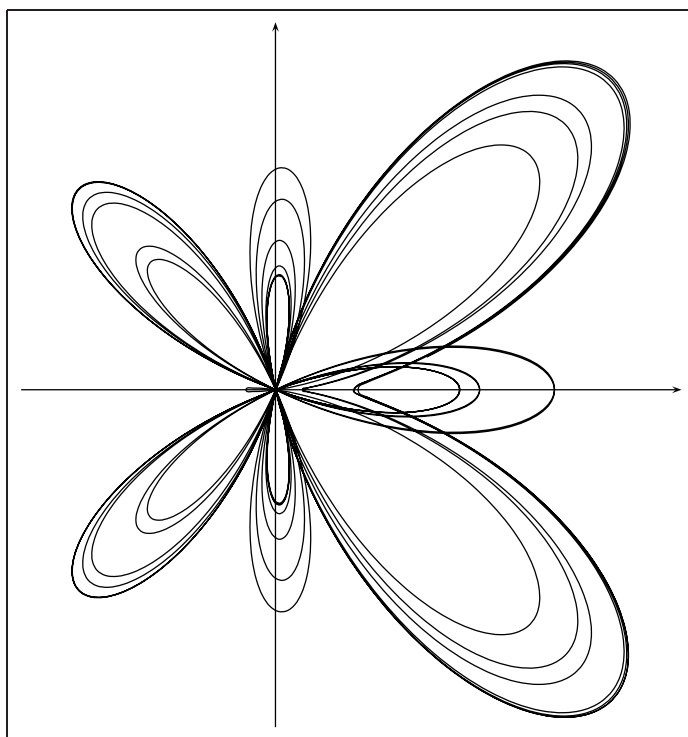




Universidad de Costa Rica

Escuela de Matemática



Serie: Cabécar

Ejercicios de Cálculo III

Cálculo Diferencial e Integral III

Prof. Osvaldo Acuña
Prof. Jorge Poltronieri

3^a edición 2^a reimpresión

2008

Valor del ejemplar ₤3500

Contenidos

| | |
|---|------------|
| 1 Ejercicios de Superficies: Prof. Osvaldo Acuña | 1 |
| Procedimiento para decidir el tipo de cuádrica | 1 |
| Ejercicios | 2 |
| Solución de Ejercicios de Superficies — Prof. Osvaldo Acuña | 5 |
| 2 Ejercicios de Continuidad, Diferenciabilidad, Regla de la cadena, Función implícita, Prof. Osvaldo Acuña, Prof. Jorge Poltronieri | 23 |
| Solución ejercicios de Continuidad, Diferenciabilidad, Regla de la cadena, Función implícita, Prof. Osvaldo Acuña, Prof. Jorge Poltronieri | 29 |
| 3 Máximos y mínimos con y sin restricciones — Prof. Jorge Poltronieri | 51 |
| Solución de ejercicios de máximos y mínimos con y sin restricciones — Prof. Jorge Poltronieri | 54 |
| 4 Ejercicios de Integrales dobles, triples – aplicaciones: Prof. Jorge Poltronieri | 81 |
| Soluciones de ejercicios: Integrales dobles, triples – aplicaciones: Prof. Jorge Poltronieri . . . | 91 |
| 5 Ejercicios de Integrales de línea: Prof. Osvaldo Acuña | 143 |
| Soluciones de Ejercicios de Integrales de línea: Prof. Osvaldo Acuña | 145 |
| 6 Ejercicios de Integrales de superficie: Prof. Osvaldo Acuña, Prof. Jorge Poltronieri | 151 |
| Soluciones de ejercicios de Integrales de superficie: Prof. Osvaldo Acuña, Prof. Jorge Poltronieri | 156 |

Tema 1

Ejercicios de Superficies: Prof. Osvaldo Acuña

Procedimiento para decidir el tipo de cuádrica

En general una superficie cuádrica tiene la forma $ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyx+gx+hy+iz+j=0$.

Observe que cuando $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $\mathbf{t} = \begin{bmatrix} g \\ h \\ i \end{bmatrix}$, $H = \begin{bmatrix} a & \frac{d}{2} & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & b & \frac{f}{2} \\ \frac{e}{2} & \frac{f}{2} & c \end{bmatrix}$ se tiene que $\mathbf{x}'H\mathbf{x} + \mathbf{t}'\mathbf{x} + j = 0$ es

equivalente a:

$$[x, y, z] \begin{bmatrix} a & \frac{d}{2} & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & b & \frac{f}{2} \\ \frac{e}{2} & \frac{f}{2} & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [g, h, i] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + j = 0$$

$$[x, y, z] \begin{bmatrix} ax + \frac{d}{2}y + \frac{e}{2}z \\ \frac{d}{2}x + by + \frac{f}{2}z \\ \frac{e}{2}x + \frac{f}{2}y + cz \end{bmatrix} + gx + hy + iz + j = 0$$

$$ax^2 + \frac{d}{2}xy + \frac{e}{2}xz + \frac{d}{2}xy + by^2 + \frac{f}{2}yz + \frac{e}{2}xz + \frac{f}{2}yz + cz^2 = 0$$

$$ax^2 + dxy + exz + by^2 + fyz + cz^2 + gx + hy + iz + j = 0,$$

luego

$$[x, y, z] H \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \mathbf{t}' \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + j = \mathbf{x}'H\mathbf{x} + \mathbf{t}'\mathbf{x} + j = 0.$$

Diagonalizando la matriz H encontramos vectores normales ortogonales e_1, e_2, e_3 , tales que si $P = [e_1, e_2, e_3]$ matriz definida por columnas, se tiene:

$$P'HP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix},$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ son los valores propios de H , e_i es vector propio asociado a λ_i , $i = 1, 2, 3$.

Si $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ ($\mathbf{y} = P'\mathbf{x}$), $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$, tenemos que:

$$(P\mathbf{y})'H(P\mathbf{y}) + \mathbf{t}'(P\mathbf{y}) + j = 0 \implies \mathbf{y}'P'HP\mathbf{y} + \mathbf{t} \cdot [e_1, e_2, e_3] \mathbf{y} + j = 0$$

$$\mathbf{y}' \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \mathbf{y} + [\mathbf{t}'e_1, \mathbf{t}'e_2, \mathbf{t}'e_3] \mathbf{y} + j = 0$$

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 + (\mathbf{t}'e_1)y_1 + (\mathbf{t}'e_2)y_2 + (\mathbf{t}'e_3)y_3 + j = 0.$$

Ejercicios

1. Se considera la superficie cuádrica $-xy + xz + yz = 1$. Identificarla, graficarla y dar el nuevo sistema de ejes de la rotación.
2. Sea $x^2 + y^2 + z^2 - xy + xz + yz + x + y + z + 1 = 0$ la superficie cuádrica. Identificarla, graficarla y dar el nuevo sistema de ejes de la rotación.
3. Identificar la cuádrica $144x^2 + 100y^2 + 81z^2 - 216xz - 540x - 720z = 0$.
4. Encontrar la ecuación del cono cuyo vértice es el centro de la cuádrica $2x^2 + 2y^2 - z^2 - 8y + 2z - 1 = 0$ y cuya directriz es la intersección de esta cuádrica con el plano $3z = 2y$.
5. Sea la cuádrica: $3x^2 + 3y^2 + 7z^2 + 4xy + 2xz + 8yz + 2bx - 6y + 4z + 1 = 0$.

c) el eje $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-5}{3}$.

16. Hallar la ecuación del cono de vértice $(2, 4, 5)$ y cuya directriz es la circunferencia $x^2 + y^2 + z^2 = 9$,
 $z = x + y$.

Solución de Ejercicios de Superficies — Prof. Osvaldo Acuña

1. Se considera la superficie cuádrica $-xy + xz + yz = 1$. Identificarla, graficarla y dar el nuevo sistema de ejes de la rotación.

Solucin La matriz asociada a la superficie cuádrica es $\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$, y el polinomio característico

$$\text{asociado es } P(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \lambda \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \lambda & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \lambda & -\frac{1}{2} \\ 0 & \lambda - \frac{1}{2} & \lambda - \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \lambda & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \lambda + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \lambda - \frac{1}{2} \end{bmatrix} =$$

$$(\lambda - \frac{1}{2})(\lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}) = (\lambda - \frac{1}{2})(\lambda + 1)(\lambda - \frac{1}{2}) = (\lambda - \frac{1}{2})^2(\lambda + 1).$$

Los valores propios son: $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$, $\lambda_3 = -1$.

Si $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$ en la matriz $\lambda I - H$ se tiene:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \therefore x + y - z = 0, z = x + y.$$

Solución general $\begin{bmatrix} x \\ y \\ x + y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$

Consideremos $e_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ un vector propio normalizado, entonces vamos a determinar un vector

propio de la forma $\begin{bmatrix} x \\ y \\ x + y \end{bmatrix}$, perpendicular a e_1 , es decir:

$$e_1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ x+y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) = 0 \implies 2x + y = 0 \implies y = -2x, x + y = -x.$$

Por lo tanto $\begin{bmatrix} x \\ -2x \\ -x \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ son (para x arbitrario) todos los vectores propios de $\frac{1}{2}$ perpendicu-

lares a e_1 . Se escoge, por ejemplo, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$$\text{Si } \lambda = \lambda_3 = -1, \text{ sea } e_3 = e_1 \times e_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{vmatrix} =$$

$$\left(\frac{6}{\sqrt{6}\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{6}} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

$$\text{Sea } P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \text{ la matriz de rotación.}$$

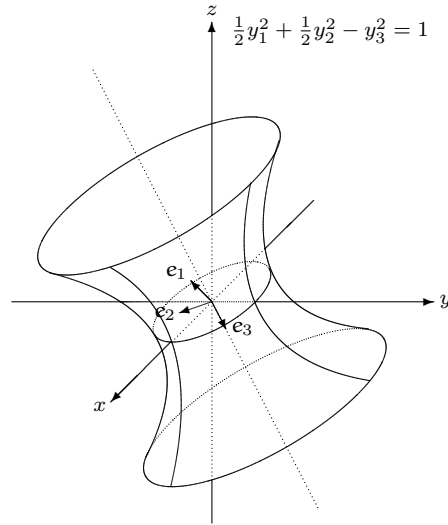
Si $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ es tal que $P \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, o

bien $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = P' \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, tenemos que la rotación

P transforma $-xy + xz + yz = 1$ en $\frac{1}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 - y_3^2 = 1$, hiperboloide de un manto en el sistema

$\{e_1, e_2, e_3\}$, con eje central a lo largo de $e_3 =$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \text{ Ver gráfica adjunta.}$$



2. Sea $x^2 + y^2 + z^2 - xy + xz + yz + x + y + z + 1 = 0$ la superficie cuádrica. Identificarla, graficarla y dar el nuevo sistema de ejes de la rotación.

Sea $H = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{t}' = [1, 1, 1]$ y el polinomio característico:

$$P(\lambda) = \det[\lambda I - H] = \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \lambda - 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \lambda - 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \lambda - 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \lambda - \frac{3}{2} & \lambda - \frac{3}{2} \end{bmatrix} =$$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \lambda - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \lambda - \frac{3}{2} \end{bmatrix} = (\lambda - \frac{3}{2}) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \lambda - \frac{1}{2} \end{vmatrix} = (\lambda - \frac{3}{2})((\lambda - 1)(\lambda - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}) =$$

$$(\lambda - \frac{3}{2})(\lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}) = (\lambda - \frac{3}{2})(\lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda) = \lambda(\lambda - \frac{3}{2})(\lambda - \frac{3}{2}).$$

Los valores propios son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{3}{2}$.

Para $\lambda = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{3}{2}$ en la matriz $\lambda I - H$, obtenemos como en el ejercicio anterior:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ y encontramos que } e_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \text{ y para } \lambda_1 = 0 \text{ si } e_1 = e_2 \times e_3 =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

Sea $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$, entonces

$$\frac{3}{2}y_2^2 + \frac{3}{2}y_3^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 + \sqrt{2}y_2 - \frac{2}{\sqrt{6}}y_3 + 1 = 0,$$

$$\frac{3}{2}y_2^2 + \sqrt{2}y_2 + \frac{3}{2}y_3^2 - \frac{2}{\sqrt{6}}y_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}}y_1 - 1$$

$$y_2^2 + 2\frac{\sqrt{2}}{3}y_2 + y_3^2 - 2\frac{2}{3\sqrt{6}}y_3 = -\frac{2}{3\sqrt{3}}y_1 - \frac{2}{3}$$

$$\left(y_2 + \frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \left(y_3 - \frac{2}{3\sqrt{6}}\right)^2 = -\frac{2}{3\sqrt{2}}y_1 - \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9 \cdot 3}$$

$$\left(y_2 + \frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \left(y_3 - \frac{2}{3\sqrt{6}}\right)^2 = -\frac{2}{3\sqrt{3}}y_1 + \frac{-18+6+2}{27} =$$

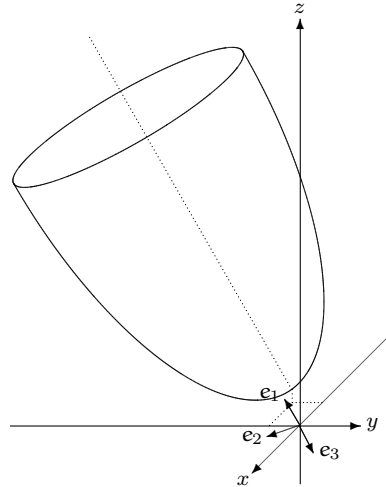
$$-\frac{2}{3\sqrt{3}}y_1 - \frac{10}{27} = -\frac{2}{3\sqrt{3}}\left(y_1 + \frac{10 \cdot 3\sqrt{3}}{2 \cdot 27}\right) =$$

$$-\frac{2}{3\sqrt{3}}\left(y_1 + \frac{5\sqrt{3}}{9}\right). \text{ Así obtenemos la ecuación:}$$

$$\left(y_2 + \frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \left(y_3 - \frac{2}{3\sqrt{6}}\right)^2 = -\frac{2}{3\sqrt{3}}\left(y_1 + \frac{5\sqrt{3}}{9}\right), \text{ de centro } \left(-\frac{5\sqrt{3}}{9}, -\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{2}{3\sqrt{6}}\right), \text{ en el sistema } (y_1, y_2, y_3).$$

Tal superficie es un paraboloides elíptico, con semi-eje central en la dirección $(-1, 0, 0)$.

Por otro lado, debemos encontrar las coordenadas del centro de esta superficie en el sistema (x, y, z) ,



por lo que procedemos de la siguiente manera:

$$P \cdot \begin{bmatrix} -\frac{5\sqrt{3}}{9} \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{2}{3\sqrt{6}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{5\sqrt{3}}{9\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} + \frac{2}{3\sqrt{6}\sqrt{6}} \\ -\frac{5\sqrt{3}}{9\sqrt{3}} - \frac{4}{3\sqrt{6}\sqrt{6}} \\ -\frac{5\sqrt{3}}{9\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} - \frac{2}{3\sqrt{6}\sqrt{6}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{9} \\ -\frac{7}{9} \\ \frac{1}{9} \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, la superficie en el sistema (x, y, z) tiene por centro $(-\frac{7}{9}, -\frac{7}{9}, \frac{1}{9})$ y el semi-eje central tiene dirección $(-1, -1, 1)$.

3. Identificar la cuádrica $144x^2 + 100y^2 + 81z^2 - 216xz - 540x - 720z = 0$.

Consideremos la matriz $A = \begin{bmatrix} 144 & 0 & -108 \\ 0 & 100 & 0 \\ -108 & 0 & 81 \end{bmatrix}$, $\mathbf{t}' = [-540, 0, -720]$ y el polinomio caracte-

rístico $P(\lambda) = \det \begin{vmatrix} \lambda - 144 & 0 & 108 \\ 0 & \lambda - 100 & 0 \\ 108 & 0 & \lambda - 81 \end{vmatrix} = (\lambda - 144)(\lambda - 100)(\lambda - 81) + 108 \cdot (-108(\lambda - 100)) = (\lambda - 100)[(\lambda - 144)(\lambda - 81) - (108)^2] = (\lambda - 100)(\lambda^2 - 225\lambda + 144 \cdot 81 - (108)^2) = \lambda(\lambda - 100)(\lambda - 225)$.

Los valores propios de A son 0, 100, 225.

Cálculo de los vectores propios

Para $\lambda = 0$: $\begin{bmatrix} -144 & 0 & 108 \\ 0 & -100 & 0 \\ 108 & 0 & -81 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix} \implies -4x + 3z = 0, y = 0,$

$\begin{bmatrix} \frac{3}{4}z \\ 0 \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Tomemos $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}$.

$$\text{Para } \lambda = 100: \begin{bmatrix} -44 & 0 & 108 \\ 0 & 0 & 0 \\ 108 & 0 & 19 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} -44x + 108z = 0 \\ 108x + 19z = 0. \end{cases}$$

Como $-144 \cdot 19 - (108)^2 \neq 0 \implies x = z = 0$, por lo tanto tenemos $\begin{bmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, es el conjunto

de vectores propios y tomemos $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$$\text{Para } \lambda = 225, \text{ sea } e_3 = e_1 \times e_2 = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} \\ 0 \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$

La matriz de rotación es $P = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$.

$$\text{Si } \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = P' \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \implies 0y_1^2 + 100y_2^2 + 225y_3^2 + (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_1)y_1 + (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_2)y_2 + (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_3)y_3 = 0,$$

es decir:

$$100y_2^2 + 225y_3^2 + (-540 \cdot \frac{3}{5} - 720 \cdot \frac{4}{5})y_1 + (-540 \cdot 0 + 0 \cdot 1 - 720 \cdot 0)y_2 + (-540 \cdot \frac{4}{5} - 720 \cdot (-\frac{3}{5}))y_3 = 0,$$

o sea $100y_2^2 + 225y_3^2 - 900y_1 = 0$, luego $y_1 = \frac{y_2^2}{9} + \frac{y_3^2}{4}$ representa un paraboloides elíptico.

4. Encontrar la ecuación del cono cuyo vértice es el centro de la cuádrica $2x^2 + 2y^2 - z^2 - 8y + 2z - 1 = 0$ y cuya directriz es la intersección de esta cuádrica con el plano $3z = 2y$.

Solucin Completando cuadrados tenemos $2x^2 + 2(y^2 - 4y + 4) - (z^2 - 2z + 1) = -1 + 8 + 1 = 8$,

es decir $2x^2 + 2(y - 2)^2 - (z - 1)^2 = 8$, su centro es $(0, 2, 1)$.

$$\text{Directriz} \begin{cases} 2x^2 + 2(y - 2)^2 - (z - 1)^2 = 8 \\ 3z = 2y, \end{cases}$$

entonces $r(t) = (0, 2, 1) + t(x, y - 2, z - 1) = (tx, 2 + t(y - 2), 1 + t(z - 1)) = (x_0, y_0, z_0)$, es decir

$x_0 = tx, y_0 = 2 + t(y - 2), z_0 = 1 + t(z - 1)$, pero $2x_0^2 + 2(y_0 - 2)^2 - (z_0 - 1)^2 = 8$ y $z_0 = 2y_0$,

entonces $3(1 + t(z - 1)) = 2(2 + t(y - 2)) \implies 3t(z - 1) - 2t(y - 2) = 1 \implies t[3z - 3 - 2y + 4] =$

$1 \implies t = \frac{1}{3z - 2y + 1}$, o sea $x_0 = \frac{x}{3z - 2y + 1}, y_0 - 2 = \frac{y - 2}{3z - 2y + 1}, z_0 - 1 = \frac{z - 1}{3z - 2y + 1}$

$\therefore \frac{2x^2}{(3z - 2y + 1)^2} + \frac{2(y - 2)^2}{(3z - 2y + 1)^2} - \frac{(z - 1)^2}{(3z - 2y + 1)^2} = 8$, es decir $2x^2 + 2(y - 2)^2 - (z - 1)^2 = 8(3z - 2y + 1)^2$ (ecuación del cono).

5. Sea la cuádrica: $3x^2 + 3y^2 + 7z^2 + 4xy + 2xz + 8yz + 2bx - 6y + 4z + 1 = 0$.

a) Encontrar el valor b para que la ecuación anterior sea la de un cilindro cuádrico.

b) Si hacemos $b = 1$, ¿qué representa entonces la ecuación dada?

Solucin

a) La matriz asociada al cuádrica es $H = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$. El polinomio característico $P(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 & -1 \\ -2 & \lambda - 3 & -4 \\ -1 & -4 & \lambda - 7 \end{bmatrix} =$

$$(\lambda - 3) \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -4 \\ -4 & \lambda - 7 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -1 & \lambda - 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & \lambda - 3 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda^2 - 10\lambda + 21 - 16) +$$

$$2(-2\lambda + 14 - 4) - (8 + \lambda - 3) = (\lambda - 3)(\lambda^2 - 10\lambda + 5) - 4\lambda + 20 - 5 - \lambda = (\lambda - 3)(\lambda^2 - 10\lambda + 5) - 5\lambda + 15 =$$

$$(\lambda - 3)(\lambda^2 - 10\lambda + 5) - 5(\lambda - 3) = (\lambda - 3)(\lambda^2 - 10\lambda + 5 - 5) = (\lambda - 3)(\lambda^2 - 10\lambda) = \lambda(\lambda - 3)(\lambda - 10).$$

Los valores propios de H son $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 10$.

Vectores propios para $\lambda_1 = 0$:

Consideremos
$$\begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -2 & -3 & -4 \\ -1 & -4 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -5 & -5 & -5 \\ -2 & -3 & -4 \\ -1 & -4 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -4 \\ -1 & -4 & -7 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -4 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} x - z = 0 \implies x = z \\ -y - 2z = 0 \implies y = -2z \end{cases} \implies$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z \\ -2z \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ y tomamos } \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

Para $\lambda_2 = 3$, consideremos
$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -4 \\ -1 & -4 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad -2y -$$

$$z = 0, -x - 2z = 0 \implies y = -\frac{z}{2}, x = -2z,$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2z \\ -\frac{z}{2} \\ z \end{bmatrix} = \frac{z}{2} \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ y tomamos } \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{4}{\sqrt{21}} \\ -\frac{1}{\sqrt{21}} \\ \frac{2}{\sqrt{21}} \end{bmatrix}.$$

Para $\lambda_3 = 10$, sea $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{4}{\sqrt{21}} & -\frac{1}{\sqrt{21}} & \frac{2}{\sqrt{21}} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}\sqrt{21}} \begin{bmatrix} -4 + 1 \\ -4 - 2 \\ -1 - 8 \end{bmatrix} =$

$$\frac{1}{\sqrt{6}\sqrt{21}} \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \\ -9 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{14}} \\ -\frac{2}{\sqrt{14}} \\ -\frac{3}{\sqrt{14}} \end{bmatrix}.$$

Sea $P = [e_1, e_2, e_3]$ y $P\mathbf{y} = \mathbf{x} \implies \mathbf{y} = P'\mathbf{x}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$, la ecuación de la cuádrica se

transforma en $0y_1^2 + 3y_2^2 + 10y_3^2 + (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_1)y_1 + (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_2)y_2 + (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_3)y_3 + 1 = 0$. Para que sea un cilindro se debe tener que $\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_1 = 0$; es decir

$$[2b, -6, 4] \cdot [1, -2, 1] \frac{1}{\sqrt{6}} = 0 \implies 2b + 4 + 12 = 0 \implies b = -\frac{16}{2} = -8 \quad \therefore b = -8.$$

b) Si $b = 1 \implies \mathbf{t}' = [2, -6, 4]$, entonces $\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_1 =$

$$[2, -6, 4] \cdot [1, -2, 1] \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{2+12+4}{\sqrt{6}} = \frac{18}{\sqrt{6}} = \frac{18\sqrt{6}}{6} =$$

$$3\sqrt{6}.$$

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_2 = [2, -6, 4] \cdot [4, -1, 2] \frac{1}{\sqrt{21}} = \frac{-8+6+8}{\sqrt{21}} = \frac{2}{7}\sqrt{21}.$$

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_3 = [2, -6, 4] \cdot [-1, -2, -3] \frac{1}{\sqrt{14}} = \frac{2-12+12}{\sqrt{14}} = -\frac{2}{\sqrt{14}}, \text{ por lo tanto la ecuación queda así:}$$

$$3y_2^2 + 10y_3^2 + 3\sqrt{6}y_1 + \frac{2}{7}\sqrt{21}y_2 - \frac{2}{\sqrt{14}}y_3 + 1 = 0,$$

$$3\left(y_2^2 + \frac{2}{21}\sqrt{21}\right) + 10\left(y_3^2 - \frac{2}{10\sqrt{14}}y_3\right) = -3\sqrt{6}y_1 - 1,$$

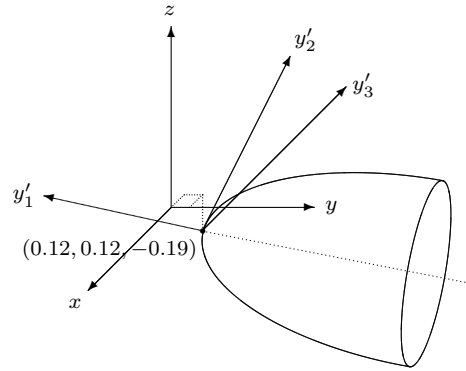
$$3\left(y_2 + \frac{1}{\sqrt{21}}\right)^2 + 10\left(y_3 - \frac{1}{10\sqrt{14}}\right)^2 = -3\sqrt{6}y_1 - 1 + \frac{1}{21} + \frac{1}{100 \cdot 14} = -3\sqrt{6}y_1 + \frac{-200 \cdot 21 + 200 + 3}{200 \cdot 21} =$$

$$-3\sqrt{6}y_1 + \frac{-200 \cdot 20 + 3}{200 \cdot 21} = -3\sqrt{6}y_1 - \frac{3997}{200 \cdot 21} = -3\sqrt{6}y_1 - \frac{571}{200 \cdot 3} =$$

$$-3\sqrt{6}y_1 - \frac{571}{600} = -3\sqrt{6}\left(y_1 + \frac{571}{600 \cdot 3\sqrt{6}}\right) = -3\sqrt{6}\left(y_1 + \frac{571}{1800\sqrt{6}}\right), \text{ o bien:}$$

$$3\left(\underbrace{y_2 + \frac{1}{\sqrt{21}}}_{y'_2}\right)^2 + 10\left(\underbrace{y_3 - \frac{1}{10\sqrt{14}}}_{y'_3}\right)^2 = -3\sqrt{6}\left(\underbrace{y_1 + \frac{571}{1800\sqrt{6}}}_{y'_1}\right).$$

La cuádrica tiene por centro $\left(-\frac{571}{1800\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{21}}, \frac{1}{5\sqrt{14}}\right) \approx (-0.13, -0.22, 0.05)$.



$$P = [e_1, e_2, e_3] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{4}{\sqrt{21}} & -\frac{1}{\sqrt{14}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{21}} & -\frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{21}} & -\frac{3}{\sqrt{14}} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.41 & -0.87 & -0.27 \\ -0.82 & -0.22 & -0.53 \\ 0.41 & 0.44 & -0.80 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.41 & -0.87 & -0.27 \\ -0.82 & -0.22 & -0.53 \\ 0.41 & 0.44 & -0.80 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.13 \\ -0.22 \\ 0.05 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.12 \\ 0.12 \\ -0.19 \end{bmatrix}.$$

y $(0.12, 0.12, -0.19)$ es aproximadamente el centro de la cuádrica en el sistema (x, y, z) .

6. Encuentre la ecuación del cono que tiene por vértice el punto $(0, 0, 0)$ y su directriz la curva $x = \cos \alpha$, $y = \sin \alpha$, $z = \sin 2\alpha$.

Solucin Sea $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ punto en el cono, éste punto pertenece a alguna de las rectas que conforman al cono y ésta tiene por ecuación $r(t) = (0, 0, 0) + t(x, y, z) = (tx, ty, tz)$. Existe t tal que $r(t) = (x_0, y_0, z_0)$ punto en la directriz, entonces para algún α , $x_0 = \cos \alpha$, $y_0 = \sin \alpha$, $z_0 = \sin 2\alpha$, por lo tanto $x_0^2 + y_0^2 = 1$ y $z_0 = 2x_0y_0$.

Tenemos entonces las siguientes ecuaciones:

$$tx = x_0; \quad ty = y_0; \quad tz = z_0; \quad x_0^2 + y_0^2 = 1; \quad z_0 = 2x_0y_0.$$

De las tres primeras ecuaciones y de la quinta tenemos $tz = 2t^2xy$ y como $t^2(x^2 + y^2) = x_0^2 + y_0^2 = 1 \implies t \neq 0 \implies z = (2xy)t$, entonces $z = 0$ si y sólo $x = 0$ o $y = 0$.

Suponga que $x \neq 0$ y que $y \neq 0 \implies t = \frac{z}{2xy}$. Como $t^2(x^2 + y^2) = 1 \implies \frac{z^2}{4x^2y^2}(x^2 + y^2) = 1$; es decir $z^2(x^2 + y^2) = 4x^2y^2$. Esta fórmula es válida en el caso que $x = 0$ o $y = 0$ ya que en éste caso $z = 0$ también. Por lo tanto $z^2(x^2 + y^2) = 4x^2y^2$ es la ecuación del cono.

7. Encuentre la ecuación del cilindro que tiene por directriz la curva $x = \cos \alpha$, $y = \sin \alpha$, $z = \sin \alpha$, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ y generatrices paralelas a la recta de intersección de los planos $x + y + z = 0$ y $x - y + z = 1$.

Solucin Sea L la recta de intersección de los planos $x + y + z = 0$ y $x - y + z = 1$, para encontrar la

dirección de L , es suficiente encontrar dos puntos distintos de L y tomar su diferencia.

$$\text{Si } z = 0, \text{ considere el sistema } \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 1 \end{cases} \text{ entonces } x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2} \therefore (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0) \in L.$$

$$\text{Si } z = 1, \text{ considere el sistema } \begin{cases} x + y = -1 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad x = -\frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2} \therefore (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1) \in L, \text{ entonces}$$

$$(a, b, c) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0) - (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1) = (1, 0, -1) \text{ que es la dirección de } L.$$

Sea (x, y, z) un punto del cilindro; este punto pertenece a una directriz del cilindro que tiene por ecuación $r(t) = (x, y, z) + t(1, 0, -1)$. Esta recta contiene un punto (x_0, y_0, z_0) de la directriz. Como $(x_0, y_0, z_0) = r(t) = (x + t, y, z - t)$, entonces $x + t = x_0, y = y_0, z - t = z_0$.

Por otro lado existe α tal que $x_0 = \cos \alpha, y_0 = \sin \alpha, z_0 = \sin \alpha$, entonces $y_0 = z_0$ y $x_0^2 + y_0^2 = 1$ y tenemos el sistema de ecuaciones:

$$x + t = x_0; \quad y = y_0; \quad z - t = z_0; \quad x_0^2 + y_0^2 = 1; \quad y_0 = z_0.$$

De la segunda, tercera y quinta ecuación obtenemos $y = z - t$, es decir $t = z - y$ y entonces $x_0 = x + z - y$. Sustituyendo en la cuarta se tiene la ecuación del cilindro $(x + z - y)^2 + y^2 = 1$.

8. Hallar la ecuación del cilindro que tiene por directriz la circunferencia $x^2 + y^2 = 9, z = 0$ y generatrices paralelas a la recta $z = 4y - 2, z = 3x + 5$.

Solucin La recta $z = 4y - 2, z = 3x + 5$ se puede escribir como $3x + 5 = 4y - 2 = z$, es decir

$$\frac{3x + 5}{12} = \frac{4y - 2}{12} = \frac{z}{12}, \text{ luego } \frac{x + \frac{5}{3}}{4} = \frac{y - \frac{1}{2}}{3} = \frac{z}{12}.$$

Las ecuaciones de una recta que para por cualquier punto $(x_0, y_0, 0)$ y que es paralela a la recta dada, son:

$$\frac{x - x_0}{4} = \frac{y - y_0}{3} = \frac{z}{12}, \text{ donde } (x_0, y_0, 0) \text{ es un punto arbitrario de la directriz, entonces } x_0 = \frac{3x - z}{3},$$

$$y_0 = \frac{4y - z}{4}.$$

Sustituyendo en $x_0^2 + y_0^2 = 9$, obtenemos la ecuación $\frac{(3x - z)^2}{9} + \frac{(4y - z)^2}{16} = 9$ del cilindro.

9. Hallar la ecuación del cono de vértice $(0, 0, 5)$ y cuya directriz es la circunferencia que es la intersección de las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ y $z - x - y = 0$.

Solucin La recta que une $(0, 0, 5)$ con cualquier punto (x, y, z) del cono, tiene por ecuación $r(t) = (0, 0, 5) + t(x, y, z - 5)$. Esta recta tiene un punto (x_0, y_0, z_0) en la directriz, entonces se tiene $(x_0, y_0, z_0) = (tx, ty, t(z - 5) + 5)$ y tenemos el sistema de ecuaciones $x_0 = tx$; $y_0 = ty$; $z_0 = 5 + t(z - 5)$; $z_0 - x_0 - y_0 = 0$; $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 16$.

Sustituyendo las tres primeras ecuaciones en la cuarta tenemos $5 + t(z - 5) - tx - ty = 0$ y entonces $t = \frac{5}{x + y - z + 5}$. Además, como $z_0 = y_0 + z_0$, la intersección de las superficies tiene como ecuación $x_0^2 + x_0y_0 + y_0^2 = 8$.

Sustituyendo x_0, y_0 en $x_0^2 + x_0y_0 + y_0^2 = 8$, se tiene $t^2(x^2 + xy + y^2) = 8$, es decir $x^2 + xy + y^2 = \frac{8}{25}(x + y - z + 5)^2$, que es la ecuación del cono.

10. Calcular la ecuación del cilindro cuyas generatrices son paralelas al vector $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, y que pasa por la curva plana $x^2 + xy + y^2 = 0, z = 0$.

Solucin Sea $(x_0, y_0, 0)$ cualquier punto de la curva plana, las ecuaciones de cualquier generatriz que pasan por este punto y sean paralelas al vector dado son:

$$\frac{x_0 - x}{2} = \frac{y_0 - y}{3} = -\frac{z}{4}; \quad x_0 = x - \frac{z}{2}; \quad y_0 = y - \frac{3z}{4}.$$

Sustituyendo en $x_0^2 + x_0y_0 + y_0^2 = 0$, obtenemos la ecuación del cilindro $(x^2 - \frac{z}{2}) + (x - \frac{z}{2})(y - \frac{3z}{4}) + (y^2 - \frac{3z}{4}) = 0$.

11. Dado que el elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ se interseca con el plano $Ax + By + Cz + D = 0$, donde $D \neq 0$ a lo largo de la curva Γ , encontrar la ecuación para el cono cuyo vértice está en el centro del elipsoide y tiene a Γ por directriz.

Solucin La recta que pasa por el origen, por un punto (x, y, z) y pertenece al cono tiene por ecuación $r(t) = (0, 0, 0) + t(x, y, z) = (tx, ty, tz)$. Esta recta tiene un punto (x_0, y_0, z_0) de Γ y entonces tenemos

las siguientes ecuaciones:

$$x_0 = tx; \quad y_0 = ty; \quad z_0 = tz; \quad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0; \quad \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1.$$

Sustituyendo las tres primeras ecuaciones en la cuarta ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$, es decir

$$t = \frac{-D}{Ax + By + Cz} \therefore$$

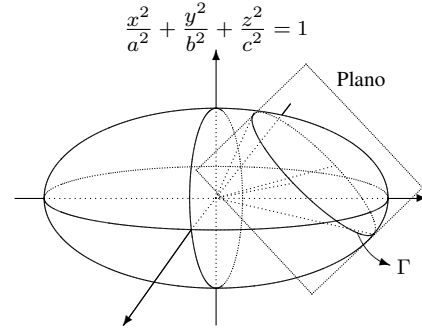
$$x_0 = -\frac{Dx}{Ax + By + Cz}; \quad y_0 = -\frac{Dy}{Ax + By + Cz};$$

$$x_0 = -\frac{Dz}{Ax + By + Cz}; \text{ y entonces}$$

$$\frac{x_0^2}{a^2} = \frac{1}{a^2} \left(\frac{-Dx}{Ax + By + Cz} \right)^2, \quad \frac{y_0^2}{b^2} = \frac{1}{b^2} \left(\frac{-Dy}{Ax + By + Cz} \right)^2,$$

$$\frac{z_0^2}{c^2} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{-Dz}{Ax + By + Cz} \right)^2, \text{ lo que implica que}$$

$$\frac{D^2}{(Ax + By + Cz)^2} \left[\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right] = 1 \text{ es la ecuación del cono.}$$



12. Hallar la ecuación del cono tangente a la superficie $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, con vértice (x', y', z')

Solucin El cono tangente está constituido por el conjunto de

rectas en \mathbb{R}^3 que pasan por (x', y', z') y cortan al elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ en un único punto.}$$

Sea (x, y, z) un punto en ese cono, la recta que lo contiene

tiene por ecuación:

$$r(t) = (x', y', z') + t(x - x', y - y', z - z') =$$

$$(tx + (1-t)x', ty + (1-t)y', tz + (1-t)z').$$

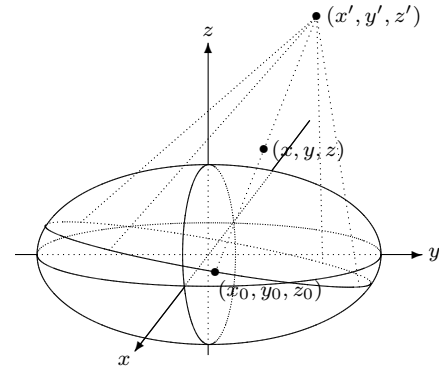
Para algún $t \in \mathbb{R}$, $r(t)$ está en el elipsoide, entonces:

$$\frac{(tx + (1-t)x')^2}{a^2} + \frac{(ty + (1-t)y')^2}{b^2} + \frac{(tz + (1-t)z')^2}{c^2} = 1 \text{ y}$$

$$\frac{t^2x^2 + (1-t)^2(x')^2 + 2t(1-t)xx'}{a^2} + \frac{t^2y^2 + (1-t)^2(y')^2 + 2t(1-t)yy'}{b^2} +$$

$$\frac{t^2z^2 + (1-t)^2(z')^2 + 2t(1-t)zz'}{c^2} = 1, \text{ es decir}$$

$$t^2 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) + (1-t)^2 \left(\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} + \frac{(z')^2}{c^2} \right) + 2t(1-t) \left(\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} \right) = 1.$$



Sea $F = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$, $F' = \frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} + \frac{(z')^2}{c^2}$ y $G = \frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2}$ y tenemos $t^2 F + (t^2 - 2t + 1)F' + (2t - 2t^2)G = 1$, es decir $(F + F' - 2G)t^2 + (2G - 2F')t + F' - 1 = 0$.

Esta ecuación tiene solución única en t ($r(t)$ es tangente al elipsoide), por lo tanto su discriminante $\Delta = 0$, es decir $\Delta = 4(G - F')^2 - 4(F - F' - 2G)(F' - 1) = 0$, por lo tanto $G^2 - FF' + F + F' - 2G = 0 \implies (G - 1)^2 = FF' - F - F' + 1 = (F - 1)(F' - 1)$ y tenemos que $(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1)(\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} + \frac{(z')^2}{c^2} - 1) = (\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} - 1)^2$, que es la ecuación del cono.

13. Calcule la ecuación de la superficie de revolución que se obtiene al girar la recta $x - z = 1$, $x - y + z = 0$,

alrededor del eje $x = y = z$.

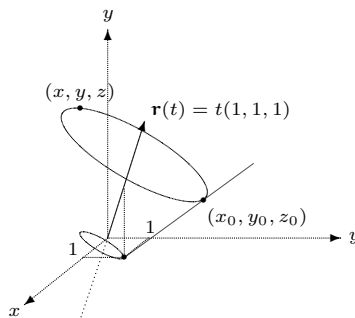
Solucin Tenemos el sistema:

$$x^2 + y^2 + z^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2,$$

$$x - x_0 + y - y_0 + z - z_0 = 0,$$

$$x_0 - z_0 = 1,$$

$$x_0 - y_0 + z_0 = 0.$$



De la segunda y la tercera ecuaciones tenemos $x - 2x_0 + y - y_0 + z + 1 = 0$, es decir $x + y + z + 1 = 2x_0 + y_0$. Por otro lado de las ecuaciones tercera y cuarta tenemos $2x_0 - y_0 = 1$ y entonces se tiene

$$4x_0 = x + y + z + 2 \implies x_0 = \frac{x + y + z + 2}{4},$$

$$y_0 = 2x_0 - 1 = \frac{x + y + z + 2}{2} - 1 = \frac{x + y + z}{2},$$

$$z_0 = x_0 - 1 = \frac{x + y + z + 2}{4} - 1 = \frac{x + y + z - 2}{4},$$

y sustituyendo en la primera ecuación tenemos:

$x^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{x + y + z + 2}{4}\right)^2 + \left(\frac{x + y + z}{2}\right)^2 + \left(\frac{x + y + z - 2}{4}\right)^2$: la ecuación de la superficie de revolución.

14. Calcular la ecuación de la superficie de revolución, obtenida al girar la curva $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z =$

0, alrededor de la recta $\mathbf{r}(t) = (1, -2, 1) + t(0, -1, 1)$.

Solucin Tenemos entonces el siguiente sistema de ecuaciones:

aciones:

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 =$$

$$(x_0 - 1)^2 + (y_0 + 2)^2 + (z_0 - 1)^2 =$$

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 2x_0 + 4y_0 - 2z_0 + 6,$$

$$0(x - x_0) - (y - y_0) + (z - z_0) = 0 \implies y_0 - z_0 = y - z,$$

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1,$$

$$x_0 + y_0 + z_0 = 0.$$

De las ecuaciones primera y tercera obtenemos:

$$-2x_0 + 4y_0 - 2z_0 + 7 = (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2.$$

De las ecuaciones segunda y cuarta tenemos $2y_0 + x_0 = y - z$, $2z_0 + x_0 = z - y$, entonces $y_0 =$

$$\frac{y - z - x_0}{2}, z_0 = \frac{z - y - x_0}{2}.$$

Sustituyendo estas últimas ecuaciones en $-2x_0 + 4y_0 - 2z_0 = (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2$ se tiene

$$-2x_0 + 4\left(\frac{y - z - x_0}{2}\right) - 2\left(\frac{z - y - x_0}{2}\right) = (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 \implies$$

$$-2x_0 + 2y - 2z - 2x_0 - z + y + x_0 = (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 \implies$$

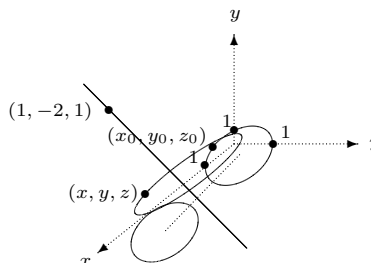
$$-3x_0 + 3y - 3z = (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 \implies y - z - x_0 = \frac{(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2}{3} \implies$$

$$x_0 = y - z - \frac{(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2}{3}, y_0 = \frac{(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2}{6},$$

$$z_0 = \frac{z - y}{2} - \frac{y - z}{2} + \frac{(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2}{6} = z - y + \frac{(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2}{6}.$$

Sustituyendo en la tercera ecuación se tiene:

$$\left[y - z - \frac{(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2}{3} \right]^2 + \left[\frac{(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2}{6} \right]^2 + \left[z - y + \frac{(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2}{6} \right]^2 = 1.$$



Simplificando obtenemos:

$$2(z-y)^2 + (z-y)((x-1)^2 + (y+z)^2 + (z-1)^2) + \frac{[(x-1)^2 + (y+z)^2 + (z-1)^2]^2}{6} = 1,$$

ecuación de la superficie de revolución.

15. Encontrar la ecuación de la superficie de revolución de la curva $x - y = 0, z = 0$, cuando gira alrededor de:

a) el eje x

b) el eje $y = 4, z = 0$

c) el eje $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-5}{3}$.

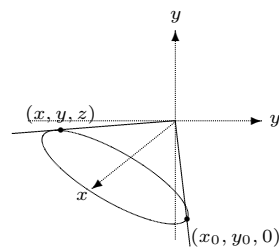
Solución

a) Tenemos las ecuaciones:

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x_0)^2 + (y_0)^2,$$

$$1(x - x_0) + 0(y - y_0) + 0(z - 0) = 0 \implies$$

$$x = x_0, x_0 - y_0 = 0 \implies x_0 = y_0,$$



por lo tanto $x^2 + y^2 + z^2 = 2x^2 \implies x^2 = y^2 + z^2$, es la ecuación de la superficie de revolución.

b) Tenemos las ecuaciones:

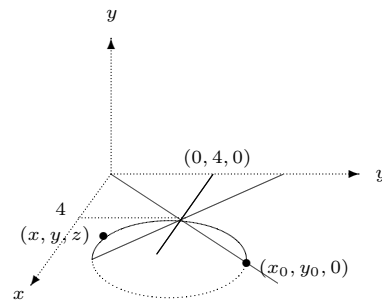
$$x^2 + (y - 4)^2 + z^2 = x_0^2 + (y_0 - 4)^2,$$

$$1(x - x_0) + 0(y - y_0) + 0(z - 0) = 0, x_0 = y_0.$$

De la segunda y tercera ecuación se tiene que $x_0 = y_0 = x$, por

lo que $x^2 + (y - 4)^2 + z^2 = x^2 + (x - 4)^2$, es decir $(x - 4)^2 =$

$(y - 4)^2 + z^2$ es la ecuación de superficie de revolución.



c) El eje $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-5}{3}$ tiene por ecuación vectorial $\mathbf{r}(t) = (2, 1, 5) + t(3, 4, 3)$ y se tienen

las ecuaciones:

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 5)^2 = (x_0 - 2)^2 + (y_0 - 1)^2 + 25,$$

$$3(x - x_0) + 4(y - y_0) + 3(z - 0) = 0, x_0 = y_0.$$

De las ecuaciones segunda y tercera se tiene $3x + 4y + 3z = 7x_0 \implies x_0 = \frac{3x + 4y + 3z}{7}$.

Sustituyendo en la primera ecuación obtenemos:

$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 5)^2 = \left(\frac{3x + 4y + 3z}{7} - 2\right)^2 + \left(\frac{3x + 4y + 3z}{7} - 1\right)^2 + 25$, es la ecuación de la superficie de revolución.

16. Hallar la ecuación del cono de vértice $(2, 4, 5)$ y cuya directriz es la circunferencia $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $z = x + y$.

Solución Sea (x, y, z) un punto arbitrario del cono y si L la recta que pasa por los puntos (x, y, z) y $(2, 4, 5)$. L tiene por ecuación $\mathbf{r}(t) = (2, 4, 5) + t(x - 2, y - 4, z - 5) =$

$$(2 + t(x - 2), 4 + t(y - 4), 5 + t(z - 5)).$$

L corta la directriz y entonces para algún t se tiene que $\mathbf{r}(t) = (x_0, y_0, z_0)$, con (x_0, y_0, z_0) punto de la directriz.

Así tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x_0 = 2 + t(x - 2)$$

$$y_0 = 4 + t(y - 4)$$

$$z_0 = 5 + t(z - 5)$$

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 9$$

$$z_0 - x_0 - y_0 = 0.$$

Si sustituimos las tres primeras ecuaciones en la quinta se tiene:

$5 + t(z - 5) - 2 - t(x - 2) - 4 - t(y - 4) = 0$; es decir que $t = \frac{1}{z - x - y + 1}$ y entonces:

$$x_0 = 2 + \frac{x - 2}{z - x - y + 1} = \frac{2z - x - 2y}{z - x - y + 1},$$

$$y_0 = 4 + \frac{y - 4}{z - x - y + 1} = \frac{4z - 4x - 3y}{z - x - y + 1}, z_0 = 5 + \frac{z - 5}{z - x - y + 1} = \frac{6z - 5x - 5y}{z - x - y + 1}.$$

Sustituyendo en la cuarta ecuación se tiene:

$\left(\frac{2z-x-2y}{z-x-y+1}\right)^2 + \left(\frac{4z-4x-3y}{z-x-y+1}\right)^2 + \left(\frac{6z-5x-5y}{z-x-y+1}\right)^2 = 9$, o bien $(2z-x-2y)^2 + (4z-4x-3y)^2 + (6z-5x-5y)^2 = 9(z-x-y+1)^2$, o bien $33x^2 + 60xy - 78xz + 18x + 29y^2 - 74yz + 18y + 47z^2 - 18z - 9 = 0$ es la ecuación del cono.

Tema 2

Ejercicios de Continuidad, Diferenciabilidad, Regla de la cadena,

Función implícita, Prof. Osvaldo Acuña, Prof. Jorge Poltronieri

Continuidad, diferenciabilidad

1. Estudiar la existencia del límite en $(0, 0)$ para las funciones $f(x, y)$ siguientes:

a) $\frac{xy}{x+y}$

b) $\frac{1+x^2+y^2}{y} \operatorname{sen} y$

c) $\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$

d) $\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

e) $\frac{1-\cos xy}{y^2}$

f) $|x|^y$

g) $\frac{\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y}{x+y}$

h) $\frac{x^2}{|x-y|}$

i) $\frac{(x^2+y^2)^2}{x^2-y^2}$

j) $\frac{x^3y^3+y^2}{x^6+y^2}$

k) $\frac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$

l) $\frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{y-x^2}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

m) $\frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{x^2-xy+y^2}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

n) $\frac{|y|^\alpha}{x^2+|y|}, \alpha \in \mathbb{R}$

o) $\frac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}{\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}}$

p) $\frac{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 y}{\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{sh}^2 y}$

q) $\frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} y}$

r) $\frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sh} y}{\operatorname{sh} x - \operatorname{sen} y}$.

2. ¿La función $f(x, y, z) = \frac{xyz}{x+y+z}$ tiene un límite en $(0, 0, 0)$?

3. ¿La función $f: (x, y, z) \mapsto \frac{x+y}{x^2-y^2+z^2}$ tiene un límite en $(2, -2, 0)$?

4. Sean $a, b \geq 0, c, d > 0$ y $f: \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, encontrar una condición necesaria y suficiente

$$(x, y) \mapsto \frac{x^a y^b}{x^c + y^d}$$

sobre a, b, c, d para que f admita 0 por límite en $(0^+, 0^+)$.

5. Sean $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, g(x, y) = f(y, x), h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = f(x, x)$. Calcular las derivadas parciales primeras de g y h en función de las de f , suponiendo que f es de clase C^1 en \mathbb{R}^2 .

6. Estudiar la continuidad de $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, la existencia y continuidad de las derivadas parciales de orden

1.

$$\text{a) } f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \operatorname{sen} \frac{1}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \operatorname{sen} y - y \operatorname{sen} x}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\text{d) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\text{e) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} xy}{|x| + |y|} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\text{f) } f(x, y) = \begin{cases} e^{1/(x^2 + y^2 - 1)} & \text{si } x^2 + y^2 < 1 \\ 0 & \text{si } x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{g) } f(x, y) = \begin{cases} y^2 \operatorname{sen} \frac{x}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

$$\text{h) } f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)^x & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

i) $f(x, y) = \text{sen } |xy|$

j) $f(x, y) = \begin{cases} 1 - x^2 - y^2 & \text{si } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{si } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$

k) $f(x, y) = \begin{cases} x^2 & \text{si } |x| > y \\ y^2 & \text{si } |x| \leq y. \end{cases}$

7. Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

Demuestre que f no es diferenciable en $(0, 0)$.

8. Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \text{sen } \frac{1}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

Demuestre que f es diferenciable en $(0, 0)$ y calcule $Df(0, 0)$.

9. Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } x = y = 0. \end{cases}$

Demuestre que f no es diferenciable en $(0, 0)$.

10. Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } x = y = 0. \end{cases}$

Demuestre que f no es diferenciable en $(0, 0)$.

11. Sean $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

Comparar $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.**Regla de la cadena, Función implícita**

12. La altura de una montaña sobre una llanura está descrita por la ecuación $h = 1000e^{-2x^2 - 3y^2}$. Si en el punto de coordenadas $(1, 1, 1000e^{-5})$ sobre la montaña hay una naciente de agua, encontrar la trayectoria

que describe esta naciente al bajar de la montaña.

13. Sea $f(x, y) = x^2 + xy - y^2$, determinar el incremento y la diferencial de f .
14. Un campo escalar diferenciable f tiene en el punto $(1, 2)$ derivada direccional 2, en la dirección al punto $(2, 2)$ y derivada direccional -2 , en la dirección al punto $(1, 1)$. Determine el vector gradiente en $(1, 2)$ en la dirección al punto $(4, 6)$.
15. Si h es la altura de un cono de 30cm y el radio r de la base es de 10cm, determinar la variación del volumen, si h aumenta 3mm y r disminuye 1mm.
16. Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x + 2y + z^2, xy)$, $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(u, v) = (u^2 + 3, uv)$, sea $h = g \circ f$ y sea $\mathbf{a} = (1, 0, 1)$. Calcule $J_f(\mathbf{a})$, $J_g(f(\mathbf{a}))$ y $J_h(\mathbf{a})$. Compruebe que $J_h(\mathbf{a}) = J_g(f(\mathbf{a})) \circ J_f(\mathbf{a})$.
17. Sean $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $(u, v) \mapsto (u^2, uv, v^3)$, $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $(x, y, z) \mapsto (xy, y^2 + z)$ y sea $h = g \circ f = (h_1, h_2): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Determinar $D_1 h_2(1, 2) = \frac{\partial h_2}{\partial u}(1, 2)$ de tres maneras:
- calculando expresamente h ,
 - empleando la regla de la cadena,
 - usando matrices.
18. Resolver las ecuaciones en las derivadas parciales siguientes, utilizando el cambio de variables en la función indicada (f es una función desconocida de dos variables reales).
- $(x + y) \frac{\partial f}{\partial x} + (x - y) \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, $u = x^2 - y^2 - 2xy$, $v = y$, $x \neq y$.
 - $\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} + 3(x - y)f = 0$, $u = xy$, $v = x + y$, $x > y$.
 - $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} - 2f + 2 = 0$, $u = xy$, $v = \frac{y}{x}$, $x > 0$.
 - $x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, $x = u$, $y = uv$, $x > 0$.
19. La sustitución $t = g(x, y)$ de clase C^1 convierte a $F(t)$ en una función $f(x, y)$ de clase C^1 , siendo
- $$f(x, y) = F(g(x, y)).$$
- Determinar $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$.

- b) Sea $F(t) = e^{\text{sen } t}$, $g(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$, calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$.
20. Sea $f(x, y)$, una función, de clase C^2 , $x = x(s, t)$, $y = y(s, t)$ y sea $F(s, t) = f(x(s, t), y(s, t))$.
Determinar $\frac{\partial F}{\partial s}$, $\frac{\partial F}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial s \partial t}$.
21. Sea $z = \varphi(x, y)$, donde y está en función de x , determinada por la ecuación $\psi(x, y) = 0$. Determinar $\frac{dz}{dx}$, siempre que $\psi_x \neq 0$.
22. Verificar que la función z , determinada por la ecuación $f(x - az, y - bz) = 0$, con f diferenciable, satisface $a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = 1$.
23. Verificar que la función z determinada por $y = x\varphi(z) + \psi(z)$, satisface la ecuación $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = 0$, donde φ, ψ de clase C^2 .
24. Las funciones u, v de las variables x, y se dan por el sistema de ecuaciones implícitas $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, con φ, ψ de clase C^1 . Determinar $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$.
25. Las tres ecuaciones $F(u, v) = 0$, $u = xy$, $v = \sqrt{x^2 + y^2}$, donde F es de clase C^1 , definen una superficie en \mathbb{R}^3 . Determinar un vector normal a esta superficie en el punto $x = 1, y = 1, z = \sqrt{3}$, si se sabe que $\frac{\partial F}{\partial u}(1, 2) = 1$, $\frac{\partial F}{\partial v}(1, 2) = 2$.
26. Sean $A, B, C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, (E) la ecuación en derivadas parciales $A \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, donde $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función desconocida, de clase C^2 . Efectuar el cambio de variable $X = x + \alpha y$, $Y = x + \beta y$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq \beta$ y demostrar que se pueden escoger α, β para llevar el sistema (E) a una de las tres ecuaciones:
- $$(1) \frac{\partial^2 F}{\partial X \partial Y} = 0 \quad (2) \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} = 0 \quad (3) \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} = 0.$$
27. a) Sea $n \in \mathbb{N}$, demuestre que $\forall x \in \mathbb{R}, \exists ! y \in \mathbb{R}$ que satisface $y^{2n+1} + y - x = 0$ y que la aplicación $\varphi(x) = y$ así definida es de clase C^1 en \mathbb{R} .
b) $\forall x \in \mathbb{R}$, calcular $\int_0^x \varphi(t) dt$ en función de n, x y $\varphi(x)$.
28. Si $f(x, y) = (x^2 + y^2)^3 - 3(x^2 + y^2) + 1 = 0$, determinar y' y y'' .

29. Determinar $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, si $f(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0$.
30. Hallar $\frac{dy}{dx}$, si $y = 1 + y^x$.
31. Sea $z = \varphi(x, y)$, donde y está en función de x , determinada por la ecuación $\psi(x, y) = 0$. Determinar $\frac{dz}{dx}$, siempre que $\psi_x \neq 0$.
32. Sea z en función de (x, y) dada por la ecuación $f(x, y, z) = 2x^2 + xy^2 + z^2 - 8xz - z + 8 = 0$.
Determinar dz y d^2z en $(2, 0, 1)$.
33. Determinar dz , d^2z , si $\ln z = x + y + z - 1$.

Solución ejercicios de Continuidad, Diferenciabilidad, Regla de la cadena, Función implícita, Prof. Osvaldo Acuña, Prof. Jorge Poltronieri

1. Estudiar la existencia del límite en $(0, 0)$ para las funciones $f(x, y)$ siguientes:

a) $\frac{xy}{x+y}$

b) $\frac{1+x^2+y^2}{y} \operatorname{sen} y$

c) $\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$

d) $\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

e) $\frac{1-\cos xy}{y^2}$

f) $|x|^y$

g) $\frac{\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y}{x+y}$

h) $\frac{x^2}{|x-y|}$

i) $\frac{(x^2+y^2)^2}{x^2-y^2}$

j) $\frac{x^3y^3+y^2}{x^6+y^2}$

k) $\frac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$

l) $\frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{y-x^2}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

m) $\frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{x^2-xy+y^2}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

n) $\frac{|y|^\alpha}{x^2+|y|}, \alpha \in \mathbb{R}$

o) $\frac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}{\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}}$

p) $\frac{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 y}{\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{sh}^2 y}$

q) $\frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} y}$

r) $\frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sh} y}{\operatorname{sh} x - \operatorname{sen} y}$.

