varía en algún instante la aceleración? ¿Se mantiene constante la velocidad en algún intervalo de tiempo?
- Calcule las derivadas indicadas, usando las reglas de derivación (No la definición). En cada caso, señale dominio máximo de la función y de su(s) derivada(s). (Sugerencia: reescriba para derivar).
 - $f(x) = ax^2 - 2cx^{-1} + \frac{b}{x^3}$, a, b, c constantes, $f'(x) = ?$
 - $g(x) = x^{\frac{2}{3}}(3 - x^{\frac{4}{3}})$, $g'(x) = ?$
 - $y = \frac{ax^6 + b}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{2x + 3}{x^2 - 5x + 5}$, (a, b constantes), $y'(x) = ?$
- Encuentre todos los puntos de la curva dada por $f(x) = \frac{x+1}{1-x}$ en que:
 - La recta tangente sea horizontal (si existen). Si no existen, justifique por qué.
 - La pendiente de la recta tangente sea 4.
- Sea $x = \frac{10 - 2\pi r}{2 + \sqrt{(2)}}$, encuentre $\frac{dx}{dr}$, $\frac{d^2x}{dr^2}$.
- Sea f la función definida por: $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 3 \\ 8 - x & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$
 - Calcule $f'(1)$, $f'_-(3)$, $f'_+(3)$, $f'(7)$ usando la definición en cada caso.
 - Según sus cálculos de la parte a) , ¿es f derivable en $x = 3$?

- c) Trace la gráfica de f , para comparar sus resultados con la representación gráfica.
8. Encuentre las ecuaciones de las dos rectas que pasan por el punto $(2, -3)$ y son tangentes a la parábola $y = x^2 + x$. Represente gráficamente la situación.
9. Escriba la ecuación de la tangente a la curva $y = \sqrt{x}$, en el punto cuya ordenada es 2.
10. Demuestre que la recta $y = -x$ es tangente a la curva dada por la ecuación $y = x^3 - 6x^2 + 8x$. Hallar el punto P de tangencia.
11. Una población de 500 bacterias crece en número de acuerdo con la expresión:
 $P(t) = 500 \left(1 + \frac{4t}{50 + t^2} \right)$, donde t se mide en horas.
- a) Compare el ritmo (rapidez) con que crece la población al inicio del proceso, a las 2 horas y a las 4 horas.
- b) Compare el número de bacterias que hay a las 0 horas, a las 2 horas y a las 4 horas.
- c) ¿Porqué no hay el doble de bacterias a las 4 horas que a las 2 horas?
12. Si R representa la reacción del organismo a cierto estímulo de intensidad x , la *sensibilidad* S , se define como la rapidez de cambio de la reacción con respecto a x . Un ejemplo es aquel en que cuando aumenta la brillantez x de una fuente luminosa, el ojo reacciona disminuyendo el área R , de la retina (expuesta a la luz).
- La fórmula empírica $R = \frac{40 + 24x^{0,4}}{1 + 4x^{0,4}}$, describe la dependencia entre R y x , donde R se expresa en milímetros cuadrados y x en las unidades adecuadas de brillantez.
- a) Escriba una fórmula para la sensibilidad.
- b) Calcule la sensibilidad para los siguientes valores de brillantez: 0, 0.01, 1, 5, 10, 100.

Soluciones de ejercicios de derivación: III Parte Profa. Ana Mondrus

1. La pendiente de la recta tangente a una curva en un punto, está dada por la derivada de la función en ese punto.

a) La definición de la derivada en un punto $(a, f(a))$ es la siguiente:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}.$$

En el caso presente: $a = -\frac{1}{2}$, $f(x) = x^3$, entonces: $f'(-\frac{1}{2}) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-\frac{1}{2} + \Delta x) - f(-\frac{1}{2})}{\Delta x} =$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(-\frac{1}{2} + \Delta x)^3 - (-\frac{1}{2})^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(-\frac{1}{2})^3 + 3(-\frac{1}{2})^2 \Delta x + 3(-\frac{1}{2})(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + \frac{1}{8}}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{4} \Delta x - \frac{3}{2}(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\frac{3}{4} - \frac{3}{2} \Delta x + (\Delta x)^2) \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\frac{3}{4} - \frac{3}{2} \Delta x + (\Delta x)^2) = \frac{3}{4}.$$

b) Definición la función derivada: $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ (en el caso presente)

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2 \Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2) \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2) = 3x^2.$$

Evaluando en $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8})$, donde $x = -\frac{1}{2}$ queda: $f'(-\frac{1}{2}) = 3(-\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4}$.

c) La expresión que se denomina a veces forma alternativa de la derivada para $f'(c)$, donde c es el punto de dominio en cuestión es: $f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$.

En el caso presente: $f'(-\frac{1}{2}) = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{f(x) - f(-\frac{1}{2})}{x - (-\frac{1}{2})} = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{x^3 - (-\frac{1}{2})^3}{x + \frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{x^3 + \frac{1}{8}}{x + \frac{1}{2}} =$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{(x + \frac{1}{2})(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4})}{(x + \frac{1}{2})} = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} (x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}) = (-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}) + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

d) Si $f(x) = x^n$, $f'(x) = nx^{n-1}$. En este caso $f'(x) = 3x^2$, de modo que $f'(-\frac{1}{2}) = 3(-\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4}$.

No debe sorprender, por supuesto, que se repita el resultado, ya que la derivada es un límite, por lo tanto único en un punto dado y su valor no puede depender del procedimiento que se usa para calcularlo.

2. En el problema 1) se calculó la pendiente de la recta tangente a $f(x) = x^3$ en $x = -\frac{1}{2}$ y se obtuvo el valor $\frac{3}{4}$. El problema presente es, por lo tanto, encontrar la ecuación de la recta de pendiente $m = \frac{3}{4}$, que pasa por el punto $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8})$, puede usarse la fórmula punto-pendiente $y - y_0 = m(x - x_0)$, que en este caso es: $y + \frac{1}{8} = \frac{3}{4}(x + \frac{1}{2})$.

Reduciendo: $y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$.

Nota: Es equivalente a proceder así: $y = mx + b$; como $m = \frac{3}{4}$, $y = \frac{3}{4}x + b$ y como pasa por $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8})$: $-\frac{1}{8} = \frac{3}{4}(-\frac{1}{2}) + b$, de donde $b = -\frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{2}{8} \Rightarrow b = \frac{1}{4}$, $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$, o bien

$$4y - 3x = 1.$$

Finalmente se pide la recta normal. Esta es la recta perpendicular a la tangente en el punto de tangencia. Para que dos rectas sean perpendiculares entre sí, es necesario y suficiente que la pendiente de una sea el valor recíproco de la pendiente de la otra con signo cambiado, es decir que el producto de las pendientes sea -1 . Pendiente recta tangente: $\frac{3}{4}$ (del problema 1). Por lo que la pendiente de la recta normal es $-\frac{4}{3}$. Así el problema se redujo a encontrar la ecuación de la recta de pendiente $-\frac{4}{3}$, que pasa por el punto $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8})$, $y + \frac{1}{8} = -\frac{4}{3}(x + \frac{1}{2}) \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x - \frac{4}{6} - \frac{1}{8} = -\frac{4}{3}x - \frac{19}{24}$ (*).

Verifiquemos que la recta dada por (*), pasa por $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8})$, $-\frac{1}{8} \stackrel{?}{=} -\frac{4}{3}(-\frac{1}{2}) - \frac{19}{24}$.

El segundo miembro se reduce a $\frac{4}{6} - \frac{19}{24} = \frac{16-19}{24} = -\frac{3}{24}$, que es $-\frac{1}{8}$.

Nota Esta verificación no es imprescindible para resolver el problema, pero es útil como control del proceso.

3. a) Aplicando la definición de velocidad media en un intervalo, se tiene que:

$$\bar{v}_{[1,2]} = \frac{x(2) - x(1)}{2 - 1}, x(2) = -(16)2^2 + (80)2 - 1 = (-16)4 + 160 - 1 = -64 + 160 - 1 = 95,$$

$$x(1) = (-16)1^2 + (80)1 - 1 = -16 + 80 - 1 = 63, \bar{v}_{[1,2]} = \frac{95 - 63}{2 - 1} = \frac{32}{1} = 32.$$

b) La velocidad instantánea se calcula mediante la derivada de la función posición.

$$v = x'(t) = -32t + 80, v(\frac{1}{2}) = x'(\frac{1}{2}) = -32\frac{1}{2} + 80 = -16 + 80 = 64, v(\frac{3}{2}) = x'(\frac{3}{2}) = -32\frac{3}{2} + 80 = -48 + 80 = 32.$$

c) $v = 0$ equivale a $-32t + 80 = 0 \Rightarrow -32t = -80 \Rightarrow t = \frac{80}{32} = \frac{5}{2}$, v es cero para $t = \frac{5}{2}$. Se pide la posición dada por x en ese instante. $x(\frac{5}{2}) = -16(\frac{5}{2})^2 + 80\frac{5}{2} - 1 = 99$.

d) La aceleración se calcula como la segunda derivada de la posición, o lo que es equivalente, como la primera derivada de la velocidad. $a(t) = x''(t) = v'(t) = -32$.

Observamos que la aceleración es constante, por eso no varía en el tiempo, de modo que: $a(0) = -32$; también $a(2) = -32$.

En cuanto a la velocidad $v(t) = -32t + 80$, calculada en la parte b), sí depende del tiempo, esta dependencia es de tipo lineal, si la graficáramos sería una recta de pendiente -32 , por lo tanto en ningún intervalo es constante, la velocidad (instantánea) varía en cada instante, lo que se confirma porque la aceleración (cambio de velocidad) nunca es 0, es decir siempre hay cambio de velocidad.

4. a) $f(x) = ax^2 - 2cx^{-1} + \frac{b}{x^3}$.

Conviene reescribir la función para después aplicar de manera más sencilla las reglas de derivación: $f(x) = ax^2 - 2cx^{-1} + bx^{-3}$.

Note que sería un error grave haber escrito $f'(x)$, pues aún no se ha derivado aunque se tenga la intención de hacerlo. Ahora si derivamos $f'(x) = 2ax + 2cx^{-2} - 3bx^{-4} = 2ax + \frac{2c}{x^2} - \frac{3b}{x^4}$.

Dominio de f y de f' es el mismo: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) $g(x) = x^{\frac{2}{3}}(3 - x^{\frac{4}{3}})$.

Camino 1) Derivar como producto y después reducir.

$$g'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(3 - x^{\frac{4}{3}}) + x^{\frac{2}{3}}(-\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}) = 2x^{-\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}x = 2x^{-\frac{1}{3}} - 2x = \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - 2x.$$

Camino 2) Efectuar primero el producto y después derivar.

$$g(x) = 3x^{\frac{2}{3}} - x^2 \implies g'(x) = 2x^{-\frac{1}{3}} - 2x = \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - 2x.$$

Dominio de g : $\mathbb{R}$ (no hay denominadores ni raíces de índice par que obliguen a restricciones).

Dominio de g' : $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (el denominador $\sqrt[3]{x}$ no puede tomar el valor 0.)

c) $y = \frac{ax^6 + b}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{2x + 3}{x^2 - 5x + 5} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(ax^6 + b) + \frac{2x + 3}{x^2 - 5x + 5},$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(6ax^5 + 0) + \frac{(x^2 - 5x + 5)2 - (2x + 3)(2x - 5)}{(x^2 - 5x + 5)^2} = \frac{6ax^5}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{2x^2 - 10x + 10 - (4x^2 - 4x - 15)}{(x^2 - 5x + 5)^2} = \frac{6ax^5}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{-2x^2 - 6x + 25}{(x^2 - 5x + 5)^2}.$$

Dominio de y y de y' : $\mathbb{R} \setminus \{\frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}\}$.

5. $f(x) = \frac{x+1}{1-x}.$

a) Tangente horizontal significa pendiente cero, de donde se piden los puntos en los que la derivada sea cero. $f'(x) = \frac{1-x - (x+1)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}.$

Para que una fracción sea cero, se requiere que su numerador sea cero (y su denominador no). Pero aquí el numerador es el número 2 (no depende de x), por lo que $f'(x)$ nunca es cero y se concluye que en ningún punto de la curva dada la tangente es horizontal.

b) Pendiente recta tangente sea 4 equivale a que la derivada sea 4. Se pide encontrar los x para los cuales $f'(x) = 4$, como $f'(x) = \frac{2}{(1-x)^2}$ el problema consiste en resolver la ecuación:

$$\frac{2}{(1-x)^2} = 4 \implies 2 = 4(1-x)^2 \implies 4(1-x)^2 = 2 \implies (1-x)^2 = \frac{1}{2} \implies 1-x = \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ o } 1-x = -\sqrt{\frac{1}{2}} \implies x = 1 - \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ o } x = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Note que se llega a los mismos valores para x si a partir de la igualdad $(1-x)^2 = \frac{1}{2}$ se desarrolla el cuadrado, se llega a una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ y se aplica la fórmula correspondiente para resolverla. Hágalo como práctica.

Como se piden los puntos de la curva, sólo resta encontrar las ordenadas de cada abscisa encontrada.

$$f(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}) = \frac{(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}) + 1}{1 - (1 - \sqrt{\frac{1}{2}})} = \frac{2 - \sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = 2\sqrt{2} - 1,$$

$$f(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}) = \frac{(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}) + 1}{1 - (1 + \sqrt{\frac{1}{2}})} = \frac{2 + \sqrt{\frac{1}{2}}}{-\sqrt{\frac{1}{2}}} = -2\sqrt{2} - 1.$$

Los puntos son: $(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}, 2\sqrt{2} - 1)$; $(1 + \sqrt{\frac{1}{2}}, -2\sqrt{2} - 1)$ o, ya que $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{2} - 1); (1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, -2\sqrt{2} - 1).$$

6. $x = \frac{10 - 2\pi r}{2 + \sqrt{2}} \implies x = \frac{1(10 - 2\pi r)}{2 + \sqrt{2}}$; usando la regla del factor constante:

$$\frac{dx}{dr} = \frac{1}{2 + \sqrt{2}}(-2\pi) \implies \frac{dx}{dr} = \frac{-2\pi}{2 + \sqrt{2}}; \text{ de donde } \frac{d^2x}{dr^2} = 0.$$

7.
$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 3 \\ 8 - x & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$$

$f'(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x}$. Como 1 es menor que 3, corresponde usar $f(x) = 2x - 1$, ya que Δx se supone pequeño.

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2(1 + \Delta x) - 1 - (2 \cdot 1 - 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 + 2\Delta x - 1 - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 + 2\Delta x - 2}{\Delta x} = 2,$$

$$f'_-(3) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{\Delta x}.$$

Note que, como Δx es negativo, $3 + \Delta x$ se encuentra en la recta real a la izquierda de 3, es menor que 3. y así $f(3 + \Delta x)$ se calculará con $f(x) = 2x - 1$. Pero $f(3)$ esta dado por $f(x) = 8 - x$. Así: $f(3 + \Delta x) = 2(3 + \Delta x) - 1$ (por ser $\Delta x < 0$ y $3 + \Delta x < 3$). Luego $f(3 + \Delta x) = 6 + 2\Delta x - 1 = 5 + 2\Delta x$, $f(3) = 8 - 3 = 5$ (dado en el enunciado al usar $x \geq 3$).

$$f'_-(3) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{5 + 2\Delta x - 5}{\Delta x} = 2,$$

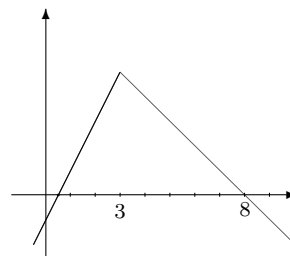
$$f'_+(3) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{[8 - (3 + \Delta x)] - 5}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{5 - \Delta x - 5}{\Delta x} = -1,$$

$$f'(7) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(7 + \Delta x) - f(7)}{\Delta x}, \text{ pero } f(7 + \Delta x) = 8 - (7 + \Delta x) = 1 - \Delta x, f(7) = 8 - 7 = 1,$$

$$f'(7) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1 - \Delta x - 1}{\Delta x} = -1.$$

b) f no es derivable en $x = 3$, ya que las derivadas por la izquierda y por la derecha son diferentes, de modo que $f'(3)$ no existe.

c) Puede notarse que, aunque f es continua en 3 (verifíquelo analíticamente), en $x = 3$, vale decir en el punto $(3, 5)$ de la curva, hay un cambio brusco de dirección, que es la situación de no derivabilidad desde la perspectiva geométrica. (Hay un "pico").



8. En primer lugar debe observarse que el punto $(2, -3)$ no pertenece a la parábola dada, por lo que no tiene sentido aplicar mecánicamente el proceso para el caso del punto de tangencia conocido. El problema aquí, es que no se conoce el punto de tangencia. Supongamos que el punto de tangencia tenga ordenadas (a, b) . Hechos conocidos sobre este punto:

i) está en la parábola, de modo que $b = a^2 + a$.

ii) es de tangencia, por lo que $f'(a)$ corresponde a la pendiente de la recta tangente que pasa por (a, b) .

Pero $f'(x) = 2x + 1$, así: $f'(a) = 2a + 1$, la(s) recta(s) pedida(s) tiene(n) por pendiente $2a + 1$ y pasa por $(2, -3)$.

Pero la pendiente de una recta por dos puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, también está dada por $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

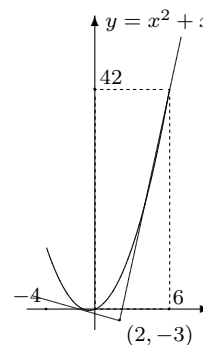
Esta representación es la misma pendiente de dos maneras distintas, nos llevaría a la solución. Pendiente: $m = f'(a) = 2a + 1$, $m = \frac{b + 3}{a - 2} = \frac{a^2 + a + 3}{a - 2} \Rightarrow \frac{a^2 + a + 3}{a - 2} = 2a + 1 \Rightarrow a^2 + a + 3 = (2a + 1)(a - 2) \Rightarrow a^2 + a + 3 = 2a^2 - 3a - 2 \Rightarrow 0 = a^2 - 4a - 5 \Rightarrow 0 = (a - 5)(a + 1)$.

Hay dos soluciones: $a = 5$, $a = -1$. Para $a = 5$, $b = a^2 + a = 30$, $m = 2a + 1 = 11$ punto de tangencia $(5, 30)$.

Recta tangente L_1 : pasa por $(2, -3)$ y tiene pendiente 11, $y + 3 = 11(x - 2) \Rightarrow y = 11x - 25$ es L_1 .

Para $a = -1$, $b = 0$, $m = -1$ punto de tangencia $(-1, 0)$.

Recta tangente L_2 : pasa por $(2, -3)$ y tiene pendiente -1 , $y + 3 = -(x - 2) \Rightarrow y = -x - 1$ es L_2 .



9. $y = \sqrt{x}$, dominio $[0, +\infty[$

¿Cuál es la abscisa del punto cuya ordenada es 2?

$y = 2$, $\sqrt{x} = 2$, $x = 4$ calculemos $\frac{dy}{dx}$ en $x = 4$, ya que la pendiente de la recta tangente está dada por la derivada. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $\frac{dy}{dx}\bigg|_{x=4} = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$.

Pendiente recta tangente: $\frac{1}{4}$. Punto de tangencia: $(4, 2)$.

Ecuación pedida: $y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4) \implies y = \frac{1}{4}x + 1$, o equivalentemente, $4y - x = 4$.

10. La recta $y = -x$ tiene pendiente -1 . Se trata entonces de demostrar que existen puntos en la curva dada por $y = x^3 - 6x^2 + 8x$, en los que la pendiente, que sabemos se calcula mediante la derivada, sea -1 . También encontrar esos puntos y comprobar que están tanto en la recta como en la curva.

$$y' = 3x^2 - 12x + 8 = -1 \implies 3x^2 - 12x + 9 = 0 \implies x^2 - 4x + 3 = 0 \implies (x - 3)(x - 1) = 0.$$

Hay dos puntos, los de abscisas $x = 3$ y $x = 1$ respectivamente.

$$\text{Sustituyendo: } y(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3 = 27 - 54 + 24 = -3, y(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 = 1 - 6 + 8 = 3.$$

Observamos entonces, que los dos puntos en que la pendiente es -1 son $(3, -3)$ y $(1, 3)$.

Pero sólo uno de ellos, $(3, -3)$ pertenece también a la recta $y = -x$.

Así también, la recta tangente por $(1, 3)$ es paralela a $y = -x$, pero NO es la recta $y = -x$.

La recta $y = -x$ es la tangente a la curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ sólo en el punto $(3, -3)$. Por lo anterior el punto de tangencia P es $(3, -3)$.

11. $P(t) = 500\left(1 + \frac{4t}{50 + t^2}\right)$; t en horas.

El ritmo o rapidez con que cambia una cantidad con respecto a otra, se mide o representa mediante la derivada.

$$\text{a) } P'(t) = 500 \left(\frac{(50 + t^2)4 - 4t(2t)}{(50 + t^2)^2} \right), P'(t) = 500 \frac{200 + 4t^2 - 8t^2}{(50 + t^2)^2} = 500 \frac{200 - 4t^2}{(50 + t^2)^2},$$

$$P'(0) = 40 \frac{\text{bacterias}}{\text{hora}}, P'(2) = 500 \frac{200 - 16}{(50 + 4)^2} = \frac{500 \cdot 184}{54^2} = 31,55 \frac{\text{bacterias}}{\text{hora}},$$

$$P'(4) = 500 \frac{200 - 64}{66^2} = 500 \frac{136}{4356} = 15,61 \frac{\text{bacterias}}{\text{hora}}.$$

b) El número de bacterias está dado por $P(t)$, $P(0) = 500$ bacterias, $P(2) = 500\left(1 + \frac{8}{50 + 4}\right) = 574$ bacterias, $P(4) = 621$ bacterias.

c) A las 4 horas no hay el doble de bacterias que a las 2 horas, pues no tiene porqué haberlas, ya que el modelo del enunciado describe la relación entre $P(t)$ y t mediante una ecuación que no corresponde a un caso de duplicación de las imágenes o valores (ordenadas si lo graficamos), al duplicarse la variable independiente (como si lo sería, por ejemplo la función lineal $P(t) = 2t$). También puede observarse que, aunque en los valores pedidos la cantidad de bacterias aumenta con el tiempo, lo hace cada vez más lentamente. Esto se confirma con los cálculos de la parte a), en que la velocidad era menor cuando el tiempo era mayor.

12. La rapidez de cambio está dada por el valor absoluto de la velocidad de cambio, que se

calcula mediante la derivada respectiva. Aquí la derivada de la reacción R con respecto a la brillantez x , está dada por:

$$\begin{aligned}\frac{dR}{dx} &= \frac{(1 + 4x^{0,4})24 \cdot 0,4x^{-0,6} - (40 + 24x^{0,4})1,6x^{-0,6}}{(1 + 4x^{0,4})^2} = \frac{[9,6 \cdot (1 + 4x^{0,4}) - 1,6 \cdot (40 + 24x^{0,4})]x^{-0,6}}{(1 + 4x^{0,4})^2} \\ &= \frac{9,6 + 38,4x^{0,4} - 64 - 38,4x^{0,4}}{(1 + 4x^{0,4})^2 x^{0,6}} = \frac{-54,4}{(1 + 4x^{0,4})^2 x^{0,6}}.\end{aligned}$$

El signo negativo de esta derivada indica que a mayor brillantez, menor reacción:

$$S = \left| \frac{dR}{dx} \right| = \frac{54,4}{(1 + 4x^{0,4})^2 x^{0,6}}.$$

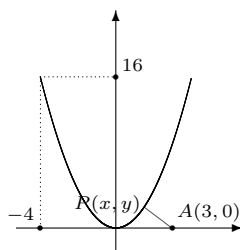
b) Podemos organizar los valores de la sensibilidad correspondientes a los de la brillantez en una tabla, calculando cada valor mediante una calculadora:

Brillantez	x	0	0,01	0,1	1	5	10	100
Sensibilidad	S	$\nexists$	323	32,2	2,2	0,28	0,11	0,005

Notemos que si la brillantez es cero, no tiene sentido hablar de rapidez de cambio de la reacción. El 0 no está en el dominio: haría cero un denominador. Observemos que si la brillantez es grande, la sensibilidad (rapidez de cambio de la reacción) es muy pequeña, lo que coincide con la experiencia, por ejemplo; frente a una luz deslumbrante el ojo se adapta más lentamente que con un brillo menor.

Ejercicios de derivación: IV Parte Profs. Gerald Asch, Gloria Bonilla

- Haga un estudio de la función dada por $g(x) = \frac{x^2 + 4}{2x}$ y trace su gráfico.
- Determinar la concavidad y puntos de inflexión de la función $y = 3x + (x + 2)^{\frac{3}{5}}$
- Hallar los máximos y mínimos de la función $f(x) = x(12 - 2x)^2$ aplicando el criterio de la segunda derivada.
- Demstrar que la función $y = x^3 - 8$ no tiene máximos ni mínimos.
- Grafique la función de acuerdo con los siguientes datos:
Mínimos en $(-2, 0)$, $(1, 0)$
Si $x < -2$ y $-\frac{1}{2} < x < 1$, la función decrece
Si $-2 < x < -\frac{1}{2}$, $x > 1$ la función crece
La curva alcanza máxima en $(-\frac{1}{2}, \frac{81}{16})$.
- Construir la gráfica $y = \frac{8}{x^2 - 4}$
- Calcular las coordenadas del punto P de la curva $y = x^2$ más próximo al punto $A(3, 0)$.



- Calcular el radio y la altura de los cilindros de volumen máximo y mínimo que pueden inscribirse en un cono de $6cm$ de radio y $12cm$ de altura.
- Los grandes huesos de los mamíferos se pueden representar como tubos cilíndricos huecos, llenos de médula, de radio exterior R y radio interior r . Los huesos deben ser ligeros pero a la vez capaces de resistir ciertos momentos de flexión. Se puede demostrar que para resistir un momento flexionante M , la masa m por unidad de longitud del hueso y la médula está dada por $m = \pi\rho \left[\frac{M}{K(1 - x^4)} \right]^{\frac{2}{3}} \left[1 - \frac{1}{2}x^2 \right]$, donde ρ es la densidad del hueso y K una constante positiva.
Si $x = \frac{r}{R}$, demuestre que m es mínima cuando $r = 0.63R$ aproximadamente.
- Un hato de 100 venados se transporta a una isla pequeña. El rebaño crece rápidamente pero los recursos alimenticios de la isla comienzan a escasear y la población disminuye. Suponga que el número $N(t)$ de venados que hay en la isla a los t años, está dado por $N(t) = -t^4 + 21t^2 + 100$.

- a) ¿Cuándo deja de crecer el hato?
- b) ¿Cuál es su tamaño máximo?
- c) ¿Cuándo se extingue la población?
- d) Trace la gráfica de N para $t \geq 0$.

Soluciones de ejercicios de derivación: IV Parte Profs. Gerald Asch, Gloria Bonilla

1. Estudio de la gráfica $g(x) = \frac{x^2 + 4}{2x}$

I) **Dominio:** $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Es una fracción racional. Se indetermina si el denominador es cero, es decir $2x = 0 \implies x = 0$.

i) Dado que $f(-x) = \frac{(-x)^2 + 4}{2(-x)} = \frac{x^2 + 4}{-2x} = -\frac{x^2 + 4}{2x} = -f(x)$, la función es impar y G_f es simétrico con respecto al origen. Basta estudiar la función en $[0, +\infty[$

ii) **Discontinuidades** (análisis): $g(x)$ es discontinua en $x = 0$, pues la función no está definida.

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 4}{2x} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + 4}{2x} = -\infty$. Note que: $P(x) = x^2 + 4$ evaluado en $x = 0$ es $P(0) = 4$ y $Q(x) = 2x$ evaluado en $x = 0$ es $Q(0) = 0$. Por lo tanto $x = 0$ es una asíntota vertical.

iii) **Intersecciones** : No hay intersección con el eje y , pues la función no está definida en $x = 0$ tampoco hay intersección con el eje x , pues $\frac{x^2 + 4}{2x} \neq 0$, $x \neq 0$.

II) Sentido de variación $g'(x)$ y sus signos.

$$g(x) = \frac{x^2 + 4}{2x}, g'(x) = \frac{1}{2} \frac{x(2x) - (x^2 + 4) \cdot 1}{x^2} = \frac{1}{2} \frac{(x^2 - 4)}{x^2} = \frac{1}{2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x^2}.$$

Puntos críticos ($g'(x) = 0$).

$(x - 2)(x + 2) = 0$; $x_1 = -2$, $x_2 = 2$ ceros de multiplicidad impar.

Indeterminaciones: $x^2 = 0$, $x = 0$ (indeterminaciones de multiplicidad par: los signos de g' no dependen del factor x^2).

Cuadro de signos de $g'(x)$.

	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$	
x^2	+	+	0	+	+	
$x + 2$	-	0	+	+	+	
$x - 2$	-	-	-	0	+	
$g'(x)$	+	0	-	-	0	+

III) Concavidad (g'') y sus signos.

$$g'(x) = \frac{1}{2} \frac{x^2 - 4}{x^2} \implies g''(x) = \frac{1}{2} \frac{x^2(2x) - (x^2 - 4)2x}{x^4} = \frac{1}{2} \frac{2x[x^2 - x^2 + 4]}{x^4} = \frac{4}{x^3}.$$

g'' no tiene ceros y se indefin en $x = 0$.

Signo de $g''(x)$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^3	-		+
$g''(x)$	-		+

IV) Comportamiento en los extremos del dominio (asíntotas).

De I) $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$, y $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -\infty$, $x = 0$ es una asíntota vertical.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 4}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{4}{x}\right) = +\infty$ y no hay asíntotas horizontales.

El grado del numerador excede en 1 el del denominador $\Rightarrow$ hay una asíntota oblicua.

Cálculo de la asíntota oblicua efectuando la división
$$\begin{array}{r} x^2 + 4 \quad 2x \\ -x^2 \quad \quad \quad \frac{x}{2} \\ \hline 4 \end{array}$$

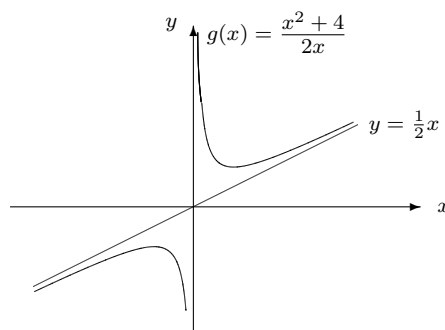
$g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{2}{x}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$, luego $y(x) = \frac{x}{2}$ es la asíntota buscada.

Observando el cuadro de signos de g' , se concluye que $g(x)$ tiene un mínimo en $(2, 2)$ y un máximo en $(-2, -2)$.

Cuadro de variación

	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\infty$	$\searrow$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0
$g''(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$

Gráfica



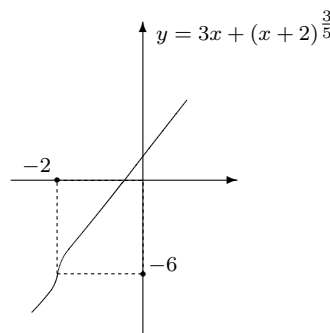
2. $y' = 3 + \frac{3}{5(x+2)^{\frac{2}{5}}}$, $y'' = \frac{-6}{25(x+2)^{\frac{7}{5}}}$. En $x = -2$ se puede presentar un punto de inflexión.

Para $x > -2$, $y'' < 0$.

Para $x < -2$, $y'' > 0$.

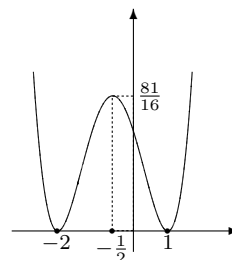
Además, $\lim_{x \rightarrow -2} y' = +\infty$, $y(-2) = -6$ por lo que y tiene en $x = -2$ una tangente vertical.

El punto $(-2, -6)$ es un punto de inflexión.



3. a) $f'(x) = 12(x^2 - 8x + 12) = 12(x-2)(x-6)$. Los valores críticos son $x = 2$, $x = 6$.
 b) $f''(x) = 12(2x - 8) = 24(x - 4)$.
 c) $f''(2) < 0$, por tanto $f(x)$ tiene un máximo igual a 128 en $x = 2$. $f''(6) > 0$, por tanto $f(x)$ tiene un mínimo igual a 0 en $x = 6$.
4. $y' = 3x^2$, de la ecuación $y' = 0$ se obtiene $x = 0$.
 Para $x < 0$ y $x > 0$, $y' > 0$, lo cual indica que la función es creciente $\therefore$ no hay máximos ni mínimos.
 En $(0, 0)$ la curva presenta un punto de inflexión.
5. Cuadro resumen:

x	-2	$-\frac{1}{2}$	1
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
	0	$\frac{81}{16}$	0



6. $y = \frac{8}{x^2 - 4}$. **Dominio:** $\mathbb{R} \setminus \{2, -2\}$, pues $x^2 - 4 = 0 \iff x = \pm 2$.

Sentido de variación

Observemos que la función es simétrica respecto al eje y , ya que $f(x) = f(-x)$.

$$y' = -8(x^2 - 4)^{-2}(2x) = -\frac{16x}{(x^2 - 4)^2}$$

$$y' > 0 \iff x < 0. \text{ Por lo tanto } y \text{ crece para } x < 0.$$

$$y' < 0 \iff x > 0. \text{ Por lo tanto } y \text{ decrece para } x > 0.$$

$y' = 0 \iff x = 0$. En este punto, eventualmente, la función puede alcanzar un máximo o un mínimo.

Valores extremos y concavidad

$$y'' = \frac{(x^2 - 4)^2(-16) - (-16x)(4x(x^2 - 4))}{(x^2 - 4)^4} = \frac{(x^2 - 4)[-16(x^2 - 4) + 64x^2]}{(x^2 - 4)^4} = \frac{48x^2 + 64}{(x^2 - 4)^3} = \frac{16(3x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^3}.$$

$$y''(0) = \frac{64}{(-4)^3} = -1 < 0 \implies y \text{ alcanza un máximo en } x = 0.$$

Por otro lado, $y'' < 0 \iff x^2 - 4 < 0 \iff -2 < x < 2$: f es cóncava hacia abajo en $] -2, 2[$.

$y'' > 0 \iff x < -2$ ó $x > 2$, por lo tanto f es cóncava hacia arriba en $] -\infty, -2[\cup] 2, \infty [$.

Intersección con los ejes

$y = \frac{8}{x^2 - 4} \neq 0$ para todo x en el dominio, por lo tanto la curva nunca corta al eje x .

Para $x = 0$, $y = \frac{8}{-4} = -2$, es decir la curva corta al eje y en -2 .

Comportamiento en los extremos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{x^2 - 4} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{8}{x^2 - 4} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{8}{x^2 - 4} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8}{x^2 - 4} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{8}{x^2 - 4} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{8}{x^2 - 4} = +\infty$$

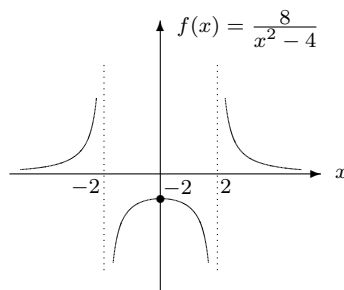
x	-2	2
$x - 2$	$-$	0
$x + 2$	$-$	$+$
$f(x)$	$+$	$-$

Asíntotas del paso anterior, se ve que $x = -2$ y $x = 2$ son asíntotas verticales y que $y = 0$

es asíntota horizontal.

Cuadro de variación (resumen sólo el eje positivo)

x	0	2	$+\infty$
$f(x)$	-2	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	
$f''(x)$	-	+	



7. La distancia de P a A está dado por la fórmula $d = \sqrt{(x-3)^2 + y^2}$.

Dado que la ecuación de la curva es $y = x^2$, sustituyendo se obtiene:

$$d(x) = \sqrt{(x-3)^2 + x^4} = \sqrt{x^2 - 6x + 9 + x^4} \Rightarrow d'(x) = \frac{4x^3 + 2x - 6}{2\sqrt{x^4 - 6x + x^2 + 9}} =$$

$$\frac{2x^3 + x - 3}{\sqrt{x^4 + x^2 - 6x + 9}} \text{ y } 2x^3 + x - 3 = (x-1)(2x^2 + 2x + 3) = 0 \Rightarrow d'(x) = 0, \text{ para } x = 1.$$

En $x = 1$ hay un mínimo $y = 1^2 = 1$. El punto P es $(1, 1)$.

8. $\overline{DB}$: Altura del cilindro h .

$\overline{BC}$: Radio del cono $6cm$

$\overline{BE}$: Radio del cilindro r

$\overline{AB}$: Altura del cono $12cm$.

La función que expresa el volumen del cilindro

es $V = \pi r^2 h$.

Se tiene por Tales que el $\triangle ADF \sim \triangle ABC$, por

$$\text{lo tanto } \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DF}} \Rightarrow \frac{12}{12-h} = \frac{6}{r} \Rightarrow$$

$$\frac{h}{12} = \frac{6-r}{6} \Rightarrow 6h = 72 - 12r \therefore h = \frac{72-12r}{6} = 12 - 2r.$$

$$\text{Así } V(r) = \pi r^2(12 - 2r) = 12\pi r^2 - 2\pi r^3 \Rightarrow V'(r) = 24\pi r - 6\pi r^2.$$

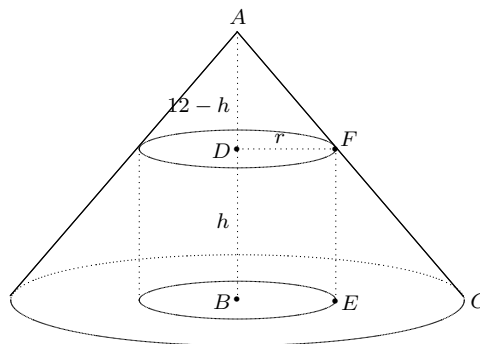
$$V'(r) = 24\pi r - 6\pi r^2 = 0 \Rightarrow 6\pi r(4 - r) = 0 \Rightarrow r_1 = 0, r_2 = 4.$$

$$V''(r) = 24\pi - 12\pi r \Rightarrow V''(0) = 24\pi > 0 \dots \text{luego para } r = 0 \text{ hay un mínimo.}$$

$$V''(4) = 24\pi - 48\pi = -24\pi < 0, \text{ luego para } r = 4 \text{ hay un máximo.}$$

Las dimensiones del cilindro mínimo son: radio $r = 0$ y altura $12cm$, es el caso límite en que el cilindro se reduce al segmento $\overline{AB}$.

Las dimensiones del cilindro de volumen máximo son: radio $r = 4cm$, altura $h = 12 - 8 = 4cm$.



9. Los grandes huesos de los mamíferos se pueden representar como tubos cilíndricos huecos, llenos de médula, de radio exterior R y radio interior r . Los huesos deben ser ligeros pero a la vez capaces de resistir ciertos momentos de flexión. Se puede demostrar que para resistir un momento flexionante M , la masa m por unidad de longitud del hueso y la médula está dada por:

$$m = \pi \rho \left[\frac{M}{K(1-x^4)} \right]^{\frac{2}{3}} \left[1 - \frac{1}{2}x^2 \right],$$

donde ρ es la densidad del hueso y K una constante positiva.

Si $x = \frac{r}{R}$, demuestre que m es mínima cuando $r = 0.63R$ aproximadamente.

Solución $m = \pi \rho \left[\frac{M^{\frac{2}{3}}}{K^{\frac{2}{3}}(1-x^4)^{\frac{2}{3}}} \right] \left[\frac{2-x^2}{2} \right] = \frac{\pi \rho M^{\frac{2}{3}}}{2K^{\frac{2}{3}}} \left[\frac{2-x^2}{(1-x^4)^{\frac{2}{3}}} \right].$

Como $\frac{\pi \rho M^{\frac{2}{3}}}{2K^{\frac{2}{3}}}$ es constante,

$$m' = \frac{\pi \rho M^{\frac{2}{3}}}{2K^{\frac{2}{3}}} \left[\frac{-2x(1-x^4)^{\frac{2}{3}} - (2-x^2) \frac{2}{3}(1-x^4)^{-\frac{1}{3}}(-4x^3)}{(1-x^4)^{\frac{4}{3}}} \right] =$$

$$\frac{\pi \rho M^{\frac{2}{3}}}{2K^{\frac{2}{3}}} \left[\frac{-2x(1-x^4)^{\frac{2}{3}} + \frac{8x^3(2-x^2)}{3(1-x^4)^{\frac{1}{3}}}}{(1-x^4)^{\frac{4}{3}}} \right] = \frac{\pi \rho M^{\frac{2}{3}}}{2K^{\frac{2}{3}}} \left[\frac{-6x(1-x^4) + 8x^3(2-x^2)}{3(1-x^4)^{\frac{1}{3}}(1-x^4)^{\frac{4}{3}}} \right],$$

entonces $m' = 0 \implies -6x(1-x^4) + 8x^3(2-x^2) = -6x + 6x^5 + 16x^3 - 8x^5 = -2x^5 + 16x^3 - 6x = -2x(x^4 - 8x^2 + 3) = 0 \implies x = 0$ o $x^4 - 8x^2 + 3 = 0$.

Sea $y = x^2$, ($x = 0$ se descarta), $y^2 - 8y + 3 = 0$, $y_1 = \frac{8+\sqrt{52}}{2} \approx 7.60$, $y_2 = \frac{8-\sqrt{52}}{2} \approx 0.39 \implies x^2 \approx 7.60 \implies x \approx 2.75$, $x^2 \approx 0.39 \implies x \approx 0.63$, $x = \frac{r}{R} = 0.63 \implies r = 0.63R$.

x	$-\infty$	0	0.63	2.75	$+\infty$
$-2x$	+	0	-	-	-
$x - 2.75$	-	-	-	0	+
$x - 0.63$	-	-	0	+	+
$m'(x)$	+	-	+	-	-
$m(x)$					

10. Un hato de 100 venados se transporta a una isla pequeña. El rebaño crece rápidamente pero los recursos alimenticios de la isla comienzan a escasear y la población disminuye. Suponga que el número $N(t)$ de venados que hay en la isla a los t años, está dado por:

$$N(t) = -t^4 + 21t^2 + 100.$$

- a) ¿Cuándo deja de crecer el hato?
- b) ¿Cuál es su tamaño máximo?
- c) ¿Cuándo se extingue la población?
- d) Trace la gráfica de N para $t \geq 0$.

Solución $N(t) = -t^4 + 21t^2 + 100$, $N'(t) = -4t^3 + 42t = -t(4t^2 - 42) = 0 \implies t = 0$, $t = \pm\sqrt{\frac{21}{2}}$.

t	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{21}{2}}$	0	$\sqrt{\frac{21}{2}}$	$+\infty$
$-t$		+	+	-	-
$t + \sqrt{\frac{21}{2}}$	-	0	+	+	+
$t - \sqrt{\frac{21}{2}}$	-	-	-	0	+
$N'(t)$	+	0	-	0	-
$N(t)$		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Dominio: $t \geq 0$.

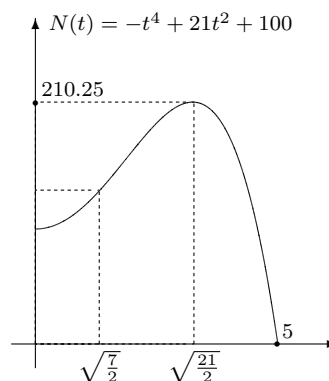
a) Deja de crecer para $t = \sqrt{\frac{21}{2}} \cong 3,24$ años.

b) $N(\sqrt{\frac{21}{2}}) = -(\sqrt{\frac{21}{2}})^4 + 21(\sqrt{\frac{21}{2}})^2 + 100 = -\frac{441}{4} + \frac{441}{2} + 100 = \frac{-441+882+400}{4} = \frac{841}{4} \cong 210$ venados.

c) $N(t) = 0 \implies -t^4 + 21t^2 + 100 = 0 \implies t^4 - 21t^2 - 100 = 0$. Sea $u = t^2$, $u^2 - 21u - 100 = (u - 25)(u + 4) = (t^2 - 25)(t^2 + 4) = (t - 5)(t + 5)(t^2 + 4) = 0$ y la solución es $t = 5$, es decir que a los 5 años la población se extingue.

$N''(t) = -12t^2 + 42 = 0 \implies -12t^2 = -42$, $t^2 = \frac{42}{12} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} \implies t = \pm\sqrt{\frac{7}{2}}$, con lo cual tenemos $N''(t) = -12(t + \sqrt{\frac{7}{2}})(t - \sqrt{\frac{7}{2}})$.

t	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{7}{2}}$	$\sqrt{\frac{7}{2}}$	$+\infty$
-12		-	-	-
$t + \sqrt{\frac{7}{2}}$	-	0	+	+
$t - \sqrt{\frac{7}{2}}$	-	-	0	+
$N''(t)$		$\cap$	$\cup$	$\cap$



Ejercicios de derivación: V Parte Prof. Carlos Azofeifa

1. Encuentre la derivada de $f(x) = [x^3 + (2x - 1)^3]^3$.
2. Encuentre la derivada de $f(x) = (x + \sqrt[3]{x + \sqrt{2x - 9}})^8$.
3. Suponga que f es diferenciable en $\mathbb{R}$ y α es un número real.
Sean $F(x) = f(x^\alpha)$ y $G(x) = [f(x)]^\alpha$, encuentre expresiones para $F'(x)$ y $G'(x)$.
4. Si $F(x) = f(g(x))$, $g(3) = 6$, $g'(3) = 4$, $f'(3) = 2$, $f'(6) = 7$. Encuentre $F'(3)$.
5. Encuentre $\frac{dy}{dx}$ utilizando la derivación implícita:
 - a) $2xy = (x^2 + y^2)^{3/2}$
 - b) $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+2x} = 2x$.
6. Encuentre los puntos de la curva $x^2y^2 + xy = 2$, donde la pendiente de la recta tangente sea -1 .
7. Un automóvil A viaja hacia el oeste a $50mi/h$, y otro automóvil B viaja hacia el norte a $60mi/h$. Ambos automóviles se dirigen hacia la intersección C de los caminos. ¿A qué velocidad se aproximan los automóviles entre sí, cuando A se encuentra a 0.3 millas y B a 0.4 millas de la intersección?

Soluciones de ejercicios de derivación: V Parte Prof. Carlos Azofeifa

1. Encuentre la derivada de
- $f(x) = [x^3 + (2x - 1)^3]^3$
- .

Solución $f(x) = [x^3 + (2x - 1)^3]^3 \implies f'(x) = 3[x^3 + (2x - 1)^3]^2(3x^2 + 3(2x - 1)^2 \cdot 2) =$
 $3[x^3 + (2x - 1)^3]^2(27x^2 - 24x + 6) = 3[x^3 + (2x - 1)^3]^2 \cdot 3(9x^2 - 8x + 2) =$
 $9[x^3 + (2x - 1)^3]^2(9x^2 - 8x + 2).$

2. Encuentre la derivada de
- $f(x) = (x + \sqrt[3]{x + \sqrt{2x - 9}})^8$
- .

Solución $f(x) = (x + \sqrt[3]{x + \sqrt{2x - 9}})^8 \implies$
 $f'(x) = 8(x + \sqrt[3]{x + \sqrt{2x - 9}})^7 \left(1 + \frac{1}{3}(x + \sqrt{2x - 9})^{-\frac{2}{3}} \left(1 + \frac{2}{2\sqrt{2x - 9}} \right) \right)$
 $f'(x) = 8(x + \sqrt[3]{x + \sqrt{2x - 9}})^7 \left(1 + \frac{1}{3}(x + \sqrt{2x - 9})^{-\frac{2}{3}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2x - 9}} \right) \right).$

3. Suponga que
- f
- es diferenciable en
- $\mathbb{R}$
- y
- α
- es un número real. Sean
- $F(x) = f(x^\alpha)$
- y
- $G(x) = [f(x)]^\alpha$
- , encuentre expresiones para
- $F'(x)$
- y
- $G'(x)$
- .

Solución $F(x) = f(x^\alpha) \implies F'(x) = f'(x^\alpha)\alpha x^{\alpha-1}.$

$G(x) = [f(x)]^\alpha \implies G'(x) = \alpha [f(x)]^{\alpha-1} f'(x).$

4. Si
- $F(x) = f(g(x))$
- ,
- $g(3) = 6$
- ,
- $g'(3) = 4$
- ,
- $f'(6) = 7$
- ,
- $f'(3) = 2$
- . Encuentre
- $F'(3)$
- .

Solución $F'(x) = f'(g(x))g'(x)$, $F'(3) = f'(g(3))g'(3) = f'(6)g'(3) = 7 \cdot 4 = 28.$

5. Encuentre
- $\frac{dy}{dx}$
- utilizando la derivación implícita:

a) $2xy = (x^2 + y^2)^{3/2}$

b) $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+2x} = 2x.$

Solución

a) $2xy = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} \implies 2y + 2xy' = \frac{3}{2}(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}(2x + 2yy') \implies$

$2y + 2xy' = \frac{3}{2}(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}(2x) + \frac{3}{2}(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}(2yy') \implies 2xy' - 3y(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}y' = 3(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}x - 2y \implies$

$y' \left(2x - 3y(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \right) = 3x(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} - 2y \implies \boxed{y' = \frac{3x(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} - 2y}{2x - 3y(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}.$

b) $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+2x} = 2x \implies \sqrt{1+y} + x\frac{1}{2\sqrt{1+y}}y' + y'\sqrt{1+2x} + y\frac{2}{2\sqrt{1+2x}} = 2 \implies$

$\boxed{y' = \frac{2 - \sqrt{1+y} - \frac{y}{\sqrt{1+2x}}}{\sqrt{1+2x} + \frac{x}{2\sqrt{1+y}}}.$

6. Encuentre los puntos de la curva
- $x^2y^2 + xy = 2$
- , donde la pendiente de la recta tangente sea
- -1
- .

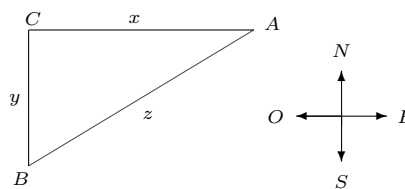
Solución $x^2y^2 + xy = 2 \implies 2xy^2 + 2x^2yy' + y + xy' = 0 \iff y'(2x^2y + x) = -2xy^2 - y \iff$

$y' = -\frac{2xy^2 + y}{2x^2y + x}$, entonces $y' = -1 \implies -\frac{2xy^2 + y}{2x^2y + x} = -1 \implies 2xy^2 + y = 2x^2y + x \iff y(2xy + 1) = x(2xy + 1) \iff (2xy + 1)(y - x) = 0 \iff y = x \text{ ó } xy = -\frac{1}{2}$, pero $xy = -\frac{1}{2} \implies x^2y^2 + xy = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \neq 2$.