Solucin

a) $f(x, y) = \frac{xy}{x+y}$

Consideremos $f(0, y) = 0 \rightarrow 0$ si $y \rightarrow 0$ y $f(x, -x+x^3) = \frac{x(-x+x^3)}{x^3} = \frac{-x^2+x^4}{x^3} = x - \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x} \rightarrow +\infty$, cuando $x \rightarrow 0$ y no existe el límite en $(0, 0)$.

b) $f(x, y) = \frac{1+x^2+y^2}{y} \operatorname{sen} y$

La expresión $(1+x^2+y^2) \frac{\operatorname{sen} y}{y} \sim 1+x^2+y^2 \sim 1$, si $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ i.e. existe el límite en $(0, 0)$.

c) $f(x, y) = \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$

Notemos que $f(0, y) = 1$ y $f(x, x) = \frac{4x^2}{2x^2} = 2$ i.e. no existe el límite en $(0, 0)$.

d) $f(x, y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

Puesto que $|f(x, y)| = \left| \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \right| = \left| \frac{(x+y)(x^2 - xy + y^2)}{x^2 + y^2} \right| \leq 2|x+y| \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 2|x+y| \leq 2(|x| + |y|) \rightarrow 0$, cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. Se usó el hecho que $|xy| \leq x^2 + y^2$.

$$e) f(x, y) = \frac{1 - \cos xy}{y^2}$$

Como $\left| \frac{1 - \cos xy}{y^2} \right| \sim \left| \frac{1 - (1 - \frac{1}{2}x^2y^2)}{y^2} \right| = \left| \frac{\frac{1}{2}x^2y^2}{y^2} \right| = \left| \frac{1}{2}x^2 \right| \rightarrow 0$, si $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

$$f) f(x, y) = |x|^y$$

Tomando el logaritmo podemos escribir $\ln f(x, y) = y \ln |x| \therefore \ln f(x, x) = x \ln |x| \rightarrow 0$, entonces

$f(x, x) \rightarrow 1$; pero $f(x, \frac{1}{\ln|x|}) = e^1 \rightarrow e$, si $x \rightarrow 0^+$, lo que demuestra que el límite no existe.

$$g) f(x, y) = \frac{\sinh x \sinh y}{x + y}$$

Observemos que $f(0, y) = 0 \rightarrow 0$ y que $f(x, -x + x^2) = \frac{\sinh x \sinh(-x + x^2)}{x^2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2x^2} \frac{e^{-x+x^2} - e^{x-x^2}}{2} = \frac{e^{x^2} - e^{2x-x^2} - e^{-2x+x^2} + e^{-x^2}}{4x^2} = \frac{1 + x^2 + -(1 + 2x - x^2 + \frac{1}{2}(2x)^2) - (1 - 2x + x^2 + \frac{1}{2}(-2x)^2) + (1 - x^2 + o(x^2))}{4x^2} = \frac{-4x^2 + o(x^2)}{4x^2} = -1 + o(1) \rightarrow -1$ y no existe el límite en $(0, 0)$.

$$h) f(x, y) = \frac{x^2}{|x - y|}$$

Es claro que $f(x, x - x^2) = \frac{x^2}{x^2} \rightarrow 1$ y que $f(x, x - x^3) = \frac{x^2}{x^3} \sim \frac{1}{x} \rightarrow +\infty$, es decir no existe el límite en $(0, 0)$.

$$i) f(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^2 - y^2}$$

Notemos que $f(0, y) = -y^2 \rightarrow 0$, cuando $y \rightarrow 0$, pero $f(x, x + \lambda x^3) = \frac{(x^2 + (x + \lambda x^3)^2)^2}{x^2 - (x + \lambda x^3)^2} = \frac{(2x^2 + 2\lambda x^4 + \lambda^2 x^6)^2}{x^2 - (x^2 + 2\lambda x^4 + \lambda^2 x^6)} = -\frac{x^4(2 + 2\lambda x^2 + \lambda^2 x^4)^2}{x^4(2\lambda + \lambda^2 x^2)} \sim -\frac{2^2}{2\lambda} = -\frac{2}{\lambda}$ y no existe el límite en $(0, 0)$.

$$j) f(x, y) = \frac{x^3 y^3 + y^2}{x^6 + y^2}$$

Haciendo $y = x$, $f(x, x) = \frac{x^6 + x^2}{x^6 + x^2} = 1$ y $f(x, 0) = 0$ con lo cual se tiene que no existe el límite en $(0, 0)$.

$$k) f(x, y) = \frac{x^4 y^4}{(x^2 + y^4)^3}$$

Cuando $x = y$, $f(x, x) = \frac{x^8}{(x^2 + x^4)^3} = \frac{x^2}{(1 + x^2)^3} \rightarrow 0$, y si $x = y^2$, $f(y^2, y) = \frac{y^8 y^4}{(2y^4)^3} = \frac{1}{8} \not\rightarrow 0$ y no es continua en $(0, 0)$.

$$l) f(x, y) = \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{y - x^2}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Se considera $f(x, |x|^\gamma + x^2) = \frac{|x|^\alpha (|x|^\gamma + x^2)^\beta}{|x|^\gamma} = |x|^{\alpha-\gamma} |x|^{2\beta} (1 + |x|^{\gamma-2})^\beta \sim |x|^{\alpha-\gamma+2\beta}$ si $\gamma \geq 2$.

Sea $\gamma = \max\{\alpha + 2\beta + 1, 3\}$, entonces $f(|x|, |x|^\gamma + x^2) = |x|^{\alpha+2\beta-\gamma} (1 + |x|^{\gamma-2}) = |x|^{-1} (1 + |x|^{\gamma-2}) \not\rightarrow 0$.

$$m) f(x, y) = \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{x^2 - xy + y^2}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Notemos que $x^2 - xy + y^2 \neq 0$, salvo para $(x, y) = (0, 0)$, entonces $f(x, x) = |x|^{\alpha+\beta-2} \rightarrow 0$, si $\alpha + \beta > 2$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$. En efecto, $|x|^\alpha |y|^\beta \leq \|(x, y)\|_\infty^{\alpha+\beta}$, $x^2 + y^2 - xy \geq \frac{3}{4} \|(x, y)\|_\infty^2$, $|f(x, y)| \leq |x|^\alpha |y|^\beta \leq \frac{4}{3} \|(x, y)\|_\infty^{\alpha+\beta-2}$ i.e. $f(x, y) \rightarrow 0$, cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, es decir el límite existe $\iff \alpha + \beta - 2 > 0$.

$$n) f(x, y) = \frac{|y|^\alpha}{x^2 + |y|}, \alpha \in \mathbb{R}$$

Veamos que $f(0, y) = |y|^{\alpha-1} \rightarrow \begin{cases} 1 & \alpha = 1 \\ 0 & \alpha > 1. \end{cases}$

Si $\alpha = 1$, $f(\sqrt{y}, y) = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$, si $y \rightarrow 0$.

Si $\alpha > 1$, $|f(x, y)| = \frac{|y|^\alpha}{x^2 + |y|} \leq |y|^{\alpha-1}$, es decir $f(x, y) \rightarrow 0 \iff \alpha > 1$.

$$o) f(x, y) = \frac{\sin x \sin y}{\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}}$$

Puesto que $\left| \frac{\sin x \sin y}{\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}} \right| \leq \left| \frac{xy}{\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}} \right| \leq (\max\{|x|, |y|\})^{\frac{3}{2}} = \|(x, y)\|_1^{\frac{3}{2}}$, es decir tiene por límite 0 en $(0, 0)$, pues basta escoger $\delta = \epsilon^{\frac{2}{3}}$.

$$p) f(x, y) = \frac{\sin^2 x + \sin^2 y}{\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{sh}^2 y}$$

En virtud que $\left| \frac{\sin^2 x + \sin^2 y}{\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{sh}^2 y} - 1 \right| \leq \left| \frac{(\operatorname{senh}^2 x - \operatorname{sen}^2 x) + (\operatorname{senh}^2 y - \operatorname{sen}^2 y)}{\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{sh}^2 y} \right|$.

Sabemos que $\operatorname{sen}^2 t \leq t^2 \leq \operatorname{senh}^2 t$, ya que existe $A > 0$ tal que $\operatorname{senh}^2 t - \operatorname{sen}^2 t \leq At^4$, $\forall t \in \mathbb{R}$, de

modo que $|f(x, y) - 1| \leq A \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \leq A \frac{2(x^2 + y^2)^2}{x^2 + y^2} = 2A \|(x, y)\|^2 \rightarrow 0$.

$$q) f(x, y) = \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}{\operatorname{senh} x - \operatorname{senh} y}$$

Es conocido que $\frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}{\operatorname{senh} x - \operatorname{senh} y} = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(x-y) \cos \frac{1}{2}(x+y)}{\operatorname{senh} \frac{1}{2}(x-y) \cosh \frac{1}{2}(x+y)} \sim 1$, cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, o

sea $f(x, y) \rightarrow 1$ cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

$$r) f(x, y) = \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{senh} y}{\operatorname{senh} x - \operatorname{sen} y}$$

Notemos que $f(x, x) = -1$, $f(x, 0) = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{senh} x} \rightarrow 1$ i.e. \nexists límite en $(0, 0)$.

2. ¿La función $f(x, y, z) = \frac{xyz}{x+y+z}$ tiene un límite en $(0, 0, 0)$?

Solucin Si consideramos $f(x, x, -2x + x^4) = \frac{x^2(-2x + x^4)}{x^4} = \frac{-2x^3 + x^6}{x^4} \sim -\frac{2}{x}$ y no existe límite en $(0, 0)$.

3. ¿La función $f: (x, y, z) \mapsto \frac{x+y}{x^2 - y^2 + z^2}$ tiene un límite en $(2, -2, 0)$?

Solucin Tomemos la trayectoria $(2+h, -2+h, h)$ en \mathbb{R}^3 , es decir $f(2+h, -2+h, h) = \frac{2h}{(2+h)^2 - (-2+h)^2 + h^2} = \frac{2h}{4 + 4h + h^2 - (4 - 4h + h^2) + h^2} = \frac{2h}{h^2 + 8h} = \frac{1}{4 + \frac{1}{2}h} \rightarrow \frac{1}{4}$. Además $f(2+h, -2-h, h) = 0$ y no existe el límite en $(0, 0)$.

4. Sean $a, b \geq 0, c, d > 0$ y $f: \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, encontrar una condición necesaria y suficiente

$$(x, y) \mapsto \frac{x^a y^b}{x^c + y^d}$$

sobre a, b, c, d para que f admita 0 por límite en $(0^+, 0^+)$.

Solucin Se considera $X = x^{c/2}, Y = y^{d/2}$, entonces $f(x, y) = \left| \frac{X^{2a/c} Y^{2b/d}}{X^2 + Y^2} \right| \leq (X^2 + Y^2)^{\frac{a}{c} + \frac{b}{d} - 1}$ por lo tanto $f(x, y) \rightarrow 0$, cuando $(x, y) \rightarrow (0^+, 0^+) \iff \frac{a}{c} + \frac{b}{d} > 1$ (verifíquelo).

5. Sean $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, g(x, y) = f(y, x), h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = f(x, x)$. Calcular las derivadas parciales primeras de g y h en función de las de f , suponiendo que f es de clase C^1 en \mathbb{R}^2 .

$$\text{Solucin } \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h, y) - g(x, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(y, x+h) - f(y, x)}{h} = \frac{\partial f}{\partial y}(y, x),$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(y, x), h'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h, x+h) - f(x, x)}{h} = \frac{1}{h} df(x, x) \begin{pmatrix} h \\ h \end{pmatrix} + \frac{|h|\sqrt{2}}{h} o(1) = \right.$$

$$\left. \frac{1}{h} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, x)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x, x)h \right] + o(1) \right) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, x).$$

6. Estudiar la continuidad de $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, la existencia y continuidad de las derivadas parciales de orden

1.

$$\text{a) } f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \operatorname{sen} \frac{1}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \operatorname{sen} y - y \operatorname{sen} x}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\text{d) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\text{e) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} xy}{|x| + |y|} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\text{f) } f(x, y) = \begin{cases} e^{1/(x^2 + y^2 - 1)} & \text{si } x^2 + y^2 < 1 \\ 0 & \text{si } x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{g) } f(x, y) = \begin{cases} y^2 \operatorname{sen} \frac{x}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

$$\text{h) } f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)^x & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\text{i) } f(x, y) = \operatorname{sen} |xy|$$

$$\text{j) } f(x, y) = \begin{cases} 1 - x^2 - y^2 & \text{si } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{si } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

$$\text{k) } f(x, y) = \begin{cases} x^2 & \text{si } |x| > y \\ y^2 & \text{si } |x| \leq y. \end{cases}$$

Solucin

a) $|f(x, y)| \leq x^2 + y^2 \rightarrow 0$, si $(x, y) \rightarrow (0, 0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \frac{h^2}{h} \operatorname{sen} \frac{1}{h} \right] = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \frac{h^2}{h} \operatorname{sen} \frac{1}{h} \right] = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \left[\operatorname{sen} \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{1}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2} \right],$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y \left[\operatorname{sen} \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{1}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2} \right],$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) = 2x \left[\operatorname{sen} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x^2} \right],$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = 2y \left[\operatorname{sen} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x^2} \right], \text{ que no tienen límite cuando } x \rightarrow 0 \text{ y } y \rightarrow 0, \text{ respectivamente.}$$

Así, f es de clase C^2 en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, continua en \mathbb{R}^2 , con derivadas de primer orden definidas en \mathbb{R}^2 , pero no son continuas en $(0, 0)$.

b) $|f(x, y)| \leq \frac{|x|^3 + |y|^3}{x^2 + y^2} = \frac{(|x| + |y|)(x^2 + y^2 - |x||y|)}{x^2 + y^2} \leq |x| + |y| \rightarrow 0$, si $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, por lo

que f es continua, $f(x, 0) = x$, $f(0, y) = -y$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = -1$.

En $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x(x^3 + 3xy^2 + 2y^3)}{(x^2 + y^2)^2}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \lambda x) = \frac{1 + 3\lambda^2 + 2\lambda^3}{(1 + \lambda^2)^2} \not\rightarrow 1$, si $x \rightarrow 0$. Lo

mismo sucede con $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, por lo que f es de clase C^1 en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, continua en \mathbb{R}^2 , con derivadas definidas en \mathbb{R}^2 , pero no son continuas en $(0, 0)$.

c) $|f(x, y)| = \frac{|x(y + \frac{1}{3}y^3 + o(y^3)) - y(x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3))|}{x^2 + y^2} = \frac{|xy^3 - yx^3 + o(xy^3 + yx^3)|}{3(x^2 + y^2)}$

$$= \frac{|xy(x^2 + y^2) + xy(x^2 + y^2)o(1)|}{3(x^2 + y^2)} = \frac{1}{3}|xy| + |xy|o(1) \rightarrow 0, \text{ si } (x, y) \rightarrow (0, 0) \text{ y } f \text{ es continua en}$$

\mathbb{R}^2 .

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \frac{0}{h} \right) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^2 \operatorname{sen} y - x^2 y \cos x - y^3 \cos x - x^2 \operatorname{sen} y + 2xy \operatorname{sen} x}{(x^3 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x, y) - f(0, y)}{h} = \frac{h \operatorname{sen} y - y \operatorname{sen} h}{(y^2 + h^2)h} \right) = \frac{\operatorname{sen} y - y}{y^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \sim (y^3 - \frac{1}{3!}y^5 - x^2y + \frac{1}{2}x^4y - y^3 + \frac{1}{2}y^3x^2 - x^2y + \frac{1}{3!}x^2y^3 + 2x^2y - \frac{1}{3!}2x^4y) \frac{1}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\sim \frac{7(x^2 + y^2)^{5/2}}{6(x^2 + y^2)^2} = \frac{7}{6}(x^2 + y^2)^{1/2} \rightarrow 0, \text{ si } (x, y) \rightarrow (0, 0).$$

Similarmente $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \rightarrow 0$, si $\|(x, y)\| \rightarrow (0, 0)$. Finalmente $f \in C^1$ en \mathbb{R}^2 .

d) $|f(x, y)| \leq \frac{x^2 + y^2}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$ y es continua en \mathbb{R}^2 .

$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)|y| - x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$, por lo que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = \frac{|y|^3}{|y|^3} = 1 \not\rightarrow 0$, si $y \rightarrow 0$,

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) = -\frac{x}{|x|^3} \not\rightarrow 0$, si $x \rightarrow 0$. $\frac{\partial f}{\partial x}$ es continua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ y está definida en \mathbb{R}^2 .

$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, y) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = \pm \frac{x}{|x|}$, por lo que $\frac{\partial f}{\partial y}$ existe y es continua en $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ y está

definida en $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \cup \{(0, 0)\}$. Así, f es de clase C^1 en $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

e) $|f(x, y)| \sim \frac{|xy|}{|x| + |y|} \leq \frac{(|x| + |y|)^2}{|x| + |y|} = |x| + |y| \rightarrow 0$, si $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ i.e. f es continua

en \mathbb{R}^2 . Además, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x+h) \cdot 0}{|x+h|+0} \frac{1}{h} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) =$

$\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\text{sen } xh}{|x|+|h|} \frac{1}{h} \sim \frac{x}{|x|} \right] = \pm 1$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\text{sen } hy}{|h|+|y|} \frac{1}{h} \sim \frac{y}{|y|} \right] = \pm 1$,

$\frac{\partial f}{\partial y}(0, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen } 0 \cdot (y+h)}{|h+y|} \frac{1}{h} = 0$, por lo que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ existe y es continua en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, pero no es continua en $(0, 0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ existe y es continua en $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, pero no es continua en $(0, 0)$.

Finalmente, f es de clase C^1 en $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.

f) La función f tiene problemas en el círculo $x^2 + y^2 = 1$. Sin embargo si $x^2 + y^2 \rightarrow 1^- \implies x^2 + y^2 -$

$1 < 0$, por lo que $\frac{1}{x^2 + y^2 - 1} \rightarrow -\infty$ y $e^{\frac{1}{x^2 + y^2 - 1}} \rightarrow 0$. Así, f es continua en $x^2 + y^2 = 1$.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -e^{\frac{1}{x^2 + y^2 - 1}} \frac{2x}{(x^2 + y^2 - 1)^2} \rightarrow 0$, si $x^2 + y^2 \rightarrow 1^-$ y es continua en \mathbb{R}^2 . Sucede lo

mismo con $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ por simetría de los ejes, con lo cual se tiene que f es de clase C^1 en \mathbb{R}^2 . De

manera general se puede verificar que f es de clase C^∞ en \mathbb{R}^2 .

g) $|f(x, y)| \leq |y|^2 \rightarrow 0$, si $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ y f es continua en \mathbb{R}^2 .

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \cos \frac{x}{y}$ y $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| \leq |y| \rightarrow 0$, si $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ i.e. $\frac{\partial f}{\partial x}$ es continua en \mathbb{R}^2 .

$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y \text{sen } \frac{x}{y} - x \cos \frac{x}{y}$ y $\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq 2|y| + |x| \leq 2(|x| + |y|) \rightarrow 0$, si $(x, y) \rightarrow (0, 0)$

i.e. $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua en $(0, 0)$.

Sin embargo, a pesar que $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, y) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = 0$, se tiene que

$\lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y \text{sen } \frac{x}{y} - x \cos \frac{x}{y} \right]$ no existe si $x \neq 0$, por lo que $\frac{\partial f}{\partial y}$ existe y es continua en $\mathbb{R}^* \times$

$\mathbb{R} \cup \{(0, 0)\}$. Así f es de clase C^1 en $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \cup \{(0, 0)\}$.

h) $f(x, y) = e^{x \ln(x^2+y^2)} \sim 1 + x \ln(x^2 + y^2) \rightarrow 1$, si $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ y f es continua en \mathbb{R}^2 .

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \frac{h^{2h} - 1}{h} = \frac{e^{2h \ln h} - 1}{h} = 2 \ln h + 2h \ln^2 h + o(h \ln^2 h) \right] = -\infty,$$

es decir $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ no existe, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \frac{h^0 - 1}{h} = 0 \right] = 0$. Además,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (x^2 + y^2)^x \left(\frac{2x^2}{x^2 + y^2} + \ln(x^2 + y^2) \right), \text{ el límite es } -\infty, \text{ si } (x, y) \rightarrow (0, 0) \text{ y } \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ es}$$

continua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (x^2 + y^2)^x \frac{2xy}{x^2 + y^2} \text{ que no es continua en } (0, 0), \text{ pues si } x = y, \frac{\partial f}{\partial y}(x, x) = (2x^2)^x \rightarrow$$

$1 \neq \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$. Así se tiene que $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Finalmente f es de clase C^1 en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

i) Claramente f es continua en \mathbb{R}^2 , pues $|f(x, y)| \leq |xy| \leq \|(x, y)\| \rightarrow 0$, si $(x, y) \rightarrow (0, 0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0), \frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(h, y) - f(0, y)}{h} = \frac{\sin |hy|}{h} \right] =$$

$$\pm |y|, \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x, h) - f(x, 0)}{h} = \frac{\sin |xh|}{h} \right] = \pm |x|, \text{ lo que nos indica que } \frac{\partial f}{\partial x} \text{ existe y es}$$

continua en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \cup \{(0, 0)\}$, al igual que $\frac{\partial f}{\partial y}$, la cual existe y es continua en $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \cup \{(0, 0)\}$. Así,

f es de clase C^1 en $\mathbb{R}^* \cup \mathbb{R}^* \cup \{(0, 0)\}$.

j) La función f es continua en \mathbb{R}^2 . Sea $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$, entonces $\frac{\partial f}{\partial x}$ está definida

en $(\mathbb{R}^2 \setminus C) \cup \{(0, 1), (0, -1)\}$ y es continua solamente en $\mathbb{R}^2 \setminus C$, pues si $(x_0, y_0) \in C$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) =$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{2x_0 h + h^2}{h} = -2x_0 + h \rightarrow -2x_0, \text{ si } h < 0 \text{ y } \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} =$$

0, si $h > 0$ y los límites son distintos salvo en $(0, 1)$ y $(0, -1)$.

Sucede exactamente lo mismo para $\frac{\partial f}{\partial y}$, por la simetría de los ejes, es decir $\frac{\partial f}{\partial y}$ está definida en $(\mathbb{R}^2 \setminus C) \cup$

$\{(1, 0), (-1, 0)\}$ y f es de clase C^1 en $\mathbb{R}^2 \setminus C$.

k) f es continua en \mathbb{R}^2 . Sea $E = \{(x, |x|) / x \in \mathbb{R}\}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} 2x & \text{si } |x| > y \\ 2y & \text{si } |x| < y. \end{cases}$

Analicemos lo que sucede cuando $|x| = y$.

Caso (x, x) : $x > 0$, si $h > 0$, $\frac{f(x+h, x) - f(x, x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 2x + h \rightarrow 2x$ y si $h < 0$,

$\frac{f(x+h, x) - f(x, x)}{h} = \frac{x^2 - x^2}{h} = 0$. Así, $\frac{\partial f}{\partial x}$ no está definida en $(x, x) \in \mathbb{R}^2, x > 0$.

Caso $(-x, x)$: De manera similar si $x < 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ no está definida en $(-x, x) \in \mathbb{R}^2$.

Por razones de simetría sucede lo mismo para $\frac{\partial f}{\partial y}$ y tenemos que f es de clase C^1 en $\mathbb{R}^2 \setminus E$.

$$7. \text{ Sea } f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Demuestre que f no es diferenciable en $(0, 0)$.

Solucin La función f no es diferenciable, pues si lo fuera $Df(0, 0) = (\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0))$, de modo que $f(h, k) - f(0, 0) = Df(0, 0) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \epsilon(h, k) \|(h, k)\|$, con la propiedad que $\epsilon(h, k) \rightarrow 0$, si $(h, k) \rightarrow (0, 0)$. Pero $f(0, 0) = 0$, por lo que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \frac{h \cdot 0 - 0}{h \sqrt{h^2 + 0^2}} = \frac{0 - 0}{h^2} = 0 \right] = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \left[\frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \frac{0 \cdot k - 0}{k \sqrt{0^2 + k^2}} = \frac{0 - 0}{k^2} = 0 \right] = 0,$$

lo que implica que $f(h, k) = \|(h, k)\| \epsilon(h, k) \implies \epsilon(h, k) = \frac{f(h, k)}{\|(h, k)\|} = \frac{hk}{h^2 + k^2}$, pero $\epsilon(h, k) \not\rightarrow 0$, cuando $(h, k) \rightarrow (0, 0)$, pues si se escoge $h = k$, $\epsilon(h, h) = \frac{h^2}{2h^2} = \frac{1}{2} \not\rightarrow 0$.

De esta manera llegamos a una contradicción al suponer que f es diferenciable en $(0, 0)$, por lo que lo correcto es que la función f no es diferenciable en $(0, 0)$.

$$8. \text{ Sea } f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \operatorname{sen} \frac{1}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Demuestre que f es diferenciable en $(0, 0)$ y calcule $Df(0, 0)$.

$$\text{Solucin En efecto, } \frac{f(h, k) - f(0, 0) - (0, 0) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}}{\|(h, k)\|} = \frac{(h^2 + k^2) \operatorname{sen} \frac{1}{h^2 + k^2}}{\sqrt{h^2 + k^2}} =$$

$\sqrt{h^2 + k^2} \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{h^2 + k^2}} \rightarrow 0$, si $(h, k) \rightarrow (0, 0)$, lo que implica que $Df(0, 0) = (0, 0)$ y que

$\epsilon(h, k) = \sqrt{h^2 + k^2} \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{h^2 + k^2}}$, de modo que $f(h, k) - f(0, 0) = Df(0, 0) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \|(h, k)\| \epsilon(h, k)$,

donde $\epsilon(h, k) \rightarrow 0$, cuando $(h, k) \rightarrow (0, 0)$, o lo que es lo mismo la función f es diferenciable en $(0, 0)$

y su diferencial es $Df(0, 0) = (0, 0)$.

$$9. \text{ Sea } f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } x = y = 0. \end{cases}$$

Demuestre que f no es diferenciable en $(0, 0)$.

Solucin Claramente $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ existen y ambas son 0. Si f fuera diferenciable en $(0, 0)$ existiera una función $\epsilon(h, k)$ definida alrededor de $(0, 0)$ tal que $f(h, k) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \cdot k + \sqrt{h^2 + k^2} \epsilon(h, k)$, con $\epsilon(h, k) \rightarrow 0$, cuando $(h, k) \rightarrow (0, 0)$. Entonces deberá tenerse que $\epsilon(h, k) = \frac{f(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}}$ y que $\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$, pero $\frac{f(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{hk^2}{\sqrt{h^2 + k^2}} \frac{1}{\sqrt{h^2 + k^2}}$ y si $h = k \neq 0$, $\frac{f(h, h)}{\sqrt{h^2 + h^2}} = \frac{h^3}{2h^2\sqrt{2}|h|} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \not\rightarrow 0$, lo cual es una contradicción, luego f no es diferenciable en $(0, 0)$.

$$10. \text{ Sea } f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } x = y = 0. \end{cases}$$

Demuestre que f no es diferenciable en $(0, 0)$.

Solucin Como en el problema anterior $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ y si f fuera diferenciable en $(0, 0)$ se tendría que $\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$, pero $\frac{f(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{h^3k}{h^4 + k^2} \frac{1}{\sqrt{h^2 + k^2}}$; si $k = h^2 \neq 0$ se tiene $\frac{f(h, h^2)}{\sqrt{h^2 + h^4}} = \frac{h^5}{2h^4\sqrt{h^2 + h^4}} = \frac{h^5}{2h^5\sqrt{1 + h^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1 + h^2}} \rightarrow \frac{1}{2}$, si $h \rightarrow 0$, por lo tanto $\frac{f(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \not\rightarrow 0$, si $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ y f no es diferenciable en $(0, 0)$.

Observemos que la función f es continua en $(0, 0)$.¹ En efecto:

Caso 1) Trayectoria vertical $x = 0$: trivial.

Caso 2) Para otras trayectorias $x \neq 0$.

Se busca $p < 3$ tal que $x^4 + y^2 > |x^p y|$, o sea $y^2 - |x^p||y| + x^4 > 0$ se analiza como una inecuación de 2º grado en y . El discriminante $\Delta = x^{2p} - 4x^4$ es menor que 0, $\forall x \neq 0$, si se toma $p = 2$, pues

¹Solución dada por el Prof. Róger Aguilar

$$\Delta = -3x^4 < 0.$$

De esta manera $|f(x, y)| = \frac{|x^3 y|}{x^4 + y^2} \leq \frac{|x^3||y|}{|x^p||y|} = |x^{3-p}| = |x| \rightarrow 0$, si $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

11. Sean $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

Comparar $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.

Solucin $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y(x^4 + 4x^2 y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y(y^4 + 4x^2 y^2 - x^4)}{(x^2 + y^2)^2}$, si $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x, h) - f(x, 0)}{h} = \frac{xh \frac{x^2 - h^2}{x^2 + h^2}}{h} \right] = x,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(h, y) - f(0, y)}{h} = \frac{hy \frac{h^2 - y^2}{h^2 + y^2}}{h} \right] = -y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \frac{0}{h} \right] = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{h} = \frac{h - 0}{h} \right] = 1,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \left[\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, k) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{k} = \frac{-k - 0}{k} \right] = -1.$$

Así $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$, porque $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$ no es continua en $(0, 0)$.

Regla de la cadena, Función implícita .

12. La altura de una montaña sobre una llanura está descrita por la ecuación $h = 1000e^{-2x^2 - 3y^2}$. Si en el punto de coordenadas $(1, 1, 1000e^{-5})$ sobre la montaña hay una naciente de agua, encontrar la trayectoria que describe esta naciente al bajar de la montaña.

Solucin Al descender, el agua en cada punto de la trayectoria, buscará la dirección de descenso más rápida (derivada direccional mínima: $-\|\nabla h\|$), cuya dirección viene dada por $-\frac{\nabla h}{\|\nabla h\|}$. Así tenemos que

$$\frac{d}{dx}(x, y(x)) = \lambda \nabla h, \text{ para algún } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ es decir } (1, \frac{dy}{dx}) = \lambda(-4000xz, -6000yz) \implies 1 = -4000\lambda xz$$

$$\text{y } \frac{dy}{dx} = -6000\lambda yz. \text{ Por lo tanto } \lambda = \frac{1}{-4000xz} \text{ y } \frac{dy}{dx} = -\frac{3y}{2x}, \text{ luego } \frac{dy}{dx} = \frac{3y}{2x} \implies \ln y = \frac{3}{2} \ln x +$$

$\ln c \implies y = cx^{3/2}$, pero $x = 1$ y $y = 1$, o sea $c = 1$. De esta forma $y = x^{3/2}$ y la trayectoria tiene por ecuación $(x, x^{3/2}, 1000e^{-2x^2 - 3y^3})$, donde $x \geq 1$.

13. Sea $f(x, y) = x^2 + xy - y^2$, determinar el incremento y la diferencial de f .

Solucin El incremento $\Delta f = f(x+h, y+k) - f(x, y) = (x+h)^2 + (x+h)(y+k) - (y+k)^2 - x^2 - xy + y^2 = [(2x+y)h + (x-2y)k] + h^2 + hk - k^2$.

El diferencial $df(x, y) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)k = (2x+y)h + (x-2y)k$.

14. Un campo escalar diferenciable f tiene en el punto $(1, 2)$ derivada direccional 2, en la dirección al punto $(2, 2)$ y derivada direccional -2 , en la dirección al punto $(1, 1)$. Determine el vector gradiente en $(1, 2)$ en la dirección al punto $(4, 6)$.

Solucin Sea $z = f(x, y)$ y consideremos las diferencias $(2, 2) - (1, 2) = (1, 0)$, $(1, 1) - (1, 2) = (0, -1)$, entonces $\nabla f(1, 2) \cdot (1, 0) = 2$, $\nabla f(1, 2) \cdot (0, -1) = -2$, es decir $\nabla f(1, 2) = (2, 2)$. De esta manera, la derivada direccional de f en $(1, 1)$ en la dirección $(4, 6) - (1, 2) = (3, 4)$ viene dada por $(2, 2) \cdot \frac{(3, 4)}{5} = \frac{14}{5}$.

15. Si h es la altura de un cono de 30cm y el radio r de la base es de 10cm, determinar la variación del volumen, si h aumenta 3mm y r disminuye 1mm.

Solucin Usando diferenciales tenemos $dV = \frac{1}{3}\pi(2rhd r + r^2 dh) = \frac{1}{3}\pi(2(10)(30)(-0.1) + 100(0.3)) = -10\pi\text{cm}^3$.

16. Sea $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x + 2y + z^2, xy)$, $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(u, v) = (u^2 + 3, uv)$, sea $h = g \circ f$ y sea $\mathbf{a} = (1, 0, 1)$. Calcule $J_f(\mathbf{a})$, $J_g(f(\mathbf{a}))$ y $J_h(\mathbf{a})$. Compruebe que $J_h(\mathbf{a}) = J_g(f(\mathbf{a})) \circ J_f(\mathbf{a})$.

Solucin Se tiene que $J_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2z \\ y & x & 0 \end{pmatrix} \implies J_f(\mathbf{a}) = J_f(1, 0, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$J_g(u, v) = \begin{pmatrix} 2u & 0 \\ v & u \end{pmatrix} \implies J_g(f(\mathbf{a})) = J_g(2, 0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

$J_h(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2(x + 2y + z^2) & 4(x + 2y + z^2) & 2z(x + 2y + z^2) \\ 2xy + 2y^2 + yz^2 & x^2 + 4xy + xz^2 & 2xyz \end{pmatrix} \implies$

$$J_h(\mathbf{a}) = J_h(1, 0, 1) = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_g(f(\mathbf{a})) \circ J_f(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

17. Sean $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $(u, v) \mapsto (u^2, uv, v^3)$, $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $(x, y, z) \mapsto (xy, y^2 + z)$ y sea

$h = g \circ f = (h_1, h_2): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Determinar $D_1 h_2(1, 2) = \frac{\partial h_2}{\partial u}(1, 2)$ de tres maneras:

a) calculando expresamente h ,

b) empleando la regla de la cadena,

c) usando matrices.

Solucin

a) $h(u, v) = g(f(u, v)) = g(u^2, uv, v^3) = (u^3v, u^2v^2 + v^3)$ y se obtiene que $h_2(u, v) = u^2v^2 + v^3$,

$$\frac{\partial h_2}{\partial u} = 2uv^2, \quad \frac{\partial h_2}{\partial u}(1, 2) = 8.$$

b) Si ponemos $x = u^2 = f_1(u, v)$, $y = uv = f_2(u, v)$, $z = v^3 = f_3(u, v)$, entonces

$$h(u, v) = (h_1(u, v), h_2(u, v)) = g(x, y, z) = (g_1(x, y, z), g_2(x, y, z)) = (xy, y^2 + z),$$

de donde $h_2(u, v) = y^2 + z = g_2(x, y, z)$ con $y = uv$; $x = u^2$; $z = v^3$ y por la regla de la cadena $\frac{\partial h_2}{\partial u} =$

$$\frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial g_2}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}, \text{ con } \frac{\partial g_2}{\partial x} = 0; \frac{\partial g_2}{\partial y} = 2y; \frac{\partial x}{\partial u} = 2u; \frac{\partial y}{\partial u} = v, \text{ por lo que } \frac{\partial h_2}{\partial u} = 0 \cdot 2u + 2y \cdot v = 2uv^2$$

$$\text{y } \frac{\partial h_2}{\partial u}(1, 2) = 8.$$

c) Empleando Jacobianos. Como $h = g \circ f$, $Dh(1, 2) = Dg(f(1, 2)) \circ Df(1, 2)$, de donde

$$J_h(1, 2) = J_g(f(1, 2)) J_f(1, 2), \quad J_f(u, v) = \begin{pmatrix} 2u & 0 \\ v & u \\ 0 & 3v^2 \end{pmatrix}, \quad J_g(1, 2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 12 \end{pmatrix},$$

$$J_g(x, y, z) = \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ 0 & 2y & 1 \end{pmatrix}.$$

Como $x = u^2$, $y = uv$, $z = v^3$, para $u = 1$, $v = 2$. Así $x = 1$, $y = 2$, $z = 8$,

$$J_g(f(1, 2)) = J_g(1, 2, 8) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J_h(1, 2) = \begin{pmatrix} D_1 h_1(1, 2) & D_2 h_1(1, 2) \\ D_1 h_2(1, 2) & D_2 h_2(1, 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}$$

de donde $D_1 h_1(1, 2) = 6$, $D_1 h_2(1, 2) = 8$, $D_2 h_1(1, 2) = 1$, $D_2 h_2(1, 2) = 16$.

18. Resolver las ecuaciones en las derivadas parciales siguientes, utilizando el cambio de variables o de función indicada (f es desconocida de dos variables reales).

a) $(x + y) \frac{\partial f}{\partial x} + (x - y) \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, $u = x^2 - y^2 - 2xy$, $v = y$, $x \neq y$.

b) $\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} + 3(x - y)f = 0$, $u = xy$, $v = x + y$, $x > y$.

c) $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} - 2f + 2 = 0$, $u = xy$, $v = \frac{y}{x}$, $x > 0$.

d) $x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, $x = u$, $y = uv$, $x > 0$.

Solucin

a) Sea $u = x^2 + y^2 - 2xy$, $v = y$, $x \neq y$, $x = v \pm \sqrt{u + 2v^2}$, $y = v$, entonces

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \left(\pm \frac{1}{2\sqrt{u + 2v^2}} \right),$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \left(1 \pm \frac{4v}{2\sqrt{u + 2v^2}} \right) + \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} \left(\frac{\sqrt{u + 2v^2} \pm 2v}{\sqrt{u + 2v^2}} \right) + \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Por otro lado $\frac{\partial f}{\partial x} (2v \pm \sqrt{u + 2v^2}) + \frac{\partial f}{\partial y} (\pm \sqrt{u + 2v^2}) = 0$, por lo tanto $\pm \frac{\partial f}{\partial x} \left(1 \pm \frac{2v}{2\sqrt{u + 2v^2}} \right) + \frac{\partial f}{\partial y} =$

0, es decir $\frac{\partial F}{\partial v} = 0 \implies F = \varphi(u) = \varphi(x^2 - y^2 - 2xy)$, con $\varphi \in C^1$ en \mathbb{R} .

b) Sea $u = xy$, $v = x + y$, $x > y$, entonces $y = \frac{1}{2}(v \mp \sqrt{v^2 - 4u})$, $x = \frac{1}{2}(v \pm \sqrt{v^2 - 4u})$ y como $x > y$,

se tiene $x = \frac{1}{2}(v + \sqrt{v^2 - 4u})$, $y = \frac{1}{2}(v - \sqrt{v^2 - 4u})$.

Sea $F(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$, entonces $\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{-1}{\sqrt{v^2 - 4u}} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{1}{\sqrt{v^2 - 4u}}$, es decir:

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} + 3\sqrt{v^2 - 4u}f = 0 \implies \frac{-\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{v^2 - 4u}} = 3f(x(u, v), y(u, v)), \text{ por lo tanto } \frac{\partial F}{\partial y} = 3F \implies e^{3u} + \varphi(v) \text{ y } f(x, y) = e^{3xy} + \varphi(x + y), \text{ con } \varphi \in C^1 \text{ sobre } \mathbb{R}.$$

c) Sea $yx = u, v = \frac{y}{x}, x > 0 \implies y = \sqrt{uv}, x = \sqrt{\frac{u}{v}}$ y sea $F(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$, entonces:

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{1}{2\sqrt{uv}} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{v}{2\sqrt{uv}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{uv}} + \frac{\partial f}{\partial y} \sqrt{\frac{v}{u}} \right).$$

Por otro lado $\frac{\partial f}{\partial x} \sqrt{\frac{u}{v}} + \sqrt{uv} \frac{\partial f}{\partial y} - 2F + 2 = 0 \implies \frac{2(F-1)}{u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{uv}} + \frac{\partial f}{\partial y} \sqrt{\frac{v}{u}} = 2 \frac{\partial F}{\partial u}$, por lo que $u \frac{\partial F}{\partial u} = F - 1$ y $F(u, v) = u\varphi(v) + 1$, o sea $f(u, v) = xy\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + 1$, con $\varphi \in C^1$ en \mathbb{R} .

La solución se obtiene así: $\frac{\partial}{\partial u} \left(u \frac{\partial F}{\partial u} \right) = \frac{\partial F}{\partial u} \implies \frac{\partial F}{\partial u} + u \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = \frac{\partial F}{\partial u} \implies \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = 0 \implies \frac{\partial F}{\partial u} = \varphi(v)$ y $F = u\varphi(v) + C$. Pero $u \frac{\partial F}{\partial u} = u\varphi(v) = F - 1$ y $F(u, v) = u\varphi(v) + 1$.

d) Sea $x = u, y = uv, x > 0, u = x, v = \frac{y}{x}, u > 0$ y sea $F(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$, entonces

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} v, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2v \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Pero $u^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2u^2 v \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + u^2 v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, por lo tanto $\frac{\partial F}{\partial u} = \varphi(v), F = u\varphi(v) + \varphi(v) \implies f(x, y) = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, con $\varphi, \psi \in C^1$ en \mathbb{R} .

19. La sustitución $t = g(x, y)$ de clase C^1 convierte a $F(t)$ en una función $f(x, y)$ de clase C^1 , siendo

$$f(x, y) = F(g(x, y)).$$

a) Determinar $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$.

b) Sea $F(t) = e^{\sin t}, g(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$, calcular $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$.

Solucin

a) Aplicando la regla de la cadena para varias variables se tiene $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = F'(g(x, y)) \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) =$

$$F'(g(x, y)) \frac{\partial g}{\partial y}.$$

b) Similarmente, $\frac{\partial f}{\partial x} = -2xe^{\sin(\cos(x^2+y^2))} \cos(x^2 + y^2) \sin(x^2 + y^2)$ y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2ye^{\sin(\cos(x^2+y^2))} \cos^2(x^2 + y^2).$$

20. Sea $f(x, y)$, una función, de clase C^2 , $x = x(s, t), y = y(s, t)$ y sea $F(s, t) = f(x(s, t), y(s, t))$.

Determinar $\frac{\partial F}{\partial s}, \frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial s \partial t}$.

Solucin La regla de la cadena permite escribir:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial s} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}, & \frac{\partial F}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} &= \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial F}{\partial s} \right) = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} = \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \frac{\partial y}{\partial s} \right) \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial s} \right) \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial s} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial s^2}. \\ \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}. \\ \frac{\partial^2 F}{\partial s \partial t} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial s} \right) + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 x}{\partial s \partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 y}{\partial s \partial t}.\end{aligned}$$

21. Sea $z = \varphi(x, y)$, donde y está en función de x , determinada por la ecuación $\psi(x, y) = 0$. Determinar

$$\frac{dz}{dx}, \text{ siempre que } \psi_x \neq 0.$$

Solucin Si $\psi_x(x, y) \neq 0$, entonces por el teorema de la función implícita existe $y(x)$, que satisface

$$\psi(x, y(x)) = 0, \text{ de modo que } y'(x) = -\frac{\psi_x(x, y(x))}{\psi_y(x, y(x))}.$$

Por la regla de la cadena $z(x) = \varphi(x, y(x))$ tiene por derivada $z'(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y(x)) -$

$$\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y(x)) \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y(x))} = \frac{\begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix}}{\psi_y}.$$

22. Verificar que la función z , determinada por la ecuación $f(x - az, y - bz) = 0$, con f diferenciable,

$$\text{satisface } a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

Solucin Sea $F(x, y, z) = f(x - az, y - bz) = 0$, entonces F es diferenciable y por el teorema de

la función implícita, z se puede escribir en función de (x, y) , de modo que $F(x, y, z(x, y)) = 0$, si

$$F_z \neq 0. \text{ Además: } F_z = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x}(-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(-b) \neq 0, \text{ donde } \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \text{ significa que las}$$

derivadas se hacen respecto a la primera y la segunda variable de f , respectivamente. Así $z(x, y)$ existe,

si $-a \frac{\partial f}{\partial x}(x - az, y - bz) - b \frac{\partial f}{\partial y}(x - az, y - bz) \neq 0$ y se tiene:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{-a \frac{\partial f}{\partial x} - b \frac{\partial f}{\partial y}}; \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{-a \frac{\partial f}{\partial x} - b \frac{\partial f}{\partial y}} \text{ y se tiene } -a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

23. Verificar que la función z determinada por $y = x\varphi(z) + \psi(z)$, satisface la ecuación $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 -$

$$2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 = 0, \text{ donde } \varphi, \psi \text{ de clase } C^2.$$

Solucin Sea $f(x, y, z) = y - x\varphi(z) - \psi(z) = 0$, f es de clase C^1 y por el teorema de la función implícita z está en función de (x, y) de modo que $f(x, y, z(x, y)) = 0$, si $f_z(x, y, z) \neq 0$ i.e. $f_z(x, y, z) = -x\varphi'(z) - \psi'(z) \neq 0$. Además:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{f_x(x, y, z)}{f_z(x, y, z)} = -\frac{\varphi(z)}{x\varphi'(z) + \psi'(z)} = -\frac{\varphi}{x\varphi' + \psi'}, & \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{f_y(x, y, z)}{f_z(x, y, z)} = \frac{1}{x\varphi' + \psi'}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= -\frac{\varphi' z_x(x\varphi' + \psi') - \varphi(\varphi' + x\varphi'' z_x + \psi'' z_x)}{(x\varphi' + \psi')^2} = \frac{-xz_x\varphi'^2 - z_x\varphi'\psi'' + \varphi\varphi' - xz_x\varphi\varphi'' - z_x\varphi\varphi''}{(x\varphi' + \psi')^2}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= -\frac{xz_y\varphi'' + \psi'' z_y}{(x\varphi' + \psi')^2}, & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= -\frac{\varphi' + x\varphi'' z_x + \psi'' z_x}{(x\varphi' + \psi')^2}. \end{aligned}$$

Sea $A = x\varphi' + \psi'$, entonces:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{A^4} [-xz_x\varphi'^2 - z_x\varphi'\psi'' + \varphi\varphi' - xz_x\varphi\varphi'' - z_x\varphi\varphi'' - 2\varphi\varphi' - 2x\varphi\varphi'' z_x - 2\varphi\psi'' z_x - x\varphi^2\varphi'' z_y - \varphi^2\psi'' z_y] = \\ &\frac{1}{A^4} [x\frac{\varphi}{A}\varphi'^2 + \varphi\frac{\varphi'}{A}\psi'' - \varphi\varphi' + x\varphi^2\frac{\varphi''}{A} + \varphi^2\frac{\psi''}{A} - x\varphi^2\frac{\varphi''}{A} - \varphi^2\frac{\psi''}{A}] = \frac{1}{A^4} [\frac{1}{A}\varphi\varphi'(x\varphi' + \psi') - \varphi\varphi'] = 0. \end{aligned}$$

24. Las funciones u, v de las variables x, y se dan por el sistema de ecuaciones implícitas $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, con φ, ψ de clase C^1 . Determinar $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$.

Solucin Por el teorema de la función inversa (u, v) se escribe en función de (x, y) , si $\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}$ es invertible, es decir si $\frac{\partial\varphi}{\partial u} \frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\psi}{\partial u} \frac{\partial\varphi}{\partial v} \neq 0$. En este caso se tiene:

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \left(\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \right)^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & & & \\ \varphi_u & \varphi_v & & \\ & & 1 & \\ \psi_u & \psi_v & & \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial\psi}{\partial v} & -\frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ -\frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Así, } \frac{\partial u}{\partial x} = \begin{vmatrix} 1 & & & \\ \varphi_u & \varphi_v & & \\ & & 1 & \\ \psi_u & \psi_v & & \end{vmatrix} \frac{\partial\psi}{\partial v}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\begin{vmatrix} 1 & & & \\ \varphi_u & \varphi_v & & \\ & & 1 & \\ \psi_u & \psi_v & & \end{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial v}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\begin{vmatrix} 1 & & & \\ \varphi_u & \varphi_v & & \\ & & 1 & \\ \psi_u & \psi_v & & \end{vmatrix} \frac{\partial\psi}{\partial u},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \begin{vmatrix} 1 & & & \\ \varphi_u & \varphi_v & & \\ & & 1 & \\ \psi_u & \psi_v & & \end{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u}.$$

25. Las tres ecuaciones $F(u, v) = 0$, $u = xy$, $v = \sqrt{x^2 + y^2}$, donde F es de clase C^1 , definen una superficie en \mathbb{R}^3 . Determinar un vector normal a esta superficie en el punto $x = 1, y = 1, z = \sqrt{3}$, si se sabe que $\frac{\partial F}{\partial u}(1, 2) = 1, \frac{\partial F}{\partial v}(1, 2) = 2$.

Solucin Sea $G(x, y, z) = F(u(x, y, z), v(x, y, z)) = 0$, entonces el vector normal a la superficie es

$$\nabla G(1, 1, \sqrt{3}) = \left(\frac{\partial G}{\partial x}(1, 1, \sqrt{3}), \frac{\partial G}{\partial y}(1, 1, \sqrt{3}), \frac{\partial G}{\partial z}(1, 1, \sqrt{3}) \right).$$

$$\text{Ahora, } \frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \implies \frac{\partial G}{\partial x}(1, 1, \sqrt{3}) = \frac{\partial F}{\partial u} y + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Big|_{(1, 1, \sqrt{3})} = 2,$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \implies \frac{\partial G}{\partial y}(1, 1, \sqrt{3}) = \frac{\partial F}{\partial u} x \Big|_{(1, 1, \sqrt{3})} = 1.$$

$$\frac{\partial G}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} \implies \frac{\partial G}{\partial z}(1, 1, \sqrt{3}) = \frac{\partial F}{\partial v} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Big|_{(1, 1, \sqrt{3})} = \sqrt{3}, \text{ es decir el vector normal}$$

a la superficie es $\eta = (2, 1, \sqrt{3})$.

26. Sean $A, B, C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, (E) la ecuación en derivadas parciales $A \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, donde $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función desconocida, de clase C^2 . Efectuar el cambio de variable $X = x + \alpha y$, $Y = x + \beta y$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq \beta$ y demostrar que se pueden escoger α, β para llevar el sistema (E) a una de las tres ecuaciones:

$$(1) \frac{\partial^2 F}{\partial X \partial Y} = 0 \quad (2) \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} = 0 \quad (3) \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} = 0.$$

Solucin Sea $A, B, C \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \alpha \frac{\partial F}{\partial u} + \beta \frac{\partial F}{\partial v}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2\alpha\beta \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \beta^2 \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \alpha \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + (\beta + \alpha) \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \beta \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$, por lo tanto $A \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (A + 2B\alpha + C\alpha^2) \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2(A + B(\alpha + \beta) + C\alpha\beta) \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + (A + 2B\beta + C\beta^2) \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = 0$.

Sea $P(t) = Ct^2 + 2Bt + A$ polinomio de grado 2, si $B^2 - AC > 0$, se escoge α, β las dos raíces del polinomio y se lleva al caso $\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 0$.

Si $B^2 - AC = 0$, $C \neq 0$, se escoge $\alpha = -\frac{B}{C}$ y $\beta \neq \alpha$, entonces $A + 2B\alpha + C\alpha^2 = 0$, $A + B(\alpha + \beta) + C\alpha\beta = 0$, por lo que $\frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = 0$.

Si $B^2 - AC < 0$, existen $\alpha \neq \beta$ tales que $A + 2B\alpha + C\alpha^2 = A + 2B\beta + C\beta^2$, $A + B(\alpha + \beta) + C\alpha\beta = 0$, pues si no, existe $\alpha = \beta \implies A + 2B\alpha + C\alpha^2 = 0 \implies B^2 - AC \geq 0$ que es una contradicción.

Así, llegamos al caso $\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = 0$.

27. a) Sea $n \in \mathbb{N}$, demuestre que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists! y \in \mathbb{R}$ que satisface $y^{2n+1} + y - x = 0$ y que la aplicación

$\varphi(x) = y$ así definida es de clase C^1 en \mathbb{R} .

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, calcular $\int_0^x \varphi(t) dt$ en función de n, x y $\varphi(x)$.

Solucin

a) Sea $f(x, y) = y^{2n+1} + y - x = 0$, entonces para x_0 fijo, $f(x_0, \cdot)(y) = y^{2n+1} + y - x_0$ es tal que $f'(x_0, \cdot)(y) = (2n+1)y^{2n} + 1 > 0$ i.e. es estrictamente creciente; además de que $\lim_{y \rightarrow \pm\infty} f(x_0, \cdot)(y) = \pm\infty$, entonces $\exists! y_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0, y_0) = 0$.

Así se define $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x) = y$, con $f(x_0) = y_0, \forall x_0 \in \mathbb{R}$, o sea $f(x, \varphi(x)) = 0$.

Por otro lado, $f_y(x, y)(x, y) = (2n+1)y^{2n} + 1 \neq 0 \implies \exists! \psi: I_{x_0} \rightarrow J_{y_0}$ tal que $f(x, \psi(x)) = 0$, $\psi(x_0) = y_0$ i.e. ψ es la restricción de φ a I_{x_0} , por lo que φ es de clase C^1 .

b) Sabemos que $\varphi(0) = 0$, pues $\varphi(0)(\varphi(0)^{2n} + 1) = 0 \implies \varphi(0) = 0$. Además,

$$\int_0^x (\varphi^{2n+1}(t)\varphi'(t) + \varphi(t)\varphi'(t) - t\varphi'(t))dt = 0 = \frac{\varphi^{2n+2}(x)}{2n+2} + \frac{\varphi^2(x)}{2} - \int_0^x (t\varphi'(t) + \varphi(t))dt + \int_0^x \varphi(t)dt \implies \int_0^x \varphi(t)dt = -\frac{\varphi^{2n+2}(x)}{2n+2} - \frac{\varphi^2(x)}{2} + x\varphi(x).$$

Como $\varphi^{2n+2}(t) = -\varphi^2(t) + x\varphi(t)$, entonces $\int_0^x \varphi(t)dt = \frac{2n+1}{2n+2}x\varphi(x) - \frac{n}{n+2}\varphi^2(x)$.

28. Si $f(x, y) = (x^2 + y^2)^3 - 3(x^2 + y^2) + 1 = 0$, determinar y' y y'' .

Solucin Es claro que f es de clase C^∞ . Dado que $f_x(x, y) = 3(x^2 + y^2)^2 2x - 6x = 6x[(x^2 + y^2) - 1]$ y $f_y(x, y) = 3(x^2 + y^2)^2 2y - 6y = 6y[(x^2 + y^2) - 1]$, por el teorema de la función implícita, si $f_y(x, y) \neq 0$ en un abierto, y se puede escribir en función de x , en ese abierto. Ahora, $f_y(x, y) \neq 0 \iff y \neq 0$ y $x^2 + y^2 \neq 1$, por lo tanto existe y' y es tal que $y' = -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)} = -\frac{x}{y}$ y $y'' = \frac{d}{dx}(-\frac{x}{y}) = -\frac{y - x\frac{dy}{dx}}{y^2} = -\frac{y + \frac{x^2}{y}}{y^2} = -\frac{x^2 + y^2}{y^3}$, siempre y cuando $y \neq 0$ y $x^2 + y^2 \neq 1$.

29. Determinar $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, si $f(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0$.

Solucin f es de clase C^∞ , $f_x(x, y, z) = 2x$, $f_y(x, y, z) = -4y - z + 1$ y $f_z(x, y, z) = 6z - y$. Ahora, $f_z(x, y, z) \neq 0 \iff y \neq 6z$, por el teorema de la función implícita, existe una función φ que es de clase C^∞ y que la llamaremos z , abusando del lenguaje. Así, existen $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y, z) / -y + 6z = 0\}$ y están dadas por $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f_x(x, y, z)}{f_z(x, y, z)} = -\frac{2x}{6z - y}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f_y(x, y, z)}{f_z(x, y, z)} = -\frac{1 - 4y - z}{6z - y}$.

30. Hallar $\frac{dy}{dx}$, si $y = 1 + y^x$.

Solucin Sea $f(x, y) = y - 1 - y^x$, es de clase C^∞ ; si $f(x, y) = 0$, tenemos que $f_x(x, y) = -e^{x \ln y} \ln y = -y^x \ln y$ y que $f_y(x, y) = 1 - e^{x \ln y} \frac{x}{y} = 1 - xy^{x-1} \neq 0 \iff x \neq y^{1-x}$, por el teorema de la función implícita existe y en función de x y $y'(x) = -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)} = \frac{y^x \ln y}{1 - xy^{x-1}}$, siempre que $x \neq y^{1-x}$.

31. Sea $z = \varphi(x, y)$, donde y está en función de x , determinada por la ecuación $\psi(x, y) = 0$. Determinar $\frac{dz}{dx}$, siempre que $\psi_x \neq 0$.

Solucin Si $\psi_x(x, y) \neq 0$, entonces por el teorema de la función implícita existe $y(x)$, que satisface $\psi(x, y(x)) = 0$, de modo que $y'(x) = -\frac{\psi_x(x, y(x))}{\psi_y(x, y(x))}$.

Por la regla de la cadena $z(x) = \varphi(x, y(x))$ tiene por derivada $z'(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y(x)) -$

$$\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y(x)) \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y(x))} = \frac{\begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix}}{\psi_y}.$$

32. Sea z en función de (x, y) dada por la ecuación $f(x, y, z) = 2x^2 + xy^2 + z^2 - 8xz - z + 8 = 0$. Determinar dz y d^2z en $(2, 0, 1)$.

Solucin Dado que f es de clase C^∞ y si $f_z(x, y, z) \neq 0$ (i.e. $2z - 8x - 1 \neq 0$), por el teorema de la función implícita existe $z(x, y)$ de clase C^∞ , de modo que $dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$ y $d^2z =$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{pmatrix}, \text{ si } 2z - 8x - 1 \neq 0.$$

En $(2, 0, 1)$, $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f_x}{f_z} = -\frac{4x - 8z}{2z - 8x - 1}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f_y}{f_z} = -\frac{4y}{2z - 8x - 1}$ i.e. $dz(2, 0) = (0, 0)$ y

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{(4 - 8z_x)(2z - 8x - 1) - 2(z_x - 4)(4x - 8z)}{(2z - 8x - 1)^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(2, 0) = \frac{4}{7},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{4(2z - 8x - 1) - 2z_y + y}{(2z - 8x - 1)^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(2, 0) = \frac{4}{7},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{-8z_y(2z - 8x - 1) - 2z_y(4x - 8z)}{(2z - 8x - 1)^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(2, 0) = 0.$$

33. Determinar dz , d^2z , si $\ln z = x + y + z - 1$.

Solucin Sea $f(x, y, z) = \ln z - x - y - z + 1 = 0$, por el teorema de la función implícita existe $z(x, y)$ tal que $f(x, y, z(x, y)) = 0$, si $f_z(x, y, z) \neq 0$, es decir $f_z(x, y, z) = \frac{1}{z} - 1 = \frac{1-z}{z} \neq 0 \iff z \neq 1$, $z > 0$ i.e. $z \neq 1$. Por lo tanto $z(x, y)$ se puede determinar en todo punto (x, y) salvo para $z = 1$.