Si $x = y$, entonces $x^2y^2 + xy = 2 \implies x^4 + x^2 = 2 \iff x^4 + x^2 - 2 = 0 \iff (x^2 + 2)(x^2 - 1) = 0$ y $x^2 = -2$ que es imposible ó $x^2 = 1 \iff x = \pm 1$, por lo que los puntos de la curva donde la tangente tiene pendiente igual a -1 son: $(-1, -1)$ y $(1, 1)$.

7. Un automóvil A viaja hacia el oeste a $50mi/h$, y otro automóvil B viaja hacia el norte a $60mi/h$. Ambos automóviles se dirigen hacia la intersección C de los caminos. ¿A qué velocidad se aproximan los automóviles entre sí, cuando A se encuentra a $0.3mi$ y B a $0.4mi$ de la intersección?

Solución C es la intersección de los caminos. En el instante t , sean x la distancia del automóvil A a C , y la distancia de B a C , z la distancia entre los automóviles, en donde x, y, z se miden en millas.



Se considera por hipótesis que $\frac{dx}{dt} = -50mi/h$, $\frac{dy}{dt} = -60mi/h$ y se debe determinar $\frac{dz}{dt}$. La ecuación que relaciona x, y, z está dada por $z^2 = x^2 + y^2$, entonces $2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} \implies \frac{dz}{dt} = \frac{1}{z} \left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} \right)$.

Cuando $x = 0.3mi$, $y = 0.4mi$, por el Teorema de Pitágoras se tiene que $z = 0.5mi$, por lo tanto $\frac{dz}{dt} = \frac{1}{0.5} [0.3(-50) + 0.4(-60)] = -78mi/h$.

R/ Los automóviles se acercan entre sí a razón de $78mi/h$.

Tema No. 3

Ejercicios de límites en el infinito Prof. Angel Ruíz

1. Encuentre el límite en cada caso.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^5 + 2x).$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 6x + 2}{x^3 - x - 2}.$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 2}{\sqrt{x^2 - 1}}.$

2. Determinar las asíntotas horizontales de la función: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$

3. Haga el estudio completo y trace la gráfica de la función $f(x) = 5x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}}.$

4. Encuentre las asíntotas de la función $g(t) = \frac{t^2 + 3}{t - 1}.$

5. Determinar la distancia más corta del punto $P(2, \frac{1}{2})$ a un punto sobre la parábola $y = x^2$, encontrar el punto que está más cerca de P .

6. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x + 3)^3 (3x - 2)^2}{x^5 + 5}$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1}}{x + 1}$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{\pi}{x}$
d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{2x}{x+1}}$ e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 2}{2x^2 + 1}\right)^{x^2}.$

7. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \tanh x$ b) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x}.$

8. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{\left(1 + \frac{2}{x}\right) \left(1 + \frac{3}{x}\right)} - 1 \right)$
c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + 1}}$ d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sqrt[3]{1 - x^3}.$

Soluciones de ejercicios de límites en el infinito Prof. Angel Ruíz

1. Encuentre el límite en cada caso.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^5 + 2x). \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 6x + 2}{x^3 - x - 2}. \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 2}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Solución

$$\text{a) Note que } \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^5 + 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 \left(-3 + \frac{2}{x^4} \right) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 \right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-3 + \frac{2}{x^4} \right) \right) = (+\infty) \cdot (-3) = -\infty.$$

$$\text{Observe que } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^4} = 0, \text{ por lo tanto } \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^5 + 2x) = -\infty.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 6x + 2}{x^3 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2 - 6x + 2}{x^3}}{\frac{x^3 - x - 2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{2}{x^3}}{1 - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}}. \quad (*)$$

Se puede apreciar que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right) = 1$, pues $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{x^2} = 0$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{2}{x^3} = 0$, entonces, como $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right) = 0$, tenemos que: $(*) = \frac{0}{1} = 0$.

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 2}{\sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(3 + \frac{2}{x})}{\sqrt{x^2(1 - \frac{1}{x^2})}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(3 + \frac{2}{x})}{|x|\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} \quad (**)$$

Note que $\sqrt{x^2} = |x|$. Para valores $x > 0$ se tiene que $|x| = x$, por lo tanto:

$$(**) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(3 + \frac{2}{x})}{x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3 + \frac{2}{x})}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \frac{3}{1} = 3.$$

$$\text{Note que: } \lim_{x \rightarrow +\infty} (3 + \frac{2}{x}) = 3 \text{ y } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 1.$$

2. Determinar las asíntotas horizontales de la función $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

Solución Se deben calcular los siguientes límites: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

$$\text{El primero: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \quad (***)$$

Note que $\sqrt{x^2} = |x|$. Para $x > 0 \Rightarrow |x| = x$, entonces:

$$(***) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Note que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 1$. La recta $y = 1$ es asíntota horizontal.

$$\text{Ahora, } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = -1.$$

La recta $y = -1$ es asíntota horizontal.

Note que pueden existir 2 asíntotas horizontales para una función.

3. Haga el estudio completo y trace la gráfica de la función $f(x) = 5x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}}$.

Solución

- (a) Dominio. Es fácil ver que el dominio es todo $\mathbb{R}$.
- (b) Intersecciones con los ejes. La intersección con el eje y , se puede calcular con $f(0) = 0$, por lo que el punto es $(0, 0)$.

La intersección con el eje x , se calcula con la ecuación $5x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}} = 0$, que es equivalente a:
 $x^{\frac{2}{3}}(5 - x) = 0$.

Tenemos dos soluciones para esa ecuación: $x = 0$ y $x = 5$.

Los puntos son entonces: $(0, 0)$ y $(5, 0)$.

- (c) El crecimiento. Calculamos $f'(x) = \frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} = \frac{5}{3}x^{-\frac{1}{3}}(2 - x)$.

Si $x = 0$, $f'(x)$ no existe ($f'(0)$ no existe). Calculamos ahora los números críticos con la ecuación $f'(x) = 0$ i.e. $\frac{5}{3}x^{-\frac{1}{3}}(2 - x) = 0$; obtenemos $x = 2$.

Queremos saber ¿dónde f es creciente o decreciente? y para ello debemos saber ¿dónde f' es positiva o negativa, respectivamente?

La siguiente tabla de signos nos permite hacer eso.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$\frac{5}{3}x^{-\frac{1}{3}}$	-	+	+	+
$2 - x$	+	+	0	-
$\frac{5}{3}x^{-\frac{1}{3}}(2 - x)$	-	+	0	-

$f'(x) < 0$ si $x \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$.

Observe que $f(2) = 5 \cdot 2^{\frac{2}{3}} - 2^{\frac{5}{3}} = 3\sqrt[3]{4} \approx 4,8$.

- (d) La concavidad La segunda derivada $f''(x) = -\frac{10}{9}x^{-\frac{4}{3}} - \frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}} = -\frac{10}{9}x^{-\frac{4}{3}}(1 + x)$.

Tenemos que $f''(0)$ no existe y que $f''(-1) = 0$ con la tabla de signos.

$f''(x) > 0$ si $x \in]-\infty, -1[$. Así que f es cóncava hacia arriba en $]-\infty, -1[$ y será cóncava hacia abajo en $]-1, 0[\cup]0, +\infty[$.

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$-\frac{10}{9}x^{-\frac{4}{3}}$	-	-	-	-
$1 + x$	-	0	+	+
$-\frac{10}{9}x^{-\frac{4}{3}}(1 + x)$	+	0	-	-

Se tiene un punto de inflexión en $x = -1$ y note que: $f(-1) = 6$.

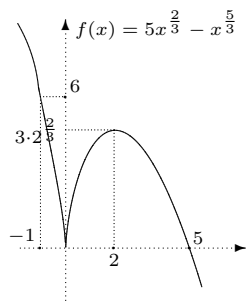
- (e) Asíntotas No tiene.

(f) Cuadro de variación

Resumimos todo.

Note que en $x = 2$ hay un máximo relativo. La concavidad sólo cambia en $x = -1$.

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$f(x)$					
$f'(x)$	-	-	+	-	
$f''(x)$	+	-	-	-	

(g) Gráfica

4. Encuentre las asíntotas de la función $g(t) = \frac{t^2 + 3}{t - 1}$.

Solución La función $g(t) = \frac{t^2 + 3}{t - 1}$ posee una asíntota vertical en $t = 1$.

De hecho, $\lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{t^2 + 3}{t - 1} = -\infty$ y $\lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{t^2 + 3}{t - 1} = +\infty$.

Si se calcula $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{t^2 + 3}{t - 1}$ el resultado es $\pm\infty$.

Por lo que es claro que no posee asíntotas horizontales.

Ahora bien, se puede efectuar la división de polinomios $\frac{t^2 + 3}{t - 1}$.

Solución

$t^2 + 0t + 3$	$t - 1$
$-t^2 + t$	$t + 1$
$0 + t + 3$	
$-t + 1$	
4	

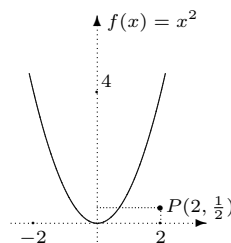
Es decir: $\frac{t^2 + 3}{t - 1} = t + 1 + \frac{4}{t - 1}$. Por lo tanto $y = t + 1$ es una asíntota oblicua de $f(x)$.

5. Determinar la distancia más corta del punto $P(2, \frac{1}{2})$ a un punto sobre la parábola $y = x^2$, encontrar el punto que está más cerca de P .

Solución Un gráfico nos permite visualizar la situación.

La distancia entre $(2, \frac{1}{2})$ y cualquier punto (x, y) , de la curva vendría dada por la ecuación:

$$d = \sqrt{(x - 2)^2 + (y - \frac{1}{2})^2}.$$



Como $y = f(x) = x^2$, entonces $d = \sqrt{(x-2)^2 + (x^2 - \frac{1}{2})^2} \Rightarrow d = \sqrt{x^2 - 4x + 4 + x^4 - x^2 + \frac{1}{4}} \Rightarrow d = \sqrt{x^4 - 4x + \frac{17}{4}}$.

Como d es una función de x , lo podemos escribir como:

$$d(x) = \sqrt{x^4 - 4x + \frac{17}{4}}.$$

De lo que se trata es de encontrar el mínimo absoluto de $d(x)$ en $\mathbb{R}$. Note que no hay restricciones para el valor de x .

Calculamos la derivada: $d'(x) = \frac{4x^3 - 4}{2\sqrt{x^4 - 4x + \frac{17}{4}}} = \frac{2(x^3 - 1)}{\sqrt{x^4 - 4x + \frac{17}{4}}} = \frac{2(x-1)(x^2 + x + 1)}{\sqrt{x^4 - 4x + \frac{17}{4}}}$.

Los números críticos se obtienen cuando $d'(x) = 0$.

Note que $2(x^2 + x + 1) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, luego $d'(x) = 0 \iff x - 1 = 0 \iff x = 1$.

Aplicando el criterio de la primera derivada y la tabla de signos tenemos que en $x = 1$, $d(x)$ tiene un mínimo relativo, de hecho: $d(1) = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Para $x = 1$, el punto en la parábola $y = x^2$ viene dado por $(1, 1)$, que es el punto más cercano a $P(2, \frac{1}{2})$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$		$\searrow$	$\nearrow$

6. Calcular los siguientes límites:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x+3)^3(3x-2)^2}{x^5+5} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{\pi}{x} \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{2x}{x+1}} & \text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+2}{2x^2+1}\right)^{x^2} & \end{array}$$

Solución

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{(2x+3)^3(3x-2)^2}{x^5+5} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(2 + \frac{3}{x}\right)^3 \cdot x^2 \left(3 - \frac{2}{x}\right)^2}{x^5+5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(2 + \frac{3}{x}\right)^3 \left(3 - \frac{2}{x}\right)^2}{1 + \frac{5}{x^5}} =$$

72.

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{1+1/x^2}}{x(1+1/x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{1+1/x^2}}{x^{\frac{1}{3}}(1+1/x)} = 0.$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{\pi}{x}, \text{ haciendo } y = \frac{1}{x}, \text{ se tiene } \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{y} \sin \pi y = \lim_{y \rightarrow 0^+} \pi \frac{\sin \pi y}{\pi y} = \pi.$$

$$\text{d) Sabemos que si } x \rightarrow \infty, \frac{1}{x^2} \rightarrow 0 \text{ y } \frac{2x}{x+1} \rightarrow 2, \text{ por lo que } \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{2x}{x+1}} \rightarrow 0^2 = 0.$$

$$\text{e) Puesto que } \frac{x^2+2}{2x^2+1} = \frac{1 + \frac{2}{x^2}}{2 + \frac{1}{x^2}} \rightarrow \frac{1}{2}, \left(\frac{x^2+2}{2x^2+1}\right)^{x^2} \rightarrow 0, \text{ es decir } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+2}{2x^2+1}\right)^{x^2} = 0.$$

7. Calcular los siguientes límites:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \tanh x$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x}.$$

Solución

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \tanh x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x(1 + e^{-2x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \tanh x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}(-1 + e^{2x})}{e^{-x}(1 + e^{2x})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1 + e^{2x}}{1 + e^{2x}} = -1.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln e^x(1 + e^{-x})}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln(1 + e^{-x})}{x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{x} \ln(1 + e^{-x})) = 1, \text{ ya que si } x \rightarrow +\infty, \frac{1}{x} \rightarrow 0 \text{ y } \ln(1 + e^{-x}) \rightarrow \ln 1 = 0 \text{ i.e. } \frac{1}{x} \ln(1 + e^{-x}) \rightarrow 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \ln(1 + e^x) = 0, \text{ pues } \frac{1}{x} \rightarrow 0, e^x \rightarrow 0, \text{ si } x \rightarrow -\infty.$$

8. Calcular los siguientes límites:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{(1 + \frac{2}{x})(1 + \frac{3}{x})} - 1)$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + 1}}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sqrt[3]{1 - x^3}.$$

Solución

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{\operatorname{sen} x}{x}}{1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x}} = 1, \text{ ya que } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{(1 + \frac{2}{x})(1 + \frac{3}{x})} - 1) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x((1 + \frac{2}{x})(1 + \frac{3}{x}) - 1)}{\sqrt{(1 + \frac{2}{x})(1 + \frac{3}{x})} + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}((x + 2)(x + 3) - x^2)}{\sqrt{(1 + \frac{2}{x})(1 + \frac{3}{x})} + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{6}{x}}{\sqrt{(1 + \frac{2}{x})(1 + \frac{3}{x})} + 1} = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}}}{\sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x}}} = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sqrt[3]{1 - x^3} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x + \sqrt[3]{1 - x^3})(x^2 - x\sqrt[3]{1 - x^3} + \sqrt[3]{(1 - x^3)^2})}{x^2 - x\sqrt[3]{1 - x^3} + \sqrt[3]{(1 - x^3)^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1 - x^3}{x^2(1 - \sqrt[3]{\frac{1}{x^3}} - 1 + \sqrt[3]{(\frac{1}{x^3} - 1)^2})} = 0. \end{aligned}$$

Ejercicios de límites en el infinito: II Parte Prof. Carlos Avendaño

1. Encontrar los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2 + 5x + 6}{6x^2 - 8x - 100} \right)^{\frac{1}{5}}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 2}}{x + 10}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, si $\frac{4x-1}{x} \leq f(x) \leq \frac{4x^2+3x}{x^2}$, para todo $x > 5$.

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(32x^5 + 200)^{\frac{1}{5}}}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{10(x-3)(3x+8)(1-4x)}{3x^3 - x + 1}$

g) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 + n + 1} + n$

2. Un tanque contiene 5000l (litros) de agua pura. Se bombea salmuera que contiene 30g (gramos) de sal por litro de agua al interior del tanque, a razón de 25l/min.

a) Demuestre que la concentración de sal después de t minutos (en gramos por litro) es

$$C(t) = \frac{30t}{200 + t}.$$

b) ¿Qué sucede con la concentración cuando $t \rightarrow +\infty$?

3. Trace la gráfica de una función que satisfaga las condiciones dadas: $f'(2) = 0$, $f'(0) = 1$, $f'(x) > 0$, si $0 < x < 2$, $f'(x) < 0$, si $x > 2$, $f''(x) < 0$ si $0 < x < 4$, $f''(x) > 0$, si $x > 4$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, $f(-x) = -f(x)$, para toda $x \in \mathbb{R}$.

4. Encuentre las asíntotas de la gráfica de la función $f(x) = \frac{x-9}{\sqrt{4x^2+3x+2}}$.

Soluciones de ejercicios de límites en el infinito: II Parte Prof. Carlos Avendaño

1. Encontrar los límites siguientes:

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2 + 5x + 6}{6x^2 - 8x - 100} \right)^{\frac{1}{5}}$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 2}}{x + 10}$
- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, si $\frac{4x-1}{x} \leq f(x) \leq \frac{4x^2+3x}{x^2}$, para todo $x > 5$
- d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(32x^5 + 200)^{\frac{1}{5}}}$ e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$
- f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{10(x-3)(3x+8)(1-4x)}{3x^3 - x + 1}$ g) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + n + 1} + n)$.

Solución

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2 + 5x + 6}{6x^2 - 8x - 100} \right)^{\frac{1}{5}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}}{6 - \frac{8}{x} - \frac{100}{x^2}} \right)^{\frac{1}{5}} = \left(\frac{3}{6} \right)^{\frac{1}{5}} = \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{5}}.$
- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 2}}{x + 10} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{4 + \frac{2}{x^2}}}{x(1 + \frac{10}{x})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{4 + \frac{2}{x^2}}}{1 + \frac{10}{x}} = -2.$
- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 4$, ya que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x-1}{x} = 4 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2+3x}{x^2}$ y como para $x > 5$ tenemos $\frac{4x-1}{x} \leq f(x) \leq \frac{4x^2+3x}{x^2}$ se tiene $4 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x-1}{x} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2+3x}{x^2} = 4.$
- d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(32x^5 + 200)^{\frac{1}{5}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(32 + \frac{200}{x^5})^{\frac{1}{5}}} = \frac{1}{2}.$
- e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{x}} + 1} = -1.$
- f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{10(x-3)(3x+8)(1-4x)}{3x^3 - x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{10x(1 - \frac{3}{x})x(3 + \frac{8}{x})x(\frac{1}{x} - 4)}{x^3(3 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3})} = -40.$
- g) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + n + 1} + n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n(\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1) = +\infty.$

2. Un tanque contiene 5000l (litros) de agua pura. Se bombea salmuera que contiene 30g (gramos) de sal por litro al interior del tanque, a razón de 25l/min.

a) Demuestre que la concentración de sal después de t minutos (en gramos por litro) es

$$C(t) = \frac{30t}{200+t}.$$

b) ¿Qué sucede con la concentración cuando $t \rightarrow +\infty$?

Solución

- a) La concentración $C(t) = \frac{M(t)}{V(t)}$, donde $M(t)$ es la cantidad de sal en función de t y $V(t)$ es el volumen en función de t .

Se sabe que $\frac{dV}{dt} = 25$ y $V = 5000$ en $t = 0$, luego $V(t) = 25t + K$, $V(0) = 5000 = 25(0) + K = K$, es decir $V(t) = 25t + 5000$. Además, $M(t) = 25(30t)$ y $C(t) = \frac{25(30t)}{25t + 5000} = \frac{25(30t)}{25(t + 200)} = \frac{30t}{t + 200}$.

b) $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{30t}{t + 200} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{30}{1 + \frac{200}{t}} = 30$.

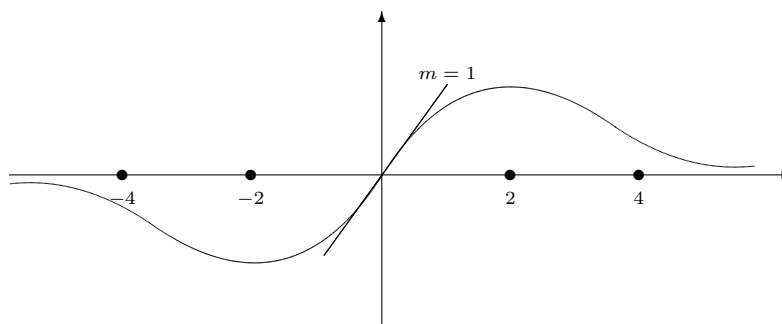
3. Trace la gráfica de una función que satisfaga la condiciones dadas: $f'(2) = 0$; $f'(0) = 1$; $f'(x) > 0$, si $0 < x < 2$; $f'(x) < 0$, si $x > 2$; $f''(x) < 0$, si $0 < x < 4$; $f''(x) > 0$, si $x > 4$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$; $f(-x) = -f(x)$, para toda x .

Solución Primero, dado que $f(-x) = -f(x)$ (función impar) presenta simetría respecto al origen del sistema de referencia.

Segundo: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ significa que $y = 0$ es asíntota horizontal (eje x).

Tercero: $f'(0) = 1$ dice que la pendiente de tangencia en $x = 0$ es $m = 1$.

x	$-\infty$	-4	-2	0	2	4	$+\infty$
$f''(x)$		-	+	+	-	-	+
$f'(x)$		-	-	+	+	-	-
$f(x)$	0						0
			mínimo	inflexión $m = 1$	máximo	inflexión	



4. Encuentre las asíntotas de la gráfica de la función $f(x) = \frac{x-9}{\sqrt{4x^2+3x+2}}$.

Solución El dominio de la función $f(x)$ es $\mathbb{R}$, puesto que $4x^2 + 3x + 2 > 0$, para $x \in \mathbb{R}$. En

efecto, $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ y $a > 0$, por lo tanto no hay asíntota vertical. Además:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-9}{\sqrt{4x^2+3x+2}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1-\frac{9}{x})}{|x|\sqrt{4+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1-\frac{9}{x})}{x\sqrt{4+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}} = \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-9}{\sqrt{4x^2+3x+2}} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(1-\frac{9}{x})}{|x|\sqrt{4+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(1-\frac{9}{x})}{-x\sqrt{4+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

y en consecuencia $y = -\frac{1}{2}$ y $y = \frac{1}{2}$ son asíntotas horizontales.

Ejercicios de límites en el infinito: III Parte Prof. Minor Chacón

1. Calcular los siguientes límites, si existen:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + e^x)^{\frac{2}{x}}$	b) $\lim_{x \rightarrow 3} \left[\frac{\ln x - \ln 3}{x - 3} \right]^2$	c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln 2x}{\ln 3x}$
d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{\ln^2(1 + 3x)}$	e) $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{t} \right)^t$	f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$
g) $\lim_{x \rightarrow 1^-} x^{\frac{1}{1-x}}$		

2. Trace la curva de la función $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$.

3. La función $C(t) = k(e^{-at} - e^{-bt})$, en donde a, b y k son constantes positivas, y $b > a$, se emplea para representar la concentración en el tiempo t de una droga o fármaco inyectado en la sangre.

(a) Demuestre que $\lim_{t \rightarrow \infty} C(t) = 0$.

(b) Encuentre la rapidez a la que el producto se elimina de la circulación.

(c) Determine cuándo dicha velocidad es igual a cero.

Soluciones de ejercicios de de límites en el infinito: III Parte Prof. Minor Chacón

1. Calcular los siguientes límites, si existen:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + e^x)^{\frac{2}{x}}$.

Solución Puesto que $x + e^x \rightarrow +\infty$, si $x \rightarrow +\infty$ y $\frac{2}{x} \rightarrow 0$, si $x \rightarrow +\infty$, se ve claramente que estamos frente a una forma indeterminada del tipo $(+\infty)^0$. Hagamos $y = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + e^x)^{\frac{2}{x}}$ aplicando logaritmos a ambos lados, se obtiene:

$$\ln y = \ln \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + e^x)^{\frac{2}{x}} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln(x + e^x)^{\frac{2}{x}} \right].$$

Note que aquí se vale intercambiar el logaritmo con el límite pues, para $x > 0$, $f(x) = (x + e^x)^{\frac{2}{x}}$ es continua. Luego, $\ln y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{x} \ln(x + e^x) \right] = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} \ln(x + e^x) \right]$.

Seguidamente vamos a calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln(x + e^x)$. Usando L'Hôpital, se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln(x + e^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1 + e^x}{x + e^x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + e^x}{x + e^x}, \text{ y aplicando de nuevo L'Hôpital:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln(x + e^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1 + e^x} \text{ y con una nueva aplicación de L'Hôpital:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln(x + e^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + e^x}{x + e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} \frac{1 + e^{-x}}{1 + x e^{-x}} = \frac{1 + 0}{1 + 0} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1.$$

$$\text{Así, } \ln y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x + e^x)^{\frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \left[\frac{1}{x} \ln(x + e^x) \right] = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln(x + e^x) = 2 \cdot 1 = 2.$$

Finalmente, $\ln y = 2$ y consecutivamente $y = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + e^x)^{\frac{2}{x}} = e^2$.

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \left[\frac{\ln x - \ln 3}{x - 3} \right]^2 = \lim_{x \rightarrow 3} \left[\frac{\ln(\frac{1}{3}x)}{x - 3} \right]^2 = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln^2(\frac{1}{3}x)}{(x - 3)^2}$. Aplicando L'Hôpital, se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(2 \ln(\frac{1}{3}x)) \cdot \frac{1}{\frac{1}{3}x} \cdot \frac{1}{3}}{2(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(\frac{1}{3}x)}{x(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(\frac{1}{3}x)}{x^2 - 3x}.$$

De nuevo por L'Hôpital este límite es:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{\frac{1}{3}x} \cdot \frac{1}{3}}{2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{2x^2 - 3x} = \frac{1}{9}.$$

c) Usando L'Hôpital, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(2x)}{\ln(3x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2x} \cdot 2}{\frac{1}{3x} \cdot 3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1) = 1$.

d) Usando L'Hôpital $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{\ln^2(1 + 3x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{[2 \ln(1 + 3x)] \cdot \frac{1}{1 + 3x} \cdot 3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{3 \ln(1 + 3x)} =$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(1 + 3x)}{3 \ln(1 + 3x)}.$$

De nuevo por L'Hôpital $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(1+3x)}{3 \ln(1+3x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1+6x}{3 \cdot \frac{1}{1+3x} \cdot 3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1+6x}{1+3x} =$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1+6x)(1+3x)}{9} = \frac{1}{9}.$$

e) $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{t}\right)^t$ es de la forma 1^∞ . Supongamos que $L = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{t}\right)^t$, entonces

$$\ln(L) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t \ln \left(1 + \frac{3}{t}\right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{3}{t}\right)}{\frac{1}{t}} \text{ y aplicando L'Hôpital se tiene que:}$$

$$\ln(L) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{1}{1 + \frac{3}{t}}\right) \cdot \left(\frac{-3}{t^2}\right)}{-\frac{1}{t^2}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-3}{1 + \frac{3}{t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{3}{1 + \frac{3}{t}} = 3, \text{ es decir } \ln(L) = 3 \Rightarrow$$

$$L = e^3.$$

$$\text{Así, } \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{t}\right)^t = e^3.$$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$ es una forma indeterminada del tipo $(+\infty \cdot 0)$, que la escribimos en la

$$\text{forma } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \text{ y le aplicamos L'Hôpital para obtener } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right)}{\left(\frac{-1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

g) $\lim_{x \rightarrow 1^-} x^{\frac{1}{1-x}}$ es de la forma indeterminada 1^∞ , entonces escribimos $\alpha = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^{\frac{1}{1-x}}$.

$$\text{Así } \ln(\alpha) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1-x} \ln x \Rightarrow \ln(\alpha) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln x}{1-x} \text{ y por L'Hôpital es igual a } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{1}{x}}{-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{-1}{x}\right) = \frac{-1}{1} = -1, \text{ o sea } \ln(\alpha) = -1 \Rightarrow L = e^{-1} = \frac{1}{e}, \text{ de manera que } \lim_{x \rightarrow 1^-} x^{\frac{1}{1-x}} = \frac{1}{e}.$$

2. El dominio máximo de $y = xe^{\frac{1}{x}}$ es $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, puesto que $0 \notin D_f$ (dominio de f), $f(0)$ no existe y por lo tanto la curva no corta el eje y . Además, $y = 0 \iff xe^{\frac{1}{x}} = 0 \iff x = 0$, pero $0 \notin D_f$ lo que implica que la curva no corta el eje x .

Análisis de $f'(x)$:

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + xe^{\frac{1}{x}} \left(\frac{-1}{x^2}\right) = e^{\frac{1}{x}} \left[1 + x \left(\frac{-1}{x^2}\right)\right] = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x-1}{x}\right).$$

$$f'(x) = 0 \iff e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x-1}{x}\right) = 0 \iff x-1 = 0 \iff x = 1, \text{ (punto crítico).}$$

$f'(x) > 0 \iff \frac{x-1}{x} > 0$, pues $e^{\frac{1}{x}} > 0$ siempre, (ver cuadro de variación), de donde se obtiene $f'(x) > 0$, si $x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$, $f'(x) < 0$, si $x \in]0, 1[$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x-1$	-	-	+	
x	-	+	+	
$\frac{x-1}{x}$	+	-	+	

¹Observe que el $\ln$ se "mete" dentro del límite gracias a la continuidad de la función

Análisis de $f''(x)$:

Se tiene que $f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \Rightarrow f''(x) = \frac{-1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \left(1 - \frac{1}{x}\right) + e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1}{x^2}\right) =$
 $\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \left[-\left(1 - \frac{1}{x}\right) + 1\right] = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \left[-1 + \frac{1}{x} + 1\right] = \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}}.$

$f''(x) \neq 0$, siempre: $f''(x) > 0$, si $\frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} > 0 \Leftrightarrow x > 0 \Rightarrow f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]0, +\infty[.$

$f''(x) < 0$, si $x \in]-\infty, 0[.$

Luego, como $f(x)$ se indefin en $x = 0$, calculemos $\lim_{x \rightarrow 0^-} x e^{\frac{1}{x}} = 0$, pues $\frac{1}{x} \rightarrow -\infty$ y la exponencial tiende a 0, si $x \rightarrow -\infty$.

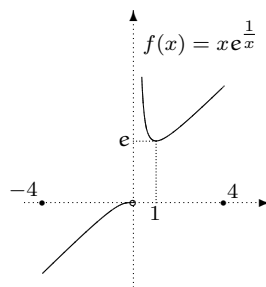
$\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \overset{0}{x} \overset{+\infty}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\left(\frac{1}{x}\right)}.$ Aplicando L'Hôpital, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{-1}{x^2}\right)}{\left(\frac{-1}{x^2}\right)} =$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty \Rightarrow f(x)$ tiene asíntota vertical en $0^+.$

Para analizar el comportamiento en los extremos, se calcula:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \overset{+\infty}{x} \overset{1}{e^{\frac{1}{x}}} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \overset{-\infty}{x} \overset{1}{e^{\frac{1}{x}}} = -\infty.$

Cuadro de variacin				
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	+	
$f''(x)$	-	+	+	
$f(x)$	$-\infty$	0	e	$+\infty$



Así, $(1, e)$ es punto mínimo relativo. No interseca los ejes.

3. $C(t) = k(e^{-at} - e^{-bt})$, $a, b, k > 0, b > a$.

a) $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} k(e^{-at} - e^{-bt}) = 0.$

b) $C'(t) = \frac{dC}{dt} = k[-ae^{-at} + be^{-bt}].$

c) $C'(t) = 0 \Leftrightarrow k[-ae^{-at} + be^{-bt}] = 0 \Rightarrow -ae^{-at} + be^{-bt} = 0 \Rightarrow be^{-bt} = ae^{-at} \Rightarrow$

$\frac{b}{a} = \frac{e^{-at}}{e^{-bt}} \Rightarrow \frac{b}{a} = e^{-at+bt} \Rightarrow \frac{b}{a} = e^{bt-at} \Rightarrow \frac{b}{a} = e^{t(b-a)} \Rightarrow t(b-a) = \ln\left(\frac{b}{a}\right) \Rightarrow$

$t = \frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{b-a}.$

Como $b > a \Rightarrow \frac{b}{a} > 1$ y $b - a > 0$, de manera que $\ln\left(\frac{b}{a}\right) > 0$ y $b - a > 0 \Rightarrow$

$t = \frac{\ln(b/a)}{b-a} > 0$, es decir el tiempo en que la velocidad es cero es $t = \frac{\ln(b/a)}{b-a}$.

Tema No. 4

Ejercicios de Aplicaciones de la derivada: I Parte Prof. Gerald Asch

1. En cada caso, encuentre $\frac{dy}{dx}$:
 - a) $(6x)^{\frac{1}{2}} + (8y)^{\frac{3}{2}} = 2$
 - b) $x + \sqrt{xy} + y^2 = 1$.
2. Calcular las ecuaciones de las rectas normal y tangente a la gráfica de $y^4 + 3y - 4x^3 = 5x + 1$ en el punto $P(1, -2)$.
3. Encuentre $\frac{d^2y}{dx^2}$ de la relación $xy^4 = 5$.
4. Determine si la gráfica de la función $y = (2x - 8)^{\frac{2}{3}}$ tiene tangentes verticales.
5. Los pinnípedos, como las focas y las morsas, son un suborden de los mamíferos acuáticos carnívoros cuyas extremidades se han convertido en aletas. La relación entre la longitud y el peso durante su crecimiento fetal está dada por

$$W = (6 \times 10^{-5})L^{2.74},$$

donde la longitud L se mide en centímetros y el peso W en kilogramos. Usando la regla de la cadena encuentre una fórmula para la tasa de crecimiento del peso con respecto al tiempo t , suponiendo que L es una función derivable de t . Si la foca pesa $0.5kg$ y crece a razón de $0.4kg$ por mes, ¿cuál es la tasa de crecimiento de su longitud?

6. Un incendio que comenzó en un terreno seco se extiende formando un círculo. El radio del círculo crece a razón de $1.8m/min$. Calcule la rapidez con que crece el área del círculo cuando el radio es de $45m$.
7. Encuentre las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la elipse $x^2 + 4y^2 = 36$ que pasan por el punto $(12, 3)$.
8. Un tanque en forma de cono invertido deja salir agua a razón de $10000 cm^3/min$, al mismo tiempo que se bombea agua al interior del tanque a una velocidad constante. El tanque

tiene $6m$ de altura y el diámetro en la parte superior es de $4m$. Si el nivel del agua está aumentando a razón de $20cm/min$ cuando la altura del agua es de $2m$, encuentre la velocidad a la que se bombea el agua al interior del tanque.

9. Un corredor que trota con rapidez constante de $10km/h$ pasa por un punto P hacia el norte. Diez minutos más tarde una mujer que trota a razón constante de $9km/h$ pasa por el mismo punto hacia el este. ¿Cuán rápido varía la distancia entre los trotadores veinte minutos después de que el hombre pasa por P ?

Soluciones de Aplicaciones de la derivada: I Parte Prof. Gerald Asch

1. En cada caso, encuentre $\frac{dy}{dx}$:

a) $(6x)^{1/2} + (8y)^{3/2} = 2$.

Supongamos que la ecuación define a y como función de x implícitamente y derivando con respecto a x se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(6x)^{-\frac{1}{2}} \cdot 6 + \frac{3}{2}(8y)^{\frac{1}{2}} \cdot 8y' &= 0 \implies 3(6x)^{-\frac{1}{2}} + 12(8y)^{\frac{1}{2}}y' = 0 \implies \\ 12(8y)^{\frac{1}{2}}y' &= -3(6x)^{-\frac{1}{2}} \implies y' = -\frac{3(6x)^{-\frac{1}{2}}}{12(8y)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{4(6x)^{\frac{1}{2}}(8y)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{4(48xy)^{\frac{1}{2}}} = \\ -\frac{1}{4(16 \cdot 3xy)^{\frac{1}{2}}} &= -\frac{1}{16(3xy)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{16(3xy)^{\frac{1}{2}}} \frac{(3xy)^{\frac{1}{2}}}{(3xy)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{(3xy)^{\frac{1}{2}}}{48xy} = -\frac{(3xy)^{\frac{1}{2}}}{48xy}. \end{aligned}$$

b) $x + \sqrt{xy} + y^2 = 1$.

Supongamos que $y = y(x)$; derivando respecto a x :

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2\sqrt{xy}}(y + xy') + 2yy' &= 0 \implies 2\sqrt{xy} + y + xy' + 4yy'\sqrt{xy} = 0, \quad x \neq 0, \quad y \neq 0 \\ xy' + 4yy'\sqrt{xy} &= -y - 2\sqrt{xy} \implies y'(x + 4y\sqrt{xy}) = -y - 2\sqrt{xy} \implies \\ y' &= -\frac{y + 2\sqrt{xy}}{x + 4y\sqrt{xy}}. \end{aligned}$$

2. Calcular las ecuaciones de las rectas normal y tangente a la gráfica de $y^4 + 3y - 4x^3 = 5x + 1$ en el punto $P(1, -2)$.

Solución Supongamos que $y^4 + 3y - 4x^3 = 5x + 1$ define y como función derivable de x . La pendiente de su tangente en P es la derivada evaluada en P .

Cálculo de $\frac{dy}{dx}$ en $(1, -2)$.

$$\begin{aligned} y^4 + 3y - 4x^3 &= 5x + 1 & y'(1, -2) &= \frac{5 + 12(1)^2}{4(-2)^3 + 3} \\ 4y^3y' + 3y' - 12x^2 &= 5 & y'(1, -2) &= -\frac{17}{29} \\ y' &= \frac{5 + 12x^2}{4y^3 + 3}. \end{aligned}$$

Por lo tanto la pendiente de la tangente en $P(1, -2)$ será $m_T = -\frac{17}{29}$. Ahora, sustituyendo $P(1, -2)$ en la forma punto pendiente de la ecuación de una recta obtenemos:

$$-\frac{17}{29}(x - 1) = y + 2.$$

Normal: La normal es la recta perpendicular a la tangente en el punto de tangencia, por lo que $m_N = -\frac{1}{m_T} = \frac{29}{17}$. Sustituyendo $P(1, -2)$ en la forma punto pendiente de la ecuación

de una recta, obtenemos:

$$\text{EcN: } \frac{29}{17}(x-1) = y+2.$$

3. Encuentre $\frac{d^2y}{dx^2}$ de la relación $xy^4 = 5$.

Solución Derivando con respecto a x , $xy^4 = 5$ tenemos,

$$y^4 + 4xy^3y' = 0 \implies y' = -\frac{y^4}{4xy^3} = -\frac{y}{4x}.$$

Derivando de nuevo con respecto a x , se tiene

$$y'' = -\frac{1}{4} \frac{xy' - y}{x^2} = -\frac{1}{4} \left[x \cdot \frac{-y}{4x} - y \right] \cdot \frac{1}{x^2},$$

sustituyendo y' por su expresión en x y y . Así,

$$y'' = -\frac{1}{4x^2} \left[-\frac{5}{4}y \right] = \frac{5y}{16x^2}.$$

4. Determine si la gráfica de la función $y = (2x-8)^{\frac{2}{3}}$ tiene tangentes verticales.

Solución Derivando $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}(2x-8)^{-\frac{1}{3}} \cdot 2 = \frac{4}{3\sqrt[3]{2x-8}}$; $\frac{dy}{dx}$ no está definida para $x = 4$.

Además:

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{dy}{dx} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{4}{3\sqrt[3]{2x-8}} = +\infty.$$

El punto $(4,0)$ pertenece a la gráfica de la función $\therefore y = (2x-8)^{\frac{2}{3}}$ tiene una tangente vertical de ecuación $x = 4$.

5. Los pinnípedos como las focas y las morsas, son un suborden de los mamíferos acuáticos carnívoros cuyas extremidades se han convertido en aletas. La relación entre la longitud y el peso durante su crecimiento fetal está dada por $W = (6 \times 10^{-5})L^{2.74}$, donde la longitud L se mide en centímetros y el peso W en kilogramos. Usando la regla de la cadena encuentre una fórmula para la tasa de crecimiento del peso con respecto al tiempo t . Si la foca pesa $0.5kg$ y crece a razón de $0.4Kg/mes$, ¿cuál es la tasa de crecimiento de su longitud?

Solución Sea $\frac{dW}{dt}$ tasa de crecimiento del peso con respecto al tiempo t , $W = (6 \times 10^{-5})L^{2.74}$,

$$\frac{dW}{dt} = 2.74(6 \times 10^{-5})L^{1.74} \frac{dL}{dt} = 1.644 \times 10^{-4} L^{1.74} \frac{dL}{dt}. \quad (2)$$

Datos iniciales $W = 0.5Kg$, $\frac{dW}{dt} = 0.4Kg/mes$. Determinemos la longitud L de la foca correspondiente a $0.4Kg$.

Sustituyendo en la relación

$$W = (6 \times 10^{-5})L^{2.74} \implies (6 \times 10^{-5})L^{2.74} = 0.5 \implies L = \left(\frac{0.5}{6 \times 10^{-5}} \right)^{\frac{1}{2.74}} \approx 26.974646.$$

Sustituyendo los datos $W = 0.5\text{kg}$, $\frac{dW}{dt} = 0.4$, $L = 26.9746$ en (2) obtenemos:

$$0.4 = 1.644 \times 10^{-4} \cdot 26.974646^{1.74} \frac{dL}{dt} = 0.0507884 \frac{dL}{dt} \Rightarrow \frac{dL}{dt} = \frac{0.4}{0.0507884} = 7.8758088.$$

La tasa de crecimiento de la longitud de la foca es 7.88cm/mes aproximadamente cuando pesa 0.5Kg.

6. Un incendio que comenzó en un terreno seco se extiende formando un círculo. El radio del círculo crece a razón de $1.8\text{m}/\text{min}$. Calcule la rapidez con que crece el área del círculo cuando el radio es de 45m .

Solución

r : radio en metros

A : área del incendio

$$A = \pi r^2$$

Supongamos que $A = A(t)$

$$r = r(t)$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = 1.8\text{m}/\text{min}$$

$\frac{dA}{dt}$: razón del cambio del área.

Sustituyendo los valores iniciales, $\frac{dA}{dt} = 2\pi \cdot 1.8 \cdot 45 = 162\pi\text{m}^2/\text{min}$.

Cuando el radio es 45m , el área del incendio crece con una rapidez de $162\pi\text{m}^2/\text{min} \approx 509\text{m}^2/\text{min}$.

7. Encuentre las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la elipse $x^2 + 4y^2 = 36$ que pasa por el punto $(12, 3)$.

Solución Sea (z, t) un punto de tangencia. (z, t) satisface la ecuación de la elipse, de donde:

$$z^2 + 4t^2 = 36. \quad (1)$$

La pendiente de la tangente que pasa por los puntos $(12, 3)$ y (z, t) se puede calcular mediante la fórmula $m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Haciéndolo obtenemos: $m_T = \frac{t - 3}{z - 12}$ (*).

La derivada de la curva $x^2 + 4y^2 = 36$ en el punto de tangencia, es la pendiente de la recta tangente. Derivando en forma implícita se tiene $2x + 8yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{4y}$ y la pendiente en (z, t) será $m_{(z,t)} = -\frac{z}{4t}$ (**).

Igualando las dos expresiones obtenidas de la pendiente de la tangente (*), (**) obtenemos:

$$-\frac{z}{4t} = \frac{t - 3}{z - 12}, \quad (2)$$

de manera que los puntos de tangencia deben satisfacer el sistema:

$$z^2 + 4t^2 = 36 \quad (1)$$

$$-\frac{z}{4t} = \frac{t - 3}{z - 12}. \quad (2)$$

Resolvámoslo: De (2), $-z(z-12) = 4t(t-3)$, $-z^2 + 12z = 4t^2 - 12t$, $12z + 12t = 4t^2 + z^2$ (3).

Sustituyendo (1) en (3) obtenemos: $12z + 12t = 36$, $z + t = 3$, $t = 3 - z$ (4).

Sustituyendo $t = 3 - z$ en (1), $z^2 + 4(3-z)^2 = 36$, $z^2 + 36 - 24z + 4z^2 = 36$, $5z^2 - 24z = 0$, $z(5z - 24) = 0 \Rightarrow z_1 = 0$, $t_1 = 3$, $z_2 = \frac{24}{5}$, $t_2 = 3 - \frac{24}{5} = -\frac{9}{5}$, sustituyendo estos valores en (4).

El punto $(0, 3)$ es un punto de tangencia y $(\frac{24}{5}, -\frac{9}{5})$ el otro. Sustituyendo estos valores en $m_T = -\frac{z}{4t}$ obtenemos los correspondientes $m_{T_1} = -\frac{0}{4 \cdot 3} = 0$, $m_{T_2} = -\frac{24}{5} / (4)(-\frac{9}{5}) = \frac{2}{3}$.

Sustituyendo en la forma punto pendiente de una recta $m(x - x_0) = y - y_0$, obtenemos:

$$\text{EcT}_1: y = 3, \quad \text{EcT}_2: \frac{2}{3}(x - \frac{24}{5}) = y + \frac{9}{5}.$$

8. Un tanque en forma de cono invertido deja salir agua a razón de $10000 \text{ cm}^3/\text{min}$, al mismo tiempo que se bombea agua al interior del tanque a una velocidad constante. El tanque tiene 6 m de altura y el diámetro en la parte superior es 4 m . Si el nivel del agua está aumentando a razón de $20 \text{ cm}/\text{min}$, cuando la altura del agua es 2 m , encuentre la velocidad a la que se bombea el agua al interior del tanque.

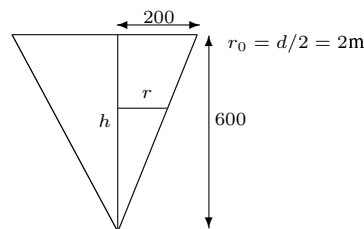
Solución

h : nivel del agua

a : velocidad del agua que se bombea dentro del tanque

V : volumen de agua dentro del tanque

$\frac{dV}{dt} = (a - 10000) \text{ cm}^3/\text{min}$. (El cambio en el volumen es la diferencia del agua que entra menos el agua que sale.)



Por Thales, $\frac{r}{h} = \frac{200}{600}$, $r = \frac{h}{3}$ (2). (1) $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ (2) $r = \frac{h}{3}$.

Sustituyendo (2) en (1), $V = \frac{1}{3}\pi(\frac{h}{3})^2 h = \frac{1}{27}\pi h^3$ (3)

Suponiendo que r y h son funciones derivables de t y derivando (3) con respecto a t obtenemos:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{9}\pi h^2 \frac{dh}{dt} \quad (4)$$

Sustituyendo en (4) los valores iniciales $\frac{dh}{dt} = 20 \text{ cm}/\text{min}$, $h = 200 \text{ cm}$, $\frac{dV}{dt} = (a - 10000)$, obtenemos:

$$a - 10000 = \frac{1}{9}\pi(200)^2 \cdot 20 \Rightarrow a = (\frac{800000}{9}\pi + 10000) \text{ cm}^3/\text{min} = \frac{80\pi + 9}{9} \times 10^4 \text{ cm}^3/\text{min}.$$

R/ Se está bombeando agua en el tanque a razón de $\frac{80\pi + 9}{9} \times 10^4 \text{ cm}^3/\text{min}$ equivalente $289252.68 \text{ cm}^3/\text{min}$.

9. Un corredor que trota con rapidez constante de 10km/h , pasa por un punto P hacia el norte. Diez minutos más tarde una mujer que trota a razón constante de 9km/h , pasa por el mismo punto hacia el este. ¿Cuán rápido varía la distancia entre los trotadores veinte minutos después de que el hombre pasa por P ?

Solución Localicemos el punto P en el origen de un sistema de coordenadas y el tiempo $t = 0$ en el momento que la mujer pasa por el punto P .

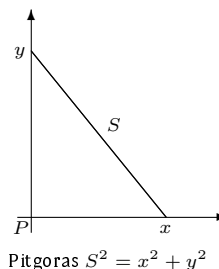
x : la posición de la mujer.

y : la posición del hombre.

S : la distancia entre los trotadores.

$$\frac{dy}{dt} = 10\text{km/h}$$

$$\frac{dx}{dt} = 9\text{km/h}$$



$S^2 = x^2 + y^2$ (1); suponiendo que x e y son funciones derivables de t . Derivamos con respecto a t , $2S\frac{dS}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$, $S\frac{dS}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}$, (2) ecuación de las razones relacionadas.

En el momento en que $t = 10$ el hombre lleva $20'$ de haber pasado por P y la mujer $10'$.

$$\begin{aligned} \text{Para } t = 10, \quad y &= \frac{20}{60}10\text{Km} & x &= \frac{10}{60}9\text{Km} \\ y &= \frac{10}{3}\text{Km} & x &= \frac{3}{2}\text{Km} \\ S &= \sqrt{\left(\frac{10}{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{100}{9} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{481}{36}}. \end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en (2) obtenemos:

$$\frac{1}{6}\sqrt{481}\frac{dS}{dt} = \frac{10}{3}10 + \frac{3}{2}9 \implies \frac{dS}{dt} = \frac{281}{6} \frac{6}{\sqrt{481}} = \frac{281}{481}\sqrt{481}\text{Km/h}.$$

La distancia entre los trotadores varía a razón de $\frac{281}{481}\sqrt{481}\text{Km/h} \approx 12.81\text{Km/h}$ veinte minutos después que el hombre pasa por P .

Ejercicios de Aplicaciones de la derivada: II Parte Prof. Rosendo Pizarro

1. Un cuadrado se expande con el tiempo. ¿Cómo se relaciona la *razón del aumento del área* del cuadrado con la razón de aumento de la longitud de su lado?
2. Se inyecta aire a un globo esférico a razón de $20\text{pies}^3/\text{min}$. ¿A qué razón varía el radio cuando mide 3pies ?
3. Un cohete es lanzado en dirección vertical y rastreado por una estación de radar, situada a 3 millas del sitio del lanzamiento. ¿Cuál es la velocidad vertical del cohete en el instante en el que su distancia a la estación de radar es de 5 millas y su distancia aumenta a razón de 5000 millas por hora?
4. Un hombre de 6 pies de estatura camina con una velocidad de 8 pies/seg. alejándose de una luz callejera al tope de un poste de 18 pies. ¿Con qué rapidez se mueve el extremo de su sombra sobre el suelo cuando él está a 100 pies del poste de luz?
5. Una familia tiene alambre suficiente para construir 100 metros de valla. Quieren usarlo para formar tres lados de un jardín rectangular, el cuarto lado estará cubierto por un edificio. ¿De qué forma encerrarán la máxima área posible con la valla?
6. Si cortamos cuatro cuadrados iguales de las esquinas de un cuadrado de cartulina de 12cm de lado, doblando las solapas que quedan, construimos una caja. ¿De qué tamaño han de cortarse esos cuatro cuadrados para obtener una caja de volumen máximo?
7. De entre todas las latas cilíndricas de hojalata con capacidad de 100cm^3 . ¿Cuál es la que requiere menos metal?
8. Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en un círculo de radio a .
9. Se va a construir un bote cilíndrico con un volumen de 125pies^3 , cortando su tapa y su fondo de cuadrados metálicos y formando la superficie curva al doblar una lámina metálica rectangular para unir los bordes. ¿Qué radio r y altura h del bote minimizarán la cantidad de material que se requiere?
10. **Trazo de curvas** Dibuje las siguientes gráficas :

a) $f(x) = \frac{-x^2 + x + 2}{(x - 1)^2}$.

b) $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$.