Como f es de clase C^∞ , $z(x, y)$ también es de clase C^∞ , las derivadas parciales son continuas y se tiene $dz = (z_x, z_y)$, $d^2z = \begin{pmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{xy} & z_{yy} \end{pmatrix}$, donde $z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f_x}{f_z} = -\frac{-1}{\frac{1-z}{z}} = \frac{z}{1-z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{-1}{\frac{1-z}{z}} = \frac{z}{1-z}$, $z_{xx} = (z_{yy} = z_{xy}) = \frac{z_x(1-z) + z_x z}{(1-z)^2} = \frac{z_x}{(1-z)^2} = \frac{z}{(1-z)^3}$.

Así, $d_z = (\frac{z}{1-z}, \frac{z}{1-z})$; $d^2z = \begin{pmatrix} \frac{z}{(1-z)^3} & \frac{z}{(1-z)^3} \\ \frac{z}{(1-z)^3} & \frac{z}{(1-z)^3} \end{pmatrix}$.

Tema 3

Máximos y mínimos con y sin restricciones — Prof. Jorge

Poltronieri

1. Determinar los extremos locales de las funciones siguientes:

a) $f(x, y, z) = (x + z^2)e^{x(y^2+z^2+1)}$

b) $f(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 + xyz + y - z$

c) $f(x, y, z) = xe^y + ye^z + ze^x$

d) $f(x, y, z) = xye^z + yze^x + zxe^y$

e) $f(x, y, z) = xyz(4 - x - y - z)$

f) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$.

2. Sea $a > 0$, encontrar el mínimo de $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \sqrt{x^2 + (y - a)^2} + \sqrt{y^2 + (x - a)^2}$.

3. Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = (x^2 - y)(3x^2 - y)$.

a) Probar que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $g_\lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g_\lambda(x) = f(x, \lambda x)$ tiene un mínimo en 0.

b) ¿ f admite un mínimo local en $(0, 0)$?

4. Encontrar los extremos de la función $f(x, y, z) = x^3z + y^3 - 3x^2y - 2z^2$.

5. Sea $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación definida por $f(x, y) = \frac{xy}{1 + 3x^2 + y^2}$, sobre el conjunto $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. Determinar los extremos de la función f .

6. Sea $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$, sobre el conjunto $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -2 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 1\}$. Determinar los extremos de f .

7. Sea $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$, donde $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - y^2 = 25\}$.

Determinar el mínimo de f .

8. Sea $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9, 0 \leq x \leq y\}$, determinar los extremos de la función $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = \frac{y^2}{x+y}$.
9. Sea $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$, encontrar los extremos de $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \frac{x+y}{1+x^2+y^2}$.
10. Sea $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 4\}$ y sea $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} (\cos tx + y \operatorname{sen} tx)^{1/t}$.
 - a) Probar que $\forall (x, y) \in E, f(x, y) = e^{xy}$.
 - b) Determinar los extremos de la función f .
11. La gráfica de la función $g(x, y) = \frac{1}{xy}$ es una superficie en \mathbb{R}^3 . Determinar los puntos de la superficie más próximos al origen $(0, 0, 0)$.
12. Determinar los puntos de la curva que es la intersección de las dos superficies $g_1(x, y, z) = x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1$ y $g_2(x, y, z) = x^2 + y^2 = 1$, que están más próximos al origen.
13. Representar el número positivo a de manera que el producto de cuatro factores positivos sea de suma mínima.
14. Desarrollar el número positivo a como tres números positivos, de modo que el producto se máximo.
15. Determine el volumen máximo de una caja de base rectangular inscrita en el elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.
16. Determinar los puntos del elipsoide $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} + \frac{z^2}{4} = 1$, cuya distancia al plano $x + y + z - 10 = 0$ es máxima y mínima.
17. Determinar el elipsoide de volumen mínimo con ejes en los ejes coordenados que pasa por $(2, -3, 5)$.
18. Un paraboloido elíptico de ecuación $\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z$, se corta por el plano $z = a$. Determinar el volumen del mayor paralelepípedo recto rectangular que se puede inscribir en esta figura.

19. Por el punto $(1, 1, 2)$ para el plano que forma con los tres planos coordenados un tetraedro. Determinar las ecuaciones del plano, cuando el volumen del tetraedro formado es mínimo.
20. Determinar los extremos de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ bajo la restricción $g(x, y, z) = 5x^2 + 9y^2 + 6z^2 + 4yz - 1 = 0$.
21. Determinar los extremos de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sobre \mathbb{R}^3 , bajo las restricciones $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 4 = 0$, $h(x, y, z) = xyz - 1 = 0$.
22. Determinar los extremos de $f(x, y, z) = xyz$ sobre \mathbb{R}^3 , bajo las restricciones $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 < 1$ y $h(x, y, z) = 1 - 2 \operatorname{sen}(x^2 + y^2 + z^2) = 0$.
23. Determinar los extremos de la función $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, bajo las restricciones $g(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0$, $h(x, y, z) = xy - 1 = 0$.
24. Determinar los extremos de la función $f(x, y, z) = x + y + z$ sobre \mathbb{R} , bajo las restricciones $g(x, y, z) = (x - 4) + 2(y - 2) + 3(z - 3) = 0$, $h(x, y, z) = (x - 4)^2 + (y - 4)^2 + (z - 5)^2 - 1 = 0$.
25. Determinar los puntos críticos de la función $f(x, y, z) = xy + xz + yz$ bajo la restricción $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$.
26. Determinar los ejes de la elipse de ecuación $2x^2 + xy + 2y^2 - 1 = 0$.
27. Determinar entre los triángulos rectángulos que tienen área A , el triángulo de menor hipotenusa.

Solución de ejercicios de máximos y mínimos con y sin restricciones — Prof. Jorge Poltronieri

1. Determinar los extremos locales de las funciones siguientes:

a) $f(x, y, z) = (x + z^2)e^{x(y^2+z^2+1)}$

b) $f(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 + xyz + y - z$

c) $f(x, y, z) = xe^y + ye^z + ze^x$

d) $f(x, y, z) = xye^z + yze^x + zxe^y$

e) $f(x, y, z) = xyz(4 - x - y - z)$

f) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$.

Solucin

a) $f_x = e^{x(y^2+z^2+1)} + (x + z^2)(y^2 + z^2 + 1)e^{x(y^2+z^2+1)} = 0 \iff (x + z^2)(y^2 + z^2 + 1) = -1, f_y = (x + z^2)2xye^{x(y^2+z^2+1)} = 0 \implies xy(x + z^2) = 0, f_z = 2ze^{x(y^2+z^2+1)} + 2xz(x + z^2)e^{x(y^2+z^2+1)} = 0 \implies 2z(1 + x(x + z^2)) = 0$, se deduce que $x + z^2 \neq 0$ i.e. $xy = 0$.

Si $x = 0 \implies z = 0$ que es imposible pues $x + z^2 \neq 0$; así, $x \neq 0 \implies y = 0$ y $x = -1$ i.e. el único punto crítico es $(-1, 0, 0)$.

Ahora $f(-1 + x, y, z) - f(-1, 0, 0) = (-1 + x + z^2)e^{(-1+x)(y^2+z^2+1)} + e^{-1} = e^{-1}(1 - x + z^2)e^{-y^2-z^2+xy^2+xz^2+x} - e^{-1} = e^{-1}(1 - x + z^2)(1 - y^2 - z^2 + xy^2 + xz^2 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(\|(x, y, z)\|^2)) = e^{-1}(-1 + y^2 + z^2 - x - \frac{1}{2}x^2 + x + z^2 + o(\|(x, y, z)\|^2)) + e^{-1} = e^{-1}(\frac{1}{2}x^2 + y^2 + z^2) + o(\|(x, y, z)\|^2) > 0$, para $(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)$ y $(-1, 0, 0)$ es un mínimo y $f(-1, 0, 0) = -\frac{1}{e}$.

b) $f_x = x + yz = 0, f_y = xz + 1 = 0, f_z = xy - 1 = 0 \implies x = -\frac{1}{z}, x = \frac{1}{y}$ y se tiene $x + \frac{1}{x}(-\frac{1}{x}) = 0 \implies x = \frac{1}{x^2} \implies x^3 = 1 \implies x = 1, y = 1, z = -1$ y $(1, 1, -1)$ es el único punto crítico.

Las derivadas parciales son $f_{xx} = 1, f_{xy} = z, f_{xz} = y, f_{yy} = 0, f_{yx} = x$ y $f_{zz} = 0$, por lo que el

Hessiano es $H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\Delta_1 = 1 > 0, \Delta_2 = -1 < 0, \Delta_3 = -3 < 0$ y no es un extremo.

Se puede llegar a la misma conclusión analizando la función alrededor del punto $(1, 1, -1)$. En efecto,

$f(1+h, 1, -1) - f(1, 1, -1) = \frac{1}{2}(1+h)^2 - (1+h) + 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}h^2 > 0$ y $f(1+h, 1+h, -1) - f(1, 1, -1) = \frac{1}{2}(1+h)^2 - (1+h)^2 + (1+h) + 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}h^2 < 0$ y claramente no es ni máximo ni mínimo.

c) Sea (x, y, z) una solución del sistema $f_x = e^y + ze^x = 0$, $f_z = ye^z + e^x = 0$, $f_y = xe^y + e^z = 0$,

$$\text{entonces el Hessiano es } H_f = \begin{pmatrix} ze^x & e^y & e^x \\ e^y & xe^y & e^z \\ e^x & e^z & ye^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^y & e^y & e^x \\ e^y & -e^z & e^z \\ e^x & e^z & -e^x \end{pmatrix}.$$

Ahora, como $-e^y < 0$, la única posibilidad es que (x, y, z) sea un máximo. El determinante de orden 2 debe ser positivo y el determinante $\det H = e^y(e^{x+z} - e^{2z}) + e^y(e^{x+y} + e^{x+z}) + e^x(e^{y+z} + e^{z+x}) = e^{z+y+x} + e^{2x+z} + e^{x+2y} + e^{y+2z} > 0$ y debería ser negativo. Así, cualquiera que fuera la solución, no puede ser un máximo y no hay puntos extremos.

d) $f_x = ye^z + yze^x + ze^y = 0$, $f_y = xe^z + ze^x + xze^y = 0$, $f_z = xye^z + ye^x + xe^y = 0$. Se observa que $(0, 0, 0)$ es una solución. Además, tenemos que si $x = 0 \implies y = 0$ y $z = 0$.

Si $x \neq 0$ (i.e. $y \neq 0$ y $z \neq 0$) se tiene $xye^z + xzye^x = -xze^y = xzye^y + yze^x \implies z(x-1)e^x =$

$$x(z-1)e^z \implies \frac{x-1}{x}e^x = \frac{z-1}{z}e^z = \frac{y-1}{y}e^y.$$

Consideremos la función $g(x) = \frac{x-1}{x}e^x$. Para

$\alpha = \frac{x-1}{x}e^x$ hay una o dos soluciones. Si

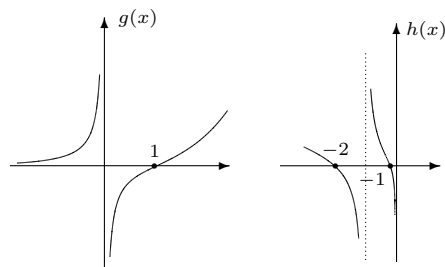
hay una solución, $0 < x < 1$ y se deduce que

$x = y = z \implies x = 0$ o $x = -2$, que no puede

ser. Si hay dos soluciones iguales, y como hay

tres ecuaciones deben existir dos valores x, y, z

que son iguales.



Por ejemplo $x = z$, entonces $2xe^x + x^2e^y = 0 \implies -2e^x = xe^y \implies e^y = -\frac{2}{x}e^x$. Además

$y(e^x + xe^x) = -xe^y = x(-\frac{2}{x})e^x \implies y = \frac{2}{1+x}$. Así $y = \ln(-\frac{2}{x}) + x = \ln 2 - \ln(-x) + x = \frac{2}{1+x}$

y la función $h(x) = \frac{2}{1+x} - x - \ln 2 + \ln(-x)$ en \mathbb{R}_-^* tiene dos soluciones $x = \alpha \approx -0.1585$ y

$x = -2$, por lo que $\alpha = x = z \approx -0.1585 < 0$, $\beta = y = \frac{2}{1+\alpha} > 2$ y no es ni máximo ni mínimo. En efecto, las soluciones son (α, α, β) , (α, β, α) y (β, α, α) . Si analizamos por ejemplo (α, α, β) , entonces las derivadas de orden dos, evaluadas en este punto son: $f_{xx} = \alpha\beta e^\alpha$, $f_{yy} = \alpha^2 e^\beta$, $f_{zz} = \alpha\beta e^\alpha$, $f_{xy} = e^\alpha + \alpha(e^\alpha + e^\beta)$, $f_{xz} = e^\beta + 2\beta e^\alpha$, $f_{yz} = e^\alpha + \alpha(e^\alpha + e^\beta)$.

Dado que $f_{xx} < 0$, sólo podría tenerse un máximo y $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = \alpha^3\beta e^{\alpha+\beta} - (e^\alpha + \alpha(e^\alpha + e^\beta))^2 < 0$, debería ser positivo. Así, el Hessiano tiene valores propios positivos y negativos por lo que no es máximo ni mínimo.

Si las tres soluciones son iguales, entonces $x = y = z = -2$.

El Hessiano en $(0, 0, 0)$ es $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y en $(-2, -2, -2)$, $\begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ -3 & 4 & -3 \\ -3 & -3 & 4 \end{pmatrix} \frac{1}{e^2}$. Ahora

$\det(H - \lambda I)$ nos determina los valores propios de H en $(0, 0, 0)$ y en $(-2, -2, -2)$. Así $\det \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} =$

$\lambda(\lambda^2 - 1) - (\lambda - 1) + (1 - \lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda - 2) = (\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda + 2)$ y los valores propios permiten decir que la matriz es indefinida.

Además, $\det \begin{pmatrix} 4 - \lambda & -3 & -3 \\ -3 & 4 - \lambda & -3 \\ -3 & -3 & \lambda \end{pmatrix} = (4 - \lambda)((4 - \lambda)^2 - 9) - 3(3(4 - \lambda) + 9) + (-3)(9 + 3(4 - \lambda)) =$

$(4 - \lambda)^3 - 9(4 - \lambda) - 6(9 + 3(4 - \lambda)) = 64 - 48\lambda + 12\lambda^2 - \lambda^3 - 36 + 9\lambda - 54 - 72 + 18\lambda =$
 $-98 + 12\lambda^2 - 21\lambda - \lambda^3 = 0 \iff (\lambda + 2)(\lambda - 7)^2 = 0$ y la matriz también es indefinida. Por lo tanto no hay máximos ni mínimos.

e) $f_x = 4yz - 2xyz - y^2z - yz^2 = 0$, $f_y = 4xz - x^2z - 2xyz - xz^2 = 0$, $f_z = 4xy - x^2y - xy^2 - 2xyz = 0 \implies 4yz - y^2z - yz^2 = 4xz - x^2z - xz^2 = 4xy - x^2y - xy^2$, por lo tanto $z(y - x)(4 - x - y - z) = 0$, $x(z - y)(4 - x - y - z) = 0$ y $y(z - x)(4 - x - y - z) = 0$.

Observemos que las variables x, y, z son simétricas en cuanto al resultado y basta analizarse, fijando por

ejemplo los valores de x . Por simetría se procede con y y z .

Claramente $x = 0$ es una solución, para algún y y algún z . En efecto:

– si $x = 0 \implies 0 = 4yz - y^2z = yz(4 - y - z) = 0$. Hay dos posibilidades $y = 0$ o $y \neq 0$.

Si $y = 0$, $z = z_0$ forman la solución $(0, 0, z_0)$ del sistema.

Si $y \neq 0$, $y_0 = 4 - z_0$, pues la solución $(0, y_0, 0)$ ya está contemplada (caso $(0, 0, z_0)$). Otra solución es $(0, 4 - z_0, z_0)$.

– Si $x \neq 0$, hay dos posibilidades $z = y$ o $z \neq y$.

Si $z = y \implies 4y^2 - 2xy^2 - y^3 - y^3 = 2y^2(2 - x - y) = 0$ y $4xy - x^2 - y - xy^2 - 2xy^2 = xy(4 - x - 3y) = 0$, por lo tanto debemos considerar $y = 0$, $y \neq 0$.

Si $y = 0 \implies z = 0$ y $(x_0, 0, 0)$ ya está contemplado en $(0, 0, z_0)$, por simetría.

Si $y \neq 0 \implies 4 - 3y = x \implies 2 - y = x = 4 - 3y \implies 2y = 2$ i.e. $y = 1$, $z = 1$, $x = 1$. Otra solución es $(1, 1, 1)$.

Si $z \neq y \implies 4 - x - y - z = 0$ i.e. $z = 4 - x - y$. Como $f_z = 4xy - x^2y - xy^2 - 2xy(4 - x - y) = 0 \implies -4xy + x^2y + xy^2 = 0 \implies -xy(4 - x - y) = 0$.

Si $y = 0$ la solución es $(x_0, 4 - x_0, 0)$ que ya está considerada.

Si $y \neq 0 \implies y = 4 - x$ y la solución es $(x_0, 4 - x_0, 0)$ que ya está tomada en cuenta.

En definitiva, las soluciones son $(0, 0, z_0)$, $(0, 4 - z_0, z_0)$, $(1, 1, 1)$.

– En $(0, 0, z_0)$, $f(h, h, z_0 + h) = h^2(z_0 + h)(4 - z_0 - 3h) \sim h^2z_0(4 - z_0)$, si $h \rightarrow 0$ y $f(-h, h, z_0 + h) = -h^2(z_0 + h)(4 - z_0 - h) \sim h^2(z_0)(4 - z_0)$, si $h \rightarrow 0$ y no hay extremo.

– En $(0, 4 - z_0, z_0)$, $f(h, 4 - z_0 + h, z_0 + h) = h(4 - z_0 + h)(-3h) \sim -3h^2(4 - z_0)z_0$ y $f(-h, 4 - z_0 + h, z_0 + h) = h^2(4 - z_0 + h)(z_0 + h) \sim h^2(4 - z_0)z_0$ y no hay extremo.

– En $(1, 1, 1)$ el Hessiano es $H(1, 1, 1) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, pues $f_{xx} = -2yz$, $f_{yy} = -2xz$, $f_{zz} = -2xy$, $f_{xy} = yz - 2xz - 2yz - z^2$, $f_{xz} = 4y - 2xy - y^2 - 2yz$, $f_{yz} = 4x - x^2 - 2xy - 2xz$.

Ahora $\Delta_1 = -2 < 0$, $\Delta_2 = 4 - 1 = 3 > 0$, $\Delta_3 = -2(4-1) - (-1)(2-1) - 1(1-2) = -6 + 1 + 1 = -4 < 0$

y $(1, 1, 1)$ es un máximo, con $f(1, 1, 1) = 1$.

$$f) \quad f_x = 2x - 2yz = 0 \quad x = yz \quad x = y^2x \quad x(1 - y^2) = 0$$

$$f_y = 2y - 2xz = 0 \implies y = xz \implies y = x^2y \implies y(1 - x^2) = 0$$

$$f_z = 2z - 2xy = 0 \quad z = xy \quad z = y^2z \quad z(1 - y^2) = 0.$$

Si $x = 0 \implies y = 0, z = 0$ i.e. $(0, 0, 0)$ es una solución del sistema.

$$\text{Si } x \neq 0 \implies y^2 = 1 \text{ i.e. } y = \pm 1 \implies x^2 = 1 \implies x = \pm 1.$$

$$\text{Si } y = 1 \implies x = z \implies x = z = 1 \text{ o } x = z = -1.$$

$$\text{Si } y = -1 \implies x = -z \implies x = -z = 1 \text{ o } x = -z = -1.$$

Las soluciones son $(1, 1, 1), (-1, 1, -1), (1, -1, -1), (-1, -1, 1)$.

- En $(1, 1, 1)$, $f(1+h, 1+h, 1+h) - f(1, 1, 1) = (1+h)^2(5-2h) - 1 = -h^2(3+2h) < 0$, si $h \rightarrow 0$,

$f(1+h, 1, 1) - f(1, 1, 1) = (1+h)^2 + 2 - 2(1+h) - 1 = 1 + 2h + h^2 + 2 - 2 - 2h - 1 = h^2 > 0$,

si $h \rightarrow 0$ y no hay extremo.

- En $(-1, 1, -1)$, $f(-1+h, 1+h, -1+h) - f(-1, 1, -1) = (1+h)^2(3-2-2h) - 1 = -h^2(3-2h) < 0$,

si $h \rightarrow 0$, $f(-1-h, 1, -1) - f(-1, 1, -1) = 2 + (-1-h)^2 - 2(1+h) - 1 = h^2 > 0$ si $h \rightarrow 0$ y no

hay extremo.

De manera similar se verifica que los otros casos no son extremos. Esto también sale de observar que la función tiene el mismo comportamiento en los cuatro puntos.

2. Sea $a > 0$, encontrar el mínimo de $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \sqrt{x^2 + (y-a)^2} + \sqrt{y^2 + (x-a)^2}$.

$$\text{Solucin } f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + (y-a)^2}} + \frac{(x-a)}{\sqrt{y^2 + (x-a)^2}} = 0, f_y = \frac{(y-a)}{\sqrt{x^2 + (y-a)^2}} + \frac{y}{\sqrt{y^2 + (x-a)^2}} = 0 \implies \frac{(x-a)(y-a)}{\sqrt{y^2 + (x-a)^2}} = \frac{xy}{\sqrt{y^2 + (x-a)^2}} \implies a = x + y.$$

Observemos que para la existencia de la solución debe tenerse que $x \geq 0$ y $x - a \leq 0$, así como $y \geq 0$

y $y - a \leq 0$. Para $x < 0$ o $y < 0$, no hay solución. De esta forma la solución $x + y = a$ vale en

$0 < x < a$ y $0 < y < a$. El valor de la función es $f(x, a-x) = \sqrt{x^2 + x^2} + \sqrt{(a-x)^2 + (a-x)^2} =$

$\sqrt{2}(|x| + |a - x|) = \sqrt{2}a$. Falta probar que es un mínimo.

En efecto, sean x, y reales tales que $x + y = a$, $0 < x < a$ y $0 < y < a$.

$$\begin{aligned} \text{Así, } f(x+h, y+k) - f(x, y) &= \sqrt{(x+h)^2 + (y-a+k)^2} + \sqrt{(y+k)^2 + (x-a+h)^2} - \sqrt{2}a = \\ &= \sqrt{(x+h)^2 + (x-k)^2} + \sqrt{(y+k)^2 + (y-h)^2} - \sqrt{2}a = \\ &= \sqrt{2}x \sqrt{1 + \frac{1}{x}(h-k) + \frac{h^2+k^2}{2x^2}} + \sqrt{2}y \sqrt{1 + \frac{1}{y}(k-h) + \frac{h^2+k^2}{2y^2}} - \sqrt{2}a = \\ &= \sqrt{2}x \left(1 + \frac{1}{2x}(h-k) + \frac{1}{2x^2}(h^2+k^2) - \frac{1}{8x^2}(h-k)^2\right) + \\ &= \sqrt{2}y \left(1 + \frac{1}{2y}(k-h) + \frac{1}{2y^2}(h^2+k^2) - \frac{1}{8y^2}(h-k)^2\right) - \sqrt{2}a + o(\|(h, k)\|^2) = \\ &= \sqrt{2}(x+y-a) + \frac{\sqrt{2}}{4x}(h^2+k^2 - \frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{4}hk) + \frac{\sqrt{2}}{4y}(h^2+k^2 - \frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{4}hk) + o(\|(h, k)\|^2) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{8x}(h^2+k^2 + \frac{1}{2}hk) + \frac{\sqrt{2}}{8y}(h^2+k^2 + \frac{1}{2}hk) + o(\|(h, k)\|^2) \geq 0, \text{ cuando } \|(h, k)\| \rightarrow 0, \text{ pues } h^2+k^2 + \\ &= \frac{1}{2}hk = (h + \frac{1}{4}k)^2 + \frac{15}{16}k^2 > 0, \text{ si } (h, k) \neq (0, 0). \end{aligned}$$

3. Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = (x^2 - y)(3x^2 - y)$.

a) Probar que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $g_\lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g_\lambda(x) = f(x, \lambda x)$ tiene un mínimo en 0.

b) ¿ f admite un mínimo local en $(0, 0)$?

Solucin

a) $g_\lambda(x) = (x^2 - \lambda x)(3x^2 - \lambda x) = 3x^4 - 4\lambda x^3 + \lambda^2 x^2$ y $g'_\lambda(x) = 12x^3 - 12\lambda x^2 + 2\lambda^2 x = 0 \implies x = 0$.

Además, $g''_\lambda(x) = 36x^2 - 24\lambda + 2\lambda^2$ y $g''_\lambda(0) = 2\lambda^2 > 0$ i.e. $g_\lambda(0) = 0$ es el mínimo.

b) Las derivadas parciales $f_x = 12x^3 - 8xy = 4x(3x^2 - 2y) = 0$ y $f_y = -4x^2 + 2y = -2(2x^2 - y) = 0$

implican que $3x^2 = x^2 \iff x = 0$ y $y = 0$.

Ahora $f(x, \lambda x) - f(0, 0) \geq 0$ y por otro lado $f(x, 2x^2 + x^3) = -x^2(1+x)(x^2 - x^3) = -x^4(1-x^2) < 0$

y no hay mínimo local en $(0, 0)$.

4. Encontrar los extremos de la función $f(x, y, z) = x^3z + y^3 - 3x^2y - 2z^2$.

Solucin Las derivadas son $f_x = 3x^2z - 6xy = 0$, $f_y = 3y^2 - 3x^2 = 0$, $f_z = x^3 - 4z = 0$.

- Si $x = 0$, o $y = 0$ o $z = 0$ las otras son cero, $(0, 0, 0)$ es una solución.

- Si $x \neq 0$, $3xz = 6y$, $y^2 = x^2$, $z = \frac{1}{4}x^3 \implies xz = \frac{1}{4}x^4 \implies x^4 = 8y$ y como $y^2 = x^2$ se tiene $y^3 = 8$,

i.e. $y = 2$, $x = \pm 2$, $x = z$. Así $(2, 2, 2)$, $(-2, 2, -2)$ también son soluciones.

– En $(0, 0, 0)$, $f(0, k, 0) = k^3$ cambia de signo y no es extremo.

– En $(2, 2, 2)$ no hay extremo. En efecto $f(2, y, 2) = y^3 - 12y + 8$ tiene un mínimo en $y = 2$, pues $f_y(2, y, 2) = 3y^2 - 12$, $f_y(2, 2, 2) = 0$ y $f_{yy}(2, y, 2) = 6y$, $f_{yy}(2, 2, 2) = 12 > 0$. Por otro lado $f(2, 2, z) = 8z - 16 - 2z^2$, $f_z(2, 2, z) = 8 - 4z$, $f_z(2, 2, 2) = 0$, $f_{zz}(2, 2, z) = -4 < 0$, que es un máximo en $z = 2$.

– En $(-2, 2, -2)$ no es extremo pues $f(x, y, z) = f(-x, y, -z)$ y la función se comporta de manera similar.

5. Sea $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación definida por $f(x, y) = \frac{xy}{1 + 3x^2 + y^2}$, sobre el conjunto $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. Determinar los extremos de la función f .

Solucin Dada la definición de f , $f(0, 0) = 0 = \min\{f(x, y) / (x, y) \in E\}$. Por otro lado, como f es continua y E es compacto, f alcanza el máximo en E y este máximo se tiene en el interior de E , $\overset{\circ}{E} = \{(x, y) \in E / 0 < y < 1, 0 < x < 1\}$ o en la frontera de E .

Derivando parcialmente tenemos $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y(1 - 3x^2 + y^2)}{1 + 3x^2 + y^2} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x(1 - 3x^2 + y^2)}{1 + 3x^2 + y^2} = 0$ y este sistema no tiene solución en $\overset{\circ}{E}$, por lo que no tiene puntos estacionarios. Así, los extremos se alcanzan en la frontera de E . Estudiaremos la función en la frontera:

— Si $x = 0$, $f(0, y) = 0, \forall y \in [0, 1]$.

— Si $y = 0$, $f(x, 0) = 0, \forall x \in [0, 1]$.

— Si $y = 1$, $f(x, 1) = \frac{x}{2 + 3x^2}$, derivando obtenemos $f'(x, 1) = \frac{2 - 3x^2}{(2 + 3x^2)^2} = 0 \iff x = \sqrt{\frac{2}{3}}$ y el máximo es $\max_{0 \leq x \leq 1} f(x, 1) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{3}}$.

— Si $x = 1$, $f(1, y) = \frac{y}{y + y^2}$, $f'(1, y) = \frac{4 - y^2}{(4 + y^2)^2}$, pero si $0 \leq y \leq 1$, la derivada es mayor que 0 y el máximo se obtiene en $y = 1$ i.e. $\max_{0 \leq y \leq 1} f(1, y) = \frac{1}{5}$.

En conclusión, dado que $\frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{3}} > \frac{1}{5}$, el máximo sucede en $x = \sqrt{\frac{2}{3}}, y = 1$.

6. Sea $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$, sobre el conjunto $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -2 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 1\}$. Determinar los extremos de f .

Solucin La función f es continua sobre E que es compacto, entonces f alcanza los extremos en los puntos estacionarios o sobre la frontera de E .

En el interior $\overset{\circ}{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / -2 < x < 0, 0 < y < 1\}$, el sistema $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y + 3 = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -x + 2y - 2 = 0 \implies y = \frac{1}{3}, x = -\frac{4}{3}$. Dado que $f_{xx} = 2, f_{yy} = 2, f_{xy} = -1$, el Hessiano tiene por matriz $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, que es definida positiva y alcanza un mínimo en $(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$ de valor $f(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}) = -\frac{4}{3}$. Analicemos f sobre la frontera.

— Si $x = 0, f(0, y) = (y - 1)^2$, para $0 \leq y \leq 1$ y alcanza el máximo en $y = 0$ y el mínimo en $y = 1$, por lo que se tiene $\max_{0 \leq y \leq 1} f(0, y) = 1, \min_{0 \leq y \leq 1} f(0, y) = 0$.

— Si $y = 0, f(x, 0) = x^2 + 3x + 1, f'(x, 0) = 2x + 3 = 0 \implies x = -\frac{3}{2}$. De esta forma hay un mínimo en $x = -\frac{3}{2}$ y un máximo en $x = 0$, es decir $\min_{-2 \leq x \leq 0} f(x, 0) = -\frac{5}{4}, \max_{-2 \leq x \leq 0} f(x, 0) = 1$.

— Si $y = 1, f(x, 1) = x^2 + 2x$ en $[-2, 0]$, $f'(x, 1) = 2x + 2 = 0 \implies x = -1$, por lo que $f(x, 1)$ alcanza el máximo en $x = -2$ y en $x = 0$; y el mínimo en $x = -1$, es decir $\min_{-2 \leq x \leq 0} f(x, 1) = -1, \max_{-2 \leq x \leq 0} f(x, 1) = 0$.

— Si $x = -2, f(-2, y) = y^2 - 1$ en $[0, 1]$, por lo que $\min_{0 \leq y \leq 1} f(-2, y) = 0, \max_{0 \leq y \leq 1} f(-2, y) = 0$.

En conclusión, f alcanza un máximo en $(0, 0)$ de valor $1 = \max_{(x, y) \in E} f(x, y)$ y un mínimo en $(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$ de valor $-\frac{4}{3} = \min_{(x, y) \in E} f(x, y)$.

7. Sea $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$, donde $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - y^2 = 25\}$. Determinar el mínimo de f .

Solucin Consideremos la parametrización $x = 5 \cosh t, y = 5 \sinh t$, entonces $h(t) = f(5 \cosh t, 5 \sinh t) = \frac{25}{4}(3e^{2t} + e^{-2t})$, por lo que $h'(t) = \frac{25}{2}e^{-2t}(3e^{4t} - 1), h'(t) = 0 \iff t = -\frac{1}{4} \ln 3$ y tenemos que es un mínimo, es decir $\min_{t \in \mathbb{R}} g(t) = g(-\frac{1}{4} \ln 3) = \frac{25}{2}\sqrt{3} = f(x_0, y_0)$.

Observamos que esta reparametrización no genera toda la curva $x^2 - y^2 = 25$, sin embargo, dado que

$$f(x, y) = f(-x, y) \text{ también alcanza un mínimo en } (-x_0, y_0) \text{ y } f(-x_0, y_0) = \min_{(x, y) \in E} f(x, y) = \frac{25}{2}\sqrt{3}.$$

8. Sea $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9, 0 \leq x \leq y\}$, determinar los extremos de la función

$$f: E \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ definida por } f(x, y) = \frac{y^2}{x+y}.$$

Solucin Parametrizando la función con $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $2 \leq r \leq 3$, $\frac{1}{4}\pi \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi$. Así

$$g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta) = r \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta + \sin \theta} = r \frac{\sin \theta}{1 + \cotg \theta}, \text{ sobre } D = [2, 3] \times [\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi]. \text{ Dado}$$

que $\frac{\sin \theta}{1 + \cotg \theta}$ es estrictamente creciente en $[\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi]$, se tiene que $\max_{(x, y) \in E} f(x, y) = \max_{(r, \theta) \in D} g(r, \theta) =$

$$g(3, \frac{1}{2}\pi) = 3, \min_{(x, y) \in E} f(x, y) = \min_{(r, \theta) \in D} g(r, \theta) = g(2, \frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

9. Sea $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$, encontrar los extremos de $f: E \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) =$

$$\frac{x+y}{1+x^2+y^2}.$$

Solucin Reparametrizando $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, entonces $g(r, \theta) =$

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{r}{1+r^2}(\sin \theta + \cos \theta), \text{ sobre } D = [0, 1] \times [0, 2\pi].$$

Por otro lado, $\frac{r}{1+r^2}$ es estrictamente creciente en $[0, 1]$; la función $h(\theta) = \cos \theta + \sin \theta$ es tal que su

derivada es $h'(\theta) = -\sin \theta + \cos \theta = 0 \iff \cos \theta = \sin \theta$ i.e. $\theta \in \{\frac{1}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi\}$, con un máximo en $\frac{1}{4}\pi$ y

un mínimo en $\frac{5}{4}\pi$, pues $h''(\frac{1}{4}\pi) < 0$, $h''(\frac{5}{4}\pi) > 0$, $\max_{(x, y) \in E} f(x, y) = \max_{(r, \theta) \in D} g(r, \theta) = g(1, \frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$,

$$\min_{(x, y) \in E} f(x, y) = \min_{(r, \theta) \in D} g(r, \theta) = g(1, \frac{5}{4}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

10. Sea $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 4\}$ y sea $f: E \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} (\cos tx +$

$$y \sen tx)^{1/t}.$$

a) Probar que $\forall (x, y) \in E$, $f(x, y) = e^{xy}$.

b) Determinar los extremos de la función f .

Solucin

a) Es importante destacar que $\lim_{t \rightarrow 0} (\cos tx + y \sen tx) = 1$, por lo que dado $\epsilon = \frac{1}{2}$, existe $\delta > 0$ tal que si

$$|x| < \delta \implies \frac{1}{2} < \cos tx + y \sen tx < \frac{3}{2}. \text{ Así podemos definir } (\cos tx + y \sen tx)^{1/t} = e^{1/t \ln(\cos tx + y \sen tx)} =$$

$$e^{1/t \ln(1 + \frac{1}{2}t^2x^2 + ytx + o(t^2))} = e^{1/t(\frac{1}{2}t^2x^2 + ytx + o(t^2))} = e^{xy + o(1)} \rightarrow e^{xy}, \text{ si } t \rightarrow 0.$$

b) Dado que f es continua sobre E compacto, la función alcanza sus extremos en el interior de E o en la frontera de E .

El interior de E , $\overset{\circ}{E} = \{(x, y) \in E / x^2 + y^2 < 4\}$ y las derivadas parciales $f_x = ye^{xy} = 0$, $f_y = xe^{xy} = 0 \implies x = y = 0$ y $f(0, 0) = 1$. Además $f_{xx} = y^2e^{xy}$, $f_{yy} = x^2e^{xy}$, $f_{xy} = e^{xy} + yxe^{xy}$, por lo que el Hessiano en $H(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, de modo que $\det(H - \lambda) = 0 = \lambda^2 - 1$ i.e. $\lambda = \pm 1$. El punto $(0, 0)$ es un punto de silla.

Estudiamos la función en la frontera de E . Usando la parametrización $x = 2 \cos \theta$, $y = 2 \sin \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, por lo que $g(\theta) = f(2 \cos \theta, 2 \sin \theta) = e^{2 \sin 2\theta}$. La derivada $g'(\theta) = 4e^{2 \sin 2\theta} \cos 2\theta = 0 \iff 2\theta = \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi$, o sea $\theta = \frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$.

Así $\max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} g(\theta) = g(\frac{1}{4}\pi) = e^2$, $\min_{0 \leq \theta \leq 2\pi} g(\theta) = g(\frac{3}{4}\pi) = e^{-2}$, con lo cual $\max_{(x,y) \in \text{fr}(E)} f(x, y) = \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} g(\theta) = e^2$, $\min_{(x,y) \in \text{fr}(E)} f(x, y) = \min_{0 \leq \theta \leq 2\pi} g(\theta) = e^{-2}$.

Finalmente, la función f tiene un máximo en $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ y se tiene $\max_{(x,y) \in E} f(x, y) = e^2$, $\min_{(x,y) \in E} f(x, y) = e^{-2}$.

11. La gráfica de la función $g(x, y) = \frac{1}{xy}$ es una superficie en \mathbb{R}^3 . Determinar los puntos de la superficie más próximos al origen $(0, 0, 0)$.

Solucin El cuadrado de la distancia al origen está dada por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, por lo que si $z = \frac{1}{xy}$, la función $f(x, y, \frac{1}{xy})$ mide la distancia al origen al cuadrado de los elementos de la superficie.

El problema es equivalente a minimizar la función $h(x, y) = f(x, y, \frac{1}{xy}) = x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2y^2}$, así tenemos que $h_x = 2x - \frac{2}{x^3y^2} = 0$, $h_y = 2y - \frac{2}{y^3x^2} = 0 \implies x^4y^2 = 1$, $x^2y^4 = 1$ y se tiene $y^2 = \frac{1}{x^4} \implies x^6 = 1$ i.e. $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, es decir hay cuatro puntos críticos $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$. Las derivadas de orden dos son: $h_{xx} = 2 + \frac{6}{x^4y^2}$, $h_{xy} = \frac{4}{x^3y^3}$, $h_{yy} = 2 + \frac{6}{x^2y^4}$ y el Hessiano

es $H = \begin{pmatrix} 8 & \pm 4 \\ \pm 4 & 8 \end{pmatrix}$, $\Delta_1 = 8 > 0$, $\Delta_2 = 48 > 0$ y los puntos son mínimos de valor $h(\pm 1, \pm 1) = 3$, es decir de distancia es $\sqrt{3}$.

12. Determinar los puntos de la curva que es la intersección de las dos superficies $g_1(x, y, z) = x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1$ y $g_2(x, y, z) = x^2 + y^2 = 1$, que están más próximos al origen.

Solucin Sea $L = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1(x^2 - xy + y^2 - z^2 - 1) + \lambda_2(x^2 + y^2 - 1)$, entonces $L_x = 2x(1 + \lambda_1 + \lambda_2) - \lambda_1 y = 0$, $L_y = 2y(1 + \lambda_1 + \lambda_2) - \lambda_1 x = 0$, $L_z = 2z(1 - \lambda_1) = 0$.

— Si $z = 0$, $x^2 + y^2 - xy = 1$, $x^2 + y^2 = 1 \implies xy = 0 \implies x = 0$ o $y = 0$.

— Si $x = 0$, $y = \pm 1$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$.

— Si $y = 0$, $x = \pm 1$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$.

— Si $z \neq 0$, $\lambda_1 = 1$, $2x(2 + \lambda_2) = y$, $2y(2 + \lambda_2) = x \implies 4x(2 + \lambda_2)^2 = x$.

— Si $x = 0 \implies y = \pm 1$ y $y^2 - z^2 = 1 \implies z = 0$ que es imposible.

Así $x \neq 0 \implies 4(2 + \lambda_2)^2 = 1 \iff 4\lambda_2^2 + 16\lambda_2 + 15 = 0 \implies \lambda_2 = -\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}$.

— Si $\lambda_2 = -\frac{3}{2}$, $\lambda_1 = 1$, $2x(2 - \frac{3}{2}) = x = y \implies x = y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, $z^2 = -\frac{1}{2}$ que no puede ser.

— Si $\lambda_2 = -\frac{5}{2}$, $\lambda_1 = 1$, $2x(2 - \frac{5}{2}) = -x = y \implies x = -y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, $z^2 = \frac{1}{2}$.

Finalmente la soluciones son $(\pm 1, 0, 0)$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$; $(0, \pm 1, 0)$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$; $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}})$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\frac{5}{2}$; $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}})$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\frac{5}{2}$.

Las derivadas de orden dos son $L_{xx} = L_{yy} = 2(1 + \lambda_1 + \lambda_2)$, $L_{zz} = 2(1 - \lambda_1)$, $L_{xy} = -\lambda_1$, $L_{xz} = 0$, $L_{yz} = 0$ y la matriz Jacobiana de las restricciones $\frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(x, y, z)} = \begin{pmatrix} 2x - y & 2y - x & -2z \\ 2x & 2y & 0 \end{pmatrix}$ tiene rango 2 al evaluarse en las soluciones.

$$\text{El Hessiano orlado es } \left(\begin{array}{ccc|cc} 2(\lambda_1 + \lambda_2 + 1) & -\lambda_1 & 0 & 2x - y & 2x \\ 0 & 2(\lambda_1 + \lambda_2 + 1) & 0 & 2y - x & 2y \\ 0 & 0 & -2(\lambda_1 - 1) & -2z & 0 \\ \hline 2x - y & 2y - x & -2z & 0 & 0 \\ 2x & 2y & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

$$\text{- En } (0, \pm 1, 0), \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, H = \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & \mp 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 2 & \pm 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \mp 1 & \pm 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 2 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \det H = 8 \text{ y es un m\u00ednimo.}$$

$$\text{- En } (\pm 1, 0, 0), \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, H = \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & \mp 2 & \mp 2 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \mp 2 & \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mp 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \det H = 8 \text{ y es un m\u00ednimo.}$$

$$\text{- En } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -\frac{5}{2}, H = \left(\begin{array}{ccccc} -1 & -1 & 0 & \frac{3}{2}\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -1 & -1 & 0 & -\frac{3}{2}\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & \mp\sqrt{2} & 0 \\ \frac{3}{2}\sqrt{2} & -\frac{3}{2}\sqrt{2} & \mp\sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

$\det H = -16$ y en ambos casos hay un m\u00e1ximo.

$$-\text{En } \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -\frac{5}{2}, H = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -\frac{3}{2}\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & -1 & 0 & \frac{3}{2}\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & \mp\sqrt{2} & 0 \\ -\frac{3}{2}\sqrt{2} & \frac{3}{2}\sqrt{2} & \mp\sqrt{2} & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \det H =$$

-16 y en ambos casos hay un máximo.

Los mínimos son $(0, \pm 1, 0)$, $(\pm 1, 0, 0)$ de valor 1.

13. Representar el número positivo a de manera que el producto de cuatro factores positivos sea de suma mínima.

Solucin El problema se plantea de esta forma: minimizar $f(x, y, z, w) = x + y + z + w$ sujeta a la restricción $g(x, y, z, w) = xyzw = a$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $w \geq 0$.

El Lagrangeano $L = x + y + z + w + \lambda(xyzw - a)$ tiene derivadas parciales $L_x = 1 + \lambda yzw = 0$, $L_y = 1 + \lambda xzw = 0$, $L_z = 1 + \lambda xyw = 0$, $L_w = 1 + \lambda xyz = 0$, por lo que $\lambda \neq 0$, $y \neq 0$, $x \neq 0$, $z \neq 0$, $w \neq 0$. Restando dos ecuaciones tenemos $\lambda zw(x - y) = 0$, $\lambda xw(y - z) = 0$, $\lambda xy(w - z) = 0$, $\lambda yz(x - w) = 0 \implies x = y = z = w = a^{\frac{1}{4}}$, $\lambda = -a^{-\frac{3}{4}}$.

Las derivadas de orden dos son $L_{xx} = L_{yy} = L_{zz} = L_{ww} = 0$, $L_{xy} = \lambda zw$, $L_{xz} = \lambda yw$, $L_{xw} = \lambda yz$, $L_{yz} = \lambda xw$, $L_{yw} = \lambda xz$, $L_{zw} = \lambda xy$.

Además $\frac{\partial g}{\partial(x, y, z, w)} = (yzw, xzw, xyw, xyz) \neq (0, 0, 0, 0)$ en la solución.

Desarrollando el Hessiano orlado evaluado en $(\sqrt[4]{a}, \sqrt[4]{a}, \sqrt[4]{a}, \sqrt[4]{a})$ tenemos: $p = 1$, $i = 2, 3, 4$, $\det H_2 =$

$$\begin{vmatrix} 0 & -a^{\frac{5}{4}} & a^{\frac{3}{4}} \\ -a^{\frac{5}{4}} & 0 & a^{\frac{3}{4}} \\ a^{\frac{3}{4}} & a^{\frac{3}{4}} & 0 \end{vmatrix} = -2a^{\frac{11}{4}}, \det H_3 = \begin{vmatrix} 0 & -a^{\frac{5}{4}} & -a^{\frac{5}{4}} & a^{\frac{3}{4}} \\ -a^{\frac{5}{4}} & 0 & -a^{\frac{5}{4}} & a^{\frac{3}{4}} \\ -a^{\frac{5}{4}} & -a^{\frac{5}{4}} & 0 & a^{\frac{3}{4}} \\ a^{\frac{3}{4}} & a^{\frac{3}{4}} & a^{\frac{3}{4}} & 0 \end{vmatrix} = -3a^4, \det H_4 = \begin{vmatrix} 0 & -a^{\frac{5}{4}} & -a^{\frac{5}{4}} & -a^{\frac{5}{4}} & a^{\frac{3}{4}} \\ -a^{\frac{5}{4}} & 0 & -a^{\frac{5}{4}} & -a^{\frac{5}{4}} & a^{\frac{3}{4}} \\ -a^{\frac{5}{4}} & -a^{\frac{5}{4}} & 0 & -a^{\frac{5}{4}} & a^{\frac{3}{4}} \\ -a^{\frac{5}{4}} & -a^{\frac{5}{4}} & -a^{\frac{5}{4}} & 0 & a^{\frac{3}{4}} \\ a^{\frac{3}{4}} & a^{\frac{3}{4}} & a^{\frac{3}{4}} & a^{\frac{3}{4}} & 0 \end{vmatrix}$$

$-4a^{\frac{21}{4}}$, por lo que $(-1)^p \det H_i > 0$, $i = 2, 3, 4$ y $(a^{\frac{1}{4}}, a^{\frac{1}{4}}, a^{\frac{1}{4}}, a^{\frac{1}{4}})$, $\lambda = -a^{\frac{3}{4}}$ es un mínimo con restricciones. El valor mínimo es $4a^{\frac{1}{4}}$.

Por ejemplo si deseamos descomponer $20736 = 12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12$ de forma que el mínimo es $4 \cdot 12 = 48$.

14. Desarrollar el número positivo a como tres números positivos, de modo que el producto se máximo.

Solucin El problema se va a resolver usando dos caminos distintos.

a) El problema planta maximizar $f(x, y, z) = xyz$ bajo la restricción $g(x, y, z) = x + y + z = a$, con $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

Si consideramos el Lagrangeano $L = xyz + \lambda(x + y + z - a)$, tenemos $L_x = yz + \lambda = 0$, $L_y = xz + \lambda = 0$, $L_z = xy + \lambda = 0 \implies -\lambda = xy = xz = yz \implies x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$, pues en caso contrario $x = y = z = 0$ que contradice $x + y + z = a > 0$. Así tenemos que $x = y = z = \frac{1}{3}a$, $\lambda = -\frac{1}{9}a^2$ y $\frac{\partial g}{\partial(x, y, z)} = (1, 1, 1) \neq (0, 0, 0)$.

Por otro lado $L_{xx} = 0, L_{xy} = z, L_{xz} = y, L_{yy} = 0, L_{yz} = x, L_{zz} = 0$. Como $p = 1$, se deben de calcu-

lar dos determinantes $i = 2, 3$, con $\det H_2 = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{3}a & 1 \\ \frac{1}{3}a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{2}{3}a$, $\det H_3 = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{3}a & \frac{1}{3}a & 1 \\ \frac{1}{3}a & 0 & \frac{1}{3}a & 1 \\ \frac{1}{3}a & \frac{1}{3}a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}a^2$. Así tenemos $(-1)^i \det H_i > 0$, $i = 2, 3$ y $\frac{1}{3}(a, a, a)$ es un máximo de $f(x, y, z)$ bajo la restricción $g(x, y, z)$. El valor es $\frac{1}{27}a^3$.

- b) Sobre el conjunto $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x, y \leq a, 0 \leq x + y \leq a\}$, se busca maximizar la función

$f(x, y, z) = xy(a - x - y)$. Las derivadas parciales son $f_x = y(a - 2x - y) = 0$, $f_y = x(a - 2y - x) = 0$

y tenemos que si $x = 0 \implies y = 0$ o $y = a$.

- Si $x \neq 0$ y $y \neq 0 \implies a - 2x - y = 0, a - 2y - x = 0 \implies 3y = a, y = \frac{1}{3}a, x = \frac{1}{3}a$.

- Si $x \neq 0$ y $y = 0 \implies x = a$.

Las soluciones son $(0, 0)$, $(0, a)$, $(a, 0)$, $(\frac{1}{3}a, \frac{1}{3}a)$. Las derivadas de orden dos son $f_{xx} = -2y$, $f_{xy} =$

$$a - 2x - 2y, f_{yy} = -2x.$$

$$\text{– En } (0, 0), H(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ es indefinida (punto de silla).}$$

$$\text{– En } (0, a), H(0, a) = \begin{pmatrix} -2a & -a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \Delta_1 = -2a < 0, \Delta_2 = -a^2 < 0 \text{ (punto de silla).}$$

$$\text{– En } (a, 0), H(a, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ -a & -2a \end{pmatrix} \text{ es indefinida (punto de silla).}$$

$$\text{– En } \left(\frac{1}{3}a, \frac{1}{3}a\right), H\left(\frac{1}{3}a, \frac{1}{3}a\right) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}a & -\frac{1}{3}a \\ -\frac{1}{3}a & -\frac{2}{3}a \end{pmatrix}, \Delta_1 = -\frac{2}{3}a < 0, \Delta_2 = \frac{1}{3}a^2 \geq 0 \text{ es un máximo con}$$

valor $f\left(\frac{1}{3}a, \frac{1}{3}a\right) = \frac{1}{27}a^3$. Queda por analizar la función en la frontera.

$$\text{– En } (0, y), f(0, y) = 0.$$

$$\text{– En } (x, 0), f(x, 0) = 0.$$

$$\text{– En } (x, a - x), f(x, a - x) = x(a - x) \cdot 0 = 0.$$

Finalmente el máximo de f es $\frac{1}{27}a^3$ en $\left(\frac{1}{3}a, \frac{1}{3}a\right)$.

15. Determine el volumen máximo de una caja de base rectangular inscrita en el elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Solucin El volumen que queremos maximizar es $V(x, y) = 8xyz\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$, por lo que $V_x = \frac{8cy(1 - \frac{2x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2})}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} = 0$, $V_y = \frac{8cx(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{2y^2}{b^2})}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}$ y como $x \neq 0, y \neq 0 \implies 1 - \frac{2x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{2x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{2y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} \implies \frac{x}{a} = \frac{y}{b} \implies 1 - \frac{3x^2}{a^2} = 0 \implies x = \frac{a}{\sqrt{3}}, y = \frac{b}{\sqrt{3}} \implies z = \frac{c}{\sqrt{3}}$. Así las aristas valen $\frac{2a}{\sqrt{3}}, \frac{2b}{\sqrt{3}}, \frac{2c}{\sqrt{3}}$ y el volumen máximo es $\frac{8abc}{3\sqrt{3}}$.

16. Determinar los puntos del elipsoide $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} + \frac{z^2}{4} = 1$, cuya distancia al plano $x + y + z - 10 = 0$ es máxima y mínima.

Solucin Recordemos que la distancia de un punto al plano es $\frac{|x + y + z - 10|}{\sqrt{3}}$ y como la distancia

del origen al plano es $\frac{10}{\sqrt{3}}$ y la distancia del origen a un punto del elipsoide como máximo es $2\sqrt{2}$. Se deben determinar los extremos de $f(x, y, z) = -\frac{x+y+z-10}{\sqrt{3}}$ sujeta a la restricción $g(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} + \frac{z^2}{4} - 1 = 0$.

Sea $L = -\frac{x+y+z-10}{\sqrt{3}} + \lambda\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} + \frac{z^2}{4} - 1\right)$, entonces $L_x = -\frac{1}{\sqrt{3}} + \lambda\frac{x}{2} = 0$, $L_y = -\frac{1}{\sqrt{3}} + \lambda\frac{y}{4} = 0$, $L_z = -\frac{1}{\sqrt{3}} + \lambda\frac{z}{2} = 0$.

Se observa que $\lambda \neq 0$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$ y se tiene $x = \frac{1}{2}y = z$ por lo que $\frac{x^2}{4} + \frac{4x^2}{8} + \frac{x^2}{4} = x^2 = 1 \implies x = \pm 1$, $y = \pm 2$, $z = \pm 1$.

Así se tiene $\lambda = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $(1, 2, 1)$ y $\lambda = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $(-1, -2, -1)$.

Las condiciones de segundo orden son $L_{xx} = \frac{1}{2}\lambda$, $L_{yy} = \frac{1}{4}\lambda$, $L_{zz} = \frac{1}{2}\lambda$, $g_x = \frac{1}{2}x$, $g_y = \frac{1}{4}y$, $g_z = \frac{1}{2}z$, $L_{xy} = L_{xz} = L_{yz} = 0$.

El Hessiano orlado es $H = \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2}\lambda & 0 & 0 & \frac{1}{2}x \\ 0 & \frac{1}{4}\lambda & 0 & \frac{1}{4}y \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\lambda & \frac{1}{4}z \\ \hline \frac{1}{2}x & \frac{1}{4}y & \frac{1}{4}z & 0 \end{array} \right)$, $H_2 = \left(\begin{array}{ccc} \frac{1}{2}\lambda & 0 & \frac{1}{2}x \\ 0 & \frac{1}{4}\lambda & \frac{1}{4}y \\ \frac{1}{2}x & \frac{1}{4}y & 0 \end{array} \right)$, donde $\det H_2 = -\frac{\lambda x^2}{16} - \frac{\lambda y^2}{32}$, $\det H = -\frac{\lambda^2 x^2}{32} - \frac{\lambda^2(2y^2 + z^2)}{128}$.

- En $(1, 2, 1)$, $\lambda = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\det H_2 = -\frac{\sqrt{3}}{16}$, $\det H_3 = -\frac{13}{384}$ i.e. $(-1)^1 \det H_i > 0$, $i = 2, 3$, por lo que $(1, 2, 1)$ es un mínimo y $f(1, 2, 1) = \frac{6}{\sqrt{3}}$.

- En $(-1, -2, -1)$, $\lambda = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\det H_2 = \frac{\sqrt{3}}{16}$, $\det H_3 = -\frac{13}{384}$ i.e. $(-1)^i \det H_i > 0$, $i = 2, 3$, por lo que $(-1, -2, -1)$ es un máximo y $f(-1, -2, -1) = \frac{14}{\sqrt{3}}$.

17. Determinar el elipsoide de volumen mínimo con ejes en los ejes coordenados que pasa por $(2, -3, 5)$.

Solucin El elipsoide debe satisfacer que $\frac{4}{a^2} + \frac{9}{b^2} + \frac{25}{c^2} = 1$ y su volumen es $8abc$. Así se debe minimizar $f(a, b, c) = 8abc$ con la restricción $\frac{4}{a^2} + \frac{9}{b^2} + \frac{25}{c^2} = 1$.

El Lagrangeano $L = 8abc + \lambda\left(\frac{4}{a^2} + \frac{9}{b^2} + \frac{25}{c^2} - 1\right)$ satisface que: $L_a = 8bc\lambda\frac{8}{a^3} = 0$, $L_b = 8ac -$

$$\lambda \frac{18}{b^3} = 0, L_c = 8ab - \lambda \frac{50}{c^3} = 0 \implies a^3bc = \lambda = \frac{4}{9}ab^3c = \frac{4}{25}abc^3 \implies \frac{4abc}{\lambda} = \frac{4}{a^2}, \frac{4abc}{\lambda} = \frac{9}{b^2}, \frac{4abc}{\lambda} = \frac{25}{c^2} \implies \frac{12abc}{\lambda} = 1, \text{ o sea } \lambda = 12abc. \text{ Así } a^3bc = 12abc \implies a^2 = 12, \frac{4}{9}ab^3c = 12abc \implies b^2 = 27, \frac{4}{25}abc^3 = 12abc \implies c^2 = 75, \lambda = 1080\sqrt{3}.$$

Las derivadas de orden 2 son: $L_{aa} = \frac{24\lambda}{a^4}, L_{bb} = \frac{54\lambda}{b^4}, L_{cc} = \frac{75\lambda}{c^4}, L_{ab} = 8c, L_{ac} = 8b, L_{bc} = 8a.$

$$\text{El Hessiano orlado } H = \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{24\lambda}{a^4} & 8c & 8b & -\frac{8}{a^3} \\ 8c & \frac{54\lambda}{b^4} & 8a & -\frac{9}{b^3} \\ 8b & 8a & \frac{75\lambda}{c^4} & -\frac{25}{c^3} \\ \hline -\frac{8}{a^3} & -\frac{9}{b^3} & -\frac{25}{c^3} & 0 \end{array} \right), H_2 = \left(\begin{array}{ccc} \frac{24\lambda}{a^4} & 8c & -\frac{8}{a^3} \\ 8c & \frac{54\lambda}{b^4} & -9b^3 \\ -\frac{8}{a^3} & -\frac{9}{b^3} & 0 \end{array} \right).$$

En $(\sqrt{12}, \sqrt{27}, \sqrt{75}), \lambda = 1080\sqrt{3}, \det H_2 = -\frac{220\sqrt{3}}{81}, \det H_3 = -\frac{736}{9}$ y como $(-1)^i \det H_i > 0,$ para $i = 2, 3,$ se tiene un mínimo.