Soluciones de ejercicios de Aplicaciones de la derivada: II Parte Prof. Rosendo Pizarro

1. $A = x^2$. Las razones relacionadas se obtienen derivando la ecuación anterior con respecto al tiempo. $\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}x^2 \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 2x \frac{dx}{dt}$.

2. Sea r = radio, V = volumen, $\frac{dV}{dt} = 20 \text{pies}^3/\text{min}$. Se requiere $\frac{dr}{dt}$ cuando $r = 3$.
Se conoce $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, luego $\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi \left(3r^2 \frac{dr}{dt}\right) \Rightarrow 20 = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{20}{4\pi r^2} = \frac{5}{\pi r^2}$.
Finalmente, cuando $r = 3$, $\frac{dr}{dt} = \frac{5}{9\pi} \equiv 0,18 \text{pies}/\text{min}$.

3. Sea y = altura del cohete, z = distancia a la estación de radar en el tiempo t . Se sabe que $\frac{dy}{dt} = 5000 \text{mi}/\text{h}$. Queremos encontrar el valor de $\frac{dz}{dt}$ en el instante en que $z = 5 \text{mi}$.
Aplicando el Teorema de Pitágoras, obtenemos $y^2 + 9 = z^2$ como relación entre y , z . Vemos que $y = 4$, cuando $z = 5$.

La diferenciación implícita da ahora $2y \frac{dy}{dt} = 2z \frac{dz}{dt}$, sustituyendo $y = 4$, $z = 5$ y $\frac{dy}{dt} = 5000$, encontremos que $\frac{dz}{dt} = 6250 \text{mi}/\text{h}$ en el instante en cuestión.

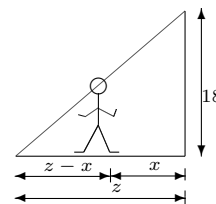
4. Sea x = distancia del hombre al poste.

z = distancia del extremo de su sombra a la base del poste.

Sabemos que $\frac{dx}{dt} = 8 \text{pies}/\text{seg}$ y queremos encontrar $\frac{dz}{dt}$ cuando $x = 100 \text{pies}$.

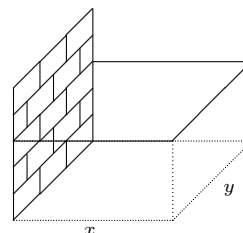
Por triángulos semejantes, tenemos $\frac{z}{18} = \frac{z-x}{6}$ de lo cual obtenemos $2z = 3x$.

La diferenciación implícita da ahora $2 \frac{dz}{dt} = 3 \frac{dx}{dt}$. La sustitución de $\frac{dx}{dt} = 8 \text{pies}/\text{seg}$, permite ver que la sombra se mueve a $12 \text{pies}/\text{seg}$.



5. $A = x \cdot y$

Ahora, la ecuación $100 = 2x + y$ permite expresar y en términos de x , tenemos $y = 100 - 2x$. Usando esta expresión de y en la fórmula del área, se obtiene $A = x(100 - 2x) \text{m}^2$; además, se observa que $x \in [0, 50]$, pues $y \geq 0$.



Se trata de *maximizar* $f(x) = x(100 - 2x)$, por lo tanto $f'(x) = 100 - 4x = 0 \Rightarrow x = 25$. El máximo de f se alcanza en $x = 25$ o en uno de los puntos terminales del intervalo; 0 ó 50.

Ahora bien; $f(0) = 0$, $f(50) = 0$, $f(25) = 1250$.

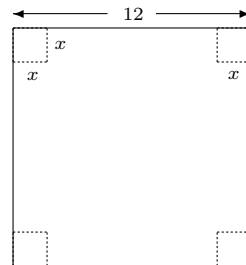
La máxima área se obtendrá formando un jardín rectangular de 25×50 . Finalmente, la máxima área posible es 1250m^2 .

6. Sea x = alto de la caja (el cual coincide con el lado del cuadradito que se recorta en la esquina). Luego $12 - 2x$ = largo y $12 - 2x$ = ancho, por lo tanto $v(x) = (12 - 2x)(12 - 2x)x = 4x^3 - 48x^2 + 144x$. Necesitamos encontrar un número $x \in [0, 6]$ que maximice $v(x)$. Esto debido a que se deben sacar cuadrados en cada esquina de la cartulina que mide 12cm de lado.

El valor máximo de $v(x)$ en $[0, 6]$ ocurrirá en $x = 0$ o en $x = 6$ o bien en un número crítico en que $v'(x) = 0$.

Observemos que $v(0) = 0$ (cubeta de altura 0) y $v(6) = 0$ (cubeta de base 0) son los valores mínimos del volumen.

Luego, el máximo se produce en algún número crítico de $(0, 6)$.

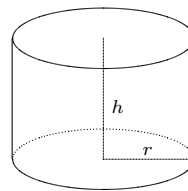


Se trata de *maximizar* $v(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x$. Derivando e igualando a 0, se obtiene: $v'(x) = 12x^2 - 96x + 144 = 0$ que tiene dos raíces en $[0, 6]$, a saber $x = 2$ y $x = 6$. Por lo tanto al estar descartado el 6, el máximo ocurre en $x = 2$. Finalmente $v(2) = 128\text{cm}^3$ es el mayor volumen posible y se logra cortando cuadrados de 2cm de lado.

7. Sea h = altura de la lata r = radio de su base.

El área de la superficie de la lata es $s = 2\pi r^2 + 2\pi rh$, suma de las dos bases y la superficie lateral. Como el metal exigido es proporcional a s , bastará *maximizar* s .

Radio y altura están relaciones por $\pi r^2 h = 100$.



De lo anterior $h = \frac{100}{\pi r^2}$. Sustituyendo en la ecuación original, tenemos $s = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{100}{\pi r^2}$. El dominio de esta función $s(r)$ es $(0, \infty)$ porque la lata ha de tener el radio positivo.

Derivando implícitamente, tenemos que $\frac{ds}{dr} = 4\pi r - \frac{200}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 200}{r^2}$. Haciendo $\frac{ds}{dr} = 0$ resulta que $4\pi r^3 = 200$ así que $r = \sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}$ es el único número crítico. ¿Se trata de un mínimo? Para este efecto recurrimos al criterio de la segunda derivada. Vemos que:

$$\frac{d^2s}{dr^2} = 4\pi + \frac{400}{r^3} \Rightarrow \frac{d^2s}{dr^2} \left(\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}} \right) = 12\pi.$$

Al ser $\frac{ds}{dr} = 0$ y $\frac{d^2s}{dr^2}$ positiva, se trata en efecto de un mínimo local. ¿Es mínimo global?

Recordemos que $\frac{ds}{dr} = \frac{4\pi r^3 - 200}{r^2}$. En el número crítico el numerador es 0.

Finalmente, se observa que el número crítico produce el mínimo absoluto o global.

8. Sean w y h los lados del rectángulo. El área del rectángulo es $A = h \cdot w$. Para expresar h y w como función de una sola variable, la relación deberá reflejar el hecho de que se trata de los lados de un rectángulo inscrito en un círculo de radio a . La distancia de cualquier

punto P sobre el círculo a su centro C es a . El radio CP es la hipotenusa del triángulo cuyos catetos miden $\frac{w}{2}$ y $\frac{h}{2}$, por el Teorema de Pitágoras $\left(\frac{w}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = a^2$ o equivalentemente $w^2 + h^2 = 4a^2$.

Despejando $h = \sqrt{4a^2 - w^2}$, por lo tanto $A(w) = h \cdot w = w\sqrt{4a^2 - w^2}$. Aplicando el cálculo $A(w)$ está definida y es continua $\forall w \in [0, 2a]$. Luego $A(w)$ tiene un máximo en 0, en $2a$ o en un número crítico. Derivando $A(w)$ obtenemos que:

$$A'(w) = w \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-2w}{\sqrt{4a^2 - w^2}} + \sqrt{4a^2 - w^2} \text{ y } A'(w) = \frac{4a^2 - 2w^2}{\sqrt{4a^2 - w^2}} = 0 \implies 4a^2 - 2w^2 = 0 \implies w = \sqrt{2}a.$$

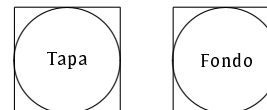
En consecuencia, el valor máximo de $A(w)$ es el mayor de los números $A(0)$, $A(2a)$ y $A(a\sqrt{2})$ calculando $A(0) = 0$ y $A(2a) = 0$; el máximo ocurre, por tanto en $w = \sqrt{2}a$.

Por otro lado, de $h = \sqrt{4a^2 - w^2}$, sustituyendo w , obtenemos que $h = \sqrt{2}a$.

Finalmente, el rectángulo inscrito de área máxima es un cuadrado ya que el ancho y largo tienen la misma medida.

9. Supóngase que se desperdician las esquinas de los dos cuadrados mostrados en la figura. La cantidad total de la lámina es $A = 8r^2 + 2\pi rh$. Conviene hacer notar que el material gastado en la tapa y el fondo corresponde al área de los cuadrados cuyo lado es $2r$ y no a la de los círculos. Esta área corresponde al valor $8r^2$.

El volumen del bote resultante es entonces, $v = \pi r^2 h = 125 \implies h = \frac{125}{\pi r^2}$, por lo tanto A estará dado como una función de r mediante $A(r) = 8r^2 + 2\pi r \cdot \frac{125}{\pi r^2} = 8r^2 + \frac{250}{r}$.



Como r puede tener cualquier valor positivo, $A(r)$ está definida en el intervalo abierto $(0, \infty)$, pero $A \rightarrow \infty$, cuando $r \rightarrow 0$ ó $r \rightarrow \infty$, por lo tanto no podemos usar el método de máximos y mínimos del intervalo cerrado; pero podemos usar el criterio de la primera derivada.

La primera derivada de A es $\frac{dA}{dr} = 16r - \frac{250}{r^2} = \frac{16r^3 - 250}{r^2}$. Luego $A'(r) = 0 \iff 16r^3 = 250 \iff r^3 = \frac{250}{16} = \frac{125}{8} \implies r = \sqrt[3]{\frac{125}{8}} = \frac{5}{2}$, así que el único punto crítico en $(0, \infty)$ estará en $r = \frac{5}{2}$. Es evidente que $\frac{dA}{dr} < 0$, si $0 < r < \frac{5}{2}$ y que $\frac{dA}{dr} > 0$ si $r > \frac{5}{2}$. En consecuencia, el criterio de la primera derivada implica que el valor mínimo de $A(r)$ en $(0, \infty)$ es $A\left(\frac{5}{2}\right) = 8\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{250}{\frac{5}{2}} = 150$ es un *mínimo absoluto*.

Finalmente, se minimiza la cantidad de material necesario haciendo un bote de radio $r = 2.5\text{pulg}$ y altura $h = \frac{125}{\pi(2.5)^2} \approx 6.37\text{pulg}$. La cantidad total de material usado es 150pulg^2 .

Trazo de curvas

1. Dibuje la gráfica de $f(x) = \frac{-x^2 + x + 2}{(x-1)^2}$.

Solución Primera derivada: $f'(x) = \frac{(x-1)^2(-2x+1) - (-x^2+x+2)2(x-1)}{(x-1)^4} \Rightarrow$

$$f'(x) = \frac{(x-1)(-2x+1) - 2(-x^2+x+2)}{(x-1)^3} = \frac{-2x^2+x+2x-1+2x^2-2x-4}{(x-1)^3} = \frac{x-5}{(x-1)^3}.$$

Puntos críticos: $x = 5$; $x = 1$ (donde f no está definida).

Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Segunda derivada: $f''(x) = -\frac{2(x-7)}{(x-1)^4}$.

Posible punto de inflexión: $(7, -\frac{10}{9})$.

Intersecciones con el eje x : $(-1, 0)$ y $(2, 0)$.

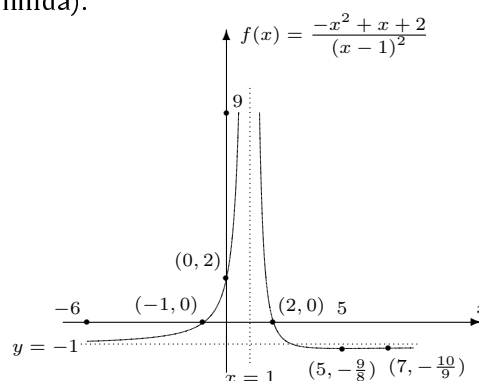
Intersecciones con el eje y : $(0, 2)$.

Asíntota vertical: $x = 1$.

Asíntota horizontal: $y = -1$.

Intervalos prueba: $(-\infty, 1)$; $(1, 5)$; $(5, 7)$; $(7, \infty)$.

El análisis de la gráfica se muestra en la siguiente tabla.



	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	características de la gráfica
$\infty < x < 1$		+	+	creciente y cóncava hacia arriba
$x = 1$	no definida	no definida	no definida	asíntota vertical
$1 < x < 5$		-	+	decreciente y cóncava hacia arriba
$5 < x < 7$		+	+	creciente y cóncava hacia arriba
$x = 7$	$-\frac{10}{9}$	+	0	punto de inflexión
$7 < x < \infty$		+	-	creciente y cóncava hacia abajo

2. Dibuje la gráfica de $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x-1}$.

Solución La división nos da que el cociente es $x + 2$ y el residuo es 1; por lo tanto, $f(x) = x + 2 + \frac{1}{x-1}$ esto nos conduce a que la recta $y = x + 2$ es una asíntota a la curva.

Primera derivada: $f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$.

Puntos críticos: $x = 0$; $x = 2$; $x = 1$ (f no está definida).

Segunda derivada: $f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$.

Posibles puntos de inflexión: ninguno.

Intersecciones con el eje x : $(0.61, 0)$ y $(-1.61, 0)$.

Intersecciones con el eje y : $(0, 1)$.

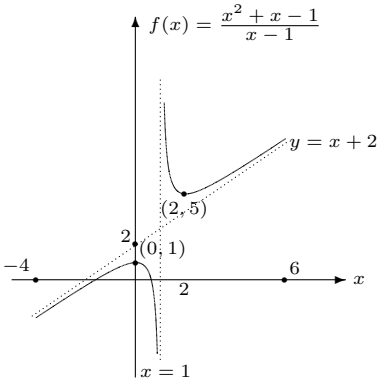
Asíntota vertical: $x = 1$.

Asíntota horizontal: No hay.

Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Intervalos prueba: $(-\infty, 0)$; $(0, 1)$; $(1, 2)$; $(2, \infty)$.

El análisis de la gráfica se muestra en la siguiente tabla.



	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	características de la gráfica
$-\infty < x < 0$		+	-	creciente y cóncava hacia abajo
$x = 0$	1	0		máximo local
$0 < x < 1$		-	-	decreciente y cóncava hacia abajo
$x = 1$	no definida	no definida	no definida	asíntota vertical
$1 < x < 2$		-	+	decreciente y cóncava hacia arriba
$x = 2$	5	0		mínimo local
$2 < x < \infty$		+	+	creciente y cóncava hacia arriba

Ejercicios de Aplicaciones de la derivada: III Parte Profa. Ana Mondrus

1. Haga el estudio completo y la gráfica de la función dada por $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + 5$:
 - a) Para el dominio $\mathbb{R}$.
 - b) Para el dominio $[-3, 3]$.

En particular especifique claramente, ¿cuáles son los máximos y mínimos relativos y absolutos (si existen) en cada caso?
2. Se quiere construir un estanque rectangular abierto para almacenar $10m^3$ de agua, tal que el largo de la base sea el doble del ancho. El material para la base cuesta ₡1000 el metro cuadrado y el de los costados ₡800 el metro cuadrado. ¿Cuáles son las dimensiones del estanque que hacen mínimo el costo? ¿Cuál es ese costo mínimo?
3. Se quiere construir un estanque cilíndrico sin tapa para contener $10m^3$. El material para la base cuesta ₡1000 el metro cuadrado y para la parte lateral cuesta ₡800 el metro cuadrado. ¿Cuáles son las dimensiones que hacen el mínimo costo? ¿Cuál es el costo mínimo?
4. La reacción del cuerpo humano a una dosis de medicina puede representarse a veces por una ecuación de la forma $R = M^2 \left(\frac{C}{2} - \frac{M}{3} \right)$, donde C es una constante positiva y M es la cantidad de medicina absorbida en la sangre. (Si la reacción es un cambio en la presión sanguínea, R se mide en milímetros de mercurio. Si la reacción es un cambio de temperatura, R se mide en grados.)
 - a) Encuentre $\frac{dR}{dM}$. (Esta derivada, como función de M , se llama "sensibilidad" del cuerpo a la medicina).
 - b) Encuentre $\frac{d^2R}{dM^2}$.
 - c) Considere el caso particular $C = \frac{2}{3}$. Para este caso:
 - i) Dé el dominio en ésta aplicación.
 - ii) Grafique R en función de M .
 - iii) ¿Para qué cantidad de medicamento la sensibilidad es máxima?
 - iv) ¿Para qué cantidad(es) de medicamento la sensibilidad es nula?
 - v) Grafique la sensibilidad $\frac{dR}{dM}$ en función de M .

Soluciones de ejercicios de aplicaciones de la derivada: III Parte Profa. Ana Mondrus

1. $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + 5.$

a) Para el dominio $\mathbb{R}$.

Por ser una función polinomial, es continua y derivable en su dominio.

Su primera y segunda derivada son respectivamente:

$$F'(x) = x^3 - 3x + 2 = (x-1)(x^2 + x - 2) = (x-1)(x+2)(x-1) = (x+2)(x-1)^2.$$

$$F''(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1).$$

Nota Para la factorización de $F'(x)$, se observa que 1 es un cero de $F'(x)$, y se deduce que $(x-1)$ es un factor; el otro factor se encuentra por división sintética.

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ & 1 & 1 & -2 & \\ \hline 1 & 1 & -2 & 0 & \end{array}$$

Números críticos: 1 y -2.

Intervalos a estudiar para crecimiento y decrecimiento: $] -\infty, -2[$, $] -2, 1[$, $] 1, +\infty[$.

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$(x-1)^2$	+	+	0	+
$x+2$	-	0	+	+
$F'(x)$	-	0	+	+
$F(x)$				

Sentido de crecimiento: $F(x)$ decrece en $] -\infty, -2[$ y crece en $] -2, 1[$ y en $] 1, \infty[$.

Máximos y mínimos relativos (y absolutos)

Aplicando el criterio de la primera derivada se deduce que $F(-2) = -1$ es un mínimo relativo. A la vez es mínimo absoluto. No hay máximo absoluto, dado el sentido de crecimiento de la función.

Concavidad y puntos de inflexión

$$F''(x) = 0 \text{ si y sólo si } x = 1 \text{ ó } x = -1.$$

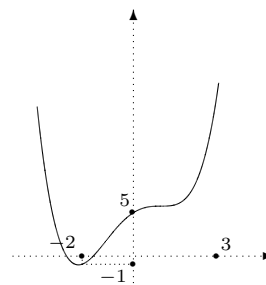
El cuadro de signos para segunda derivada y concavidad es:

x	-1		1	
$x - 1$	$-$	$-$	0	$+$
$x + 1$	$-$	0	$+$	$+$
$F''(x)$	$+$	0	$-$	0
$F(x)$				

La curva es cóncava hacia arriba en $]-\infty, -1[$ y en $]1, +\infty[$ y cóncava hacia abajo en $]-1, 1[$. Los puntos de inflexión ($F''(x) = 0$ junto con cambios de concavidad) son $(-1, \frac{7}{4})$ y $(1, \frac{23}{4})$.

Tabla de valores

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$F(x)$	37	$\frac{23}{4}$	-1	$\frac{7}{4}$	5	$\frac{23}{4}$	7	$\frac{71}{4}$	53

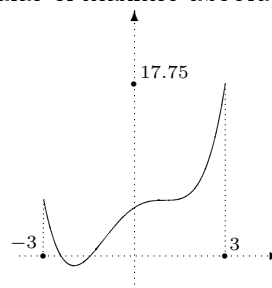


Nota Tanto observando la gráfica y tabla de valores, como aplicando el teorema del valor intermedio, puede deducirse que el polinomio dado tiene dos ceros: uno entre -3 y -2 y el otro entre -2 y -1 .

- b) Para el dominio $[-3, 3]$ el análisis es casi igual que en el caso a). La diferencia es que deben investigarse los valores $F(-3)$ y $F(3)$ y compararlos para señalar el máximo absoluto.

$F(-3) = \frac{23}{4}$; $F(3) = \frac{71}{4}$ (ver tabla parte a)), entonces el máximo absoluto es $\frac{71}{4}$, se obtiene para $x = 3$.

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + 5 \text{ con } x \in [-3, 3].$$

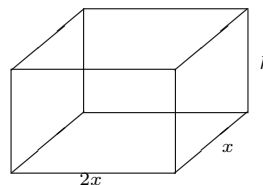


2. $V = 10m^3$.

$$V = \text{largo} \cdot \text{ancho} \cdot \text{alto}.$$

$$V = 2x \cdot x \cdot h = 2x^2h.$$

$$\text{Entonces: } 2x^2h = 10, \text{ de donde } h = \frac{10}{2x^2} = \frac{5}{x^2}.$$



Función a minimizar: costo

$$C = 1000 \cdot 2x^2 + 800 \cdot 2xh + 800 \cdot 2 \cdot 2xh = 2000x^2 + 4800xh.$$

Sustituyendo h por $\frac{5}{x^2}$ obtenemos: $C = 2000x^2 + 4800x \cdot \frac{5}{x^2} \Rightarrow C = 2000x^2 + \frac{24000}{x}$

El mínimo para el costo se encuentra en algún número crítico:

$$C'(x) = 4000x - \frac{24000}{x^2} = \frac{4000x^3 - 24000}{x^2}$$

$$C'(x) = 0 \text{ si y sólo si } 4000x^3 - 24000 = 0 \Rightarrow 4000x^3 = 24000 \Rightarrow x^3 = \frac{24000}{4000} = 6 \Rightarrow x = \sqrt[3]{6} \approx 1,82m.$$

Como $C''(x) = 4000 + \frac{48000}{x^3}$, la curva que da el costo es siempre cóncava hacia arriba, ya que $C''(x) > 0$ para todo $x > 0$. Por lo tanto en $x = \sqrt[3]{6}$ hay un mínimo relativo. Como es el único punto crítico, $C(x)$ decrece antes de $\sqrt[3]{6}$ y crece en $]\sqrt[3]{6}, +\infty[$, por lo que $C(\sqrt[3]{6})$ es, a la vez, mínimo absoluto.

$$h = \frac{5}{(\sqrt[3]{6})^2} \approx \frac{5}{(1,82)^2} \approx 1,51m.$$

Respuestas:

Las dimensiones pedidas son:

$$\text{Largo:}(2x) = 3,64m \quad \text{Ancho:}(x) = 1,82m \quad \text{Alto:}(h) = 1,51m.$$

Con esas dimensiones se obtiene el costo mínimo, igual a:

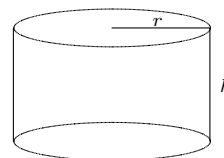
$$C(\sqrt[3]{6}) = 2000(\sqrt[3]{6})^2 + \frac{24000}{\sqrt[3]{6}} = \frac{2000 \cdot 6 + 24000}{\sqrt[3]{6}} = \frac{36000}{\sqrt[3]{6}} \approx \text{¢}19811.$$

3. $V = 10m^3$.

$$V = \pi r^2 h = 10 \Rightarrow h = \frac{10}{\pi r^2}.$$

Función a minimizar: costo

$$C = 1000 \cdot \pi r^2 + 800 \cdot 2\pi r h.$$



Sustituyendo h por $\frac{10}{\pi r^2}$ obtenemos: $C = 1000\pi r^2 + 1600\pi r \cdot \frac{10}{\pi r^2} \Rightarrow C(r) = 1000\pi r^2 + \frac{16000}{r}$.

$$C'(r) = 2000\pi r - \frac{16000}{r^2} = \frac{2000\pi r^3 - 16000}{r^2}.$$

$$C'(r) = 0 \text{ si y sólo si } 2000\pi r^3 = 16000 \Rightarrow r^3 = \frac{16000}{2000\pi} = \frac{8}{\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{8}{\pi}} = \frac{2}{\sqrt[3]{\pi}} \approx 1,37m.$$

$$h = \frac{10}{\pi \left(\sqrt[3]{\frac{8}{\pi}}\right)^2} \approx \frac{10}{\pi(1,37)^2} \approx 1,70m.$$

$$C\left(\frac{2}{\sqrt[3]{\pi}}\right) = 1000\pi\left(\frac{2}{\sqrt[3]{\pi}}\right)^2 + \frac{16000}{2/\sqrt[3]{\pi}} \approx C(1,37) = 1000 \cdot 3,14 \cdot (1,37)^2 + \frac{16000}{1,37} \Rightarrow C(1,37) \approx 5896 + 11678 \approx \text{¢}17575.$$

4. $R = M^2\left(\frac{1}{2}C - \frac{1}{3}M\right) (*)$

M : variable independiente.

R : variable dependiente.

C : constante.

a) $\frac{dR}{dM} = 2M\left(\frac{1}{2}C - \frac{1}{3}M\right) + M^2\left(-\frac{1}{3}\right) = MC - \frac{2}{3}M^2 - \frac{1}{3}M^2 = -M^2 + MC = -M(M - C).$

Puede observarse que, en este modelo, la sensibilidad del cuerpo a la medicina está dada

por una parábola cóncava hacia abajo, que corta al eje x en $M = 0$ y en $M = C$.

b) $\frac{d^2R}{dM^2} = -2M + C$.

c) Si $C = \frac{2}{3}$, la ecuación (*) queda: $R = M^2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}M\right) = \frac{1}{3}(-M^3 + M^2) = \frac{1}{3}M^2(-M + 1)$.

- i) El dominio para esta aplicación es $[0, +Q]$, ya que la cantidad de medicina absorbida no puede ser negativa. Q es un parámetro que depende de cada caso particular y puede considerarse como la cantidad total de medicina administrada (ya que no puede absorberse más de lo que se administró).

Nota Teóricamente puede considerarse como dominio $[0, +\infty[$, para que el modelo abarque todos los posibles valores de Q .

ii) $R = M^2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}M\right) = \frac{1}{3}M^2(1 - M) = -\frac{1}{3}M^3 + \frac{1}{3}M^2$.

Dominio: $[0, +\infty[$. Es continua y derivable en su dominio.

Corta al eje x en $(0, 0)$ y en $(1, 0)$.

Corta al eje y en $(0, 0)$.

Puntos críticos, crecimiento y extremos relativos:

$$R' = -M^2 + \frac{2}{3}M = M\left(-M + \frac{2}{3}\right).$$

Puntos críticos: 0 y $\frac{2}{3}$.

M	0	$\frac{2}{3}$
M	0	+
$-M + \frac{2}{3}$	+	0
R'	0	+
R		

Como crece en $]0, \frac{2}{3}[$ y decrece en $]\frac{2}{3}, 0[$, en $M = \frac{2}{3}$ hay un máximo relativo, que es en este caso, a la vez, máximo absoluto, porque no hay en el dominio un valor de R mayor que $R(\frac{2}{3})$, que es la máxima reacción.

Concavidad y puntos de inflexión:

$$R'' = -2M + \frac{2}{3}$$

$$R'' = 0 \text{ si y sólo si } -2M = -\frac{2}{3} \text{ entonces } M = +\frac{1}{3}$$

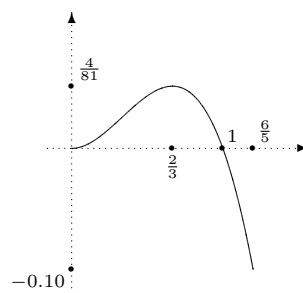
$$-2M + \frac{2}{3} > 0 \implies -2M > -\frac{2}{3} \implies M < \frac{1}{3}$$

Para $M < \frac{1}{3}$, $R'' > 0$ y la curva es cóncava hacia arriba.

Para $M > \frac{1}{3}$, $R'' < 0$ y la curva es cóncava hacia abajo.

Tabla de valores:

M	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	2
R	0	$\frac{5}{648}$	$\frac{2}{81}$	$\frac{4}{81}$	0	$-\frac{16}{81}$	$-\frac{50}{81}$	$-\frac{4}{3}$



- iii) Recuerdese que la sensibilidad es la derivada de la reacción. Sea S la sensibilidad, entonces:

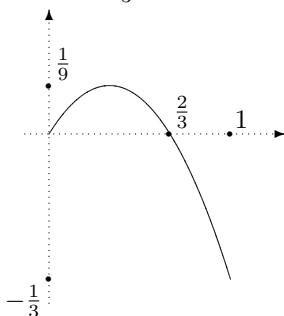
$$S = R' = -M^2 + \frac{2}{3}M = -M(M - \frac{2}{3})$$

$$S' = R'' = -2M + \frac{2}{3}$$

La sensibilidad (que se representa en este caso por una parábola abierta hacia abajo) será máxima cuando $S' = 0$, es decir $-2M + \frac{2}{3} = 0 \implies 2M = \frac{2}{3} \implies M = \frac{1}{3}$.

La máxima sensibilidad se da para $M = \frac{1}{3}$.

- iv) La sensibilidad es nula para $M = 0$ y para $M = \frac{2}{3}$.



v) Gráfico

Ejercicios de Aplicaciones de la derivada: IV Parte Profa. Ana Mondrus

- Trace la gráfica de una función que satisfaga las condiciones dadas: $f'(-1) = 0$, $f'(1)$ no existe, $f'(x) < 0$ si $|x| < 1$, $f'(x) > 0$ si $|x| > 1$, $f(-1) = 4$, $f(1) = 0$, $f''(x) < 0$, si $x \neq 1$.
- La velocidad del aire a través de la tráquea (en cm/s) de radio r es

$$\rho = V(r)/\pi r^2, \quad \frac{1}{2}r_o \leq r \leq r_o,$$

en donde

$$V(r) = kr^4(r_o - r), \quad k > 0, \quad r_o > 0,$$

es el flujo volumétrico del aire. ¿Qué radio proporcionará la máxima velocidad?

- La rapidez P , en $mg(\text{de carbono})/(m^3/h)$, a la que tiene lugar la fotosíntesis para ciertas especies de fitoplancton, está relacionada con la intensidad de iluminación E (en 10^3 piecandelas) por la función:

$$P = \frac{100I}{I^2 + I + 4}.$$

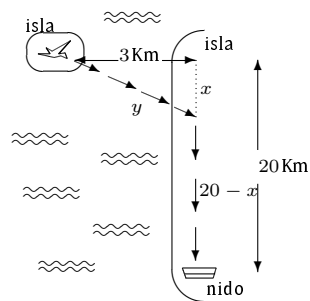
¿Para qué valor de la iluminación es P máxima?

- Haga estudio completo de las gráficas de las funciones:

a) $f(x) = \frac{x}{x-3}$

b) $g(x) = \frac{x}{\sqrt{2x^2 - 1}}$.

- Algunas aves vuelan más lento sobre el agua que sobre la tierra. Un ave vuela con velocidades constantes de $6km/h$ sobre el agua y de $10km/h$ sobre tierra. Use la información de la figura para determinar la trayectoria que debe seguir el ave a fin de minimizar el tiempo total de vuelo entre la playa de una isla y su nido situado en la playa de otra isla.



Soluciones de ejercicios de Aplicaciones de la derivada: IV Parte Profa. Ana Mondrus

1. Trace la gráfica de una función que satisfaga las condiciones dadas: $f'(-1) = 0$; $f'(1)$ no existe; $f'(x) < 0$, si $|x| < 1$; $f'(x) > 0$, si $|x| > 1$; $f(-1) = 4$; $f(1) = 0$; $f''(x) < 0$, si $x \neq 1$.

Solución Este es un problema abierto; hay muchas funciones que pueden cumplir con las condiciones dadas.

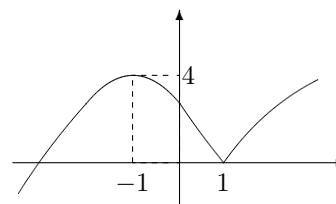
No se pide una expresión para f , sino su gráfica solamente.

Recordemos: $|x| < 1$ equivale a $-1 < x < 1$ y $|x| > 1$ equivale a $x > 1$ ó $x < -1$.

Resumamos las condiciones dadas en un cuadro de variación:

x	-1			1	
$f'(x)$	+	0	-		+
$f''(x)$	-	-	-		-
$f(x)$	↗ 4 ↘			0	↗

Del cuadro de variación ($f'(-1) = 0$, $f''(-1) < 0$) se deduce que $f(-1) = 4$ es un máximo relativo. Como $f(1) = 0$, aunque f no es derivable en 1, sí está definida (existe) y vale 0. Una posible gráfica es:



2. La velocidad del aire a través de la tráquea (en cm/s) de radio r es $\rho = V(r)/\pi r^2$, $r_0/2 \leq r \leq r_0$, en donde $V(r) = kr^4(r_0 - r)$, $k > 0$, $r_0 > 0$, es el flujo volumétrico del aire. ¿Qué radio proporciona la máxima velocidad?

Solución $\rho = \frac{V(r)}{\pi r^2}$ (cm/s); $\frac{r_0}{2} \leq r \leq r_0$ $V(r) = kr^4(r_0 - r)$, $k > 0$, $r_0 > 0$ (k , r_0 son constantes). Sustituyendo $V(r)$ en la expresión para ρ se obtiene:

$$\rho = \frac{kr^4(r_0 - r)}{\pi r^2} = \frac{kr^2(r_0 - r)}{\pi} = \frac{k}{\pi} r^2(r_0 - r). \quad (*)$$

La velocidad máxima se obtendrá para r tal que $\frac{d\rho}{dr} = 0$, siempre que $\frac{d^2\rho}{dr^2} < 0$ para el r encontrado.

$$\frac{d\rho}{dr} = \frac{k}{\pi} [2r(r_0 - r) + r^2(-1)] = \frac{k}{\pi} [2rr_0 - 3r^2] = \frac{kr}{\pi} (2r_0 - 3r),$$

$$\frac{d\rho}{dr} = 0 \text{ si y sólo si } r = 0 \text{ o bien } 2r_0 - 3r = 0.$$

$r = 0$ lo rechazamos, pues no está en el dominio de r que es $\left[\frac{r_0}{2}, r_0\right]$, $2r_0 - 3r = 0 \implies r = \frac{2}{3}r_0$.

Verifiquemos que se trata de un máximo relativo, calculando $\rho''(\frac{2}{3}r_0)$:

$$\rho'' = \frac{k}{\pi} [2r_0 - 6r], \quad \rho''(\frac{2}{3}r_0) = \frac{k}{\pi} [2r_0 - 6 \cdot \frac{2}{3}r_0] = \frac{k}{\pi} (-2r_0) < 0.$$

Comparemos ahora el valor de la velocidad ρ en su máximo relativo con su valor en los puntos terminales del dominio, sustituyendo en (*):

$$\rho\left(\frac{r_0}{2}\right) = \frac{k}{\pi} \frac{r_0^2}{4} \frac{r_0}{2} = \frac{k}{8\pi} r_0^3, \quad \rho\left(\frac{2r_0}{3}\right) = \frac{k}{\pi} \left(\frac{2}{3}r_0\right)^2 \frac{1}{3}r_0 = \frac{4k}{27\pi} r_0^3, \quad \rho(r_0) = \frac{k}{\pi} r_0^2 \cdot 0 = 0.$$

Como $\frac{4}{27} > \frac{1}{8}$, el máximo absoluto se obtiene para $r = \frac{2}{3}r_0$.

Respuesta El radio que proporciona la máxima velocidad del aire a través de la tráquea es $r = \frac{2}{3}r_0$ cm.

3. La rapidez P , en mg (de carbono)/(m³/h), a la que tiene lugar la fotosíntesis para ciertas especies de fitoplancton, está relacionada con la intensidad de iluminación I (en 10³ piecandelas) por la función $P = \frac{100I}{I^2 + I + 4}$. ¿Para qué valor de la iluminación es P máxima?

Solución P es máxima cuando $P'(I) = 0$ y se satisfaga el criterio de la primera derivada o el criterio de la segunda derivada.

$$P'(I) = \frac{(I^2 + I + 4)100 - 100I(2I + 1)}{(I^2 + I + 4)^2}.$$

Desarrollando y reduciendo el denominador se llega a:

$$P'(I) = \frac{-100I^2 + 400}{(I^2 + I + 4)^2} = \frac{-100(I + 2)(I - 2)}{(I^2 + I + 4)^2}.$$

Notemos que el trinomio del denominador nunca se hace 0 (su discriminante es negativo), por lo que la derivada $P'(I)$ existe para cualquier valor de I . Así, los números críticos corresponden a puntos tales que $P'(I) = 0$, (es decir, no hay números críticos en que no exista la derivada, ya que ésta siempre existe).

$P'(I) = 0$ si y sólo si $400 - 100I^2 = 0$, $100I^2 = 400$, $I^2 = 4$, $I = \pm 2$; pero por la naturaleza del problema, consideramos como dominio para I a $]0, +\infty[$ ya que $I > 0$.

Rechazamos por lo tanto $I = -2$ como número crítico, esto implica que

el único número crítico es: $I = 2$.

Comprobemos que $P(2)$ es un máximo aplicando el criterio de la primera derivada.

Intervalo	$0 < I < 2$	$2 < I < \infty$
Valor de prueba	1	3
Signo de $P'(I)$	$P'(1) = \frac{25}{3} > 0$	$P'(3) = -\frac{125}{64} < 0$
Conclusión para P	Creciente	Decreciente

(Observemos que puede tomarse cualquier valor de prueba cómodo siempre que esté en el intervalo correspondiente). Por el criterio de la primera derivada, como P crece en $]0, 2[$ y decrece en $]2, +\infty[$, en 2 hay un máximo relativo que, al ser único, es a la vez máximo absoluto.

Respuesta El máximo es $P(2)$, es decir la rapidez máxima de la fotosíntesis se obtiene para $I = 2 \times 10^3$ piecandelas.

4. Haga el estudio completo de las gráficas de las funciones:

a) $f(x) = \frac{x}{x-3}$

b) $g(x) = \frac{x}{\sqrt{2x^2-1}}$.

Solución

a) $f(x) = \frac{x}{x-3}$.

Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, es continua y derivable en su dominio $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, por ser función racional.

Intersecciones con los ejes:

$f(0) = 0$, entonces interseca al eje Y en $(0, 0)$.

Intersección con el eje X se obtiene para $f(x) = 0$.

$f(x) = 0 \implies \frac{x}{x-3} = 0 \implies x = 0$, entonces el punto $(0, 0)$ es la única intersección con el eje x .

Paridad y simetría con respecto al eje Y o al origen: Como $f(-x) = \frac{-x}{-x-3}$, distinto de $f(x)$ y de $-f(x)$, no es par ni impar.

Asíntotas verticales: $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x}{x-3} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x}{x-3} = +\infty \implies$ la recta $x = 3$ es asíntota vertical.

Asíntotas horizontales: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x-3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1 - \frac{3}{x}} = 1$.

Nótese que se obtiene este mismo límite tanto si $x \rightarrow +\infty$ como si $x \rightarrow -\infty$.

La recta $y = 1$ es asíntota horizontal.

Sentido de crecimiento y extremos:

$f'(x) = \frac{(x-3) \cdot 1 - x \cdot 1}{(x-3)^2} = \frac{-3}{(x-3)^2} < 0$ para todo $x \neq 3$, $f'(x) < 0 \implies f$ es decreciente en $] -\infty, 3[$ y en $] 3, \infty[$ (Notemos que es incorrecto decir que f es decreciente en su dominio).

Al ser decreciente en cada uno de los intervalos abiertos de su dominio, no hay máximos ni mínimos absolutos ni relativos.

Concavidad y puntos de inflexión: $f'(x) = -3(x-3)^{-2}$, $f''(x) = 6(x-3)^{-3} = \frac{6}{(x-3)^3}$.

Como el numerador es positivo, el signo de $f''(x)$ es el mismo signo de su denominador, que a su vez es el mismo signo de $x-3$.

$x-3 > 0$ para todo $x > 3$, $x-3 < 0$ para todo $x < 3$, entonces $f''(x) > 0$ para $x > 3$, $f''(x) < 0$ para $x < 3$.

En $]-\infty, 3[$ la curva es cóncava hacia abajo ($f''(x) < 0$).

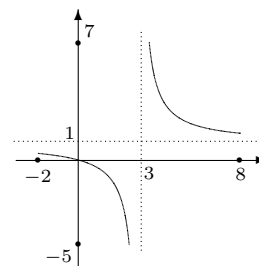
En $]3, +\infty[$ la curva es cóncava hacia arriba ($f''(x) > 0$).

Cuadro de variación		
Intervalo	$-\infty < x < 3$	$3 < x < \infty$
$f'(x)$	-	-
$f''(x)$	-	+
$f(x)$		

Pequeña tabla de valores:

x	-2	-1	-0.5	0	0.5	1	2	2.5	3.5	4	5
$f(x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{7}$	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{2}$	-2	-5	7	4	$\frac{5}{2}$

Observación: El recorrido (rango, ámbito) es $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ ya que 1 es el único elemento que no es imagen ningún número del dominio. Este resultado se puede encontrar analíticamente despejando x en la expresión y encontrando las restricciones para $y = f(x)$.



$$y = \frac{x}{x-3} \implies y(x-3) = x \implies xy - 3y = x \implies x(y-1) = 3y \implies x = \frac{3y}{y-1}, \quad y \neq 1,$$

lo que comprueba que el recorrido es $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

b) $g(x) = \frac{x}{\sqrt{2x^2 - 1}}$.

Dominio: $2x^2 - 1 > 0 \implies 2x^2 > 1 \implies x^2 > \frac{1}{2} \implies x^2 - \frac{1}{2} > 0 \implies \left(x + \sqrt{\frac{1}{2}}\right) \left(x - \sqrt{\frac{1}{2}}\right) > 0$.

Encontremos la zona donde $x^2 > \frac{1}{2}$, mediante un cuadro de signos para resolver la última ecuación:

Así, el dominio es $]-\infty, -\sqrt{\frac{1}{2}}[\cup]\sqrt{\frac{1}{2}}, +\infty[$. Es continua y derivable en su dominio.

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$	0	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$+\infty$
$x + \sqrt{\frac{1}{2}}$	-	0	+	+	+
$x - \sqrt{\frac{1}{2}}$	-	-	-	0	+
$x^2 - \frac{1}{2}$	+	0	-	0	+

Paridad y simetrías: $g(-x) = \frac{-x}{\sqrt{2(-x)^2 - 1}} = \frac{-x}{\sqrt{2x^2 - 1}} = -g(x)$.

Por lo tanto es una función impar, su gráfica es simétrica con respecto al origen.

Sentido de crecimiento y extremos: $g'(x) = \frac{\sqrt{2x^2 - 1} - x \cdot \frac{4x}{2\sqrt{2x^2 - 1}}}{2x^2 - 1}$. Reduciendo algebraicamente, se obtiene:

$$g'(x) = \frac{(2x^2 - 1) - 2x^2}{(2x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-1}{(2x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} < 0$$

para todo x en el dominio, entonces g es decreciente en $]-\infty, -\sqrt{\frac{1}{2}}[$ y en $]\sqrt{\frac{1}{2}}, +\infty[$.

Asíntotas verticales:

$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{\frac{1}{2}}^-} \frac{x}{\sqrt{2x^2 - 1}} = -\infty$, ya que el denominador tiende a 0 con valores positivos y el numerador es negativo cuando $x \rightarrow -\sqrt{\frac{1}{2}}$.

$\lim_{x \rightarrow \sqrt{\frac{1}{2}}^+} \frac{x}{\sqrt{2x^2 - 1}} = +\infty$, ya que el denominador tiende otra vez a 0 por valores positivos, pero ahora el numerador es positivo.

Conclusión: $x = -\sqrt{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $x = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ son asíntotas verticales.

Asíntotas horizontales:

Recordemos que $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0, \end{cases}$ ya que se usará esto en el cálculo de los límites necesarios aquí.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{2x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2(2 - \frac{1}{x^2})}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{2 - \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x\sqrt{2 - \frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{2x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{2 - \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{(-x)\sqrt{2 - \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{\sqrt{2 - \frac{1}{x^2}}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

La recta $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ es asíntota horizontal, cuando $x \rightarrow +\infty$ y la recta $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ es asíntota horizontal, cuando $x \rightarrow -\infty$.

Nota: Dada la simetría con respecto al origen, habría bastado calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y deducir que, por simetría tenía que ser $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Concavidad y puntos de inflexión: $g'(x) = \frac{-1}{(2x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} = -(2x^2 - 1)^{-\frac{3}{2}}$,

$$g''(x) = \frac{3}{2}(2x^2 - 1)^{-\frac{5}{2}}4x = \frac{6x}{\sqrt{(2x^2 - 1)^5}}.$$

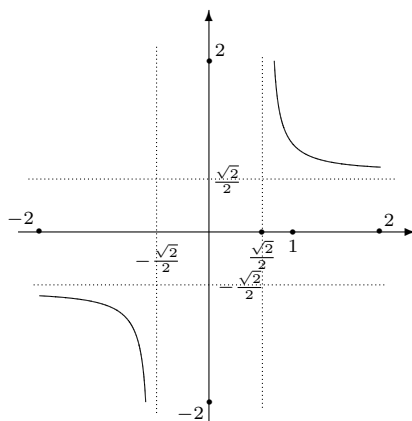
El denominador es positivo para cualquier valor permitido de x , entonces $6x > 0$, si $x > 0$ y $6x < 0$, si $x < 0$.

Así, $g''(x) < 0$ en $]-\infty, -\sqrt{\frac{1}{2}}[$, $g''(x) > 0$ en $]\sqrt{\frac{1}{2}}, +\infty[$ por lo que la gráfica de g es cóncava hacia abajo en $]-\infty, -\sqrt{\frac{1}{2}}[$ y cóncava hacia arriba en $]\sqrt{\frac{1}{2}}, +\infty[$.

$g''(x)$ existe y $g''(x) \neq 0$, para todo x en el dominio, por lo que no hay puntos de inflexión.

x	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$
$f'(x)$	-	-
$f''(x)$	-	+
$f(x)$		

Tabla de valores							
x	-4	-3	$-\sqrt{5}$	-2	$-\sqrt{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$g(x)$	$-\frac{4}{\sqrt{31}}$	$-\frac{3}{\sqrt{17}}$	$-\frac{\sqrt{5}}{3}$	$-\frac{2}{\sqrt{7}}$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	-1	$\neq$
$g(x)$	-0.72	-0.73	-0.745	-0.756	-0.816	-1	$\neq$



Por simetría se puede obtener las imágenes correspondientes para $x > \sqrt{\frac{1}{2}}$, por ejemplo, $g(\sqrt{2}) = \sqrt{\frac{2}{7}}$.

5. Algunas aves vuelan más lento sobre el agua que sobre la tierra. Un ave vuela con velocidad constante de 6Km/h sobre el agua y de 10Km/h sobre la tierra. Use la información de la figura para determinar la trayectoria que debe seguir el ave a fin de minimizar el tiempo total del vuelo entre la playa de una isla y su nido en la playa de otra isla.

Solución Llamemos t_x al tiempo que el ave vuela sobre la tierra, y t_y al tiempo que el ave vuela sobre el agua.

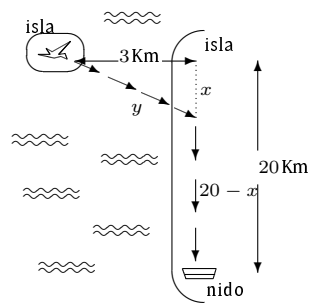
Función a minimizar: tiempo total T

$$T = t_x + t_y.$$

Sea y la distancia recorrida sobre el agua; $(20 - x)$ la distancia recorrida sobre la tierra (ver diagrama). Se tiene, entonces:

$$v_x = 10\text{km/h} \Rightarrow t_x = \frac{20-x}{10}, \quad v_y = 6\text{km/h} \Rightarrow t_y = \frac{y}{6}, \quad T = t_x + t_y, \quad T = \frac{20-x}{10} + \frac{y}{6}.$$

Es necesario encontrar una relación entre x y y . Observando el diagrama se cumple $x^2 + 9 = y^2$, entonces $y = \pm\sqrt{x^2 + 9}$, pero como $y > 0$ se tiene $y = \sqrt{x^2 + 9}$. Sustituyendo



en la expresión para T :

$$T = \frac{20-x}{10} + \frac{\sqrt{x^2+9}}{6}.$$

El mínimo para T está o en un punto terminal de su dominio $[0, 20]$ o en un número crítico en que $T'(x) = 0$. $T(0) = \frac{20}{10} + \frac{\sqrt{9}}{6} = 2 + \frac{1}{2} = 2.5$ horas, $T(20) = 0 + \frac{\sqrt{409}}{6} \approx 3.37$ horas.

$$T'(x) = -\frac{1}{10} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}}, \quad T'(x) = 0 \text{ si y sólo si } -\frac{1}{10} + \frac{x}{6\sqrt{x^2+9}} = 0, \quad \frac{x}{6\sqrt{x^2+9}} = \frac{1}{10},$$

$$10x = 6\sqrt{x^2+9}, \quad 5x = 3\sqrt{x^2+9}, \quad 25x^2 = 9(x^2+9), \quad 25x^2 = 9x^2 + 81, \quad 16x^2 = 81, \quad x^2 = \frac{81}{16},$$

$$x = \frac{9}{4} = 2.25, \quad T(2, 25) = \frac{20-2.25}{10} + \frac{\sqrt{(2.25)^2+9}}{6}, \quad T(2, 25) = 1.775 + 0.625 = 2.4.$$

En resumen: $T(0) = 2.5$ horas, $T(20) = 3.37$ horas, $T(2.25) = 2.4$ horas.

Si $x = 2.25$, el ave recorre sobre tierra $20 - x = 20 - 2.25 = 17.75 \text{ Km}$ y sobre el agua $y = \sqrt{x^2+9} = \sqrt{(2.25)^2+9} = 3.75 \text{ Km}$.

Respuesta Para minimizar el tiempo, el ave debe recorrer 3.75 Km sobre el agua y 17.75 Km sobre la tierra.