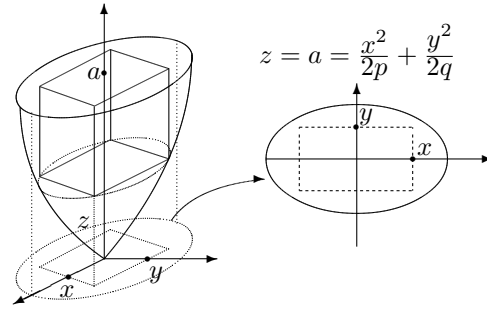
Finalmente el elipsoide de volumen mínimo es $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{27} + \frac{z^2}{75} = 1.$

18. Un paraboloido elíptico de ecuación $\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z,$ se corta por el plano $z = a.$ Determinar el volumen

del mayor paralelepípedo recto rectangular que se puede inscribir en esta figura.

Solucin Es claro que el paralelepípedo tiene por

volumen $V = (a - z)(2x)(2y),$ sujeta a la restricción $\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z.$ Así el volumen $V = 4xy \left(a - \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} \right),$ por lo que $V_x = 4y \left(a - \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} \right) - \frac{x}{p} 4xy = 4y \left(a - \frac{3x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} \right) = 0.$
 $V_y = 4x \left(a - \frac{x^2}{2p} - \frac{3y^2}{2q} \right) = 0.$



Si $y = 0 \implies x = 0$ o $x = \sqrt{2ap}.$ Si $x = 0 \implies y = 0$ o $y = \sqrt{2aq}.$ Así se tiene que $(0, 0), (0, \sqrt{2aq}), (\sqrt{2ap}, 0)$ son puntos críticos tales que $V = 0$ (i.e. es un mínimo).

Si $x \neq 0, y \neq 0, a - \frac{3x^2}{2p} = \frac{y^2}{2q} \implies a - \frac{x^2}{2p} - 3 \left(a - \frac{3x^2}{2p} \right) = -2a - \frac{8x^2}{2p} \implies \frac{x^2}{2p} = \frac{a}{4},$
 $x = \sqrt{\frac{ap}{2}} \implies y = \sqrt{\frac{aq}{2}}, z = \frac{a}{2},$ por lo que $V = 4\sqrt{\frac{ap}{2}}\sqrt{\frac{aq}{2}} \left(a - \frac{a}{2} \right) = a^2\sqrt{pq}.$

Queda por verificar que es un máximo. En efecto, las derivadas de orden dos: $V_{xx} = -\frac{12xy}{p}, V_{yy} =$

$$-\frac{12xy}{q}, V_{xy} = 4a - \frac{6x^2}{p} - \frac{6y^2}{q} \text{ y evaluando el Hessiano en } \left(\sqrt{\frac{ap}{2}}, \sqrt{\frac{aq}{2}}\right) \text{ es tal que } H = \begin{pmatrix} -6a\sqrt{\frac{p}{q}} & -2a \\ -2a & -6a\sqrt{\frac{q}{p}} \end{pmatrix},$$

$$\Delta_1 = -6a\sqrt{\frac{p}{q}} < 0, \Delta_2 = 32a^2 > 0, \text{ lo que indica un m\u00ednimo.}$$

19. Por el punto $(1, 1, 2)$ para el plano que forma con los tres planos coordenados un tetraedro. Determinar

las ecuaciones del plano, cuando el volumen del tetraedro formado es m\u00ednimo.

Solucin Si consideramos que el plano tiene por

ecuaci\u00f3n $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, entonces $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{2}{c} = 1$. De

esta forma el problema se transforma en determinar el

volumen $V = \frac{1}{3}abc$ bajo la restricci\u00f3n $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{2}{c} = 1$.

El Lagrangeano $L = \frac{1}{3}abc + \lambda \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{2}{c} - 1\right)$ y se tiene que: $L_a = \frac{1}{3}bc - \frac{\lambda}{a^2} = 0$, $L_b = \frac{1}{3}ac - \frac{\lambda}{b^2} = 0$,

$L_c = \frac{1}{3}ab - \frac{2\lambda}{c^2} = 0 \implies \frac{1}{3}abc = \frac{\lambda}{a} = \frac{\lambda}{b} = \frac{2\lambda}{c} \implies \lambda \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{2}{c}\right) = abc$, por lo que

$\frac{1}{3}bc = \frac{abc}{a^2} \implies a = 3$, $b = 3$, $c = 6$, $\lambda = 54$. As\u00ed $\frac{x}{3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} = 1 \implies 2x + 2y + z - 6 = 0$ y

$b = \frac{1}{3}(3)(3)(6) = 18$. Queda por verificar que la soluci\u00f3n es un m\u00ednimo.

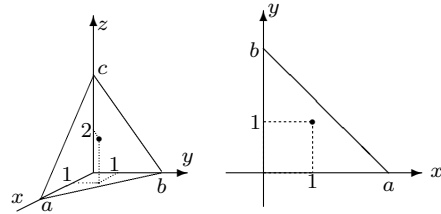
En efecto, $V_{aa} = \frac{2\lambda}{a^3}$, $V_{bb} = \frac{2\lambda}{b^3}$, $V_{cc} = \frac{4\lambda}{c^3}$, $V_{ab} = \frac{1}{3}c$, $V_{ac} = \frac{1}{3}b$, $V_{bc} = \frac{1}{3}a$.

$$\text{El Hessiano orlado es: } H = \begin{pmatrix} \frac{2\lambda}{a^3} & \frac{1}{3}c & \frac{1}{3}b & -\frac{1}{a^2} \\ \frac{1}{3}c & \frac{2\lambda}{b^3} & \frac{1}{3}a & -\frac{1}{b^2} \\ \frac{1}{3}b & \frac{1}{3}a & \frac{4\lambda}{c^3} & -\frac{2}{c^2} \\ -\frac{1}{a^2} & -\frac{1}{b^2} & -\frac{2}{c^2} & 0 \end{pmatrix}, H_2 = \begin{pmatrix} \frac{2\lambda}{a^3} & \frac{1}{3}c & -\frac{1}{a^2} \\ \frac{1}{3}c & \frac{2\lambda}{b^3} & -\frac{1}{b^2} \\ -\frac{1}{a^2} & -\frac{1}{b^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{En } (3, 3, 6), \lambda = 54 \text{ se tiene } H_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -\frac{1}{9} \\ 2 & 4 & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & 0 \end{pmatrix}, H_3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & -\frac{1}{9} \\ 2 & 4 & 1 & -\frac{1}{9} \\ 1 & 1 & 1 & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{18} & 0 \end{pmatrix}, \det H_2 =$$

$-\frac{4}{81}$, $\det H_3 = -\frac{1}{27}$. Ahora como $(-1)^i \det H_i > 0$, $i = 2, 3$, se tiene que $(3, 3, 6)$ es un m\u00ednimo.

20. Determinar los extremos de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ bajo la restricci\u00f3n $g(x, y, z) = 5x^2 + 9y^2 + 6z^2 +$



$$4yz - 1 = 0.$$

Solucin Derivando el Lagrangeano $L = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(5x^2 + 9y^2 + 6z^2 + 4yz - 1)$ se tiene:

$$L_x = 2x(1 + 5\lambda) = 0, L_y = 2(y(1 + 9\lambda) + 2\lambda z) = 0, L_z = 2(z(1 + 6\lambda) + 2\lambda y) = 0 \text{ y como}$$

$$5x^2 + 9y^2 + 6z^2 + 4yz = 1, \text{ se cumple:}$$

$$\text{— si } y = z = 0 \implies x^2 = \frac{1}{5} \implies x = \sqrt{\frac{1}{5}}, \lambda = -\frac{1}{5},$$

$$\text{— si } y \neq 0 \text{ o } z \neq 0 \implies (1 + 9\lambda)(1 + 6\lambda) - 4\lambda^2 = 50\lambda^2 + 15\lambda + 1 = 0 \text{ i.e. } \lambda = -\frac{1}{5}, \lambda = -\frac{1}{10},$$

$$\text{— si } \lambda = -\frac{1}{5}, \text{ se tiene } z = -2y \text{ y usando la restricción se obtiene } 5x^2 + 25y^2 = 1,$$

$$\text{— si } \lambda = -\frac{1}{10} \text{ se tiene } y = 2z, x = 0, \text{ por lo que } 50z^2 = 1 \implies z = \sqrt{\frac{1}{50}}, y = \sqrt{\frac{2}{50}}, x = 0.$$

Las derivadas de segundo orden de L y las derivadas parciales de g son: $L_{xx} = 2 + 10\lambda, L_{xy} = 0,$

$$L_{xz} = 0, g_x = 10x, L_{xy} = 0, L_{yy} = 2 + 18\lambda, L_{yz} = 4\lambda, g_y = 18y, L_{zx} = 0, L_{zy} = 4\lambda,$$

$L_{zz} = 2 + 12\lambda, g_z = 12z.$ El Hessiano orlado es:

$$H = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 + 10\lambda & 0 & 0 & 10x \\ 0 & 2 + 18\lambda & 0 & 18y \\ 0 & 0 & 2 + 12\lambda & 12z \\ \hline 10x & 18y & 12z & 0 \end{array} \right), \det H_2 = \begin{vmatrix} 2 + 10\lambda & 0 & 10x \\ 0 & 2 + 18\lambda & 18y \\ 10x & 18y & 0 \end{vmatrix} =$$

$$-200x^2(9\lambda + 1) - 648y^2(5\lambda + 1), \det H = -400x^2(6\lambda + 1)(9\lambda + 1) - 144(5\lambda + 1)(9y^2(6\lambda + 1) + 4z^2(9\lambda + 1)).$$

— En $(\pm\sqrt{\frac{1}{5}}, 0, 0), \lambda = -\frac{1}{5}, \det H = -400(\pm\sqrt{\frac{1}{5}})^2(6(-\frac{1}{5}) + 1)(9(-\frac{1}{5}) + 1) = -\frac{64}{25}, \det H_2 = 32$ y como $(-1)^i \det H_i > 0, i = 2, 3$ es un máximo.

— En $(0, \pm\frac{2}{\sqrt{50}}, \pm\frac{1}{\sqrt{50}}), \lambda = -\frac{1}{10}, \det H_3 = -\frac{2664}{125}, \det H_2 = -\frac{648}{25}$ y como $(-1)^1 \det H_i > 0, i = 2, 3$ es un máximo.

— En los puntos $(\sqrt{\frac{1}{5} - 5y^2}, \pm y, \mp 2y)$ y en los puntos $(-\sqrt{\frac{1}{5} - 5y^2}, \pm y, \mp 2y), \lambda = -\frac{1}{5}$ en ambos casos, $\det H_3 = \frac{64}{5}(25y^2 - 1), \det H_2 = -32(25y^2 - 1)$ y no hay extremo.

21. Determinar los extremos de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sobre \mathbb{R}^3 , bajo las restricciones $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 4 = 0, h(x, y, z) = xyz - 1 = 0.$

Solucin Sea $L = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1(x^2 + y^2 + 2z^2 - 4) + \lambda_2(xyz - 1)$, entonces $L_x = 2x + 2\lambda_1x + \lambda_2yz = 0$, $L_y = 2y + 2\lambda_1y + \lambda_2xz = 0$, $L_z = 2z + 4\lambda_1z + \lambda_2xy = 0 \implies (x^2 - y^2)(1 + \lambda_1) = 0$.

Si $x^2 \neq y^2$ se tiene que $\lambda_1 = -1 \implies \lambda_2yz = 0 \implies \lambda_2xyz = \lambda_2 = 0$ y $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$, pues $xyz = 1 \neq 0$. Así tenemos: $2z(1 + 2\lambda_1) + \lambda_2xy = 2z(1 + 2\lambda_1) = 0 \implies \lambda_1 = -\frac{1}{2}$ que es una contradicción. Así, $x^2 = y^2$ y como $x^2y^2z^2 = 1$ se tiene $x^2 + z^2 = 2$, $x^4(2 - x^2) - 1 = -x^6 + 2x^4 - 1 = 0$ i.e. $x^6 - 2x^4 + 1 = 0$.

Consideremos la ecuación $y^3 - 2y^2 + 1 = 0$, $y = 1$ es solución por lo que $y^3 - 2y^2 + 1 = (y^2 - y + 1)(y - 1) = (y - a)(y - b)(y - 1) = 0$, con $a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, $b = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$. Pero $y = x^2 > 0$, por lo que se elimina la solución b . Las soluciones satisfacen $x^2 = 1$, $x^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, $x^2 = y^2$, $z^2 = 2 - x^2$, $xyz > 0$ y se tiene (si llamamos α una solución del sistema): $2\alpha^2(1 + \lambda_1) + \lambda_2 = 0$, $2(2 - \alpha^2)(1 + 2\lambda_1) + \lambda_2 = 0 \implies \lambda_1 = \frac{2(\alpha^2 - 1)}{4 - 3\alpha^2}$, $\lambda_2 = -\frac{2\alpha^2(2 - \alpha)}{4 - 3\alpha^2}$.

Las derivadas de orden dos de L y las derivadas de orden uno de las restricciones son: $L_{xx} = 2 + 2\lambda_1$, $L_{xy} = \lambda_2z$, $L_{xz} = \lambda_2y$, $L_{yy} = 2 + 2\lambda_1$, $L_{yz} = \lambda_2x$, $L_{zz} = 2 + 4\lambda_1$, $g_x = 2x$, $g_y = 2y$, $g_z = 4z$, $h_x = yz$, $h_y = xz$, $h_z = xy$.

El Hessiano orlado es $H = \left(\begin{array}{ccc|cc} 2 + 2\lambda_1 & \lambda_2z & \lambda_2y & 2x & yz \\ \lambda_2z & 2 + 2\lambda_1 & \lambda_2x & 2y & xz \\ \lambda_2y & \lambda_2x & 2 + 4\lambda_1 & 4z & xy \\ \hline 2x & 2y & 4z & 0 & 0 \\ yz & xz & xy & 0 & 0 \end{array} \right)$.

Observemos que la matriz Jacobiana $\frac{\partial(g, h)}{\partial(x, y, z)} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 4z \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}$ tiene rango 2, pues si bien las dos

primeras columnas son iguales en las soluciones, no es así para la primera y la tercera columnas pues:

$$\begin{pmatrix} 2x & 4z \\ yz & xy \end{pmatrix} = 2x^2y - 4yz^2 = 2y(x^2 - 2(2 - x^2)) = -2y(4 - 3x^2) \neq 0, \text{ para cualquier solución } x = \alpha.$$

El Hessiano orlado tiene por determinante: $\det H = -8\lambda_2 x^5 yz + 8x^4(y^2(\lambda_1 + 1) + z^2(2\lambda_1 + 1)) + 8\lambda_2 x^3 yz(y^2 + 2z^2) + 8x^2(y^4(\lambda_1 + 1) - 2y^2 z^2(6\lambda_1 + 5) + 4z^4(\lambda_1 + 1)) - 8\lambda_2 x yz(y^4 - 2y^2 z^2 + 4z^4) + 8y^2 z^2(y^2(2\lambda_1 + 1) + 4z^2(\lambda_1 + 1))$.

Las soluciones evaluadas en los determinantes de los Hessianos orlados son:

| | $\alpha = 1$ | $\alpha = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ |
|---|--------------|--|
| $(\alpha, \alpha, \sqrt{2 - \alpha^2})$ | 32 | $64\sqrt{5} - 160 < 0$ |
| $(-\alpha, -\alpha, \sqrt{2 - \alpha^2})$ | 32 | $64\sqrt{5} - 160 < 0$ |
| $(-\alpha, \alpha, -\sqrt{2 - \alpha^2})$ | 32 | $64\sqrt{5} - 160 < 0$ |
| $(\alpha, -\alpha, -\sqrt{2 - \alpha^2})$ | 32 | $64\sqrt{5} - 160 < 0$ |

por lo que para $\alpha = 1$, los puntos son mínimos y para $\alpha = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$, los puntos son máximos.

22. Determinar los extremos de $f(x, y, z) = xyz$ sobre \mathbb{R}^3 , bajo las restricciones $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 < 1$ y $h(x, y, z) = 1 - 2 \operatorname{sen}(x^2 + y^2 + z^2) = 0$.

Solucin Observamos que las condiciones $x^2 + y^2 + z^2 < 1$ y $1 - 2 \operatorname{sen}(x^2 + y^2 + z^2) = 0$ es equivalente a la condición $g^*(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - \frac{1}{6}\pi = 0$, por lo que tenemos una sola restricción. El Lagrangeano es $L = xyz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - \frac{1}{6}\pi)$ y las derivadas parciales son $L_x = yz + 2x\lambda = 0$, $L_y = xz + 2y\lambda = 0$, $L_z = xy + 2z\lambda = 0$.

Si $\lambda = 0 \implies x = y = z = 0$, pero no es solución del sistema, por lo que $\lambda \neq 0$. Así $2x^2\lambda = 2y^2\lambda = 2z^2\lambda = -xyz$, o sea $x^2 = y^2 = z^2 \implies 3x^2 = \frac{1}{6}\pi$, $x^2 = \frac{1}{18}\pi$ y $\lambda = -\frac{yz}{2x}$. Las derivadas de orden dos son $L_{xx} = 2\lambda$, $L_{xy} = z$, $L_{xz} = y$, $L_{yy} = 2\lambda$, $L_{yz} = x$, $L_{zz} = 2\lambda$.

$$\text{El Hessiano orlado } H = \begin{pmatrix} 2\lambda & z & y & 2x \\ z & 2\lambda & x & 2y \\ y & x & 2\lambda & 2z \\ 2x & 2y & 2z & 0 \end{pmatrix}, \det H_2 = \begin{vmatrix} 2\lambda & z & 2x \\ z & 2\lambda & 2y \\ 2x & 2y & 0 \end{vmatrix} = -8(\lambda x^2 - xyz + \lambda y^2),$$

$$\det H = 4(x^4 - 2x^2(y^2 + z^2 + 2\lambda^2) + 12\lambda xyz + y^4 - 2y^2(z^2 + 2\lambda^2) + z^2(z^2 - \lambda^2)).$$

Si $x^2 = y^2 = z^2$, $\det H = -12\lambda^2(x^2 - 4(\pm x)\lambda + 4\lambda^2) = -12x^2(\pm x - 2\lambda)^2$. La matriz Jacobiana $\frac{\partial g^*}{\partial(x, y, z)} = (2x, 2y, 2z) \neq (0, 0, 0)$ y es de rango 1. Al evaluar los determinantes de los Hessianos orlados se tiene $\det H_2 = \pm \frac{4\sqrt{2}}{27}\pi^{3/2}$, $\det H_3 = \mp \frac{4}{27}\pi^2$, según sean los puntos $(\pm c, \pm c, \pm c)$, $\lambda = \pm \frac{1}{2}c$, $c = \sqrt{\frac{\pi}{18}}$. Los resultados se resumen en la siguiente tabla:

| $c = \sqrt{\frac{\pi}{18}}$ | λ | $\det H_2$ | $\det H_3$ |
|-----------------------------|-----------------|------------|------------|
| (c, c, c) | $-\frac{1}{2}c$ | + | - |
| $(c, c, -c)$ | $\frac{1}{2}c$ | - | - |
| $(-c, c, c)$ | $\frac{1}{2}c$ | - | - |
| $(c, -c, c)$ | $\frac{1}{2}c$ | - | - |
| $(-c, -c, c)$ | $-\frac{1}{2}c$ | + | - |
| $(-c, c, -c)$ | $-\frac{1}{2}c$ | + | - |
| $(c, -c, -c)$ | $-\frac{1}{2}c$ | + | - |
| $(-c, -c, -c)$ | $\frac{1}{2}c$ | - | - |

Así se tiene que la solución (c, c, c) , $\lambda = -\frac{1}{2}c$, con $c = \frac{1}{18}\sqrt{\pi}$ tal que $\det H_2 = \frac{4\sqrt{2}}{27}\pi^{3/2}$, $\det H_3 = -\frac{4}{27}\pi^2$, pero como $p = 1$, $(-1)^i \det H_i > 0$, $i = 2, 3$ y se tiene un máximo.

Similarmente la solución $(-c, -c, -c)$, $\lambda = \frac{1}{2}c$, con $c = \frac{1}{18}\sqrt{\pi}$, es tal que $\det H_2 = -\frac{4\sqrt{2}}{27}\pi^{3/2}$, $\det H_3 = -\frac{4}{27}\pi^2$ y como $p = 1$, $(-1)^1 \det H_i > 0$, $i = 2, 3$ y se tiene un mínimo.

Finalmente los máximos son (c, c, c) , $(-c, -c, c)$, $(-c, c, -c)$, $(c, -c, -c)$, con $c = \frac{1}{18}\sqrt{\pi}$ y los mínimos son $(c, c, -c)$, $(-c, c, c)$, $(c, -c, c)$, $(-c, -c, -c)$, con $c = \frac{1}{18}\sqrt{\pi}$. Además: $f(c, c, c) = f(-c, -c, c) = f(-c, c, -c) = f(c, -c, -c) = \frac{1}{54}\pi\sqrt{\frac{1}{2}\pi}$ y $f(c, c, c) = f(c, c, c) = f(c, c, c) = f(c, c, c) = -\frac{1}{54}\pi\sqrt{\frac{1}{2}\pi}$.

23. Determinar los extremos de la función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, bajo las restricciones $g(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0$, $h(x, y, z) = xy - 1 = 0$.

Solucin La función de Lagrange es $L(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1(x + y + z - 1) + \lambda_2(xy - 1)$.

Derivando, $L_x = 2x + \lambda_1 + \lambda_2 y = 0$, $L_y = 2y + \lambda_1 + \lambda_2 x = 0$, $L_z = 2z + \lambda_1 = 0$, por lo que

$$2(x - y) + \lambda_2(y - x) = (y - x)(\lambda_2 - 2) = 0.$$

— Si $y = x \implies x^2 = 1$, o sea $x = \pm 1$.

— Si $x = 1 \implies y = 1, z = -1 \implies \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -4$.

— Si $x = -1, y = -1, z = 3 \implies \lambda_1 = -6, \lambda_2 = -8$.

— Si $x \neq y \implies \lambda_2 = 2$, entonces $z = -\frac{1}{2}\lambda_2 = -1$. Además $x + y = 2, xy = 1$ por lo que

$x(2 - x) = 1 \implies x^2 - 2x + 1 = 0$, o sea $x = 1 \implies y = 1$, que es una contradicción. De esta forma

$x = y$ y los puntos críticos son $(1, 1, -1), \lambda_1 = -4, \lambda_2 = 2$ y $(-1, -1, 3), \lambda_1 = -4, \lambda_2 = -6$.

Por otro lado $\frac{\partial(g, h)}{\partial(x, y, z)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & x & 0 \end{pmatrix}$ es de rango 2, para las soluciones encontradas.

Las derivadas de segundo orden son: $L_{xx} = 2, L_{xy} = \lambda_2, L_{xz} = 0, L_{yx} = \lambda_2, L_{yy} = 2, L_{yz} = 0,$

$L_{zx} = 0, L_{yz} = 0, L_{zz} = 2$, el Hessiano orlado es:

$$H = \left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & \lambda_2 & 0 & 1 & y \\ \lambda_2 & 2 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ y & x & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{ y el determinante } \det H = 4x^2 - 2xy(\lambda_2 + 2) + 4y^2.$$

— En $(1, 1, -1), \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -4, \det H = 4 - 2\lambda_2 = 12 > 0$ y como $(-1)^2 \det H_3 > 0$ es un mínimo.

— En $(-1, -1, 3), \lambda_1 = -4, \lambda_2 = -6, \det H = 4 - 2\lambda_2 = 16$ y como $(-1)^2 \det H_3 > 0$ es un mínimo.

Sin embargo, se pudo haber resuelto de otra forma. En efecto, por las restricciones se tiene $y = \frac{1}{x}$ y $z =$

$1 - x - \frac{1}{x}$, por lo que $\Phi(x) = f(x, y, z) = \frac{2x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2}{x^2}, \Phi'(x) = \frac{2(2x^4 - x^3 + x - 2)}{x^3}$

y $\Phi'(1) = 0$. Así, $\Phi''(x) = \frac{4(x^4 - x + 3)}{x^4}$ y como $\Phi''(1) = 12 > 0$ se tiene un mínimo en $(1, 1, -1)$.

Además $\Phi'(-1) = 0, \Phi''(-1) = 20 > 0$ y $(-1, -1, 3)$ es un mínimo.

24. Determinar los extremos de la función $f(x, y, z) = x + y + z$ sobre \mathbb{R} , bajo las restricciones $g(x, y, z) =$

$$(x - 4) + 2(y - 2) + 3(z - 3) = 0, h(x, y, z) = (x - 4)^2 + (y - 4)^2 + (z - 5)^2 - 1 = 0.$$

Solucin Sea $L(x, y, z) = x + y + z - 9 + \lambda_1(x + 2y + 3z) + \lambda_2(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$ el Lagrangeano de

la función $f(x, y, z)$, trasladando el origen a $(4, 2, 3)$. Las derivadas parciales de L son $L_x = 1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 x = 0$, $L_y = 1 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 y = 0$, $L_z = 1 + 3\lambda_1 + 2\lambda_2 z = 0$ y sumando $L_x + 2L_y + 3L_z = 6 + 14\lambda_1 = 0 \implies \lambda_1 = -\frac{3}{7}$, por lo que $\lambda_2 x = -\frac{2}{7}$, $\lambda_2 z = \frac{1}{7}$; esto nos indica $\lambda_2 \neq 0$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$.

Por otro lado, $1 = x^2 + y^2 + z^2 = \frac{4}{49\lambda_2^2} + \frac{1}{14^2\lambda_2^2} + \frac{1}{49\lambda_2^2} \implies \lambda_2 = \pm \frac{\sqrt{21}}{14}$, con lo cual tenemos las soluciones: $-\frac{1}{\sqrt{21}}(4, 1, 2)$, $\lambda_1 = -\frac{3}{7}$, $\lambda_2 = \frac{\sqrt{21}}{14}$; $\frac{1}{\sqrt{21}}(4, 1, -2)$, $\lambda_1 = -\frac{3}{7}$, $\lambda_2 = -\frac{\sqrt{21}}{14}$.

La matriz Jacobiana de las restricciones $\frac{\partial(g, h)}{\partial(x, y, z)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$ es de rango 2 y las derivadas de segundo orden son $L_{xx} = 2\lambda_2$, $L_{xy} = 0$, $L_{xz} = 0$, $L_{yy} = 2\lambda_2$, $L_{yz} = 0$, $L_{zz} = 2\lambda_2$. El Hessiano orlado es:

$$H = \left(\begin{array}{ccc|cc} 2\lambda_2 & 0 & 0 & 1 & 2x \\ 0 & 2\lambda_2 & 0 & 2 & 2y \\ 0 & 0 & 2\lambda_2 & 3 & 2z \\ \hline 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2x & 2y & 2z & 0 & 0 \end{array} \right),$$

$$\det H = 8\lambda_2(13x^2 - 2xy - 6xz + 10y^2 - 12yz + 5z^2).$$

— En $(\frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{1}{\sqrt{21}}, -\frac{2}{\sqrt{21}})$, $\lambda_1 = -\frac{3}{7}$, $\lambda_2 = -\frac{\sqrt{21}}{14}$, $\det H = 112\lambda_2 = -8\sqrt{21}$ y es un máximo.

— En $(-\frac{4}{\sqrt{21}}, -\frac{1}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}})$, $\lambda_1 = -\frac{3}{7}$, $\lambda_2 = \frac{\sqrt{21}}{14}$, $\det H = 112\lambda_2 = 8\sqrt{21}$ y es un mínimo.

25. Determinar los puntos críticos de la función $f(x, y, z) = xy + xz + yz$ bajo la restricción $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$.

Solucin El Lagrangeano es $L = xy + xz + yz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$, por lo que $L_x = y + z + 2\lambda x = 0$, $L_y = x + z + 2\lambda y = 0$, $L_z = x + y + 2\lambda z = 0 \implies (1 - 2\lambda)(x - y) = 0 \implies x = y$ o $\lambda = \frac{1}{2}$.

Si $x = y$, $x + \lambda z = 0$, $x + z + 2\lambda x = 0 \implies z(2\lambda^2 + \lambda - 1) = 0$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, que no puede ser. Así, $x \neq y \implies \lambda = \frac{1}{2}$, $y + x + z = 0$, $y + x - z = 0 \implies x + y = 0$, $z = 0 \implies 2x^2 = 1 \implies x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$$y = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}, z = 0.$$

La matriz Jacobiana $\frac{\partial g}{\partial(x, y, z)} = (2x, 2y, 2z) \neq (0, 0, 0)$ en las soluciones. Las derivadas de orden dos

son $L_{xx} = 2\lambda$, $L_{xy} = 1$, $L_{xz} = 1$, $L_{yy} = 2\lambda$, $L_{yz} = 1$, $L_{zz} = -2\lambda$ y el Hessiano orlado es: $H =$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2\lambda & 1 & 1 & 2x \\ 1 & 2\lambda & 1 & 2y \\ 1 & 1 & -2\lambda & 2z \\ \hline 2x & 2y & 2z & 0 \end{array} \right), H_2 = \begin{pmatrix} 2\lambda & 1 & 2x \\ 1 & 2\lambda & 2y \\ 2x & 2y & 0 \end{pmatrix} \text{ de modo que } \det H_2 = -8(\lambda x^2 - xy + \lambda y^2),$$

$$\det H_3 = \det H = 4(x^2(4\lambda^2 + 1) - 2xy(2\lambda + 1) + z(1 - 2\lambda) + y^2(4\lambda^2 + 1) + 2yz(2\lambda - 1) + z^2(1 - 4\lambda^4)).$$

— En $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $\det H_2 = -8 < 0$, $\det H_3 = 16 > 0$ y no es máximo ni mínimo.

— En $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $\det H_2 = -8 < 0$, $\det H_3 = 16 > 0$ y no es máximo ni mínimo.

26. Determinar los ejes de la elipse de ecuación $2x^2 + xy + 2y^2 - 1 = 0$.

Solucin La elipse $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2x^2 + xy + 2y^2 = 1\}$ está centrada en el origen y sus ejes son

ortogonales. Así se observa que el tamaño de los ejes tienen la particularidad que la longitud de los ejes,

son extremos de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ sujeta a la restricción $g(x, y) = 2x^2 + xy + 2y^2 - 1 = 0$.

De esta forma el Lagrangeano $L = x^2 + y^2 + \lambda(2x^2 + xy + 2y^2 - 1)$ tiene derivadas parciales $L_x =$

$$2x(1 + 2\lambda) + \lambda y = 0, L_y = 2y(1 + 2\lambda) + \lambda x = 0 \iff \begin{pmatrix} 2 + 4\lambda & \lambda \\ \lambda & 2 + 4\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Notemos que $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, pues $(x, y) \in E \implies \det \begin{pmatrix} 2 + 4\lambda & \lambda \\ \lambda & 2 + 4\lambda \end{pmatrix} = (2 + 4\lambda)^2 - \lambda^2 =$

$$(2 + 3\lambda)(2 + 5\lambda) = 0, \text{ es decir } \lambda = -\frac{2}{3} \text{ o } \lambda = -\frac{2}{5}.$$

— Si $\lambda = -\frac{2}{5} \implies \frac{2}{5}x = \frac{2}{5}y$ i.e. $x = y$.

— Si $\lambda = -\frac{2}{3} \implies -2x\frac{1}{3} = \frac{2}{3}y$, o sea $x = -y$.

— Si $x = y$, $f(x, x) = 2x^2 + 5x^2 - 1 = 0 \implies x = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$, $f(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}) = \frac{2}{3}$.

— Si $x = -y$, $f(x, -x) = 2x^2 + 3x^2 - 1 \implies x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, $f(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}) = f(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{2}{3}$.

Observamos que $\frac{(x+y)^2}{4/5} + \frac{(x-y)^2}{4/3} = 1 = 2x^2 + xy + 2y^2$. Las derivadas de orden dos son

$L_{xx} = 2 + 4\lambda$, $L_{yy} = 2 + 4\lambda$, $L_{xy} = \lambda$ y como la matriz Jacobiana $\frac{\partial g}{\partial(x, y)} = (4x + 4, 4y + x) \neq (0, 0)$,

$$\text{el Hessiano orlado es } H = \left(\begin{array}{cc|c} 2 + 4\lambda & \lambda & 4x + y \\ \lambda & 2 + 4\lambda & 4y + x \\ \hline 4x + y & 4y + x & 0 \end{array} \right).$$

— En $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$, $\lambda = -\frac{2}{3}$, $\det H_2 = 8$ y como $(-1)^i \det H_i > 0$, $i = 2$ es un máximo.

— En $(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}})$, $\lambda = -\frac{2}{5}$, $\det H_2 = -8$ y como $(-1)^1 \det H_i > 0$, $i = 2$ es un mínimo.

27. Determinar entre los triángulos rectángulos que tienen área A , el triángulo de menor hipotenusa.

Solucin El problema equivale a encontrar $(x, y) \in E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0, y > 0\}$, donde la función

$f: E \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 + y^2$, obtenga el mínimo bajo la restricción $g(x, y) = xy - 2A =$

0.

Sea $L = x^2 + y^2 + \lambda(xy - 2A)$, el rango $\frac{\partial g}{\partial(x, y)} = (y, x) \neq (0, 0)$, pues $xy = 2A$. Las derivadas

parciales $L_x = 2x + \lambda y = 0$, $L_y = 2y + \lambda x = 0 \implies (y - x)(2 - \lambda) = 0$.

— Si $x = y \implies \lambda = -2$ y $y = x = \sqrt{2A}$.

— Si $\lambda = 2 \implies x = -y$ y la solución no es válida.

$$\text{Las derivadas de orden dos son } L_{xx} = 2, L_{yy} = 2, L_{xy} = \lambda. \text{ El Hessiano orlado es } H = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & \lambda & y \\ \lambda & 2 & x \\ \hline y & x & 0 \end{array} \right),$$

$$\det H = -2x^2 + 2\lambda xy - 2y^2.$$

— En $(\sqrt{2A}, \sqrt{2A})$, $\lambda = -2$, $\det H = -16A$ y como $(-1)^1 \det H_i > 0$, $i = 2$ es un mínimo.

Así el triángulo rectángulo de menor hipotenusa de área A , es isósceles de lado $\sqrt{2A}$ y la hipotenusa es

$2\sqrt{A}$.

Tema 4

Ejercicios de Integrales dobles, triples – aplicaciones: Prof. Jorge

Poltronieri

1. Calcular las siguientes integrales iteradas.

a) $\int_0^2 \int_0^1 (x^2 + 2y) dx dy$

b) $\int_3^4 \int_1^2 \frac{dy dx}{(x+y)^2}$

c) $\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2 dy dx}{1+y^2}$

d) $\int_1^2 \int_1^2 \frac{x^2 dy dx}{y^2}$

e) $\int_{-3}^3 \int_{y^2-4}^5 (x+2y) dx dy$

f) $\int_0^\pi \int_{a \operatorname{sen} \theta}^a r dr d\theta$

g) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{3 \cos \theta} r^2 \operatorname{sen}^2 \theta dr d\theta$

h) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} dy dx.$

2. Dadas las ecuaciones de las curvas que limitan las regiones de las integrales dobles y dibujar dichas regiones.

a) $\int_{-6}^2 \int_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x, y) dx dy$

b) $\int_1^3 \int_{x^2}^{x+9} f(x, y) dy dx$

c) $\int_0^y \int_y^{10-y} f(x, y) dx dy$

d) $\int_1^3 \int_{\frac{x}{3}}^{2x} f(x, y) dy dx$

e) $\int_0^4 \int_y^{10-y} f(x, y) dx dy$

f) $\int_{-1}^2 \int_{x^2}^{x+2} f(x, y) dy dx.$

3. Colocar los límites de integración en uno y otro orden en las siguientes integrales dobles.

a) S es el rectángulo de vértice $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$, $(0, 1)$.

b) S es el triángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$.

- c) S es el trapecio cuyos vértices son $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$.
- d) S es el paralelogramo cuyos vértices son $(1, 2)$, $(2, 4)$, $(2, 7)$, $(1, 5)$.
- e) S es el sector circular OAB con centro $(0, 0)$, cuyo arco tiene sus extremos en $A(1, 1)$ y $B(-1, 1)$.
- f) S es un segmento parabólico recto AOB , limitado por la parábola BOA y por el segmento de recta AB , que une entre sí los puntos $B(-1, 2)$ y $A(1, 2)$.
- g) S es el anillo circular limitado por las circunferencias cuyos radios son $r = 1$, $R = 2$ y cuyo centro en común es $(0, 0)$.
- h) S está limitado por la hipérbola $y^2 - x^2 = 1$ y por la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ (se considera la región que comprende el origen de coordenadas).

4. Determinar los límites de integración en la integral doble $\iint_S f(x, y) dx dy$, si el recinto S está dado por:

a) $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1$

b) $x^2 + y^2 \leq a^2$

c) $x^2 + y^2 \leq x$

d) $y \geq x, x \geq -1, y \leq 1$

e) $y \leq x \leq y + 2a, 0 \leq y \leq a$.

5. Invertir el orden de integración en las siguientes integrales dobles:

a) $\int_0^4 \int_{3x^2}^{12x} f(x, y) dy dx$

b) $\int_0^1 \int_{2x}^{3x} f(x, y) dy dx$

c) $\int_0^a \int_{\frac{a^2-x^2}{2a}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y) dy dx$

d) $\int_{\frac{a}{2}}^a \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x, y) dy dx$

e) $\int_0^{2a} \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{4ax}} f(x, y) dy dx$

f) $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx dy$

g) $\int_0^1 \int_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x, y) dx dy$

h) $\int_0^\pi \int_0^{\text{sen } x} f(x, y) dy dx$

i) $\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} \int_0^x f(x, y) dy dx + \int_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^R \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x, y) dy dx$.

6. Calcular las siguientes integrales dobles:

- a) $\iint_S x \, dx \, dy$, S es el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$.
- b) $\iint_S x \, dx \, dy$, S está limitado por la recta que pasa por $(2, 0)$, $(0, 2)$ y por el arco de circunferencia de radio 1 que tiene su centro en $(0, 1)$.
- c) $\iint_S \frac{dx \, dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$, S es el círculo de radio a y centro $(0, 0)$, situado en el primer cuadrante.
- d) $\iint_S \sqrt{x^2 - y^2} \, dx \, dy$, S es el triángulo con los vértices en $(0, 0)$, $(1, -1)$ y $(1, 1)$.
- e) $\iint_S \sqrt{xy - y^2} \, dx \, dy$, S es el triángulo con los vértices en $(0, 0)$, $(10, 1)$ y $(1, 1)$.
- f) $\iint_S e^{\frac{x}{y}} \, dx \, dy$, S es la región limitada por la parábola $y^2 = x$, $x = 0$, $y = 1$.
- g) $\iint_S \frac{x \, dx \, dy}{x^2 + y^2}$, S es un segmento parabólico limitado por la parábola $y = \frac{x^2}{2}$, $y = x$.

7. Calcular las siguientes integrales y dibujar las regiones de integración:

$$\text{a) } \int_0^\pi \int_0^{1+\cos x} y^2 \sin x \, dy \, dx \quad \text{b) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\cos x}^1 y^4 \, dy \, dx \quad \text{c) } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{3 \cos y} x^2 \sin^2 y \, dx \, dy.$$

8. Calcular las siguientes integrales dobles.

- a) $\iint_S xy^2 \, dx \, dy$, S está limitada por la parábola $y^2 = 2px$ y la recta $x = p$.
- b) $\iint_S \frac{dx \, dy}{\sqrt{2a - x}}$, S es un círculo de radio a , tangente a los ejes de coordenadas y se encuentra en el primer cuadrante.

9. Hallar el valor medio de la función $f(x, y) = xy^2$ en el recinto $S = [0, 1] \times [0, 1]$.

Recuerde que el valor medio de una función $f(x, y)$ en el recinto S es $\bar{f} = \frac{1}{|S|} \iint_S f(x, y) \, dx \, dy$, donde $|S|$ es el área de S .

10. Hallar el valor medio del cuadrado de la distancia del punto (x, y) del círculo $(x - a)^2 + y^2 \leq R^2$, al origen de coordenadas.

11. Pasar a coordenadas polares y colocar los límites de integración.

a) $\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx.$

b) $\int_0^2 \int_0^x f(\sqrt{x^2 + y^2}) dy dx.$

c) $\int_S f(x, y) dx dy$, S es el triángulo limitado por las rectas $y = x$, $y = -x$, $y = 1$.

d) $\int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 f\left(\frac{y}{x}\right) dy dx.$

12. Calcular las siguientes integrales dobles.

a) $\iint_S y dx dy$, S es un semicírculo de diámetro a , con centro $(\frac{1}{2}a, 0)$.

b) $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy dx.$

13. Calcular la integral doble de la función $f(r, \theta) = r$, sobre la región limitada por la cardioide $r = a(1 + \cos \theta)$ y la circunferencia $r = a$. Se considera el recinto que no contiene el polo.

14. Transformar la integral $\int_0^c \int_{\alpha x}^{\beta x} f(x, y) dy dx$, ($0 < \alpha < \beta$, $c > 0$) introduciendo las nuevas variables $u = x + y$, $uv = y$.

15. Efectuar el cambio de variable $u = x + y$, $r = x - y$ en la integral $\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx.$

16. Calcular la integral doble $\iint_S dx dy$, donde S es un recinto limitado por la curva:

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2}{h^2} - \frac{y^2}{k^2}.$$

17. Construir los recintos cuyas áreas se expresan por las siguientes integrales. Calcular el área y cambiar el orden de integración en a) y b).

a) $\int_{-1}^2 \int_{x^2}^{x+2} dy dx$

b) $\int_0^a \int_{a-y}^{\sqrt{a^2 - y^2}} dx dy$

c) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2} \int_0^{3 \sec \theta} r dr d\theta$

d) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_a^{a(1 + \cos \theta)} r dr d\theta.$

18. Calcular el área de las siguientes regiones:

a) área limitada por $x = y$, $x = 2y$, $x + y = a$, $x + 3y = a$, $a > 0$.

b) área limitada por el eje x , la parábola $y^2 = 4ax$ y la recta $x + y = 3a$.

c) área limitada por las parábolas $y^2 = 10x + 25$, $y^2 = -6x + 9$.

19. Determinar el área de las siguientes regiones:

a) limitada por $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $y = x$, $y = 0$.

b) limitada por la recta $r \cos \theta = 1$ y la circunferencia $r = 2$. (se considera la superficie que no contiene el polo).

20. Dar el volumen de una pirámide cuyos vértices son

$(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$.

21. Calcular los volúmenes que expresan las siguientes integrales dobles. Hacer los gráficos respectivos.

a) $\int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y) dy dx$

b) $\int_0^2 \int_0^{2-x} (4-x-y) dy dx$

c) $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1-x) dy dx$

d) $\int_0^2 \int_{2-x}^2 (4-x-y) dy dx$

e) $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2} dy dx.$

22. Determinar el volumen limitado por las superficies siguientes:

a) $z = x^2 - y^2$, $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$.

b) $x^2 + z^2 = a^2$, $y = 0$, $z = 0$, $y = x$.

c) $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $x + z = 6$, $z = 0$.

d) $x + y + z = a$, $3x + y = a$, $\frac{3}{2}x + y = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

23. Determinar el volumen de los cuerpos limitados por las superficies siguientes:

a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$, $y = \frac{a}{b}x$, $y = 0$, $z = 0$

b) $x^2 + y^2 = a$, $x^2 = y^2 - z^2 = -a^2$

c) $2(x^2 + y^2) - z^2 = 0$, $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$

d) $2az = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$, (volumen dentro del paraboloido)

e) $x^2 + y^2 = 2ax, x^2 + y^2 = z^2, z = 0.$

f) $z = ae^{-(x^2+y^2)}, x^2 + y^2 = R^2, z = 0.$

g) $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2\frac{x}{a}, z = 0.$

24. Calcular la integral $\iint_S xy \, dx \, dy$, donde S es la región limitada por el eje x y la semi-círculo superior $(x-2)^2 + y^2 = 1.$

25. Calcular la integral $\iint_S y \, dx \, dy$, donde S es la región limitada por el eje x y el cicloide $x = R(t - \sin t), y = R(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi.$

26. Calcular la integral $\iint_S xy \, dx \, dy$, donde S es la región limitada por los ejes coordenados y el arco de astroide $x = R \sin^3 t, y = R \cos^3 t, 0 \leq t \leq \frac{1}{2}\pi.$

27. Calcular la integral $\iint_S \sqrt{1-x^2-y^2} \, dx \, dy$, donde S es la región $x^2 + y^2 \leq 1.$

28. Calcular la integral $\iint_S (x^2 + y^2) \, dx \, dy$, donde S está limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 2ax.$

29. Determinar $\iint_S \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \, dx \, dy$, donde:

a) S es el semicírculo de radio a con centro en el origen, situado sobre el eje $x.$

b) S es la hoja de lemniscata $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 + y^2), x \geq 0.$

30. Calcular las integrales $\iint_S f(x, y) \, dx \, dy$, donde:

a) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}, f(x, y) = \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}.$

b) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 \leq 2p(y+1), x^2 \leq -2p(y-1)\}, f(x, y) = x^2 - 2py, p > 0.$

c) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq \pi, |y| \leq \sin x\}, f(x, y) = y^2 \sin x.$

d) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y^2 + 2x \leq 1\}, f(x, y) = x^2 + y^2.$

e) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y \leq 0, y - x \geq 0\}, f(x, y) = \sqrt{y-x}.$

f) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}, f(x, y) = a^x b^y, a > 1, b > 1.$

g) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}, f(x, y) = \frac{1}{x + y + 1}$.

h) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 2, y^2 \leq 2x\}, f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$.

31. a) Calcular el área de $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 1, \sqrt{1-x} + \sqrt{1-y} \geq 1\}$.

b) Calcular el área de $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2} / \alpha \leq \frac{y}{x} \leq \beta, \lambda \leq xy \leq \mu\}$, para $\alpha, \beta, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, tales que $0 < \alpha < \beta, 0 < \lambda < \mu$.

32. Para $a > 0$, sea $D_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq a^2\}$, $\Delta_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| \leq a, |y| \leq a\}$,

$$f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}, I_a = \iint_{D_a} f(x, y) dx dy, J_a = \iint_{\Delta_a} f(x, y) dx dy.$$

a) Calcular I_a .

b) Probar que $I_a \leq J_a \leq I_a \sqrt{2}$.

c) Deducir $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$.

33. a) Probar que $\forall x \in [0, 1], \ln(1+x) = \int_0^1 \frac{x dy}{1+xy}$.

b) Deducir el valor de $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$.

34. Calcular el volumen de la región limitada por:

a) el elipsoide $4x^2 + y^2 + 16z^2 = 16$.

b) la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 7$.

c) paraboloides elípticos $z = 2x^2 + y^2 + 1$, el plano $x + y = 1$ y los planos coordenados.

d) $az = y^2, x^2 + y^2 = r^2, z = 0$.

35. Calcular $\iiint_V x^2 dx dy dz$ en la región V limitada por el elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

36. Calcular $\iiint_V \frac{dx dy dz}{(x+y+z+1)^3}$, donde V es la región limitada por los planos coordenados y el plano $x + y + z = 1$.

37. Calcular $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$, si V es la región limitada por $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

38. Colocar los límites de integración, en la integral $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$ para las regiones dadas por:

a) V es el tetraedro limitado por los planos $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

b) V está limitada por las superficies $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$, $z = H$.

c) V está limitada por las superficies $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$, $z = c$.

d) V es el volumen limitado por las superficies $z = 1 - x^2 - y^2$, $z = 0$.

39. Calcular la integral $\iiint_V dx dy dz$ en la región limitada por las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$, $x^2 + y^2 = z^2$ que contiene el punto $(0, 0, R)$.

40. Calcular la integral $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$ en la región limitada por $x^2 + y^2 + z^2 = x$.

41. Determinar el centro de gravedad de un cubo de lado h , si su densidad en cada punto es proporcional al cuadrado de la distancia de ese punto a un vértice de la base. Tomar la base en el plano xy y situar las aristas en los ejes coordenados.

42. En la siguiente integral iterada, dibujar la región de integración y expresar la integral como una o más integrales iteradas, en las que la primera integración se efectúa con respecto al eje y :

$$\int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$

43. Calcular las integrales triples cuando:

a) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq xy\}$, $f(x, y, z) = x^2 y^3 z$.

b) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$, $f(x, y, z) = \frac{1}{(x + y + z + 1)^3}$.

c) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq 2pz, 0 \leq z \leq a\}$, $f(x, y, z) = |xyz|$, $p > 0$, $a > 0$.

d) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq \lambda^2 z^2, 0 \leq z \leq a\}$, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

e) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$, $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

f) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$, $f(x, y, z) = z$, $a, b, c > 0$.

44. Calcular las siguientes integrales:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{x+y+z+1}} & \text{b)} \int_0^2 \int_0^{2\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{\frac{4x-y^2}{2}}} x dz dy dx. \\ \text{c)} \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \frac{dz}{\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}} & \text{d)} \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x y z dz dy dx. \end{array}$$

45. Calcular las siguientes integrales en la región indicada.

$$\begin{array}{l} \text{a)} \iiint_V (x+y+z)^2 dx dy dz, V \text{ en la parte común del paraboloid } 2az \geq x^2+y^2 \text{ y la esfera } x^2+y^2+z^2 \leq 3a^2. \\ \text{b)} \iiint_V z^2 dx dy dz, V \text{ es la intersección de las esferas } x^2+y^2+z^2 \leq R^2, x^2+y^2+z^2 \leq 2Rz. \\ \text{c)} \iiint_V z dx dy dz, V \text{ está limitado por el plano } z=0 \text{ y la mitad superior del elipsoide } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \\ \text{d)} \iiint_V \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx dy dz, V \text{ es el interior del elipsoide } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \\ \text{e)} \iiint_V z dx dy dz, V \text{ es la región limitada por el cono } z^2 = \frac{h^2}{R^2}(x^2+y^2) \text{ y el plano } z=h. \end{array}$$

46. Calcular los volúmenes de las siguientes regiones:

- el cuerpo limitado por las esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y el paraboloid $x^2 + y^2 = 3z$ (la parte interior con respecto al paraboloid)
- el cuerpo limitado por el plano $z = 0$, el cilindro $x^2 + y^2 = ax$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ (interno con respecto al cilindro).
- el cuerpo limitado por el paraboloid $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2\frac{x}{a}$ y el plano $x = a$.

47. Hallar la masa M del paralelepípedo rectangular $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c$, si la densidad en el punto (x, y, z) en $\rho(x, y, z) = x + y + z$.

48. Del octante de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq c^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$, se ha cortado la región limitada por los planos coordenados y por el plano $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, a \leq c, b \leq c$. Determinar la masa de este cuerpo, si su densidad en cada punto (x, y, z) vale z .

49. En el cuerpo de forma semiesférica $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$, $z \geq 0$, la densidad varía proporcionalmente a la distancia del centro. Determinar el centro de gravedad de este cuerpo.
50. Hallar el centro de gravedad del cuerpo limitado por el paraboloido $y^2 + 2z^2 = 4x$ y por el plano $x = 2$.
51. Hallar el momento de inercia del cilindro circular que tiene por altura h y por radio de la base a , con respecto al eje que sirve de diámetro de la base del propio cilindro.
52. Hallar el momento de inercia del cono circular, que tiene por altura h , por radio de la base a y densidad ρ , con respecto al diámetro de su base.
53. Hallar la atracción que ejerce el cono homogéneo, de altura h y ángulo en el vértice a (en la sección axial), sobre un punto material que tenga una unidad de masa y que está situado en su vértice.
54. Demostrar que la atracción que ejerce una esfera homogénea sobre un punto material exterior a ella no varía, si toda la masa de la esfera se concentra en su centro.

Soluciones de ejercicios: Integrales dobles, triples – aplicaciones: Prof. Jorge Poltronieri

1. Calcular las siguientes integrales iteradas.

$$\text{a) } \int_0^2 \int_0^1 (x^2 + 2y) dx dy$$

$$\text{c) } \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2 dy dx}{1 + y^2}$$

$$\text{e) } \int_{-3}^3 \int_{y^2-4}^5 (x + 2y) dx dy$$

$$\text{g) } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{3 \cos \theta} r^2 \sin^2 \theta dr d\theta$$

$$\text{b) } \int_3^4 \int_1^2 \frac{dy dx}{(x + y)^2}$$

$$\text{d) } \int_1^2 \int_1^2 \frac{x^2 dy dx}{y^2}$$

$$\text{f) } \int_0^\pi \int_{a \sin \theta}^a r dr d\theta$$

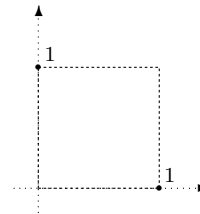
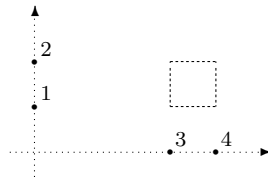
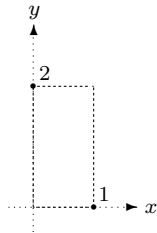
$$\text{h) } \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} dy dx.$$

Solucin

$$\text{a) } \int_0^2 \int_0^1 (x^2 + 2y) dx dy = \int_0^2 \left(\frac{x^3}{3} + 2yx \right) \Big|_0^1 dy = \int_0^2 \left(\frac{1}{3} + 2y \right) dy = \frac{1}{3}y + y^2 \Big|_0^2 = \frac{2}{3} + 4 = \frac{14}{3}.$$

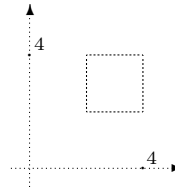
$$\text{b) } \int_3^4 \int_1^2 \frac{dy dx}{(x + y)^2} = \int_3^4 \frac{-1}{x + y} \Big|_1^2 dx = \int_3^4 \left(\frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x + 2} \right) dx = \ln \frac{x + 1}{x + 2} \Big|_3^4 = \ln \frac{5}{6} - \ln \frac{4}{5} = \ln \frac{25}{24}.$$

$$\text{c) } \int_1^2 x^2 dx \int_1^2 \frac{dy}{y^2} = \frac{1}{3}x^3 \Big|_1^2 \left(-\frac{1}{y} \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{3}(4 - 1) \left(\frac{1}{2} - 1 \right) = 4.$$

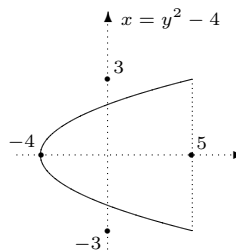


$$\text{d) } \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2 dy dx}{1 + y^2} = \int_0^1 x^2 \arctan y \Big|_0^1 dx = \int_0^1 x^2 \frac{\pi}{4} dx =$$

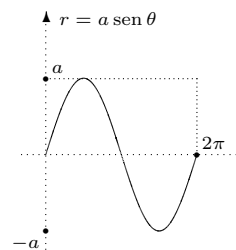
$$\frac{\pi}{4} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{12}.$$



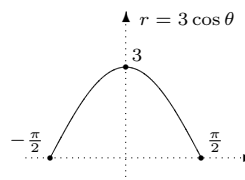
$$\begin{aligned}
 \text{e) } \int_{-3}^3 \int_{y^2-4}^5 (x+2y) dy dx &= \int_{-3}^3 \left(\frac{x^2}{2} + 2yx \right) \Big|_{x=y^2-4}^{x=5} dy = \\
 \int_{-3}^3 \left[\frac{25}{2} + 10y - \frac{(y^2-4)^2}{2} - 2y(y^2-4) \right] dy &= \\
 \int_{-3}^3 \left[\frac{25}{2} + 10y - \frac{1}{2}(y^4 - 8y^2 + 16) - 2y^3 + 8y \right] dy &= \\
 \left(\frac{25}{2}y - \frac{1}{10}y^5 - \frac{4}{3}y^3 + 16y \right) \Big|_{-3}^3 &= 2 \left(\frac{75}{2} - \frac{243}{10} - 36 + 48 \right) = \\
 75 - \frac{243}{5} + 24 &= \frac{252}{5}.
 \end{aligned}$$



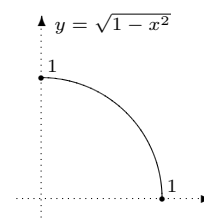
$$\begin{aligned}
 \text{f) } \int_0^{2\pi} \int_{a \operatorname{sen} \theta}^a r dr d\theta &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 \Big|_{a \operatorname{sen} \theta}^a d\theta = \\
 \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 \theta) d\theta &= 4 \frac{1}{2} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta = 2a^2 \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} = \\
 \frac{1}{2} \pi a^2.
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \text{g) } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{3 \cos \theta} r^2 \operatorname{sen}^2 \theta dr d\theta &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 \theta \frac{r^3}{3} \Big|_0^{3 \cos \theta} d\theta = \\
 9 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 \theta \cos^3 \theta d\theta &= 9 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 \theta - \cos^5 \theta) d\theta = \\
 18 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 \theta - \cos^5 \theta) d\theta &= 18 \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{5} \frac{2}{3} \right) = 18 \frac{10-8}{15} = \frac{12}{5}.
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \text{h) } \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} dy dx & \underset{y = \sqrt{1-x^2} \cos t}{=} \\
 \int_0^1 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{1-x^2 - (1-x^2) \cos^2 t} \sqrt{1-x^2} (-\operatorname{sen} t) dt &= \\
 \int_0^1 (1-x^2) dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 t dt &= \int_0^1 (1-x^2) dx \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} =
 \end{aligned}$$



$$\frac{\pi}{4} \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} \frac{2}{3} = \frac{\pi}{6}.$$

2. Dadas las ecuaciones de las curvas que limitan las regiones de las integrales dobles y dibujar dichas regiones.

$$\text{a) } \int_{-6}^2 \int_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x, y) dx dy$$

$$\text{b) } \int_1^3 \int_{x^2}^{x+9} f(x, y) dy dx$$

$$\text{c) } \int_0^y \int_y^{10-y} f(x, y) dx dy$$

$$\text{d) } \int_1^3 \int_{\frac{x}{3}}^{2x} f(x, y) dy dx$$

e) $\int_0^4 \int_y^{10-y} f(x, y) dx dy$

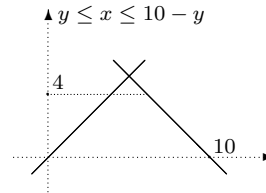
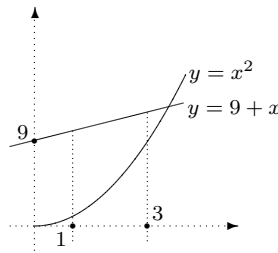
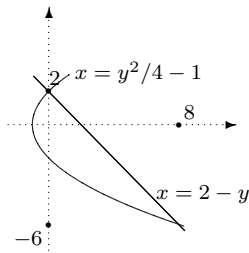
f) $\int_{-1}^2 \int_{x^2}^{x+2} f(x, y) dy dx.$

Solucin

a) $\int_{-6}^2 \int_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x, y) dx dy; x = 2y, x = \frac{y^2}{4} - 1, y = 2, y = -6.$

b) $\int_1^3 \int_{x^2}^{x+9} f(x, y) dy dx; y = x + 9, y = x^3, x = 1, x = 3.$

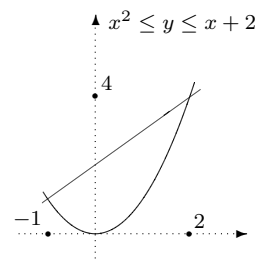
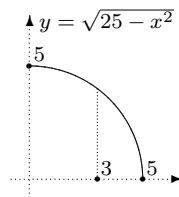
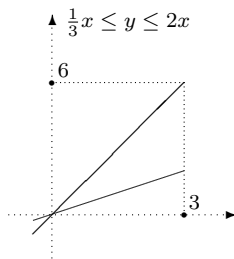
c) $\int_0^4 \int_y^{10-y} f(x, y) dx dy, y = 0, y = 4, x = 10 - y, x = y.$



d) $\int_1^3 \int_{\frac{x}{3}}^{2x} f(x, y) dy dx, x = 1, x = 3, y = 2x, y = \frac{1}{3}x.$

e) $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x, y) dy dx, x = 0, x = 3, y = 0, y = \sqrt{25-x^2}.$

f) $\int_{-1}^2 \int_{x^2}^{x+2} f(x, y) dy dx, x = -1, x = 2, y = x^2, y = x + 2.$



3. Colocar los límites de integración en uno y otro orden en las siguientes integrales dobles.

a) S es el rectángulo de vértice $(0, 0), (2, 0), (2, 1), (0, 1)$.

b) S es el triángulo cuyos vértices son $(0, 0), (1, 0), (1, 1)$.

c) S es el trapecio cuyos vértices son $(0, 0), (2, 0), (1, 1), (0, 1)$.

d) S es el paralelogramo cuyos vértices son $(1, 2), (2, 4), (2, 7), (1, 5)$.

- e) S es el sector circular OAB con centro $(0, 0)$, cuyo arco tiene sus extremos en $A(1, 1)$ y $B(-1, 1)$.
- f) S es un segmento parabólico recto AOB , limitado por la parábola BOA y por el segmento de recta AB , que une entre sí los puntos $B(-1, 2)$ y $A(1, 2)$.
- g) S es el anillo circular limitado por las circunferencias cuyos radios son $r = 1$, $R = 2$ y cuyo centro en común es $(0, 0)$.
- h) S está limitado por la hipérbola $y^2 - x^2 = 1$ y por la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ (se considera la región que comprende el origen de coordenadas).

Solucin

$$\text{a) } \int_0^2 \int_0^1 f(x, y) dy dx = \int_0^2 \int_0^1 f(x, y) dx dy.$$

$$\text{b) } \int_0^1 \int_0^x f(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_y^1 f(x, y) dx dy.$$

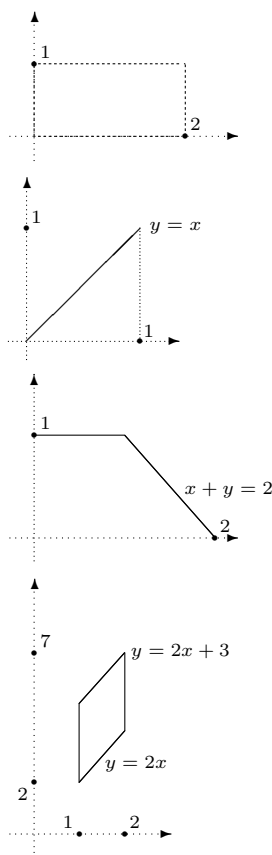
$$\text{c) } \int_0^1 \int_0^{2-y} f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx + \int_1^2 \int_1^{2-x} f(x, y) dy dx.$$

- d) La ecuación de la recta que pasa por $(1, 5)$ y $(2, 7)$ es $y = 2x + 3$. Simultáneamente la recta que pasa por $(1, 2)$ y $(2, 4)$ es $y = 2x$. Así tenemos:

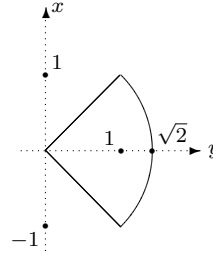
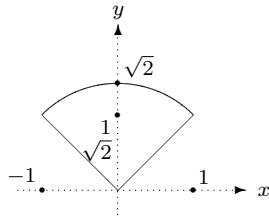
$$\iint_S f(x, y) dx dy = \int_1^2 \int_x^{2x+3} f(x, y) dy dx =$$

$$\int_2^4 \int_1^{\frac{y}{2}} f(x, y) dx dy + \int_4^5 \int_1^2 f(x, y) dx dy + \int_5^7 \int_{\frac{y-3}{2}}^2 f(x, y) dx dy.$$

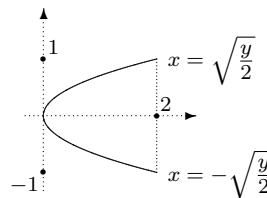
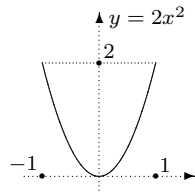
$$\text{e) } \int_{-1}^0 \int_{-x}^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy dx + \int_0^1 \int_x^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y) dy dx =$$



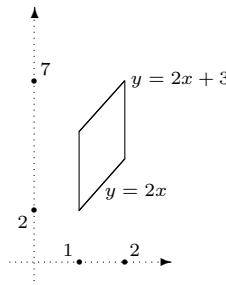
$$\int_0^1 \int_{-y}^y f(x, y) dx dy + \int_1^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y) dx dy.$$



$$f) \int_{-1}^1 \int_{2x^2}^2 f(x, y) dy dx = \int_0^2 \int_{\sqrt{-y/2}}^{\sqrt{y/2}} f(x, y) dy dx.$$



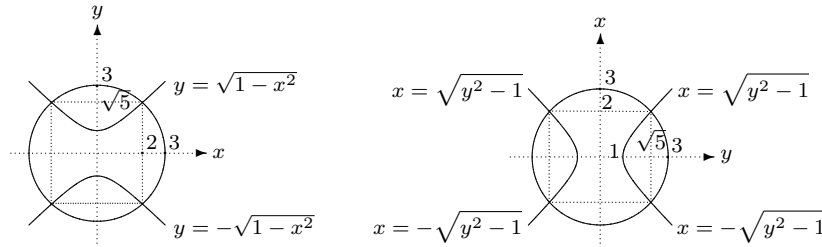
$$\begin{aligned} g) & \int_{-2}^1 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy dx + \int_{-1}^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy dx + \\ & \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy dx + \int_1^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy dx = \\ & \int_{-2}^1 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx dy + \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx dy + \\ & \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx dy + \int_1^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx dy. \end{aligned}$$



h) Las curvas se intersecan en los puntos que satisfacen ambas ecuaciones: $y^2 - x^2 = 1$, $x^2 + y^2 =$

$9 \implies 9 - x^2 - x^2 = 1 \implies 8 = 2x^2 \implies x = \pm 2$. Así tenemos que:

$$\begin{aligned} & \int_{-3}^{-2} \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y) dy dx + \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} f(x, y) dy dx + \int_2^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y) dy dx = \\ & \int_{-\sqrt{5}}^{-1} \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{-\sqrt{y^2-1}} f(x, y) dx dy + \int_{-\sqrt{5}}^{-1} \int_{\sqrt{y^2-1}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx dy + \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9+y^2}} f(x, y) dx dy + \\ & \int_1^{\sqrt{5}} \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{-\sqrt{y^2-1}} f(x, y) dx dy + \int_1^{\sqrt{5}} \int_{\sqrt{y^2-1}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x, y) dx dy. \end{aligned}$$



4. Determinar los límites de integración en la integral doble $\iint_S f(x, y) dx dy$, si el recinto S está dado por:

a) $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1$

b) $x^2 + y^2 \leq a^2$

c) $x^2 + y^2 \leq x$

d) $y \geq x, x \geq -1, y \leq 1$

e) $y \leq x \leq y + 2a, 0 \leq y \leq a.$

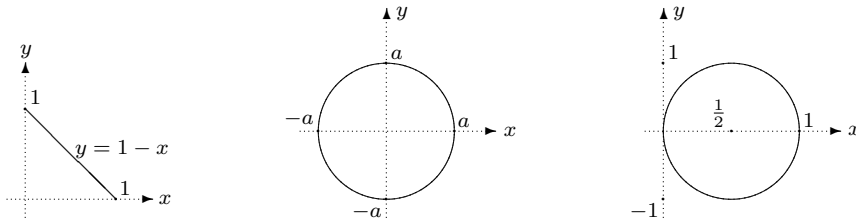
Solucin

a) $\int_0^1 \int_0^{1-x} f(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_0^{1-y} f(x, y) dx dy.$

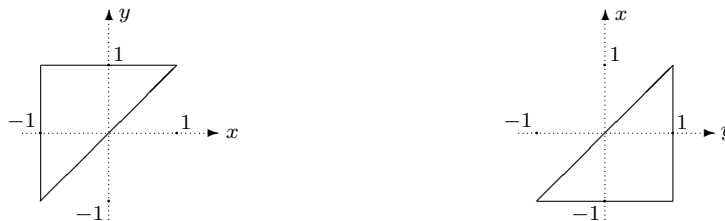
b) $\int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y) dy dx = \int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y) dx dy.$

c) $x^2 + y^2 \leq x \iff x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 \leq \frac{1}{4} \iff (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}.$

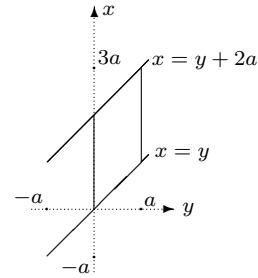
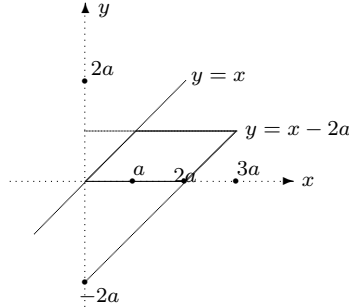
$\int_0^1 \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} f(x, y) dy dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{\frac{1-\sqrt{1-4y^2}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{1-4y^2}}{2}} f(x, y) dx dy.$



d) $\int_{-1}^1 \int_x^1 f(x, y) dy dx = \int_{-1}^1 \int_{-1}^y f(x, y) dx dy.$



$$e) \int_0^a \int_0^x f(x, y) dy dx + \int_0^{2a} \int_0^a f(x, y) dy dx + \int_{2a}^{3a} \int_{x-2a}^a f(x, y) dy dx = \int_0^a \int_y^{y-2a} f(x, y) dx dy.$$



5. Invertir el orden de integración en las siguientes integrales dobles:

$$a) \int_0^4 \int_{3x^2}^{12x} f(x, y) dy dx$$

$$b) \int_0^1 \int_{2x}^{3x} f(x, y) dy dx$$

$$c) \int_0^a \int_{\frac{a^2-x^2}{2a}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y) dy dx$$

$$d) \int_{\frac{a}{2}}^a \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x, y) dy dx$$

$$e) \int_0^{2a} \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{4ax}} f(x, y) dy dx$$

$$f) \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx dy$$

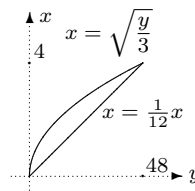
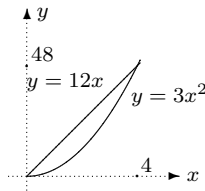
$$g) \int_0^1 \int_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x, y) dx dy$$

$$h) \int_0^\pi \int_0^{\sin x} f(x, y) dy dx$$

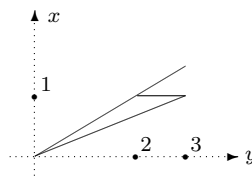
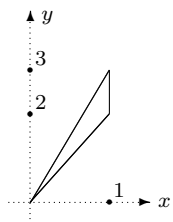
$$i) \int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} \int_0^x f(x, y) dy dx + \int_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^R \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x, y) dy dx.$$

Solucin

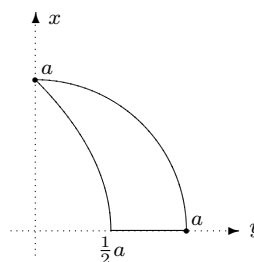
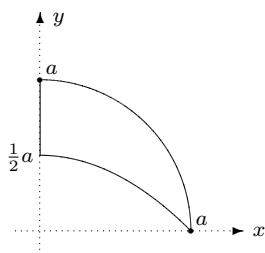
$$a) \int_0^4 \int_{3x^2}^{12x} f(x, y) dy dx = \int_0^{48} \int_{\frac{y}{12}}^{\sqrt{\frac{y}{3}}} f(x, y) dx dy.$$



$$b) \int_0^1 \int_{2x}^{3x} f(x, y) dy dx = \int_0^2 \int_{\frac{1}{3}y}^{\frac{1}{2}y} f(x, y) dx dy + \int_2^3 \int_{\frac{1}{3}y}^1 f(x, y) dx dy.$$

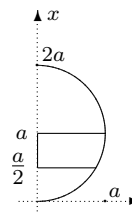
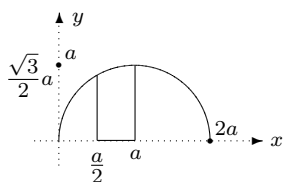


$$c) \int_0^a \int_{\frac{a^2-x^2}{2a}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y) dy dx = \int_0^{\frac{a}{2}} \int_{\sqrt{a^2-2ay}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y) dx dy + \int_{\frac{a}{2}}^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y) dx dy.$$



$$d) \int_{\frac{a}{2}}^a \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x,y) dy dx = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} \int_{\frac{a}{2}}^a f(x,y) dx dy + \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}a}^a \int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^a f(x,y) dx dy.$$

Observemos que $x^2 - 2ax + y^2 = 0 \implies (x-a)^2 = a^2 - y^2$ i.e. $x = a \pm \sqrt{a^2 - y^2}$. Además, cuando $x = \frac{a}{2}$ entonces $\frac{a^2}{4} - a^2 + y^2 = 0 \implies y = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, pues $y \geq 0$.



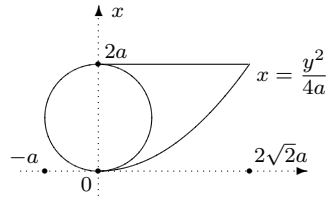
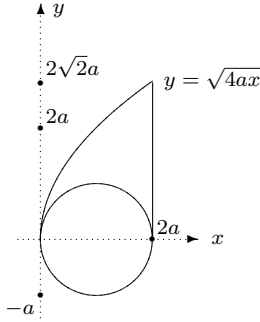
e) Tenemos que $y^2 + x^2 - 2ax = 0 \implies y^2 + (x-a)^2 = a^2$.

Por otro lado, $y = \sqrt{4ax}$, $y = \sqrt{2ax - x^2}$, por lo que las curvas se intersecan si $\sqrt{4ax} = \sqrt{2ax - x^2} \implies 4ax = 2ax - x^2 \implies 2ax + x^2 = 0 \implies x = 0, x = -2a$, pero se elimina la solución $x = -2a$, pues x es siempre ≥ 0 . Además, cuando $x = 2a$ tenemos que $y = 2\sqrt{2a}$.

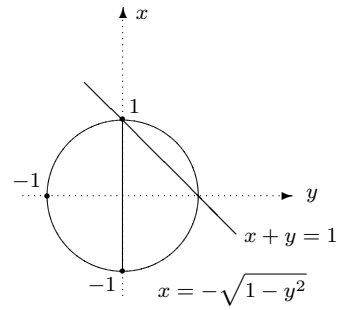
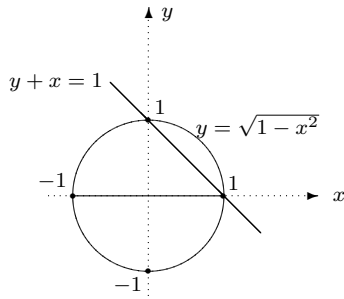
Finalmente:

$$\int_0^{2a} \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{4ax}} f(x,y) dy dx =$$

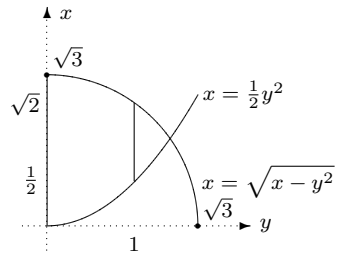
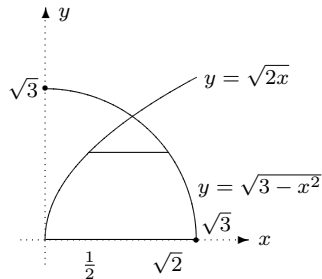
$$\int_0^a \int_{\frac{y^2}{4a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y) dx dy + \int_0^a \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x, y) dx dy + \int_a^{2\sqrt{2}a} \int_{\frac{y^2}{4a}}^{2a} f(x, y) dx dy.$$



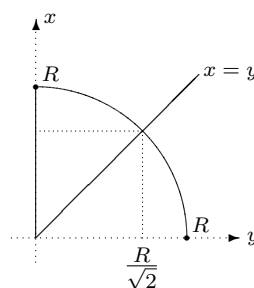
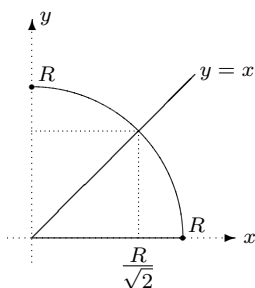
$$f) \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx dy = \int_{-1}^0 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy dx + \int_0^1 \int_0^{1-x} f(x, y) dy dx.$$



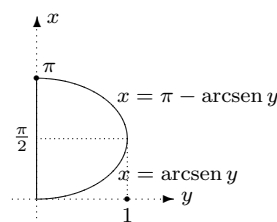
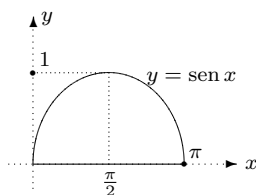
$$g) \int_0^1 \int_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x, y) dx dy = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\sqrt{2x}} f(x, y) dy dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} \int_0^1 f(x, y) dx dy + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \int_0^{\sqrt{3-x^2}} f(x, y) dy dx.$$



$$h) \int_0^\pi \int_0^{\text{sen } x} f(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_{\text{arcsen } y}^{\pi - \text{arcsen } y} f(x, y) dx dy.$$



$$i) \int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} \int_0^x f(x, y) dy dx + \int_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^R \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x, y) dy dx = \int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} \int_y^{\sqrt{R^2-y^2}} f(x, y) dx dy.$$



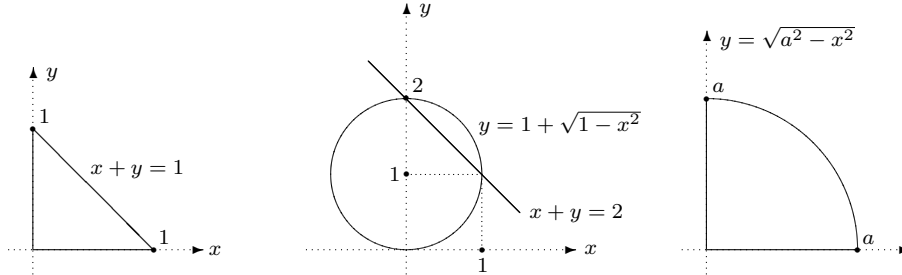
6. Calcular las siguientes integrales dobles:

- a) $\iint_S x dx dy$, S es el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$.
- b) $\iint_S x dx dy$, S está limitado por la recta que pasa por $(2, 0)$, $(0, 2)$ y por el arco de circunferencia de radio 1 que tiene su centro en $(0, 1)$.
- c) $\iint_S \frac{dx dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$, S es el círculo de radio a y centro $(0, 0)$, situado en el primer cuadrante.
- d) $\iint_S \sqrt{x^2 - y^2} dx dy$, S es el triángulo con los vértices en $(0, 0)$, $(1, -1)$ y $(1, 1)$.
- e) $\iint_S \sqrt{xy - y^2} dx dy$, S es el triángulo con los vértices en $(0, 0)$, $(10, 1)$ y $(1, 1)$.
- f) $\iint_S e^{\frac{x}{y}} dx dy$, S es la región limitada por la parábola $y^2 = x$, $x = 0$, $y = 1$.
- g) $\iint_S \frac{x dx dy}{x^2 + y^2}$, S es un segmento parabólico limitado por la parábola $y = \frac{x^2}{2}$, $y = x$.

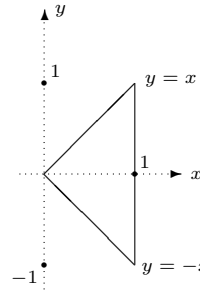
Solucin

$$a) \iint_S x dx dy = \int_0^1 \int_0^{1-x} x dy dx = \int_0^1 x(1-x) dx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

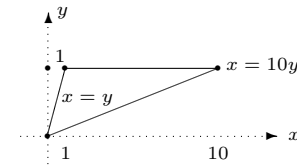
$$\begin{aligned} \text{b) } \iint_S x \, dx \, dy &= \int_0^1 \int_{2-x}^{1+\sqrt{1-x^2}} x \, dy \, dx = \int_0^1 xy \Big|_{2-x}^{1+\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^1 x(x + \sqrt{1-x^2} - 1) dx = \\ & \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2} \left(-\frac{2}{3}\right)(1-x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}. \\ \text{c) } \iint_S \frac{dx \, dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} &= \int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \right) dx \stackrel{a^2-x^2=u^2}{=} \int_0^a \left(\int_0^u \frac{dy}{\sqrt{u^2 - y^2}} \right) dx = \\ \int_0^a \arcsen \frac{y}{u} \Big|_0^u dx &= \int_0^a \frac{\pi}{2} dx = \frac{\pi}{2} a. \end{aligned}$$



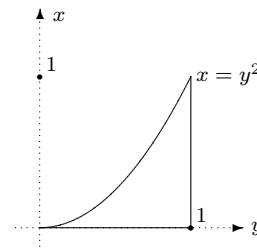
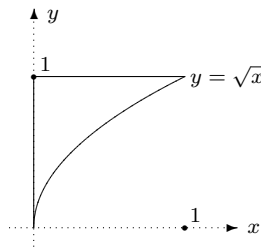
$$\begin{aligned} \text{d) } \iint_S \sqrt{x^2 - y^2} \, dx \, dy &= \int_0^1 \int_{-x}^x \sqrt{x^2 - y^2} \, dy \, dx = \\ \int_0^1 \left(\frac{y}{2} \sqrt{x^2 - y^2} + \frac{x^2}{2} \arcsen \frac{y}{x} \right) \Big|_{-x}^x dx &= \\ \int_0^1 \left(\frac{\pi}{4} x^2 + \frac{\pi}{4} x^2 \right) dx &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 x^2 dx = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$



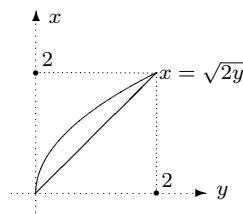
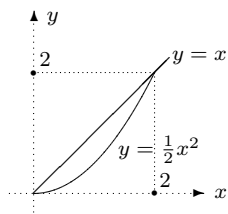
$$\begin{aligned} \text{e) } \iint_S \sqrt{xy - y^2} \, dx \, dy &= \int_0^1 \int_y^{10y} \sqrt{xy - y^2} \, dx \, dy = \\ \int_0^1 \frac{1}{y} \left(xy - \frac{y^2}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \Big|_{x=y}^{x=10y} dy &= \int_0^1 18y^2 dy = 6. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{f) } \iint_S e^{\frac{x}{y}} \, dx \, dy &= \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 e^{\frac{x}{y}} \, dy \, dx = \int_0^1 y \int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}} \frac{dx}{y} dy = \int_0^1 ye^{\frac{x}{y}} \Big|_0^{y^2} dy = \int_0^1 y(e^y - 1) dy = \\ ye^y \Big|_0^1 - \int_0^1 e^y dy - \int_0^1 y dy &= e - (e - 1) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$



$$g) \iint_S \frac{x \, dx \, dy}{x^2 + y^2} = \int_0^2 \int_y^{\sqrt{2y}} \frac{x \, dx \, dy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} \int_0^2 \ln(x^2 + y^2) \Big|_{x=y}^{x=\sqrt{2y}} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 (\ln(2y + y^2) - \ln 2y^2) dy = \frac{1}{2} \int_0^2 (\ln(2 + y) - \ln 2y) dy.$$



Pero, $\int_0^2 \ln(y+2) dy = \int_0^2 \ln y dy = (y \ln y - y) \Big|_2^4 = 6 \ln 2 - 2$ y además $\int_0^2 \ln 2y dy = \frac{1}{2} \int_0^4 \ln u du = \frac{1}{2} (u \ln u - u) \Big|_0^4 = 4 \ln 2 - 2$.

Finalmente, $\iint_S \frac{x \, dx \, dy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} (6 \ln 2 - 2 - 4 \ln 2 + 2) = \ln 2$.

7. Calcular las siguientes integrales y dibujar las regiones de integración:

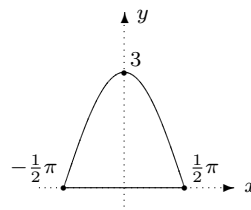
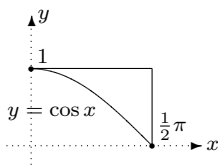
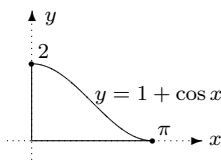
a) $\int_0^\pi \int_0^{1+\cos x} y^2 \sin x \, dy \, dx$ b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\cos x}^1 y^4 \, dy \, dx$ c) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{3 \cos y} x^2 \sin^2 y \, dx \, dy$.

Solucin

a) $\int_0^\pi \int_0^{1+\cos x} y^2 \sin x \, dy \, dx = \int_0^\pi \frac{1}{3} (1 + \cos x)^3 \sin x \, dx = -\frac{1}{3} \int_0^\pi (1 + \cos x)(-\sin x) \, dx = -\frac{1}{3} \frac{(1 + \cos x)^4}{4} \Big|_0^\pi = \frac{1}{12} \cdot 2^4 = \frac{4}{3}$.

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\cos x}^1 y^4 \, dy \, dx = \frac{1}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^5 y) \, dy = \frac{1}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy - \frac{1}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 y \, dy = \frac{\pi}{10} - \frac{1}{5} \cdot \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \frac{15\pi - 16}{5 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{15\pi - 16}{150}$.

c) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{3 \cos y} x^2 \sin^2 y \, dx \, dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} (3 \cos y)^3 \sin^2 y \, dy = 9 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 y \sin^2 y \cos y \, dy = 9 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 y) \sin^2 y (\cos y \, dy) = 9 \left(\frac{1}{3} \sin^3 y \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{5} \sin^5 y \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \right) = 9 \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{5} \right) = \frac{12}{5}$.



8. Calcular las siguientes integrales dobles.

a) $\iint_S xy^2 dx dy$, S está limitada por la parábola $y^2 = 2px$ y la recta $x = p$.

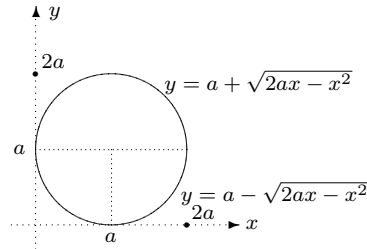
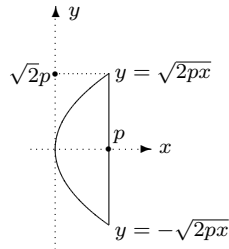
b) $\iint_S \frac{dx dy}{\sqrt{2a-x}}$, S es un círculo de radio a , tangente a los ejes de coordenadas y se encuentra en el primer cuadrante.

Solucin

a) $\iint_S xy^2 dx dy = 2 \int_0^p \int_0^{\sqrt{2px}} xy^2 dy dx = 2 \int_0^p \frac{x}{3} (2px)^{\frac{3}{2}} dx = 2 \frac{(2p)^{\frac{3}{2}}}{3} \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} \Big|_0^p = \frac{8\sqrt{2}p^5}{21}$.

b) La región S está dada por $(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$ i.e. $y = a \pm \sqrt{2ax-x^2}$.

Así tenemos que: $\iint_S \frac{dx dy}{\sqrt{2a-x}} = \int_0^{2a} \int_{a-\sqrt{2ax-x^2}}^{a+\sqrt{2ax-x^2}} \frac{dy dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = \int_0^{2a} \frac{2\sqrt{2ax-x^2}}{\sqrt{2a-x}} dx = \int_0^{2a} a2\sqrt{x} dx = 2\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{2a} = \frac{4}{3}2^{\frac{3}{2}}a^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3}a\sqrt{2a}$.

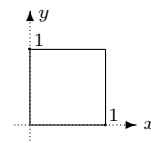


9. Hallar el valor medio de la función $f(x, y) = xy^2$ en el recinto $S = [0, 1] \times [0, 1]$.

Recuerde que el valor medio de una función $f(x, y)$ en el recinto S es $\bar{f} = \frac{1}{|S|} \iint_S f(x, y) dx dy$, donde $|S|$ en el área de S .

Solucin Dado que $|S| = \iint_S dx dy = \int_0^1 dx \int_0^1 dy = 1$, $\int_S xy^2 dx dy =$

$\int_0^1 \int_0^1 xy^2 dx dy = \frac{1}{6}$. En conclusión $\bar{f} = \frac{1}{|S|} \iint_S f(x, y) dx dy = \frac{1}{6}$.



10. Hallar el valor medio del cuadrado de la distancia del punto (x, y) del círculo $(x-a)^2 + y^2 \leq R^2$, al origen de coordenadas.

Solucin La función $f(x, y) = x^2 + y^2$, entonces:

$$\int_{-R}^R \int_{a-\sqrt{R^2-y^2}}^{a+\sqrt{R^2-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy = \int_{-R}^R \left(\frac{1}{3}x^3 + y^2x \right) \Big|_{x=a-\sqrt{R^2-y^2}}^{x=a+\sqrt{R^2-y^2}} dy =$$

$$\int_{-R}^R \left(\frac{1}{3}(a + \sqrt{R^2 - y^2})^3 + y^2(a + \sqrt{R^2 - y^2}) - \frac{1}{3}(a - \sqrt{R^2 - y^2})^3 - y^2(a - \sqrt{R^2 - y^2}) \right) dy =$$

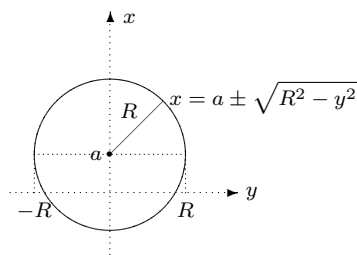
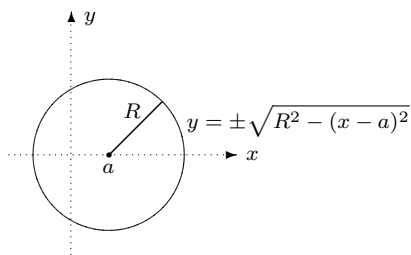
$$\int_{-R}^R \left(\frac{2}{3}(3a^2\sqrt{R^2 - y^2} + (R^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}) + 2y^2\sqrt{R^2 - y^2} \right) dy =$$

$$\left[2a^2 \left(\frac{y\sqrt{R^2 - y^2}}{2} + \frac{R^2}{2} \arcsen \frac{y}{R} \right) + \frac{2}{3} \left(\frac{y(R^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}}{4} + \frac{3R^2y(R^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}}{8} + \frac{3}{8}R^4 \arcsen \frac{y}{R} \right) + \right.$$

$$\left. 2 \left(-\frac{y(R^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}}{4} + \frac{3R^2y(R^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}}{8} + \frac{R^4}{8} \arcsen \frac{y}{R} \right) \right]_{-R}^R =$$

$$2a^2R^2\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\frac{3}{8}2R^4\frac{\pi}{2} + 2\frac{R^4}{8}2\frac{\pi}{2} = a^2\pi R^2 + \frac{1}{2}\pi R^4.$$

Además, $|S| = \iint_S dx dy = \pi R^2 \implies \bar{f} = a^2 + \frac{1}{2}R^2.$



11. Pasar a coordenadas polares y colocar los límites de integración.

a) $\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx.$

b) $\int_0^2 \int_0^x f(\sqrt{x^2 + y^2}) dy dx.$

c) $\int_S f(x, y) dx dy$, S es el triángulo limitado por las rectas $y = x$, $y = -x$, $y = 1$.

d) $\int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 f\left(\frac{y}{x}\right) dy dx.$

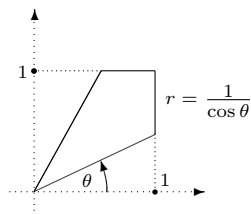
Solucin

a) Se tiene que $x = 1 \iff r \cos \theta = 1$ i.e. $r = \frac{1}{\cos \theta}$. Similar-

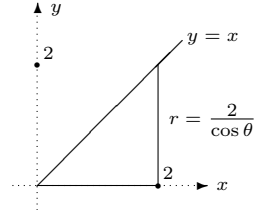
mente, $y = 1 \iff r = \frac{1}{\sen \theta}$.

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{1}{\cos \theta}}^{\frac{1}{\sen \theta}} f(r \cos \theta, r \sen \theta) r dr d\theta +$$

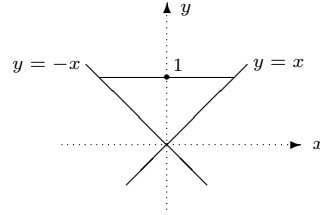
$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{1}{\sen \theta}} f(r \cos \theta, r \sen \theta) r dr d\theta.$$



$$b) \int_0^2 \int_0^x f(\sqrt{x^2 + y^2}) dy dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{2}{\cos \theta}} f(r) r dr d\theta.$$



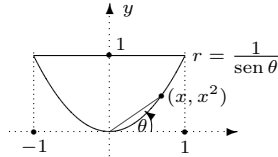
$$c) \iint_S f(x, y) dx dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^{\frac{1}{\sin \theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$



d) Observemos que r varía de $(0, 0)$ al punto (x, x^2) , con ángulo θ , por

lo que $\tan \theta = \frac{x^2}{x} = x = r \cos \theta \implies$

$$r = \frac{\tan \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}.$$



$$\text{Finalmente, } \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 f\left(\frac{y}{x}\right) dy dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}} f(\tan \theta) r dr d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^{\frac{1}{\sin \theta}} f(\tan \theta) r dr d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \int_0^{\frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}} f(\tan \theta) r dr d\theta.$$

12. Calcular las siguientes integrales dobles.

a) $\iint_S y dx dy$, S es un semicírculo de diámetro a , con centro $(\frac{1}{2}a, 0)$.

b) $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} dy dx.$

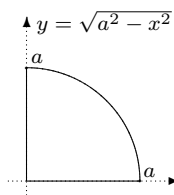
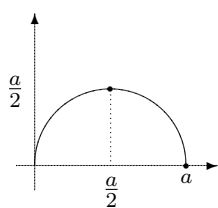
Solucin

a) La región S satisface $(x - \frac{1}{2}a)^2 + y^2 = \frac{1}{4}a^2 \iff x^2 - ax + y^2 = 0 \iff r^2 - ar \cos \theta = 0$ i.e.

$r = a \cos \theta$. Así tenemos que:

$$\iint_S y dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a \cos \theta} r \sin \theta r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} (a \cos \theta)^3 \sin \theta d\theta = -\frac{a^3}{3} \frac{\cos^4 \theta}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^3}{3} \frac{1}{4} = \frac{a^3}{12}.$$

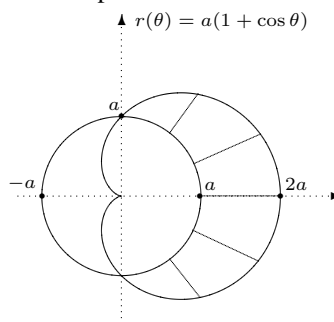
b) $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} dy dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a r^2 dr d\theta = \frac{1}{3} a^3 \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} a^3.$



13. Calcular la integral doble de la función $f(r, \theta) = r$, sobre la región limitada por la cardiode $r = a(1 + \cos \theta)$ y la circunferencia $r = a$. Se considera el recinto que no contiene el polo.

Solucin En este caso tenemos que:

$$\begin{aligned} \iint_S f(x, y) dx dy &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_a^{a(1+\cos \theta)} r^2 dr d\theta = \\ &= \frac{1}{3} a^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (3 \cos \theta + 3 \cos^2 \theta + \cos^3 \theta) d\theta = \\ &= \frac{2}{3} a^3 \left(3 + 3 \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3} \right) = \frac{2}{3} a^3 \left(\frac{11}{3} + \frac{3}{2} \frac{\pi}{2} \right) = a^3 \left(\frac{22}{9} + \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$



14. Transformar la integral $\int_0^c \int_{\alpha x}^{\beta x} f(x, y) dy dx$, ($0 < \alpha < \beta$, $c > 0$) introduciendo las nuevas variables

$$u = x + y, uv = y.$$

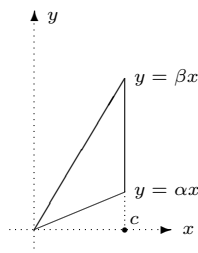
Solucin Sea $u = x + y$, $uv = y$, entonces $x = u - y = u - uv =$

$$u(1 - v), y = uv \text{ por lo que } J = \begin{vmatrix} 1 - v & -u \\ v & u \end{vmatrix} = (1 - v)u +$$

$$uv = u. \text{ Por otro lado, } 0 \leq u(1 - v) \leq c \implies 0 \leq u \leq \frac{c}{1 - v},$$

$$v \neq 1 \text{ y también } \alpha x \leq uv \leq \beta x \implies$$

$$\frac{\alpha x}{v} \leq v \leq \frac{\beta x}{u} \iff \frac{\alpha x}{x + u} \leq v \leq \frac{\beta x}{x + u}.$$



De esta forma, como $\frac{y}{x}$ varía de α a β tenemos que v varía desde $\frac{\alpha}{1 + \alpha}$ hasta $\frac{\beta}{1 + \beta}$.

$$\text{En efecto recordemos que si } y = \alpha x \iff \frac{y}{x} = \alpha \iff \frac{uv}{u(1 - v)} = \alpha \iff v = \alpha + \alpha v \iff v(1 + \alpha) =$$

$$\alpha \iff v = \frac{\alpha}{1 + \alpha}.$$

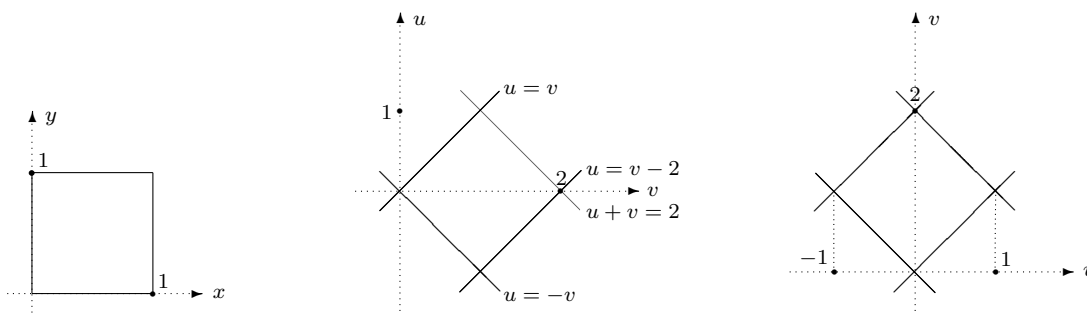
$$\text{Finalmente, } \int_0^c \int_{\alpha x}^{\beta x} f(x, y) dy dx = \int_{\frac{\alpha}{1 + \alpha}}^{\frac{\beta}{1 + \beta}} \int_0^{\frac{c}{1 - v}} f(u(1 - v), uv) u du dv.$$

15. Efectuar el cambio de variable $u = x + y$, $r = x - y$ en la integral $\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx$.

Solucin Sea $u = x + y$, $v = x - y$, entonces como $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, se tiene que $0 \leq u \leq 2$, $-1 \leq v \leq 1$, con $u + v = 2x$, o sea $0 \leq x = \frac{1}{2}(u + v) \leq 1$, $0 \leq y = \frac{1}{2}(u - v) \leq 1$. Así tenemos que $y = 0 \iff u = v$, $y = 1 \iff u - v = 2$.

Por otro lado, $J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$. Finalmente tenemos:

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{-v}^v f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) du dv + \frac{1}{2} \int_1^2 \int_{2+v}^{2-v} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) du dv = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 \int_{-u}^{2+u} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) dv du + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_u^{2-u} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) dv du.$$



16. Calcular la integral doble $\iint_S dx dy$, donde S es un recinto limitado por la curva:

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2}{h^2} - \frac{y^2}{k^2}.$$

$$r = \pm \sqrt{\frac{a^2}{h^2} \cos^2 \theta - \frac{b^2}{k^2} \sin^2 \theta}$$

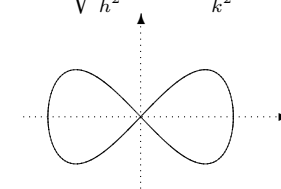
Solucin Efectuar el cambio de variable $x = \arccos \theta$, $y = \arcsen \theta$

tenemos que:

$$(r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta)^2 = r^4 = \frac{a^2 r^2 \cos^2 \theta}{h^2} - \frac{b^2 r^2 \sin^2 \theta}{k^2} \implies r^2 = \frac{a^2}{h^2} \cos^2 \theta - \frac{b^2}{k^2} \sin^2 \theta \implies r = \pm \sqrt{\frac{a^2}{h^2} \cos^2 \theta - \frac{b^2}{k^2} \sin^2 \theta}, \text{ donde } \frac{a^2}{h^2} \cos^2 \theta - \frac{b^2}{k^2} \sin^2 \theta \geq 0 \implies 0 \leq |\tan \theta| \leq \frac{ak}{bh}.$$

Así tenemos que (nos restringimos al primer cuadrante):

$$\iint_S dx dy = 4 \int_0^{\arctan \frac{ak}{bh}} \int_0^{\sqrt{\frac{a^2}{h^2} \cos^2 \theta - \frac{b^2}{k^2} \sin^2 \theta}} ab r dr d\theta = 2ab \int_0^{\arctan \frac{ak}{bh}} \left(\frac{a^2}{h^2} \cos^2 \theta - \frac{b^2}{k^2} \sin^2 \theta\right) d\theta =$$



$$2ab \left[\frac{1}{2}(\theta + \operatorname{sen} \theta \cos \theta) \frac{a^2}{h^2} - \frac{1}{2}(\theta - \operatorname{sen} \theta \cos \theta) \frac{b^2}{k^2} \right] \Big|_0^{\arctan \frac{ak}{bh}}, \text{ puesto que}$$

$$\int \operatorname{sen}^2 \theta d\theta = \frac{\theta}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{4} = \frac{1}{2}(\theta - \operatorname{sen} \theta \cos \theta), \quad \int \cos^2 \theta d\theta = \frac{\theta}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{4} = \frac{1}{2}(\theta + \operatorname{sen} \theta \cos \theta).$$

$$\text{Además, } \operatorname{sen} \theta \cos \theta = \operatorname{tg} \theta \cos^2 \theta = \frac{\operatorname{tg} \theta}{\sec^2 \theta} = \frac{\operatorname{tg} \theta}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}, \text{ entonces:}$$

$$\iint_S dx dy = 2ab \left[\frac{1}{2} \frac{a^2}{h^2} \left(\arctan \frac{ak}{bh} + \frac{\frac{ak}{bh}}{1 + \left(\frac{ak}{bh}\right)^2} \right) - \frac{1}{2} \frac{b^2}{k^2} \left(\arctan \frac{ak}{bh} - \frac{\frac{ak}{bh}}{1 + \left(\frac{ak}{bh}\right)^2} \right) \right] =$$

$$ab \left[\left(\frac{a^2}{h^2} - \frac{b^2}{k^2} \right) \arctan \frac{ak}{bh} + \left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2} \right) \frac{\frac{ak}{bh}}{1 + \left(\frac{ak}{bh}\right)^2} \right] = ab \left[\left(\frac{a^2}{h^2} - \frac{b^2}{k^2} \right) \arctan \frac{ak}{bh} + \frac{ab}{hk} \right].$$

17. Construir los recintos cuyas áreas se expresan por las siguientes integrales. Calcular el área y cambiar el orden de integración en a) y b).

$$\text{a) } \int_{-1}^2 \int_{x^2}^{x+2} dy dx$$

$$\text{b) } \int_0^a \int_{a-y}^{\sqrt{a^2-y^2}} dx dy$$

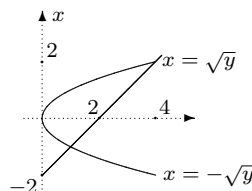
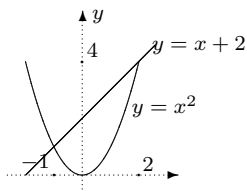
$$\text{c) } \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2} \int_0^{3 \sec \theta} r dr d\theta$$

$$\text{d) } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_a^{a(1+\cos \theta)} r dr d\theta.$$

Solucin

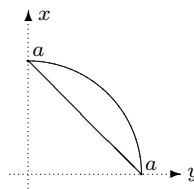
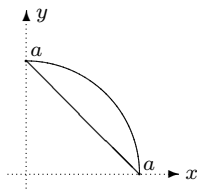
$$\text{a) } \int_{-1}^2 \int_{x^2}^{x+2} dy dx = \int_{-1}^2 (x+2-x^2) dx = \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_{-1}^2 = \frac{9}{2} = \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx dy +$$

$$\int_1^4 \int_{y-2}^{\sqrt{y}} dx dy = \int_0^1 2\sqrt{y} dy + \int_1^4 (\sqrt{y} - y + 2) dy = \frac{4}{3} + \left(\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}y^2 + 2y \right) \Big|_1^4 = \frac{9}{2}.$$

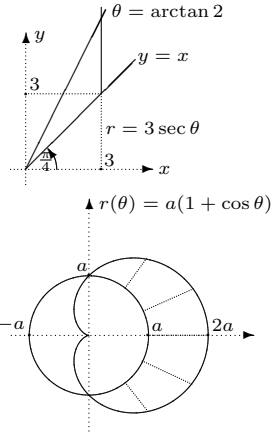


$$\text{b) } \int_0^a \int_{a-y}^{\sqrt{a^2-y^2}} dx dy = \int_0^a (\sqrt{a^2-y^2} - a + y) dy = \left(\frac{1}{2}y\sqrt{a^2-y^2} + \frac{a^2}{2} \arcsen \frac{y}{a} - ay + \frac{1}{2}y^2 \right) \Big|_0^a =$$

$$\frac{a^2}{2} \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}a^2 \left(\frac{\pi}{2} + 1 \right) = \int_0^a \int_{a-x}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy dx.$$



$$\begin{aligned} \text{c) } \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2} \int_0^{3 \sec \theta} r \, dr \, d\theta &= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2} r^2 \Big|_0^{3 \sec \theta} \, d\theta = \\ \frac{9}{2} \int_{\arctan 1}^{\arctan 2} \sec^2 \theta \, d\theta &= \frac{9}{2} \tan \theta \Big|_{\arctan 1}^{\arctan 2} = \frac{9}{2} (2 - 1) = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{d) } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_a^{a(1+\cos \theta)} r \, dr \, d\theta &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (a^2(1+\cos \theta)^2 - a^2) \, d\theta = \\ a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 \theta + 2 \cos \theta) \, d\theta &= a^2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{2} + 2 \right) = a^2 \left(\frac{\pi}{4} + 2 \right). \end{aligned}$$

18. Calcular el área de las siguientes regiones:

a) área limitada por $x = y$, $x = 2y$, $x + y = a$, $x + 3y = a$, $a > 0$.

b) área limitada por el eje x , la parábola $y^2 = 4ax$ y la recta $x + y = 3a$.

c) área limitada por las parábolas $y^2 = 10x + 25$, $y^2 = -6x + 9$.

Solucin

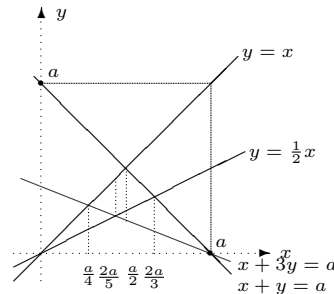
a) Determinar los puntos donde las rectas se cortan:

$$x = y, x + y = a \implies 2x = a, x = \frac{a}{2}.$$

$$x = y, x + 3y = a \implies 4x = a, x = \frac{a}{4}.$$

$$x + y = a, y = \frac{1}{2}x \implies \frac{3}{2}x = a, x = \frac{2}{3}a.$$

$$x + 3y = a, y = \frac{1}{3}x \implies x + \frac{3}{2}x = a, x = \frac{2}{5}a.$$



Así tenemos que el área es:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{a}{4}}^{\frac{2}{5}a} \int_{\frac{a-x}{3}}^x dy \, dx + \int_{\frac{2}{5}a}^{\frac{a}{2}} \int_{\frac{1}{2}x}^x dy \, dx + \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{2}{3}a} \int_{\frac{1}{2}x}^{a-x} dy \, dx = \\ \int_{\frac{a}{4}}^{\frac{2}{5}a} \frac{4x-a}{3} \, dx + \int_{\frac{2}{5}a}^{\frac{a}{2}} \frac{1}{2}x \, dx + \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{2}{3}a} \left(a - \frac{3}{2}x \right) \, dx = \frac{3a^2}{200} + \frac{9a^2}{400} + \frac{a^2}{48} = \frac{7a^2}{120}. \end{aligned}$$

b) Se tiene que si $y^2 = 4ax$, $x + y = 3a \implies x + 2\sqrt{ax} = 3a \implies$

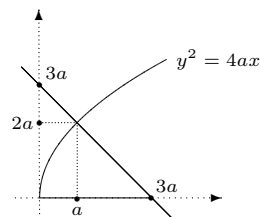
$$(\sqrt{x})^2 + 2\sqrt{a}(\sqrt{x}) - 3a = 0 \implies \sqrt{x} = \frac{-2\sqrt{a} \pm 4\sqrt{a}}{2} = \sqrt{a}, -3\sqrt{a}$$

y se elimina la solución negativa.

Así tenemos $\sqrt{x} = \sqrt{a} \implies x = a$, por lo que el área es:

$$\int_0^a \int_0^{2\sqrt{ax}} ay \, dx + \int_a^{3a} \int_0^{3a-x} dy \, dx = \int_0^a 2\sqrt{a}\sqrt{x} \, dx + \int_a^{3a} (3a-x) \, dx =$$

$$2\sqrt{a} \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^a + \left(3ax - \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_a^{3a} = \frac{4}{3}a^2 + 3a(3a) - \frac{9}{2}a^2 - 3a^2 + \frac{1}{2}a^2 = \left(\frac{4}{3} + \frac{9}{2} + \frac{5}{2} \right) a^2 = \frac{10}{3}a^2.$$



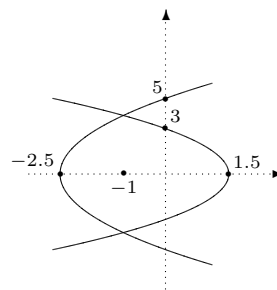
c) Igualando las ecuaciones $y^2 = 10x + 25 = -6x + 9 \implies 19x + 16 = 0 \implies x = -1$.

El área es $\int_{-\frac{5}{2}}^{-1} \int_{-\sqrt{10x+25}}^{\sqrt{10x+25}} dy \, dx + \int_{-1}^{\frac{3}{2}} \int_{-\sqrt{9-6x}}^{\sqrt{9-6x}} dy \, dx =$

$$\int_{-\frac{5}{2}}^{-1} 2\sqrt{10x+25} \, dx + \int_{-1}^{\frac{3}{2}} 2\sqrt{9-6x} \, dx =$$

$$\frac{2}{10}(10x+25)^{\frac{3}{2}} \Big|_{-\frac{5}{2}}^{-1} + -\frac{2}{6}(9-6x)^{\frac{3}{2}} \Big|_{-1}^{\frac{3}{2}} =$$

$$\frac{2}{15}(15)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{9}(15)^{\frac{3}{2}} = 2 \cdot 15\sqrt{15} \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{9} \right) = \frac{16}{3}\sqrt{15}.$$



19. Determinar el área de las siguientes regiones:

a) limitada por $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $y = x$, $y = 0$.

b) limitada por la recta $r \cos \theta = 1$ y la circunferencia $r = 2$. (se considera la superficie que no contiene el polo).

Solucin

a) Se tiene que $x^2 + y^2 = 2x \implies (x-1)^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 =$

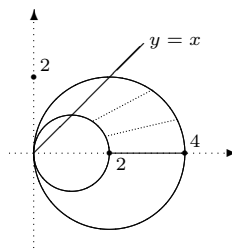
$$4x \implies (x-2)^2 + y^2 = 4.$$

Pasando a coordenadas polares tenemos $x^2 + y^2 = 2x \implies r^2 =$

$$\cos \theta, r = 2 \cos \theta. \text{ También } x^2 + y^2 = 4x \implies r^2 = 4r \cos \theta,$$

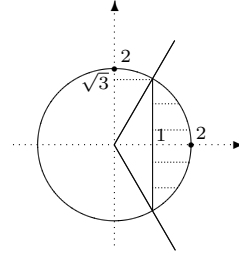
$r = 4 \cos \theta$. El área es:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{2 \cos \theta}^{4 \cos \theta} r \, dr \, d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 \Big|_{2 \cos \theta}^{4 \cos \theta} d\theta = 6 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \theta \, d\theta = 3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2\theta) \, d\theta =$$



$$3 \left(\theta + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\theta \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 3 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4}(\pi + 2).$$

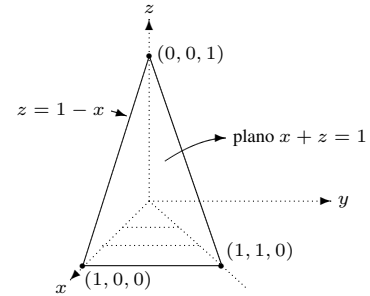
$$\text{b) } \text{Área} = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \int_{\frac{1}{\cos \theta}}^2 r \, dr \, d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (4 - \sec^2 \theta) \, d\theta = \frac{1}{2} (4\theta - \tan \theta) \Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}.$$



20. Dar el volumen de una pirámide cuyos vértices son

$$(0, 0, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 0, 1).$$

Solucin $V = \int_0^1 \int_0^x z \, dy \, dx = \int_0^1 \int_0^x (1-x) \, dx \, dy = \int_0^1 x(1-x) \, dx = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$



21. Calcular los volúmenes que expresan las siguientes integrales dobles. Hacer los gráficos respectivos.

a) $\int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y) \, dy \, dx$

b) $\int_0^2 \int_0^{2-x} (4-x-y) \, dy \, dx$

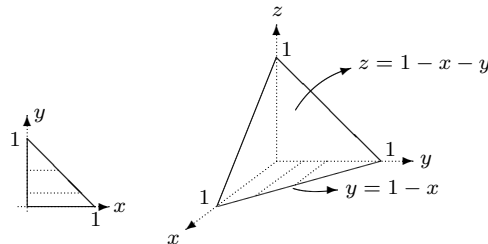
c) $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1-x) \, dy \, dx$

d) $\int_0^2 \int_{2-x}^2 (4-x-y) \, dy \, dx$

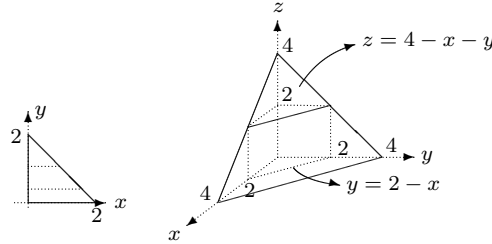
e) $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2} \, dy \, dx.$

Solucin

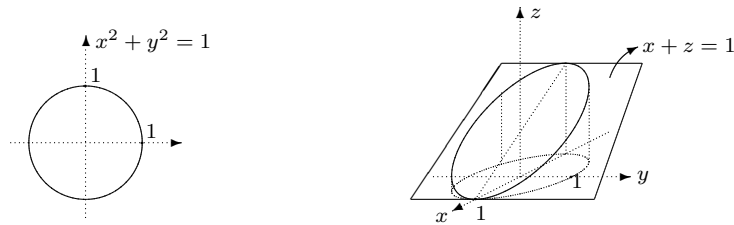
a) $V = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y) \, dy \, dx = \frac{1}{6}$ (volumen de una pirámide).



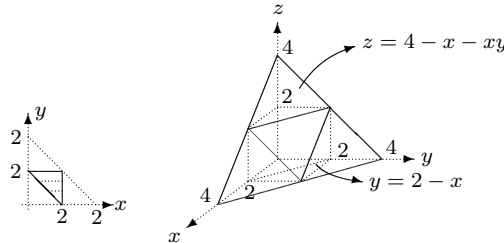
- b) $\int_0^2 \int_0^{2-x} (4-x-y) dy dx = 2 \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \right) + \frac{1}{3} 2 \cdot 2 \cdot 2 = 4 + \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$, pues es el volumen de una pirámide (superior) y un campo de base triangular de altura 2.