Tema No. 5

Ejercicios de integrales: I Parte Prof. Lester Izaguirre

1. Calcule las siguientes integrales y compruebe el resultado por derivación.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \int (\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}) dx. & \text{(d)} \int (\frac{\text{sen}(x)}{\sqrt{1-\cos(x)}}) dx. & \text{(g)} \int (a^{\frac{2}{3}} - t^{\frac{2}{3}}) dx. \\ \text{(b)} \int (\frac{x^2+1}{x^2}) dx. & \text{(e)} \int (x^2-1)^3 (2x) dx. & \text{(h)} \int \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}} dx. \\ \text{(c)} \int (x^2 \sqrt[4]{x^3+1}) dx. & \text{(f)} \int (x^2 + \frac{1}{(3x)^2}) dx. & \text{(i)} \int \sqrt{\cot(x)} \csc^2(x) dx. \end{array}$$

2. Calcule las siguientes integrales definidas.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \int_{-a}^a 4 dx. & \text{(c)} \int_0^3 x \sqrt{3-x} dx. & \text{(e)} \int_0^2 (x^2 - |2x-1|) dx. \\ \text{(b)} \int_{-1}^1 |x| dx. & \text{(d)} \int_{-1}^4 |x^2 - x - 2| dx. & \text{(f)} \int_{-1}^1 x dx. \end{array}$$

3. Halle la solución general de la ecuación diferencial y comprobar el resultado por derivación en cada caso.

$$\text{(a)} \frac{dy}{dt} = 3t^2. \qquad \text{(b)} \frac{dy}{dt} = t^{\frac{3}{2}}.$$

4. En los siguientes ejercicios utilice el segundo teorema fundamental del cálculo y encuentre $F'(x)$, es decir $\frac{dy}{dx}$.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \frac{d}{dx} \int_1^{\sqrt{x}} \frac{dt}{t^3}. & \text{(c)} \frac{d}{dx} \int_{3x}^{x^3} (t^3+1)^{10} dt. \\ \text{(b)} \frac{d}{dx} \int_2^{x^4} \frac{t}{\sqrt{t^3+2}} dt. & \text{(d)} \frac{d}{dx} \int_2^{\tan(x)} \frac{1}{1+t^2} dt. \end{array}$$

Soluciones de ejercicios de integrales: I Parte Prof. Lester Izaguirre

1. Calcule las siguientes integrales y compruebe el resultado por derivación.

(a) Sea $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$. En este caso se puede escribir $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx$ como sigue:

$$\int \left(x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \right) dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx + \frac{1}{2} \int x^{-\frac{1}{2}} dx. \text{ Ahora se procede a aplicar la regla:}$$

$$\int f(x) dx + \int g(x) dx = \int [f(x) + g(x)] dx, \text{ y además } \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \text{ con } n \neq -1,$$

por lo tanto, se obtiene como resultado: $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \cdot 2x^{\frac{1}{2}} + C$.

De modo que $F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}} + C$. Para comprobar que en efecto el resultado obtenido es correcto se debe tener $F'(x) = f(x)$.

Se trata de encontrar $\frac{d}{dx}(F(x))$, es decir $\frac{d}{dx} \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}} + C \right)$.

Lo cual da como resultado $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 0 = x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

(b) $\int \frac{x^2+1}{x^2} dx = \int \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) dx = \int (1 + x^{-2}) dx = \int dx + \int x^{-2} dx = x - x^{-1} + C$. Ahora se verifica $\frac{d}{dx} \left(x - \frac{1}{x} + C \right) = 1 + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2+1}{x^2}$.

(c) Esta integral se puede obtener por sustitución algebraica como sigue: Sea $u = x^3 + 1 \Leftrightarrow u^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{x^3+1}$. Recuerde además que si $u = f(x) \Rightarrow u'(x) = f'(x) dx$, por lo tanto $du = 3x^2 dx \Leftrightarrow \frac{du}{3} = x^2 dx$. Así $\int x^2 \sqrt[4]{x^3+1} dx = \int u^{\frac{1}{4}} \left(\frac{du}{3} \right) = \frac{1}{3} \int u^{\frac{1}{4}} du = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} u^{\frac{5}{4}} + C = \frac{4}{15} (x^3+1)^{\frac{5}{4}} + C$.

Y ahora se comprueba el resultado por medio de $\frac{d}{dx} \left(\frac{4}{15} (x^3+1)^{\frac{5}{4}} + C \right) = \frac{4}{15} \cdot \frac{5}{4} (x^3+1)^{\frac{1}{4}} (3x^2) = (x^3+1)^{\frac{1}{4}} x^2 = x^2 \sqrt[4]{x^3+1}$.

(d) Igual que en el caso anterior, se puede resolver por sustitución.

Sea $u = 1 - \cos x \Leftrightarrow u^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1 - \cos x}$ y $du = \sin x dx$, por lo tanto se tiene:

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos x}} dx = \int \frac{du}{u^{\frac{1}{2}}} = \int u^{-\frac{1}{2}} du = 2u^{\frac{1}{2}} + C = 2(1 - \cos x)^{\frac{1}{2}} + C.$$

Se sigue que $\frac{d}{dx} (2(1 - \cos x)^{\frac{1}{2}} + C) = 2 \cdot \frac{1}{2} (1 - \cos x)^{-\frac{1}{2}} (\sin x) = \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos x}}$.

(e) Sea $u = x^2 - 1 \Leftrightarrow u^3 = (x^2 - 1)^3$ y $du = 2x dx$.

$$\text{Luego } \int (x^2 - 1)^3 (2x) dx = \int u^3 du = \frac{1}{4} u^4 + C = \frac{1}{4} (x^2 - 1)^4 + C.$$

Por lo tanto $\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{4} (x^2 - 1)^4 + C \right) = \frac{1}{4} \cdot 4 (x^2 - 1)^3 (2x) = (x^2 - 1)^3 (2x)$.

(f) $\int \left(x^2 + \frac{1}{(3x)^2} \right) dx = \int \left(x^2 + \frac{1}{9x^2} \right) dx = \int x^2 dx + \frac{1}{9} \int x^{-2} dx = \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{9} x^{-1} + C$.

Por lo tanto $\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{9}x^{-1} + C \right) = \frac{1}{3}(3x^2) + \frac{1}{9}x^{-2} + 0 = x^2 + \frac{1}{(3x)^2}$.

- (g) Se debe tener en cuenta que en este ejercicio tanto a como t son constantes.

Por lo tanto: $\int (a^{\frac{2}{3}} - t^{\frac{2}{3}}) dx = \int a^{\frac{2}{3}} dx - \int t^{\frac{2}{3}} dx = a^{\frac{2}{3}}x - t^{\frac{2}{3}}x + C$.

Es claro que derivando con respecto de x se comprueba el resultado, es decir:

$$\frac{d}{dx}(a^{\frac{2}{3}}x - t^{\frac{2}{3}}x) = a^{\frac{2}{3}}(1) - t^{\frac{2}{3}}(1).$$

(h) $\int \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int x^{-\frac{2}{3}}(x^4 - x^2 - 2) dx = \int (x^{\frac{10}{3}} - x^{\frac{4}{3}} - 2x^{-\frac{2}{3}}) dx$.

Lo que da por resultado $\frac{3}{13}x^{\frac{13}{3}} - \frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}} - 6x^{\frac{1}{3}} + C$.

Observe que $\frac{d}{dx} \left(\frac{3}{13}x^{\frac{13}{3}} - \frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}} - 6x^{\frac{1}{3}} + C \right) = \frac{3}{13} \cdot \frac{13}{3}x^{\frac{10}{3}} - \frac{3}{7} \cdot \frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}} - 2x^{-\frac{2}{3}}$.

Y de ahí se obtiene: $x^{\frac{10}{3}} - x^{\frac{4}{3}} - \frac{2}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{x^4 - x^2 - 2}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{x^4 - 1 - x^2 - 1}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{(x^4 - 1) - (x^2 + 1)}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{(x^2 + 1)(x^2 - 1) - (x^2 + 1)}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{(x^2 + 1)(x^2 - 2)}{\sqrt[3]{x^2}}$.

- (i) Sea $u = \cot x \Leftrightarrow u^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\cot x}$ y $du = -\csc^2 x dx$.

$$\int \sqrt{\cot x} \csc^2 x dx = \int u^{\frac{1}{2}} (-du) = -\int u^{\frac{1}{2}} du = -\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{3}(\cot x)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Ahora $\frac{d}{dx} \left(-\frac{2}{3}(\cot x)^{\frac{3}{2}} \right) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}(\cot x)^{\frac{1}{2}} \cdot (-\csc^2 x) + 0 = \sqrt{\cot x} \cdot \csc^2 x$.

2. Calcule las siguientes integrales definidas.

- (a) La función par es tal que $f(x) = f(-x)$ y la función $f(x) = 4$ es par, pues, $f(x) = f(-x) = 4$.

Y se debe recordar que: $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$, siempre que f sea par.

Por lo tanto $\int_{-a}^a 4 dx = 4 \cdot 2 \int_0^a dx = 4(2)(x) \Big|_0^a = 8a$.

- (b) Como el integrando $f(x) = |x|$ es una función par, se procede en forma similar a la

parte (a), es decir $\int_{-1}^1 |x| dx = 2 \int_0^1 x dx = (x^2) \Big|_0^1 = 1$, ya que si $x \in [0, 1] \Rightarrow |x| = x$

y $2 \int_0^1 x dx = x^2 \Big|_0^1 = 1$.

- (c) Para evaluar la integral $\int_0^3 x\sqrt{3-x} dx$, sea $u = 3 - x \Leftrightarrow u^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3-x}$, de donde $-du = dx$ y $x = 3 - u$. Se hace un cambio de límites como se describe a continuación.

Si $x = 0 \Rightarrow u = 3$ y si $x = 3 \Rightarrow u = 0$. Por lo que $\int_0^3 x\sqrt{3-x} dx = \int_3^0 (3-u)u^{\frac{1}{2}} (-du)$.

Por otro lado, se puede hacer un cambio de los límites de integración, como sigue:

$$-\int_3^0 (3-u)u^{\frac{1}{2}} du = \int_0^3 (3u^{\frac{1}{2}} - u^{\frac{3}{2}}) du.$$

Y evaluando la última integral se obtiene: $\left(2u^{\frac{3}{2}}\right)_0^3 - \left(\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}\right)_0^3 = \frac{12}{5}\sqrt{3}$.

(d) Para calcular la integral $\int_{-1}^4 |x^2 - x - 2| dx$, se debe estudiar previamente la función

$$f(x) = |x^2 - x - 2| = \begin{cases} x^2 - x - 2 & \text{si } x^2 - x - 2 > 0 \wedge 2 < x < 4 \\ -(x^2 - x - 2) & \text{si } x^2 - x - 2 < 0 \wedge -1 < x < 2. \end{cases}$$

En el cálculo de esta integral se usa la propiedad aditiva de intervalos, esto es, si la función f es integrable en los intervalos cerrados: $[a, b]$, $[a, c]$, $[c, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \text{ con } a < c < b.$$

$$\int_{-1}^4 |x^2 - x - 2| dx = \int_{-1}^2 -(x^2 - x - 2) dx + \int_2^4 (x^2 - x - 2) dx = \left(\frac{-x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_{-1}^2 + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right)\Big|_2^4. \text{ Y evaluando este resultado da } \frac{79}{6}.$$

(e) En $\int_0^2 (x^2 - |2x - 1|) dx$ se debe estudiar previamente $|2x - 1|$.

$$|2x - 1| = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } 2x - 1 > 0 \implies x > \frac{1}{2} \\ 1 - 2x & \text{si } 2x - 1 < 0 \implies x < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\text{Luego } \int_0^2 (x^2 - |2x - 1|) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (x^2 + 2x - 1) dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 (x^2 - 2x + 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x^2 - x\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^2. \text{ Y finalmente se obtiene el resultado } \frac{1}{6}.$$

(f) Puesto que el integrando está conformado por la función $f(x) = x$ y esta función es impar, en efecto, véase que $f(-x) = -x = -(x) = -f(x)$, entonces se tiene: $\int_{-1}^1 x dx = 0$.

3. Halle la solución general de la ecuación diferencial.

(a) Se tiene $\frac{dy}{dt} = 3t^2$. Separando variables se obtiene: $dy = 3t^2 dt$, por lo tanto:

$$\int dy = \int 3t^2 dt \Leftrightarrow y = 3\frac{t^3}{3} + C = t^3 + C.$$

Y para comprobar el resultado se puede derivar, luego $\frac{dy}{dt} = 3t^2$.

(b) Se tiene $\frac{dy}{dt} = t^{\frac{3}{2}}$.

Separando variables, se obtiene: $dy = t^{\frac{3}{2}} dt$. Luego $\int dy = \int t^{\frac{3}{2}} dt \Leftrightarrow y = \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} + C$.

El resultado se puede comprobar derivando. En efecto, $\frac{dy}{dt} = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2} t^{\frac{3}{2}}$.

4. En los siguientes ejercicios, utilice el segundo teorema fundamental del cálculo y encuentre $F'(x)$, es decir $\frac{dy}{dx}$.

(a) Sea $u = \sqrt{x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, llamando $y = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{1}{t^3} dt$, entonces $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\int_1^{\sqrt{x}} \frac{1}{t^3} dt \right) = \frac{d}{du} \left(\int_1^u \frac{1}{t^3} dt \right) \frac{du}{dx}$, lo cual da $\frac{1}{u^3} \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{(\sqrt{x})^3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x^2}$.

(b) Sea $y = \int_2^{x^4} \frac{t}{\sqrt{t^3+2}} dt$, haciendo $u = x^4 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 4x^3$, entonces tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\int_2^{x^4} \frac{t}{\sqrt{t^3+2}} dt \right) = \frac{d}{du} \left(\int_2^u \frac{t}{\sqrt{t^3+2}} dt \right) \frac{du}{dx} = \frac{u}{\sqrt{u^3+2}} \cdot 4x^3 = \frac{x^4}{\sqrt{(x^4)^3+2}} \cdot 4x^3 = \frac{4x^7}{\sqrt{x^{12}+2}}.$$

(c) Recuerde que $\frac{d}{dx} \left(\int_{k(x)}^{g(x)} f(t) dt \right) = f(g(x))g'(x) - f(k(x))k'(x)$.

Sea $g(x) = x^3$ y $h(x) = 3x$, entonces $g'(x) = 3x^2$ y $h'(x) = 3$.

Haciendo $y = \int_{3x}^{x^3} (t^3 + 1)^{10} dt$, tenemos que $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left[\int_{3x}^{x^3} (t^3 + 1)^{10} dt \right]$ y finalmente se obtiene: $[(x^3)^3 + 1]^{10} \cdot (3x^2) - [(3x)^3 + 1]^{10} \cdot (3) = 3x^2 [x^9 + 1]^{10} - 3 [27x^3 + 1]^{10}$.

(d) Sea $u = \tan(x) \Rightarrow \frac{du}{dx} = \sec^2(x)$.

Sea $y = \int_2^{\tan(x)} \frac{1}{1+t^2} dt$, entonces $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\int_2^{\tan(x)} \frac{1}{1+t^2} dt \right) = \frac{d}{du} \left(\int_2^u \frac{1}{1+t^2} dt \right) \frac{du}{dx}$,

lo que da por resultado: $\frac{1}{1+u^2} \cdot \sec^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} \sec^2 x$.

Se recuerda la identidad trigonométrica $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$. Por lo tanto en el caso anterior se tiene que el resultado es 1.

Ejercicios de integrales: II Parte Prof. Elvis Hurtado

1. Determinar si la función $f(x) = \frac{1}{x-4}$ es integrable en el intervalo $[3, 5]$.
2. Decidir si el enunciado es cierto o falso y explicar ¿por qué?

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b g(x) dx.$$

3. Evaluar la integral indefinida y verificar el resultado por derivación.

(a) $\int y^2 \sqrt{y} dy.$

(b) $\int (\sqrt[4]{x^3} + 1) dx.$

4. Verificar la igualdad probando que la derivada del miembro de la derecha coincide con el integrando de la izquierda.

(a) $\int \frac{x^2 - 1}{x^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{2(x^2 + 3)}{3\sqrt{x}} + C.$

(b) $\int (4x^3 - \frac{1}{x^2}) dx = x^4 + \frac{1}{x} + C.$

5. Sea $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t - 2$, $0 \leq t \leq 5$.

- (a) Hallar la velocidad instantánea y la aceleración de la partícula.
- (b) Hallar los intervalos de t en que la partícula se mueve hacia la derecha.
- (c) Calcular la velocidad de la partícula cuando su aceleración es cero.

6. Sabiendo que $\int_0^3 f(x) dx = 4$ y $\int_3^6 f(x) dx = -1$, calcular:

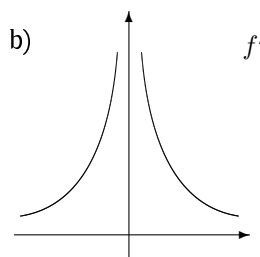
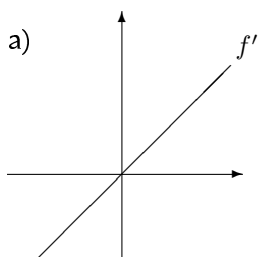
(a) $\int_0^6 f(x) dx.$

(b) $\int_6^3 f(x) dx.$

(c) $\int_3^3 f(x) dx.$

(d) $\int_3^6 -5f(x) dx.$

7. Mediante la gráfica de la derivada de una función. Esbozar las gráficas de dos funciones que tengan esa derivada.



8. Un vivero suele vender los árboles tras 6 años de crecimiento. El ritmo de crecimiento en esos 6 años viene dado por

$$\frac{dh}{dt} = 1,5t + 5,$$

donde t es el tiempo en años y h la altura en centímetros. En el momento de plantarlos miden 12cm en $t = 0$.

- (a) Calcular su altura tras t años.
- (b) ¿Qué altura tienen en el instante de ser vendidos?

Soluciones de ejercicios de integrales: II Parte Prof. Elvis Hurtado

1. Determinar si la función $f(x) = \frac{1}{x-4}$ es integrable en el intervalo $[3, 5]$.

Solución En la definición de integral definida, se requiere que la función esté definida en el intervalo cerrado.

Nuestra función $f(x) = \frac{1}{x-4}$ no está definida en $x = 4$, por consecuencia NO es integrable.

2. Decidir si el enunciado es cierto o falso y explicar ¿por qué?

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b g(x) dx.$$

Solución En matemática una afirmación es falsa si determinamos un ejemplo concreto en que lo mismo no se cumple, $\int_0^1 x dx \cdot \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Por otra parte, $\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$.

3. Evaluar la integral indefinida y verificar el resultado por derivación.

(a) $\int y^2 \sqrt{y} dy$.

Solución Pretendemos obtener la respuesta mediante la fórmula $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$.

Por tanto, $\int y^2 \cdot y^{\frac{1}{2}} dy = \int y^{\frac{5}{2}} dy = \frac{y^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} + C = \frac{y^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + C = \frac{2}{7} y^{\frac{7}{2}} + C$.

Ahora verificamos mediante derivación:

$$\left(\frac{2}{7} y^{\frac{7}{2}} + C\right)' = \frac{2}{7} \cdot \frac{7}{2} y^{\frac{7}{2}-1} + 0 = y^{\frac{5}{2}} = y^2 \sqrt{y}.$$

(b) $\int (\sqrt[4]{x^3} + 1) dx$.

Solución Queremos obtener la respuesta mediante la fórmula $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$.

$$\int \left(x^{\frac{3}{4}} + 1\right) dx = \int x^{\frac{3}{4}} dx + \int 1 dx = \frac{x^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1} + \frac{x^{0+1}}{0+1} + C = \frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}} + x + C = \frac{4}{7} x^{\frac{7}{4}} + x + C.$$

Ahora, verificamos mediante derivación $\left(\frac{4}{7} x^{\frac{7}{4}} + x + C\right)' = \left(\frac{4}{7} x^{\frac{7}{4}}\right)' + (x)' + (C)' = \frac{4}{7} \cdot \frac{7}{4} x^{\frac{7}{4}-1} + (1)x^{1-1} + 0 = x^{\frac{3}{4}} + 1$.

4. Verificar la igualdad probando que la derivada del miembro de la derecha coincide con el integrando de la izquierda.

(a) $\int \frac{x^2-1}{3\sqrt{x}} dx = \frac{2(x^2+3)}{3\sqrt{x}} + C$.

Solución $\left(\frac{2(x^2+3)}{3\sqrt{x}}\right)' = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{x^2}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{2}{x^{\frac{1}{2}}}\right)' = \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{x^{\frac{1}{2}}}\right)' = \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\right)' + \left(2x^{-\frac{1}{2}}\right)' =$

$$x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{3}{2}} = x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{3}{2}} - 1}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^2 - 1}{x^{\frac{3}{2}}}.$$

$$(b) \int (4x^3 - \frac{1}{x^2}) dx = x^4 + \frac{1}{x} + C.$$

Solución $(x^4 + \frac{1}{x} + C)' = (x^4)' + (\frac{1}{x})' + (C)' = 4x^3 + (-1)x^{-2} + 0 = 4x^3 - \frac{1}{x^2}.$

5. Sea $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t - 2$, $0 \leq t \leq 5$.

(a) Hallar la velocidad instantánea y la aceleración de la partícula.

Solución Sabemos que la velocidad es la derivada de la función posición, es decir:

$$v(t) = x'(t) = 3t^2 - 12t + 9.$$

La aceleración es la derivada de la función velocidad

$$a(t) = v'(t) = x''(t) = 6t - 12.$$

(b) Hallar los intervalos de t en que la partícula se mueve hacia la derecha.

Solución La partícula se mueve a lo largo del eje x si la velocidad es positiva.

De la factorización de la velocidad $v(t) = 3t^2 - 12t + 9 = 3(t-3)(t-1)$.

		1		3	
$v(t)$	+	0	-	0	+
$x(t)$	mueve a la derecha		mueve a la izquierda		mueve a la derecha

Los intervalos son: $]0, 1[\cup]3, 5]$.

(c) Calcular la velocidad de la partícula cuando su aceleración es cero.

Solución $a(t) = 0 = 6t - 12$, por tanto $t = 2$, $v(2) = 3(2)^2 - 12(2) + 9 = 12 - 24 + 9 = -3$.

6. Sabiendo que $\int_0^3 f(x) dx = 4$ y $\int_3^6 f(x) dx = -1$, calcular:

(a) $\int_0^6 f(x) dx$.

Solución De la propiedad aditiva de los intervalos $\int_0^6 f(x) dx = \int_0^3 f(x) dx + \int_3^6 f(x) dx = 4 - 1 = 3$.

(b) $\int_6^3 f(x) dx$.

Solución De la definición de integrales definidas $\int_6^3 f(x) dx = -\int_3^6 f(x) dx = -(-1) = 1$.

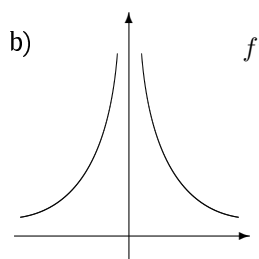
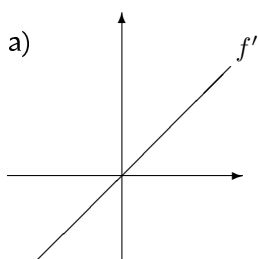
(c) $\int_3^3 f(x) dx.$

Solución De la definición de integrales definidas $\int_3^3 f(x) dx = 0.$

(d) $\int_3^6 -5f(x) dx.$

Solución De las propiedades de integrales definidas $\int_3^6 -5f(x) dx = -5 \int_3^6 f(x) dx = (-5)(-1) = 5.$

7. Mediante la gráfica de la derivada de una función. Esbozar las gráficas de dos funciones que tengan esa derivada.



- (a) **Solución** Observamos que la derivada es una recta creciente que pasa por el origen, $f'(x) = ax$ de esto tenemos como consecuencia que $f(x) = a\frac{x^2}{2} + C$ de lo anterior podemos dar como ejemplos concretos:

i. $f = \frac{x^2}{2} + 1.$

ii. $f = \frac{x^2}{2} - 2.$

- (b) **Solución** En la gráfica apreciamos varias características de f' .

- i. No está definida en $x = 0$.
 - ii. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = +\infty.$
 - iii. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = +\infty.$
 - iv. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0.$
 - v. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = 0.$
 - vi. Es simétrica con respecto al eje y .
 - vii. $f'(x) = f'(-x).$
- Si $f'(x) = \frac{1}{x^2}$, $f(x) = -\frac{1}{x} + C$, o si $f'(x) = \frac{1}{x^4}$, $f(x) = -\frac{1}{3x^3} + C$. Estos son ejemplos de funciones que satisfacen las propiedades.

8. Un vivero suele vender los árboles tras 6 años de crecimiento. El ritmo de crecimiento en

esos 6 años viene dado por $\frac{dh}{dt} = 1,5t + 5$, donde t es el tiempo en años y h la altura en centímetros. En el momento de plantarlos miden 12cm en $t = 0$.

- (a) Calcular su altura tras t años.

Solución Como conocemos la razón de cambio instantánea, entonces calculamos la antiderivada $h(t) = 1,5\frac{t^2}{2} + 5t + C = \frac{3}{4}t^2 + 5t + C$.

Ahora usamos el hecho de que $h = 12$ si $t = 0$, $12 = 1,5\frac{(0)^2}{2} + 5(0) + C$, es decir $C = 12$.

La altura tras t años es $h(t) = \frac{3}{4}t^2 + 5t + 12$.

- (b) ¿Qué altura tienen en el instante de ser vendidos?

Solución De la pregunta anterior sabemos que $h(t) = \frac{3}{4}t^2 + 5t + 12$, por tanto

$$h(6) = \frac{3}{4}(6)^2 + 5(6) + 12 = \frac{3}{4} \cdot 36 + 30 + 12 = 69.$$

Ejercicios de integrales: III Parte Prof. Mario Murillo

1. Calcule la integral definida:

$$\int_{-1}^4 |x^2 - x - 2| dx.$$

¿Cómo se debe realizar la integración si el intervalo fuera $[-2, 2]$?, ¿y si fuera $[-2, 4]$?

2. Calcule el área de la región acotada por las gráficas de:

a) $y = \frac{4}{x^3}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$.

b) $y = x + 2\sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 3$.

3. Halle el valor medio de $f(x) = |x - 4| + 2$ en el intervalo $[0, 6]$.

4. Si $F(x) = \int_0^{2x^2} \sqrt{t+1} dt$, halle $F'(x)$.

5. Usando el método de sustitución calcule:

a) $\int \frac{4x-1}{\sqrt{x+4}} dx$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^3}$.

6. Calcule el área de la región acotada por las gráficas de $y = 4x\sqrt{x^2+1}$, $x = 0$ y $x = 2$.

7. Halle el área de la región acotada por las gráficas de las funciones:

a) $f(x) = 3x + 1$ y $g(x) = x^2 + 3x - 4$.

b) $f(x) = x - 1$ y $g(x) = (x - 1)^3$.

c) $f(x) = 3x^2$ y $g(x) = x^2 + 8$.

Soluciones de ejercicios de integrales: III Parte Prof. Mario Murillo

1. Calcule la integral definida:

$$\int_{-1}^4 |x^2 - x - 2| dx.$$

¿Cómo se debe realizar la integración si el intervalo fuera $[-2, 2]$?, ¿y si fuera $[-2, 4]$?

Solución Es necesario despejar las barras del valor absoluto:

$$|x^2 - x - 2| = \begin{cases} x^2 - x - 2 & \text{si } x^2 - x - 2 \geq 0 \\ -(x^2 - x - 2) & \text{si } x^2 - x - 2 < 0. \end{cases}$$

Resolvamos aparte la inecuación $x^2 - x - 2 \geq 0$:

$$x^2 - x - 2 \geq 0$$

$(x - 2)(x + 1) \geq 0$, es decir:

$(x - 2)(x + 1) \geq 0$ si x está en $]-\infty, -1] \cup [2, +\infty[$,

$(x - 2)(x + 1) < 0$ si x está en $]-1, 2[$,

de donde completamos: $|x^2 - x - 2| = \begin{cases} x^2 - x - 2 & \text{si } x \in]-\infty, -1] \cup [2, +\infty[\\ -(x^2 - x - 2) & \text{si } x \in (-1, 2). \end{cases}$

Por lo tanto, $\int_{-1}^4 |x^2 - x - 2| dx = \int_{-1}^2 |x^2 - x - 2| dx + \int_2^4 |x^2 - x - 2| dx =$

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^2 -(x^2 - x - 2) dx + \int_2^4 (x^2 - x - 2) dx = - \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_{-1}^2 + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_2^4 = \\ & - \left[\frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} - 2 \cdot 2 - \left(\frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} - 2(-1) \right) \right] + \left[\frac{4^3}{3} - \frac{4^2}{2} - 2 \cdot 4 - \left(\frac{2^3}{3} - \frac{2^2}{2} - 2 \cdot 2 \right) \right] = \\ & - \left[\frac{8}{3} - 2 - 4 - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 \right) \right] + \left[\frac{64}{3} - 8 - 8 - \left(\frac{8}{3} - 2 - 4 \right) \right] = - \left(\frac{-9}{2} \right) + \frac{26}{3} = \frac{79}{6}. \end{aligned}$$

Para integrar el intervalo $[-2, 2]$ se escribe:

$$\int_{-2}^{-1} |x^2 - x - 2| dx + \int_{-1}^2 |x^2 - x - 2| dx \text{ y se desarrolla en forma similar a la anterior.}$$

Para integrar el intervalo $[-2, 4]$ se escribe:

$$\int_{-2}^{-1} |x^2 - x - 2| dx + \int_{-1}^2 |x^2 - x - 2| dx + \int_2^4 |x^2 - x - 2| dx \text{ y se desarrolla en forma similar a la anterior.}$$

2. Calcule el área de la región acotada por las gráficas de:

a) $y = \frac{4}{x^3}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$.

b) $y = x + 2\sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 3$.

Solución

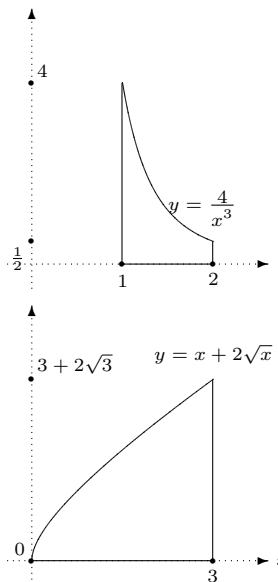
a) El bosquejo de la gráfica es:

El área está dada por: $A = \int_1^2 \frac{4}{x^3} dx = \int_1^2 4x^{-3} dx = \left. \frac{4x^{-2}}{-2} \right|_1^2 = \left. \frac{-2}{x^2} \right|_1^2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$

b) El bosquejo de las gráficas es:

El área está dada por:

$$A = \int_0^3 (x + 2\sqrt{x}) dx = \int_0^3 (x + 2x^{\frac{1}{2}}) dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2 \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^3 = \frac{x^2}{2} + \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{3} \Big|_0^3 = \frac{3^2}{2} + \frac{4 \cdot 3^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{9}{2} + \frac{4 \cdot 3\sqrt{3}}{3} = \frac{9}{2} + 4\sqrt{3}.$$



3. Hallar el valor medio de $f(x) = |x - 4| + 2$ en $[0, 6]$.

Recordemos que el valor medio de una función en un intervalo está dado por:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

En nuestro caso tenemos $\frac{1}{6-0} \int_0^6 (|x-4| + 2) dx = \frac{1}{6} \int_0^6 (|x-4| + 2) dx$ (*), en donde

$$|x-4| = \begin{cases} x-4 & \text{si } x \geq 4 \\ -(x-4) = 4-x & \text{si } x < 4. \end{cases}$$

Por lo que (*) se transforma en:

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \left[\int_0^4 (4-x+2) dx + \int_4^6 (x-4+2) dx \right] &= \frac{1}{6} \left[\int_0^4 (-x+6) dx + \int_4^6 (x-2) dx \right] = \\ \frac{1}{6} \left[\left(-\frac{x^2}{2} + 6x \right) \Big|_0^4 + \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_4^6 \right] &= \frac{1}{6} \left[\left(-\frac{4^2}{2} + 6 \cdot 4 \right) + \left(\frac{6^2}{2} - 2 \cdot 6 \right) - \left(\frac{4^2}{2} - 2 \cdot 4 \right) \right] = \\ \frac{1}{6} [(-8+24) + (18-12) - (8-8)] &= \frac{1}{6} (16+6) = \frac{22}{6} = \frac{11}{3}. \end{aligned}$$

4. Si $F(x) = \int_0^{2x^2} \sqrt{t+1} dt$, hallar $F'(x)$.

Solución Observe que el segundo Teorema Fundamental del Cálculo se puede escribir:

Si $F(x) = \int_a^{g(x)} f(t) dt$, entonces $F'(x) = f(g(x))g'(x)$ (se aplica la regla de la cadena).

En nuestro caso ponemos $f(x) = \sqrt{t+1}$ y $g(x) = 2x^2 \implies g'(x) = 4x$, por lo tanto:

Si $F(x) = \int_0^{2x^2} \sqrt{t+1} dt$, entonces $F'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x) = \sqrt{2x^2+1} \cdot 4x$, o sea:

$$F'(x) = 4x\sqrt{2x^2+1}.$$

5. Usando el método de sustitución calcule:

a) $\int \frac{4x-1}{\sqrt{x+4}} dx$

Haciendo $u = x + 4 \Rightarrow x = u - 4 \Rightarrow du = dx \Rightarrow \int \frac{4x-1}{\sqrt{x+4}} dx = \int \frac{4(u-4)-1}{\sqrt{u}} du =$
 $\int \frac{4u-17}{\sqrt{u}} du = \int \left(\frac{4u}{\sqrt{u}} - \frac{17}{\sqrt{u}} \right) du = \int \left(4u^{\frac{1}{2}} - 17u^{-\frac{1}{2}} \right) du = \frac{4u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{17u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C =$
 $\frac{8}{3}\sqrt{(x+4)^3} - 34\sqrt{x+4} + C.$

b) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^3} dx$

Si se hace el arreglo $2 \int \frac{1}{(1+\sqrt{x})^3} \frac{dx}{2\sqrt{x}}$, la expresión $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ es la derivada de $(1+\sqrt{x})$. Por lo tanto, hacemos $u = 1 + \sqrt{x} \Rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$ y la primitiva queda:

$$2 \int \frac{1}{(1+\sqrt{x})^3} \cdot \frac{dx}{2\sqrt{x}} = 2 \int \frac{du}{u^3} = 2 \int u^{-3} du = 2 \cdot \frac{u^{-2}}{-2} + C = \frac{-1}{(1+\sqrt{x})^2} + C.$$

6. Calcule el área de la región acotada por las gráficas de $y = 4x\sqrt{x^2+1}$, $x = 0$ y $x = 2$.

Solución El área está determinada por $A = \int_0^2 4x\sqrt{x^2+1} dx$.

Para hallar la primitiva, podemos hacer la sustitución:

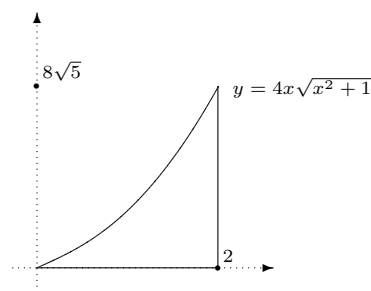
$$u = x^2 + 1, x = 0 \Rightarrow u = 1, x = 2 \Rightarrow u = 5 \text{ y } du = 2x dx,$$

por lo que escribimos:

$$A = \int_0^2 4x\sqrt{x^2+1} dx = \int_0^2 2\sqrt{x^2+1} \cdot 2x dx =$$

$$2 \int_1^5 \sqrt{u} du = 2 \int_1^5 u^{\frac{1}{2}} du = 2 \left. \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_1^5 = 2 \left. \frac{\sqrt{u^3}}{\frac{3}{2}} \right|_1^5 =$$

$$\frac{4}{3}(\sqrt{5^3} - \sqrt{1^3}) = \frac{4}{3}(5\sqrt{5} - 1).$$



7. Halle el área de la región acotada por las gráficas de las funciones:

a) $f(x) = 3x + 1$ y $g(x) = x^2 + 3x - 4$.

b) $f(x) = x - 1$ y $g(x) = (x - 1)^3$.

c) $f(x) = 3x^2$ y $g(x) = x^2 + 8$.

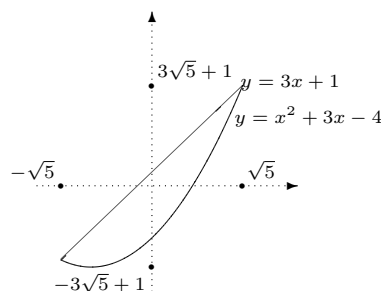
Solución

- a) Hay que determinar (si los hay) los puntos de intersección de las gráficas de las funciones:

$$3x + 1 = x^2 + 3x - 4 \implies x^2 + 3x - 4 - 3x - 1 = 0 \implies x^2 - 5 \implies 0 \implies x = \pm\sqrt{5}.$$

En el intervalo $[-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$, $f(x) \geq g(x)$, por lo que el área es:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} [(3x + 1) - (x^2 + 3x - 4)] dx = \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} (-x^2 + 5) dx = \left(-\frac{1}{3}x^3 + 5x\right) \Big|_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} = \\ &= -\frac{1}{3}\sqrt{5}^3 + 5\sqrt{5} - \left(-\frac{1}{3}(-\sqrt{5})^3 + 5(-\sqrt{5})\right) = -\frac{5}{3}\sqrt{5} + 5\sqrt{5} - \frac{5}{3}\sqrt{5} + 5\sqrt{5} = \\ &= \frac{1}{3}(-5\sqrt{5} + 15\sqrt{5} - 5\sqrt{5} + 15\sqrt{5}) = \frac{20}{3}\sqrt{5}. \end{aligned}$$



- b) $f(x) = x - 1$ y $g(x) = (x - 1)^3$.

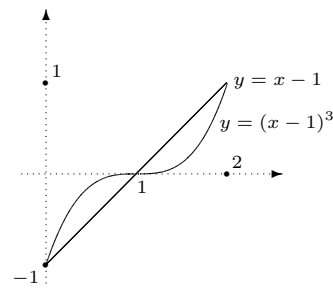
Hay que determinar los puntos de intersección:

$$\begin{aligned} (x - 1)^3 &= x - 1 \implies (x - 1)^3 - (x - 1) = 0 \implies \\ (x - 1)[(x - 1)^2 - 1] &= 0 \implies x = 1, (x - 1)^2 - 1 = 0 \implies \\ x^2 - 2x + 1 - 1 &= 0 \implies x^2 - 2x = 0 \implies x(x - 2) = 0, \\ \text{de donde } x &= 0, x = 2. \end{aligned}$$

Esto determina los intervalos: $[0, 1]$ y $[1, 2]$.

En $[0, 1]$, $g(x) \geq f(x)$ y en $[1, 2]$, $f(x) \geq g(x)$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 ((x - 1)^3 - (x - 1)) dx + \int_1^2 [(x - 1) - (x - 1)^3] dx = \\ &= \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx + \int_1^2 (-x^3 + 3x^2 - 2x) dx = \left(\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right) \Big|_0^1 + \left(-\frac{x^4}{4} + x^3 - x^2\right) \Big|_1^2 = \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

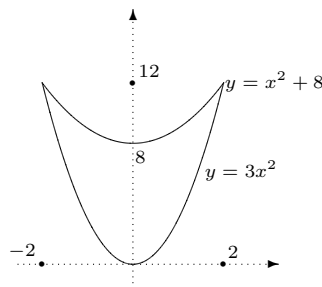


- c) $f(x) = 3x^2$ y $g(x) = x^2 + 8$, hay que determinar los puntos de intersección:

$$\begin{aligned} 3x^2 &= x^2 + 8 \implies 3x^2 - x^2 - 8 = 0 \implies 2x^2 - 8 = 0 \\ \implies 2(x + 2)(x - 2) &= 0 \implies x = -2 \text{ ó } x = 2. \end{aligned}$$

En el intervalo $[-2, 2]$, $g(x) \geq f(x)$, entonces:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^2 (x^2 + 8 - 3x^2) dx = \int_{-2}^2 (-2x^2 + 8) dx = \\ &= \left(-\frac{2}{3}x^3 + 8x\right) \Big|_{-2}^2 = \frac{64}{3}. \end{aligned}$$



Ejercicios de integrales: IV Parte Profs: Lester Izaguirre, Julio Céspedes

1. Calcule las siguientes integrales indefinidas donde a , b , m y n que aparecen en los integrandos son constantes:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \int \frac{dx}{\sqrt[n]{x}}. & \text{(h)} \int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{\sqrt{x}+1}}. \\
 \text{(b)} \int (nx)^{\frac{1-n}{n}} dx. & \text{(i)} \int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}} dx. \\
 \text{(c)} \int \left(a^{\frac{2}{3}} - t^{\frac{2}{3}}\right) dt. & \text{(j)} \int \frac{(x-1)^3}{\sqrt{x^2-2x+2}} dx. \\
 \text{(d)} \int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1) dx. & \text{(k)} \int (mx+b)^n dx, n \neq -1. \\
 \text{(e)} \int \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}} dx. & \text{(l)} \int \frac{2x+1}{x^2+2x+1} dx. \\
 \text{(f)} \int \frac{(x^m-x^n)^2}{\sqrt{x}} dx. & \text{(m)} \int \frac{x}{x^2-4x+4} dx. \\
 \text{(g)} \int 2t^3\sqrt{t^2-1} dt. &
 \end{array}$$

2. Calcule las siguientes integrales definidas:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \int_{-2}^2 (1-|x|) dx. & \text{(h)} \int_0^1 x(x+1)^n dx, n > 0. \\
 \text{(b)} \int_{-2}^2 |1-x| dx. & \text{(i)} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} dx. \\
 \text{(c)} \int_{-4}^3 [x] dx, [x] \text{ es la parte entera de } x. & \text{(j)} \int_0^5 |x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24| dx. \\
 \text{(d)} \int_{-2}^2 x\sqrt{x^2+1} dx. & \text{(k)} \int_{-1}^1 x^{11} e^{x^2} dx. \\
 \text{(e)} \int_0^1 8x(x^2+1)^3 dx. & \text{(l)} \int_{-a}^a f(x) dx, f \text{ impar: } f(-x) = -f(x). \\
 \text{(f)} \int_1^5 x^2 \sqrt[6]{x-1} dx. & \text{(m)} \int_{-2}^2 \frac{x^3+x^5}{\sqrt{17+x^6}} dx. \text{ Use el ejercicio 2l.} \\
 \text{(g)} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{\sqrt[3]{x}+1}} dx. &
 \end{array}$$

3. Encuentre una función f que satisfaga la ecuación diferencial que se da en cada caso:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} 2x^2\sqrt{x+1}y' + 2\sqrt{x+1} = x^2, \text{ donde } y = f(x). \\
 \text{(b)} 6\sqrt[6]{x^7}y' = \sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x}, \text{ donde } y = f(x).
 \end{array}$$

$$4. \text{ Calcule } \int_{-1}^4 f(x) dx, \text{ si } f(x) = \begin{cases} (2x+1)^5 & \text{si } x < 0 \\ (3x+1)^4 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ (4x+1)^3 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

5. Use el segundo Teorema Fundamental del Cálculo para obtener F' , si:

$$(a) \quad F(x) = \int_1^x e^{t^2} dt.$$

$$(b) \quad F(x) = x^3 \cdot \int_1^x e^{t^2} dt.$$

$$(c) \quad F(x) = \int_x^1 e^{t^2} dt.$$

$$(d) \quad F(x) = \int_x^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^4} dt.$$

$$(e) \quad F(x) = \int_x^{\frac{1}{x}} (t^2 - 1)^5 dt.$$

$$(f) \quad F(x) = \frac{1}{1+x^2} \int_{x^2}^{x^4} \frac{1}{1+t} dt.$$

Soluciones de ejercicios de integrales: IV Parte Profs: Lester Izaguirre, Julio Céspedes

1. Calcule las siguientes integrales indefinidas donde a , b , m y n que aparecen en los integrandos son constantes:

$$(a) \int \frac{dx}{\sqrt[n]{x}} = \int \frac{dx}{x^{1/n}} = \int x^{-1/n} dx = \frac{x^{-\frac{1}{n}+1}}{-\frac{1}{n}+1} + C = \frac{nx^{\frac{n-1}{n}}}{n-1} + C, n \neq 1.$$

$$(b) \int (nx)^{\frac{1-n}{n}} dx = \int n^{\frac{1-n}{n}} x^{\frac{1-n}{n}} dx = n^{\frac{1-n}{n}} \int x^{\frac{1-n}{n}} dx = n^{\frac{1-n}{n}} \frac{x^{\frac{1-n}{n}+1}}{\frac{1-n}{n}+1} + C = \\ n^{\frac{1-n}{n}} nx^{\frac{1}{n}} + C = n^{\frac{1}{n}} x^{\frac{1}{n}} + C.$$

$$(c) \int \left(a^{\frac{2}{3}} - t^{\frac{2}{3}} \right) dt = \int a^{\frac{2}{3}} dt - \int t^{\frac{2}{3}} dt = a^{\frac{2}{3}} \int dt - \int t^{\frac{2}{3}} dt = a^{\frac{2}{3}} t - \frac{t^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C = a^{\frac{2}{3}} t - \frac{3t^{\frac{5}{3}}}{5} + C.$$

$$(d) \int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) dx = \int (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x}^2 - \sqrt{x} \cdot 1 + 1^2) dx = \int (\sqrt{x}^3 + 1^3) dx = \\ \int (x^{\frac{3}{2}} + 1) dx = \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} + x + C.$$

$$(e) \int \frac{(x^2 + 1)(x^2 - 2)}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int \frac{(x^4 - x^2 - 2)}{x^{\frac{2}{3}}} dx = \int x^{-\frac{2}{3}}(x^4 - x^2 - 2) dx = \\ \int (x^{\frac{10}{3}} - x^{\frac{4}{3}} - 2x^{-\frac{2}{3}}) dx = \frac{3x^{\frac{13}{3}}}{13} - \frac{3x^{\frac{7}{3}}}{7} - 6x^{\frac{1}{3}} + C.$$

$$(f) \int \frac{(x^m - x^n)^2}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{x^{2m} - 2x^{m+n} + x^{2n}}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}}(x^{2m} - 2x^{m+n} + x^{2n}) dx = \\ \int (x^{2m-\frac{1}{2}} - 2x^{m+n-\frac{1}{2}} + x^{2n-\frac{1}{2}}) dx = \frac{x^{2m+\frac{1}{2}}}{2m+\frac{1}{2}} - \frac{2x^{m+n+\frac{1}{2}}}{m+n+\frac{1}{2}} + \frac{x^{2n+\frac{1}{2}}}{2n+\frac{1}{2}} + C = \\ \frac{2x^{\frac{4m+1}{2}}}{4m+1} - \frac{4x^{\frac{2m+2n+1}{2}}}{2m+2n+1} + \frac{2x^{\frac{4n+1}{2}}}{4n+1} + C.$$

$$(g) I = \int 2t^3 \sqrt{t^2 - 1} dt = \int 2t \cdot t^2 \sqrt{t^2 - 1} dt = \int t^2 \sqrt{t^2 - 1} \cdot 2t dt.$$

Haga la sustitución $u = t^2 - 1 \Rightarrow u + 1 = t^2$, $du = 2t dt$, por lo tanto:

$$I = \int (u + 1) \sqrt{u} du = \int (u + 1) u^{\frac{1}{2}} du = \int (u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}}) du = \frac{2u^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3} + C = \\ \frac{2(t^2 - 1)^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{2(t^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}{3} + C.$$

$$(h) I = \int \frac{dx}{\sqrt{x} \sqrt{\sqrt{x} + 1}} = \int \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x} + 1}} \frac{dx}{\sqrt{x}},$$

tome la sustitución $u = \sqrt{x} + 1 \Rightarrow du = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \Rightarrow 2du = \frac{dx}{\sqrt{x}}$. Así:

$$\text{Sustituyendo esto en } I = \int \frac{1}{\sqrt{u}} 2du = 2 \int u^{-\frac{1}{2}} du = 2 \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 4u^{\frac{1}{2}} + C = 4\sqrt{\sqrt{x} + 1} + C.$$

$$(i) I = \int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}} dx = \int \frac{(x-1)dx}{\sqrt{x^2-2x+2}}.$$

Tome la sustitución $u = x^2 - 2x + 2 \Rightarrow du = (2x - 2)dx = 2(x - 1)dx \Rightarrow \frac{du}{2} = (x - 1)dx$.

$$\text{Así: } I = \int \frac{1}{2\sqrt{u}} du = \sqrt{u} + C = \sqrt{x^2 - 2x + 2} + C.$$

$$(j) I = \int \frac{(x-1)^3}{\sqrt{x^2-2x+2}} dx = \int \frac{(x-1)^2(x-1)dx}{\sqrt{x^2-2x+2}}.$$

Tome la sustitución $u = x^2 - 2x + 2 \Rightarrow u = x^2 - 2x + 1 + 1 \Rightarrow u = (x-1)^2 + 1 \Rightarrow u-1 = (x-1)^2$, por lo que $du = 2(x-1)dx \Rightarrow \frac{du}{2} = (x-1)dx$.

Así:

$$I = \int \frac{(u-1)\frac{du}{2}}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2} \int u^{-\frac{1}{2}}(u-1)du = \frac{1}{2} \int (u^{\frac{1}{2}} - u^{-\frac{1}{2}})du = \frac{1}{2} \left(\frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3} - 2u^{\frac{1}{2}} \right) + C =$$

$$\frac{u^{\frac{3}{2}}}{3} - u^{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 - 2x + 2)^3} - \sqrt{x^2 - 2x + 2} + C.$$

$$(k) I = \int (mx+b)^n dx. \text{ Tome la sustitución } u = mx+b \Rightarrow du = m dx \Rightarrow \frac{du}{m} = dx. \text{ Así:}$$

$$I = \int u^n \frac{du}{m} = \frac{1}{m} \int u^n du = \frac{1}{m} \frac{u^{n+1}}{n+1} + C = \frac{(mx+b)^{n+1}}{m(n+1)} + C.$$

$$(l) I = \int \frac{2x+1}{x^2+2x+1} dx = \int \frac{2x+1}{(x+1)^2} dx. \text{ Tome la sustitución } u = x+1 \Rightarrow u-1 = x \Rightarrow du = dx.$$

Sustituyendo esto en:

$$I = \int \frac{2(u-1)+1}{u^2} du = \int \frac{2u-1}{u^2} du = \int \left(\frac{2}{u} - u^{-2} \right) du = 2 \ln |u| + u^{-1} + C =$$

$$2 \ln |x+1| + \frac{1}{x+1} + C.$$

$$(m) I = \int \frac{x}{x^2-4x+4} dx = \int \frac{x}{(x-2)^2} dx. \text{ Tome la sustitución } u = x-2 \Rightarrow u+2 = x \Rightarrow du = dx.$$

Sustituyendo esto en:

$$I = \int \frac{u+2}{u^2} du = \int \left(\frac{1}{u} + 2u^{-2} \right) du = \ln |u| - 2u^{-1} + C = \ln |x-2| - \frac{2}{x-2} + C.$$

2. Calcule las siguientes integrales definidas:

$$(a) \int_{-2}^2 (1-|x|) dx = \int_{-2}^0 (1-|x|) dx + \int_0^2 (1-|x|) dx = \int_{-2}^0 (1+x) dx + \int_0^2 (1-x) dx =$$

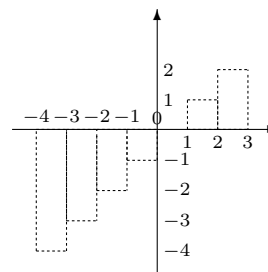
$$\left(x + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-2}^0 + \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^2 = 0.$$

$$(b) \int_{-2}^2 |1-x| dx = \int_{-2}^1 |1-x| dx + \int_1^2 |1-x| dx = \int_{-2}^1 (1-x) dx + \int_1^2 -(1-x) dx =$$

$$\left(x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-2}^1 + \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 = 5.$$

$$(c) \int_{-4}^3 [x] dx = \int_{-4}^{-3} [x] dx + \int_{-3}^{-2} [x] dx + \int_{-2}^{-1} [x] dx + \int_{-1}^0 [x] dx + \int_0^1 [x] dx + \int_1^2 [x] dx + \int_2^3 [x] dx.$$

Tome rectángulos, cada uno con uno de sus lados sobre la función parte entera y otro sobre el eje x como muestra la figura:



La integral será $-4 + -3 + -2 + -1 + 0 + 1 + 2 = -7$.