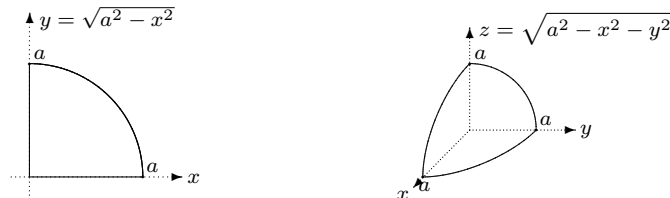
- c) $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1-x) dy dx = \frac{1}{2} (\pi 1^2) 1 = \frac{\pi}{2}$, pues es la mitad de un cilindro de base π y altura 1.



- d) $\int_0^2 \int_{2-x}^2 (4-x-y) dy dx = \left(\frac{1}{2} (2 \cdot 2) \right) \frac{1}{2} = 2$, pues es la mitad del volumen de un cuerpo de base triangular de altura 2.



- e) $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2} dy dx = \frac{1}{8} \frac{4}{3} \pi a^2 = \frac{1}{6} \pi a^2$, pues un octavo de una esfera de radio a .



22. Determinar el volumen limitado por las superficies siguientes:

a) $z = x^2 - y^2, x = 1, y = 0, z = 0.$

b) $x^2 + z^2 = a^2, y = 0, z = 0, y = x.$

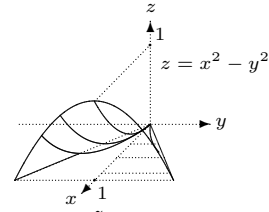
c) $y = \sqrt{x}, y = 2\sqrt{x}, x + z = 6, z = 0.$

d) $x + y + z = a, 3x + y = a, \frac{3}{2}x + y = 0, y = 0, z = 0.$

Solucin

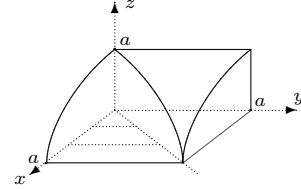
$$\text{a) } \int_0^1 \int_0^x (x^2 - y^2) dy dx = \int_0^1 \left(x^2 y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^x dx =$$

$$\frac{2}{3} \int_0^1 x^3 dx = \frac{2}{3} \frac{1}{4} x^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

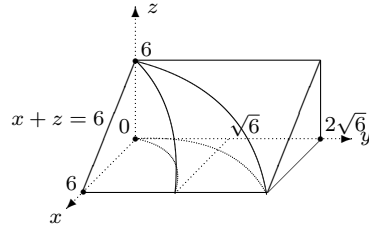
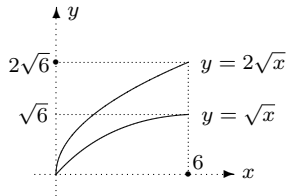


$$\text{b) } \int_0^a \int_0^x \sqrt{a^2 - x^2} dy dx = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} x dx =$$

$$-\frac{1}{2} (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} \frac{3}{2} \Big|_0^a = \frac{1}{3} a^3.$$

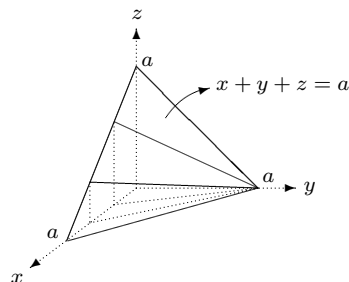
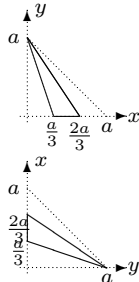


$$\text{c) } \int_0^6 \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} (6-x) dy dx = \int_0^6 (6-x) \sqrt{x} dx = \left(6 \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \right) \Big|_0^6 = \frac{72\sqrt{6}}{3} - \frac{72\sqrt{6}}{5} = \frac{48\sqrt{6}}{5}.$$



$$\text{d) } V = \int_0^a \int_{\frac{a-y}{3}}^{\frac{2a-y}{3}} (a-x-y) dx dy = \int_0^a \left(ax - yx - \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_{x=\frac{a-y}{3}}^{x=\frac{2a-y}{3}} dx =$$

$$\int_0^a \left(\frac{1}{3}(a-y)^2 - \frac{1}{2} \frac{(a-y)^2}{3} \right) dy = \frac{1}{6} \int_0^a (a-y)^2 dy = \frac{1}{6} \int_0^a u^2 du = \frac{1}{18} a^3.$$



23. Determinar el volumen de los cuerpos limitados por las superficies siguientes:

a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, y = \frac{a}{b}x, y = 0, z = 0$

b) $x^2 + y^2 = a, x^2 = y^2 - z^2 = -a^2$

c) $2(x^2 + y^2) - z^2 = 0, x^2 + y^2 - z^2 = a^2$

d) $2az = x^2 + y^2, x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$, (volumen dentro del paraboloido)

e) $x^2 + y^2 = 2ax, x^2 + y^2 = z^2, z = 0$.

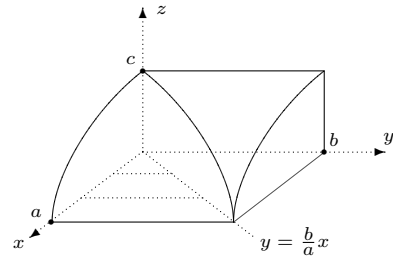
f) $z = ae^{-(x^2+y^2)}, x^2 + y^2 = R^2, z = 0$.

g) $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2\frac{x}{a}, z = 0$.

Solucin

a)
$$\int_0^a \int_0^{\frac{b}{a}x} c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dy dx = \frac{1}{2} abc \int_0^a 2\frac{x}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx =$$

$$-\frac{1}{2} ab \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{2}{3} \Big|_0^a = \frac{1}{3} abc.$$

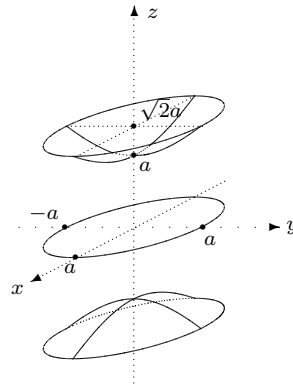
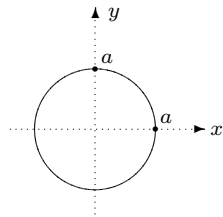


b) Las superficies se intersecan en $z = \pm\sqrt{2a}$. En efecto, sustituyendo la ecuación $x^2 + y^2 = a^2$ en

$x^2 + y^2 - z^2 = a^2$ se tiene $z^2 = 2a^2$. El volumen es:

$$V = 2 \int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2 + a^2} dy dx = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^a \sqrt{r^2 + a^2} r dr d\theta = 2\pi(r^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} \frac{2}{3} \Big|_0^a =$$

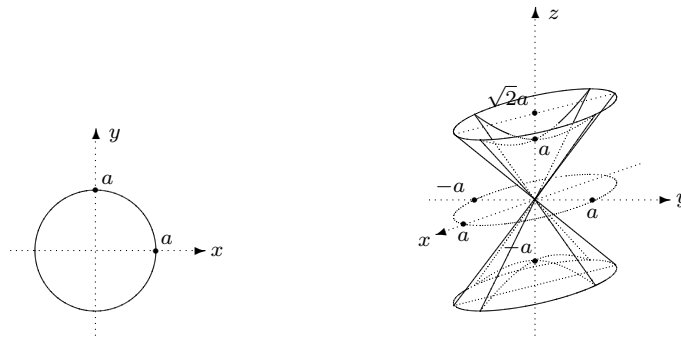
$$\frac{4}{3}\pi [(2a^2)^{\frac{3}{2}} - (a^2)^{\frac{3}{2}}] = \frac{4}{3}\pi a^3(2\sqrt{2} - 1).$$



c) Satisfaciendo $x^2 + y^2 + a^2 = z^2$ en $2(x^2 + y^2) - z^2 = 0$ tenemos $z^2 = 2a^2 \implies z = \pm\sqrt{2}a$, entonces

al proyectar la intersección de las superficies sobre el plano $z = 0$, se tiene que $x^2 + y^2 = a^2$.

$$\begin{aligned} \text{Así, } V &= 2 \int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} (\sqrt{x^2+y^2+a^2} - \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}) dy dx = \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^a (\sqrt{r^2+a^2} - \sqrt{2}r) r dr d\theta = 2\pi \int_0^a \sqrt{a^2+r^2} 2r dr - 4\pi\sqrt{2} \int_0^a r^2 dr = \\ &= 2\pi(r^2+a^2)^{\frac{3}{2}} \frac{2}{3} \Big|_0^a - 4\pi\sqrt{2} \frac{r^3}{3} \Big|_0^a = \frac{4\pi}{3} ((2a^2)^{\frac{3}{2}} - a^3) - \frac{4\pi}{3} \sqrt{2} a^3 = \frac{4\pi}{3} a^3 (2\sqrt{2} - 1 - \sqrt{2}) = \\ &= \frac{4\pi}{3} a^3 (\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

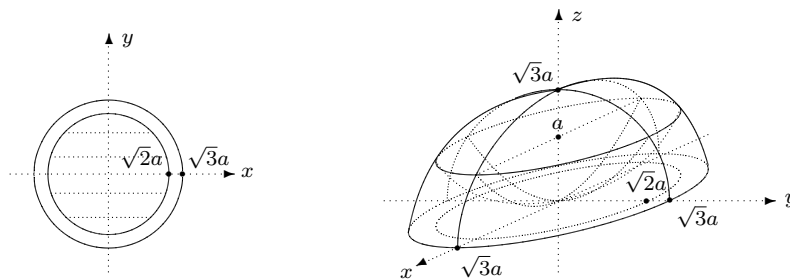


d) Como $2az = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2 \implies z^2 + 2az - 3a^2 = 0 \implies (z - a)(z + 3a) = 0$, es

decir que las superficies se intersecan en $z = a$, por lo que al proyectar esta intersección sobre el plano

$z = 0$, se tiene $x^2 + y^2 = 2a^2$. El volumen es:

$$\begin{aligned} V &= \int_{-\sqrt{2}a}^{\sqrt{2}a} \int_{-\sqrt{2a^2-x^2}}^{\sqrt{2a^2-x^2}} \left(\sqrt{3a^2 - x^2 - y^2} - \frac{x^2 + y^2}{2a} \right) dy dx = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}a} \left(\sqrt{3a^2 - r^2} - \frac{r^2}{2a} \right) r dr d\theta = -\pi \int_0^{\sqrt{2}a} (3a^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} (-2r dr) - \frac{\pi}{a} \int_0^{\sqrt{2}a} r^3 dr = \\ &= \frac{2}{3} \pi ((3a^2)^{\frac{3}{2}} - (a^2)^{\frac{3}{2}}) - \frac{\pi}{4a} (4a^4) = \pi a^3 \left(2\sqrt{3} - \frac{2}{3} - 1 \right) = \pi a^3 \frac{6\sqrt{3} - 5}{3}. \end{aligned}$$

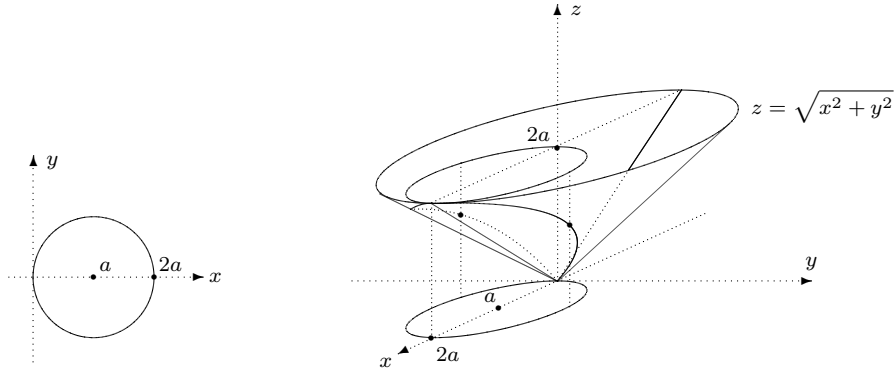


e) Puesto que $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y la región es el círculo de centro $(a, 0)$ y radio a , entonces el volumen

está dado por:

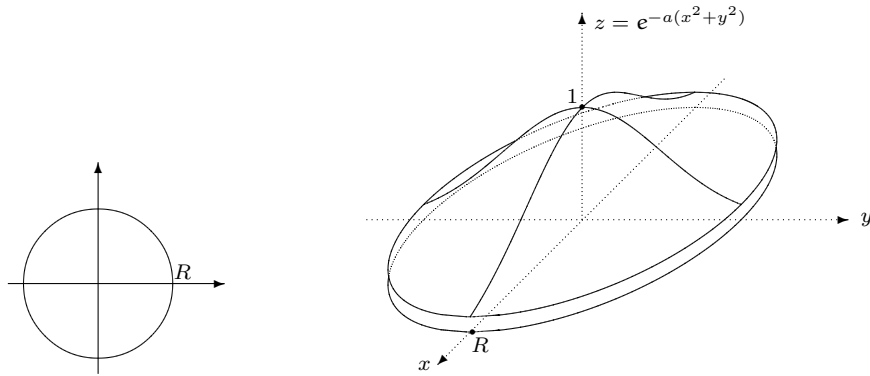
$$V = \int_0^{2a} \int_{-\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} dy dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2a \cos \theta} r^2 dr d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} (2a \cos \theta)^3 d\theta =$$

$$\frac{8a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta = \frac{16a^3}{3} \frac{2}{3} = \frac{32}{9} a^3.$$



$$f) \int_{-R}^R \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} e^{-a(x^2+y^2)} dy dx = \int_0^{2\pi} \int_0^R e^{-ar^2} r dr d\theta = -\frac{\pi}{a} \int_0^R e^{-ar^2} (-2r dr) =$$

$$-\frac{\pi}{a} e^{-ar^2} \Big|_0^R = \frac{\pi}{a} (1 - e^{-aR^2}).$$



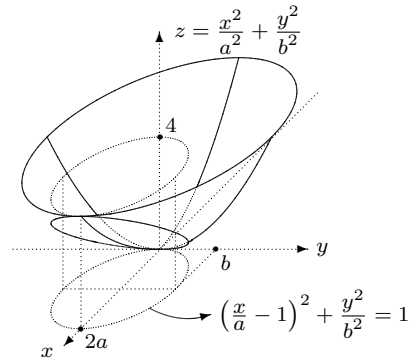
g) Observemos que $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2\frac{x}{a} \iff \left(\frac{x-a}{a}\right)^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1$ i.e. $\left(\frac{x}{a} - 1\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$.

En este caso las superficies se intersecan en $z = 2\frac{x}{a}$, $0 \leq x \leq 2a$ y cuando $x = 2a$ se tiene $z = 4$.

$$\text{El volumen es } V = \int_0^{2a} \int_{-b\sqrt{2\frac{x}{a}-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{2\frac{x}{a}-\frac{x^2}{a^2}}} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) dy dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2 \cos \theta} abr^2 r dr d\theta =$$

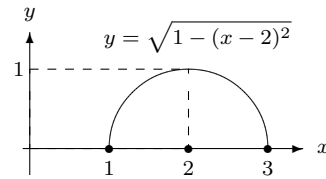
$$\frac{16}{4} ab \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta = 8ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta = 8ab \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2} \pi ab, \text{ usando el cambio de variable } \frac{x}{a} =$$

$$r \cos \theta, \frac{y}{b} = r \sin \theta, \text{ con Jacobiano } J = abr.$$



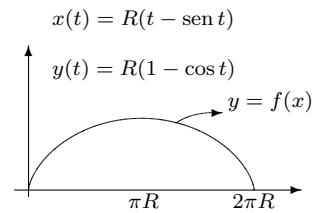
24. Calcular la integral $\iint_S xy \, dx \, dy$, donde S es la región limitada por el eje x y la semi-círculo superior $(x-2)^2 + y^2 = 1$.

Solucin La integral $\iint_S xy \, dx \, dy = \int_1^3 \int_0^{\sqrt{-x^2+4x-3}} xy \, dy \, dx =$
 $\frac{1}{2} \int_1^3 xy^2 \Big|_0^{\sqrt{-x^2+4x-3}} dx = \frac{1}{2} \int_1^3 (-x^3 + 4x^2 - 3x) dx = \frac{4}{3}.$



25. Calcular la integral $\iint_S y \, dx \, dy$, donde S es la región limitada por el eje x y el cicloide $x = R(t - \sin t)$, $y = R(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Solucin $\iint_S y \, dx \, dy = \int_0^{2\pi R} \int_0^{f(x)} y \, dy \, dx = \int_0^{2\pi R} H(x) \, dx,$
 donde $f(x)$ es la función de la curva de cicloide y $H(x) = \int_0^{f(x)} y \, dy$. Realizando el cambio de variable de $y = f(x)$ a t , con $0 \leq t \leq 2\pi$, se tiene:



$$\iint_S y \, dx \, dy = \int_0^{2\pi R} R(1 - \cos t) \left[\int_0^{R(1 - \cos t)} y \, dy \right] dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} R^3 (1 - \cos t)^3 dt =$$

$$\frac{1}{2} R^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3 \cos t + 3 \cos^2 t - \cos^3 t) dt = \frac{1}{2} R^3 \left(2\pi - 3 \sin t \Big|_0^{2\pi} + 3 \cdot 4 \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt - \int_0^{2\pi} \cos^3 t dt \right) =$$

$$\frac{1}{2} R^3 (2\pi - 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \pi) = \frac{5}{2} \pi R^3.$$

26. Calcular la integral $\iint_S xy \, dx \, dy$, donde S es la región limitada por los ejes coordenados y el arco de astroide $x = R \sin^3 t$, $y = R \cos^3 t$, $0 \leq t \leq \frac{1}{2}\pi$.

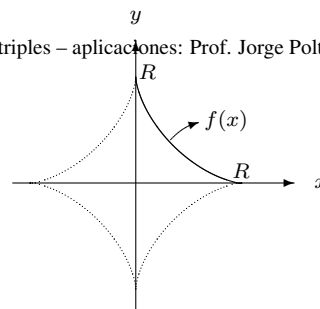
$$\text{Solucin} \quad \iint_S xy \, dx \, dy = \int_0^R \left[\int_0^{f(x)} y \, dy \right] x \, dx =$$

$$\int_0^R xH(x) \, dx, \text{ donde } f(x) \text{ es la función de la curva de}$$

astroide y $H(x) = \int_0^{f(x)} y \, dy$, es decir:

$$\iint_S xy \, dx \, dy = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} R \cos^3 t \left[\int_0^{R \cos^3 t} y \, dy \right] 3R \sin^2 t \cos t \, dt = \frac{3}{2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} R^4 \sin^5 t \cos^7 t \, dt =$$

$$\frac{3}{4} \beta(3, 4) R^4 = \frac{3}{4} R^4 \frac{2!3!}{6!} = \frac{1}{80} R^4, \text{ pues } \beta(n, m) = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(n+m-1)!} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n-1} t \cos^{2m-1} t \, dt.$$



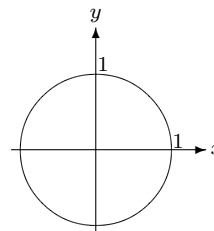
27. Calcular la integral $\iint_S \sqrt{1-x^2-y^2} \, dx \, dy$, donde S es la región $x^2 + y^2 \leq 1$.

Solucin Cambiando a coordenadas polares, la región cambia

$$\text{a } 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ y } \iint_S \sqrt{1-x^2-y^2} \, dx \, dy =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \, dr \, d\theta = \frac{2}{3} \pi r^3 \Big|_0^1 = \frac{2}{3} \pi, \text{ i.e. es la mitad del volumen}$$

de una esfera de radio 1. ¿Porqué?



28. Calcular la integral $\iint_S (x^2 + y^2) \, dx \, dy$, donde S está limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 2ax$.

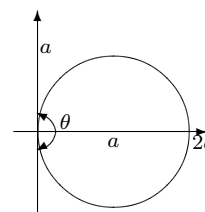
Solucin Usando coordenadas polares, la circunferencia se es-

cribe $r^2 = 2ar \cos \theta$, es decir $r = 2a \cos \theta$, con $-\frac{1}{2}\pi \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi$;

entonces la integral será:

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{2a \cos \theta} r^3 \, dr \, d\theta = \frac{16}{4} a^4 \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos^4 \theta \, d\theta =$$

$$8 \cdot a^4 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^4 \theta \, d\theta = \frac{3}{2} \pi a^4.$$



29. Determinar $\iint_S \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \, dx \, dy$, donde:

a) S es el semicírculo de radio a con centro en el origen, situado sobre el eje x .

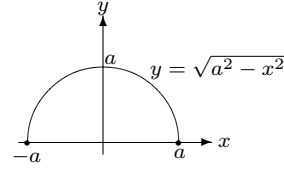
b) S es la hoja de lemniscata $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 + y^2)$, $x \geq 0$.

Solucin

a) Usando coordenadas polares $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $0 \leq r \leq$

a , $0 \leq \theta \leq \pi$ y tenemos:

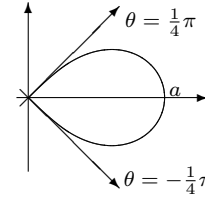
$$\iint_S \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy = \int_0^\pi \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2} r dr d\theta = -\frac{1}{2}\pi \frac{2}{3}(a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^a = \frac{1}{3}\pi a^3.$$



b) Usando coordenadas polares, la hoja de lemniscata es $r =$

$a\sqrt{\cos 2\theta}$, $-\frac{1}{4}\pi \leq \theta \leq \frac{1}{4}\pi$ y tenemos:

$$\begin{aligned} \iint_S \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy &= - \int_{-\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \frac{2}{3}(a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta = \\ &= -\frac{4}{3} \int_0^{\frac{1}{4}\pi} a^3 ((1 - \cos 2\theta)^{\frac{3}{2}} - 1) d\theta = \frac{4}{3} a^3 \left(\frac{1}{4}\pi - \sqrt{2} \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \sin^3 \theta d\theta \right) = \\ &= \frac{4}{3} a^3 \left(\frac{1}{4}\pi - \sqrt{2} \int_0^{\frac{1}{4}\pi} (\sin \theta - \cos^2 \theta \sin \theta) d\theta \right) = \frac{4}{3} a^3 \left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2} - \frac{4}{3} - \sqrt{2} + \frac{2}{3}\sqrt{2} \right) = \\ &= a^3 \left(\frac{1}{3}\pi - \frac{4}{9} + \frac{8}{9}\sqrt{2} \right). \end{aligned}$$



30. a) Calcular el área de $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 1, \sqrt{1-x} + \sqrt{1-y} \geq 1\}$.

b) Calcular el área de $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2} / \alpha \leq \frac{y}{x} \leq \beta, \lambda \leq xy \leq \mu\}$, para $\alpha, \beta, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, tales que $0 < \alpha < \beta, 0 < \lambda < \mu$.

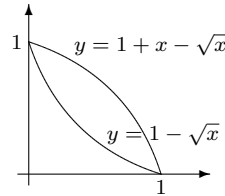
Solución

a) Debemos tener $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$, por lo que

$$\sqrt{y} \geq 1 - \sqrt{x} \implies y \geq 1 + x - 2\sqrt{x}; \sqrt{1-y} \geq$$

$$1 - \sqrt{1-x} \implies y \leq 2\sqrt{1-x} - 1 + x.$$

$$\text{El área es } \iint_S dx dy = \int_0^1 \int_{(1-\sqrt{x})^2}^{1-(1-\sqrt{1-x})^2} dy dx = 2 \int_0^1 (\sqrt{1-x} + \sqrt{x} - 1) dx = \frac{2}{3}.$$



b) Si se efectúa el cambio de variable $u = \frac{y}{x}, v = xy$, el Jacobiano es $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} =$

$$\begin{vmatrix} -\frac{v^{\frac{1}{2}}}{2u^{3/2}} & \frac{1}{2v^{1/2}v^{1/2}} \\ \frac{v^{1/2}}{2u^{1/2}} & \frac{u^{1/2}}{v^{1/2}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2u} \text{ y el área es } \iint_{\Delta} dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2u} \int_{\lambda}^{\mu} dv du = \frac{1}{2}(\mu - \lambda) \ln \frac{\beta}{\alpha}.$$

31. Para $a > 0$, sea $D_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq a^2\}$, $\Delta_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| \leq a, |y| \leq a\}$,

$$f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}, I_a = \iint_{D_a} f(x, y) dx dy, J_a = \iint_{\Delta_a} f(x, y) dx dy.$$

a) Calcular I_a .

b) Probar que $I_a \leq J_a \leq I_{a\sqrt{2}}$.

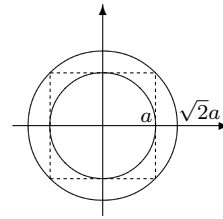
c) Deducir que $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Solucin

a) Pasando de coordenadas cartesianas a coordenadas polares:

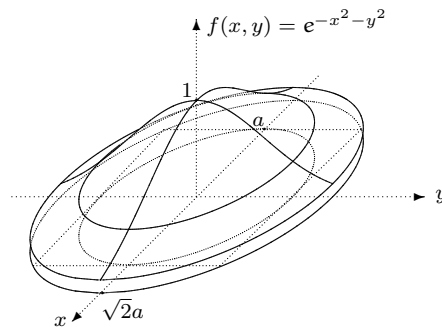
$$I_a = \int_0^{2\pi} \int_0^a e^{-r^2} r dr = \pi(1 - e^{-a^2}).$$

b) Como $D_a \subset \Delta_a \subset D_{a\sqrt{2}}$ y $f \geq 0$, se tiene $I_a \leq J_a \leq I_{a\sqrt{2}}$.



c) $J_a = \left(\int_{-a}^a e^{-x^2} dx \right)^2 = 4 \left(\int_0^a e^{-x^2} dx \right)^2$, por lo tanto $\pi(1 - e^{-a^2}) \leq J_a \leq \pi(1 - e^{-2a^2}) \therefore$

$$J_a \rightarrow \pi, \text{ cuando } a \rightarrow \infty \therefore \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$



32. a) Probar que $\forall x \in [0, 1], \ln(1+x) = \int_0^1 \frac{xdy}{1+xy}$.

b) Deducir el valor de $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$.

Solucin

a) Es inmediato.

b) Sea $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx = \iint_D \frac{x dx dy}{(1+x^2)(1+xy)}$, donde $D = [0, 1]^2$. Cambiando x por y se tiene

que $I = \iint_D \frac{y}{(1+y^2)(xy+1)} dy dx$, por lo tanto sumando tenemos:

$$2I = \iint_D \frac{x(1+y^2) + y(1+x^2)}{(1+x^2)(1+xy)(1+y^2)} dx dy = \iint_D \frac{(x+y)(1+xy)}{(1+x^2)(1+xy)(1+y^2)} dx dy =$$

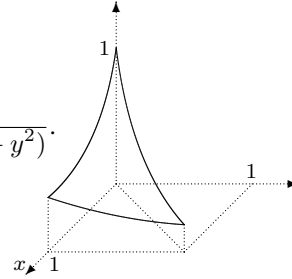
$$2 \iint_D \frac{x}{(1+x^2)(1+y^2)} dx dy = 2 \int_0^1 \frac{x dx}{1+x^2} \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = \ln(1+x^2) \Big|_0^1 \arctan y \Big|_0^1 = \frac{1}{4} \pi \ln 2, \text{ o sea}$$

$$I = \frac{1}{8} \pi \ln 2.$$

33. Calcular las integrales $\iint_S f(x, y) dx dy$, donde:

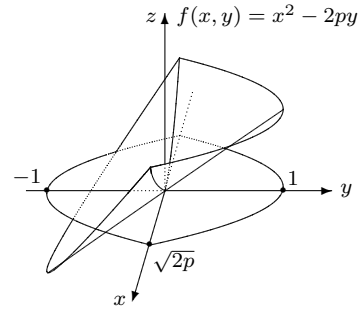
a) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$, $f(x, y) = \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}$.

Solucin $\int_0^1 \int_0^x \frac{dy}{1+y^2} \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^1 \arctan x \frac{dx}{1+x^2} =$
 $\frac{1}{2} \arctan^2 x \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\pi\right)^2 = \frac{1}{32} \pi^2.$



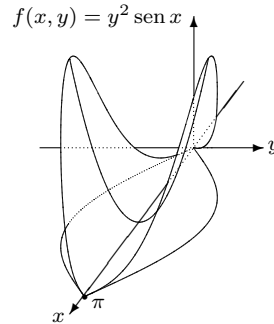
b) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 \leq 2p(y+1), x^2 \leq -2p(y-1)\}$, $f(x, y) = x^2 - 2py$, $p > 0$.

Solucin $\int_{-\sqrt{2p}}^{\sqrt{2p}} \int_{\frac{x^2}{2p}-1}^{-\frac{x^2}{2p}+1} (x^2 - 2py) dy dx =$
 $\int_{-\sqrt{2p}}^{\sqrt{2p}} \left(-\frac{x^4}{p} + 2x^2\right) dx = -\frac{2x^5}{5p} + \frac{4x^3}{3} \Big|_0^{\sqrt{2p}} =$
 $\frac{2(2p)^2 \sqrt{2p}}{5p} + \frac{8}{3} p \sqrt{2p} = \frac{16}{15} p \sqrt{2p}.$



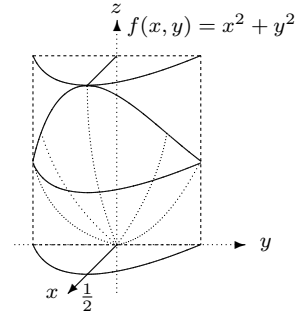
c) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq \pi, |y| \leq \sin x\}$, $f(x, y) = y^2 \sin x$.

Solucin $\int_0^\pi \int_{-\sin x}^{\sin x} y^2 \sin x dy dx = \int_0^\pi \frac{1}{3} y^3 \Big|_{-\sin x}^{\sin x} \sin x dx =$
 $\frac{2}{3} \int_0^\pi \sin^4 x dx = \frac{4}{3} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^4 x dx = \frac{4}{3} \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{1}{2} \pi = \frac{1}{4} \pi.$



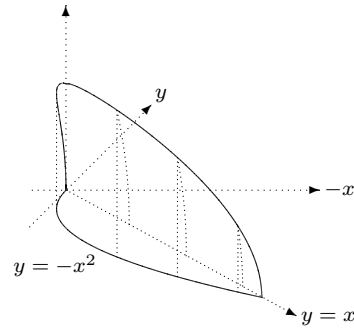
d) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y^2 + 2x \leq 1\}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Solucin
$$\int_0^{\frac{1}{2}} \int_{-\sqrt{1-2x}}^{\sqrt{1-2x}} (x^2 + y^2) dy dx = \int_{-1}^1 \int_0^{\frac{1}{2}(1-y^2)} (x^2 + y^2) dx dy = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{3}x^3 + y^2x \right) \Big|_0^{\frac{1}{2}(1-y^2)} dx = \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{24}(1-y^2)^3 + \frac{1}{2}y^2(1-y^2) \right] dx = \frac{1}{24} \int_{-1}^1 (1 - 3y^2 + 3y^4 - y^6 + 12y^2 - 12y^4) dy = \frac{1}{24} \int_{-1}^1 (1 + 9y^2 - 9y^4 - y^6) dy = \frac{2}{24} (1 + 3 - \frac{9}{5} - \frac{1}{7}) = \frac{72}{12} \frac{1}{35} = \frac{6}{35}.$$



e) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y \leq 0, y - x \geq 0\}, f(x, y) = \sqrt{y - x}.$

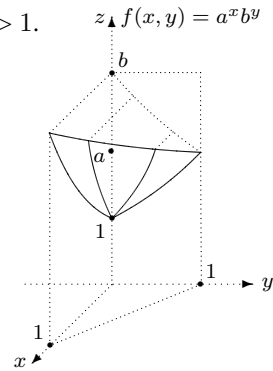
Solucin Haciendo el cambio de variables $u = y - x, du = dy,$ tenemos
$$\int_{-1}^0 \int_x^{-x^2} \sqrt{y - x} dy dx = \int_{-1}^0 \int_0^{-x^2-x} \sqrt{u} du dx = \int_{-1}^0 \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{-x^2-x} dx = \frac{2}{3} \int_{-1}^0 (-x^2 - x)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{3} \int_1^0 (-t^2 + t)^{\frac{3}{2}} dt = \frac{2}{3} \int_0^1 t^{\frac{3}{2}} (1 - t)^{\frac{3}{2}} dt = \frac{2}{3} \beta\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right) = \frac{2}{3} \frac{\Gamma(\frac{5}{2})^2}{\Gamma(5)} = \frac{1}{64} \pi.$$



f) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}, f(x, y) = a^x b^y, a > 1, b > 1.$

Solucin Si $a \neq b,$
$$\int_0^1 \int_0^{1-x} a^x b^y dx dy = \int_0^1 a^x \frac{b^y}{\ln b} \Big|_0^{1-x} dx = \frac{1}{\ln b} \int_0^1 \left[\left(\frac{a}{b}\right)^x b - a^x \right] dx = \frac{1}{\ln b} \left[\frac{b}{\ln(a/b)} \left(\frac{a}{b} - 1\right) - \frac{1}{\ln a} (a - 1) \right] = \frac{1}{\ln b} \frac{1}{\ln a} \frac{1}{\ln b - \ln a} \left((a - 1) \ln b - (b - 1) \ln a \right) = \frac{(a - 1) \ln b - (b - 1) \ln a}{\ln a \ln b (\ln b - \ln a)}.$$

Si $a = b,$ la integral vale $\frac{a \ln a - a + 1}{(\ln a)^2}.$

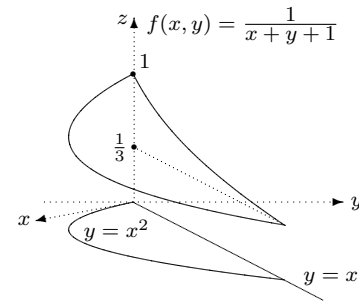


g) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}, f(x, y) = \frac{1}{x + y + 1}.$

Solucin
$$\int_0^1 \int_{x^2}^x \frac{1}{x + y + 1} dy dx = \int_0^1 \ln(x + y + 1) \Big|_{y=x^2}^{y=x} dx = \int_0^1 (\ln(2x + 1) - \ln(x^2 + x + 1)) dx.$$

Recordemos que salvo constantes, $\int \ln x dx = x \ln x - x$ y

$\int \ln(x^2 + a^2) dx = x \ln(x^2 + a^2) - 2x + 2a \arctan \frac{x}{a},$ por



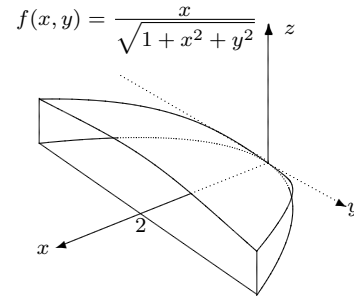
lo que $\int_0^1 \ln(2x+1) dx = \frac{1}{2} \int_1^3 \ln u du = \frac{1}{2} (u \ln u - u) \Big|_1^3 = \frac{3}{2} \ln 3 - 1$ y también $\int_0^1 \ln((x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}) dx = (x+\frac{1}{2}) \ln(x^2+x+1) - 2(x+\frac{1}{2}) + 2\frac{\sqrt{3}}{2} \arctan \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2}) \Big|_0^1 = \frac{3}{2} \ln 3 - 2 + \sqrt{3} \arctan \sqrt{3} - \sqrt{3} \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{2} \ln 3 - 2 + \sqrt{3}(\frac{1}{3}\pi - \frac{1}{6}\pi) = \frac{3}{2} \ln 3 - 2 + \frac{\sqrt{3}}{6}\pi$.

Finalmente, $\iint_S f(x,y) dx dy = 1 - \frac{\sqrt{3}}{6}\pi = 1 - \frac{1}{2\sqrt{3}}\pi$.

h) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 2, y^2 \leq 2x\}$, $f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$.

Solucin Consideremos el cambio de variable $x^2 + (1+y^2) = u$,

$$\begin{aligned} 2x dx &= du, \text{ entonces: } \frac{1}{2} \int_{-2}^2 \int_{\frac{1}{2}y^2}^2 \frac{2x}{\sqrt{1+x^2+y^2}} dx dy = \\ \frac{1}{2} \int_{-2}^2 \int_{\frac{1}{4}y^4+y^2+1}^{y^2+5} \frac{du}{\sqrt{u}} dy &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 2\sqrt{u} \Big|_{\frac{1}{4}y^4+y^2+1}^{y^2+5} dy = \\ \int_{-2}^2 (\sqrt{y^2+5} - \frac{1}{2}\sqrt{y^4+4y^2+4}) dy &= \int_{-2}^2 (\sqrt{y^2+5} - \\ \frac{1}{2}(y^2+2)) dy &= 2 \int_0^2 (\sqrt{y^2+5} - \frac{1}{2}(y^2+2)) dy. \end{aligned}$$



Recordemos que $\int \sqrt{x^2+a^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2} + \frac{1}{2}a^2 \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$; así se tiene:

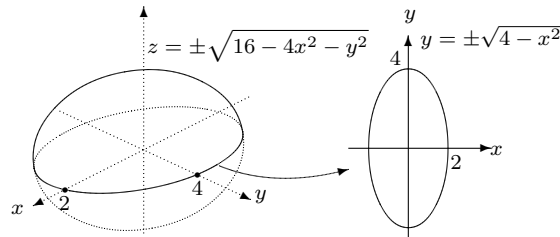
$$\begin{aligned} \iint_S f(x,y) dx dy &= 2 \left(\frac{1}{2}y\sqrt{y^2+5} + \frac{5}{2} \ln(y+\sqrt{y^2+5}) - \frac{1}{2}(\frac{1}{3}y^3+2y) \right) \Big|_0^2 = 2 \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 + \frac{5}{2} \ln 5 - \frac{1}{2}(\frac{8}{3} + \right. \\ &4) - \frac{5}{2} \ln \sqrt{5} \Big) = 2 \left(\frac{5}{4} \ln 5 - \frac{1}{3} \right) = \frac{5}{2} \ln 5 - \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

34. Calcular el volumen de la región limitada por:

a) el elipsoide $4x^2 + y^2 + 16z^2 = 16$.

Solucin Dada la simetría del elipsoide con respecto a los ejes cartesianos, el volumen es ocho veces el volumen del primer octante, es decir:

$$\begin{aligned} V &= 8 \int_0^2 \int_0^{2\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\frac{1}{4}\sqrt{16-x^2-y^2}} dz dy dx = 2 \int_0^2 \int_0^{2\sqrt{4-x^2}} \sqrt{16-4x^2-y^2} dy dx = \\ \int_0^2 \left[y\sqrt{16-4x^2-y^2} + \right. & \\ \left. (16-4x^2) \arccos \frac{y}{\sqrt{16-4x^2}} \right]_0^{2\sqrt{4-x^2}} dx &= \\ \int_0^2 (0 + (16-4x^2)\frac{1}{2}\pi - 0 - 0) dx &= \frac{1}{2}\pi(16 \cdot 2 - \\ \frac{32}{3}) &= \frac{32}{3}\pi. \end{aligned}$$

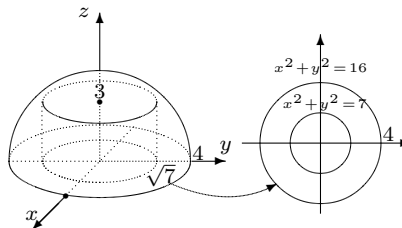


b) la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 7$.

Solucin La esfera y el cilindro se intersecan en

$7 + z^2 = 16$ i.e $z = \pm 3$, por lo que el volumen es:

$$\begin{aligned} V &= 2 \int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} \int_{-\sqrt{7-x^2}}^{\sqrt{7-x^2}} \sqrt{16-x^2-y^2} dy dx = \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{7}} \sqrt{16-r^2} r dr d\theta = -2\pi \frac{2}{3} (16-r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\sqrt{7}} = \\ &= -\frac{4}{3}\pi(27-64) = \frac{148}{3}\pi. \end{aligned}$$

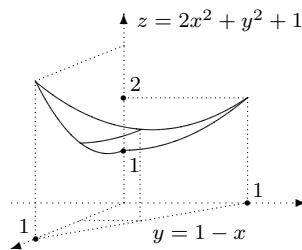


c) paraboloido elíptico $z = 2x^2 + y^2 + 1$, el plano $x + y = 1$ y los planos coordenados.

Solucin La región de integración se reduce al rectángulo

que aparece en la gráfica, por lo que:

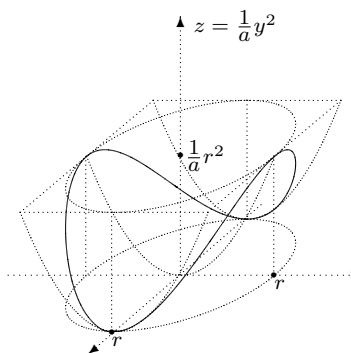
$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (2x^2 + y^2 + 1) dy dx = \int_0^1 (2x^2y + \frac{1}{3}y^3 + \\ &= y) \Big|_0^{1-x} dx = \int_0^1 (-\frac{7}{3}x^3 + 3x^2 - 2x + \frac{4}{3}) dx = -\frac{7}{12}x^4 + \\ &= x^3 - x^2 + \frac{4}{3}x \Big|_0^1 = -\frac{7}{12} + 1 - 1 + \frac{4}{3} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$



d) $az = y^2$, $x^2 + y^2 = r^2$, $z = 0$.

Solucin Dada la simetría de la superficie, el volumen es:

$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^r \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \frac{y^2}{a} dy dx = \frac{4}{a} \int_0^r \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} y^2 dy dx = \\ &= \frac{4}{3a} \int_0^r (r^2-x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{4}{3a} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} r^3 (1-\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}} r \cos\theta d\theta = \\ &= \frac{4r^4}{3a} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^4\theta d\theta = \frac{\pi r^4}{4a}. \end{aligned}$$



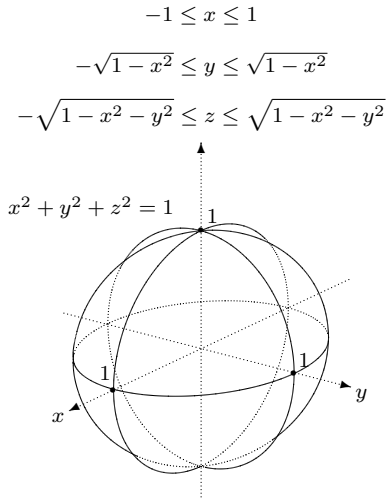
35. Calcular $\iiint_V x^2 dx dy dz$ en la región V limitada por el elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Solucin Realizando el cambio de variable $x' = \frac{x}{a}$, $y' = \frac{y}{b}$, $z' = \frac{z}{c}$,

$$\iiint_V x^2 dx dy dz = abc \iiint_{x'^2+y'^2+z'^2 \leq 1} a^2 x'^2 dx' dy' dz' = abc \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} a^2 x^2 dx dy dz. \text{ Así tenemos que la}$$

integral es:

$$\begin{aligned}
 a^3bc \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} x^2 dx dy dz &= \\
 2a^3bc \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x^2 \sqrt{1-x^2-y^2} dy dx &= \\
 2a^3bc \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 \cos^2 \theta \sqrt{1-r^2} r dr d\theta &= \\
 2a^3bc \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \int_0^1 u^2 du (1-u^2) &= \\
 2a^3bc \int_0^1 (u^2 - u^4) du 4 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^2 \theta d\theta &= \\
 2a^3bc \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) 4 \frac{1}{2} \frac{1}{2} \pi &= \frac{4}{15} a^3 bc \pi.
 \end{aligned}$$

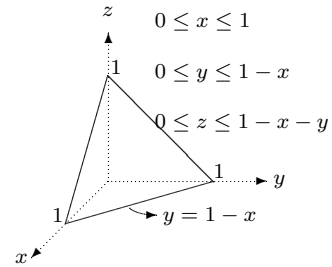


36. Calcular $\iiint_V \frac{dx dy dz}{(x+y+z+1)^3}$, donde V es la región limitada por los planos coordenados y el plano $x+y+z=1$.

Solucin
$$\iiint_V \frac{dx dy dz}{(x+y+z+1)^3} = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(x+y+z+1)^3} =$$

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{1}{2} [(x+y+1)^{-2} - \frac{1}{4}] dy dx =$$

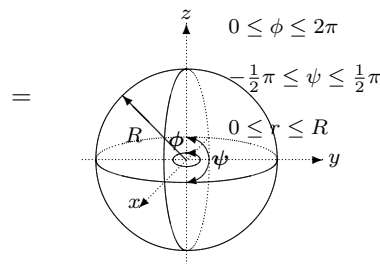
$$\frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(1-x) \right) dx = \frac{1}{2} \left(\ln(x+1) - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}(1-x)^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \left(\ln 2 - \frac{5}{8} \right) = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{5}{16}.$$



37. Calcular $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$, si V es la región limitada por $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Solucin Usando coordenadas esféricas tenemos:

$$\begin{aligned}
 &\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^R r^3 \cos \psi dr d\psi d\phi \\
 &= 2\pi \frac{1}{4} R^4 2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos \psi d\psi = \pi R^4.
 \end{aligned}$$

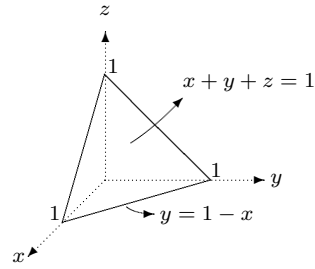


38. Colocar los límites de integración, en la integral $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$ para las regiones dadas por:

a) V es el tetraedro limitado por los planos $x + y + z = 1$,

$$x = 0, y = 0, z = 0.$$

Solucin
$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} f(x, y, z) dz dy dx.$$

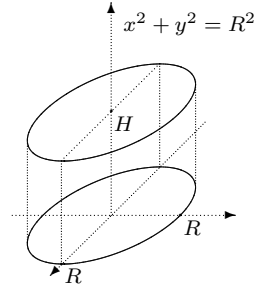


b) V está limitada por las superficies $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$, $z = H$.

Solucin La integral de f sobre V está dada por:

$$\int_{-R}^R \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \int_{-H}^H f(x, y, z) dz dy dx =$$

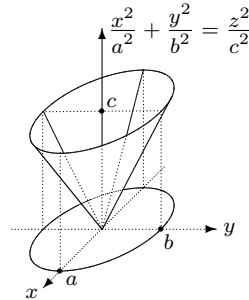
$$4 \int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \int_0^H f(x, y, z) dz dy dx.$$



c) V está limitada por las superficies $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$, $z = c$.

Solucin La integral
$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz =$$

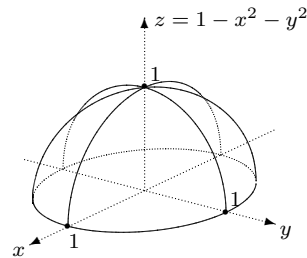
$$\int_{-a}^a \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \int_c^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}} f(x, y, z) dz dy dx.$$



d) V es el volumen limitado por las superficies $z = 1 - x^2 - y^2$, $z = 0$.

Solucin
$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz =$$

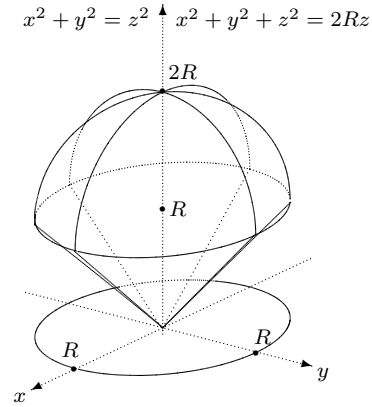
$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{1-x^2-y^2} f(x, y, z) dz dy dx.$$



39. Calcular la integral
$$\iiint_V dx dy dz$$
 en la región limitada por las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$, $x^2 + y^2 = z^2$ que contiene el punto $(0, 0, R)$.

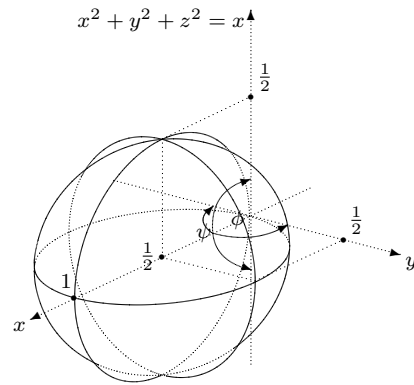
Solucin La superficie $x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2$ es una esfera de radio R , centrada en $(0, 0, R)$. Además, las superficies se intersecan en $z = R$. Así:

$$\begin{aligned} \iiint_V dx dy dz &= \int_{-R}^R \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{R+\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz dy dx = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_r^{R+\sqrt{R^2-r^2}} dz r dr d\theta = 2\pi \int_0^R (R + \sqrt{R^2-r^2} - r) r dr = \\ &= 2\pi \left(\frac{R}{2} r^2 - \frac{1}{3} r^3 - \frac{1}{2} \frac{2}{3} (R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^R = \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{2} R^3 - \frac{1}{3} R^3 + \frac{1}{3} R^3 \right) = \pi R^3. \end{aligned}$$



40. Calcular la integral $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$ en la región limitada por $x^2 + y^2 + z^2 = x$.

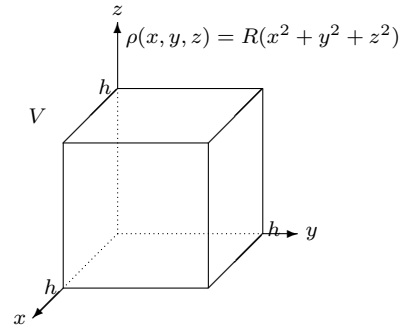
Solucin La región de integración es una esfera de centro $(\frac{1}{2}, 0, 0)$ y de radio $\frac{1}{2}$, o sea satisface $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{4}$; si hacemos el cambio a coordenadas esféricas $x = r \cos \psi \cos \phi$, $y = r \cos \psi \sin \phi$, $z = r \sin \psi$, $J = r^2 \cos \psi$, la esfera es representada por $r = \cos \psi \cos \phi$, con $-\frac{1}{2}\pi \leq \psi \leq \frac{1}{2}\pi$, $-\frac{1}{2}\pi \leq \phi \leq \frac{1}{2}\pi$ y la integral



$$\begin{aligned} \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz &= \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{\cos \psi \cos \phi} r^3 \cos \psi dr d\psi d\phi = \\ &= 2 \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1}{4} \cos^5 \psi \cos^4 \phi d\psi d\phi = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^5 \psi \cos^4 \phi d\psi d\phi = \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^5 \psi d\psi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^4 \phi d\phi = \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 3 \cdot 5} \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{1}{2} \pi = \frac{1}{10} \pi. \end{aligned}$$

41. Determinar el centro de gravedad de un cubo de lado h , si su densidad en cada punto es proporcional al cuadrado de la distancia de ese punto a un vértice de la base. Tomar la base en el plano xy y situar las aristas en los ejes coordenados.

$$\begin{aligned}
 \text{Solucin } M &= \iiint_V k(x^3 + y^2 + z^2) dx dy dz = \\
 &k \int_0^h \int_0^h \left(\frac{x^2}{3} + (y^2 + z^2)x \right) \Big|_0^h dy dz = k \int_0^h \int_0^h \left(\frac{h^3}{3} + \right. \\
 &(y^2 + z^2)h \Big) dy dz = k \int_0^h \left(\frac{h^3}{3}y + hz^2y + \frac{y^3}{3}h \right) \Big|_0^h dz = \\
 &k \int_0^h \left(\frac{h^4}{3} + h^2z^2 + \frac{h^4}{3} \right) dz = k \left(\frac{h^4}{3}z + h^2 \frac{z^3}{3} + \frac{h^4}{3}z \right) \Big|_0^h = \\
 &k \left(\frac{h^5}{3} + \frac{h^5}{3} + \frac{h^5}{3} \right) = kh^5.
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \text{Sea } (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \text{ las coordenadas del centro de masa, } M\bar{x} &= \iiint_V k(x^2 + y^2 + z^2)x dx dy dz = k \int_0^h \int_0^h \int_0^h (x^3 + \\
 (y^2 + z^2)x) dx dy dz &= k \int_0^h \int_0^h \left(\frac{x^4}{4} + (y^2 + z^2) \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^h dy dz = \\
 k \int_0^h \int_0^h \left(\frac{h^4}{4} + \frac{h^2}{2}y^2 + \frac{h^2}{2}z^2 \right) dy dz &= k \int_0^h \left(\frac{h^4}{4}y + \frac{h^2}{2} \frac{y^3}{3} + \frac{h^2}{2}z^2y \right) \Big|_0^h dz = \\
 k \int_0^h \left(\frac{h^5}{4} + \frac{h^5}{6} + \frac{h^3}{2}z^2 \right) dz &= k \left(\frac{h^5}{4}z + \frac{h^5}{6}z + \frac{h^3}{2} \frac{z^3}{3} \right) \Big|_0^h = k \left(\frac{h^6}{4} + \frac{h^6}{6} + \frac{h^6}{6} \right) = \frac{7}{12}kh^6, \text{ entonces} \\
 \bar{x} &= \frac{1}{kh^5} \frac{7}{12}kh^6 = \frac{7}{12}h.
 \end{aligned}$$

Similarmente se obtiene que $\bar{y} = \bar{z} = \frac{7}{12}h$.

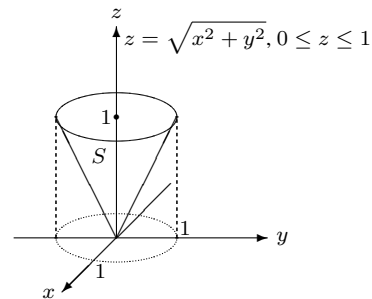
42. En la siguiente integral iterada, dibujar la región de integración y expresar la integral como una o más integrales iteradas, en las que la primera integración se efectúa con respecto al eje y :

$$\int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$

Solucin La región de integración es el interior del

cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, con $0 \leq z \leq 1$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx &= \\
 \iiint_S f(x, y, z) dV.
 \end{aligned}$$



La proyección ortogonal de S en el plano xz es la región

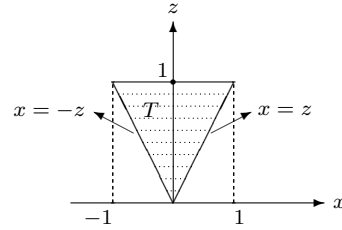
T (ver figura adjunta). Sobre el cono $z^2 = x^2 + y^2$, por

lo que $y^2 = z^2 - x^2$, es decir $y = \pm\sqrt{z^2 - x^2}$ y la región

T se describe por:

$-\sqrt{z^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{z^2 - x^2}$. De esta forma,

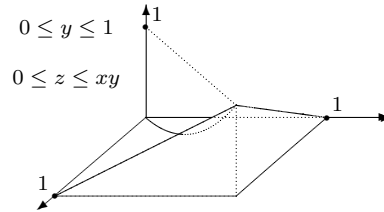
$$\iiint_S f(x, y, z) dV = \iint_T \left(\int_{-\sqrt{z^2 - x^2}}^{\sqrt{z^2 - x^2}} f(x, y, z) dy \right) dx dz = \int_0^1 \left(\int_{-z}^z \left(\int_{-\sqrt{z^2 - x^2}}^{\sqrt{z^2 - x^2}} f(x, y, z) dy \right) dx \right) dz.$$



43. Calcular las integrales triples cuando:

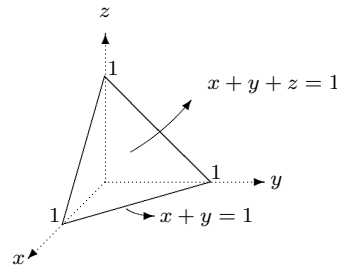
a) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq xy\}$, $f(x, y, z) = x^2 y^3 z$.

Solucin
$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^{xy} x^2 y^3 z dz dy dx = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{2} x^2 y^2 x^2 y^2 dy dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^4 dx \int_0^1 y^5 dy = \frac{1}{2} \frac{1}{5} x^5 \Big|_0^1 \frac{1}{6} y^6 \Big|_0^1 = \frac{1}{60}.$$



b) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$, $f(x, y, z) = \frac{1}{(x + y + z + 1)^3}$.

Solucin
$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} \frac{1}{(x + y + z + 1)^3} dz dy dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} \left. -\frac{1}{2} (x + y + z + 1)^{-2} \right|_{z=0}^{z=1-x-y} dy dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-x} \left(-(x + y + 1)^{-2} - \frac{1}{4} \right) dy dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(-(x + y + 1)^{-1} + \frac{1}{4} y \right) \Big|_{y=0}^{y=1-x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{4}(1-x) \right) dx = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} x + \ln(1+x) + \frac{1}{8}(1-x)^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} + \ln 2 - \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{5}{16}.$$

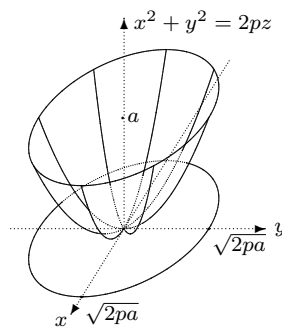


c) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq 2pz, 0 \leq z \leq a\}$, $f(x, y, z) = |xyz|$, $p > 0, a > 0$.