(d) $I = \int_{-2}^2 x\sqrt{x^2+1} dx$. Tome la sustitución $u = x^2 + 1 \Rightarrow du = 2x dx \Rightarrow \frac{du}{2} = x dx$. Al cambiar la variable x por u debe cambiar también los límites de integración.

Si $x = -2 \Rightarrow u = (-2)^2 + 1 = 5$, $x = 2 \Rightarrow u = 2^2 + 1 = 5$. Cambiando todo en la integral tenemos:

$$I = \int_5^5 \sqrt{u} \frac{du}{2} = 0.$$

(e) $I = \int_0^1 8x(x^2+1)^3 dx = \int_0^1 8(x^2+1)^3 x dx$. Tome la sustitución $u = x^2 + 1 \Rightarrow du = 2x dx \Rightarrow \frac{du}{2} = x dx$ al cambiar la variable x por u debe cambiar también los límites de integración.

Si $x = 0 \Rightarrow u = 0^2 + 1 = 1$, $x = 1 \Rightarrow u = 1^2 + 1 = 2$. Cambiando todo en la integral:

$$I = \int_1^2 8u^3 \frac{du}{2} = u^4 \Big|_1^2 = 2^4 - 1^4 = 16 - 1 = 15.$$

(f) $I = \int_1^5 x^2 \sqrt[6]{x-1} dx$. Tome la sustitución $u = x - 1 \Rightarrow u + 1 = x \Rightarrow du = dx$. Al cambiar la variable x por u debe cambiar también los límites de integración. Si $x = 1 \Rightarrow u = 1 - 1 = 0$, $x = 5 \Rightarrow u = 5 - 1 = 4$. Cambiando todo en la integral:

$$I = \int_0^4 (u+1)^2 \sqrt[6]{u} du = \int_0^4 (u^2 + 2u + 1) u^{\frac{1}{6}} du = \int_0^4 \left(u^{\frac{13}{6}} + 2u^{\frac{7}{6}} + u^{\frac{1}{6}} \right) du = \frac{6}{19} u^{\frac{19}{6}} + \frac{12}{13} u^{\frac{13}{6}} + \frac{6}{7} u^{\frac{7}{6}} \Big|_0^4 = \frac{6 \cdot 4^{\frac{19}{6}}}{19} + \frac{12 \cdot 4^{\frac{13}{6}}}{13} + \frac{6 \cdot 4^{\frac{7}{6}}}{7}.$$

(g) $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2} \sqrt[3]{\sqrt[3]{x}+1}}$. Tome la sustitución $u = \sqrt[3]{x} + 1 \Rightarrow du = d(x^{\frac{1}{3}} + 1) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} dx \Rightarrow 3du = \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$. Al cambiar la variable x por u debe cambiar también los límites de integración. Si $x = 0 \Rightarrow u = \sqrt[3]{0} + 1 = 1$, $x = 1 \Rightarrow u = \sqrt[3]{1} + 1 = 2$. Sustituyendo la variable x con la variable u en la integral:

$$I = \int_1^2 \frac{3du}{\sqrt[3]{u}} = \int_1^2 3u^{-\frac{1}{3}} du = \frac{9}{2} u^{\frac{2}{3}} \Big|_1^2 = \frac{9}{2} (2^{\frac{2}{3}} - 1).$$

(h) $I = \int_0^1 x(x+1)^n dx$. Tome el cambio de variable $u = x + 1 \Rightarrow u - 1 = x \Rightarrow du = dx$.

Si $x = 0 \Rightarrow u = 0 + 1 = 1$ y si $x = 1 \Rightarrow u = 1 + 1 = 2$. Cambiando esto en la integral se tiene

$$I = \int_1^2 (u-1)u^n dx = \int_1^2 (u^{n+1} - u^n) du = \left. \frac{u^{n+2}}{n+2} - \frac{u^{n+1}}{n+1} \right|_1^2 = \frac{2^{n+2}}{n+2} - \frac{2^{n+1}}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} \right).$$

(i) $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$. Tome el cambio de variable $u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx$.

Si $x = 0 \Rightarrow u = 1$ y si $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow u = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Cambiando esto en la integral se tiene

$$I = - \int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{du}{u^2} du = - \left(-\frac{1}{u} \right) \Big|_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} - 1.$$

(j) $\int_0^5 |x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24| dx$. Debemos analizar el signo de la expresión dentro del valor absoluto. Empecemos factorizando

$$\Gamma = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4).$$

Ahora haga una tabla de signos:

x	1	2	3	4
$x-1$	-	0	+	+
$x-2$	-	-	0	+
$x-3$	-	-	-	0
$x-4$	-	-	-	-
Γ	+	-	+	-

Para eliminar el valor absoluto divida el intervalo de integración

$$[0, 5] = [0, 1] \cup [1, 2] \cup [2, 3] \cup [3, 4] \cup [4, 5]$$

e integre sobre cada sub-intervalo. Sobre cada sub-intervalo conoce el signo de la expresión dentro del valor absoluto y así quita el símbolo de valor absoluto, multiplicando por $-$ ó $+$ según sea negativa o positiva respectivamente, para que el resultado sea positivo.

$$I = \int_0^1 (x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24) dx - \int_1^2 (x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24) dx + \int_2^3 (x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24) dx - \int_3^4 (x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24) dx + \int_4^5 (x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24) dx.$$

El cálculo es elemental y se deja al estudiante.

(k) $I = \int_{-1}^1 x^{11} e^{x^2} dx$. Tome la sustitución $u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx \Rightarrow \frac{du}{2} = x dx$.

Si $x = -1 \Rightarrow u = 1$ y si $x = 1 \Rightarrow u = 1$. Cambiando los límites de integración tenemos:

$$I = \int_{-1}^1 x^{10} x^1 e^{x^2} dx = \int_{-1}^1 (x^2)^5 e^{x^2} x dx = \int_1^1 u^5 e^u \frac{du}{2} = 0.$$

- (l) $I = \int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$. En la primera integral haga la sustitución $X = -x \Rightarrow dX = -dx$.

Si $x = -a \Rightarrow X = a$ y si $x = 0 \Rightarrow X = 0$, entonces:

$$\begin{aligned} I &= \int_a^0 f(-X)(-dX) + \int_0^a f(x)dx = -\int_a^0 f(-X)dX + \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(-X)dX + \int_0^a f(x)dx \\ &= \int_0^a -f(X)dx + \int_0^a f(x)dx = 0. \text{ Recuerde que } f(-X) = -f(X). \end{aligned}$$

(m) $I = \int_{-2}^2 \frac{x^3 + x^5}{\sqrt{17+x^6}}dx = \int_{-2}^0 \frac{x^3 + x^5}{\sqrt{17+x^6}}dx + \int_0^2 \frac{x^3 + x^5}{\sqrt{17+x^6}}dx$.

En la primera integral haga $X = -x \Rightarrow dX = -dx$, si $x = -2 \Rightarrow X = 2$ y si $x = 0 \Rightarrow X = 0$.

$$\begin{aligned} I &= \int_2^0 \frac{(-X)^3 + (-X)^5}{\sqrt{17+(-X)^6}}(-dX) + \int_0^2 \frac{x^3 + x^5}{\sqrt{17+x^6}}dx = \int_2^0 \frac{-X^3 - X^5}{\sqrt{17+X^6}}(-dX) + \int_0^2 \frac{x^3 + x^5}{\sqrt{17+x^6}}dx \\ &= \int_2^0 \frac{X^3 + X^5}{\sqrt{17+(X)^6}}dX + \int_0^2 \frac{x^3 + x^5}{\sqrt{17+x^6}}dx = -\int_0^2 \frac{X^3 + X^5}{\sqrt{17+(X)^6}}dX + \int_0^2 \frac{x^3 + x^5}{\sqrt{17+x^6}}dx = 0. \end{aligned}$$

3. a) $y' + \frac{2\sqrt{x+1}}{2x^2\sqrt{x+1}} = \frac{x^2}{2x^2\sqrt{x+1}} \Rightarrow y' + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2(x+1)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{x^2} \Rightarrow dy =$
 $\left(\frac{(x+1)^{-\frac{1}{2}}}{2} - x^{-2} \right) dx \Rightarrow \int dy = \int \left(\frac{(x+1)^{-\frac{1}{2}}}{2} - x^{-2} \right) dx \Rightarrow y = \sqrt{x+1} + \frac{1}{x} + C.$

b) $y' = \frac{3x^{\frac{2}{3}}}{6x^{\frac{7}{6}}} + \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{6x^{\frac{7}{6}}} \Rightarrow y' = \frac{1}{2}x^{\frac{2}{3}-\frac{7}{6}} + \frac{1}{3}x^{\frac{1}{2}-\frac{7}{6}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow$

$$\int dy = \frac{1}{2} \int x^{-\frac{1}{2}} dx + \frac{1}{3} \int x^{-\frac{2}{3}} dx \Rightarrow y = \frac{1}{2} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + C \Rightarrow y = x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}} + C.$$

4. $\int_{-1}^4 f(x)dx = \int_{-1}^0 f(x)dx + \int_0^2 f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx =$
 $\int_{-1}^0 (2x+1)^5 dx + \int_0^2 (3x+1)^4 dx + \int_2^4 (4x+1)^3 dx = \left[\frac{(2x+1)^6}{12} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{(3x+1)^5}{15} \right]_0^2 + \left[\frac{(4x+1)^4}{16} \right]_2^4 =$
 $\frac{1}{12} - \frac{1}{12} + \frac{16807}{15} - \frac{1}{15} + \frac{83521}{16} - \frac{6561}{16} = \frac{29652}{5}.$

5. a) $F'(x) = e^{x^2}.$

b) $F(x) = x^3 \int_1^x e^{t^2} dt \Rightarrow F'(x) = 3x^2 \int_1^x e^{t^2} dt + x^3 e^{x^2}.$

c) $F(x) = \int_x^1 e^{t^2} dt = -\int_1^x e^{t^2} dt \Rightarrow F'(x) = -e^{x^2}.$

d) $F'(x) = \frac{d}{dx} \int_x^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^4} dt = \frac{d}{dx} \int_x^0 \frac{dt}{1+t^4} + \frac{d}{dx} \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^4} = -\frac{1}{1+x^4} + \frac{1}{1+\frac{1}{x^4}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) =$
 $-\frac{1}{1+x^4} - \frac{1}{\frac{1+x^4}{x^4}} \cdot \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{1+x^4} - \frac{x^2}{1+x^4} = -\frac{1+x^2}{1+x^4}.$

$$\text{e) } F'(x) = \frac{d}{dx} \int_x^{\frac{1}{x}} (t^2 - 1)^5 dt = \frac{d}{dx} \int_x^1 (t^2 - 1)^5 dt + \frac{d}{dx} \int_1^{\frac{1}{x}} (t^2 - 1)^5 dt =$$

$$-(x^2 - 1)^5 + \left(\frac{1}{x^2} - 1\right)^5 \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -(x^2 - 1)^5 - \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{x^2} - 1\right)^5.$$

$$\text{f) } F(x) = \frac{1}{1+x^2} \int_{x^2}^{x^4} \frac{dt}{1+t}. \text{ Como } \frac{d}{dx} \left(\int_{x^2}^{x^4} \frac{dt}{1+t} \right) = \frac{d}{dx} \left(\int_{x^2}^1 \frac{dt}{1+t} + \int_1^{x^4} \frac{dt}{1+t} \right) =$$

$$\frac{d}{dx} \left(- \int_1^{x^2} \frac{dt}{1+t} \right) + \frac{d}{dx} \left(\int_1^{x^4} \frac{dt}{1+t} \right) = -\frac{1}{1+x^2} 2x + \frac{1}{1+x^4} 4x^3, \text{ por tanto:}$$

$$F'(x) = \frac{1}{1+x^2} \frac{d}{dx} \left(\int_{x^2}^{x^4} \frac{dt}{1+t} \right) - \frac{2x}{(1+x^2)^2} \int_{x^2}^{x^4} \frac{dt}{1+t} =$$

$$\frac{1}{1+x^2} \left(-\frac{2x}{1+x^2} + \frac{4x^3}{1+x^4} \right) - \frac{2x}{(1+x^2)^2} \int_{x^2}^{x^4} \frac{dt}{1+t}.$$

Ejercicios de integrales: V Parte Prof. Carlos González

1. Calcule las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{-3} \left(\frac{1}{u^2}\right) du$

b) $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^3} dx$

c) $\int (t^4 - t^2)^{\frac{1}{3}} (10t^3 - 5t) dt$

d) $\int (x^2 + 4)^3 6x dx$

e) $\int \frac{(u-2)(4u^2-6)}{u^2} du.$

2. Hallar:

a) $D_x \int \frac{2}{\sqrt{x^3+x+5}} dx$

b) $\int_0^3 D_x \sqrt{x^2+16} dx.$

3. Considere la integral $\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} dx.$

a) Encuentre un número que satisfaga la conclusión del Teorema del Valor Medio para la integral dada.

b) Encuentre el valor medio de f en $[0, 4]$.

4. Determinar el área bajo la gráfica de $f(x) = |9 - x^2|$ en el intervalo $[-4, 4]$.

5. Determinar el área de la región encerrada por las curvas:

a) $y - x = 6$, $y - x^3 = 0$ y $2y + x = 0$.

b) $2y^2 = x + 4$ y $x = y^2$.

Soluciones de ejercicios de integrales: V Parte Prof. Carlos González

1. Calcule las siguientes integrales:

$$\text{a) } \int \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{-3} \left(\frac{1}{u^2}\right) du \quad \text{Sustitución: } \begin{cases} v = 1 + \frac{1}{u} \\ \frac{dv}{du} = -\frac{1}{u^2} \Rightarrow -dv = \left(\frac{1}{u^2}\right)du. \end{cases}$$

$$\int v^{-3}(-dv) = -\int v^{-3} dv = \frac{1}{2}v^{-2} + C = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{u}\right)^{-2} + C.$$

$$\text{b) } \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^3} dx = \int_1^4 \frac{1}{(\sqrt{x}+1)^3} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = I.$$

$$\text{Sustitución: } \begin{cases} u = \sqrt{x} + 1 \\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow (2)du = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx. \end{cases}$$

Cambio de límites de integración:

Si $x = 1$, entonces $u = 2$.Si $x = 4$, entonces $u = 3$.

$$I = \int_2^3 \frac{1}{u^3}(2) du = -u^{-2} \Big|_2^3 = -\frac{1}{u^2} \Big|_2^3 = \frac{1}{u^2} \Big|_3^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{9} = \frac{5}{36}.$$

$$\text{c) } \int (t^4 - t^2)^{\frac{1}{3}} (10t^3 - 5t) dt. \quad \text{Sustitución: } \begin{cases} u = t^4 - t^2 \\ \frac{du}{dt} = 4t^3 - 2t \Rightarrow \left(\frac{5}{2}\right)du = (10t^3 - 5t)dt. \end{cases}$$

$$\int u^{\frac{1}{3}} \left(\frac{5}{2}\right) du = \left(\frac{5}{2}\right) \left(\frac{3}{4}\right) u^{\frac{4}{3}} + C = \frac{15}{8} u^{\frac{4}{3}} + C = \frac{15}{8} (t^4 - t^2)^{\frac{4}{3}} + C.$$

$$\text{d) } \int (x^2 + 4)^3 (6x) dx \quad \text{Sustitución: } \begin{cases} u = x^2 + 4 \\ \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow (3)du = (6x)dx \end{cases}$$

$$\int u^3 (3)du = (3) \left(\frac{1}{4}\right) u^4 + C = \frac{3}{4} (x^2 + 4)^4 + C.$$

$$\text{e) } \int \frac{(u-2)(4u^2-6)}{u^2} du = \int \frac{4u^3 - 8u^2 - 6u + 12}{u^2} du = \int (4u - 8 - 6u^{-1} + 12u^{-2}) du =$$

$$4\left(\frac{1}{2}u^2\right) - 8u - 6\ln|u| + 12(-u^{-1}) + C = 2u^2 - 8u - 6\ln|u| - \frac{12}{u} + C.$$

2. Hallar:

$$\text{a) } D_x \left(\int \frac{2}{\sqrt{x^3 + x + 5}} dx \right) = \frac{2}{\sqrt{x^3 + x + 5}}.$$

$$\text{b) } \int_0^3 D_x(\sqrt{x^2 + 16}) dx = [\sqrt{x^2 + 16}]_0^3 = \sqrt{25} - \sqrt{16} = 5 - 4 = 1.$$

3. Considere la integral $\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} dx$.

a) El valor medio de la función $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$ en el intervalo cerrado $[0, 4]$ es:

$$\bar{f} = \frac{1}{4-0} \int_0^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} dx = \frac{1}{4} \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} \cdot (x) dx.$$

Sustitución: $\begin{cases} u = x^2 + 9 \\ \frac{du}{dx} = 2x \implies (\frac{1}{2})du = (x)dx. \end{cases}$

Cambio de límites de integración: Si $x = 0$, entonces $u = 9$. Si $x = 4$, entonces $u = 25$.

$$\bar{f} = \frac{1}{4} \int_9^{25} \frac{1}{\sqrt{u}} \left(\frac{1}{2}\right) du = \frac{1}{4} [\sqrt{u}]_9^{25} = \frac{1}{2} = \bar{f}.$$

b) Puesto que la función $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$ es continua en el intervalo cerrado $[0, 4]$, el teorema del valor medio es aplicable.

Se concluye que existe al menos un número $c \in [0, 4]$ que cumple la ecuación $f(c) = \bar{f}$, es decir $\frac{c}{\sqrt{c^2+9}} = \frac{1}{2}$, entonces $2c = \sqrt{c^2+9} \implies 4c^2 = c^2+9 \implies c^2 = 3 \implies c = \sqrt{3}$, pues $c \in [0, 4]$. El número $c \in [0, 4]$ al que se refiere la conclusión del teorema es $c = \sqrt{3}$.

4. Determinar el área bajo la gráfica de $f(x) = |9 - x^2|$ en el intervalo $[-4, 4]$.

La función $f(x)$ cambia el signo en el intervalo $[-4, 4]$ en los números -3 y 3 , entonces:

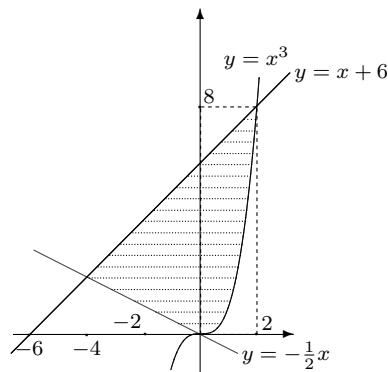
$$\begin{aligned} \text{Área de la región} &= \int_{-4}^4 |9 - x^2| dx = \int_{-4}^{-3} -(9 - x^2) dx + \int_{-3}^3 (9 - x^2) dx + \int_3^4 -(9 - x^2) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - 9x \right]_{-4}^{-3} + \left[9x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-3}^3 + \left[\frac{1}{3}x^3 - 9x \right]_3^4 = \frac{10}{3} + 36 + \frac{10}{3} = \frac{128}{3}. \end{aligned}$$

5. Determinar el área de la región encerrada por las curvas definidas por las siguientes ecuaciones:

$$\text{a) } \begin{cases} y = x + 6 \\ y = x^3 \\ y = -\frac{1}{2}x. \end{cases}$$

Área encerrada

$$\begin{aligned} &= \int_{-4}^0 [(x+6) - (-\frac{1}{2}x)] dx + \int_0^2 [(x+6) - x^3] dx \\ &= \int_{-4}^0 (\frac{3}{2}x + 6) dx + \int_0^2 (-x^3 + x + 6) dx \\ &= \left[\frac{3}{4}x^2 + 6x \right]_{-4}^0 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 6x \right]_0^2 = 12 + 10 = 22. \end{aligned}$$



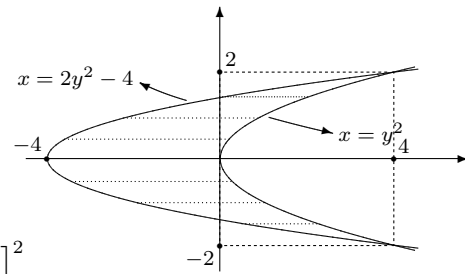
b) $2y^2 = x + 4$, $x = y^2$.

Despejando x en términos de y tenemos

$$x = 2y^2 - 4, \quad x = y^2 \implies 2y^2 - 4 = y^2 \implies y^2 = 4 \implies y = \pm 2.$$

Área encerrada

$$\begin{aligned} &= \int_{-2}^2 [y^2 - (2y^2 - 4)] dy = \int_{-2}^2 (4 - y^2) dy = \left[4y - \frac{1}{3}y^3 \right]_{-2}^2 \\ &= \frac{16}{3} - \left(-\frac{16}{3} \right) = \frac{32}{3}. \end{aligned}$$



Tema No. 6

Ejercicios de Funciones Exponenciales, Logarítmicas: I Parte

Profs. Roxana Meneses, Carlos González

1. Hallar la derivada en las siguientes funciones:

(a) $h(x) = \ln(x^2 + 3)$.

(d) $h(t) = \frac{\ln t}{t}$.

(g) $y = \ln |\sec x + \tan x|$.

(b) $y = x \ln x$.

(e) $y = \ln(\ln x)$.

(c) $y = \ln \sqrt{x^2 - 4}$.

(f) $y = \ln \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.

(h) $g(x) = \int_1^{\ln x} (t^2 + 3) dt$.

2. Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = 4 - x^2 - \ln\left(\frac{x}{2} + 1\right)$, en el punto $(0, 4)$.

3. Hallar $\frac{dy}{dx}$ mediante derivación implícita, de la ecuación $\ln xy + 5x = 30$.

4. Probar que la función $y = x \ln x - 4x$, es solución de la ecuación diferencial $x + y - xy' = 0$.

5. Hallar los valores extremos relativos y los puntos de inflexión de la función $y = x - \ln x$.

6. Hallar los valores extremos relativos y los puntos de inflexión de la función $y = x^2 \ln x$.

7. Hallar $\frac{dy}{dx}$ por derivación logarítmica de $y = \sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

8. Hallar $\frac{dy}{dx}$ por derivación logarítmica de $y = \sqrt[3]{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$.

9. Hallar $\frac{dy}{dx}$ por derivación logarítmica de $y = \frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)}$.

10. Decidir si la afirmación es correcta. Si no lo es, explicar la razón o exhibir un ejemplo que muestre su falsedad.

Si $y = \ln \pi$, entonces $y' = \frac{1}{\pi}$.

Soluciones de ejercicios de Funciones Exponenciales, Logarítmicas: I Parte

Profs. Roxana Meneses, Carlos González

1. Hallar la derivada en las siguientes funciones:

(a) $h(x) = \ln(x^2 + 3)$, $x^2 + 3 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$h'(x) = \frac{2x}{x^2 + 3}, \text{ pues } \frac{d}{dx} [\ln u] = \frac{u'}{u}, u > 0, \text{ donde } u = x^2 + 3 \text{ (composición de funciones).}$$

(b) $y = x \ln x$, para $x > 0$.

Usando la regla para la derivada de un producto se obtiene $\frac{dy}{dx} = x \cdot \frac{1}{x} + 1 \cdot \ln x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 + \ln x$.

(c) $y = \ln \sqrt{x^2 - 4}$, para $x \in]-\infty, 2[\cup]2, \infty[$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{2}(x^2 - 4)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x}{(x^2 - 4)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{x^2 - 4}, \text{ usando la regla para la composición de funciones}$$

y que $\frac{d}{dx} [\ln u] = \frac{u'}{u}$, $u > 0$, donde $u = \sqrt{x^2 - 4}$.

Si embargo, la derivación es más simple si antes se simplifica la función:

$$y = \frac{1}{2} \ln(x^2 - 4) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2 - 4} = \frac{x}{x^2 - 4}.$$

(d) $h(t) = \frac{\ln t}{t}$, $t > 0$.

$$h'(t) = \frac{t \cdot \frac{1}{t} - 1 \cdot \ln t}{t^2} = \frac{1 - \ln t}{t^2}, \text{ derivada de un cociente.}$$

(e) $y = \ln(\ln x)$, $x > 1$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}, \text{ pues } \frac{d}{dx} [\ln u] = \frac{u'}{u}, u > 0, \text{ donde } u = \ln x \text{ (composición de funciones).}$$

Finalmente $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln x}$.

(f) $y = \ln \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$, Dominio: $x \in]-\infty, -1[\cup]1, \infty[$.

Simplificando queda: $y = \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right) = \frac{1}{2} [\ln(x-1) - \ln(x+1)]$, entonces

$$y' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) = \frac{1}{2} \frac{(x+1) - (x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x^2 - 1}.$$

(g) $y = \ln |\sec x + \tan x|$, $\sec x + \tan x \neq 0$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sec x \tan x + \sec^2 x}{\sec x + \tan x}, \text{ pues } \frac{d}{dx} [\ln u] = \frac{u'}{u}, u > 0, \text{ donde } u = \sec x + \tan x.$$

Luego $\frac{dy}{dx} = \frac{\sec x (\tan x + \sec x)}{\sec x + \tan x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sec x$.

(h) $g(x) = \int_1^{\ln x} (t^2 + 3) dt$.

Sea $u = \ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$, por el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo

$$g'(x) = [(\ln x)^2 + 3] \cdot \frac{1}{x}, \text{ entonces } g'(x) = \frac{(\ln x)^2 + 3}{x}.$$

2. $f(x) = 4 - x^2 - \ln \left(\frac{x}{2} + 1 \right)$, $x > -2$.

$$f'(x) = -2x - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{x}{2} + 1} = -2x - \frac{1}{x+2} = -\frac{2x^2 + 4x + 1}{x+2}. \text{ En el punto } (0, 4), \text{ se tiene } f'(0) =$$

$$-\frac{1}{2} \Rightarrow m = -\frac{1}{2}, \text{ luego } y = -\frac{x}{2} + b \Rightarrow 4 = 0 + b \Rightarrow b = 4 \text{ y la recta tangente es } y = -\frac{x}{2} + 4.$$

3. $\ln xy + 5x = 30$.

Usando derivación implícita tenemos $\frac{y + xy'}{xy} + 5 = 0 \Rightarrow \frac{y + xy'}{xy} = -5 \Rightarrow y + xy' = -5xy \Rightarrow y' = \frac{-5xy - y}{x}$.

4. (i) $y = x \ln x - 4x \Rightarrow y' = 1 + \ln x - 4$.

(ii) $x + y - xy' = 0$, sustituyendo y y y' en el lado izquierdo de la ecuación diferencial dada se tiene, $x + (x \ln x - 4x) - x(1 + \ln x - 4) = x + x \ln x - 4x - x - x \ln x + 4x = 0$.

5. $y = x - \ln x, x > 0$.

$$y' = 1 - \frac{1}{x}, y' = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{x-1}{x} = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ (número crítico),}$$

$$y'' = \frac{1}{x^2} \text{ siempre es positiva.}$$

Para $x = 1, y = 1 - \ln 1 \Rightarrow y = 1 - 0 = 1$

x	0^+	1	$+\infty$
y'	-	+	
y''	+	+	
y			

Del cuadro de variación se observa que el gráfico de la función, no tiene puntos de inflexión y que $y(1) = 1$ es un valor mínimo relativo. Además, la función no tienen valores máximos relativos.

6. $y = x^2 \ln x$, para $x > 0$.

$y' = 2x \ln x + x, y' = x(2 \ln x + 1) = 0 \Rightarrow x = 0$ ó $2 \ln x + 1 = 0$. Note que $x = 0$ no está en el dominio.

Si $2 \ln x + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}$ (número crítico).

$y'' = 2 \ln x + 3 = 0 \Rightarrow \ln x = -\frac{3}{2} \Rightarrow x = e^{-\frac{3}{2}}$ (posible número de inflexión).

Para $x = e^{-\frac{3}{2}}, y = (e^{-\frac{3}{2}})^2 \ln e^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow y = -\frac{3}{2}e^{-3}$.

Para $x = e^{-\frac{1}{2}}, y = (e^{-\frac{1}{2}})^2 \ln e^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}e^{-1}$.

Entonces $(e^{-\frac{1}{2}}, -\frac{1}{2}e^{-1})$ Punto mínimo.

$(e^{-\frac{3}{2}}, -\frac{3}{2}e^{-3})$ Punto de inflexión.

x	0	$e^{-\frac{3}{2}}$	$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
y'	-	-	0	+
y''	-	0	+	+
y				

7. $y = \sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

$\ln y = \ln \sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}$, tomando logaritmo en ambos miembros.

$\ln y = \frac{1}{2}(\ln(x-1) + \ln(x-2) + \ln(x-3))$ (por propiedades de los logaritmos)

$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} \right)$ (derivando ambos miembros)

$y' = \frac{1}{2}y \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} \right)$ (despejando y')

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} \right)$ (sustituyendo y).

8. $y = \sqrt[3]{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$.

$$\ln y = \ln \sqrt[3]{\frac{x^2+1}{x^2-1}} \text{ (tomando logaritmo en ambos miembros)}$$

$$\ln y = \frac{1}{3}(\ln(x^2+1) - \ln(x^2-1)) \text{ (por propiedades de los logaritmos)}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{3} \left(\frac{2x}{x^2+1} - \frac{2x}{x^2-1} \right) \text{ (derivando ambos lados)}$$

$$y' = \frac{1}{3}y \left(\frac{2x}{x^2+1} - \frac{2x}{x^2-1} \right) \text{ (despejando } y')$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{x^2+1}{x^2-1}} \left(\frac{2x}{x^2+1} - \frac{2x}{x^2-1} \right) \text{ (sustituyendo } y).$$

$$9. \quad y = \frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)}.$$

$$\ln y = \ln \frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)} \text{ (tomando logaritmo en ambos miembros)}$$

$$\ln y = \ln(x+1) + \ln(x+2) - \ln(x-1) - \ln(x-2) \text{ (por propiedades de los logaritmos)}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} \text{ (derivando ambos lados)}$$

$$y' = y \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} \right) \text{ (despejando } y')$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} \right) \text{ (sustituyendo } y).$$

10. La afirmación es falsa, porque $\ln \pi$ es una constante, por tanto: si $y = \ln \pi \implies y' = 0$.

Ejercicios de Funciones Exponenciales, Logarítmicas: II Parte Prof. Carlos González

1. Derive las siguientes funciones:

- (a) $f(x) = \ln(x^2 + 3)$. (c) $h(x) = \ln |\sec x + \tan x|$. (e) $g(x) = x \cdot e^{\cos x}$.
 (b) $g(x) = \ln \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$. (d) $p(x) = e^{-x} \cos x$. (f) $r(x) = \frac{x^3}{x + e^{x^2}}$.

2. Use derivación logarítmica para calcular la derivada de las siguientes funciones:

- (a) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^3 + 8} \cdot \sqrt[4]{x^4 + 16}}{\sqrt{x^2 + 1}}$. (c) $h(x) = (x + 1)^x$.
 (b) $g(x) = (1 + 3x)^{\frac{1}{x}}$. (d) $p(x) = x^{\tan x}$.
 (e) $q(x) = 3^{x^2+1}$.

3. Considere la función definida en $[0, 1]$ así: $f(x) = \begin{cases} 10x^2 \ln x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

- (a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ y determine si el gráfico de $f(x)$ tiene asíntota vertical en $x = 0$.
 (b) Determine el valor mínimo de $f(x)$ en el intervalo $[0, 1]$.
 (c) Haga el cuadro de variación de $f(x)$ en $[0, 1]$.
 (d) Encuentre el punto de inflexión del gráfico de $f(x)$.
 (e) Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes al gráfico de $f(x)$ en el punto de inflexión, en el punto $(0, 0)$ y en el punto $(1, 0)$.
 (f) Haga el gráfico de $f(x)$. Utilice las rectas tangentes mencionadas en el punto anterior.

4. Considere la función $f(x) = \frac{2}{1 + e^{-x}}$, con $x \in]-\infty, +\infty[$.

- (a) Determine las ecuaciones de las rectas asíntotas horizontales del gráfico de $f(x)$.
 (b) Haga el cuadro de variación de $f(x)$ en $]-\infty, +\infty[$.
 (c) Encuentre el punto de inflexión del gráfico de $f(x)$.
 (d) Encuentre la ecuación de la recta tangente al gráfico de $f(x)$ en el punto de inflexión.
 (e) Haga el gráfico de $f(x)$. Utilice la recta tangente mencionada en el punto anterior y las dos rectas asíntotas horizontales.

5. Calcule las siguientes integrales:

- (a) $\int \frac{x e^{x^2}}{2 + e^{x^2}} dx$. (c) $\int \frac{1}{x \ln(x^2)} dx$. (e) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3} dx$.
 (b) $\int \frac{1}{x + \sqrt{x}} dx$. (d) $\int \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}(1 + x^{\frac{1}{3}})} dx$. (f) $\int \frac{x(x-2)}{(x-1)^3} dx$.

$$(g) \int_1^e \frac{1}{x + \ln(x^x)} dx.$$

$$(h) \int_2^8 \frac{1}{1 + \sqrt{2x}} dx.$$

$$(i) \int_1^4 \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} dx$$

Soluciones de ejercicios de Funciones Exponenciales, Logarítmicas: II Parte

Prof. Carlos González

1. Derive las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \ln(x^2 + 3)$.

$$f(x) = \ln u, \text{ con } u = x^2 + 3, u' = 2x \implies f'(x) = (\ln u)' = \frac{u'}{u} = \frac{2x}{x^2 + 3}.$$

(b) $g(x) = \ln \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \frac{1}{2} [\ln(x-1) - \ln(x+1)]$.

$$g'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) = \frac{1}{x^2 - 1}.$$

(c) $h(x) = \ln |\sec x + \tan x|$.

$$h(x) = \ln |u| \text{ con } u = \sec x + \tan x, \text{ se tiene:}$$

$$u' = (\sec x)' + (\tan x)' = \sec x \tan x + (\sec x)^2 \implies u' = \sec x (\sec x + \tan x).$$

$$h'(x) = (\ln |u|)' = \frac{u'}{u} = \frac{\sec x (\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} \implies h'(x) = \sec x.$$

(d) $p(x) = e^{-x} \cos x$.

$$p'(x) = (e^{-x})' \cdot \cos x + e^{-x} \cdot (\cos x)' = (-e^{-x}) \cdot \cos x + e^{-x} \cdot (-\sin x) = -e^{-x} (\cos x + \sin x).$$

(e) $g(x) = x \cdot e^{\cos x}$.

$$g'(x) = (x)' \cdot e^{\cos x} + x(e^{\cos x})' = (1) \cdot e^{\cos x} + x(e^{\cos x}) \cdot (-\sin x) = (1 - x \sin x) \cdot e^{\cos x}.$$

(f) $r(x) = \frac{x^3}{x + e^{x^2}}$.

$$r'(x) = \frac{(x^3)'(x + e^{x^2}) - x^3 \cdot (x + e^{x^2})'}{(x + e^{x^2})^2} = \frac{3x^2(x + e^{x^2}) - x^3(1 + 2x \cdot e^{x^2})}{(x + e^{x^2})^2} = \frac{2x^3 + (3x^2 - 2x^4) \cdot e^{x^2}}{(x + e^{x^2})^2}.$$

2. Use derivación logarítmica para calcular la derivada de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^3+8} \cdot \sqrt[4]{x^4+16}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{(x^3+8)^{\frac{1}{3}}(x^4+16)^{\frac{1}{4}}}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}} \implies \ln f(x) = \ln \left[\frac{(x^3+8)^{\frac{1}{3}}(x^4+16)^{\frac{1}{4}}}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}} \right] \implies$

$$\ln f(x) = \frac{1}{3} \ln(x^3+8) + \frac{1}{4} \ln(x^4+16) - \frac{1}{2} \ln(x^2+1).$$

Derivando ambos lados con respecto a x queda:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3x^2}{x^3+8} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4x^3}{x^4+16} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2+1} \implies f'(x) = \left(\frac{x^2}{x^3+8} + \frac{x^3}{x^4+16} - \frac{x}{x^2+1} \right) f(x) \implies$$

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{x^3+8} + \frac{x^3}{x^4+16} - \frac{x}{x^2+1} \right) \cdot \frac{\sqrt[3]{x^3+8} \cdot \sqrt[4]{x^4+16}}{\sqrt{x^2+1}}.$$

(b) $g(x) = (1+3x)^{\frac{1}{x}} \implies \ln g(x) = \ln(1+3x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \cdot \ln(1+3x) \implies \ln g(x) = \frac{\ln(1+3x)}{x}.$

Derivando ambos lados se obtiene:

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{[\ln(1+3x)]' \cdot x - [\ln(1+3x)](x)'}{x^2} \implies \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{\left(\frac{3}{1+3x} \right) x - \ln(1+3x)}{x^2} \implies$$

$$g'(x) = \frac{\left(\frac{3}{1+3x} \right) x - \ln(1+3x)}{x^2} \cdot (1+3x)^{\frac{1}{x}}.$$

- (c) $h(x) = (x+1)^x \Rightarrow \ln h(x) = \ln(x+1)^x = x \ln(x+1) \Rightarrow [\ln h(x)]' = [x \ln(x+1)]' \Rightarrow$
 $\frac{h'(x)}{h(x)} = (x)' \ln(x+1) + x [\ln(x+1)]' \Rightarrow h'(x) = \left[\ln(x+1) + \frac{x}{x+1} \right] \cdot h(x) \Rightarrow$
 $h'(x) = \left[\ln(x+1) + \frac{x}{x+1} \right] \cdot (x+1)^x.$
- (d) $p(x) = x^{\tan x} \Rightarrow \ln p(x) = \ln(x^{\tan x}) = (\tan x) \ln x \Rightarrow [\ln p(x)]' = [(\tan x) \ln x]' \Rightarrow$
 $\frac{p'(x)}{p(x)} = (\tan x)' \ln x + (\tan x)(\ln x)' \Rightarrow p'(x) = \left[(\sec x)^2 \cdot \ln x + \frac{\tan x}{x} \right] \cdot x^{\tan x}.$
- (e) $q(x) = 3^{x^2+1} \Rightarrow \ln q(x) = \ln(3^{x^2+1}) = (x^2+1) \cdot \ln 3$, entonces $[\ln q(x)]' = [(x^2+1) \cdot \ln 3]' \Rightarrow$
 $\frac{q'(x)}{q(x)} = (x^2+1)' \cdot \ln 3 = 2x \cdot \ln 3 \Rightarrow q'(x) = (2x \ln 3) \cdot 3^{x^2+1}.$

3. Considere la función definida en $[0, 1]$ así: $f(x) = \begin{cases} 10x^2 \cdot \ln x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

- (a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ y determine si el gráfico de $f(x)$ tiene recta asíntota vertical en $x = 0$.
 Del ejercicio 3 (anterior) tenemos que $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (10x^2 \ln x) =$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} [(10x)(x \ln x)] = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} 10x \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x \right) = 0 \cdot 0 = 0.$
 Puesto que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = f(0)$, tenemos que la función $f(x)$ es continua en $x = 0$, por lo tanto su gráfico no tiene recta asíntota vertical en $x = 0$.
- (b) Determine el valor mínimo de $f(x)$ en el intervalo $[0, 1]$.
 La derivada de $f(x)$ es: $f'(x) = (10x^2 \ln x)' = 10 \left[(2x) \ln x + (x^2) \frac{1}{x} \right] \Rightarrow$
 $f'(x) = 10(2x \ln x + x) \Rightarrow f'(x) = 10x(2 \ln x + 1).$
 Note que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 10x(2 \ln x + 1) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [20(x \ln x) + 10x] = 20(0) + 10(0) = 0 \Rightarrow$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$, entonces podemos decir que $f'(0) = 0$. Por lo tanto, $f'(x) = 0 \iff x = 0$ o $2 \ln x + 1 = 0 \Rightarrow x = 0$ o $x = e^{-\frac{1}{2}} \approx 0.607$. Además $f'(x)$ existe para todo $x \in [0, 1]$.
 El cuadro de crecimiento de $f'(x)$ en $[0, 1]$ es el siguiente:

x	0	$e^{-\frac{1}{2}}$	1
$f'(x)$	0	-	0
$f(x)$			

Claramente el valor mínimo de $f(x)$ en el intervalo $[0, 1]$ es $f(e^{-\frac{1}{2}}) = 10(e^{-\frac{1}{2}})^2 \ln e^{-\frac{1}{2}} =$
 $10(e^{-1}) \left(-\frac{1}{2} \right) = -5e^{-1} \Rightarrow f(e^{-\frac{1}{2}}) = -5e^{-1} \approx -1.839.$

- (c) Haga el cuadro de variación de $f(x)$ en $[0, 1]$.
 La segunda derivada de $f(x)$ es $f''(x) = [10x(2 \ln x + 1)]' = 10[(x)'(2 \ln x + 1) + x(2 \ln x + 1)'] =$
 $10 \left[(2 \ln x + 1) + x \left(\frac{2}{x} \right) \right] = 10(2 \ln x + 3) \Rightarrow f''(x) = 10(2 \ln x + 3) \Rightarrow f''(x) \text{ no existe si } x = 0.$
 $f''(x) = 0$ si $2 \ln x + 3 = 0 \iff x = e^{-\frac{3}{2}} \approx 0.223.$

El cuadro de variación de $f(x)$ en $[0, 1]$ es el siguiente:

x	0	$e^{-\frac{3}{2}}$	$e^{-\frac{1}{2}}$	1
$f'(x)$	0	-	0	+
$f''(x)$		-	+	+
$f(x)$	0	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$ 0

- (d) Encuentre el punto de inflexión del gráfico de $f(x)$.

Claramente $f(x)$ cambia su concavidad cuando $x = e^{-\frac{3}{2}}$, el punto de inflexión es $(e^{-\frac{3}{2}}, f(e^{-\frac{3}{2}}))$.
 $f(e^{-\frac{3}{2}}) = 10(e^{-\frac{3}{2}})^2 \ln e^{-\frac{3}{2}} = 10(e^{-3}) \left(-\frac{3}{2}\right) = -15e^{-3} \Rightarrow f(e^{-\frac{3}{2}}) = -15e^{-3} \approx -0.747 \Rightarrow$
 punto de inflexión $= (e^{-\frac{3}{2}}, -15e^{-3}) \approx (0.223, -0.747)$.

- (e) Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes al gráfico de $f(x)$ en el punto de inflexión, en el punto $(0, 0)$ y en el punto $(1, 0)$.

El punto de inflexión es $(e^{-\frac{3}{2}}, -15e^{-3})$: pendiente $= m = f'(e^{-\frac{3}{2}}) = 10(e^{-\frac{3}{2}})(2 \ln e^{-\frac{3}{2}} + 1) = 10(e^{-\frac{3}{2}})(-2) = -20e^{-\frac{3}{2}} \approx -4.463$. $f(e^{-\frac{3}{2}}) = -15e^{-3} \approx -0.747$.

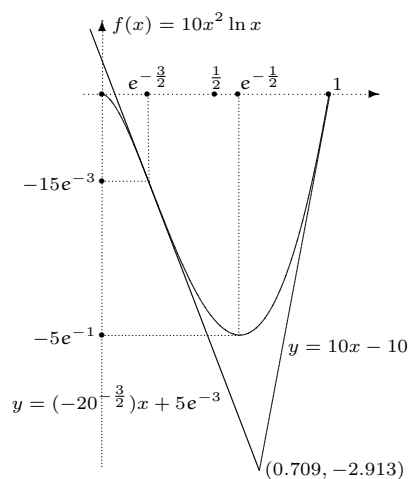
La ecuación es $y = f'(e^{-\frac{3}{2}}) \cdot (x - e^{-\frac{3}{2}}) + f(e^{-\frac{3}{2}}) \Rightarrow$

$$y = -20e^{-\frac{3}{2}}(x - e^{-\frac{3}{2}}) - 15e^{-3} \Rightarrow y = (-20e^{-\frac{3}{2}})x + 5e^{-3} \Rightarrow y = (-4.462 \dots)x + (0.2489 \dots).$$

En el punto $(0, 0)$ se tiene la pendiente $m = f'(0) = 0$, además $f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$, la ecuación es $y = f'(0) \cdot (x - 0) + f(0) \Rightarrow y = 0(x - 0) + 0 \Rightarrow y = 0$.

En el punto $(1, 0)$: pendiente $m = f'(1) = 10(1)(2 \ln 1 + 1) = 10$, $f(1) = 0$, la ecuación es $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$, $y = 10(x - 1) + 0 \Rightarrow y = 10x - 10$.

- (f) Haga el gráfico de $f(x)$. Utilice las rectas tangentes mencionadas en el punto anterior.



4. Considere la función $f(x) = \frac{2}{1 + e^{-x}}$, con $x \in]-\infty, +\infty[$.

- (a) Determine las ecuaciones de las rectas asíntotas horizontales del gráfico de $f(x)$.

Análisis cuando $x \rightarrow -\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{1 + e^{-x}} = \frac{2}{1 + e^{+\infty}} = \frac{2}{+\infty} = 0$, entonces la recta con ecuación $y = 0$ es una asíntota horizontal, cuando $x \rightarrow -\infty$.

Análisis cuando $x \rightarrow +\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{1 + e^{-x}} = \frac{2}{1 + e^{-\infty}} = \frac{2}{1 + 0} = 2 \Rightarrow$ que la recta con ecuación $y = 2$ es una asíntota vertical cuando $x \rightarrow +\infty$.

- (b) Haga el cuadro de variación de $f(x)$ en $] -\infty, +\infty [$.

La primera derivada es $f'(x) = \frac{2e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}$. Puesto que $e^{-x} > 0$, para todo $x \in] -\infty, +\infty [$ se

tiene que $f'(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, por lo tanto la función $f(x)$ es creciente en todo su dominio $\mathbb{R}$.

La segunda derivada es $f''(x) = \frac{2e^{-x}(e^{-x} - 1)}{(1 + e^{-x})^3}$, $f''(x)$ existe $\forall x \in]-\infty, +\infty[$ y $f''(x) = 0 \iff e^{-x} - 1 = 0 \iff e^{-x} = 1 \iff x = 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	+
$f''(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

- (c) Encuentre el punto de inflexión del gráfico de $f(x)$.

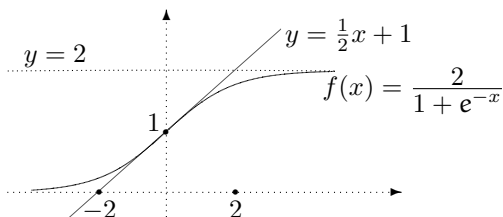
Claramente $f(x)$ cambia su concavidad cuando $x = 0$, el punto de inflexión es $(0, f(0)) = (0, 1)$.

- (d) Encuentre la ecuación de la recta tangente al gráfico de $f(x)$ en el punto de inflexión.

Pendiente $m = f'(0) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $f(0) = \frac{2}{2} = 1$.

La ecuación es $y = f'(0) \cdot (x - 0) + f(0) \implies y = \frac{1}{2}(x - 0) + 1 \implies y = \frac{1}{2}x + 1$.

- (e) Haga el gráfico de $f(x)$. Utilice la recta tangente mencionada en el punto anterior y las dos rectas asíntotas horizontales.



5. Calcule las siguientes integrales:

- (a) $\int \frac{xe^{x^2}}{2 + e^{x^2}} dx$. Sea $u = 2 + e^{x^2}$, entonces $\frac{du}{dx} = 2xe^{x^2} \implies \frac{1}{2} du = xe^{x^2} dx$. Así que:

$$\int \frac{xe^{x^2}}{2 + e^{x^2}} dx = \int \frac{1}{2 + e^{x^2}} \cdot (xe^{x^2} dx) = \int \frac{1}{u} \cdot \left(\frac{1}{2} du\right) = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} \ln |u| + C = \frac{1}{2} \ln |2 + e^{x^2}| + C.$$

Puesto que $2 + e^{x^2} > 0$, obtenemos: $\int \frac{xe^{x^2}}{2 + e^{x^2}} dx = \frac{1}{2} \ln(2 + e^{x^2}) + C$.

- (b) $\int \frac{1}{x + \sqrt{x}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)} dx = \int \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} dx = I$.

Sea $u = \sqrt{x} + 1$, entonces $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \implies 2du = \frac{1}{\sqrt{x}} dx$. Así que:

$$I = \int \frac{1}{u} (2du) = 2 \int \frac{1}{u} du = 2 \ln |u| + C = 2 \ln |\sqrt{x} + 1| + C.$$

Puesto que $\sqrt{x} + 1 > 0$, obtenemos $\int \frac{1}{x + \sqrt{x}} dx = 2 \ln(\sqrt{x} + 1) + C$.

$$(c) \int \frac{1}{x \ln(x^2)} dx = \int \frac{1}{x \ln|x|^2} dx = \int \frac{1}{2x \ln|x|} dx = \int \frac{1}{2 \ln|x|} \cdot \frac{1}{x} dx = I.$$

Sea $u = \ln|x|$, entonces $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \implies du = \frac{1}{x} dx$.

Así que $I = \int \frac{1}{2u} du = \frac{1}{2} \ln|u| + C = \frac{1}{2} \ln|\ln|x|| + C \implies \int \frac{1}{x \ln(x^2)} dx = \frac{1}{2} \ln|\ln|x|| + C$.

$$(d) \int \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}(1+x^{\frac{1}{3}})} dx = \int \frac{1}{1+x^{\frac{1}{3}}} \cdot \left(\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} dx\right) = I.$$

Sea $u = 1 + x^{\frac{1}{3}}$, entonces $\frac{du}{dx} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} \implies 3du = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} dx$. Así que:

$I = \int \frac{1}{u} (3du) = 3 \ln|u| + C = 3 \ln|1 + x^{\frac{1}{3}}| + C$, o sea $\int \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}(1+x^{\frac{1}{3}})} dx = 3 \ln|1 + x^{\frac{1}{3}}| + C$.

$$(e) \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} dx = I$$

Sea $u = \sqrt{x} - 3$, entonces $\sqrt{x} = u + 3 \implies x = (u + 3)^2$. Derivando x con respecto a u queda $\frac{dx}{du} = 2(u + 3) \implies dx = 2(u + 3) du$. Así que:

$$I = \int \frac{u+3}{u} \cdot 2(u+3) du = \int \frac{2(u+3)^2}{u} du = 2 \int \frac{u^2 + 6u + 9}{u} du = 2 \int \left(u + 6 + \frac{9}{u}\right) du =$$

$$u^2 + 12u + 18 \ln|u| + C' = (\sqrt{x} - 3)^2 + 12(\sqrt{x} - 3) + 18 \ln|\sqrt{x} - 3| + C' =$$

$$(x - 6\sqrt{x} + 9) + 12\sqrt{x} - 36 + 18 \ln|\sqrt{x} - 3| + C' = x + 6\sqrt{x} + 18 \ln|\sqrt{x} - 3| + C.$$

En conclusión, $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} dx = x + 6\sqrt{x} + 18 \ln|\sqrt{x} - 3| + C$.

$$(f) \int \frac{x(x-2)}{(x-1)^3} dx = I$$

Sea $u = x - 1$, entonces $\frac{du}{dx} = 1$, $du = dx$. Además $u = x - 1 \implies x = u + 1$, $x - 2 = u - 1$.

Así que $I = \int \frac{(u+1)(u-1)}{u^3} du = \int \frac{u^2-1}{u^3} du = \int \left(\frac{1}{u} - u^{-3}\right) du = \ln|u| + \frac{1}{2}u^{-2} + C =$

$$\ln|x-1| + \frac{1}{2}(x-1)^{-2} + C.$$

$$(g) \int_1^e \frac{1}{x + \ln(x^x)} dx = \int_1^e \frac{1}{x + x \ln x} dx = \int_1^e \frac{1}{x(1 + \ln x)} dx = \int_1^e \frac{1}{1 + \ln x} \cdot \frac{1}{x} dx = I.$$

Sea $u = 1 + \ln x$, entonces $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \implies du = \frac{1}{x} dx$. Los límites de integración cambian:

si $x = 1$, entonces $u = 1 + \ln 1 \implies u = 1$.

si $x = e$, entonces $u = 1 + \ln e = 2 \implies u = 2$.

Así que $I = \int_1^2 \frac{1}{u} du = \left(\ln u\right)\Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$.

En conclusión: $\int_1^e \frac{1}{x + \ln(x^x)} dx = \ln 2$.

$$(h) \int_2^8 \frac{1}{1 + \sqrt{2x}} dx = I$$

Sea $u = 1 + \sqrt{2x}$, entonces $\sqrt{2x} = u - 1 \implies 2x = (u - 1)^2 \implies x = \frac{1}{2}(u - 1)^2$. Derivando x con respecto a u obtenemos $\frac{dx}{du} = u - 1 \implies dx = (u - 1)du$.

Los límites de integración cambian:

Si $x = 2$, entonces $u = 1 + \sqrt{4} = 3 \implies u = 3$.

Si $x = 8$, entonces $u = 1 + \sqrt{16} = 5 \implies u = 5$.

$$\text{Así que } I = \int_3^5 \frac{1}{u} \cdot (u - 1) du = \int_3^5 \frac{u - 1}{u} du = \int_3^5 \left(1 - \frac{1}{u}\right) du = \left[u - \ln |u|\right]_3^5 = (5 - \ln 5) - (3 - \ln 3) = 2 + \ln 3 - \ln 5 = 2 + \ln \frac{3}{5}.$$

$$\text{En conclusión } \int_2^8 \frac{1}{1 + \sqrt{2x}} dx = 2 + \ln \frac{3}{5}.$$

$$(i) \int_1^4 \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} dx = I$$

Sea $u = 1 + \sqrt{x}$, entonces $\sqrt{x} = u - 1 \implies x = (u - 1)^2$. Derivando x con respecto a u queda $\frac{dx}{du} = 2(u - 1) \implies dx = 2(u - 1)du$. Además, $1 - \sqrt{x} = 1 - (u - 1) = 2 - u$. Los límites de integración cambian así:

Si $x = 1$, entonces $u = 1 + \sqrt{1} = 2 \implies u = 2$.

Si $x = 4$, entonces $u = 1 + \sqrt{4} = 3 \implies u = 3$.

$$\text{Así que } I = \int_2^3 \frac{2 - u}{u} \cdot 2(u - 1) du = \int_2^3 \frac{2(2 - u)(u - 1)}{u} du = \int_2^3 \frac{-2u^2 + 6u - 4}{u} du = \int_2^3 \left(-2u + 6 - \frac{4}{u}\right) du = \left(-u^2 + 6u - 4 \ln |u|\right) \Big|_2^3 = (-9 + 18 - 4 \ln 3) - (-4 + 12 - 4 \ln 2) = 1 - 4(\ln 3 - \ln 2) = 1 - 4 \ln \frac{3}{2}.$$

$$\text{Por lo tanto } \int_1^4 \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} dx = 1 - 4 \ln \frac{3}{2}.$$

Ejercicios de Funciones Exponenciales, Logarítmicas e Inversas: III Parte
Profs. Mario Murillo, Carlos González

1. Determine la función inversa de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{2x-3}{4}$ b) $f(x) = \sqrt{4-x} + 2$ c) $f(x) = \sqrt{2x-3}$ d) $f(x) = \frac{2}{x-2}$.

2. Determinar la función inversa de $f(x) = x^2 - 4x$.

3. Determine la función inversa de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \ln(2x+3)^3$. b) $f(x) = 3 + \ln \sqrt[3]{3x-3}$. c) $f(x) = \frac{e^{3x}-2}{3}$.
d) $f(x) = 10^{3x} - 2$.

4. Halle la ecuación de la recta tangente en el punto indicado.

a) $f(x) = \ln(x-1)$ en $x=2$ b) $f(x) = \ln x - 1$ en $x=1$ c) $f(x) = x - \ln x$, en $x=1$.

5. Use las propiedades de los logaritmos para derivar:

a) $f(x) = \sqrt{x^2+1} \sqrt[3]{x^2-1}$ b) $f(x) = \frac{(x^2-3)^3}{\sqrt{x^2+x+1}}$

6. Halle $\frac{dy}{dx}$ en los siguientes casos:

a) $y = x^3 3^x$ b) $y = (x+2)^{x+2}$ c) $y = \left(\frac{1}{x+1}\right)^{\frac{1}{x+1}}$

7. Cálculo de límites usando la regla de L'Hôpital.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$ b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$
c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+ax)^{\frac{1}{x}}, a \in \mathbb{R}$ d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{n}} \ln x, n \in \mathbb{N}$.

Soluciones de ejercicios de Funciones Exponenciales, Logarítmicas e Inversas: III Parte Profs. Mario Murillo, Carlos González

1. Determine la función inversa de las siguientes funciones.

a) Dominio de $f : \mathbb{R}$, Ámbito de $f^{-1} : \mathbb{R}$. Dominio de $f^{-1} : \mathbb{R}$, Ámbito de $f^{-1} : \mathbb{R}$.

Escribimos: $\frac{2x-3}{4} = y$ y despejamos x : $2x - 3 = 4y \implies 2x = 4y + 3 \implies x = \frac{4y+3}{2}$, es decir $f^{-1}(y) = \frac{4y+3}{2}$, o bien, puesto que se puede usar cualquier letra para la variable $f^{-1}(x) = \frac{4x+3}{2}$.

b) Dominio $4 - x \geq 0 \implies x \leq 4$, entonces:

Dominio de $f :]-\infty, 4]$, Ámbito de $f : [2, +\infty[$, Dominio de $f^{-1} : [2, +\infty[$, Ámbito de $f^{-1} :]-\infty, 4]$.

Escribimos $\sqrt{4-x} + 2 = y \implies \sqrt{4-x} = y - 2 \implies 4 - x = (y-2)^2 \implies -x = (y-2)^2 - 4 \implies x = 4 - (y-2)^2 \implies x = 4 - y^2 + 4y - 4 \implies x = -(y^2 - 4y)$, es decir $f^{-1}(y) = -(y^2 - 4y)$.

Cambiando de variable: $f^{-1}(x) = -(x^2 - 4x)$.

c) Dominio: Se debe cumplir que $2x - 3 \geq 0 \implies x \geq \frac{3}{2}$, entonces

Dominio de $f : [\frac{3}{2}, +\infty[$, Ámbito de $f : [0, +\infty[$. Además: Dominio de $f^{-1} : [0, +\infty[$, Ámbito de $f^{-1} : [\frac{3}{2}, +\infty[$.

Sea $\sqrt{2x-3} = y$, tomamos cuadrados $2x - 3 = y^2$ y despejamos x : $2x = y^2 + 3 \implies x = \frac{y^2+3}{2}$, es decir $f^{-1}(y) = \frac{y^2+3}{2}$. Cambiamos de variable $f^{-1}(x) = \frac{x^2+3}{2}$.

d) Dominio de $f : \mathbb{R} \setminus \{2\}$, Ámbito de $f : \mathbb{R} \setminus \{0\}$. (Obsérvese que la función no puede "valer" 0).

Escribimos $\frac{2}{x-2} = y \implies \frac{2}{y} = x - 2 \implies \frac{2}{y} + 2 = x$, es decir $x = \frac{2+2y}{y} \implies f^{-1}(y) = \frac{2+2y}{y}$. Cambiando variable $f^{-1}(x) = \frac{2+2x}{x}$.

2. Considere la función $f(x) = x^2 - 4x$:

a) $f(x) = 0 \implies x = 0$ o $x = 4$.

b) Como se trata de una parábola, basta encontrar su eje de simetría $x = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$ y tomar por ejemplo el intervalo $[2, +\infty[$, en el cual la función f es creciente y por lo tanto invertible.

c) Para el intervalo $[2, +\infty[$, hacemos $x^2 - 4x = y$. Se debe despejar x en términos de y . Para esto, completamos cuadrados a la izquierda $x^2 - 4x = y \implies x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 = y+4$, luego $\sqrt{(x-2)^2} = |x-2| = \sqrt{y+4}$. Como en el intervalo dado, $|x-2| = x-2$, podemos escribir $x-2 = \sqrt{y+4} \implies x = 2 + \sqrt{y+4}$ y $f^{-1}(y) = 2 + \sqrt{y+4}$, cambiando de variable obtenemos $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x+4}$.

d) Comprobación: Se debe cumplir que $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$, es decir $f(f^{-1}(x)) = (f^{-1}(x))^2 - 4(f^{-1}(x)) = (\sqrt{x+4}+2)^2 - 4(\sqrt{x+4}+2) = (x+4) + 4\sqrt{x+4} + 4 - 4\sqrt{x+4} - 8 = x$.

3. Determine la función inversa de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \ln(2x+3)^3$. Escribimos $\ln(2x+3)^3 = y \implies 3\ln(2x+3) = y \implies \ln(2x+3) = \frac{y}{3}$, luego $2x+3 = e^{\frac{y}{3}} \implies 2x = e^{\frac{y}{3}} - 3 \implies x = \frac{e^{\frac{y}{3}} - 3}{2}$, de donde $f^{-1}(y) = \frac{e^{\frac{y}{3}} - 3}{2}$. Cambiando variable $f^{-1}(x) = \frac{e^{\frac{x}{3}} - 3}{2}$.

Comprobación: $f(f^{-1}(x)) = \ln(2f^{-1}(x)+3)^3 = 3\ln(2f^{-1}(x)+3) = 3\ln\left(2\frac{e^{\frac{x}{3}}-3}{2}+3\right) = 3\ln\left(e^{\frac{x}{3}}-3+3\right) = 3\ln\left(e^{\frac{x}{3}}\right) = 3\frac{x}{3} = x$.

b) $f(x) = 3 + \ln \sqrt[3]{3x-3}$. Escribimos: $3 + \ln \sqrt[3]{3x-3} = y \implies \ln(3x-3)^{\frac{1}{3}} = y-3 \implies \frac{1}{3}\ln(3x-3) = y-3 \implies \ln(3x-3) = 3(y-3) \implies \ln(3x-3) = 3y-9$, luego $3x-3 = e^{3y-9} \implies 3x = e^{3y-9} + 3 \implies x = \frac{e^{3y-9} + 3}{3}$, de donde $f^{-1}(y) = \frac{e^{3y-9} + 3}{3}$. O bien, cambiando de variable $f^{-1}(x) = \frac{e^{3x-9} + 3}{3}$.

Comprobación: $f(f^{-1}(x)) = 3 + \ln \sqrt[3]{3f^{-1}(x)-3} = 3 + \ln\left(\sqrt[3]{3\frac{e^{3x-9}+3}{3}-3}\right) = 3 + \ln \sqrt[3]{e^{3x-9}} = 3 + \ln(e^{3(x-3)})^{\frac{1}{3}} = 3 + \ln e^{3(x-3)} = 3 + \ln e^{(x-3)} = 3 + x - 3 = x$.

c) $f(x) = \frac{e^{3x}-2}{3}$. Escribimos $\frac{e^{3x}-2}{3} = y \implies e^{3x}-2 = 3y \implies e^{3x} = 3y+2$, luego $3x = \ln(3y+2) \implies x = \frac{\ln(3y+2)}{3}$, o bien $x = \ln(3y+2)^{\frac{1}{3}}$ o aún $x = \ln \sqrt[3]{3y+2}$, de donde $f^{-1}(y) = \ln \sqrt[3]{3y+2}$. Así, cambiando de variable $f^{-1}(x) = \ln \sqrt[3]{3x+2}$.

Comprobación: $f(f^{-1}(x)) = \frac{e^{3f^{-1}(x)}-2}{3} = \frac{e^{3\ln \sqrt[3]{3x+2}}-2}{3} = \frac{e^{\ln((\sqrt[3]{3x+2})^3)}-2}{3} = \frac{(\sqrt[3]{3x+2})^3-2}{3} = \frac{3x+2-2}{3} = \frac{3x}{3} = x$.

d) $f(x) = 10^{3x} - 2$. Escribimos $10^{3x} - 2 = y \implies 10^{3x} = y+2$, luego $3x = \log_{10}(y+2) \implies x = \frac{\log_{10}(y+2)}{3}$, es decir $x = \log_{10} \sqrt[3]{y+2}$. Entonces $f^{-1}(y) = \log_{10} \sqrt[3]{y+2}$ y cambiando de variable: $f^{-1}(x) = \log_{10} \sqrt[3]{x+2}$.

Comprobación: $f(f^{-1}(x)) = 10^{3f^{-1}(x)} - 2 = 10^{3\log_{10} \sqrt[3]{x+2}} - 2 = 10^{\log_{10}(\sqrt[3]{x+2})^3} - 2 = (\sqrt[3]{x+2})^3 - 2 = x + 2 - 2 = x$.

4. Halle la ecuación de la recta tangente.

a) $f(x) = \ln(x-1)$ en $x = 2$. Para hallar la pendiente de la tangente, primero derivamos:

$f'(x) = \frac{1}{x-1}$ y evaluamos en $x = 2$: $f'(2) = \frac{1}{2-1} = \frac{1}{1} = 1$, por lo tanto, $m = 1$. Luego el punto es: $f(2) = \ln(2-1) = \ln 1 = 0$. El punto es $(2, 0)$, por lo que b vale:

$b = y - mx = 0 - 1 \cdot 2 = -2$ y la recta es $y = x - 2$.

b) $f(x) = \ln x - 1$ en $x = 1$. Derivamos $f'(x) = \frac{1}{x}$ y evaluamos $f'(1) = \frac{1}{1} = 1 = m$. El punto es: $f(1) = \ln 1 - 1 = 0 - 1 = -1$, es decir es $(1, -1)$, por lo que $b = y - mx = -1 - 1 \cdot 1 = -1 - 1 = -2$. La recta es: $y = x - 2$.

c) $f(x) = x - \ln x$, en $x = 1$. Derivamos $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$ y evaluamos $f'(1) = 1 - \frac{1}{1} = 0 = m$. Es decir, la tangente en $x = 1$ es una recta horizontal. Luego $f(1) = 1 - \ln 1 = 1 - 0 = 1$, de donde la ecuación es $y = 1$.

5. Use las propiedades de los logaritmos para derivar.

a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \sqrt[3]{x^2 - 1}$. Escribimos $y = \sqrt{x^2 + 1} \sqrt[3]{x^2 - 1}$, luego $\ln y = \ln(\sqrt{x^2 + 1} \sqrt[3]{x^2 - 1}) = \ln \sqrt{x^2 + 1} + \ln \sqrt[3]{x^2 - 1} \Rightarrow \ln y = \ln(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + \ln(x^2 - 1)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \ln y = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + \frac{1}{3} \ln(x^2 - 1)$.

Luego, derivando a ambos lados, tendremos $\frac{y'}{y} = \frac{1}{2} \frac{1}{x^2 + 1} 2x + \frac{1}{3} \frac{1}{x^2 - 1} 2x \Rightarrow$

$\frac{y'}{y} = \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{2x}{3(x^2 - 1)}$, de donde $y' = y \left(\frac{x}{x^2 + 1} + \frac{2x}{3(x^2 - 1)} \right)$, es decir:

$$f'(x) = \sqrt{x^2 + 1} \sqrt[3]{x^2 - 1} \left(\frac{x}{x^2 + 1} + \frac{2x}{3(x^2 - 1)} \right).$$

Adicionalmente, si las raíces se reescriben en notación exponencial y se distribuyen dentro del paréntesis, la derivada queda: $f'(x) = \frac{x(x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}}{(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} + \frac{2x(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}{3(x^2 - 1)^{\frac{2}{3}}}$.

b) $f(x) = \frac{(x^2 - 3)^3}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$. Escribimos $y = \frac{(x^2 - 3)^3}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$, de donde $\ln y = \ln \left(\frac{(x^2 - 3)^3}{\sqrt{x^2 + x + 1}} \right) = 3 \ln(x^2 - 3) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + x + 1)$. Luego, derivando ambos lados:

$\frac{y'}{y} = 3 \frac{1}{x^2 - 3} 2x - \frac{1}{2} \frac{1}{x^2 + x + 1} (2x + 1)$, es decir $y'(x) = y \left(\frac{6x}{x^2 - 3} - \frac{2x + 1}{2(x^2 + x + 1)} \right)$, por lo que finalmente se escribe: $f'(x) = \frac{(x^2 - 3)^3}{\sqrt{x^2 + x + 1}} \left(\frac{6x}{x^2 - 3} - \frac{2x + 1}{2(x^2 + x + 1)} \right)$.

6. Halle $\frac{dy}{dx}$.

a) $y = x^3 3^x$. Se tiene que $\ln y = \ln(x^3 3^x) \Rightarrow \ln y = 3 \ln x + x \ln 3$, de donde $\frac{d}{dx} [\ln y] = \frac{d}{dx} [3 \ln x + x \ln 3] \Rightarrow \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{3}{x} + \ln 3 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y \left(\frac{3}{x} + \ln 3 \right) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x^3 3^x \left(\frac{3}{x} + \ln 3 \right)$, o bien $\frac{dy}{dx} = x^2 3^{x+1} + (\ln 3) x^3 3^x$.

b) $y = (x + 2)^{x+2}$. Escribimos $\ln y = \ln(x + 2)^{x+2} \Rightarrow \ln y = (x + 2) \ln(x + 2)$, de donde $\frac{d}{dx} [\ln y] = \frac{d}{dx} [(x + 2) \ln(x + 2)] = (x + 2)' \ln(x + 2) + (x + 2)(\ln(x + 2))' \Rightarrow \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \ln(x + 2) + \frac{x + 2}{x + 2} = \ln(x + 2) + 1$, lo que resulta en $\frac{dy}{dx} = y(\ln(x + 2) + 1)$, es decir $\frac{dy}{dx} = (x + 2)^{x+2} (\ln(x + 2) + 1)$.

c) $y = \left(\frac{1}{x+1} \right)^{\frac{1}{x+1}}$. Escribimos $\ln y = \ln \left(\frac{1}{x+1} \right)^{\frac{1}{x+1}} = \frac{1}{x+1} \ln \left(\frac{1}{x+1} \right) \Rightarrow \ln y = \frac{-\ln(x+1)}{x+1}$,

$$\begin{aligned} \text{de donde } \frac{d}{dx} [\ln y] &= \frac{d}{dx} \left[\frac{-\ln(x+1)}{x+1} \right] \Rightarrow \\ \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} &= \frac{(-\ln(x+1))'(x+1) - (-\ln(x+1))(x+1)'}{(x+1)^2} \Rightarrow \\ \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} &= \frac{-\frac{x+1}{x+1} + \ln(x+1)}{(x+1)^2} \Rightarrow \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{-1 + \ln(x+1)}{(x+1)^2}, \text{ de donde} \\ \frac{dy}{dx} &= \left(\frac{1}{x+1} \right)^{\frac{1}{x+1}} \left(\frac{-1 + \ln(x+1)}{(x+1)^2} \right). \end{aligned}$$

7. Cálculo de límites usando la regla de L'Hôpital.

La aplicación de la regla la indicamos con un * sobre el símbolo = correspondiente, así:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right), \text{ forma indeterminada } \infty - \infty \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} \stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 0 - 1}{(e^x - 1) + xe^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{(e^x - 1) + xe^x} \stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x + (1+x)e^x} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}, \text{ forma indeterminada } \frac{0^+}{0^+}$$

Sustitución: $u = \frac{1}{x}$. Tendencias: $x \rightarrow 0^+ \iff u \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{u \rightarrow +\infty} u e^{-u} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u}{e^u} \stackrel{*}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^u} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

$$\text{c) Sea } a \text{ un número real constante, } \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+ax)^{\frac{1}{x}}, \text{ forma indeterminada } (1)^{+\infty}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+ax)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln(1+ax)^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln(1+ax)}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+ax)}{x}} \stackrel{*}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{1+ax} a}{1}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a}{1+ax}} \\ &= e^a. \end{aligned}$$

$$\text{d) Sea } n \text{ un número entero positivo, } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{n}} \ln x, \text{ forma indeterminada } (0^+)(-\infty).$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{n}} \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-\frac{1}{n}}} \stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{n} x^{-\frac{1}{n}-1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-n x^{\frac{1}{n}}) = (-n) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{n}} = (-n)(0) = 0.$$

Ejercicios de Funciones Exponenciales, Logarítmicas e Inversas: IV Parte

Prof. Patricio Becerra

1. Calcule la siguiente integral $\int \frac{e^x}{(e^x + 1) \ln(e^x + 1)} dx$.
2. Calcular los siguientes límites:
 - a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_2(x^2 - x)$
 - b) $\lim_{x \rightarrow 5^+} \ln(x - 5)$.
3. Considere la función $f(x) = 5 - 4x^3$.
 - (a) Muestre que f es inyectiva,
 - (b) Calcule $g(x)$ y determine el dominio, con $g = f^{-1}$,
 - (c) Encuentre $g'(x)$ en donde $g = f^{-1}$,
 - (d) Calcule $g'(x)$ a partir de la fórmula obtenida en (b) y verifique que coincide con el resultado de la parte (c).
 - (e) Trace las gráficas de f y g .
4. Calcular la derivada de la función dada:
 - a) $y = \frac{4e^{-5x}}{-x^4 + 90}$
 - b) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + 2^{3x}$
 - c) $y = \ln \frac{x+1}{\sqrt{x-2}}$
 - d) $y = \log_{10}(x^3 e^{-3x})$.
5. Un cultivo de bacterias empieza con 1000 elementos y su tasa de crecimiento es proporcional al número de bacterias. Al cabo de dos horas la población es de 9000.
 - (a) Obtenga una expresión para el número de bacterias al cabo de t horas.
 - (b) Obtenga el número de bacterias después de 3 horas.
 - (c) Determine en qué tiempo se duplica el número de bacterias.

Soluciones de ejercicios de Funciones Exponenciales, Logarítmicas e Inversas: IV Parte Prof. Patricio Becerra

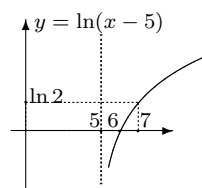
1. Calcule la siguiente integral $\int \frac{e^x}{(e^x + 1) \ln(e^x + 1)} dx$.

Sea $u = \ln(e^x + 1)$, entonces $du = \frac{1}{e^x + 1} e^x dx$ y $\int \frac{1}{\ln(e^x + 1)} \frac{1}{e^x + 1} e^x dx = \int \frac{du}{u} = \ln u + K = \ln(\ln(e^x + 1)) + K$.

2. Calcule los siguientes límites:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2(x^2 - x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 - x)}{\ln 2} = \\ &= \frac{1}{\ln 2} \lim_{x \rightarrow \infty} \ln[x(x-1)] = \frac{1}{\ln 2} \lim_{x \rightarrow \infty} [\ln x + \ln(x-1)] = \infty. \end{aligned}$$

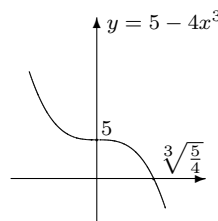
$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 5^+} \ln(x-5) = \ln(0^+) = -\infty.$$



3. Considere la función $f(x) = 5 - 4x^3$.

- a) Si $f(x) = 5 - 4x^3$, entonces $f'(x) = -12x^2$, $f'(x) = 0$, si $x = 0$. Tenemos que $f''(x) = -24x$, $f''(x) = 0$, si $x = 0$. Si se hace una tabla del comportamiento de $f(x)$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	5	$-\infty$



Si $f(x)$ es estrictamente decreciente, entonces no repite valores, es decir, es inyectiva. Por lo tanto es invertible.

- b) Sea $g(x) = f^{-1}(x)$; entonces $f(x) = 5 - 4x^3 \Rightarrow 5 - f(x) = 4x^3 \Rightarrow \frac{5 - f(x)}{4} = x^3 \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{5 - f(x)}{4}} = x$, por tanto $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{5 - x}{4}}$. Así, $g(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{4} \sqrt[3]{5 - x}} = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} (5 - x)^{\frac{1}{3}}$, Dominio = $\mathbb{R}$.

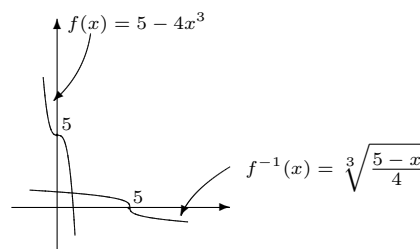
$$\text{c) } (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{-12(f^{-1}(x))^2}, \text{ por tanto } (f^{-1})'(x) = \frac{1}{-12 \left(\sqrt[3]{\frac{5 - x}{4}} \right)^2}.$$

$$\text{En conclusión } (f^{-1})'(x) = -\frac{\sqrt[3]{16}}{12 \sqrt[3]{(5 - x)^2}} = -\frac{2 \sqrt[3]{2}}{12 \sqrt[3]{(5 - x)^2}} = -\frac{\sqrt[3]{2}}{6 \sqrt[3]{(5 - x)^2}}.$$

- d) La derivada de la inversa es:

$$g'(x) = -\frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{1}{4}} (5 - x)^{-\frac{2}{3}} = -\frac{\sqrt[3]{16}}{12 \sqrt[3]{(5 - x)^2}}.$$

e) Gráfico de $f(x)$ y $f^{-1}(x)$.



4. Calcular la derivada de la función dada:

a) $y = \frac{4e^{-5x}}{-x^4 + 90}$.

$$y' = \frac{(-20e^{-5x})(-x^4 + 90) - 4e^{-5x}(-4x^3)}{(x^4 - 90)^2} = \frac{4e^{-5x}(5x^4 + 4x^3 - 450)}{(x^4 - 90)^2}.$$

b) $\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + 2^{3x} = y$.

$$y' = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} + 3(\ln 2)2^{3x} = \frac{\frac{2\sqrt{x^2 + 1} + 2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} + 3(\ln 2)2^{3x} =$$

$$\frac{2\sqrt{x^2 + 1} + 2x}{2\sqrt{x^2 + 1}(x + \sqrt{x^2 + 1})} + 3(\ln 2)2^{3x}.$$

c) $y = \ln \frac{x+1}{\sqrt{x-2}} = \ln(x+1) - \ln \sqrt{x-2} = \ln(x+1) - \frac{1}{2} \ln(x-2) \Rightarrow$

$$y' = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x-2)} = \frac{2x-4-x-1}{2(x+1)(x-2)} = \frac{x-5}{2(x+1)(x-2)}.$$

d) $y = \log_{10}(x^3 e^{-3x}) = \frac{\ln(x^3 e^{-3x})}{\ln 10} = \frac{1}{\ln 10}(\ln x^3 + \ln e^{-3x}) = \frac{1}{\ln 10}(3 \ln x - 3x) \Rightarrow$

$$y' = \frac{1}{\ln 10} \left(3 \frac{1}{x} - 3 \right) = \frac{1}{\ln 10} \left(\frac{3-x}{x} \right)$$

5. Un cultivo de bacterias empieza con 1000 elementos y su tasa de crecimiento es proporcional al número de bacterias. Al cabo de dos horas la población es de 9000. El modelo matemático es $y = ce^{kt}$, donde c es el cultivo inicial, k es la constante de proporcionalidad y t el tiempo transcurrido en horas, a partir del momento inicial.

— Si $t = 0$, $y = ce^{0k} \Rightarrow y(0) = c = 1000$.

— Si $t = 2$, $y = 9000 = 1000e^{2k}$, lo que implica $e^{2k} = 9$, por lo que $2k = \ln 9$, como $2k = \ln 3^2$, o sea $2k = 2 \ln 3$, se obtiene $k = \ln 3$.

(a) $y = 1000e^{t(\ln 3)}$.

(b) $y(3) = 1000e^{3(\ln 3)}$, si $t = 3$ horas.

$$y(3) = 1000e^{\ln 3^3} = 1000e^{\ln 27} = 27000, \text{ hay } 27000 \text{ bacterias (pues } e^{\ln 27} = 27).$$

(c) Si $y = 2000$, entonces $2000 = 1000e^{t(\ln 3)} \Rightarrow 2 = e^{\ln 3^t} \Rightarrow 2 = 3^t$, por tanto $\ln 2 = \ln 3^t$, sabemos $\ln 2 = t \ln 3$. Concluimos que el tiempo de duplicación $t = \frac{\ln 2}{\ln 3}$ horas.

Tema No. 7

Ejercicios de funciones trigonométricas y funciones trigonométricas inversas: I Parte Prof. Angel Ruiz

1. Calcule la primera derivada de la función, $y = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} + \arctan x \right)$.
2. Escriba la siguiente expresión en forma algebraica $\sec [\arcsen(x-1)]$.
3. Integre $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2x}}$.
4. Integre $\int \frac{dx}{\sqrt{4-6x-9x^2}}$.
5. Integre $\int \frac{\sqrt{x-2}}{x+1} dx$.

Soluciones de ejercicios de funciones trigonométricas y funciones trigonométricas inversas: I Parte Prof. Angel Ruiz

1. Calcule la primera derivada de la función $y = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} + \arctan x \right)$.

Solución La función se puede expresar como $y = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} [\ln(x+1) - \ln(x-1)] + \arctan x \right]$, luego derivando término por término, tenemos:

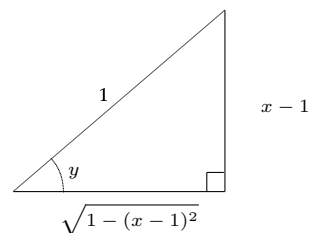
$$y' = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} \left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} \right] + \frac{1}{1+x^2} \right] = \frac{1}{8} \left[\frac{(x-1) - (x+1)}{(x+1)(x-1)} \right] + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1+x^2} \right) \\ = -\frac{1}{4(x+1)(x-1)} + \frac{1}{4(1+x^2)}.$$

2. Escriba la siguiente expresión en forma algebraica $\sec [\arcsen(x-1)]$.

Solución Sea $\arcsen(x-1) = y \Rightarrow \sen(\arcsen(x-1)) = \sen y \Rightarrow x-1 = \sen y$.

Construimos el triángulo rectángulo asociado. Como buscamos la secante de $y \Rightarrow \sec y = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$

$$\boxed{\sec y = \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}}.$$



3. Integre $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2x}}$.

Solución Vamos a completar cuadrados dentro de la raíz $x^2 - 2x = (x^2 - 2x + 1) - 1 = (x-1)^2 - 1$.

La integral se convierte en $\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{(x-1)^2 - 1}} dx$.

Si ponemos $u = x-1 \Rightarrow du = dx$ y la integral será $\int \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} du = \operatorname{arcsec}|u| + C = \operatorname{arcsec}|x-1| + C$.

4. Integre $\int \frac{dx}{\sqrt{4-6x-9x^2}}$.

Solución Completamos cuadrados

$$4-6x-9x^2 = 4-(9x^2+6x) = 4-(9x^2+6x+1-1) = 4-((3x+1)^2-1) = 4-(3x+1)^2+1 = 5-(3x+1)^2, \text{ entonces } I = \int \frac{dx}{\sqrt{4-6x-9x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{5-(3x+1)^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{5})^2-(3x+1)^2}}.$$

$$\text{Si } u = 3x+1 \Rightarrow du = 3dx, I = \frac{1}{3} \int \frac{du}{\sqrt{(\sqrt{5})^2-u^2}} = \arcsen\left(\frac{u}{\sqrt{5}}\right) + C =$$

$$\arcsen\left(\frac{3x+1}{\sqrt{5}}\right) + C.$$

5. Integre $\int \frac{\sqrt{x-2}}{x+1} dx$.

Solución Consideremos $u = \sqrt{x-2}$.

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x-2}} = \frac{1}{2u} \implies 2u du = dx \text{ y } x = u^2 + 2 \text{ (despejando de } u = \sqrt{x-2}\text{)}.$$

$$\int \frac{\sqrt{x-2}}{x+1} dx = \int \frac{u}{u^2+3} \cdot 2u du = 2 \int \frac{u^2 du}{u^2+3} = 2 \int \frac{(u^2+3-3) du}{(u^2+3)} = 2 \left[\int du - 3 \int \frac{du}{u^2+3} \right] =$$

$$2 \left[\int du - 3 \int \frac{du}{u^2 + (\sqrt{3})^2} \right] = 2 \left[u - 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{u}{\sqrt{3}} \right) \right] + C =$$

$$2\sqrt{x-2} - 2\sqrt{3} \arctan \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{3}} + C.$$

Ejercicios de funciones trigonométricas y funciones trigonométricas inversas: II Parte Profa. Gloria Bonilla

1. $\int \frac{1+x}{\sqrt{x}} dx$
2. $\int \frac{3}{\sqrt{5-5x^2}} dx$
3. $\int \frac{4^{-x+1} + 5^{-x+2}}{3^{-x-1}} dx$
4. $\int \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x} dx$
5. $\int e^x \operatorname{sen}(4e^x + 2) dx$
6. $\int \operatorname{sen}(\ln x) dx$
7. $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$
8. $\int \frac{x+2}{x^2+8x+7} dx$
9. $\int \left(\frac{x}{x^2-9x+8} \right)^2 dx$
10. $\int \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\cos x + \operatorname{sen} x + 8} dx$
11. $\int (nx)^{\frac{1-n}{n}} dx$
12. $\int \frac{dx}{x^2+7}$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{8-x^2}}$
14. $\int 3^x e^x dx$
15. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^6-1}}$

Soluciones de ejercicios de funciones trigonométricas y funciones trigonométricas inversas: II Parte Gloria Bonilla

$$1. \int \frac{1+x}{\sqrt{x}} dx = \int (x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}) dx = 2x^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = 2\sqrt{x} + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C.$$

$$2. \int \frac{3}{\sqrt{5-5x^2}} dx = \frac{3}{\sqrt{5}} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \arcsen x + C.$$

$$3. \int \frac{4^{-x+1} + 5^{-x+2}}{3^{-x-1}} dx = \int \frac{4^{-x} \cdot 4}{3^{-x} \cdot 3^{-1}} dx + \int \frac{5^{-x} \cdot 5^2}{3^{-x-1}} dx = 12 \int \left(\frac{4}{3}\right)^{-x} dx + 75 \int \left(\frac{5}{3}\right)^{-x} dx =$$

$$12 \int \left(\frac{3}{4}\right)^x dx + 75 \int \left(\frac{3}{5}\right)^x dx = \frac{12 \left(\frac{3}{4}\right)^x}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)} + \frac{75 \left(\frac{3}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{3}{5}\right)} + C.$$

$$4. \int \frac{1}{\sen x \cos x} dx = \int \frac{1}{\sen x \cos x} \cdot \left(\frac{\sen x}{\sen x}\right) dx = \int \frac{\sen x}{\sen^2 x \cos x} dx = \int \operatorname{cosec}^2 x \tan x dx =$$

$$\int \frac{\operatorname{cosec}^2 x}{\cot x} dx.$$

Sea $u = \cot x \implies du = -\operatorname{cosec}^2 x dx$, entonces se tiene $\int \frac{\operatorname{cosec}^2 x}{\cot x} dx = -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C = -\ln|\cot x| + C.$

$$5. \int e^x \sen(4e^x + 2) dx.$$

Sea $u = 4e^x + 2 \implies du = 4e^x dx \implies \frac{du}{4} = e^x dx.$

$$\int e^x \sen(4e^x + 2) dx = \frac{1}{4} \int \sen u du = -\frac{1}{4} \cos u + C = -\frac{1}{4} \cos(4e^x + 2) dx + C.$$

$$6. \int \sen(\ln x) dx.$$

Sea $u = \sen(\ln x) \implies du = \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$, entonces $\int \sen(\ln x) dx = x \sen(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx.$

Volviendo a aplicar el método de integración por partes se tiene que con $u = \cos(\ln x) \implies du = -\frac{\sen(\ln x)}{x} dx$, $du = dx$, $v = x \implies$

$$\int \sen(\ln x) dx = x \sen(\ln x) - [x \cos(\ln x) + \int \sen(\ln x) dx] \implies$$

$$\int \sen(\ln x) dx = x \sen(\ln x) - x \cos(\ln x) - \int \sen(\ln x) dx \implies$$

$$2 \int \sen(\ln x) dx = x \sen(\ln x) - x \cos(\ln x) + C' \implies$$

$$\int x \sen(\ln x) dx = \frac{x \sen(\ln x) - x \cos(\ln x)}{2} + C.$$

$$7. \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx.$$

Sea $u = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \implies \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = du$, entonces:

$$\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx = x \ln|x + \sqrt{1+x^2}| - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C.$$

$$8. \int \frac{x+2}{x^2+8x+7} dx$$

Aquí usamos el método de fracciones parciales: $\frac{x+2}{x^2+8x+7} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+7)} \Rightarrow A = \frac{1}{6}, B = \frac{5}{6}.$

$$\int \frac{x+2}{x^2+8x+7} dx = \frac{1}{6} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{5}{6} \int \frac{1}{x+7} dx = \frac{1}{6} \ln|x+1| + \frac{5}{6} \ln|x+7| + C.$$

$$9. \int \left(\frac{x}{x^2-9x+8} \right)^2 dx = \int \frac{x^2}{(x-1)^2(x-8)^2} dx, \text{ ya que } x^2-9x+8 = (x-1)(x-8).$$

$$\text{Además, } \frac{x^2}{(x-1)^2(x-8)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-8} + \frac{D}{(x-8)^2} \Rightarrow$$

$$x^2 = A(x-1)(x-8)^2 + B(x-8)^2 + C(x-1)^2(x-8) + D(x-1)^2.$$

$$\text{Si } x=1 \Rightarrow 1 = 49B \Rightarrow B = \frac{1}{49}, x=8 \Rightarrow 64 = 49D \Rightarrow D = \frac{64}{49}, x=0 \Rightarrow 8A+C = \frac{16}{49},$$

$$x=2 \Rightarrow 6A-C = \frac{16}{49}, \text{ se obtiene } A = \frac{16}{343}, C = -\frac{16}{343}. \text{ Así,}$$

$$\int \left(\frac{x}{x^2-9x+8} \right)^2 dx = \frac{16}{343} \ln|x-1| - \frac{1}{49(x-1)} - \frac{16}{343} \ln|x-8| - \frac{64}{49(x-8)} + C.$$

$$10. \int \frac{\sin x - \cos x}{\cos x + \sin x + 8} dx$$

Sea $u = \cos x + \sin x + 8 \Rightarrow du = -(\sin x - \cos x)dx$, entonces:

$$\int \frac{\sin x - \cos x}{\cos x + \sin x + 8} dx = -\ln|\cos x + \sin x + 8| + C.$$

$$11. \int (nx)^{\frac{1-n}{n}} dx = \int n^{\frac{1-n}{n}} x^{\frac{1-n}{n}} dx = \frac{n^{\frac{1-n}{n}} x^{\frac{1-n}{n}+1}}{\frac{1-n}{n}+1} + C = (nx)^{\frac{1}{n}} + C.$$

$$12. \int \frac{dx}{x^2+7} = \int \frac{dx}{x^2+(\sqrt{7})^2} = \frac{1}{\sqrt{7}} \arctan \frac{x}{\sqrt{7}} + C.$$

$$13. \int \frac{dx}{\sqrt{8-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{8})^2-x^2}} = \operatorname{arcsen} \frac{x}{2\sqrt{2}} + C.$$

$$14. I = \int 3^x e^x dx = \int (3e)^x dx$$

$$\text{Como } \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \Rightarrow I = \frac{(3e)^x}{\ln 3e} + C = \frac{3^x e^x}{1+\ln 3} + C.$$

$$15. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^6-1}}. \text{ Sea } x^3 = u, x^2 dx = \frac{du}{3} \text{ entonces se tiene:}$$

$$\frac{1}{3} \int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \frac{1}{3} \operatorname{arcsec} |u| + C = \frac{1}{3} \operatorname{arcsec} |x^3| + C.$$

También se puede resolver usando la sustitución $u = \sec \theta$, $du = \sec \theta \tan \theta d\theta$, por lo que:

$$\frac{1}{3} \int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \frac{1}{3} \int \frac{\sec \theta \tan \theta d\theta}{\sqrt{\sec^2 \theta - 1}} = \frac{1}{3} \ln |\sec \theta + \tan \theta| + C = \frac{1}{3} \ln |u + \sqrt{u^2-1}| + C =$$

$$\frac{1}{3} \ln |x^3 + \sqrt{x^6-1}| + C.$$

Ejercicios de funciones trigonométricas y funciones trigonométricas inversas: III Parte Profa. Coralia Malavasi

1. Trace la gráfica de $y = -2\operatorname{sen}(\frac{x}{2})$.

2. Calcule los siguientes límites, si existen:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(7x)}{\operatorname{sen}(3x)}.$

b) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{\tan h}.$

c) $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta^2}{1 - \cos \theta}.$

d) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5h}{\cos 7h - 1}.$

e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\tan x}.$

3. Calcule la derivada en cada función:

a) $f(x) = \tan(2x)^3.$

b) $g(x) = \tan^3(2x).$

c) $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}.$

d) $f(x) = \sqrt{\sec x \tan x}.$

e) $g(x) = \frac{\cot x}{1 + \csc x}.$

f) $g(x) = x^5 \sec(\frac{1}{x}).$

4. Calcule las siguientes integrales:

a) $\int \frac{2x+4}{x^3-2x^2} dx.$

b) $\int \sec x (\tan x + \cos x) dx.$

c) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx.$

d) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}} dx.$

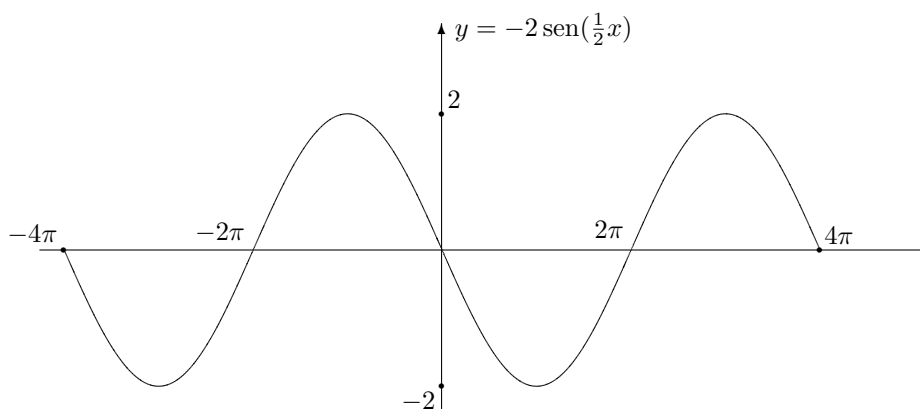
e) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} dx.$

f) $\int_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} \frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx.$

Soluciones de ejercicios de funciones trigonométricas y funciones trigonométricas inversas: III Parte Profa. Coralia Malavasi

1. Trace la gráfica de $y = -2\sin(\frac{x}{2})$. Período: $\frac{2\pi}{(\frac{1}{2})} = 4\pi$. Amplitud $|-2| = 2$.

x	0	π	2π	3π	4π
$f(x)$	0	-2	0	2	0



2. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 7x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\cos 7x} \cdot \frac{1}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} 7 \left(\frac{\sin 7x}{7x} \right) \cdot \frac{1}{\cos 7x} \cdot \frac{1}{\frac{3 \sin 3x}{3x}} = 7 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$.

b) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{\tan h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h}{1}}{\frac{\sin h}{\cos h}} = \lim_{h \rightarrow 0} \cos h \left(\frac{h}{\sin h} \right) = 1 \cdot 1 = 1$.

c) $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta^2}{1 - \cos \theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta^2}{1 - \cos \theta} \cdot \frac{1 + \cos \theta}{1 + \cos \theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta^2(1 + \cos \theta)}{1 - \cos^2 \theta} =$
 $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta^2(1 + \cos \theta)}{\sin^2 \theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{\theta}{\sin \theta} \right)^2 (1 + \cos \theta) = 1 \cdot 2 = 2$.

Nota: En b) y c) se puede aplicar la regla de L'Hôpital.

d) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5h}{\cos 7h - 1}$ Forma indeterminada $\frac{0}{0}$, se usa L'Hôpital.

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5h}{\cos 7h - 1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin 5h \cdot 5}{-\sin 7h \cdot 7} \text{ por L'Hôpital } = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos 5h \cdot 5 \cdot 5}{-\cos 7h \cdot 7 \cdot 7} = -\frac{1 \cdot 25}{1 \cdot 49} = -\frac{25}{49}$.

e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\tan x}$. Forma indeterminada 0^0 .

Si $y = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\tan x} \implies \ln y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x^{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\tan x}}$, que es de la forma

$\frac{\infty}{\infty}$ y podemos aplicar la regla de L'Hôpital.

$\ln y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\cot x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\csc^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin x}{x} \cdot \sin x = -1 \cdot 0 = 0 \implies$

$y = e^0 = 1$, por lo tanto $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\tan x} = 1$.

3. Calcule la derivada en cada función:

$$a) f(x) = \tan(2x)^3 = \tan(8x^3) \implies f'(x) = \sec^2(8x^3) \cdot 24x^2 = 24x^2 \sec^2(8x^3).$$

$$b) g(x) = \tan^3(2x) \implies g'(x) = 3 \tan^2(2x) \sec^2(2x) \cdot 2 = 6 \tan^2(2x) \sec^2(2x).$$

$$c) f(x) = \frac{\sec x}{x} \implies f'(x) = \frac{x \cos x - \sec x}{x^2}.$$

$$d) f(x) = \sqrt{\sec x \tan x} \implies f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\sec x \tan x}} \cdot (\sec x \tan x \tan x + \sec x \sec^2 x) = \frac{\sec x \tan^2 x + \sec^3 x}{2\sqrt{\sec x \tan x}}.$$

$$\begin{aligned} e) g(x) &= \frac{\cot x}{1 + \csc x} \implies g'(x) = \frac{-\csc^2 x(1 + \csc x) - \cot x(-\csc x) \cot x}{(1 + \csc x)^2} = \\ &= \frac{-\csc^2 x(1 + \csc x) + \cot^2 x \csc x}{(1 + \csc x)^2} = \frac{-\csc^2 x(1 + \csc x) + (\csc^2 x - 1) \csc x}{(1 + \csc x)^2} = \\ &= \frac{-\csc^2 x(1 + \csc x) + (\csc x + 1)(\csc x - 1) \csc x}{(1 + \csc x)^2} = \frac{(1 + \csc x)[- \csc^2 x + (\csc x - 1) \csc x]}{(1 + \csc x)^2} = \\ &= \frac{-\csc^2 x + \csc^2 x - \csc x}{1 + \csc x} = \frac{-\csc x}{1 + \csc x}. \end{aligned}$$

$$f) g(x) = x^5 \sec\left(\frac{1}{x}\right) \implies g'(x) = 5x^4 \sec\left(\frac{1}{x}\right) + x^5 \sec\left(\frac{1}{x}\right) \tan\left(\frac{1}{x}\right) \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 5x^4 \sec\left(\frac{1}{x}\right) - x^3 \sec\left(\frac{1}{x}\right) \tan\left(\frac{1}{x}\right).$$

4. Calcule las siguientes integrales:

$$a) \int \frac{2x+4}{x^3-2x^2} dx \quad \text{Se realiza por fracciones parciales.}$$

$$\begin{aligned} \frac{2x+4}{x^2(x-2)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-2} \iff \frac{2x+4}{x^2(x-2)} = \frac{Ax(x-2) + B(x-2) + Cx^2}{x^2(x-2)} \implies \\ 2x+4 &= Ax^2 - 2Ax + Bx - 2B + Cx^2 = Ax^2 + Cx^2 - 2Ax + Bx - 2B \implies 0x^2 + 2x + 4 = \\ &= (A+C)x^2 + (-2A+B)x - 2B. \end{aligned}$$

$$\text{Se comparan los coeficientes } -2B = 4 \implies B = -2, -2A + B = 2 \implies -2A - 2 = 2 \implies$$

$$-2A = 4 \implies A = -2, A + C = 0 \implies -2 + C = 0 \implies C = 2, \text{ por lo tanto:}$$

$$\frac{2x+4}{x^2(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-2} = \frac{-2}{x} + \frac{-2}{x^2} + \frac{2}{x-2} \implies \int \frac{2x+4}{x^2(x-2)} dx =$$

$$-\int \frac{2}{x} dx - \int \frac{2}{x^2} dx + \int \frac{2}{x-2} dx = -2 \ln|x| + \frac{2}{x} + 2 \ln|x-2| + C.$$

$$b) \int \sec x (\tan x + \cos x) dx = \int (\sec x \tan x + \sec x \cos x) dx =$$

$$\int \frac{\sec x}{\cos^2 x} dx + \int 1 dx = \sec x + x + C, \text{ pues se hizo en la primera integral } u = \cos x,$$

$$du = -\sin x dx, -du = \sin x dx \text{ y } -\int \frac{du}{u^2} = \frac{-u^{-1}}{-1} + C = \frac{1}{\cos x} + C = \sec x + C.$$

$$c) \int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx, u = e^x, du = e^x dx, \int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsen u + C = \arcsen e^x + C.$$

$$\text{d) } \int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2+4-4}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x^2-4x+4)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2^2-(x-2)^2}} =$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsen\left(\frac{u}{a}\right) + C = \arcsen\left(\frac{x-2}{2}\right) + C, \text{ usando } a=2, u=x-2, du=dx.$$

$$\text{e) } \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx, u = \sin x, du = \cos x.$$

$$\text{Si } x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow u = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ y si } x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 1.$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{du}{u^2} = \left. \frac{u^{-2+1}}{-2+1} \right|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 = -\frac{1}{u} \Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 = -\frac{1}{1} - \frac{-1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1 + \sqrt{2} = \sqrt{2} - 1.$$

$$\text{f) } \int_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} \frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx \quad u = \sqrt{x}, du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx. \text{ Si } x = \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow u = \frac{\pi}{2} \text{ y si } x = \pi^2 \Rightarrow u = \pi.$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos u du = \sin u \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \sin \pi - \sin \frac{\pi}{2} = 0 - 1 = -1.$$

Ejercicios de funciones trigonométricas y funciones trigonométricas inversas: IV Parte Prof. Rosendo Pizarro

1. Calcular los siguientes límites, si existen:

a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\tan x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{\sin nx}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin^{-1} x}{2x + \cos^{-1} x}$.