Solucin Usando coordenadas cilíndricas, $0 \leq z \leq a$, $0 \leq$

$r \leq \sqrt{2pz}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, la integral se transforma en:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^{\sqrt{2pz}} |r^3| |\cos \theta \operatorname{sen} \theta| dr dz d\theta = \\ & \int_0^{2\pi} |\cos \theta \operatorname{sen} \theta| d\theta \int_0^a \int_0^{\sqrt{2pz}} r^3 dr dz = \\ & 4 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos \theta \operatorname{sen} \theta d\theta \int_0^a \int_0^{\sqrt{2pz}} r^3 dr dz = \\ & 2 \operatorname{sen}^2 \theta \Big|_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1}{4} \int_0^a 4p^2 z^3 dz = 2p^2 \frac{1}{4} z^4 \Big|_0^a = \frac{1}{2} p^2 a^4. \end{aligned}$$



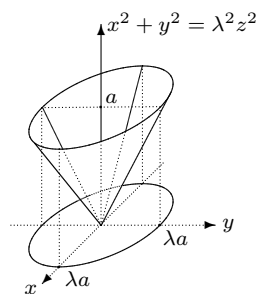
d) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq \lambda^2 z^2, 0 \leq z \leq a\}$, $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Solucin Usando coordenadas cilíndricas se tiene que $0 \leq$

$r \leq \lambda z$, $0 \leq z \leq a$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y la integral $\iiint_V (x^2 +$

$y^2 + z^2) dx dy dz =$

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^{\lambda z} (r^2 + z^2) r dr dz d\theta = 2\pi \int_0^a \left(\frac{1}{4} r^4 + \frac{1}{2} r^2 z^2 \right) \Big|_0^{\lambda z} dz = \\ & \pi \left(\frac{1}{2} \lambda^4 + \lambda^2 \right) \int_0^a z^4 dz = \frac{1}{10} \pi (\lambda^4 + 2\lambda^2) a^5. \end{aligned}$$



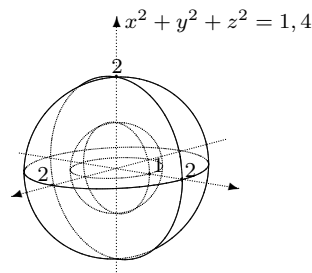
e) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$, $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

Solucin Usando coordenadas esféricas tenemos $x =$

$r \cos \psi \cos \phi$, $y = r \cos \psi \operatorname{sen} \phi$, $z = r \operatorname{sen} \psi$, $J = r^2 \cos \psi$,

$-\frac{1}{2}\pi < \psi < \frac{1}{2}\pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, $1 \leq r \leq 2$ y la integral es:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \int_1^2 \frac{r^2}{r} \cos \psi dr d\phi = 4\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos \phi d\phi \int_1^2 r dr = \\ & 2 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} r^2 \Big|_1^2 = 2\pi(4 - 1) = 6\pi. \end{aligned}$$



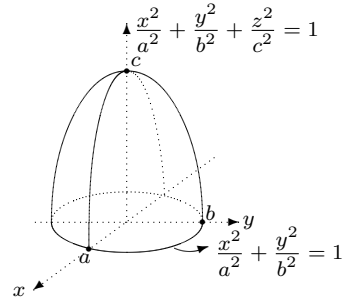
f) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$, $f(x, y, z) = z$, $a, b, c > 0$.

Solucin Haciendo el cambio $x' = \frac{x}{a}$, $y' = \frac{y}{b}$, $z' = \frac{z}{c}$ tenemos que $J = abc$ y la región es el primer octante de la esfera de radio 1.

$$|V| = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = abc \iiint_{V'} cz' dx' dy' dz' =$$

$$abc^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_0^1 r^3 \cos \psi \operatorname{sen} \psi dr d\psi d\phi =$$

$$abc^2 \frac{1}{4} r^4 \Big|_0^1 \frac{1}{2} \pi \frac{1}{2} \cos^2 \psi \Big|_0^{\frac{1}{2}\pi} = \frac{1}{16} \pi abc^2.$$



44. Calcular las siguientes integrales:

a) $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{x+y+z+1}}$ b) $\int_0^2 \int_0^{2\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{\frac{4x-y^2}{2}}} x dz dy dx.$

c) $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \frac{dz}{\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}}$ d) $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x y z dz dy dx.$

Solucin

a) $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{dz dy dx}{\sqrt{x+y+z+1}} = \int_0^1 \int_0^1 2\sqrt{x+y+z+1} \Big|_{z=0}^{z=1} dy dx =$

$$\int_0^1 \int_0^1 2(\sqrt{x+y+2} - \sqrt{x+y+1}) dy dx =$$

$$\int_0^1 \frac{4}{3} ((x+y+2)^{3/2} - (x+y+1)^{3/2}) \Big|_{y=0}^{y=1} dx =$$

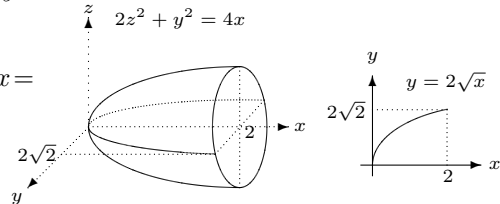
$$\int_0^1 \frac{4}{3} ((x+3)^{3/2} - 2(x+2)^{3/2} + (x+1)^{3/2}) dx = \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{5} ((x+3)^{5/2} - 2(x+2)^{5/2} + (x+1)^{5/2}) \Big|_0^1 =$$

$$\frac{8}{15} (32 - 27\sqrt{3} + 12\sqrt{2} - 1) = \frac{8}{15} (31 - 27\sqrt{3} + 12\sqrt{2}).$$

b) $\int_0^2 \int_0^{2\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{\frac{4x-y^2}{2}}} x dz dy dx = \int_0^2 \int_0^{2\sqrt{x}} x \sqrt{\frac{4x-y^2}{2}} dy dx =$

$$\int_0^2 \left(\sqrt{2}x^2 \arctan \frac{y}{\sqrt{4x-y^2}} + \sqrt{2} \frac{yx\sqrt{4x-y^2}}{4} \right) \Big|_{y=0}^{y=2\sqrt{x}} dx =$$

$$\int_0^2 \sqrt{2} \frac{\pi}{2} x^2 dx = \sqrt{2} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 8 = \frac{4\pi\sqrt{2}}{3},$$



ya que $\lim_{y \rightarrow \sqrt{2x}} \left(\sqrt{2x^2} \arctan \frac{y}{\sqrt{4x - y^2}} \right) = \sqrt{2x^2} \frac{\pi}{2}$.

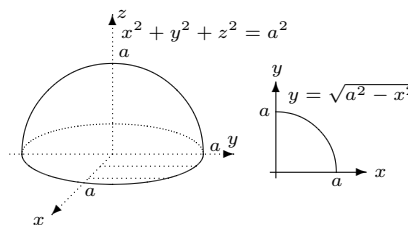
$$c) I = \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \frac{dz dy dx}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2}}. \text{ La}$$

integral se efectúa sobre una región que es un $\frac{1}{8}$ de la esfera de

radio a y centro $\mathbf{0}$. Así pasando a coordenadas esféricas tene-

$$\text{mos: } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \frac{r^2 \cos \psi}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr d\psi d\theta =$$

$$\frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \psi d\psi \int_0^a \frac{r^2 dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = \frac{\pi}{2} \left(-\frac{1}{2} r \sqrt{a^2 - r^2} + \frac{1}{2} a^2 \arcsen \frac{r}{a} \right) \Big|_0^a = \frac{\pi}{2} \left(0 + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi^2 a^2}{8}.$$

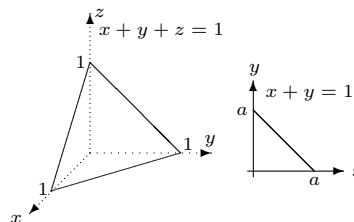


$$d) \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} xyz dz dy dx =$$

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{1}{2} xy(1-x-y)^2 dy dx =$$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-x} x((1-x)^2 y - 2(1-x)y^2 + y^3) dy dx =$$

$$\frac{1}{24} \int_0^1 x(1-x)^2(x^2 - 2x + 1) dx = \frac{1}{24} \int_0^1 x(1-x)^4 dx = \frac{1}{24} \beta(2, 5) = \frac{1}{24} \cdot \frac{\Gamma(2)\Gamma(5)}{\Gamma(7)} = \frac{1}{24} \frac{4!}{6!} = \frac{1}{720}.$$



45. Calcular las siguientes integrales en la región indicada.

a) $\iiint_V (x+y+z)^2 dx dy dz$, V en la parte común del paraboloido $2az \geq x^2 + y^2$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3a^2$.

b) $\iiint_V z^2 dx dy dz$, V es la intersección de las esferas $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz$.

c) $\iiint_V z dx dy dz$, V está limitado por el plano $z = 0$ y la mitad superior del elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

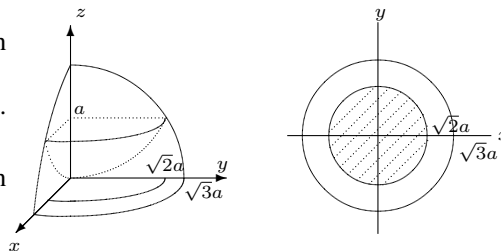
d) $\iiint_V \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx dy dz$, V es el interior del elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

e) $\iiint_V z dx dy dz$, V es la región limitada por el cono $z^2 = \frac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2)$ y el plano $z = h$.

Solucin

a) La intersección se da en $z^2 + 2az - 3a^2 = 0 = (z - a)(z + 3a)$ es decir $z = a$ pues se elimina la solución $z = -3a$, ya que $z \geq 0$ en el paraboloides $2az \geq x^2 + y^2$.

Si $z = a$ tenemos $x^2 + y^2 = 2a^2$, curva de intersección de las superficies y la integral es:



$$\iiint_V (x + y + z)^2 dx dy dz = \int_{-\sqrt{2}a}^{\sqrt{2}a} \int_{-\sqrt{2a^2-x^2}}^{\sqrt{2a^2-x^2}} \int_{\frac{x^2+y^2}{2a}}^{\sqrt{3a^2-x^2-y^2}} (x + y + z)^2 dz dy dx.$$

Efectuando el cambio a coordenadas esféricas tenemos $x = r \cos \psi \cos \theta$, $y = r \cos \psi \sin \theta$, $z = r \sin \psi$, $J = r^2 \cos \psi$, de modo que la integral se parte en dos integrales; donde r varía así:

$$0 \leq r \leq 2a \tan \psi \sec \psi, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \psi \leq \arctan \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$0 \leq r \leq \sqrt{3}a, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad \arctan \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}.$$

La primera integral es:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^{\arctan \frac{1}{\sqrt{2}}} \int_0^{2a \tan \psi \sec \psi} r^4 (1 + \cos^2 \psi \sin 2\theta + \sin 2\psi \cos \theta + \sin 2\psi \sin \theta) \cos \psi dr d\psi d\theta = \\ & \int_0^{2\pi} \int_0^{\arctan \frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{32}{5} a^5 \tan^5 \psi \sec^5 \psi (1 + \cos^2 \psi \sin 2\theta + \sin 2\psi \cos \theta + \sin 2\psi \sin \theta) \cos \psi d\psi d\theta = \\ & 2\pi \frac{32}{5} a^5 \int_0^{\arctan \frac{1}{\sqrt{2}}} \tan^5 \psi \cos^4 \psi d\psi = \frac{64}{5} \pi a^5 \int_0^{\arctan \frac{1}{\sqrt{2}}} (\tan^5 \psi + \tan^7 \psi) \sec^2 \psi d\psi = \\ & \frac{64}{5} a^5 \left(\frac{1}{6} \tan^6 \psi + \frac{1}{8} \tan^8 \psi \right) \Big|_0^{\arctan \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{64}{5} a^5 \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{16} \right) = \frac{11}{30} \pi a^5. \end{aligned}$$

Observemos que en el cálculo de la integral anterior las expresiones $\sin 2\theta$, $\cos \theta$, $\sin \theta$ no significan que se anulan o eliminan, sino que la integral de la expresión como tal vale 0. En efecto, al calcular la integral de $[0, 4\pi]$, ésta se anula en los tres casos.

Observamos además que $(x + y + z)^2 = 1 + \cos^2 \psi \sin 2\theta + \sin 2\psi \cos \theta + \sin 2\psi \sin \theta$.

La segunda integral es:

$$\int_0^{2\pi} \int_{\arctan \frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{3}a} r^4 (1 + \cos^2 \psi \sin 2\theta + \sin 2\psi \cos \theta + \sin 2\psi \sin \theta) \cos \psi dr d\psi d\theta =$$

$$2\pi \int_{\arctan \frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{5} r^5 \Big|_0^{\sqrt{3}a} \cos \psi \, d\psi = \frac{2}{5} \pi a^5 9\sqrt{3} \sin \psi \Big|_{\arctan \frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{18}{5} \sqrt{3} \pi a^5 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{18}{5} \sqrt{3} \pi a^5 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Se usó el hecho que $\sin \psi = \frac{\tan \psi}{\sec \psi} = \frac{\tan \psi}{\sqrt{1 + \tan^2 \psi}}$. Finalmente la integral es:

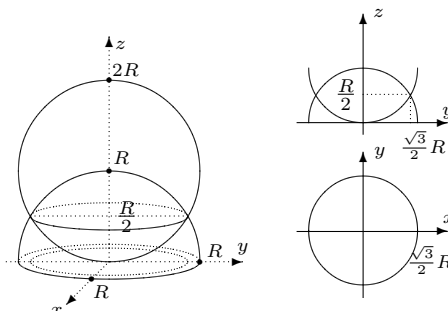
$$\frac{\pi a^5}{5} (18\sqrt{3} - 18) + \frac{\pi a^5}{5} \frac{11}{6} = \frac{\pi a^5}{5} \left(18\sqrt{3} - 18 + \frac{11}{6}\right) = \frac{\pi a^5}{5} \left(18\sqrt{3} - \frac{97}{6}\right).$$

b) Las superficies se intersecan cuando $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

y $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz \implies R^2 = 2Rz$ i.e. $z = \frac{R}{2}$. Así,

cuando $z = \frac{R}{2}$, tenemos que $x^2 + y^2 = \frac{3R^2}{4}$ (curva de intersección). Vamos a cambiar a coordenadas esféricas,

por lo que necesitamos describir en la región acotada las



superficies en estas nuevas coordenadas. En efecto:

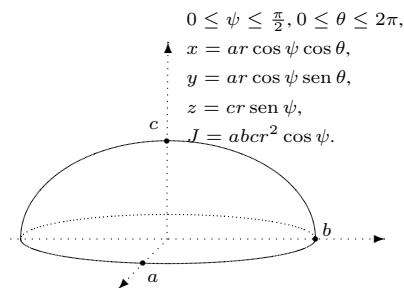
Si $0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{6}$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$ se escribe $r^2 = 2Rr \sin \psi \implies 0 \leq r \leq 2R \sin \psi$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Si $\frac{\pi}{6} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$, $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ se escribe $r = R \implies 0 \leq r \leq R$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Así tenemos que:

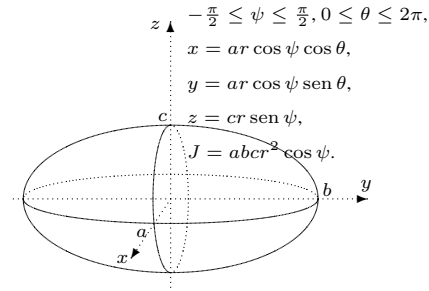
$$\begin{aligned} \iiint_V z^2 \, dx \, dy \, dz &= \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}R}^{\frac{\sqrt{3}}{2}R} \int_{-\sqrt{\frac{3R^2}{4}-x^2}}^{\sqrt{\frac{3R^2}{4}-x^2}} \int_{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{R+\sqrt{R^2-x^2-y^2}} z^2 \, dz \, dy \, dx = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_0^{2R \sin \psi} r^4 \sin^2 \psi \cos \psi \, dr \, d\psi \, d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R r^4 \sin^2 \psi \cos \psi \, dr \, d\psi \, d\theta = \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{5} (2Rr \sin \psi)^5 \sin^2 \psi \cos \psi \, d\psi + 2\pi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{5} R^5 \sin^2 \psi \cos \psi \, d\psi = \\ &= \frac{2\pi}{5} 32R^5 \frac{\sin^8 \psi}{8} \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{2\pi R^5}{5} \frac{\sin^3 \psi}{3} \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{5} \pi R^5 \frac{1}{256} + \frac{2\pi}{5} R^5 \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{8}\right) = \frac{\pi R^5}{5 \cdot 32} + \frac{7\pi R^5}{3 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{3 + 56}{3 \cdot 5 \cdot 32} \pi R^5 = \\ &= \frac{59}{480} \pi R^5. \end{aligned}$$

$$c) \iiint_V z \, dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 abc^2 r^3 \sin \psi \cos \psi \, dr \, d\psi \, d\theta =$$

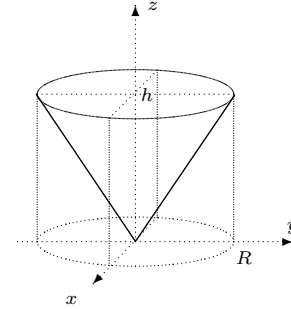
$$abc^2 \frac{1}{4} 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \psi \cos \psi \, d\psi = \frac{\pi}{2} abc^2 \frac{\sin^2 \psi}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} abc^2.$$



$$\begin{aligned}
 \text{d) } \iiint_V \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx dy dz &= \\
 \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 abc r^2 \cos \psi dr d\psi d\theta &= \\
 2\pi abc \frac{1}{2} 2 &= \frac{4}{3} \pi abc.
 \end{aligned}$$



e) Si $z = h \implies x^2 + y^2 = R^2$ i.e. es la curva de intersección, pues $z^2 = \frac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2)$. Usando coordenadas cilíndricas tenemos $x^2 + y^2 = r^2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq R$, $\frac{h}{R}r \leq z \leq h$, por lo que:



$$\begin{aligned}
 \iiint_V z dx dy dz &= \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_{\frac{h}{R}r}^h z dz r dr d\theta = 2\pi \int_0^R \frac{1}{2} \left(h^2 - \frac{h^2}{R^2} r^2 \right) r dr = \\
 \pi \left(\frac{1}{2} h^2 r^2 - \frac{h^2}{R^2} \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^R &= \pi h^2 R^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4} \pi h^2 R^2.
 \end{aligned}$$

46. Calcular los volúmenes de las siguientes regiones:

a) el cuerpo limitado por las esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y el paraboloides $x^2 + y^2 = 3z$ (la parte interior con respecto al paraboloides)

b) el cuerpo limitado por el plano $z = 0$, el cilindro $x^2 + y^2 = ax$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ (interno con respecto al cilindro).

c) el cuerpo limitado por el paraboloides $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2\frac{x}{a}$ y el plano $x = a$.

Solucin

a) Las superficies se intersecan cuando $z^2 + 3z - 4 = 0 \implies$

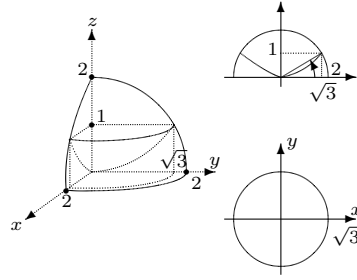
$z = 1$, es decir se intersecan en el plano $z = 1$ con ecuación

$$x^2 + y^2 = 3.$$

Usando coordenadas cilíndricas tenemos $0 \leq r \leq \sqrt{3}$, $0 \leq \theta \leq$

2π , $\frac{1}{3}r^2 \leq z \leq \sqrt{4-r^2}$. En efecto:

$$\begin{aligned} \iiint_V dx dy dz &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}} \int_{\frac{x^2+y^2}{3}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz dy dx = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \left(\sqrt{4-r^2} - \frac{1}{3}r^2 \right) r dr d\theta = \\ 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4-r^2} r dr - \frac{\pi}{6} r^4 \Big|_0^{\sqrt{3}} &= 2\pi \left(-\frac{1}{3}(4-r^2)^{3/2} \Big|_0^{\sqrt{3}} - \frac{9}{12} \right) = 2\pi \frac{32-4-9}{12} = \frac{\pi}{6} \cdot 19. \end{aligned}$$



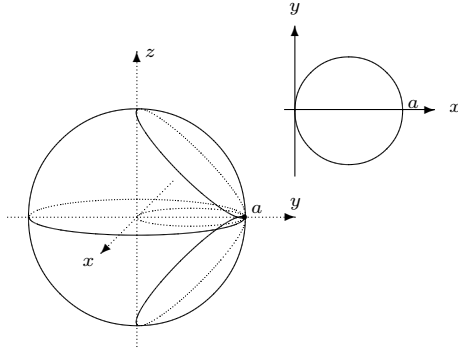
b) Usando coordenadas cilíndricas tenemos que $x =$

$ar \cos \theta$, $y = ar \sin \theta$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $-\sqrt{a^2-r^2} \leq$

$z \leq \sqrt{a^2-r^2}$ y como $x^2 + y^2 = ax \implies r^2 = ar \cos \theta$,

o sea $0 \leq r \leq a \cos \theta$. Así tenemos:

$$\begin{aligned} \iiint_V dx dy dz &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a \cos \theta} \int_{-\sqrt{a^2-r^2}}^{\sqrt{a^2-r^2}} dz r dr d\theta = \\ 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a \cos \theta} \sqrt{a^2-r^2} r dr d\theta &= \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{3} \left(-(a^2-r^2)^{3/2} \Big|_0^{a \cos \theta} \right) d\theta &= \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^3 - a^3 \sin^3 \theta) d\theta = \frac{2a^3}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta d\theta \right) = \\ \frac{2}{3} a^3 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right) &= \frac{2}{3} a^3 \frac{3\pi-4}{3 \cdot 2} = \frac{a^3}{9} (3\pi-4). \end{aligned}$$



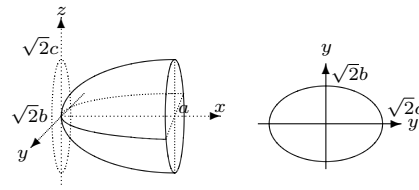
c) Si $x = a$ tenemos la elipse $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2$. Usando coor-

denadas cilíndricas se tiene $y = br \cos \theta$, $z = cr \sin \theta$,

$ah = x$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq \sqrt{2}$, $J = abc r$,

$\frac{1}{2}r^2 \leq h \leq 1$, por lo que:

$$\begin{aligned} \iiint_V dx dy dz &= \int_{-\sqrt{2}b}^{\sqrt{2}b} \int_{-c\sqrt{2-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{2-\frac{y^2}{b^2}}} \int_{\frac{1}{2}r^2}^1 abc dh dr d\theta = \\ 2\pi abc \int_0^{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{2}r^2 \right) r dr &= 2\pi abc \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{8} \right) \Big|_0^{\sqrt{2}} = 2\pi abc \left(1 - \frac{4}{8} \right) = \pi abc. \end{aligned}$$

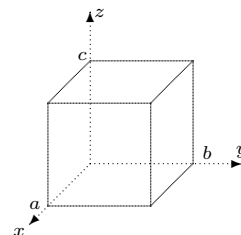


47. Hallar la masa M del paralelepípedo rectangular $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $0 \leq z \leq c$, si la densidad en el punto (x, y, z) en $\rho(x, y, z) = x + y + z$.

Solucin
$$M = \iiint_V \rho \, dx \, dy \, dz = \int_0^a \int_0^b \int_0^c (x + y + z) \, dz \, dy \, dx =$$

$$\int_0^a \int_0^b \left((x + y)c + \frac{c^2}{2} \right) \, dy \, dx = \int_0^a \left(\frac{c^2}{2}b + cbx + \frac{cb^2}{2} \right) \, dx =$$

$$\frac{1}{2}abc^2 + \frac{1}{2}ab^2c + \frac{1}{2}cba^2 = \frac{1}{2}abc(a + b + c).$$



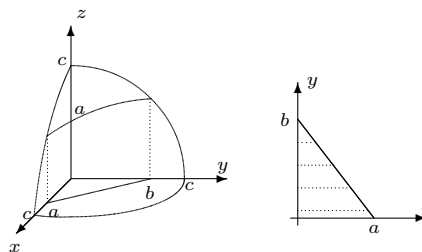
48. Del octante de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq c^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, se ha cortado la región limitada por los planos coordenados y por el plano $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, $a \leq c$, $b \leq c$. Determinar la masa de este cuerpo, si su densidad en cada punto (x, y, z) vale z .

Solucin Se tiene que $\rho(x, y, z) = z$, por lo que:

$$M = \iiint_V z \, dx \, dy \, dz =$$

$$\int_0^a \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} \int_0^{\sqrt{c^2-x^2-y^2}} z \, dz \, dy \, dx =$$

$$\frac{1}{2} \int_0^a \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} (c^2 - x^2 - y^2) \, dy \, dx =$$



$$\frac{1}{2} \int_0^a \left((c^2 - x^2)y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^{b(1-\frac{x}{a})} \, dx = \frac{1}{2} \int_0^a \left[(c^2 - x^2)b(1 - \frac{x}{a}) - \frac{1}{3}b^3(1 - \frac{x}{a})^3 \right] \, dx =$$

$$\frac{b}{2} \int_0^a \left(c^2 - \frac{c^2}{a}x + \frac{1}{a}x^3 - x^2 \right) \, dx - \frac{1}{6}b^3 \int_0^a \left(1 - \frac{x}{a} \right)^3 \, dx = \frac{1}{2}b(c^2a - \frac{1}{3}a^3 - \frac{c^2}{a} \frac{a^2}{2} + \frac{1}{a} \frac{a^4}{4}) +$$

$$\frac{1}{6}b^3a \frac{(1 - \frac{x}{a})^4}{4} \Big|_0^a = \frac{1}{2}b(\frac{1}{2}ac^2 - \frac{1}{12}a^3) - \frac{1}{24}ab^3 = \frac{1}{24}ab(6c^2 - a^2 - b^2).$$

49. En el cuerpo de forma semiesférica $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$, $z \geq 0$, la densidad varía proporcionalmente a la distancia del centro. Determinar el centro de gravedad de este cuerpo.

Solucin Se tiene que $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,

$$\text{entonces } M = \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^a r^3 \cos \psi dr d\psi d\theta = 2\pi \frac{1}{4} a^4 = \frac{\pi}{2} a^4.$$

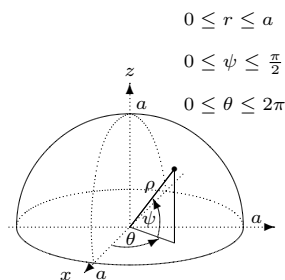
Por razones de simetría de la semiesfera:

$$M_y = M_x = \frac{2}{\pi a^4} \iiint_V x \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz =$$

$$\frac{2}{\pi a^4} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^a r^4 \cos^2 \psi \cos \theta dr d\psi d\theta = 0, \text{ pues } \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = 0,$$

$$M_z = \frac{2}{\pi a^4} \iiint_V z \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz = \frac{2}{\pi a^4} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^a r^4 \sin \psi \cos \psi dr d\psi d\theta =$$

$$\frac{2}{\pi a^4} 2\pi \frac{1}{5} a^5 \frac{\sin^2 \psi}{2} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{5} a.$$



50. Hallar el centro de gravedad del cuerpo limitado por el paraboloido $y^2 + 2z^2 = 4x$ y por el plano $x = 2$.

Solucin Aquí consideramos que $\rho = 1$. Cuando $x = 2$ se tiene la elipse $y^2 + 2z^2 = 8$ i.e. $\frac{y^2}{8} + \frac{z^2}{4} = 1$.

Efectuamos un cambio de variable a coordenadas

cilíndricas de modo que $y = 2\sqrt{2}r \cos \theta$, $z = 2r \sin \theta$,

$x = 2h$, $J = 8\sqrt{2}r$, con $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$,

$r^2 \leq h \leq 1$. Así tenemos que:

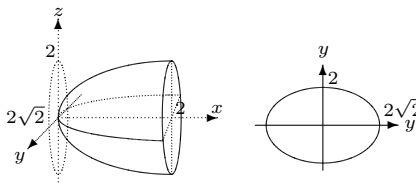
$$M = \iiint_V dx dy dz = \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \int_{-2\sqrt{1-\frac{y^2}{8}}}^{2\sqrt{1-\frac{y^2}{8}}} \int_{\frac{y^2+2z^2}{4}}^2 dx dz dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{r^2}^1 8\sqrt{2}r dh dr d\theta =$$

$$2\pi \int_0^1 8\sqrt{2}(1-r^2)r dr = 16\sqrt{2}\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = 4\sqrt{2}\pi.$$

$$\bar{z} = \bar{y} = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi} \iiint_V y dx dy dz = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{r^2}^1 8\sqrt{2}r^2 2\sqrt{2} \cos \theta dh dr d\theta = 0, \text{ pues } \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = 0,$$

$$\bar{x} = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi} \iiint_V x dx dy dz = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{r^2}^1 8\sqrt{2}(2h dh)r dr = 8 \int_0^1 \frac{1}{2}(1-r^4)r dr =$$

$$4\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) = \frac{4}{3}.$$



51. Hallar el momento de inercia del cilindro circular que tiene por altura h y por radio de la base a , con

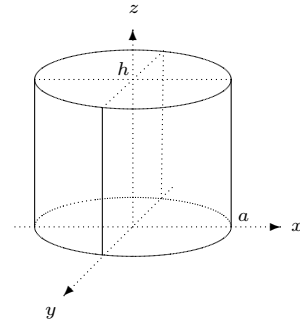
respecto al eje que sirve de diámetro de la base del propio cilindro.

Solucin Tomamos $\rho = 1$, con $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $z = z$, $0 \leq z \leq$

h , $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, entonces:

$$I_x = \iiint_V (y^2 + z^2) dx dy dz = \int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^h (y^2 + z^2) dz dy dx =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^h (r^2 \sin^2 \theta + z^2) dz r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^a (hr^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{3}h^3)r dr d\theta =$$



$$\int_0^{2\pi} (h\frac{a^4}{4} \sin^2 \theta + \frac{1}{3}h^3\frac{a^2}{2}) d\theta = \frac{1}{2}a^2h(2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta + \frac{2\pi}{3}h^2) = \frac{1}{2}ha^2 \left(2a^2\frac{\pi}{2}\frac{1}{2} + \frac{2\pi}{3}h^2\right) =$$

$$\frac{\pi}{12}ha^2(3a^2 + 4h^2).$$

52. Hallar el momento de inercia del cono circular, que tiene por altura h , por radio de la base a y densidad ρ , con respecto al diámetro de su base.

Solucin Consideramos que la base del cilindro está en el plano $z = 0$,

de modo que su vértice esté en el eje z . Consideremos $z = z$, $x =$

$r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq h(1 - \frac{r}{a})$,

entonces:

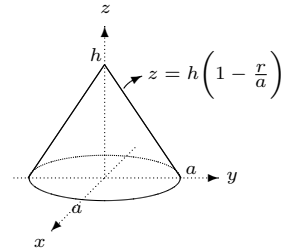
$$I_x = \iiint_V (z^2 + y^2)\rho dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^{h(1-\frac{r}{a})} \rho(r^2 \sin^2 \theta + z^2) dz r dr d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a \rho(r^2 \sin^2 \theta h(1 - \frac{r}{a}) + \frac{1}{3}h^3(1 - \frac{r}{a})^3)r dr d\theta =$$

$$\rho \int_0^{2\pi} (h \sin^2 \theta \frac{a^4}{4} - \frac{h}{a} \sin^2 \theta \frac{a^5}{5} + \frac{1}{3}h^3(\frac{a^2}{2} - \frac{3a^3}{3a} + \frac{3a^4}{4a^2} - \frac{a^5}{5a^3})) d\theta =$$

$$\rho \int_0^{2\pi} 4ha^4(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}) \sin^2 \theta d\theta + \frac{2\pi}{3}\rho h^3 a^2(\frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{4} - \frac{1}{5}) =$$

$$\rho a^4 h \frac{1}{20} \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} + \frac{2\pi}{3}\rho a^2 h^3 \frac{3}{60} = \frac{\pi \rho h a^2}{60}(3a^2 + 2h^2).$$



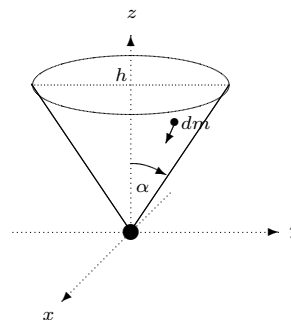
53. Hallar la atracción que ejerce el cono homogéneo, de altura h y ángulo en el vértice a (en la sección axial), sobre un punto material que tenga una unidad de masa y que está situado en su vértice.

Solucin Tomamos el vértice en el origen y usamos coordenadas esféricas:

$$0 \leq \phi \leq 2\pi, \quad \frac{\pi}{2} - \alpha \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, \quad z = r \sin \psi = h \implies r = \frac{h}{\sin \psi}.$$

La masa $dm = \rho dV = \rho r^2 \cos \psi d\phi d\psi dr$ y la atracción que ejerce este elemento de masa dm sobre la masa de unidad 1 en el origen, está dada por $\frac{k dm}{r^2} \sin \psi = k\rho \sin \psi \cos \psi d\psi d\phi dr$. La atracción será entonces:

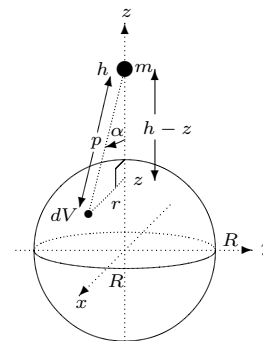
$$\int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{h}{\sin \psi}} k\rho \sin \psi \cos \psi dr d\psi d\phi = 2\pi k h \rho \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \cos \psi d\psi = 2\pi k h \rho (1 - \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)) = 2\pi k \pi \rho (1 - \cos \alpha).$$



54. Demostrar que la atracción que ejerce una esfera homogénea sobre un punto material exterior a ella no varía, si toda la masa de la esfera se concentra en su centro.

Solucin Tomemos el origen en el centro de la esfera de modo que el eje z pase por el punto que suponemos de masa m y tomemos coordenadas cilíndricas (r, θ, z) .

Sea h la distancia del punto al origen y sea p la distancia de un elemento de volumen dV a la masa m , $p = \sqrt{r^2 + (h-z)^2}$, entonces la fuerza de atracción dirigida a lo largo de p tiene valor $-k\gamma m \frac{dV}{p^2}$, donde $\gamma = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ es la densidad de la esfera, $dV = r dr d\theta dz$.



La proyección de la fuerza sobre el eje z es $dF = -\frac{k m \gamma dV}{p^2} \cos \alpha = -k m \gamma \frac{h-z}{p^3} r d\theta dr dz$. De esta manera tenemos que:

$$\begin{aligned} F &= \iiint_V dF = \iiint_V -k m \gamma \frac{h-z}{p^3} r d\theta dr dz \\ &= -k m \gamma \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-R}^R (h-z) dz \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \frac{r dr}{(r^2 + (h-z)^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Ahora, $\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \frac{r dr}{(r^2 + (h-z)^2)^{3/2}} = \frac{1}{h-z} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + h^2 - 2hz}}$,

$$\int_{-R}^R (h-z) \left(\frac{1}{h-z} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + h^2 - 2hz}} \right) dz = \int_{-R}^R \left(1 - \frac{h-z}{\sqrt{R^2 + h^2 - 2hz}} \right) dz =$$

$$2R - \frac{(h+R)^2(2h-R)}{3h^2} + \frac{(h-R)^2(2h+R)}{3h^2} = \frac{2R^2}{3h^2},$$
$$\int_0^{2\pi} \frac{2R^2}{3h^2} d\theta = \frac{4\pi R^3}{3h^2} \implies F = -km\gamma \frac{4\pi R^3}{3h^2} = -\frac{kmM}{h^2}, \text{ ya que } M = \frac{4}{3}\pi R^3\gamma.$$

Tema 5

Ejercicios de Integrales de línea: Prof. Osvaldo Acuña

1. Calcule $\int_C (6xy^2 - y^3) dx + (6x^2y - 3xy^2) dy$, a lo largo de cualquier curva C desde el punto $(1, 2)$ al punto $(3, 4)$.
2. Calcule la integral curvilínea $\int_C x dx + y dy - z dz$, a lo largo de cualquier curva C que va desde $(1, 0, -3)$ a $(6, 4, 8)$.
3. Calcule $\int_C xy dx + yz dy + zx dz$, donde C es la circunferencia que resulta al intersecar $x^2 + y^2 + z^2 = 4x$, con $z = x$, recorrida en el sentido contrario de la manecillas del reloj, vista sobre el semieje positivo de la z .
4. Si $P(x) = xe^{-y^2}$, $Q(x, y) = -x^2ye^{y^2} + \frac{1}{x^2 + y^2}$, calcular $\int P dx + Q dy$, donde C es el contorno del cuadrado de lado $2a$ determinado por las desigualdades $|x| \leq a$ y $|y| \leq a$, circulando en el sentido contrario a las manecillas del reloj.
5. Hallar la masa de un alambre cuya forma es la curva de la intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y el plano $x + y + z = 0$, si la densidad del alambre en (x, y, z) es x^2 .
6. Calcular el trabajo realizado por un campo de fuerza $\mathbf{F} = (y^2, z^2, x^2)$, a lo largo de la curva de intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = ax$, siendo $z \geq 0$, $a \geq 0$. El camino es recorrido de modo que, observando al plano xy desde el eje z positivo, el sentido sea contrario al de las agujas del reloj.

7. Decidir si los siguientes campos vectoriales poseen o no función potencial. Encontrarla en caso que exista.

a) $\mathbf{f}(x, y, z) = (2xy^3, x^2z^2, 3x^2yz^2)$.

b) $\mathbf{g}(x, y, z) = (4xy - 3x^2z^2 + 1, 2x^2 + 2, -2x^3z - 3z^2)$.

c) $\mathbf{h}(x, y, z) = (y^2 \cos x + z^3, -4 + 2y \sin x, 3xz^2 + 2)$.

Soluciones de Ejercicios de Integrales de línea: Prof. Osvaldo Acuña

1. Calcule $\int_C (6xy^2 - y^3) dx + (6x^2y - 3xy^2) dy$, a lo largo de cualquier curva C desde el punto $(1, 2)$ al punto $(3, 4)$.

Solucin $f_1 = 6xy^2 - y^3$, $f_2 = 6x^2y - 3xy^2$, $\frac{\partial f_1}{\partial y} = 12xy - 3y^2$, $\frac{\partial f_2}{\partial x} = 12xy - 3y^2$, por lo tanto $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$. Así, $f_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 6xy^2 - y^3$, $f_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 6x^2y - 3xy^2$, $\varphi = 3x^2y^2 - xy^3 + g_1(y)$ y $\varphi = 3x^2y^2 - xy^3 + g_2(x)$. Tomemos $\varphi = 3x^2y^2 - xy^3$.

De esta manera $\int_C (6xy^2 - y^3) dx + (6x^2y - 3xy^2) dy = \varphi(3, 4) - \varphi(1, 2) = 3 \cdot 3^2 \cdot 4^2 - 3 \cdot 4^3 - (3 \cdot 1^2 \cdot 2^2 - 1 \cdot 2^3) = 3 \cdot 4^2 (9 - 4) - 2^2 (3 - 2) = 3 \cdot 4^2 \cdot 5 - 4 = 236$.

2. Calcule la integral curvilínea $\int_C x dx + y dy - z dz$, a lo largo de cualquier curva C que va desde $(1, 0, -3)$ a $(6, 4, 8)$.

Solucin $\mathbf{F} = (x, y, -z) = (f_1, f_2, f_3)$, como $\frac{\partial f_1}{\partial y} = 0 = \frac{\partial f_2}{\partial x}$, $\frac{\partial f_1}{\partial z} = 0 = \frac{\partial f_3}{\partial x}$, $\frac{\partial f_2}{\partial z} = 0 = \frac{\partial f_3}{\partial y}$, existe la función potencial tal que: $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = x$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = y$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -z \implies \varphi = \frac{x^2}{2} + h_1(y, z)$, $\varphi = \frac{y^2}{2} + h_2(x, z)$, $\varphi = -\frac{z^2}{2} + h_3(x, y)$ y se escoge $\varphi = \frac{x^2 + y^2 - z^2}{2}$.

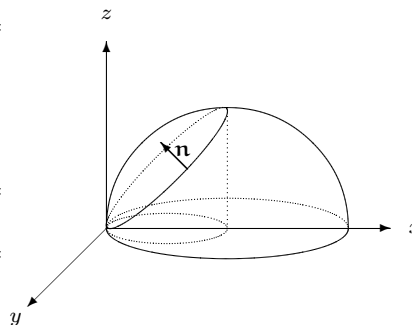
Así, $\int_C x dz + y dy - z dz = \varphi(6, 4, 8) - \varphi(1, 0, -3) = \frac{36 + 16 - 64}{2} - \frac{1 - 9}{2} = -2$.

3. Calcule $\int_C xy dx + yz dy + zx dz$, donde C es la circunferencia que resulta al intersecar $x^2 + y^2 + z^2 = 4x$, con $z = x$, recorrida en el sentido contrario de la manecillas del reloj, vista sobre el semieje positivo de la z .

Solucin Sea $C : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4x \\ z = x \end{cases} \implies x^2 + y^2 + x^2 =$

$$4x \implies 2(x^2 - 2x + 1) + y^2 = 1 \implies \frac{(x-1)^2}{1} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

Sea $x - 1 = \cos \theta$, $\frac{y}{\sqrt{2}} = \sin \theta$ y $z = x$, entonces $\mathbf{r}(\theta) = (1 + \cos \theta, \sqrt{2} \sin \theta, 1 + \cos \theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi \implies \mathbf{r}'(\theta) = (-\sin \theta, \sqrt{2} \cos \theta, -\sin \theta)$.



Como $\mathbf{F} = (xy, yz, zx) \implies \mathbf{F}(\theta) = ((1 + \cos \theta)\sqrt{2} \sin \theta, (1 + \cos \theta)\sqrt{2} \sin \theta, (1 + \cos \theta)^2) =$

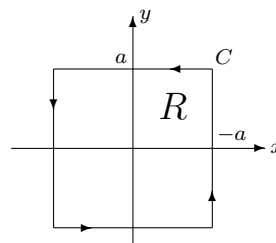
$$\begin{aligned}
& (1 + \cos \theta)(\sqrt{2} \sin \theta, \sqrt{2} \sin \theta, 1 + \cos \theta) \text{ y se tiene que } \int_C xy dx + yz dy + zx dz = \\
& \int_0^{2\pi} (1 + \cos \theta) [\sqrt{2} \sin \theta, \sqrt{2} \sin \theta, 1 + \cos \theta] \cdot [-\sin \theta, \sqrt{2} \cos \theta, -\sin \theta] d\theta \\
& = \int_0^{2\pi} (1 + \cos \theta) [-\sqrt{2} \sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta - \sin \theta] d\theta \\
& = \int_0^{2\pi} (-\sqrt{2} \sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta - \sin \theta - \sqrt{2} \sin^2 \theta + \sin \theta \cos^2 \theta - \sin \theta \cos \theta) d\theta \\
& = \int_0^{2\pi} (-\sqrt{2} \sin^2 \theta) d\theta = -\sqrt{2}\pi.
\end{aligned}$$

4. Si $P(x) = xe^{-y^2}$, $Q(x, y) = -x^2ye^{y^2} + \frac{1}{x^2 + y^2}$, calcular $\int_C P dx + Q dy$, donde C es el contorno del cuadrado de lado $2a$ determinado por las desigualdades $|x| \leq a$ y $|y| \leq a$, circulando en el sentido contrario a las manecillas del reloj.

Solucin Por el teorema de Green se tiene que:

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dy dx. \text{ Calculemos:}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} &= -2xye^{-y^2} - \frac{2x}{(x^2 + y^2)^2} - (-2xye^{-y^2}) = \\
&= -\frac{2x}{(x^2 + y^2)^2}, \text{ entonces } \int_C P dx + Q dy = \\
&= \iint_R -\frac{2x}{(x^2 + y^2)^2} dx dy = \int_{-a}^a \int_{-a}^a -\frac{2x}{(x^2 + y^2)^2} dx dy = \\
&= \int_{-a}^a \left[\frac{1}{x^2 + y^2} \right]_{x=-a}^{x=a} dy = \int_{-a}^a \left[\frac{1}{a^2 + y^2} - \frac{1}{a^2 + y^2} \right] dy = \int_{-a}^a 0 dy = 0.
\end{aligned}$$



5. Hallar la masa de un alambre cuya forma es la curva de la intersección de la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ y el plano } x + y + z = 0, \text{ si la densidad del alambre en } (x, y, z) \text{ es } x^2.$$

Solucin Se tiene que la densidad $\rho(x, y, z) = x^2$ y que C es la curva de intersección de las superficies

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ y el plano } x + y + z = 0. \text{ Parametrizando } C \text{ tenemos, } x^2 + y^2 + (-x - y)^2 = 1 \implies$$

$$2x^2 + 2y^2 + 2xy = 1.$$

Consideremos la siguiente sustitución $x = u + v$, $y = u - v$, entonces $2(u + v)^2 + 2(u - v)^2 + 2(u + v)(u - v) = 1$, es decir $2u^2 + 2v^2 + 2u^2 + 2v^2 + 2u^2 - 2v^2 = 1$, por lo tanto $6u^2 + 2v^2 = 1$.

$$\begin{aligned}
\text{Si } \sqrt{6}u &= \cos \theta, \sqrt{2}v = \sin \theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi, \text{ se tiene que } x = \frac{\cos \theta}{\sqrt{6}} + \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}}, y = \frac{\cos \theta}{\sqrt{6}} - \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}}, \\
z &= -(x + y) = -2\frac{\cos \theta}{\sqrt{6}}, \text{ por lo tanto } \mathbf{r}(\theta) = \left(\frac{\cos \theta}{\sqrt{6}} + \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}}, \frac{\cos \theta}{\sqrt{6}} - \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}}, -\frac{2\cos \theta}{\sqrt{6}} \right) \implies
\end{aligned}$$

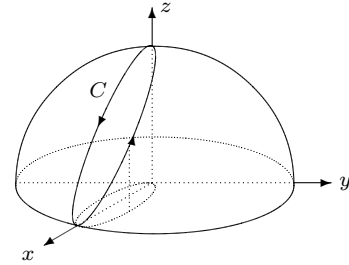
$$\mathbf{r}'(\theta) = \left(-\frac{\operatorname{sen} \theta}{\sqrt{6}} + \frac{\cos \theta}{\sqrt{2}}, -\frac{\operatorname{sen} \theta}{\sqrt{6}} - \frac{\cos \theta}{\sqrt{2}}, \frac{2 \operatorname{sen} \theta}{\sqrt{6}} \right) \implies \|\mathbf{r}'(\theta)\|^2 = 2 \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{6} + 2 \frac{\cos^2 \theta}{2} + \frac{4}{6} \operatorname{sen}^2 \theta = \operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, \|\mathbf{r}'(\theta)\| = 1. \text{ Por lo tanto } ds = d\theta \text{ y}$$

$$\begin{aligned} M &= \int_C \rho ds = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos \theta}{\sqrt{6}} + \frac{\operatorname{sen} \theta}{\sqrt{2}} \right)^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos^2 \theta}{6} + \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{2} + \frac{2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta}{\sqrt{12}} \right) d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{12} + \frac{1 - \cos 2\theta}{4} + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{\sqrt{12}} \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{4 - 2 \cos 2\theta}{12} d\theta + \frac{1}{\sqrt{12}} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} 2\theta d\theta = \\ &= \frac{1}{3}(2\pi) - \frac{1}{6} \int_0^{2\pi} \cos 2\theta d\theta + \frac{1}{\sqrt{12}} \cdot 0 = \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{6} \cdot 0 = \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

6. Calcular el trabajo realizado por un campo de fuerza $\mathbf{F} = (y^2, z^2, x^2)$, a lo largo de la curva de intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = ax$, siendo $z \geq 0$, $a \geq 0$. El camino es recorrido de modo que, observando al plano xy desde el eje z positivo, el sentido sea contrario al de las agujas del reloj.

Solucin Sea C la curva de intersección; la proyección de C en el plano xy es la curva $x^2 + y^2 = ax$, es decir $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$.

Sea $x - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} \cos \theta$, $y = \frac{a}{2} \operatorname{sen} \theta$, $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, entonces $x = \frac{a}{2}(1 + \cos \theta)$, $y = \frac{a}{2} \operatorname{sen} \theta$, $z = \frac{\sqrt{2}}{2} a \sqrt{1 - \cos \theta}$,



por lo tanto $\mathbf{r}(\theta) = \left(\frac{a}{2}(1 + \cos \theta), \frac{a}{2} \operatorname{sen} \theta, \frac{\sqrt{2}}{2} a \sqrt{1 - \cos \theta} \right)$, donde $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $\mathbf{r}'(\theta) = \left(-\frac{a}{2} \operatorname{sen} \theta, \frac{a}{2} \cos \theta, \frac{\sqrt{2}}{4} a \frac{\operatorname{sen} \theta}{\sqrt{1 - \cos \theta}} \right)$.

Dado que θ se mide en el sentido contrario a las agujas del reloj, tenemos $W = + \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, pero como

$$\mathbf{F} = (y^2, z^2, x^2) = \left(\frac{a^2}{4} \operatorname{sen}^2 \theta, \frac{a^2}{2} (1 - \cos \theta), \frac{a^2}{4} (1 + \cos \theta)^2 \right),$$

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{a^2}{4} \operatorname{sen}^2 \theta, \frac{a^2}{2} (1 - \cos \theta), \frac{a^2}{4} (1 + \cos \theta)^2 \right) \cdot \left(-\frac{a}{2} \operatorname{sen} \theta, \frac{a}{2} \cos \theta, \frac{\sqrt{2}a}{4} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\sqrt{1 - \cos \theta}} \right) d\theta = \\ &= -\frac{a^3}{8} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^3 \theta d\theta + \frac{a^3}{4} \int_0^{2\pi} (\cos \theta - \cos^2 \theta) d\theta + \frac{a^3 \sqrt{2}}{16} \int_0^{2\pi} \frac{(1 + \cos \theta)^2 \operatorname{sen} \theta}{\sqrt{1 - \cos \theta}} d\theta = \\ &= -\frac{a^3}{8} \cdot 0 + \frac{a^3}{4} \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta - \frac{a^3}{4} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta + \frac{a^3 \sqrt{2}}{16} \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} \theta + 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta}{\sqrt{2} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}} d\theta = \\ &= 0 + \frac{a^3}{4} \cdot 0 - \frac{a^3}{4} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta + \frac{a^3}{16} \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} \theta + 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta}{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}} d\theta = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{a^3}{8}(2\pi) - \frac{a^3}{8} \cdot 0 + \frac{a^3}{16} \left[\int_0^{2\pi} 2 \cos \frac{\theta}{2} d\theta + \int_0^{2\pi} \sin \frac{\theta}{2} \frac{4 \cos \frac{\theta}{2} \cos \theta + 2 \cos^2 \theta \cos \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} d\theta \right] = \\
& -\frac{a^3\pi}{4} + \frac{a^3}{16} \left[4 \sin \frac{\theta}{2} \right]_0^{2\pi} + \frac{a^3}{16} \int_0^{2\pi} (4 \cos \frac{\theta}{2} (\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}) + 2(1 - \sin^2 \theta) \cos \frac{\theta}{2}) d\theta = \\
& -\frac{a^3\pi}{4} + 0 + \frac{a^3}{16} \int_0^{2\pi} (4(1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}) + 2(1 - 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2})) \cos \frac{\theta}{2} d\theta = \\
& -\frac{a^3\pi}{4} + \frac{a^3}{8} \int_0^{2\pi} (2(1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}) + (1 - 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} (1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}))) \cos \frac{\theta}{2} d\theta = \\
& -\frac{a^3\pi}{4} + \frac{a^3}{8} \int_0^0 (2(1 - 2u^2) + (1 - 4u^2(1 - u^2))) 2 du = -\frac{a^3\pi}{4} + \frac{a^3}{8} \cdot 0 = -\frac{a^3\pi}{4}.
\end{aligned}$$

7. Decidir si los siguientes campos vectoriales poseen o no función potencial. Encontrarla en caso que exista.

a) $\mathbf{f}(x, y, z) = (2xy^3, x^2z^2, 3x^2yz^2)$.

b) $\mathbf{g}(x, y, z) = (4xy - 3x^2z^2 + 1, 2x^2 + 2, -2x^3z - 3z^2)$.

c) $\mathbf{h}(x, y, z) = (y^2 \cos x + z^3, -4 + 2y \sin x, 3xz^2 + 2)$.

Solucin

a) Sea $f_1 = 2xy^3$, $f_2 = x^2y^2$, $f_3 = 3x^2yz^2$, $\frac{\partial f_2}{\partial z} = 2x^2z$, $\frac{\partial f_3}{\partial y} = 3x^2z^2$, $\frac{\partial f_2}{\partial z} \neq \frac{\partial f_3}{\partial y}$ y f no tiene función potencial.

b) Si $g_1 = 4xy - 3x^2z^2 + 1$, $g_2 = 2x^2 + 2$, $g_3 = -2x^3z - 3z^2$, $\frac{\partial g_1}{\partial y} = 4x$, $\frac{\partial g_2}{\partial x} = 4x$, $\frac{\partial g_3}{\partial x} = -6x^2z$, $\frac{\partial g_1}{\partial z} = -6x^2z$, $\frac{\partial g_2}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial g_3}{\partial y} = 0$, por lo tanto tenemos que $\frac{\partial g_1}{\partial y} = \frac{\partial g_2}{\partial x}$, $\frac{\partial g_3}{\partial x} = \frac{\partial g_1}{\partial z}$, $\frac{\partial g_2}{\partial z} = \frac{\partial g_3}{\partial y}$ y g tiene función potencial ϕ .

Integrando tenemos que $\frac{\partial \phi}{\partial x} = 4xy - 3x^2z^2 + 1 \implies \phi = 2x^2y - x^3z^2 + x + S_1(y, z)$,

$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 2x^2 + 2 \implies \phi = 2x^2y + 2y + S_2(x, z)$, $\frac{\partial \phi}{\partial z} = -2x^3z - 3z^2 \implies \phi = -x^3z^2 - z^3 + S_3(x, y)$.

Tomemos $S_1(y, z) = 2y - z^3 + C$, con C constante. Así, $\phi = 2x^2y - x^3z^2 + x + 2y - z^3 + C$.

Verifiquemos que $\nabla \phi = g$. En efecto:

$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 4xy - 3x^2z^2 + 1 = g_1$, $\frac{\partial \phi}{\partial y} = 2x^2 + 2 = g_2$ y $\frac{\partial \phi}{\partial z} = -2x^3z - 3z^2 = g_3$.

c) $h_1 = y^2 \cos x + z^3$, $h_2 = -4 + 2y \sin x$, $h_3 = 3xz^2 + 2$, $\frac{\partial h_1}{\partial y} = 2y \cos x$, $\frac{\partial h_2}{\partial x} = 2y \cos x$, $\frac{\partial h_3}{\partial x} = 3z^2$,
 $\frac{\partial h_1}{\partial z} = 3z^2$, $\frac{\partial h_2}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial h_3}{\partial y} = 0$, por lo tanto h tiene función potencial ψ .

Integrando tenemos que $\frac{\partial \psi}{\partial x} = y^2 \cos x + z^3 \implies \psi = y^2 \sin x + xz^3 + S_1(y, z)$,

$\frac{\partial \psi}{\partial y} = -4 + 2y \sin x \implies \psi = -4y + y^2 \sin x + S_2(x, z)$, $\frac{\partial \psi}{\partial z} = 3xz^2 + 2 \implies \psi = xz^3 + 2z + S_3(x, y)$.

Tomemos $S_3(x, y) = y^2 \sin x - 4y + C$, con C constante. Así, $\psi = xz^3 + 2z + y^2 \sin x - 4y + C$.

Verifiquemos que $\nabla \psi = h$.

En efecto, $\frac{\partial \psi}{\partial x} = z^3 + y^2 \cos x = h_1$, $\frac{\partial \psi}{\partial y} = 2y \sin x - 4 = h_2$ y $\frac{\partial \psi}{\partial z} = 3xz^2 + 2 = h_3$.

Tema 6

Ejercicios de Integrales de superficie: Prof. Osvaldo Acuña, Prof.

Jorge Poltronieri

1. Calcular el área de las siguientes superficies en las condiciones indicadas:

a) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, z = 0, y = 0, x = 0.$

b) $x^2 + y^2 = R^2, z \geq 0, z = mx, z = nx, m > n > 0.$

c) $x^2 - y^2 = z^2, y + z = a, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$

d) área de $x^2 + y^2 = ax$, acotada por $x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$

e) área de $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, acotada por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b.$

f) área de $y^2 + z^2 = 2ax$, comprendida entre $y^2 = ax, x = a.$

g) área de $x^2 + y^2 = 2ax$, comprendida entre $z = 0, x^2 + y^2 = z^2.$

h) área de $x^2 - y^2 = z^2$, dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 2ax.$

i) área de $y^2 = 4x$, acotada por $x^2 + y^2 + z^2 = 5x.$

j) área de $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, acotada por $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2).$

2. Demuestre que las áreas de las partes de las superficies de las parabólicas $x^2 + y^2 = 2az$ y $x^2 - y^2 = 2az$ cortadas por el cilindro $x^2 + y^2 = R^2$ son iguales.

3. Una esfera de radio a está cortada por dos cilindros circulares, cuyas bases tienen los diámetros iguales

- al radio de aquella y que son tangentes entre sí, a lo largo de uno de los diámetros de la misma. Hallar el volumen y el área de la parte de superficie de la esfera que queda.
4. En una esfera de radio a se ha cortado un orificio con salida de base cuadrada, cuyo lado es igual también a a . El eje de este orificio coincide con el diámetro de la esfera. Hallar el área de la superficie de ésta cortada por el orificio.
 5. Calcular el área de la parte de superficie helicoidal $z = c \arctan \frac{x}{y}$, situada en el primer octante y que está comprendida entre los cilindros $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = b^2$.
 6. Hallar la masa de una lámina circular de radio R , si su densidad es proporcional a la distancia desde el punto al centro e igual a δ en el borde de la lámina.
 7. Una lámina tiene la forma de un triángulo rectángulo con catetos $\overline{OB} = a$, $\overline{OA} = b$; su densidad en cualquier punto es igual a la distancia desde esta al cateto \overline{OA} . Determinar los momentos estáticos de la lámina con respecto a los catetos \overline{OA} y \overline{OB} .
 8. Calcular las coordenadas del centro de gravedad de la figura limitada por la curva $y = \sin x$, la recta \overline{OA} que pasa por el origen y por el vértice $A = (\frac{\pi}{2}, 1)$ de la senoide.
 9. Determinar las coordenadas del centro de gravedad de la figura limitada por la cardioide $r = a(1 + \cos \theta)$.
 10. Determinar las coordenadas del centro de gravedad de un sector circular de radio a , cuyo ángulo central es igual a 2α .
 11. Calcular las coordenadas del centro de gravedad de la figura limitada por las parábolas $y^2 = 4x + 4$, $y^2 = -2x + 4$.
 12. Calcular el momento de inercia de un anillo circular de diámetro d y D ($d < D$):
 - a) con respecto a su propio centro
 - b) con respecto al diámetro.