2. Calcule f' en cada caso:

a) $f(x) = \sin(-x^5 + 3x + 8)^3$

b) $f(x) = \frac{\tan^3(3x+8)}{x^2 - \cos x}$

c) $f(x) = \sec(\cot \sqrt{x+1})$

d) $f(x) = \cot^{-1}(x^5 - 4) - x^2 \sec^{-1}(6x)$

e) $f(x) = \sqrt{x - \cos^{-1}(x+2)}$.

3. Calcule las siguientes integrales:

a) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{\frac{\arcsen x}{1-x^2}} dx$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-6x-9x^2}}$

c) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-16}}$.

4. Trazar la gráfica de $y = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

5. Resuelva para x :

a) $2 \arcsen(2x-5) = \pi$

b) $2 \cos x + \sin 2x = 0$.

Soluciones de ejercicios de funciones trigonométricas y funciones trigonométricas inversas: IV Parte Prof. Rosendo Pizarro

1. Calcular los siguientes límites, si existen:

a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) \tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ es de la forma indeterminada $0 \cdot (-\infty)$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{\cotan\left(\frac{\pi}{2}x\right)} = (\text{L'Hôpital}) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{-\csc^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{-1\left(\frac{\pi}{2}\right)} = -\frac{2}{\pi}.$$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\tan x}$ es de la forma indeterminada 0^0 .

$$\begin{aligned} \text{Sea } y &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\tan x}, \text{ entonces } \ln y = \ln \left[\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\tan x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} [\tan x \ln \sin x] = \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\ln \sin x}{\cotan x} \right] &\stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\frac{1}{\sin x} \cdot \cos x}{-\csc^2 x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\cos x \sin^2 x}{-\sin x} \right] = \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\cos x \sin x}{-1} \right] &= \frac{\cos 0 \sin 0}{-1} = \frac{0}{-1} = 0 = \ln y \Rightarrow e^0 = 1 = y \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\tan x} = 1. \end{aligned}$$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{\sin nx} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(mx)(m)}{\cos(nx)(n)} = \frac{\cos 0}{\cos 0} \cdot \frac{m}{n} = \frac{1}{1} \cdot \frac{m}{n} = \frac{m}{n}.$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin^{-1} x}{2x + \cos^{-1} x}.$

Sea $y = \sin^{-1} x \Rightarrow \sin y = x$, entonces $x \rightarrow 0 \iff y \rightarrow 0$.

Sea $y = \cos^{-1} x \Rightarrow \cos y = x$, entonces $x \rightarrow 0 \iff y \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

Sustituyendo los valores, tenemos $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin^{-1} x}{2x + \cos^{-1} x} = \frac{2(0) - 0}{2(0) + \frac{\pi}{2}} = \frac{0 - 0}{0 + \frac{\pi}{2}} = \frac{0}{\frac{\pi}{2}} = 0.$

2. Calcule f' en cada caso:

a) $f(x) = \sin(-x^5 + 3x + 8)^3$ Sea $\mu = -x^5 + 3x + 8 \Rightarrow (\sin \mu^3)' = \cos \mu^3 (\mu^3)' = \cos \mu^3 (3\mu^2) \mu'.$

En términos de x tenemos $f'(x) = \cos(-x^5 + 3x + 8)^3 3(-x^5 + 3x + 8)^2 (-5x^4 + 3).$

b) $f(x) = \frac{\tan^3(3x + 8)}{x^2 - \cos x} = \frac{[\tan(3x + 8)]^3}{x^2 - \cos x}$

$$\begin{aligned} \text{La derivada } f'(x) &= \frac{(3 \tan^2(3x + 8) \sec^2(3x + 8)(3)(x^2 - \cos x) - (2x + \sin x) \tan^3(3x + 8))}{(x^2 - \cos x)^2} = \\ &= \frac{\tan^2(3x + 8) [9(x^2 - \cos x) \sec^2(3x + 8) - \tan(3x + 8)(2x + \sin x)]}{(x^2 - \cos x)^2}. \end{aligned}$$

c) $f(x) = \sec(\cot(\sqrt{x+1}))$ $f'(x) = \sec(\cot(\sqrt{x+1})) \operatorname{tg}(\cot(\sqrt{x+1}))(\cot(\sqrt{x+1}))' =$

$$\begin{aligned} &\sec(\cot(\sqrt{x+1})) \operatorname{tg}(\cot(\sqrt{x+1}))(-\csc^2(\sqrt{x+1}))(\sqrt{x+1})' = \\ &= -\sec(\cot(\sqrt{x+1})) \operatorname{tg}(\cot(\sqrt{x+1})) \csc^2(\sqrt{x+1}) \frac{1}{2\sqrt{x+1}}. \end{aligned}$$

d) $f(x) = (\cot^{-1}(x^5 - 4))' - x^2 \sec^{-1}(6x)$

$$f'(x) = \frac{-5x^4}{1 + (x^5 - 4)^2} - \left[2x \sec^{-1}(6x) + x^2 \left(\frac{6}{|6x| \sqrt{36x^2 - 1}} \right) \right].$$

e) $f(x) = \sqrt{x - \cos^{-1}(x+2)} = (x - \cos^{-1}(x+2))^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x - \cos^{-1}(x+2))^{-\frac{1}{2}}(x - \cos^{-1}(x+2))' =$$

$$\frac{1}{2}(x - \cos^{-1}(x+2))^{-\frac{1}{2}} \left[1 - \frac{-1}{\sqrt{1 - (x+2)^2}} \right] = \frac{1}{2}(x - \cos^{-1}(x+2))^{-\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{1}{\sqrt{1 - (x+2)^2}} \right].$$

3. Calcule las siguientes integrales:

a) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{\frac{\arcsen x}{1-x^2}} dx = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\sqrt{\arcsen x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Sea $\mu = \arcsen x$, $du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$, entonces $\arcsen 0 = 0$, $\arcsen \frac{\sqrt{2}}{2} = \mu \iff \frac{\sqrt{2}}{2} = \sen \mu \implies$

$$\mu = \frac{\pi}{4}. \text{ Así, tenemos } \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (\arcsen x)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mu^{\frac{1}{2}} d\mu =$$

$$\frac{2}{3} \mu^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{4} \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} (0)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{12} \pi^{\frac{3}{2}}.$$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-6x-9x^2}}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9(-x^2 - \frac{6}{9}x + \frac{4}{9})}} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{-1(x^2 + \frac{6}{9}x - \frac{4}{9})}} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{-1(x^2 + \frac{6}{9}x + \frac{1}{9} - \frac{1}{9} - \frac{4}{9})}} =$$

$$\frac{1}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{-1[(x + \frac{1}{3})^2 - \frac{5}{9}]}} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{5}{9} - (x + \frac{1}{3})^2}} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{(\frac{\sqrt{5}}{3})^2 - (x + \frac{1}{3})^2}} =$$

$$\frac{1}{3} \arcsen \left(\frac{x + \frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} \right) + C = \frac{1}{3} \arcsen \left(\frac{3x + 1}{\sqrt{5}} \right) + C.$$

c) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-16}}$

Sea $\mu = x^2$, $\mu^{\frac{1}{2}} = x$, $dx = \frac{1}{2}\mu^{-\frac{1}{2}}d\mu$, entonces $\int \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{(x^2)^2-16}} dx = \int \frac{\frac{1}{\mu^{\frac{1}{2}}}}{\sqrt{\mu^2-4^2}} \frac{d\mu}{2\mu^{\frac{1}{2}}} =$

$$\int \frac{d\mu}{2\mu^{\frac{1}{2}}\mu^{\frac{1}{2}}\sqrt{\mu^2-4^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{d\mu}{\mu\sqrt{\mu^2-4^2}} = \frac{1}{2} \operatorname{arcsec} \frac{\mu}{4} + C = \frac{1}{2} \operatorname{arcsec} \frac{x^2}{4} + C.$$

4. Trazar la gráfica de $y = \sen(x + \frac{\pi}{2})$.

El desplazamiento a la izquierda: $-\frac{\pi}{2}$ proviene de $x + \frac{\pi}{2} = 0 \implies x = -\frac{\pi}{2}$, (donde "inicia" la gráfica). Observe que:

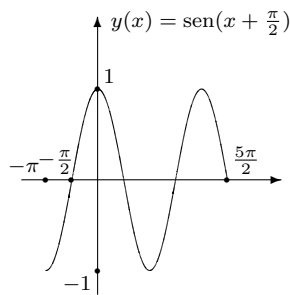
— si $x = -\frac{\pi}{2}$, $\sin(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \sin 0 = 0$, **par** $(-\frac{\pi}{2}, 0)$

— si $x = 0$, $\sin(0 + \frac{\pi}{2}) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$, **par** $(0, 1)$

— si $x = \frac{\pi}{2}$, $\sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \sin \pi = 0$, **par** $(\frac{\pi}{2}, 0)$

— si $x = \frac{3\pi}{2}$, $\sin(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = \sin 2\pi = 0$, **par** $(\frac{3\pi}{2}, 0)$

— si $x = \pi$, $\sin(\pi + \frac{\pi}{2}) = \sin \frac{3\pi}{2} = -1$, **par** $(\pi, -1)$.



Se observa que la gráfica de la función, es en realidad la gráfica de la función $\cos x$. En efecto, usando la fórmula de suma de ángulos, $y = \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \sin x \cos \frac{\pi}{2} + \cos x \sin \frac{\pi}{2} = \sin x(0) + \cos x(1) = \cos x$.

5. Resuelva para x :

a) $2 \arcsen(2x - 5) = \pi$. Como $f \circ f^{-1}(x) = x$ tenemos, $2 \arcsen(2x - 5) = \pi \implies \arcsen(2x - 5) = \frac{\pi}{2} \implies \sin(\arcsen(2x - 5)) = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \implies (2x - 5) = 1 \implies 2x = 6 \implies x = 3$.

b) $2 \cos x + \sin 2x = 0$. Dado que $2 \cos x + \sin 2x = 2 \cos x + 2 \sin x \cos x = 2 \cos x(1 + \sin x) = 0$.

— Si $\cos x = 0$, $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}^+$,

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}^+,$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}^-,$$

$$x = -\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}^-,$$

o bien $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

— Si $\sin x = -1$, $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}^+$,

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}^-,$$

o bien $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, es cual es equivalente a $x = \frac{\pi}{2} + (2k + 1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

El conjunto solución de la ecuación es la unión de las soluciones, es decir es el conjunto $\{x \in \mathbb{R} / x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Ejercicios de funciones trigonométricas y funciones trigonométricas inversas: V Parte Prof. Jorge Poltronieri

1. Integre usando partes

a) $\int x \cos x dx$

b) $\int x^2 \sin x dx$

c) $\int x^3 \cos x dx$

d) $\int \sin x \cos x dx$

e) $\int x \sin x \cos x dx$

f) $\int \ln x^2 dx$

g) $\int x^2 e^{-x} dx$

h) $\int \arcsen(2x) dx$

i) $\int \arctan(3x) dx$

j) $\int x \ln x dx$

k) $\int x \sec^2 2x dx$

l) $\int \sin(\ln x) dx$

m) $\int x^3 \ln x dx$

n) $\int \sin^2 x dx$

o) $\int e^{ax} \cos bx dx$

p) $\int x^5 \sin x^3 dx$

q) $\int \ln(1+x^2) dx$

r) $\int (\ln x)^2 dx$

s) $\int x \operatorname{arcsec} x dx$

t) $\int x^3 e^{2x} dx.$

Soluciones de ejercicios de funciones trigonométricas y funciones trigonométricas inversas: V Parte Prof. Jorge Poltronieri

1. Integre usando partes.

a) Sean $u = x$, $dv = \cos x dx \Rightarrow du = dx$, $v = \sin x \Rightarrow \int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx + C = x \sin x + \cos x + C$.

b) Sean $u = x^2$, $dv = \sin x dx \Rightarrow du = 2x dx$, $v = -\cos x \Rightarrow$
 $\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx + C = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$. (por a))

c) Sean $u = x^3$, $dv = \cos x dx \Rightarrow du = 3x^2 dx$, $v = \sin x \Rightarrow$
 $\int x^3 \cos x dx = x^3 \sin x - 3 \int x^2 \sin x dx + C = x^3 \sin x - 3(-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x) + C =$
 $x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - 6x \sin x - 6 \cos x + C$. (por b))

d) Sean $u = \sin x$, $dv = \cos x dx \Rightarrow du = \cos x dx$, $v = \sin x \Rightarrow$
 $\int \sin x \cos x dx = \sin^2 x - \int \sin x \cos x dx + C_1 \Rightarrow 2 \int \sin x \cos x dx = \sin^2 x + C_1 \Rightarrow$
 $\int \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \sin^2 x + C$.

e) Sean $I = \int x \cos x \sin x dx$, $u = x \Rightarrow du = dx$, $dv = \cos x \sin x dx$, $v = \frac{1}{2} \sin^2 x$ (por d))
 $\Rightarrow I = \frac{1}{2} x \sin^2 x - \frac{1}{2} \int \sin^2 x dx = \frac{1}{2} x \sin^2 x - \frac{1}{2} \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right] + C$ (por n))

f) Sean $u = \ln x^2$, $dv = dx \Rightarrow du = \frac{2x}{x^2} dx = \frac{2}{x} dx$, $v = x \Rightarrow$
 $\int \ln x^2 dx = x \ln x^2 - 2 \int dx + C = x \ln x^2 - 2x + C$.

g) Sean $u = x^2$, $dv = e^{-x} dx \Rightarrow du = 2x dx$, $v = -e^{-x} \Rightarrow \int x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} +$
 $2 \int x e^{-x} dx + C$.

Sean $m = x$, $dn = e^{-x} dx \Rightarrow dm = dx$, $n = -e^{-x} \Rightarrow \int x e^{-x} dx = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx =$
 $-x e^{-x} - e^{-x} \Rightarrow \int x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x} + C$.

h) Sean $u = \arcsen 2x$, $dv = dx \Rightarrow du = \frac{2dx}{\sqrt{1-4x^2}}$, $v = x \Rightarrow$
 $I = \int \arcsen 2x dx = x \arcsen x - 2 \int \frac{x dx}{\sqrt{1-4x^2}} + C$.

Sea $u = 1 - 4x^2 \Rightarrow du = -8x dx \Rightarrow -\frac{du}{8} = x dx \Rightarrow I = x \arcsen x + \frac{1}{4} \int \frac{du}{u^{\frac{1}{2}}}$ y como
 $\int \frac{du}{u^{\frac{1}{2}}} = \int u^{-\frac{1}{2}} du = 2\sqrt{u} + C \Rightarrow \int \arcsen 2x dx = x \arcsen x + \frac{1}{2} \sqrt{1-4x^2} + C$.

i) Sea $u = \arctan 3x$, $dv = dx$, entonces $du = \frac{3dx}{1+9x^2}$, $v = x \Rightarrow$

$$\int \arctan 3x \, dx = x \arctan 3x - 3 \int \frac{x \, dx}{1 + 9x^2} + C.$$

$$\text{Sea } t = x^2, \, dt = 2x \, dx \implies \int \frac{x \, dx}{1 + 9x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1 + 9t} = \frac{1}{18} \ln(1 + 9t) = \frac{1}{18} \ln(1 + 9x^2) \implies$$

$$\int \arctan 3x \, dx = x \arctan 3x - \frac{3}{18} \ln(1 + 9x^2) + C.$$

$$\text{j) Sean } u = \ln x, \, dv = x \, dx \implies du = \frac{dx}{x}, \, v = \frac{x^2}{2} \implies \int x \ln x \, dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2} \int x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C.$$

$$\text{k) Sean } u = x, \, dv = \sec^2 2x \, dx \implies du = dx, \, v = \frac{1}{2} \tan 2x \implies$$

$$\int x \sec^2 x \, dx = \frac{x}{2} \tan 2x - \frac{1}{2} \int \tan 2x \, dx + C = \frac{x}{2} \tan 2x + \frac{1}{4} \ln(\cos 2x) + C.$$

$$\text{l) Sean } u = \sin(\ln x), \, dv = dx \implies du = \frac{\cos(\ln x)}{x} dx, \, v = x \implies$$

$$\int \sin(\ln x) \, dx = x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x) \, dx + C.$$

$$\text{Sean } m = \cos(\ln x), \, dn = dx \implies dm = -\frac{\sin(\ln x)}{x} dx, \, n = x \implies$$

$$\int \cos(\ln x) \, dx = x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) \, dx \implies \int \sin(\ln x) \, dx =$$

$$x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x) - \int \sin(\ln x) \, dx + C \implies \int \sin(\ln x) \, dx = \frac{x}{2} (\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C_1.$$

$$\text{m) Sean } u = \ln x, \, dv = x^3 \, dx, \implies du = \frac{dx}{x}, \, v = \frac{x^4}{4} \implies$$

$$\int x^3 \ln x \, dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 \, dx + C = \frac{x^4}{4} \left(\ln x - \frac{1}{4} \right) + C.$$

$$\text{n) Sean } u = \sin x, \, dv = \sin x \, dx \implies du = \cos x \, dx, \, v = -\cos x \implies$$

$$\int \sin^2 x \, dx = -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \, dx + C = -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x) \, dx + C =$$

$$-\frac{\sin 2x}{2} + x - \int \sin^2 x \, dx + C \implies \int \sin^2 x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

$$\text{o) Sean } u = e^{ax}, \, dv = \cos bx \, dx \implies du = ae^{ax} \, dx, \, v = \frac{\sin bx}{b} \implies$$

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax} \sin bx}{b} - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx \, dx + C.$$

$$\text{Sean } m = e^{ax}, \, dn = \sin bx \, dx \implies dm = ae^{ax} \, dx, \, n = -\frac{\cos bx}{b} \implies$$

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax} \sin bx}{b} - \frac{a}{b} \left(-\frac{e^{ax} \cos bx}{b} + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx \, dx \right) + C =$$

$$\frac{e^{ax} \sin bx}{b} + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx - \left(\frac{a}{b} \right)^2 \int e^{ax} \cos bx \, dx + C \implies$$

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{\frac{1}{b} (e^{ax} \sin bx + \frac{a}{b} e^{ax} \cos bx)}{1 + \frac{a^2}{b^2}} + C_1 = \frac{be^{ax} (\sin bx + \frac{a}{b} \cos bx)}{a^2 + b^2} + C_1.$$

$$\text{p) Sean } u = x^3, \, dv = x^2 \sin x^3 \, dx, \, du = 3x^2 \, dx, \, v = -\frac{1}{3} \cos x^3 \implies$$

$$\int x^5 \cos x^3 dx = -\frac{x^3}{3} \cos x^3 + \int x^2 \cos x^3 dx + C = -\frac{x^3}{3} \cos x^3 + \frac{1}{3} \sin x^3 + C.$$

q) Sean $u = \ln(1+x^2)$, $dv = dx \Rightarrow du = \frac{2x dx}{1+x^2}$, $v = x \Rightarrow$

$$\int \ln(1+x^2) dx = x \ln(1+x^2) - 2 \int \frac{x^2}{1+x^2} dx + C =$$

$$x \ln(1+x^2) - 2 \left(\int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx \right) + C = x \ln(1+x^2) - 2x + 2 \int \frac{dx}{1+x^2} + C =$$

$$x \ln(1+x^2) - 2x + 2 \arctan x + C.$$

r) Sean $u = (\ln x)^2$, $dv = dx \Rightarrow du = \frac{2 \ln x}{x} dx$, $v = x \Rightarrow$

$$\int (\ln x)^2 dx = x (\ln x)^2 - 2 \int \ln x dx + C.$$

Sea $m = \ln x$, $dn = dx \Rightarrow \frac{dx}{x}$, $n = x \Rightarrow \int \ln x dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C \Rightarrow$

$$\int (\ln x)^2 dx = x (\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C.$$

s) Sean $u = \operatorname{arcsec} x$, $dv = x dx \Rightarrow du = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx$, $v = \frac{x^2}{2} \Rightarrow$

$$\int x \operatorname{arcsec} x dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arcsec} x - \frac{1}{2} \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx + C.$$

Sea $t = x^2 - 1 \Rightarrow dt = 2x dx \Rightarrow \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{t} + C = \sqrt{x^2-1} + C \Rightarrow$

$$\int x \operatorname{arcsec} x dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arcsec} x - \frac{1}{2} \sqrt{x^2-1} + C.$$

t) Sean $u = x^3$, $dv = e^{2x} dx \Rightarrow du = 3x^2 dx$, $v = \frac{e^{2x}}{2} \Rightarrow$

$$\int x^3 e^{2x} dx = \frac{x^3 e^{2x}}{2} - \frac{3}{2} \int x^2 e^{2x} dx + C.$$

Sea $m = x^2$, $dn = e^{2x} dx \Rightarrow dm = 2x dx$, $n = \frac{e^{2x}}{2} \Rightarrow \int x^2 e^{2x} dx = \frac{x^2 e^{2x}}{2} - \int x e^{2x} dx.$

Sean $t = x$, $ds = e^{2x} dx \Rightarrow dt = dx$, $s = \frac{e^{2x}}{2} \Rightarrow \int x e^{2x} dx = \frac{x e^{2x}}{2} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx =$

$$\frac{x e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} \Rightarrow \int x^3 e^{2x} dx = e^{2x} \left(\frac{1}{2} x^3 - \frac{3}{4} x^2 + \frac{3}{4} x - \frac{3}{8} \right) + C.$$

Exámenes

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

FACULTAD DE CIENCIAS

MATERIA: MA-1210. Cálculo I

ESCUELA DE MATEMÁTICA

II CICLO LECTIVO. 1999

— I Examen Parcial —

- I) Haga el estudio completo del gráfico de la función $f(x) = \frac{3x^2 - 12x}{x - 1}$.
- II) Calcule sin integrar $\int_{-3}^3 \sqrt{9 - x^2} dx$.
- III) Calcule el área comprendida entre las funciones $f(x) = 2x^2$, $g(x) = x^3$.
- IV) Calcule las siguientes integrales:
- a) $\int x\sqrt{x+5} dx$
 - b) $\int_{-1}^2 |x^2 - 1| dx$
 - c) $\int \frac{T}{(T^2 + 1)^3} dT$.
- V) Calcule la derivada $\frac{d}{dx} \left(\int_1^{x^2} \frac{t^2}{t+1} dt \right)$.
- VI) Determine el punto de la curva $y = x^2$ más próximo al punto $(3, 0)$.
- VII) Determine el valor $f(c)$ de la función $f(x) = x\sqrt{x+6}$ que satisface el Teorema del valor medio $\int_0^4 f(x) dx = f(c)(b-a)$.
- VIII) Determine $f(x)$ si $f''(x) = 5x$, $f'(1) = 2$, $f(2) = 5$.

Solución I Examen Parcial II ciclo 99 Prof. Ing. Alfonso Molina

I) $f(x) = \frac{3x^2 - 12x}{x - 1}$

1) $D_f : \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2) Crecimiento:

a) $f'(x) = \frac{3x^2 - 6x + 12}{(x - 1)^2}$, $D_{f'} : \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

b) Puntos críticos (máx, mín). $f'(x) = 0 \iff 3x^2 - 6x + 12 = 0$, pero $\Delta < 0 \implies$ no existe x tal que $f'(x) = 0$.

En conclusión NO EXISTEN puntos críticos (no hay ni máximos ni mínimos).

c) $f'(x) > 0$ SIEMPRE, pues el numerador siempre es positivo y el denominador también, por lo que $f(x) \nearrow$ para todo $x \in D_f$.

3) Concavidad:

a) $f''(x) = -\frac{18}{(x - 1)^3}$, $D_{f''} : \mathbb{R} \setminus \{1\}$

b) $f''(x) = 0$ NUNCA.

c) $f''(x) > 0 \iff (x - 1) < 0 \iff x < 1$, luego f es cóncava hacia arriba, si $x \in]-\infty, 1[$ y f es cóncava hacia abajo si $x \in]1, +\infty[$.

Nota: La concavidad cambia en $x = 1$, pero como este valor no pertenece al dominio de la función, entonces $x = 1$ no es punto de inflexión.

4) Asíntotas.

a) A.V. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x^2 - 12x}{x - 1} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2 - 12x}{x - 1} = +\infty$, entonces $x = 1$ es A.V.

b) A.H. $\lim_{x \rightarrow \mp\infty} f(x) = \pm\infty$, entonces no hay A.H.

c) A.O.

$\begin{array}{r} 3x^2 - 12x \\ -3x^2 + 3x \\ \hline -9x \\ 9x - 9 \\ \hline \end{array}$	$\left \begin{array}{l} x - 1, \text{ entonces } y = 3x - 9 \text{ es A.O.} \\ 3x - 9 \end{array} \right.$
---	---

5) Intersección con los ejes:

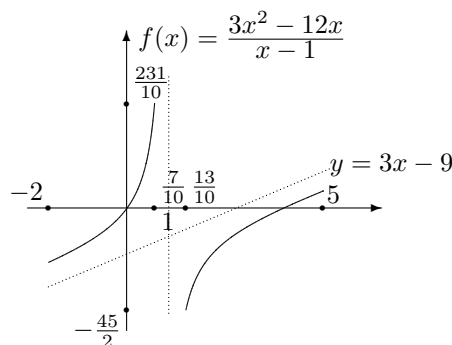
Intersección con el eje x : $(x, 0) \implies 3x(x - 4) = 0 \implies x = 0$ y $x = 4$, entonces $(0, 0)$ y $(4, 0)$ son las intersecciones.

Intersección con el eje y : $(0, y) = (0, 0)$.

6)

Tabla de signos

x	$-\infty$	0	1	4	$+\infty$
f'	+	+	+	+	+
f''	+	+	-	-	-
f	$\nearrow$	0	$\nearrow$	0	$\nearrow$



II) Es claro que la integral es el área de la mitad de un círculo.

$A_{\odot} = \pi r^2 = \pi(3)^2 = 9\pi$. El área del semicírculo será $\frac{1}{2}A = \frac{9}{2}\pi$, por lo que $\int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} dx = \frac{9}{2}\pi$.

III) $f(x) = 2x^2$, $g(x) = x^3$.

Igualemos ambas funciones para determinar donde se cortan: $f(x) = g(x) \iff 2x^2 - x^3 = 0 \iff x^2(2-x) = 0 \iff x = 0 \wedge x = 2$, o sea que $x = 0 \wedge x = 2$ son los límites de integración. Debemos saber cuál de las dos funciones es mayor en el intervalo $[0, 2]$. Tomemos $x = 1$, $f(1) = 2 \wedge g(1) = 1$, o sea que $f(x) > g(x)$. Entonces $A = \int_0^2 (2x^2 - x^3) dx = \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right) \Big|_0^2 = \left(\frac{2}{3}(2)^3 - \frac{1}{4}2^4 \right) - 0 = \frac{4}{3}$, o sea $A = \frac{4}{3}$.

IV) a) $\int x^2 \sqrt{x+5} dx$. Integramos por sustitución: Sea $u = x+5 \implies x = u-5$, $du = dx$

$$\int (u-5)^2 u^{\frac{1}{2}} du = \int (u^2 - 10u + 25) u^{\frac{1}{2}} du = \int (u^{\frac{5}{2}} - 10u^{\frac{3}{2}} + 25u^{\frac{1}{2}}) du = \frac{2}{7} u^{\frac{7}{2}} - 4u^{\frac{5}{2}} + \frac{50}{3} u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{7} (x+5)^{\frac{7}{2}} - 4(x+5)^{\frac{5}{2}} + \frac{50}{3} (x+5)^{\frac{3}{2}} + C.$$

b) $\int_{-1}^2 |x^2 - 1| dx$. Primero estudiemos el valor absoluto.

$$|x^2 - 1| = \begin{cases} (x^2 - 1) & \text{sii } x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\\ -(x^2 - 1) & \text{sii } x \in]-1, 1[. \end{cases}$$

Tenemos: $\int_{-1}^1 -(x^2 - 1) dx + \int_1^2 (x^2 - 1) dx = \int_{-1}^1 -(x^2 - 1) dx + \int_1^2 (x^2 - 1) dx = \left(-\frac{1}{3}x^3 + x \right) \Big|_{-1}^1 + \left(\frac{1}{3}x^3 - x \right) \Big|_1^2 = \frac{8}{3}.$

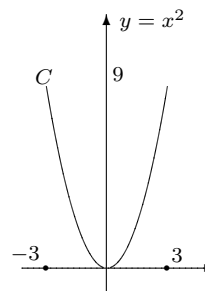
c) $\int \frac{T}{(T^2 + 1)^3} dT$. Sea $u = T^2 + 1$, $du = 2TdT \implies \frac{1}{2}du = TdT$,

$$\frac{1}{2} \int \frac{du}{u^3} = \frac{1}{2} \int u^{-3} du = -\frac{1}{4u^2} + C = -\frac{1}{4(T^2+1)^2} + C.$$

$$\text{V)} \frac{d}{dx} \left(\int_1^{x^2} \frac{t^2}{t+1} dt \right) = \frac{x^4}{x^2+1} 2x = \frac{2x^5}{x^2+1}.$$

VI) Hagamos una gráfica de $g(x) = x^2$. Sea $(x, y) \in C$, la distancia más próxima de $y = x^2$ al punto $(3, 0)$ será:
 $d = \sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2}$, como $y = x^2$ sustituimos en d .

$$d = \sqrt{(x-3)^2 + (x^2)^2} = \sqrt{x^2 - 6x + 9 + x^4} = \sqrt{x^4 + x^2 - 6x + 9}.$$



Como d es mínima cuando la expresión que está dentro de la raíz es mínima, necesitamos sólo hallar los números críticos de $f(x) = x^4 + x^2 - 6x + 9$.

$f'(x) = 4x^3 + 2x - 6$, $f'(x) = 0 \iff 4x^3 + 2x - 6 = 0$. Por división sintética se prueba que $x = 1$ es el único cero tal que $f' = 0$, es decir $x = 1$ es un valor crítico.

Utilizando el criterio de la segunda derivada tenemos: $f''(x) = 12x^2 + 2$, $f''(1) = 12(1) + 2 = 14 > 0$. $x = 1$ es un mínimo.

Luego $g(1) = 1^2 = 1$. $\therefore P = (1, 1)$ es el punto de la parábola más próximo al punto $(3, 0)$.

$$\text{VII)} g(x) = x\sqrt{x+6}$$

$$\text{a)} \int_0^4 x\sqrt{x+6} dx \text{ Integramos por sustitución.}$$

Sea $u = x + 6 \implies x = u - 6$, $du = dx$, si $x = 0$, $u = 6$ y si $x = 4$, $u = 10$:

$$\int_6^{10} (u-6)u^{\frac{1}{2}} du = \int_6^{10} (u^{\frac{3}{2}} - 6u^{\frac{1}{2}}) du = \left(\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} - 4u^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_6^{10} = \left[\frac{2}{5}(10)^{\frac{5}{2}} - 4(10)^{\frac{3}{2}} \right] - \left[\frac{2}{5}(6)^{\frac{5}{2}} - 4(6)^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{48}{5}\sqrt{6} \approx 23.52.$$

$$\text{b)} \text{ T.V.M. } \int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a), \text{ donde } f \text{ debe ser continua en } [a, b] \text{ y } a \leq c \leq b \implies \frac{48}{5}\sqrt{6} = c\sqrt{c+6}(4) \implies \frac{12}{5}\sqrt{6} = c\sqrt{c+6}, \text{ o sea } f(c) = \frac{12}{5}\sqrt{6}.$$

$$\text{VIII)} f''(x) = 5x, f'(1) = 2, f(2) = 5.$$

Si $f''(x) = 5x$, entonces $f'(x) = \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ puesto que $f'(1) = 2$, por lo que $f(x) = \frac{5}{6}x^3 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{3}$ y así $f(2) = 5$.

Parte de $f(x)$ se puede hallar integrando $f'(x)$: $\int (\frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{2})dx = \frac{5}{6}x^3 - \frac{1}{2}x + C$.

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

FACULTAD DE CIENCIAS

MATERIA: MA-1210. Cálculo I

ESCUELA DE MATEMÁTICA

II CICLO LECTIVO 1999

— III Examen Parcial —

1. Calcular los siguientes límites si existen:

a) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2 - \pi^2}.$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sen} x^{\tan x}.$

2. Un cultivo de bacterias empieza con 1000 elementos y su tasa de crecimiento es proporcional al número de bacterias. Al cabo de dos horas la población es de 9000.

a) Obtenga una expresión para el número de bacterias al cabo de t horas.

b) Obtenga el número de bacterias después de tres horas.

c) Determine en que tiempo se duplica el número de bacterias.

3. Calcular $f'(x)$ en cada caso:

a) $f(x) = \frac{1}{6} [\operatorname{arcsec}(2x - 3)]^6.$

b) $f(x) = e^{\operatorname{sen} x} + 8 \operatorname{cosec} 2x.$

c) $f(x) = 7\sqrt{x - \ln(x + 2)}.$

d) $f(x) = (\cot x)^{3x}$

4. Calcule las siguientes integrales:

a) $\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - 6x - 9x^2}}$

c) $\int \frac{x^2}{9 + x^2} dx$

d) $\int_2^4 \sqrt{x} \ln x dx$

e) $\int \frac{\sec x \tan x}{1 + \sec x} dx.$

Solución III Examen Parcial II ciclo 99 Prof. Rosendo Pizarro

1. Calcular los siguientes límites si existen:

a) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x^2 - \pi^2}$. Forma indeterminada $\frac{0}{0}$.

Por L'Hôpital tenemos: $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x}{2x - 0} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x}{2x} = \frac{\cos \pi}{2\pi} = -\frac{1}{2\pi}$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x^{\tan x}$. Forma indeterminada 0^0 .

Sea $y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x^{\tan x} \Rightarrow \ln y = \ln \left[\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\tan x} \right]$. Utilizando la continuidad del loga-

ritmo, escribimos: $\ln y = \lim_{x \rightarrow 0^+} [\tan x \ln(\sin x)]$, $\ln y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{\tan x}} \right]$.

Forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \ln y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\frac{1}{\sin x}(\cos x)}{-\csc^2 x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} \right] \Rightarrow$

$\ln y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[-\frac{\sin^2 x \cos x}{\sin x} \right] \Rightarrow \ln y = \lim_{x \rightarrow 0^+} [-\sin x \cos x] \Rightarrow \ln y = (-\sin 0 \cos 0) = (0)(1) = 0 \Rightarrow$

$\ln y = 0 \iff e^0 = y \Rightarrow 1 = y$.

Finalmente: $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\tan x} = 1$.

2. Un cultivo de bacterias empieza con 1000 elementos y su tasa de crecimiento es proporcional al número de bacterias. Al cabo de dos horas la población es de 9000.

a) Obtenga una expresión para el número de bacterias al cabo de t horas.

$y = ce^{kt}$, $c = 1000$. Como a la dos horas hay 9000 bacterias, tenemos el par ordenado $(2, 9000)$, aplicando la fórmula, tenemos: $9000 = 1000e^{2k} \Rightarrow 9 = e^{2k} \Rightarrow \ln 9 = (\ln e)(2k) \Rightarrow \frac{\ln 9}{2} = k = 1.0986$.

La expresión para el número de bacterias después de t horas es $y(t) = 1000e^{1.0986t}$.

b) Obtenga el número de bacterias después de tres horas. $t = 3$, $y = ?$

$y(3) = 1000e^{1.0986(3)} = 1000(27) = 27000$. El número de bacterias después de tres horas es de 27000.

c) Determine en que tiempo se duplica el número de bacterias.

Cuando $y = 2000$, $t = ?$, $y = ce^{kt}$, $2000 = 1000e^{1.0986t} \Rightarrow 2 = e^{1.0986t} \Rightarrow \ln 2 = (\ln e)(1.0986)t \Rightarrow \frac{\ln 2}{1.0986} = t \Rightarrow t = 0.6309$ horas.

3. Calcular $f'(x)$ en cada caso:

a) $f(x) = \frac{1}{6} [\operatorname{arcsec}(2x - 3)]^6 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{6} \cdot 6 [\operatorname{arcsec}(2x - 3)]^5 (\operatorname{arcsec}(2x - 3))'$
 $\Rightarrow f'(x) = [\operatorname{arcsec}(2x - 3)]^5 \frac{2}{|2x - 3|\sqrt{(2x - 3)^2 - 1}}$.

$$b) f(x) = e^{\sec x} + 8 \operatorname{cosec} 2x \implies f'(x) = e^{\sec x} \cos x + 8(-2 \operatorname{cosec} 2x \operatorname{ctg} 2x)$$

$$\implies f'(x) = e^{\sec x} \cos x - 16 \operatorname{cosec} 2x \operatorname{ctg} 2x.$$

$$c) f(x) = 7\sqrt{x - \ln(x+2)} = 7[x - \ln(x+2)]^{\frac{1}{2}} \implies f'(x) = 7\frac{1}{2}[x - \ln(x+2)]^{-\frac{1}{2}}[x - \ln(x+2)]' \implies f'(x) = \frac{7}{2}[x - \ln(x+2)]^{-\frac{1}{2}}[1 - \frac{1}{x+2}(1)] \implies f'(x) = \frac{7}{2}[x - \ln(x+2)]^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{x+1}{x+2}\right].$$

$$d) f(x) = (\cot x)^{3x} \text{ se hace por derivación logarítmica.}$$

$$\ln y = \ln(\cot x)^{3x} \implies \ln y = 3x \ln(\cot x). \text{ Ahora, se deriva implícitamente } \frac{1}{y} \cdot y' = 3[1 \cdot \ln(\cot x) + x \frac{1}{\cot x} \cdot (-\csc^2 x)] \implies \frac{y'}{y} = 3[\ln(\cot x) - \frac{x}{\sin x \cos x}] \implies y' = 3y[\ln(\cot x) - \frac{x}{\sin x \cos x}].$$

Sustituyo $y, y' = 3(\cot x)^{3x}[\ln(\cot x) - \frac{x}{\sin x \cos x}]$.

4. Calcule las siguientes integrales:

$$a) \int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx. \text{ Para resolver se aplica el método de fracciones simples:}$$

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} = \frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2 + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + K}{x^2 + 4} \implies \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + K}{x^2 + 4} =$$

$$\frac{A(x^2 + 4) + x(Bx + K)}{x(x^2 + 4)} \iff 2x^2 - x + 4 = A(x^2 + 4) + x(Bx + K).$$

$$\text{Para hallar el valor de } A \text{ hacemos } x = 0, 0 - 0 + 4 = A(0 + 4) + 0(B(0) + K) \implies 4 = 4A \implies$$

$$A = 1. \text{ Nuevamente, tomamos } 2x^2 - x + 4 = A(x^2 + 4) + x(Bx + K).$$

$$\text{Sea } x = 1, 2 - 1 + 4 = 1(1 + 4) + 1(B(1) + K) \implies 5 = 5 + B + K \implies 0 = B + K \quad (*).$$

$$\text{Tomemos ahora } x = 2, 8 - 2 + 4 = 1(4 + 4) + 2(2B + K) \implies 10 = 8 + 4B + 2K \implies 2 = 4B + 2K \implies 1 = 2B + K \quad (**).$$

$$\text{De } (*) \text{ y } (**) \text{ obtengo los valores de } B \text{ y } K, \text{ veamos } B + K = 0 \text{ y } 2B + K = 1 \implies -B + 2B - K + K = B = 1. \text{ Como } B + K = 0 \text{ y } 1 + K = 0 \implies K = -1.$$

$$\text{Finalmente, } \int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx = \int \frac{A}{x} dx + \int \frac{Bx + K}{x^2 + 4} dx.$$

$$\text{Sustituyendo } A, B, K \text{ tenemos } \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{x-1}{x^2+4} dx = \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{x}{x^2+4} dx - \int \frac{1}{x^2+4} dx,$$

$$\implies \int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+4} 2x dx - \int \frac{1}{(x^2) + (2^2)} dx = \ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x^2+4| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + K.$$

$$b) \int \frac{dx}{\sqrt{4-6x-9x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-9x^2-6x+4}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9(-x^2-\frac{6}{9}x+\frac{4}{9})}} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2+\frac{2}{3}x-\frac{4}{9})}} =$$

$$\frac{1}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}-\frac{1}{9}-\frac{4}{9})}} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{-1[(x+\frac{1}{3})^2-\frac{5}{9}]}} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{5}{9}-(x+\frac{1}{3})^2}}.$$

$$\text{Sea } a^2 = \frac{5}{9} \implies a = \frac{\sqrt{5}}{3}, u = x + \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-u^2}} = \frac{1}{3} \operatorname{arcsen} \frac{u}{a} + C = I.$$

$$\text{Finalmente se sustituyen los valores } u \text{ y } a \text{ por lo que } I = \frac{1}{3} \operatorname{arcsen} \left(\frac{x+\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} \right) + C.$$

c) $\int \frac{x^2}{9+x^2} dx$ Se divide $\frac{x^2}{x^2+9} \Rightarrow \int \frac{x^2}{x^2+9} dx = \int (1 - \frac{9}{x^2+9}) dx = \int dx - 9 \int \frac{1}{x^2+9} dx =$

$$x - 9 \left[\frac{1}{3} \arctg\left(\frac{x}{3}\right) \right] + C = x - 3 \arctg\left(\frac{x}{3}\right) + C.$$

d) $\int_2^4 \sqrt{x} \ln x dx$ Se aplica integración por partes.

Sea $u = \ln x \Rightarrow v = \int dv = \int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}, du = \frac{1}{x} dx \quad dv = \sqrt{x} dx.$

$$\int \sqrt{x} \ln x dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \ln x - \frac{2}{3} \int x^{\frac{3}{2}} \frac{1}{x} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \ln x - \frac{2}{3} \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}.$$

Finalmente, la hago con límites de integración:

$$\int_2^4 \sqrt{x} \ln x dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \ln x - \frac{4}{9} x^{3/2} \Big|_2^4 = \left(\frac{2}{3} 4^{\frac{3}{2}} \ln 4 - \frac{4}{9} 4^{\frac{3}{2}} \right) - \left(\frac{2}{3} 2^{\frac{3}{2}} \ln 2 - \frac{4}{9} 2^{\frac{3}{2}} \right) =$$

$$\left(\frac{2}{3} 8 \ln 4 - \frac{4}{9} 8 \right) - \left(\frac{2}{3} 2\sqrt{2} \ln 2 - \frac{4}{9} 2\sqrt{2} \right) =$$

$$\left(\frac{16}{3} \ln 4 - \frac{32}{9} \right) - \left(\frac{4}{3} \sqrt{2} \ln 2 - \frac{8}{9} \sqrt{2} \right).$$

e) $\int \frac{\sec x \tan x}{1 + \sec x} dx.$ Sea $u = 1 + \sec x, du = \sec x \operatorname{tg} x dx$, se aplica:

$$\int \frac{1}{u} du = \ln |u| + C \Rightarrow \int \frac{\sec x \tan x}{1 + \sec x} dx = \int \frac{1}{1 + \sec x} \sec x \operatorname{tg} x dx = \ln |1 + \sec x| + C.$$

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

FACULTAD DE CIENCIAS

MATERIA: MA-1210. Cálculo I

ESCUELA DE MATEMÁTICA

I CICLO LECTIVO. 2000

— PRIMER EXAMEN PARCIAL.—

El examen debe estar escrito con bolígrafo en su totalidad. Si hay partes escritas en lápiz, el estudiante no tiene derecho a reclamos.

1. (12 puntos) Considere la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x \leq -1 \\ ax + b, & -1 < x < 3 \\ -2, & x \geq 3. \end{cases}$$

- a) Hallar valores para las constantes a y b de modo que la función f sea continua en toda recta real.
b) Encuentre los valores de la variable x en donde f es derivable.

2. (10 puntos) Use la definición de derivada para probar que la derivada de $f(x) = \sqrt{1-x}$ es $f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x}}$.

3. (25 puntos) Calcule los siguientes límites:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 9x + 8}{x - 1} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{5-x}}{x-2} & \text{c) } \lim_{h \rightarrow 1} \frac{h-1}{|h-1|} \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 + x - 2} \end{array}$$

4. (20 puntos) Calcule $f'(x)$ en cada caso:

$$\text{a) } f(x) = \frac{(x-1)^3}{\sqrt{2^4 x^3 - 2x + 1}}. \quad \text{b) } f(x) = 7x^{\frac{2}{7}}(8x + x^3 + 6)^4. \quad \text{c) } f(x) = |x^3 - x|.$$

5. (10 puntos) Considere la función polinomial $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ definida en el intervalo $[-1, 2]$. Encuentre los extremos de $f(x)$.

6. (10 puntos) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y^2 + 2x + x^3 = 6$, en el punto $(-1, 3)$.

7. (13 puntos) El radio de la base de un cono circular recto disminuye a razón de $6\text{cm}/\text{min}$. Encontrar la velocidad a que está cambiando el volumen cuando la altura es de 12cm y el radio es de 6cm . (La fórmula del volumen para el cono circular recto es: $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$).

NOTA: Debe justificar sus respuestas.

Solución I Examen Parcial I ciclo 2000

1. (12 puntos) Considere la siguiente función:
$$f(x) = \begin{cases} 2, & x \leq -1 \\ ax + b, & -1 < x < 3 \\ -2, & x \geq 3. \end{cases}$$

- a) Hallar valores para las constantes a y b de modo que la función f sea continua en toda recta real.
- b) Encuentre los valores de la variable x en donde f es derivable.

Solución

a) En $x = -1$, f debe cumplir $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \Rightarrow 2 = \lim_{x \rightarrow -1^+} ax + b = -a + b \Rightarrow b - a = 2$.

En $x = 3$, f debe cumplir: $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} ax + b = \lim_{x \rightarrow 3^+} -2 = -2 \Rightarrow 3a + b = -2$.

Por lo tanto se debe resolver el sistema simultáneo:

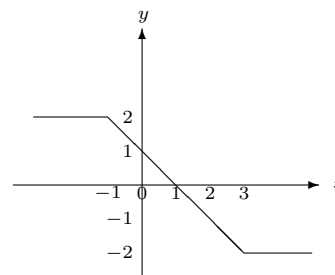
$$b - a = 2, \quad 3a + b = -2.$$

Si restamos la primera ecuación a la segunda nos queda:

$$4a = -4 \Rightarrow a = -1.$$

Sustituyendo en la primer ecuación nos queda que $b =$

1. Gráficamente se tiene:



- b) Observemos que para $x < -1$, $f(x) = 2 \Rightarrow f'(x) = 0$. Si $-1 < x < 3 \Rightarrow f'(x) = a = -1$, y si $x > 3 \Rightarrow f'(x) = 0$.

Debemos por tanto calcular la derivada en los puntos de cambio de f , a saber; $x = -1$ y $x = 3$.

Como $f'_+(x = -1) = -1$ y $f'_-(x = -1) = 0 \Rightarrow f'(-1)$ no existe.

De manera similar para $x = 3$. Tenemos $f'_+(x = 3) = 0$ y $f'_-(x = 3) = -1 \Rightarrow f'(3)$ no existe.

En consecuencia f es derivable en $\mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$.

2. (10 puntos) Use la definición de derivada para probar que la derivada de $f(x) = \sqrt{1-x}$ es $f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1-x}}$.

Solución
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-(x+h)} - \sqrt{1-x}}{h} \cdot \frac{(\sqrt{1-x-h} + \sqrt{1-x})}{(\sqrt{1-x-h} + \sqrt{1-x})}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1-x-h) - (1-x)}{h(\sqrt{1-x-h} + \sqrt{1-x})} \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h(\sqrt{1-x-h} + \sqrt{1-x})}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{\sqrt{1-x-h} + \sqrt{1-x}} = \frac{-1}{2\sqrt{1-x}}.$$

3. (25 puntos) Calcule los siguientes límites:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 9x + 8}{x - 1} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{5-x}}{x-2} & \text{c) } \lim_{h \rightarrow 1} \frac{h-1}{|h-1|} \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 + x - 2}. \end{array}$$

Solución

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 9x + 8}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-8)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} x - 8 = -7.$$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{5-x}}{x-2}$. Como éste límite es del tipo $\frac{0}{0}$, entonces se debe racionalizar.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{5-x}}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{5-x}}{x-2} \cdot \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{5-x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{5-x}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1) - (5-x)}{(x-2)(\sqrt{x+1} + \sqrt{5-x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-4}{(x-2)(\sqrt{x+1} + \sqrt{5-x})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x+1} + \sqrt{5-x})} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \end{aligned}$$

c) $\lim_{h \rightarrow 1} \frac{h-1}{|h-1|}$, analizamos el límite por la izquierda y por la derecha, en efecto:

$$\lim_{h \rightarrow 1^+} \frac{h-1}{|h-1|} = \lim_{h \rightarrow 1^+} \frac{h-1}{h-1} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{h \rightarrow 1^-} \frac{h-1}{|h-1|} = \lim_{h \rightarrow 1^-} \frac{h-1}{-(h-1)} = -1.$$

Por lo tanto el límite propuesto no existe.

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 + x - 2} = \frac{x^3 + 2^3}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}{(x+2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x + 4}{x-1} = \frac{12}{-3} = -4.$$

4. (20 puntos) Calcule $f'(x)$ en cada caso:

$$\text{a) } f(x) = \frac{(x-1)^3}{\sqrt{2^4 x^3 - 2x + 1}}. \quad \text{b) } f(x) = 7x^{\frac{2}{7}}(8x + x^3 + 6)^4. \quad \text{c) } f(x) = |x^3 - x|.$$

Solución

$$\text{a) } f(x) = \frac{(x-1)^3}{\sqrt{2^4 x^3 - 2x + 1}} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{3(x-1)^2 \sqrt{2^4 x^3 - 2x + 1} - (x-1)^3 \cdot \frac{1}{2} (2^4 x^3 - 2x + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2^4 \cdot 3x^2 - 2)}{2^4 x^3 - 2x + 1}.$$

$$\text{b) } f(x) = 7x^{\frac{2}{7}}(8x + x^3 + 6)^4 \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{7} \cdot 7x^{\frac{2}{7}-1} (8x + x^3 + 6)^4 + 7x^{\frac{2}{7}} \cdot 4(8x + x^3 + 6)^3 (8 + 3x^2) = \\ = \frac{2}{x^{\frac{5}{7}}} (8x + x^3 + 6)^4 + 28x^{\frac{2}{7}} (8x + x^3 + 6)^3 (8 + 3x^2).$$

$$\text{c) } f(x) = |x^3 - x| \Rightarrow f'(x) = \frac{(x^3 - x)(3x^2 - 1)}{|x^3 - x|}.$$

5. (10 puntos) Considere la función polinomial $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ definida en el intervalo $[-1, 2]$. Encuentre los extremos de $f(x)$.

Solución Si $f(x) = 3x^4 - 4x^3 \Rightarrow f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x-1) = 0$.

Por lo tanto $x = 0$ y $x = 1$ son los puntos críticos.

Como $f(0) = 0$ y $f(1) = -1$, y además $f(-1) = 7$ y $f(2) = 48 - 32 = 16$.

Tenemos que: $x = 1$ es un mínimo absoluto, y $x = 2$ es un máximo absoluto.

6. (10 puntos) calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y^2 + 2x + x^3 = 6$, en el punto $(-1, 3)$.

Solución Sea la ecuación $y^2 + 2x + x^3 = 6$, derivando implícitamente nos da:

$$2yy' + 2 + 3x^2 = 0 \implies 2yy' = -3x^2 - 2 \implies y' = \frac{-3x^2 - 2}{2y} \implies y'(-1, 3) = -\frac{5}{6}.$$

Luego la ecuación de la recta es: $\frac{y - 3}{x + 1} = -\frac{5}{6}$.

7. (13 puntos) El radio de la base de un cono circular recto disminuye a razón de $6\text{cm}/\text{min}$. Encontrar la velocidad a que está cambiando el volumen cuando la altura es de 12cm y el radio es de 6cm . (La fórmula del volumen para el cono circular recto es: $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$).

Solución $V = \frac{\pi r^2 h}{3} = 1 \implies \frac{dv}{dt} = \frac{\pi}{3} r^2 \frac{dh}{dt} + \frac{\pi h}{3} 2r \frac{dr}{dt}.$

Como $\frac{dr}{dt} = -6\text{cm}/\text{min}$, $h = 12$ y $r = 6\text{cm}$, sustituyendo se tiene:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\pi}{3}(6)^2 \frac{dh}{dt} - \frac{2}{3}\pi \cdot 12 \cdot 6 \cdot 6 = \frac{36}{3}\pi \frac{dh}{dt} - 2\pi \cdot 12 \cdot 6 \cdot 2 \implies \frac{dv}{dt} = 12\pi \frac{dh}{dt} - 288\pi.$$

Observe que si nos dan la razón de cambio de la altura, entonces tendremos totalmente caracterizada a $\frac{dv}{dt}$. Por lo tanto, si $\frac{dh}{dt} = 0 \implies \frac{dv}{dt} = -288\pi$.

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

FACULTAD DE CIENCIAS

MATERIA: MA-1210. CALCULO I

ESCUELA DE MATEMÁTICA

I CICLO LECTIVO. 2000

— II Examen Parcial —

1. Hallar el límite, si es que existe $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x + \sqrt{9x^2 - x})$.
2. Averigüe los intervalos en que la función es creciente o decreciente $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 1}$.
3. Hallar los intervalos en que la función $g(x) = x^4 - 4x^3 + 2$ es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo.
4. Considere la función $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$ cuyo cuadro de variación es el siguiente.

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	-	+	
$f''(x)$	-	-	+	+	

- a) Encuentra las ecuaciones de las asíntotas de f .
 - b) Dibuje la gráfica de la función f y sus rectas asíntotas sobre el mismo sistema de coordenadas.
5. Un vivero suele vender los árboles tras seis años de crecimiento. El ritmo de crecimiento en esos 6 años viene dado por $\frac{dh}{dt} = 1.5t + 5$, donde t es el tiempo en años y h la altura en cm . En el momento de plantarlos, miden $12cm$ (en $t = 0$). Calcular su altura tras t años.
 6. Una página ha de contener 30 pulgadas cuadradas de texto con márgenes de 1 pulgada por todas partes. ¿Qué dimensiones de la página requieren la mínima cantidad de papel?
 7. Calcular la integral definida $\int_0^3 |2x - 3| dx$.
 8. Calcule la siguiente integral $\int (x + 1)\sqrt{2 - x} dx$.

Solución II Examen Parcial: I ciclo 2000 Prof. Mario Murillo

1. Hallar el límite, si es que existe $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x + \sqrt{9x^2 - x})$.

Solución Observe que, tal como está, este límite da $-\infty + \infty$; es decir, una forma indefinida. Se escribe entonces:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x + \sqrt{9x^2 - x}) \cdot \frac{3x - \sqrt{9x^2 - x}}{3x - \sqrt{9x^2 - x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3x)^2 - (9x^2 - x)}{3x - \sqrt{9x^2 - x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{3x - \sqrt{9x^2 - x}}.$$

Esta última expresión también es indefinida, pues de $\frac{-\infty}{-\infty}$. Se puede, por ejemplo, factorizar una x de la raíz y del denominador:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{3x - \sqrt{9x^2 - x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{3x - |x|\sqrt{9 - \frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{3x + x\sqrt{9 - \frac{1}{x}}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x(3 + \sqrt{9 - \frac{1}{x}})}, \text{ de donde } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{3 + \sqrt{9 - \frac{1}{x}}} = \frac{1}{3 + \sqrt{9}} = \frac{1}{6}.$$

2. Averigüe los intervalos en que la función es creciente o decreciente $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 1}$.

Solución Se obtiene primeramente la derivada:

$$f'(x) = \frac{(2x - 2)(x + 1) - (x^2 - 2x + 1)}{(x + 1)^2} = \frac{2x^2 - 2 - x^2 + 2x - 1}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2} = \frac{(x + 3)(x - 1)}{(x + 1)^2}.$$

El signo de f' depende únicamente del numerador, por lo que el estudio de la primera derivada se puede realizar con los factores de aquél:

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$x + 3$	—	+	+	
$x - 1$	—	—	+	
$f(x)$	+	—	+	

La función es creciente en $]-\infty, -3[\cup]1, +\infty[$, es decreciente en $]-3, 1[$.

3. Hallar los intervalos en que la función $g(x) = x^4 - 4x^3 + 2$ es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo.

Solución La concavidad está determinada por la segunda derivada, por lo que se averigua primero ésta:

$$g'(x) = 4x^3 - 12x^2 \implies g''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2).$$

Luego tenemos el cuadro siguiente.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$12x$	$-$	$+$	$+$	
$x - 2$	$-$	$-$	$+$	
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$	

Entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba en los intervalos $]-\infty, 0[$ y $]2, +\infty[$. Es cóncava hacia abajo en $]0, 2[$.

$x = 0$ y $x = 2$ son puntos de inflexión.

4. Considere la función $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$ cuyo cuadro de variación es el siguiente.

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$	
$f''(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$	

- a) Encuentra las ecuaciones de las asíntotas de f .
 b) Dibuje la gráfica de la función f y sus rectas asíntotas sobre el mismo sistema de coordenadas.

Solución

- a) Hay una asíntota vertical en $x = 2$. Además, observe que:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} = +\infty.$$

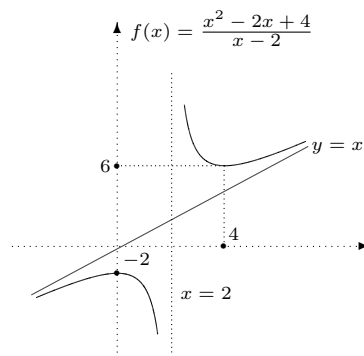
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} = -\infty.$$

Por otra parte, f se puede reescribir como $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} = x + \frac{4}{x - 2}$ de donde $y = x$ es asíntota oblicua.

En resumen: $x = 2$ y $y = x$ son asíntotas.

- b) El cuadro de variación se completa

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$	
$f''(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$	
$f(x)$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	6	$\nearrow$



5. Un vivero suele vender los árboles tras seis años de crecimiento. El ritmo de crecimiento

en esos 6 años viene dado por $\frac{dh}{dt} = 1.5t + 5$, donde t es el tiempo en años y h la altura en cm . En el momento de plantarlos, miden $12cm$ (en $t = 0$). Calcular su altura tras t años.

Solución Ritmo de crecimiento: $\frac{dh}{dt} = 1.5t + 5$, $h(0) = 12$ (pues al momento de plantarlos miden $12 cm$; es decir $t = 0$).

$$\text{Luego, } h(t) = \int (1.5t + 5)dt = \frac{1.5t^2}{2} + 5t + c.$$

Puesto que $h(0) = \frac{1.5 \cdot 0^2}{2} + 5 \cdot 0 + c = 12 \implies c = 12$. Por lo tanto, la altura está dada por:
 $h(t) = \frac{1.5t^2}{2} + 5t + 12$.

6. Una página ha de contener 30 pulgadas cuadradas de texto con márgenes de 1 pulgada por todas partes. ¿Qué dimensiones de la página requieren la mínima cantidad de papel?

Solución $A = (x + 2)(y + 2)$: ecuación primaria.

$xy = 30$ ecuación auxiliar de donde $y = \frac{30}{x}$.

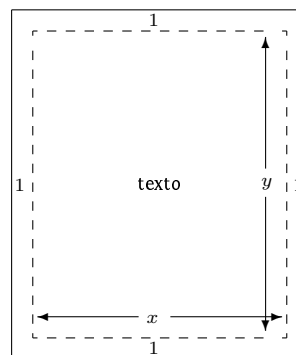
La ecuación primaria se puede reescribir como:

$$A(x) = (x + 2)\left(\frac{30}{x} + 2\right) = 2x + \frac{60}{x} + 34.$$

Luego, la derivada determina el (los) punto(s) crítico(s):

$$A'(x) = 2 - \frac{60}{x^2} = 0 \implies \frac{2x^2 - 60}{x^2} = 0 \implies x = \sqrt{30}$$

(tomando la solución positiva).



Este valor es un máximo relativo pues $A''(x) = \frac{120}{x^3} > 0$ si $x > 0$. Por lo tanto, $y = \frac{30}{\sqrt{30}} = \sqrt{30} \approx 5,48$ pulgadas, de donde, la página debe ser un cuadrado de $7,48$ pulgadas de lado.

7. Calcular la integral definida $\int_0^3 |2x - 3|dx$.

Solución Puesto que $|2x - 3| = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } 2x - 3 \geq 0, \text{ o sea } x \geq \frac{3}{2} \\ -(2x - 3) & \text{si } x < \frac{3}{2} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{Hacemos, } \int_0^3 |2x - 3|dx &= \int_0^{\frac{3}{2}} |2x - 3|dx + \int_{\frac{3}{2}}^3 |2x - 3|dx = -\int_0^{\frac{3}{2}} (2x - 3)dx + \int_{\frac{3}{2}}^3 (2x - 3)dx = \\ &= -[x^2 - 3x]_0^{\frac{3}{2}} + [x^2 - 3x]_{\frac{3}{2}}^3 = -\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2}\right] + \left[(3^2 - 3 \cdot 3) - \left(\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2}\right)\right] = -\frac{9}{4} + \frac{9}{2} + 9 - 9 - \\ &= \frac{9}{4} + \frac{9}{2} = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

8. Calcule la siguiente integral $\int (x + 1)\sqrt{2 - x}dx$.

Solución Por sustitución escribimos: $u = 2 - x \implies x = 2 - u$, $du = -dx \implies dx = -du$. Por lo que hacemos: $\int (x + 1)\sqrt{2 - x}dx = -\int (2 - u + 1)\sqrt{u}du = -\int (3 - u)u^{\frac{1}{2}}du = -\int (3u^{\frac{1}{2}} - u^{\frac{3}{2}})du = \int (u^{\frac{3}{2}} - 3u^{\frac{1}{2}})du = \frac{2u^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{2 \cdot 3u^{\frac{3}{2}}}{3} + C = \frac{2\sqrt{(2 - x)^5}}{5} - 2\sqrt{(2 - x)^3} + C$.

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

FACULTAD DE CIENCIAS

MATERIA: MA-1210. Cálculo I

ESCUELA DE MATEMÁTICA

II CICLO LECTIVO 2000

— I Examen Parcial —

El examen debe estar escrito con bolígrafo en su totalidad. Si hay partes escritas en lápiz, el estudiante no tiene derecho a reclamos

1. (30pts) Calcule los siguientes límites, si existen. Señale si alguno de ellos corresponde a la existencia de una asíntota vertical:

(a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2-x} - 2}{x^2 + 5x + 6}$ (10pts)

(b) $\lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{\sin(x+1)}{2x+2} + \cos \pi x \right]$ (10pts)

(c) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + x - 6}$ (5pts)

(d) $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + x - 6}$. (5pts)

2. (8pts) Considere la función: $f(x) = \begin{cases} 4(x^2 + 1) & \text{si } x \leq 0 \\ 2x + 3k & \text{si } x > 0. \end{cases}$

Determine el valor de k para que la función $f(x)$ sea continua en $x = 0$.

3. (8pts) Use la definición para calcular $f'(x)$, si $f(x) = x^3 + x$.

4. (7pts) Evalúe la derivada de la función $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{\sin x}$, en $x = \frac{\pi}{2}$.

5. Calcule las derivadas de las funciones dadas a continuación y simplifique el resultado:

(a) (7pts) $f(x) = -\frac{ax}{(x^2 + 6)^2}$

(b) (8pts) $f(x) = x^4 \left(1 - \frac{2}{x+1} \right)$

6. (7pts) Considera la función $g(x) = 2x - 3x^{\frac{2}{3}}$ en el intervalo $[-1, 3]$.

- (a) (3pts) Determine los puntos críticos.

- (b) (4pts) Calcule el máximo y el mínimo en $[-1, 3]$.

7. (7pts) El volumen de un cono es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, calcular el ritmo de cambio del volumen cuando $r = 24$ pulgadas y $\frac{dr}{dt} = 2 \text{ pul/min}$, sabiendo que $h = 3r$.

8. Dada la ecuación implícita $x^2 + y^2 = 3y$.

- (a) (4pts) Determine los dos puntos de la curva para los cuales $x = \sqrt{2}$.

- (b) (7pts) Calcule la pendiente de la recta tangente en uno de los puntos anteriores.

Solución I Examen Parcial: II ciclo 2000 Prof. Roxana Meneses

1. Se tiene que:

$$(a) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2-x}-2}{x^2+5x+6} \cdot \frac{\sqrt{2-x}+2}{\sqrt{2-x}+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2-x-4}{(x+3)(x+2)(\sqrt{2-x}+2)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{-(x+2)}{(x+3)(x+2)(\sqrt{2-x}+2)} = \lim_{x \rightarrow -2} -\frac{1}{(x+3)(\sqrt{2-x}+2)} =$$

$$-\frac{1}{(-2+3)(\sqrt{2+2}+2)} = -\frac{1}{4}.$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{\sin(x+1)}{2x+2} + \cos \pi x \right] = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin(x+1)}{2(x+1)} + \lim_{x \rightarrow -1} \cos \pi x =$$

$$\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin(x+1)}{x+1} + \cos(-\pi) = \frac{1}{2} \cdot 1 + (-1) = -\frac{1}{2}.$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2+2x-3}{x^2+x-6} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x+3)(x-1)}{(x+3)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-1}{x-2} = -\infty, \text{ cuando } x \rightarrow 2^-, (x-1) \rightarrow 1 \text{ y}$$

cuando $x \rightarrow 2^-, (x-2) \rightarrow 0$, con valores negativos.

$\therefore \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-1}{x-2}$ no existe pero tiende a $-\infty \implies$ existe asíntota vertical y es $x = 2$.

$$(d) \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x^2+2x-3}{x^2+x-6} = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{(x+3)(x-1)}{(x+3)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x-1}{x-2} = \frac{-3-1}{-3-2} = \frac{4}{5}.$$

$$2. f(x) = \begin{cases} 4(x^2+1) & \text{si } x \leq 0 \\ 2x+3k & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

$$i) f(0) = 4(0^2+1) = 4.$$

$$ii) \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} 4(x^2+1) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x+3k) = 3k \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ existe s\u00ed y solo si } 4 = 3k.$$

$$iii) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 4.$$

Entonces para obtener la continuidad de $f(x)$ en $x = 0$ debe cumplirse: $\lim_{x \rightarrow 0^-} 4(x^2+1) =$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (2x+3k) \implies 4 = 3k \implies k = \frac{4}{3}.$$

$$3. f(x) = x^3 + x \implies f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \implies$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[(x+\Delta x)^3 + (x+\Delta x)] - (x^3 + x)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta^2 x + \Delta^3 x + x + \Delta x - x^3 - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x^2 + 3x\Delta x + \Delta^2 x + 1) = 3x^2 + 1.$$

$$4. f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{\sin x}, \text{ donde } x = \frac{\pi}{2} \implies f(x) = \frac{1}{x} + (\sin x)^{\frac{1}{2}} \implies f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}(\sin x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos x \implies$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}.$$

$$\text{Para } x = \frac{\pi}{2} \implies f'(\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{(\frac{\pi}{2})^2} + \frac{\cos \frac{\pi}{2}}{2\sqrt{\sin \frac{\pi}{2}}} \implies f'(\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{\frac{\pi^2}{4}} + \frac{0}{2\sqrt{1}} = -\frac{4}{\pi^2}.$$

$$5. a) f(x) = \frac{-ax}{(x^2+6)^2} \implies f'(x) = \frac{-a(x^2+6)^2 - (-ax) \cdot 2(x^2+6) \cdot 2x}{(x^2+6)^4} \implies$$

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 6)[-a(x^2 + 6) + 4ax^2]}{(x^2 + 6)^4} \Rightarrow f'(x) = \frac{-ax^2 - 6a + 4ax^2}{(x^2 + 6)^3} = \frac{3ax^2 - 6a}{(x^2 + 6)^3}.$$

$$\text{b) } f(x) = x^4 \left(1 - \frac{2}{x+1}\right) \Rightarrow f'(x) = 4x^3 \left(1 - \frac{2}{x+1}\right) + x^4 \left[-\frac{-2 \cdot 1}{(x+1)^2}\right] \Rightarrow$$

$$f'(x) = 4x^3 \left(\frac{x+1-2}{x+1}\right) + x^4 \left[\frac{2}{(x+1)^2}\right] \Rightarrow f'(x) = \frac{4x^3(x-1)}{x+1} + \frac{2x^4}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{4x^3(x^2 - 1) + 2x^4}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x^3(2x^2 + x - 2)}{(x+1)^2}.$$

6. a) $g(x) = 2x - 3x^{\frac{2}{3}}; [-1, 3]$.

i) $g'(x) = 2 - 2x^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow g'(x) = 2 - \frac{2}{x^{\frac{1}{3}}} \Rightarrow g'(x) = \frac{2(x^{\frac{1}{3}} - 1)}{x^{\frac{1}{3}}}.$

ii)
$$\left. \begin{array}{l} g'(x) = 0 \Rightarrow x^{\frac{1}{3}} - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ g'(x) \text{ se indefin} \Rightarrow x^{\frac{1}{3}} = 0 \Rightarrow x = 0 \end{array} \right\} \text{ puntos críticos.}$$

b) $1 \in]-1, 3[\text{ y } 0 \in]-1, 3[.$

$g(-1) = -2 - 3 = -5$, mínimo absoluto.

$g(0) = 0 - 0 = 0$, máximo absoluto.

$g(1) = 2 - 3 = -1.$

$g(3) = 6 - 3\sqrt[3]{9} \approx -0.24.$

7. $\frac{dV}{dt} = ?$, sabiendo que $h = 3r$.

$V = \frac{\pi}{3}r^2h \Rightarrow V = \frac{\pi}{3}r^2(3r) \Rightarrow V = \pi r^3$. Luego: $\frac{dV}{dt} = 3\pi r^2 \frac{dr}{dt}$.

Entonces: $\frac{dV}{dt} = 3\pi(24)^2(2)$, cuando $r = 24$ pulgadas, $\frac{dr}{dt} = 2\text{pul}/\text{min}$.

Por tanto: $\frac{dV}{dt} = 3456\pi \text{ pul}^3/\text{min}$ o bien $\frac{dV}{dt} = ?$ Sabiendo que $h = 3r$ tenemos que

$\frac{dh}{dt} = 3\frac{dr}{dt}.$

$V = \frac{\pi}{3}r^2h \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{3} \left(2r \frac{dr}{dt} \cdot h + r^2 \cdot \frac{dh}{dt} \right).$

Entonces: $\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{3} [2(24)(2)(3 \cdot 24) + (24)^2(3 \cdot 2)]$, cuando: $r = 24$ pulgadas $\Rightarrow h = (3 \cdot 24)$ pulgadas

y cuando $\frac{dr}{dt} = 2\text{pul}/\text{min} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = (3 \cdot 2)\text{pul}/\text{min}.$

Por lo tanto: $\frac{dV}{dt} = 3456\pi \text{pul}^3/\text{min}.$

8. a) $x^2 + y^2 = 3y$. Para $x = \sqrt{2} \Rightarrow (\sqrt{2})^2 + y^2 = 3y \Rightarrow y^2 - 3y + 2 = 0 \Rightarrow$

$y = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow y = 2 \wedge y = 1.$

Los puntos son: $(\sqrt{2}, 2)$ y $(\sqrt{2}, 1).$

b) $x^2 + y^2 = 3y \Rightarrow 2x + 2y \frac{dy}{dx} = 3 \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx}(2y - 3) = -2x.$

Por lo tanto: $\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y-3}$, para $(\sqrt{2}, 1) \Rightarrow m = \frac{-2(\sqrt{2})}{2(1)-3} \Rightarrow m = 2\sqrt{2}$, o bien para

$(\sqrt{2}, 2) \Rightarrow m = \frac{-2(\sqrt{2})}{2(2)-3} \Rightarrow m = -2\sqrt{2}.$

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

FACULTAD DE CIENCIAS

MATERIA: MA-1210. Cálculo I

ESCUELA DE MATEMÁTICA

II CICLO LECTIVO. 2000

—II Examen Parcial—

El examen debe estar escrito con bolígrafo en su totalidad. Si hay partes escritas en lápiz, el estudiante no tiene derecho a reclamos

1. (25pts) Considere la función $f(x) = \frac{x^2 - 7x + 1}{(x + 1)^2}$, cuyas derivadas son $f'(x) = \frac{9(x - 1)}{(x + 1)^3}$, $f''(x) = \frac{-18(x - 2)}{(x + 1)^4}$.
- (a) (2pts) Determine el dominio.
- (b) (3pts) Encuentre los puntos de intersección del gráfico con los ejes de coordenadas.
- (c) (5pts) Encuentre las ecuaciones de las rectas asíntotas del gráfico.
- (d) (6pts) Haga el cuadro de variación (crecimiento y concavidad).
- (e) (9pts) Haga el gráfico (incluya puntos de inflexión, puntos donde la función alcanza valores extremos relativos, rectas asíntotas).
2. (20pts) Se desea construir una caja rectangular de cartón, sin tapa y con base cuadrada. El volumen de la caja debe ser 32 decímetros cúbicos. Determine las dimensiones de la caja de tal forma que la cantidad de cartón utilizada sea mínima.
3. (30pts, 6c/u) Calcule cada una de las siguientes integrales:
- a) $\int \frac{x^2 + x + 1}{\sqrt{x}} dx.$
- b) $\int \left(\frac{\sec x - 1}{\cos x} \right) \sec x dx.$
- c) $\int (\sin 2x)(\cos 2x) dx.$
- d) $\int \frac{x}{\sqrt{2x - 1}} dx.$
- e) $\int_0^1 x(x - 1)^2 dx.$
4. (15pts) Considere la región limitada por los gráficos de las funciones $f(x) = -x^2 + 2x + 8$, $g(x) = -2x + 3$.
- (a) (6pts) Dibuje la región.
- (b) (9pts) Calcule el área de la región.

Solución II Examen Parcial: II ciclo 2000**Profs. Carlos González, Gerald Asch**

1. Considere la función $f(x) = \frac{x^2 - 7x + 1}{(x + 1)^2}$.

(a) $f(x)$ se indefine solo si $(x + 1)^2 = 0$, es decir $x = -1$.

$$\text{Dominio} = \mathbb{R} \setminus \{-1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[.$$

(b) Intersección con el eje y :

$$x = 0 \implies y = f(0) = 1 \implies \text{punto de intersección } (0, 1).$$

Intersección con el eje x :

$$y = 0 \implies f(x) = 0 \implies x^2 - 7x + 1 = 0.$$

El discriminante de este polinomio cuadrático es $\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4(1)(1) = 45$.

Puesto que $\Delta > 0$, el polinomio tiene dos raíces:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{45}}{2(1)} = \frac{7 \pm \sqrt{45}}{2}.$$

$$\text{Las raíces son: } \begin{cases} x_1 = \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2} = 6.854101 \dots \approx 6.85 \\ x_2 = \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2} = 0.145898 \dots \approx 0.15. \end{cases}$$

Los puntos de intersección con el eje $(0, 145898 \dots, 0)$, $(6.854101 \dots, 0)$.

(c) Asíntotas verticales:

La función $f(x) = \frac{x^2 - 7x + 1}{(x + 1)^2}$ es discontinua solo si $(x + 1)^2 = 0$, es decir $x = -1$.

Se debe determinar el comportamiento de la función alrededor de ese número, mediante el cálculo de los límites laterales respectivos.

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 7x + 1}{(x + 1)^2} = \frac{9}{(0^+)^2} = \frac{9}{0^+} = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - 7x + 1}{(x + 1)^2} = \frac{9}{(0^-)^2} = \frac{9}{0^+} = +\infty.$$

Por lo tanto la recta con ecuación $x = -1$ es una asíntota vertical del gráfico de $f(x)$, tanto cuando $x \rightarrow -1^+$, como cuando $x \rightarrow -1^-$.

Asíntotas horizontales:

Se debe determinar el comportamiento de la función, cuando $x \rightarrow -\infty$ y cuando $x \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 7x + 1}{(x + 1)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2(1 - \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2})}{x^2(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2})} = \frac{1 - 0 + 0}{1 + 0 + 0} = 1.$$

Análogamente se comprueba que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

Asíntotas oblicuas:

No existen cuando $x \rightarrow -\infty$, ni cuando $x \rightarrow +\infty$, pues en ambos casos el gráfico tiene asíntota horizontal.

(d) Crecimiento: $f'(x) = \frac{9(x-1)}{(x+1)^3}$.

C_1 = el conjunto de números críticos de f' .

Tipo 1: $f'(x) = 0$ $f'(x) = 0$ solo si $9(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1$, que está en el dominio D .

Tipo 2: $f'(x)$ no existe $f'(x)$ no existe solo si $(x+1)^3 = 0 \Rightarrow x = -1$, que no está en el dominio D .

Por lo tanto $C_1 = \{1\}$.

Números de interés para el crecimiento = $C_1 \cup E_D = \{-\infty, -1, 1, +\infty\}$. Se eligen los siguientes números de prueba: $-2, 0, 2$, $f'(-2) = 27$ positivo, $f'(0) = -9$ negativo, $f'(2) = \frac{1}{3}$ positivo.

El cuadro de crecimiento de $f(x)$ es el siguiente:

La función $f(x)$ es creciente en los intervalos abiertos $]-\infty, -1[$, $]1, +\infty[$ y es decreciente en el intervalo abierto $] -1, 1[$.

	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
signo de $f'(x)$	+	-	0	+
crecimiento de $f(x)$				

Claramente se nota que $f(1) = -\frac{5}{4} = -1.25$ es el único valor mínimo relativo. Además, $f(x)$ no tiene valores máximos relativos pues $f(-1)$ no existe.

Concavidad: $f''(x) = -\frac{18(x-2)}{(x+1)^4}$.

C_2 = el conjunto de números críticos de f'' .

Tipo 1: $f''(x) = 0$ $f''(x) = 0$ solo si $18(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2$, que está en el dominio D .

Tipo 2: $f''(x)$ no existe $f''(x)$ no existe solo si $(x+1)^4 = 0 \Rightarrow x = -1$, que no está en el dominio D .

Por lo tanto $C_2 = \{2\}$.

Números de interés para la concavidad = $C_2 \cup E_D = \{-\infty, -1, 2, +\infty\}$. Se eligen los siguientes números de prueba: $-2, 0, 3$, $f''(-2) = 72$ positivo, $f''(0) = 36$ positivo, $f''(3) = -\frac{18}{4^4}$ negativo.

El cuadro de concavidad de $f(x)$ es el siguiente:

El gráfico de $f(x)$ es cóncavo hacia arriba en los intervalos abiertos $]-\infty, -1[$, $] -1, 2[$ y es cóncavo hacia abajo en el intervalo abierto $] 2, +\infty[$.

	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
signo de $f''(x)$	+		+	-
concavidad de $f(x)$				

En el número $x = 2$ el gráfico cambia de concavidad, así que $x = 2$ es un candidato a número de inflexión. Puesto que la derivada $f'(2) = \frac{1}{3}$ existe, el gráfico de $f(x)$ tiene una recta tangente única en el punto $(2, f(2)) = (2, -1)$, que satisface $y = \frac{1}{3}x + b$. Sustituyendo el punto $(x, y) = (2, -1)$ se obtiene $-1 = \frac{1}{3}(2) + b \implies b = -\frac{5}{3}$. Así que la ecuación es $y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$. Por lo tanto: $(2, -1)$ es un punto de inflexión del gráfico de $f(x)$.

(e) Variación de $f(x)$:

Los números de interés para variación son $C_1 \cup C_2 \cup E_D = \{-\infty, -1, 1, 2, +\infty\}$.

El cuadro de variación de $f(x)$ es el siguiente:

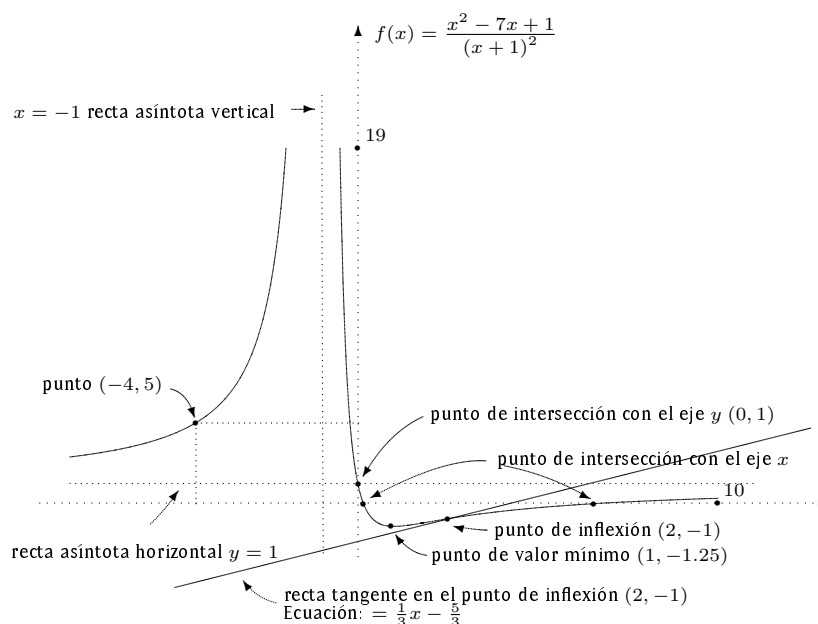
x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	−	0	+	+
$f''(x)$	+	+	+	0	−
$f(x)$					

Valores extremos absolutos:

Puesto que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ y $f(1) = -\frac{5}{4}$, se concluye que el mínimo absoluto de la función $f(x)$ es $f(1) = -1.25$.

Dado que $\lim_{x \rightarrow -1^\pm} f(x) = +\infty$ se concluye que la función $f(x)$ no tiene un valor máximo absoluto.

Otros valores tomados en cuenta para dibujar el gráfico de $f(x)$ son los siguientes: $f(2) = -1$, $f(0) = 1$, $f(-4) = 5$, etc.



2. Sean las siguientes variables:

x = lado de la base de la caja, en decímetros, y = altura de la caja en decímetros.

La función que se debe minimizar es el área total de la caja que denotaremos A .

Área total = área basal + área lateral

$$A = x^2 + 4xy.$$

Para expresar la función A en términos de una variable, solamente debemos encontrar una relación entre las variables x y y .

El volumen de la caja debe ser 32 decímetros cúbicos.

Volumen = (área de la base)(altura) $\Rightarrow 32 = (x^2) \cdot (y) \Rightarrow y = \frac{32}{x^2}$, por lo tanto el área total es

$$A(x) = x^2 + (4x) \left(\frac{32}{x^2} \right) \Rightarrow A(x) = x^2 + \frac{128}{x}, \text{ con } x \in]0, +\infty[.$$

La derivada es $A'(x) = 2x - \frac{128}{x^2} = \frac{2(x^3 - 64)}{x^2}$. Claramente $A'(x)$ existe $\forall x \in]0, +\infty[$.

La derivada $A'(x)$ es igual a 0 solamente si $x^3 - 64 = 0 \Rightarrow x^3 = 64 \Rightarrow x = 4$, este es el único punto crítico.

El cuadro de crecimiento de $A(x)$ es el siguiente:

x	0^+	4	$+\infty$
$A'(x)$	-	0	+
$A(x)$			

Se observa que la función $A(x)$ alcanza un valor mínimo absoluto cuando $x = 4$ (en decímetros), tal valor es $A(4) = (4)^2 + \frac{128}{4}$ decímetros cuadrados.

Las dimensiones de la caja con área total mínima son:

Lado de la base = $x = 4$ decímetros,

Altura = $y = \frac{32}{x^2} = \frac{32}{16} = 2$ decímetros.

3. Calcule cada una de las siguientes integrales:

$$(a) \int \frac{x^2 + x + 1}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{x^2 + x + 1}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \int (x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}) dx = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C.$$

$$(b) \int \left(\frac{\sin x - 1}{\cos x} \right) \sec x dx = \int \left(\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{1}{\cos x} \right) \sec x dx = \int (\tan x - \sec x) \sec x dx = \int (\sec x)(\tan x) dx - \int (\sec x)^2 dx = \sec x - \tan x + C.$$

$$(c) \int (\sin 2x)(\cos 2x) dx = \int u \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{4} u^2 + C = \frac{1}{4} (\sin 2x)^2 + C.$$

Se usó que $u = \sin 2x$, $\frac{du}{dx} = 2(\cos 2x) \Rightarrow \frac{1}{2} du = (\cos 2x) dx$.

$$(d) \int \frac{x}{\sqrt{2x-1}} dx = \int \frac{\frac{1}{2}(u+1)}{u^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{2} du = \frac{1}{4} \int \frac{u+1}{u^{\frac{1}{2}}} du = \frac{1}{4} \int (u^{\frac{1}{2}} + u^{-\frac{1}{2}}) du = \frac{1}{4} \left(\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + 2u^{\frac{1}{2}} \right) + C \\ = \frac{1}{6} u^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{6} u^{\frac{1}{2}} (u+3) + C = \frac{1}{6} (2x-1)^{\frac{1}{2}} (2x-1+3) + C = \frac{1}{3} (x+1)(2x-1)^{\frac{1}{2}} + C.$$

Se usó la sustitución $u = 2x - 1$, $\frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} du = dx$. Además, $x = \frac{1}{2}(u+1)$.

$$(e) u = x - 1 \Rightarrow du = dx \text{ y } x = u + 1.$$

$$\text{Si } x = 0 \Rightarrow u = -1 \text{ y si } x = 1 \Rightarrow u = 0, \text{ entonces } \int_0^1 x(x-1)^2 dx = \int_{-1}^0 (u+1)u^2 du \\ = \int_{-1}^0 (u^3 + u^2) du = \left[\frac{u^4}{4} + \frac{u^3}{3} \right]_{-1}^0 = 0 - \left(\frac{(-1)^4}{4} + \frac{(-1)^3}{3} \right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{-3+4}{12} = \frac{1}{12}.$$

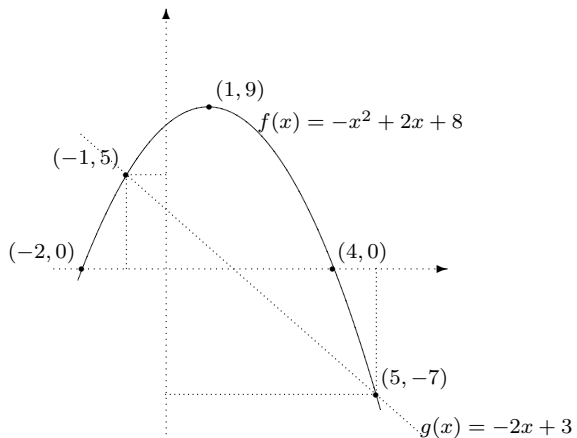
4. Considere la región limitada por los gráficos de las funciones $f(x) = -x^2 + 2x + 8$, $g(x) = -2x + 3$.

(a) Para encontrar los puntos de intersección entre los gráficos se igualan las funciones:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow -x^2 + 2x + 8 = -2x + 3 \Rightarrow -x^2 + 4x + 5 = 0 \Rightarrow -(x+1)(x-5) = 0 \Rightarrow x = -1, \\ x = 5.$$

$$x = -1 \Rightarrow f(-1) = g(-1) = 5, \text{ punto } (-1, 5)$$

$$x = 5 \Rightarrow f(5) = g(5) = -7, \text{ punto } (5, -7).$$



(b) El área de la región limitada por los gráficos de las funciones dadas es:

$$\begin{aligned}\text{Área} &= \int_{-1}^5 [f(x) - g(x)] dx = \int_{-1}^5 (-x^2 + 4x + 5) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 5x \right) \Big|_{-1}^5 \\ &= \left(-\frac{125}{3} + 50 + 25 \right) - \left(\frac{1}{3} + 2 - 5 \right) = -\frac{126}{3} + 78 = 36 \quad \text{unidades de área.}\end{aligned}$$

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

FACULTAD DE CIENCIAS

MATERIA: MA-1210. Cálculo I

ESCUELA DE MATEMÁTICA

II CICLO LECTIVO. 2000

—III Examen Parcial—

El examen debe estar escrito con bolígrafo en su totalidad. Si hay partes escritas en lápiz, el estudiante no tiene derecho a reclamos

1. (10pts) Calcule el siguiente límite usando L'Hôpital: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 4x}$.

2. (30pts) Calcule $f'(x)$ en cada caso:

(a) $f(x) = \ln \left(\frac{\sqrt{4+x^2}}{x} \right)$

(b) $f(x) = (1 + e^x)^{\frac{1}{x}}$

(c) $f(x) = \sin(\arccos(x))$.

3. (60pts) Halle las siguientes integrales:

(a) (10pts) $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^2} dt$.

(b) (15pts) $\int x \sec^2 x dx$.

(c) (15pts) $\int e^x \cos 2x dx$.

(d) (20pts) $\int \frac{x+1}{x^3+x} dx$.

Algunas fórmulas básicas de integración:

1. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsen \frac{u}{a} + C$

2. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{|u|}{a} + C$

3. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C$

4. $\int \sec u du = \ln |\sec u + \tan u| + C$.

NOTA: debe justificar cada respuesta.

Universidad de Costa Rica

Primer Parcial Ma 1210 Cálculo I

Facultad de Ciencias

II Ciclo de 2005

Escuela de Matemática

Total 80 puntos

Departamento de Matemática Aplicada

Tiempo 3 horas

1. Considere la función h definida por $h(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 2x + 2, & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ 8 - x, & \text{si } x > 2. \end{cases}$

Calcule, si existen, los siguientes límites: (5 pts)

a) $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$.

2. Calcule, si existen, los siguientes límites. (20 pts)

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{|x - 2|}$

c) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x - 3}}{x^2 - 49}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4x - 12}{x^4 - 16}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1 - x} - \frac{3}{1 - x^3} \right)$.

3. Determine las asíntotas verticales y las discontinuidades evitables de la función definida por la expresión (10 pts)

$$f(x) = \frac{3x^2 + 3x - 18}{x(x - 1)(x - 2)}.$$

4. Use la definición de derivada para hallar $f'(x)$ si $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$. (10 pts)

5. Calcule $f'(x)$ para las siguientes funciones. (10 pts)

a) $f(x) = \frac{(2 - x^2)(3 - x^3)}{(1 - x)^2}$

b) $f(x) = (1 + x) \sqrt{2 + x^2} \sqrt[3]{3 + x^3}$

6. Calcule la ecuación de la recta normal a la gráfica de la curva $y^4 + 3y - 4x^3 = 5x + 1$, en el punto $P(1, -2)$. (10 pts)

7. Una célula en crecimiento tiene forma esférica, donde su radio r se mide en micrómetros ($1\mu m = 10^{-6}m$). Calcule la razón instantánea de cambio de su volumen V con respecto a r , cuando $r = 5\mu m$. (5 pts)

8. Encuentre los valores máximo y mínimo absolutos de $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ en el intervalo $\left[-\frac{1}{2}, 2\right]$. (10 pts)

Nada hay más práctico que una buena teoría.

Emmanuel Kant

Universidad de Costa Rica

Reposición Primer Parcial Ma 1210 Cálculo I

Facultad de Ciencias

II Ciclo de 2005

Escuela de Matemática

Total 85 puntos

Departamento de Matemática Aplicada

Tiempo 3 horas

1. Determine los valores de a y b de modo que la función h definida a continuación sea continua en $\mathbb{R}$. (10 pts)

$$h(x) = \begin{cases} \frac{ax^2+1}{x-3}, & \text{si } x < 2 \\ b, & \text{si } x = 2 \\ 2ax-3, & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

2. Calcule, si existen, los siguientes límites. (20 pts)

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^5 - 7x^2 - 5x + 5}{2x^4 + 3x + 1}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|2x+1| - |2x-1|}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1}$

d) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 3x^2 - 4}{\sqrt{x^2 - 2x + 1} - 3}$

3. Hallar el valor de la constante c para que el límite exista y calcúlelo. (10 pts)

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + cx + c + 3}{x^2 + x - 2}.$$

4. Determinar el punto de la parábola $y = x^2 - 7x + 3$ por el cual pasa una recta tangente paralela a la recta cuya ecuación es $5x + y - 3 = 0$. (10 pts)

5. Calcule $f'(x)$ para las siguientes funciones. (10 pts)

a) $f(x) = \left(\frac{3x+1}{2x+1}\right)^4$

b) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{x}}{x^{\frac{3}{2}}+3}}$

6. Verifique, mediante la definición, que la función dada por $f(x) = |x^2 - 1|$ no es derivable en $x = 1$. (10 pts)

7. Un canal de agua tiene 10 m de longitud y su sección transversal tiene la forma de un trapecio isósceles de 30 cm de ancho en el fondo, 80 cm de ancho en la parte superior y 50 cm de altura. Si el canal se llena con $0.2 \text{ m}^3/\text{min}$. de agua, con qué velocidad sube el nivel de agua cuando la profundidad de ésta es de 30 cm? (10 pts)

8. Considere la función $g(x) = 2x - 3x^{\frac{2}{3}}$. Calcule el máximo y el mínimo en $[-1, 3]$. (5 pts)

La política es para el momento.

Una ecuación es para la eternidad

A. Einstein

Universidad de Costa Rica
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemática
Departamento de Matemática Aplicada

Segundo Parcial Ma 1210 Cálculo I
II Ciclo de 2005
Total 70 puntos
Tiempo 3 horas

1. Considere la función f definida por $f(x) = \frac{x^3}{2x^2 - 8}$, con

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 12)}{2(x^2 - 4)^2}, \quad f''(x) = \frac{4x(x^2 + 12)}{(x^2 - 4)^3}.$$

- a) Determine el dominio y las intersecciones con los ejes. (4 pts)
b) Determine los intervalos de monotonía y extremos relativos de la función. (5 pts)
c) Determine los intervalos en los que la gráfica es cóncava hacia abajo o cóncava hacia arriba, y los puntos de inflexión. (5 pts)
d) Calcule las asíntotas y trace la gráfica de f . (8 pts)
2. Se forma un recipiente uniendo dos semiesferas a los extremos de un cilindro circular recto. El volumen total es de 12cm^3 . Hallar el radio del cilindro que produce la mínima área total de la figura. (8 pts)
3. a) Dibuje la región encerrada por las curvas $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $g(x) = 3 + 4x - x^2$. (5 pts)
b) Calcule el área de la región. (5 pts)
4. Calcule las siguientes integrales. (15 pts)
- a) $\int_{-1}^4 |x^2 - x - 2| dx$ b) $\int \frac{x}{x^2 - 4x + 4} dx$ c) $\int x^2 \sqrt{x+5} dx$.
5. Use el procedimiento de derivación logarítmica y calcule $f'(x)$ si $f(x) = x^{\sqrt{x}}$. (5 pts)
6. Calcule $f'(x)$ si (10 pts)

a) $f(x) = \int_{-3x}^1 \frac{u^3}{1+u^2} du$ b) $f(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$

Universidad de Costa Rica

Reposición Segundo Parcial Ma 1210 Cálculo I

Facultad de Ciencias

II Ciclo de 2005

Escuela de Matemática

Total 70 puntos

Departamento de Matemática Aplicada

Tiempo 3 horas

1. Considere la función f definida por $f(x) = \frac{2(x^2 - 9)}{x^2 - 4}$, con

$$f'(x) = \frac{20x}{(x^2 - 4)^2}, \quad f''(x) = \frac{-20(3x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^3}.$$

- Determine el dominio y las intersecciones con los ejes. (4 pts)
 - Determine los intervalos de monotonía y extremos relativos de la función. (5 pts)
 - Determine los intervalos en los que la gráfica es cóncava hacia abajo o cóncava hacia arriba y los puntos de inflexión. (5 pts)
 - Calcule las asíntotas y trace la gráfica de f . (8 pts)
2. Hallar el volumen del cono circular recto más grande que se puede inscribir en una esfera de radio r . (8 pts)
- Dibuje la región encerrada por las curvas dadas por $f(x) = x^3 - 2x + 1$, $g(x) = -2x$ y $x = 1$. (5 pts)
 - Calcule el área de la región. (5 pts)
3. Calcule las siguientes integrales. (15 pts)

$$\text{a) } \int_0^3 |2x - 3| \, dx \quad \text{b) } \int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}} \, dx \quad \text{c) } \int \frac{x\sqrt{x}}{1+x^2\sqrt{x}} \, dx$$

4. Use el procedimiento de derivación logarítmica y calcule $f'(x)$ si (5 pts)

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2} \sqrt{(x+3)^3}}.$$

5. Calcule $f'(x)$ si (10 pts)

$$\text{a) } f(x) = x^2 \cdot 10^{2x} \quad \text{b) } f(x) = \ln \frac{x(x^2 + 1)^2}{\sqrt{2x^3 - 1}}.$$

Universidad de Costa Rica
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemática
Departamento de Matemática Aplicada

Tercer Parcial Ma 1210 Cálculo I
II Ciclo de 2005
Total 80 puntos
Tiempo 3 horas

1. Calcule $f'(x)$ para las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sin \pi x \cdot \cos \pi x$ (5 ptos)

b) $f(x) = \sqrt{1 + \arcsen(2x)}$ (5 ptos)

2. Calcule los siguientes límites: (20 ptos)

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{a}{x}\right)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\frac{1}{x}}.$

3. Calcule las siguientes integrales: (50 ptos)

a) $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$

c) $\int \frac{dx}{\sqrt{x - x^2}}$

b) $\int \frac{x dx}{(x - 1)(x + 1)^2}$

d) $\int x^2 e^x dx$

e) $\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos x} dx.$

*Universidad de Costa Rica**Reposición Tercer Parcial Ma 1210 Cálculo I**Facultad de Ciencias**II Ciclo de 2005**Escuela de Matemática**Total 70 puntos**Departamento de Matemática Aplicada**Tiempo 3 horas*

1. Determine la primera derivada de las siguientes funciones: (10 pts.)

a) $f(x) = \arcsen\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right).$

b) $f(x) = 3 \sen x \cos^2 x + \sen^3 x.$

2. Calcule, si existen, los siguientes límites. Justifique. (20 pts.)

a) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cot x)^{\sen x}.$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \arcsen x \cot x.$

3. Calcule las siguientes integrales. (40 pts.)

a) $\int e^{-ax} \cos bx \, dx \quad (a > 0)$

b) $\int \frac{dx}{x^3 - 2x^2 + x}$

c) $\int \frac{dx}{\sqrt{7-5x^2}}$

d) $\int \frac{3-2x}{5x^2+7} \, dx.$

Universidad de Costa Rica

Examen de Ampliación y Suficiencia Ma 1210 Cálculo I

Facultad de Ciencias

II Ciclo de 2005

Escuela de Matemática

Total 70 puntos

Departamento de Matemática Aplicada

Tiempo 3 horas

1. Considere la función f definida por $f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}$, con

$$f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{6x}{(x+1)^4}.$$

- a) Determine el dominio y las intersecciones con los ejes. (4 pts)
- b) Determine los intervalos de monotonía y extremos relativos de la función. (5 pts)
- c) Determine los intervalos en los que la gráfica es cóncava hacia abajo o cóncava hacia arriba y los puntos de inflexión. (5 pts)
- d) Calcule las asíntotas y trace la gráfica de f . (8 pts)
2. Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede inscribir en un semicírculo de radio 10 (Considere la semicircunferencia $y = \sqrt{100 - x^2}$). (8 pts)
3. a) Dibuje la región encerrada por $f(x) = 3x - 4x^2 + x^3$ y $g(x) = x^2 - x$. (5 pts)
- b) Calcule el área de la región. (5 pts)
4. Calcule las siguientes integrales. (15 pts)

$$\text{a) } \int_0^4 |x^2 - 4x + 3| \, dx \quad \text{b) } \int \frac{x-4}{\sqrt{x^2-8x+1}} \, dx \quad \text{c) } \int \frac{3x^2-2}{x^2+4} \, dx$$

5. Use el procedimiento de derivación logarítmica y calcule $f'(x)$ si (5 pts)

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2+1}{x^2-1}}.$$

6. Calcule $f'(x)$ si (10 pts)

$$\text{a) } f(x) = 2e^{3x} + 3e^{-2x}$$

$$\text{b) } f(x) = 2^{\arcsen 3x}.$$