13. Calcular el momento de inercia de un cuadrado de lado a con respecto al eje que, pasando por uno de sus vértices, es perpendicular al plano del cuadrado.
14. Calcular el momento de inercia de la región interceptada por la parábola $y^2 = ax$, por la recta $x = a$, respecto a la recta $y = -a$.
15. Calcular el momento de inercia de la superficie limitada por la hipérbola $xy = 4$ y la recta $x + y = 5$, con respecto a la recta $x = y$.
16. En una lámina cuadrada de lado a , la densidad es proporcional a la distancia hasta uno de sus vértices. Calcular el momento de inercia de dicha lámina respecto a los lados que pasan por el vértice.
17. Determinar el momento de inercia de la cardioide $r = a(1 + \cos \theta)$ con respecto al polo.
18. Calcular el momento de inercia de la superficie de la lemniscata $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ con respecto al eje, perpendicular al plano de la misma que pasa por el polo.
19. Calcular el momento de inercia de una lámina homogénea limitada por un arco de la cicloide $x = a(\theta - \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$ y el eje x , con respecto al eje x y con respecto al eje y .
20. Calcular las integrales de superficie $\iint_S f dS$, donde S es la superficie definida por $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \leq z \leq 1$, $f(x, y, z) = x^2 y^2 z$.
21. Calcular la integral de superficie $\iint_S f dS$ en los siguientes casos:
- $f(x, y, z) = xy e^{xz}$, S en el cuarto de cilindro definida por $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.
 - $f(x, y, z) = \ln z$, S es la parte esférica definida por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $\frac{1}{2} \leq z \leq 1$.
 - $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$ y S es el helicoides $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $z = \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq 1$.
 - $f(x, y, z) = z^2$ y S es la esfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
22. Calcular el área de la porción de superficie helicoidal definida por $x = at \cos \theta$, $y = at \sin \theta$, $z = h\theta$, $(\theta, t) \in [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 1]$, $a > 0$, $h > 0$.

23. Calcular el área de la porción S del paraboloides de ecuación $z = xy$, que se proyecta sobre el plano xy dentro del disco D definido por $x^2 + y^2 \leq 1$.
24. Calcular el área S de las siguientes superficies:
- $x^2 + y^2 = r^2, x > 0, \alpha \leq z \leq \beta x, 0 < \alpha < \beta, r > 0$.
 - $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z > 0, x^2 + y^2 - ax \leq 0, a > 0$, (ventana de Viviani).
 - $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, 0 \leq z \leq \frac{xy}{c}, a, b, c > 0$.
 - $x^2 + y^2 + z^2 = r^2, x + y \leq r, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, r > 0$.
 - $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax = 0, z \geq 0, x^2 + y^2 \leq z^2 \tan^2 \alpha, a > 0, \alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$.
25. Determinar el centro de la placa homogénea S de densidad 1, donde S es la superficie definida por $x = ue^v \cos v, y = ue^v \sin v, z = e^v, (u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$.
26. Si S es la superficie del paraboloides $z = 2 - (x^2 + y^2)$ sobre el plano OXY , calcule:
- Las coordenadas del centroide de esta superficie.
 - El momento de inercia de esta superficie con respecto al eje OZ , siendo la densidad de la superficie 1.
27. Obtenga el área de la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, a > 0$, contenida dentro del cono $z \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{x^2 + y^2}, 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$.
28. Aplicando únicamente el teorema de Stokes evalúe $\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$, donde $\mathbf{F} = (x - z)\mathbf{i} + (x^3 + yz)\mathbf{j} - 3xy^2\mathbf{k}$ y S es la superficie del cono $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ sobre el plano OXY y \mathbf{n} es la normal unitaria exterior a S .
29. Verificar el teorema de Stokes para el campo vectorial $\mathbf{F} = 3y\mathbf{i} - xz\mathbf{j} + yz^2\mathbf{k}$, donde S es la superficie del paraboloides $2z = x^2 + y^2$ limitado por $z = 2$.
30. Usando el teorema de Stokes en el plano, calcular $\oint_C \frac{dx - dy}{x + y + 2}$, tomada a lo largo del contorno del cuadrado que tiene sus vértices en los puntos $A(1, 0), B(0, 1), C(-1, 0)$ y $D(0, -1)$, recorrido en sentido

contrario de las manecillas del reloj.

31. Verificar el teorema de la divergencia para el sólido limitado por las superficies $z = 0$ y $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, donde el campo vectorial es $\mathbf{F} = xz^2\mathbf{i} + (x^2y - z^3)\mathbf{j} + (2xy + y^2z)\mathbf{k}$.
32. Usar el teorema de la divergencia para evaluar $\iint_S (x^2 + y + z) dS$, donde S es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
33. Evaluar $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ usando el teorema de la divergencia, donde $\mathbf{F} = (xy^2, x^2y, y)$ y S es la superficie del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, acotado por los planos $z = 1$, $z = -1$, incluyendo las porciones $x^2 + y^2 \leq 1$, cuando $z = \pm 1$.
34. Evaluar $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ en los siguientes casos:
- $\mathbf{F} = (xyz, xyz, xyz)$, S es la superficie del cubo $[0, 1]^3$.
 - $\mathbf{F} = ((x + y)z^2, (y + z)x^2, (z + x)y^2)$, S es la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
 - $\mathbf{F} = (1 - x^2, \frac{1}{2}y^2, z(2x - y))$, S es la superficie $x^2 + y^2 = 1$ y $0 < z < 1$.
 - $\mathbf{F} = (xy^2z(z - 1), x^2yz(z - 1), z^3 - z^2)$, S es la superficie $x^2 + y^2 = 1$ y $0 < z < 1$.

Soluciones de ejercicios de Integrales de superficie: Prof. Osvaldo Acuña, Prof. Jorge Poltronieri

1. Calcular el área de las siguientes superficies en las condiciones indicadas:

- a) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, z = 0, y = 0, x = 0.$
- b) $x^2 + y^2 = R^2, z \geq 0, z = mx, z = nx, m > n > 0.$
- c) $x^2 - y^2 = z^2, y + z = a, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$
- d) área de $x^2 + y^2 = ax$, acotada por $x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$
- e) área de $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, acotada por $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b.$
- f) área de $y^2 + z^2 = 2ax$, comprendida entre $y^2 = ax, x = a.$
- g) área de $x^2 + y^2 = 2ax$, comprendida entre $z = 0, x^2 + y^2 = z^2.$
- h) área de $x^2 - y^2 = z^2$, dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 2ax.$
- i) área de $y^2 = 4x$, acotada por $x^2 + y^2 + z^2 = 5x.$
- j) área de $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, acotada por $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2).$

Solucin

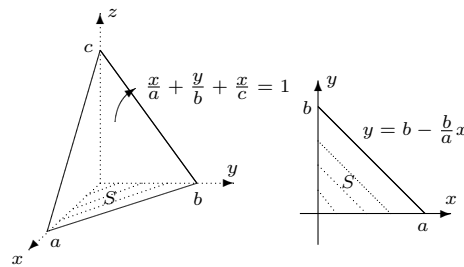
a) Se tiene $z = c \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right), z_x = -\frac{c}{a}, z_y = -\frac{c}{b},$

$$\text{entonces } \sigma = \iint_S \sqrt{\frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} + 1} dx dy =$$

$$\int_0^a \int_0^{b - \frac{b}{a}x} c \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} dy dx =$$

$$c \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \left(bx - \frac{b}{a} \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^a =$$

$$c \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \frac{1}{2} ab = \frac{1}{2} abc \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}.$$

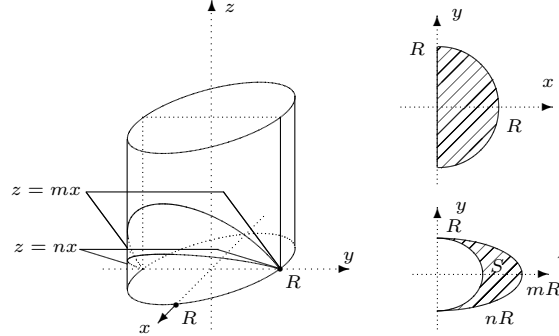


b) Notemos que la proyección sobre $z = 0$ no es posible, pues no tenemos una superficie con las condiciones requeridas. En efecto la proyección da un segmento de curva $y = \pm \sqrt{R^2 - x^2}, 0 \leq x \leq R.$ De esta forma debemos proyectar la superficie, por ejemplo sobre $x = 0$ i.e. $x = f(y, z) = \sqrt{R^2 - y^2}.$

La intersección de la superficie con cada plano es $y^2 + \frac{z^2}{m^2} = R^2, y^2 + \frac{z^2}{n^2} = R^2$ i.e. $z = \pm m\sqrt{R^2 - y^2}, z = \pm n\sqrt{R^2 - y^2}$.

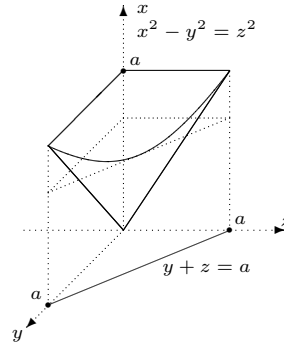
Así la región S de la integral, es la región acotada por las elipses. El área es el doble de la integral de superficie sobre S , es decir:

$$\begin{aligned} \sigma &= 2 \iint_S \sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2} dy dz = \\ &= 2 \iint_S \sqrt{1 + \frac{y^2}{R^2 - y^2} + 0} dy dz = \\ &= 2 \int_{-R}^R \int_{n\sqrt{R^2 - y^2}}^{m\sqrt{R^2 - y^2}} \frac{R}{\sqrt{R^2 - y^2}} dz dy = \\ &= 2 \int_{-R}^R (m - n)R dy = 4(m - n)R^2. \end{aligned}$$



c) Se tiene que $x = \sqrt{z^2 + y^2} \implies x_y = \frac{y}{\sqrt{z^2 + y^2}}, x_z = \frac{z}{\sqrt{z^2 + y^2}}$, por lo que:

$$\begin{aligned} \sigma &= \iint_S \sqrt{1 + \frac{z^2}{z^2 + y^2} + \frac{y^2}{z^2 + y^2}} dy dz = \sqrt{2} \iint_S dy dz = \\ &= \sqrt{2} \int_0^a \int_a^{a-z} dy dz = \sqrt{2} \int_0^a (a - z) dz = \sqrt{2} \left(az - \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^a = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} a^2. \end{aligned}$$



d) Es claro que $x^2 + y^2 = ax \implies \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$, círculo de radio $\frac{a}{2}$ y centro $(\frac{a}{2}, 0)$. La inter-

sección de las superficies se da cuando $z^2 + ax = a^2$, por lo que el área buscada es 4 veces la integral

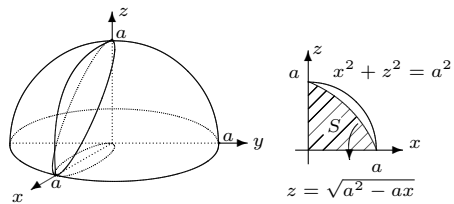
sobre la región limitada por $x \geq 0, z \geq 0, z = \sqrt{a^2 - ax}$ y la superficie $y = \sqrt{ax - x^2}$.

En el gráfico solamente aparece la mitad de la superficie

intersecada por la esfera. Observemos que proyectamos

sobre el plano $y = 0$ y no sobre el plano $z = 0$ como en

general se hace.



De esta manera, $y_x = \frac{a - 2x}{2\sqrt{ax - x^2}}, y_z = 0 \implies \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2} = \sqrt{1 + \frac{(a - 2x)^2}{4(ax - x^2)}} = \frac{a}{2\sqrt{ax - x^2}},$

por lo tanto $\sigma = 4 \iint_S \frac{a}{2\sqrt{ax-x^2}} dy dx = 2 \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-ax}} \frac{a dy dx}{\sqrt{x}\sqrt{a-x}} = 2 \int_0^a \frac{\sqrt{a}\sqrt{a-x} a}{\sqrt{x}\sqrt{a-x}} dx =$
 $2a^{\frac{3}{2}} \int_0^a \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 4a^{\frac{3}{2}} \sqrt{x} \Big|_0^a = 4a^2.$

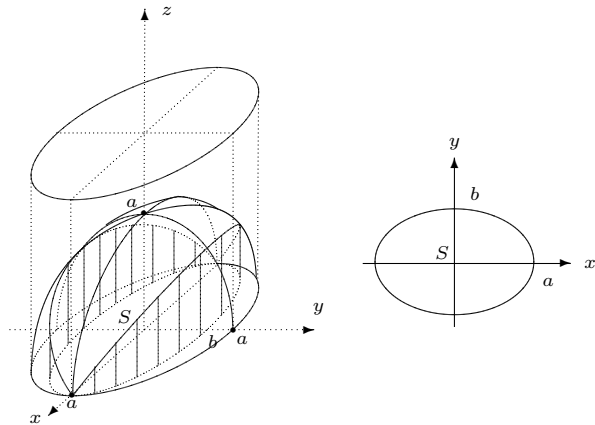
e) La superficie es la esfera $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, $z_x = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$, $z_y = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$,
 $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$, entonces se tiene:

$$\sigma = 2 \iint_S \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dy dx =$$

$$2 \int_{-a}^a \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dy dx =$$

$$2a \int_{-a}^a \arcsen \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}} \Big|_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dx =$$

$$4a \int_{-a}^a \arcsen \frac{b}{a} dx = 8a^2 \arcsen \frac{b}{a}.$$



f) La superficie es $z = \pm\sqrt{2ax - y^2}$ y la región está dada por $S : 0 \leq y^2 \leq ax, 0 \leq x \leq a$. Además,
 $z_x = \frac{a}{\sqrt{2ax - y^2}}$, $z_y = -\frac{y}{\sqrt{2ax - y^2}}$, $1 + z_x^2 + z_y^2 = \frac{2ax - y^2 + a^2 + y^2}{2ax - y^2} = \frac{2ax + a^2}{2ax - y^2}.$

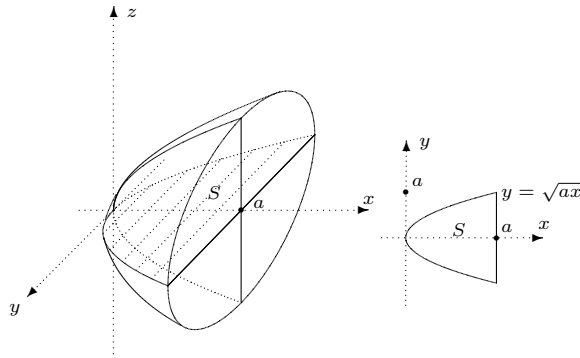
La superficie es dos veces el área de la superficie de $z = \sqrt{2ax - y^2}$, sobre la región S , es decir:

$$\sigma = 2 \iint_S \frac{\sqrt{a}\sqrt{2x+a}}{\sqrt{2ax-y^2}} dy dx =$$

$$2 \int_0^a \int_{-\sqrt{ax}}^{\sqrt{ax}} \frac{\sqrt{a}\sqrt{2x+a}}{\sqrt{2ax-y^2}} dy dx =$$

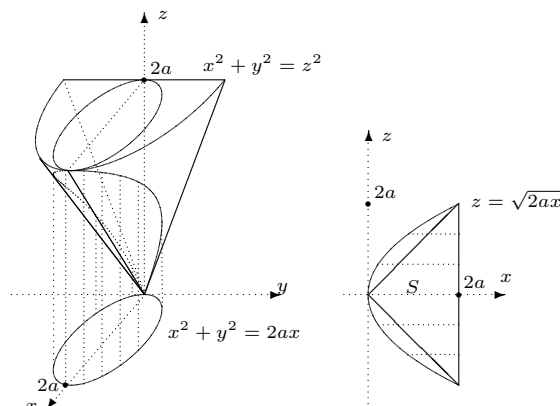
$$2\sqrt{a} \int_0^a \sqrt{2x+a} \arcsen \frac{y}{\sqrt{2ax}} \Big|_{-\sqrt{ax}}^{\sqrt{ax}} dx =$$

$$4\sqrt{a} \int_0^a \sqrt{2x+a} \arcsen \frac{1}{\sqrt{2}} dx =$$



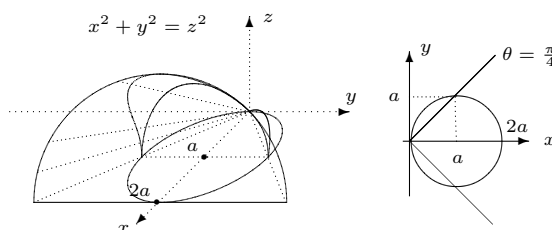
$$\frac{1}{2}\sqrt{a}\pi \int_0^a \sqrt{2x+a}(2 dx) = \frac{1}{2}\sqrt{a}\pi(2x+a)^{\frac{3}{2}} \frac{2}{3} \Big|_0^a = \frac{1}{3}\sqrt{a}\pi \left((3a)^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{1}{3}a^2\pi(3\sqrt{3}-1).$$

g) La intersección de las superficies es $2ax = z^2$. Proyectando sobre el plano $y = 0$, tenemos que la región de intersección es $0 \leq x \leq 2a$, $-\sqrt{2ax} \leq z \leq \sqrt{2ax}$, $y = \pm\sqrt{2ax - x^2}$, $y_x = \pm \frac{a-x}{\sqrt{2ax-x^2}}$, $y_z = 0 \implies 1 + y_x^2 + y_z^2 = 1 + \frac{a^2 - 2ax + x^2}{2ax - x^2} = \frac{a^2}{2ax - x^2}$. De esta manera tenemos que:



$$\sigma = \int_0^{2a} \int_{-\sqrt{2ax}}^{\sqrt{2ax}} \frac{a}{\sqrt{2ax-x^2}} dy dx = 2a \int_0^{2a} \frac{\sqrt{2a}\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{2a-x}} dx = 2\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}} 2 \left(-(2a-x)^{-\frac{1}{2}} \right) \Big|_0^{2a} = 8a^2.$$

h) La superficie es $z = \sqrt{x^2 - y^2}$,
 $z_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}$, $z_y = \frac{-y}{\sqrt{x^2 - y^2}}$,
 $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{x^2 - y^2}}$.



El área buscada está dada por:

$$A = \int_0^a \int_{-x}^x \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{x^2 - y^2}} dy dx + \int_a^{2a} \int_{-\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax-x^2}} \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{x^2 - y^2}} dy dx.$$

Sin embargo, el cálculo directo no nos permite determinar la integral fácilmente. De esta forma pasamos a coordenadas polares, lo que permitirá simplificar los cálculos.

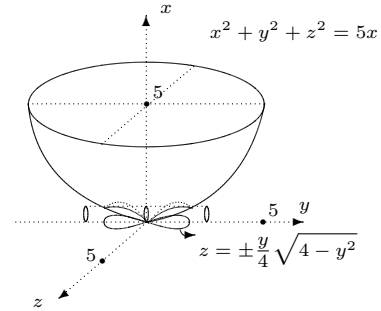
Si $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, en la región de integración tenemos que $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ y r varía de 0 al círculo de centro a y radio a , es decir $x^2 + y^2 = 2ax \implies r$ varía de $r = a$ hasta $r = 2a \cos \theta$ i.e.

$0 \leq r \leq 2a \cos \theta$. Así tenemos que:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2a \cos \theta} \frac{\sqrt{2}r \cos \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta} dr d\theta} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}}{2} r^2 \Big|_0^{2a \cos \theta} \frac{\cos \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta}} d\theta = 2\sqrt{2}a^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 \theta d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} = \\ &4\sqrt{2}a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 \theta (\cos \theta d\theta)}{\sqrt{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}} = 4\sqrt{2}a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1 - \sin^2 \theta) \cos \theta d\theta}{\sqrt{1 - 2\sin^2 \theta}} \underset{u=\sin \theta}{=} \\ &4\sqrt{2}a^2 \left[\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - 2u^2}} - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{u^2 du}{\sqrt{1 - 2u^2}} \right] \underset{y=\sqrt{2}u}{=} 4\sqrt{2}a^2 \left[\int_0^1 \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} dy}{\sqrt{1 - y^2}} - \int_0^1 \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}} y^2 dy}{\sqrt{1 - y^2}} \right] = \end{aligned}$$

$$4a^2 \left(\arcsen 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} y \sqrt{1-y^2} + \frac{1}{2} \arcsen y \right) \Big|_0^1 \right) = a^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \frac{\pi}{2} \right) = 3\pi a^2, \text{ ya que } \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsen \frac{x}{a} + C, \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{2} x \sqrt{a^2-x^2} + \frac{1}{2} a^2 \arcsen \frac{x}{a} + C.$$

i) Tenemos las superficies $y^2 = 4x$, $x^2 + y^2 + z^2 = 5x$. Al intersecarse las superficies tenemos una curva sobre la esfera, como se indica en el gráfico adjunto. Usando las ecuaciones de las superficies, esta curva se puede ver también como la intersección del cilindro $x^2 + z^2 = x$, o bien $(x - \frac{1}{2})^2 + z^2 = \frac{1}{4}$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 5x$.



Observemos que cuando $z = 0$ se tiene que las superficies se cortan en $x = 0$, $x = 1$.

Si $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y si $x = 1$, $y = \pm 2$, $z = 0$.

Dado que debemos calcular el área de la superficie $x = \frac{1}{4}y^2$ dentro de la esfera, necesitamos parametrizar la curva de intersección para así obtener la proyección $x = 0$ y tener la región de integración.

Parametrizando la curva tenemos $(x, y, z) = (x, \pm 2\sqrt{x}, \pm \sqrt{x-x^2})$, donde $0 \leq x \leq 1$.

Sobre el plano $x = 0$ se tiene $(0, \pm 2\sqrt{x}, \pm \sqrt{x-x^2})$ y como $y = \pm 2\sqrt{x} \implies \frac{y^2}{4} = x$, $\frac{y^4}{16} = x^2 \implies \pm \sqrt{x-x^2} = \pm \sqrt{\frac{y^2}{4} - \frac{y^4}{16}} = \pm \frac{1}{4} \sqrt{4y^2 - y^4} = \pm \frac{y}{4} \sqrt{4-y^2}$, es decir sobre el plano $x = 0$ se tiene que la proyección de la curva está dada por $(0, \pm y, \pm \frac{y}{4} \sqrt{4-y^2})$, $0 \leq y \leq 2$, ya que $0 \leq x \leq 1$.

Ahora, $x_y = \frac{1}{2}y$, $x_z = 0 \implies \sqrt{1 + x_y^2 + x_z^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4 + y^2}$, por lo que:

$$\sigma = 2 \int_0^2 \int_{-\frac{1}{4}y\sqrt{4-y^2}}^{\frac{1}{4}y\sqrt{4-y^2}} \frac{1}{2} \sqrt{4+y^2} dy = \frac{1}{2} \int_0^2 y \sqrt{4-y^2} \sqrt{4+y^2} dy \underset{u=\frac{y}{2}}{=} 8 \int_0^1 \sqrt{1-u^4} u du \underset{x=u^2}{=} 4 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = 4 \left(\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{1}{2} \arcsen x \right) \Big|_0^1 = \pi.$$

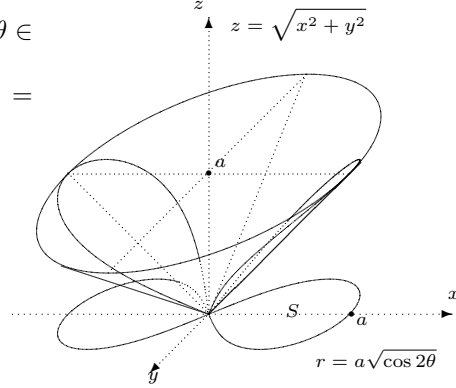
$$j) z = \sqrt{x^2 + y^2}, (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2).$$

La curva $z = 0, (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ es una lemniscata

dada por (al pasar a coordenadas polares) $r = a\sqrt{\cos 2\theta}, \theta \in$

$$\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]. \text{ Por otro lado, } z_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, z_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{2}, \text{ entonces:}$$

$$\begin{aligned} \sigma &= 2 \iint_S \sqrt{2} dy dx = 2\sqrt{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} r dr d\theta = \\ &= \sqrt{2} a^2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2\theta d\theta = a^2 \sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \cos u du = \sqrt{2} a^2. \end{aligned}$$



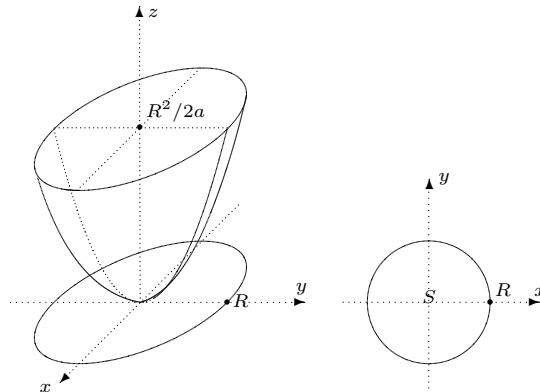
2. Demuestre que las áreas de las partes de las superficies de las parábolas $x^2 + y^2 = 2az$ y $x^2 - y^2 = 2az$ cortadas por el cilindro $x^2 + y^2 = R^2$ son iguales.

Solucin $x^2 + y^2 = 2az, x^2 - y^2 = 2az$, cilindro $x^2 + y^2 = R^2$.

Tomemos la superficie $x^2 + y^2 = 2az \implies z_x = \frac{x}{a}, z_y = \frac{y}{a} \implies \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 + x^2 + y^2}$ por lo que $\sigma_1 = \frac{1}{a} \iint_S \sqrt{a^2 + x^2 + y^2} dx dy$.

En la otra superficie, $x^2 - y^2 = 2az$, se tiene $z_x = \frac{x}{a}, z_y = -\frac{y}{a} \implies \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 + x^2 + y^2}$ y claramente también: $\sigma_2 = \frac{1}{a} \iint_S \sqrt{a^2 + x^2 + y^2} dx dy = \sigma_1$. No es necesario calcular la integral; sin embargo lo haremos.

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{a} \iint_S \sqrt{a^2 + x^2 + y^2} dx dy = \\ &= \frac{1}{2a} \int_0^{2\pi} \int_0^R \sqrt{a^2 + r^2} (2r dr) d\theta = \\ &= \frac{1}{2a} 2\pi \frac{2}{3} (a^2 + r^2)^{3/2} \Big|_0^R = \\ &= \frac{2\pi}{3a} ((a^2 + R^2)^{3/2} - a^3) = \\ &= \frac{2}{3} \pi a^2 \left(\left(1 + \frac{R^2}{a^2}\right)^{3/2} - 1 \right). \end{aligned}$$



3. Una esfera de radio a está cortada por dos cilindros circulares, cuyas bases tienen los diámetros iguales

al radio de aquella y que son tangentes entre sí, a lo largo de uno de los diámetros de la misma. Hallar el volumen y el área de la parte de superficie de la esfera que queda.

Solucin Las superficies son $x^2 + y^2 = a^2$,

$$x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} \text{ i.e. } x^2 + y^2 = ay.$$

En coordenadas polares la región de integración es $r = a \operatorname{sen} \theta$. $0 \leq \theta \leq \pi$.

El volumen de la esfera sobre S es:

$$V = 4 \iint_S \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy =$$

$$2 \int_0^\pi \int_a^{a \operatorname{sen} \theta} \sqrt{a^2 - r^2} 2r dr d\theta =$$

$$-2 \int_0^\pi \frac{2}{3} (a^2 - r^2)^{3/2} \Big|_0^{a \operatorname{sen} \theta} d\theta = -\frac{4}{3} \int_0^\pi (a^3 |\cos^3 \theta| - a^3) d\theta = a^3 \frac{4}{3} \int_0^\pi (1 - |\cos^3 \theta|) d\theta =$$

$$\frac{4}{3} a^3 \left(\pi - 2 \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta d\theta \right) = \frac{4}{3} a^3 \left(\pi - 2 \cdot \frac{2}{3} \right).$$
 El volumen buscado es el volumen de la esfera menos V ,

es decir:

$$\frac{4}{3} \pi a^3 - \left(\frac{4}{3} \pi a^3 - \frac{16}{9} a^3 \right) = \frac{16}{9} a^3.$$

Por otro lado, sea $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, $z_x = -\frac{x}{z}$, $z_y = -\frac{y}{z}$, $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \frac{a}{z}$, entonces el área de la esfera sobre S es:

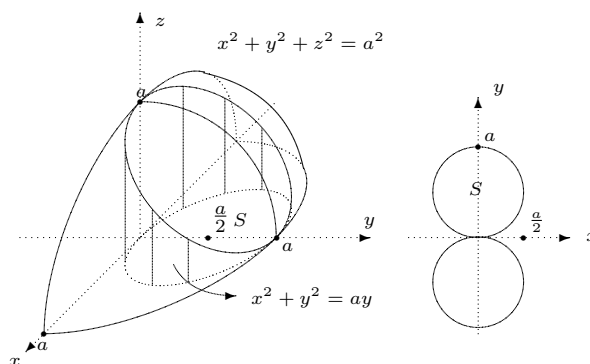
$$\sigma = 4 \iint_S \frac{a}{z} dx dy = 4a \iint_S \frac{dx dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = 2a \int_0^\pi \int_0^{a \operatorname{sen} \theta} \frac{2r dr d\theta}{\sqrt{a^2 - r^2}} =$$

$$-2a \int_0^\pi 2(a^2 - r^2)^{1/2} \Big|_0^{a \operatorname{sen} \theta} d\theta = -4a \int_0^\pi (a |\cos \theta| - a) d\theta = 4a^2 \int_0^\pi (1 - |\cos \theta|) d\theta =$$

$$4a^2 \left(\pi - 2 \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta \right) = 4\pi a^2 - 8a^2.$$

El área es el área de la esfera menos el área calculada, es decir $4\pi a^2 - (4\pi a^2 - 8a^2) = 8a^2$.

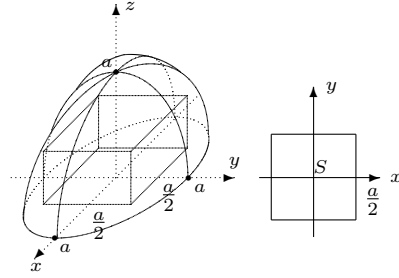
4. En una esfera de radio a se ha cortado un orificio con salida de base cuadrada, cuyo lado es igual también a a . El eje de este orificio coincide con el diámetro de la esfera. Hallar el área de la superficie de ésta cortada por el orificio.



Solucin Sea $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \implies \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \frac{a}{z}$ i.e.

$$\sigma = \iint_S \frac{a \, dx \, dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = 4 \int_0^{a/2} \int_0^{a/2} \frac{a \, dx \, dy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} =$$

$$4a \int_0^{a/2} \arcsen \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}} \Big|_0^{a/2} dx = 4a \int_0^{a/2} \arcsen \frac{a}{2\sqrt{a^2 - x^2}} dx.$$



Sea $u = \arcsen \frac{a}{2\sqrt{a^2 - x^2}}$, $dx = dv \implies du = \frac{\frac{ax}{2(a^2 - x^2)^{3/2}}}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{4(a^2 - x^2)}}} = \frac{ax \, dx}{\sqrt{3a^2 - 4x^2}(a^2 - x^2)}$,

$x = v$, entonces $\frac{\sigma}{4a} = x \arcsen \frac{a}{2\sqrt{a^2 - x^2}} \Big|_0^{a/2} + \int_0^{a/2} \frac{ax^2 \, dx}{(a^2 - x^2)\sqrt{3a^2 - 4a^2}} =$

$$\frac{a}{2} \arcsen \frac{1}{\sqrt{3}} + a \int_0^{a/2} \frac{(a^2 - x^2 + a^2) \, dx}{\sqrt{3a^2 - 4a^2}(a^2 - x^2)} =$$

$$\frac{a}{2} \arcsen \frac{1}{\sqrt{3}} + a^3 \int_0^{a/2} \frac{dx}{\sqrt{3a^2 - 4a^2}} + a^3 \int_0^{a/2} \frac{dx}{\sqrt{3a^2 - 4x^2}(a^2 - x^2)}.$$

Sea $x = a \frac{\sqrt{3}}{2} \sen t$, $dx = a \frac{\sqrt{3}}{2} \cos t \, dt \implies x = \frac{a}{2} = \frac{a}{2} \sqrt{3} \sen t \implies \sen t = \frac{1}{\sqrt{3}} \implies t =$

$\arcsen \frac{1}{\sqrt{3}}$. Así tenemos que:

$$a \int_0^{a/2} \frac{dx}{\sqrt{3a^2 - 4x^2}} = \frac{a}{2} \int_0^{\arcsen \frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{\frac{2dx}{\sqrt{3a}}}{\sqrt{1 - (\frac{2x}{\sqrt{3a}})^2}} = \frac{a}{2} \int_0^{\arcsen \frac{1}{\sqrt{3}}} dt = \frac{a}{2} \arcsen \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

También:

$$a^3 \int_0^{a/2} \frac{dx}{\sqrt{3a^2 - 4x^2}(a^2 - x^2)} = \frac{a^3}{2a^2} \int_0^{a/2} \frac{\frac{2dx}{\sqrt{3a}}}{\sqrt{1 - (\frac{2x}{\sqrt{3a}})^2} (1 - (\frac{x}{a})^2)} = \frac{a}{2} \int_0^{\arcsen \frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dt}{1 - \frac{3}{4} \sen^2 t} =$$

$$2a \int_0^{\arcsen \frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dt}{4 - 3 \sen^2 t} = a \arctan \left(\frac{\tan t}{2} \right) \Big|_0^{\arcsen \frac{1}{\sqrt{3}}} = a \arctan \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{2\sqrt{1 - \frac{1}{3}}} = a \arctan \frac{\sqrt{2}}{4}, \text{ pues}$$

$$\int \frac{dx}{p^2 - q^2 \sen^2 ax} = \frac{1}{ap\sqrt{p^2 - q^2}} \arctan \frac{\sqrt{p^2 - q^2} \tan ax}{p} + C.$$

Finalmente, $\frac{\sigma}{4a} = a \arcsen \frac{1}{\sqrt{3}} + a \arctan \frac{\sqrt{2}}{4} \implies \sigma = 4a^2 \left(\arcsen \frac{1}{\sqrt{3}} + \arctan \frac{\sqrt{2}}{4} \right).$

5. Calcular el área de la parte de superficie helicoidal $z = c \arctan \frac{x}{y}$, situada en el primer octante y que está comprendida entre los cilindros $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = b^2$.

Solucin Se tiene que $z = c \arctan \frac{x}{y} \implies z_x = c \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \frac{1}{y} = \frac{cy}{x^2 + y^2}$, $z_y = c \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{-x}{y^2} = -\frac{cx}{x^2 + y^2}$, $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{1 + \frac{c^2 x^2 + c^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2}} = \sqrt{\frac{c^2 + x^2 + y^2}{x^2 + y^2}}$.

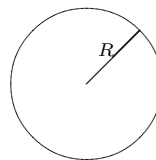
Así tenemos que $\sigma = \iint_S \sqrt{\frac{c^2 + x^2 + y^2}{x^2 + y^2}} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_a^b \sqrt{\frac{c^2 + r^2}{r^2}} r dr d\theta = \frac{\pi}{2} \int_a^b \sqrt{c^2 + r^2} dr = \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{2} r \sqrt{c^2 + r^2} + \frac{1}{2} c^2 \ln(r + \sqrt{r^2 + c^2}) \right]_a^b = \frac{\pi}{4} \left(b \sqrt{b^2 + c^2} - c \sqrt{a^2 + c^2} + c^2 \ln \frac{b + \sqrt{b^2 + c^2}}{a + \sqrt{a^2 + c^2}} \right)$.

6. Hallar la masa de una lámina circular de radio R , si su densidad es proporcional a la distancia desde el punto al centro e igual a δ en el borde de la lámina.

Solucin Se tiene que $\rho = kr$, donde r es la distancia del punto

(x, y) al origen i.e. $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y como $\rho(R) = \delta \implies k =$

$\frac{\delta}{R} \implies \rho = \frac{\delta}{R} r$. Finalmente tenemos:



$$M = \iint_S \rho dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\delta}{R} r^2 dr d\theta = 2\pi \frac{\delta}{R} \frac{R^3}{3} = \frac{2}{3} \pi \delta R^2.$$

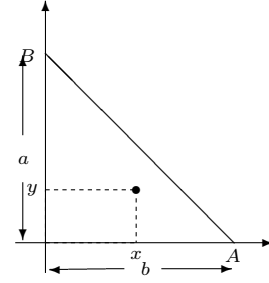
7. Una lámina tiene la forma de un triángulo rectángulo con catetos $\overline{OB} = a$, $\overline{OA} = b$; su densidad en cualquier punto es igual a la distancia desde esta al cateto \overline{OA} . Determinar los momentos estáticos de la lámina con respecto a los catetos \overline{OA} y \overline{OB} .

Solucin En este caso tenemos que $\rho(x, y) = y$. El segmento \overline{AB} está dado por la recta $y = a - \frac{a}{b}x$.

Así tenemos:

$$M_x = \iint_S y^2 dx dy = \int_0^b \int_0^{a - \frac{a}{b}x} y^2 dy dx = \int_0^b \frac{1}{3} y^3 \Big|_0^{a - \frac{a}{b}x} dx = \frac{1}{3} \int_0^b \left(a - \frac{a}{b}x \right)^3 dx = -\frac{a}{12b} \left(a - \frac{a}{b}x \right)^4 \Big|_0^b = \frac{1}{12} a^4 \frac{b}{a} = \frac{1}{12} a^3 b.$$

$$\begin{aligned}
 M_y &= \iint_S xy \, dx \, dy = \int_0^b \int_0^{a-\frac{a}{b}x} y \, dy \, x \, dx = \\
 &= \int_0^b \frac{1}{2} \left(a - \frac{a}{b}x\right)^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^b \left(a^2x - 2\frac{a^2}{b^2}x^2 + \frac{a^2}{b^2}x^3\right) dx = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}a^2b^2 - \frac{2}{3}a^2b^2 + \frac{1}{4}a^2b^2\right) = \frac{1}{24}a^2b^2.
 \end{aligned}$$

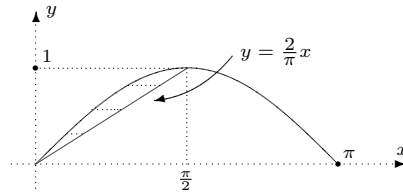


8. Calcular las coordenadas del centro de gravedad de la figura limitada por la curva $y = \sin x$, la recta

\overline{OA} que pasa por el origen y por el vértice $A = (\frac{\pi}{2}, 1)$ de la senoide.

Solucin Se tiene que $M = \iint_S 1 \, dx \, dy =$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{2}{\pi}x}^{\sin x} dy \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x - \frac{2}{\pi}x\right) dx = \\
 &= \left(-\cos x - \frac{2}{\pi} \frac{x^2}{2}\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 - \frac{\pi^2}{4\pi} + 1 = \frac{4-\pi}{4}.
 \end{aligned}$$



$$M_x = \iint_S y \, dx \, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y \, dy \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{2}{\pi}x}^{\sin x} y \, dy \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2 x - \frac{4}{\pi^2}x^2\right) dx =$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3\pi^2} \frac{\pi^3}{8}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{24} \implies \bar{y} = \frac{\pi}{6(4-\pi)}.$$

$$M_y = \iint_S x \, dx \, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{2}{\pi}x}^{\sin x} x \, dy \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x \sin x - \frac{2}{\pi}x^2\right) dx = \left(\sin x - x \cos x - \frac{2}{3\pi}x^3\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$\left(1 - \frac{2}{3\pi} \frac{\pi^3}{8}\right) = \frac{12-\pi^2}{12} \implies \bar{x} = \frac{12-\pi^2}{12} \frac{3}{4-\pi} = \frac{12-\pi^2}{3(4-\pi)}.$$

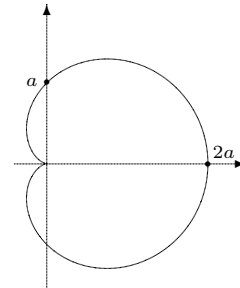
9. Determinar las coordenadas del centro de gravedad de la figura limitada por la cardioide $r = a(1 + \cos \theta)$.

Solucin Es claro que por razones de simetría $\bar{y} = 0$.

$$M = \iint_S dx \, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{a(1+\cos \theta)} r \, dr \, d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2(1 + \cos \theta)^2 d\theta =$$

$$\frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 + 2\cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta = \frac{a^2}{2} \left(12\pi + 2\sin \theta \Big|_0^{2\pi} + 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta\right) =$$

$$\frac{a^2}{2} \left(2\pi + 4\frac{4}{\pi}\right) = \frac{3}{2}\pi a^2.$$



$$M_x = \iint_S y \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{a(1+\cos\theta)} r \sin\theta \, r \, dr \, d\theta = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} a^2 (1+\cos\theta)^3 \sin\theta \, d\theta =$$

$$-\frac{a^2}{2} \frac{(1+\cos\theta)^4}{4} \Big|_0^{2\pi} = 0 \text{ i.e. } \bar{y} = 0.$$

$$M_y = \iint_S x \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{a(1+\cos\theta)} r^2 \cos\theta \, dr \, d\theta = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} a^3 (1+\cos\theta)^3 \cos\theta \, d\theta =$$

$$\frac{a^3}{3} \int_0^{2\pi} (1+3\cos\theta+3\cos^2\theta+\cos^3\theta) \cos\theta \, d\theta = \frac{1}{3} a^3 \int_0^{2\pi} (\cos\theta+3\cos^2\theta+3\cos^3\theta+\cos^4\theta) \, d\theta =$$

$$\frac{4}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\cos^2\theta+\cos^4\theta) \, d\theta = \frac{4}{3} a^3 \left(3\frac{\pi}{2} \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right) = \frac{5}{4} \pi a^3 \implies \bar{x} = \frac{5}{6} a.$$

10. Determinar las coordenadas del centro de gravedad de un sector circular de radio a , cuyo ángulo central es igual a 2α .

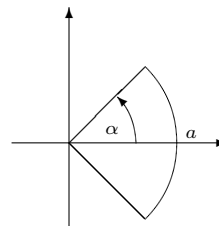
Solucin En este caso también $\bar{y} = 0$ por la simetría de la figura, como

verificaremos. Así:

$$M = \iint_S dx \, dy = \int_{-\alpha}^{\alpha} \int_0^a r \, dr \, d\theta = 2\alpha \frac{1}{2} a^2 = \alpha a^2.$$

$$M_x = \iint_S y \, dx \, dy = \int_{-\alpha}^{\alpha} \int_0^a r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta = -\frac{1}{3} r^3 \Big|_0^a \cos\theta \Big|_{-\alpha}^{\alpha} = 0 \implies$$

$$\bar{y} = 0.$$



$$M_y = \iint_S x \, dx \, dy = \int_{-\alpha}^{\alpha} \int_0^a r^2 \cos\theta \, dr \, d\theta = \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\theta \, d\theta \int_0^a r^2 \, dr = \frac{2}{3} a^3 \sin\alpha \implies \bar{x} = \frac{2a \sin\alpha}{3\alpha}.$$

11. Calcular las coordenadas del centro de gravedad de la figura limitada por las parábolas $y^2 = 4x + 4$, $y^2 = -2x + 4$.

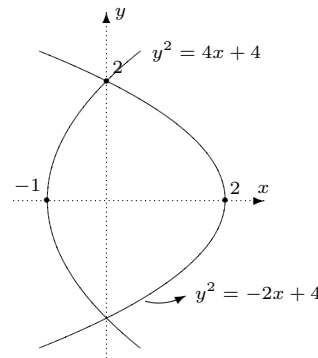
Solucin De antemano que observa que $\bar{y} = 0$. Además:

$$M = \iint_S dx \, dy = \int_{-2}^2 \int_{\frac{y^2-y}{4}}^{\frac{4-y^2}{2}} dx \, dy = \int_{-2}^2 \left(3 - \frac{3}{4}y^2\right) dy =$$

$$\left(3y - \frac{1}{4}y^3\right) \Big|_{-2}^2 = 8.$$

$$M_x = \iint_S y \, dy \, dx = \int_{-2}^2 y \left(3 - \frac{3}{4}y^2\right) dy = \left(\frac{3y^2}{2} - \frac{3}{16}y^4\right) \Big|_{-2}^2 =$$

$$0 \text{ i.e. } \bar{y} = 0.$$



$$M_y = \iint_S x \, dy \, dx = \int_{-2}^2 \int_{\frac{y^2-4}{4}}^{\frac{4-y^2}{2}} x \, dx \, dy = \int_{-2}^2 \frac{1}{2} x^2 \Big|_{\frac{y^2-4}{4}}^{\frac{4-y^2}{2}} dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 \left(\frac{(4-y^2)^2}{4} - \frac{(y^2-4)^2}{16} \right) dy =$$

$$\frac{3}{32} \int_{-2}^2 (4-y^2)^2 dy = \frac{3}{32} \left(16y - \frac{8}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5 \right) \Big|_{-2}^2 = \frac{3}{16} \left(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5} \right) = \frac{16}{15} \implies \bar{x} = \frac{2}{15}.$$

12. Calcular el momento de inercia de un anillo circular de diámetro d y D ($d < D$):

a) con respecto a su propio centro

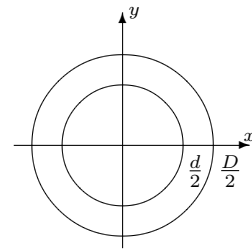
b) con respecto al diámetro.

Solucin $I_0 = \iint_S (x^2 + y^2) dy dx = \int_0^{2\pi} \int_{d/2}^{D/2} r^3 dr d\theta =$

$$\frac{2\pi}{4} r^4 \Big|_{d/2}^{D/2} = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4).$$

Por simetría tenemos que $I_x = \iint_S x^2 dx dy = \iint_S y^2 dx dy = I_y \implies$

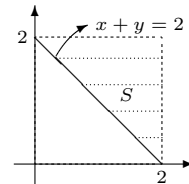
$$I_x = I_y = \frac{1}{2} I_0 = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4).$$



13. Calcular el momento de inercia del triángulo limitado por las rectas $x + y = 2$, $x = 2$, $y = 2$, con respecto al eje x .

Solucin En este caso tenemos:

$$I_x = I_y = \iint_S x^2 dx dy = \int_0^2 x^2 \int_{2-x}^2 dy dx = \int_0^2 x^3 dx = \frac{1}{4} x^4 \Big|_0^2 = 4.$$

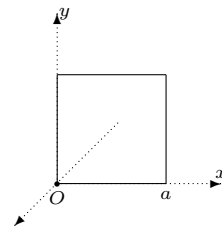


14. Calcular el momento de inercia de un cuadrado de lado a con respecto al eje que, pasando por uno de sus vértices, es perpendicular al plano del cuadrado.

Solucin Se entiende que es el momento de inercia respecto al vértice O i.e.

$$I_O = \iint_S (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^a \int_0^a (x^2 + y^2) dx dy =$$

$$\int_0^a \int_0^a x^2 dx dy + \int_0^a \int_0^a y^2 dx dy = 2a \frac{x^3}{3} \Big|_0^a = \frac{2}{3} a^4.$$

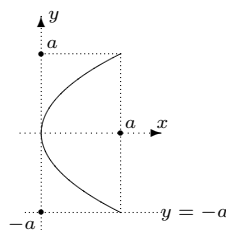


15. Calcular el momento de inercia de la región interceptada por la parábola $y^2 = ax$, por la recta $x = a$, respecto a la recta $y = -a$.

Solucin El problema es equivalente a trasladar al eje x a la recta

$y = -a$. Así tenemos:

$$I_x = \int_0^a \int_{a-\sqrt{ax}}^{a+\sqrt{ax}} y^2 dy dx = \int_{-a}^a \int_{\frac{y^2}{a}}^a y^2 dy dx = \int_{-a}^a y^2 \left(a - \frac{y^2}{a} \right) dy = \left(ay^3 - \frac{y^5}{5a} \right) \Big|_{-a}^a = 2 \left(a^4 - \frac{a^4}{5} \right) = \frac{8}{5} a^4.$$



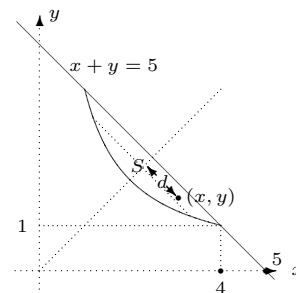
16. Calcular el momento de inercia de la superficie limitada por la hipérbola $xy = 4$ y la recta $x + y = 5$, con respecto a la recta $x = y$.

Solucin Las curvas se intersecan cuando $xy = 4$, $x + y = 5 \implies y(5 - y) = 4 \implies y^2 - 5y + 4 = 0 \implies y = 1, 4$ i.e. en $(1, 4)$, $(4, 1)$.

La distancia desde el punto (x, y) a la recta $x = y$ es igual a $d = \frac{x - y}{\sqrt{2}}$,

entonces:

$$I_\ell = \iint_S d^2 dx dy = \frac{1}{2} \int_1^4 \int_{\frac{4}{x}}^{5-x} (x^2 - 2xy + y^2) dy dx = -\frac{1}{2} \int_1^4 \frac{7x^6 - 60x^5 + 162x^4 - 125x^3 - 48x^2 + 64}{6x^3} dx = 16 \ln 2 - \frac{75}{8}.$$



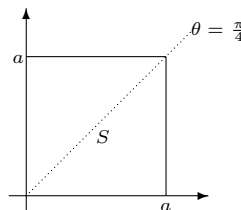
17. En una lámina cuadrada de lado a , la densidad es proporcional a la distancia hasta uno de sus vértices.

Calcular el momento de inercia de dicha lámina respecto a los lados que pasan por el vértice.

Solucin Sin pérdida de generalidad, colocaremos el vértice en el origen.

Así $\rho = k\sqrt{x^2 + y^2}$, entonces:

$$I_x = I_y = k \iint_S x^2 \rho(x, y) dx dy = k \int_0^a \int_0^a x^2 \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = k \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{a \sec \theta} r^4 \sin^2 \theta dr d\theta + k \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a \csc \theta} r^4 \sin^2 \theta dr d\theta =$$



$$\frac{k}{5} \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^5 \frac{\sin^2 \theta}{\cos^5 \theta} d\theta + \frac{k}{5} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} a^5 \frac{\sin^2 \theta}{\sin^5 \theta} d\theta = \frac{k}{5} a^5 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 \theta \sec^3 \theta d\theta + \frac{k}{5} a^5 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{cosec}^3 \theta d\theta =$$

$$\frac{k}{5} a^5 \left[\left(\frac{1}{8} \ln \frac{\cos \theta}{\sin \theta + 1} - \frac{\sin \theta}{8 \cos^2 \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos^4 \theta} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \left(-\frac{1}{2} \operatorname{cosec} \theta \cotg \theta + \frac{1}{2} \log \tan \frac{\theta}{2} \right) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \right] =$$

$$\frac{k}{5} a^5 \left[\frac{1}{8} \ln \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + 1} - \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{8 \frac{1}{2}} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{4}} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2(\frac{\sqrt{2}}{2})^2} + \frac{1}{2} \log \tan \frac{\pi}{8} \right] =$$

$$\frac{k}{40} a^5 (3\sqrt{2} - \ln(\sqrt{2} + 1) + 4 \ln(\sqrt{2} + 1) + 4\sqrt{2}) = \frac{k}{40} a^5 (7\sqrt{2} + 3 \ln(\sqrt{2} + 1)).$$

Recuerde que $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$.

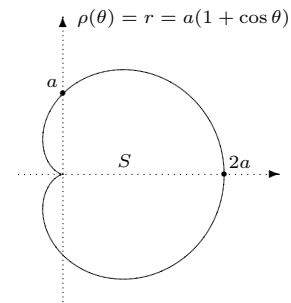
18. Determinar el momento de inercia de la cardioide $r = a(1 + \cos \theta)$ con respecto al polo.

Solucin Se tiene que $I_x = \iint_S y^2 dx dy =$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{a(1+\cos \theta)} r^3 \cos^2 \theta dr d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} a^4 (1 + \cos \theta)^4 d\theta =$$

$$\frac{1}{4} a^4 \int_0^{2\pi} (1 + 4\cos \theta + 6 \cos^2 \theta + 4\cos^3 \theta + \cos^4 \theta) d\theta =$$

$$a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 6 \cos^2 \theta + \cos^4 \theta) d\theta = a^4 \left(\frac{\pi}{2} + 6 \frac{\pi}{4} + \frac{1 \cdot 3 \pi}{2 \cdot 4} \right) = a^4 \pi \frac{35}{16}.$$

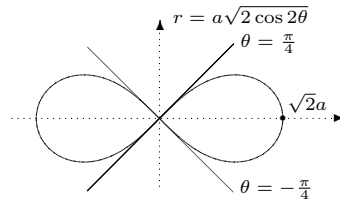


19. Calcular el momento de inercia de la superficie de la lemniscata $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ con respecto al eje, perpendicular al plano de la misma que pasa por el polo.

Solucin Se busca la inercia respecto al polo, por lo que:

$$I_0 = \iint_S (x^2 + y^2) dx dy = 2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{2a^2 \cos 2\theta}} r^3 dr d\theta =$$

$$2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{4a^4}{4} \cos^2 2\theta d\theta = a^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \psi d\psi = 2a^4 \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \pi a^4.$$



20. Calcular el momento de inercia de una lámina homogénea limitada por un arco de la cicloide $x = a(\theta - \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$ y el eje x , con respecto al eje x y al eje y .

Solucin Se tiene que:

$$I_x = \iint_S y^2 dx dy = \int_0^{2\pi a} \int_0^{f(x)} y^2 dy dx =$$

$$\int_0^{2\pi} a(1 - \cos \theta) \frac{1}{3} a^3 (1 - \cos \theta)^3 d\theta = \frac{1}{3} a^4 \int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta)^4 d\theta =$$

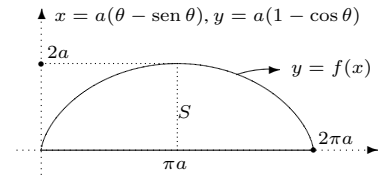
$$\frac{1}{3} a^4 \int_0^{2\pi} (1 - 4\cos \theta + 6\cos^2 \theta - 4\cos^3 \theta + \cos^4 \theta) d\theta =$$

$$\frac{4}{3} a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 6\cos^2 \theta + \cos^4 \theta) d\theta = \frac{4}{3} a^4 \frac{35}{16} \pi = \frac{35}{12} \pi a^4.$$

$$I_y = \iint_S x^2 dx dy = \int_0^{2\pi a} \int_0^{y=f(x)} x^2 dy dx = \int_0^{2\pi a} x^2 y(x) dx = \int_0^{2\pi} a^2 (\theta - \operatorname{sen} \theta)^2 a^2 (1 - \cos \theta)^2 d\theta =$$

$$a^4 \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta - 2\theta \operatorname{sen} \theta \cos^2 \theta + \theta^2 \cos^2 \theta - 2\operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta + 4\theta \operatorname{sen} \theta \cos \theta - 2\theta^2 \cos \theta + \operatorname{sen}^2 \theta - 2\theta \operatorname{sen} \theta + \theta^2) d\theta =$$

$$a^4 \left[\left(-\frac{1}{4} \operatorname{sen} \theta \cos^3 \theta + \frac{1}{8} \operatorname{sen} \theta \cos \theta + \frac{1}{8} \theta \right) - \left(\frac{2}{3} \theta \cos^3 \theta + \frac{2}{9} \operatorname{sen} \theta \cos^2 \theta + \frac{4}{9} \operatorname{sen} \theta \right) + \frac{1}{4} (\theta^2 - 1) \operatorname{sen} \theta \cos \theta - \frac{1}{2} \theta \operatorname{sen}^2 \theta + \frac{1}{12} \theta (2\theta^2 + 3) - \frac{2}{3} \operatorname{sen}^3 \theta + \operatorname{sen} \theta \cos \theta + 2\theta \operatorname{sen}^2 \theta - \theta - (4\theta \cos \theta + 2(\theta^2 - 2) \operatorname{sen} \theta) + \frac{1}{2} (\theta - \operatorname{sen} \theta \cos \theta) - (\operatorname{sen} \theta - 2\theta \cos \theta) + \frac{1}{3} \theta^3 \right] \Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi(48\pi^2 - 35)}{12} a^4.$$



21. Calcular las integrales de superficie $\iint_S f dS$, donde S es la superficie definida por $x^2 + y^2 = z^2$,

$$0 \leq z \leq 1, f(x, y, z) = x^2 y^2 z.$$

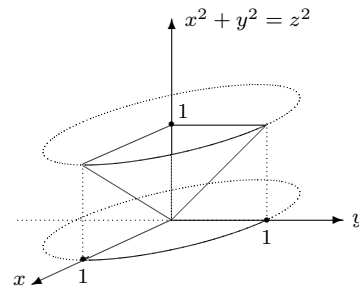
Solucin Parametrizando S por $x = v \cos u$, $y =$

$v \operatorname{sen} u$, $z = v$, en $D = [-\pi, \pi] \times [0, 1]$, tenemos

$R: D \rightarrow \mathbb{R}^3$, $R(u, v) = (x, y, z)$, por lo que $\frac{\partial R}{\partial u} =$

$(-v \operatorname{sen} u, v \cos u, 0)$, $\frac{\partial R}{\partial v} = (\cos u, \operatorname{sen} u, 1)$, $\frac{\partial R}{\partial v} \times$

$\frac{\partial R}{\partial u} = (v \cos u, v \operatorname{sen} u, -v)$, $\left\| \frac{\partial R}{\partial v} \times \frac{\partial R}{\partial u} \right\| = \sqrt{2}v$.



Observemos que $\left\| \frac{\partial R}{\partial v} \times \frac{\partial R}{\partial u} \right\| = \left\| \frac{\partial R}{\partial v} \right\| \left\| \frac{\partial R}{\partial u} \right\|$, pues son ortogonales i.e. $\frac{\partial R}{\partial u} \perp \frac{\partial R}{\partial v}$. De esta forma:

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D v^6 \sqrt{2} \cos^2 u \operatorname{sen}^2 u du dv = \sqrt{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 u \operatorname{sen}^2 u du \int_0^1 v^6 dv = \frac{\pi \sqrt{2}}{28}.$$

22. Calcular la integral de superficie $\iint_S f dS$ en los siguientes casos:

a) $f(x, y, z) = xy e^{xz}$, S en el cuarto de cilindro definida por $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

b) $f(x, y, z) = \ln z$, S es la parte esférica definida por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $\frac{1}{2} \leq z \leq 1$.

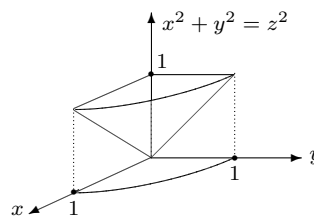
c) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$ y S es el helicoides $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $z = \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq 1$.

d) $f(x, y, z) = z^2$ y S es la esfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Solucin

a) Pasando a coordenadas cilíndricas ($dS = 1d\theta dz$). En efecto, la parametrización de la superficie es $R: D \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$R(\theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$, $r = 1$, donde $D = [-\pi, \pi] \times \mathbb{R}$,



$\frac{\partial R}{\partial \theta} = (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0)$, $\frac{\partial R}{\partial z} = (0, 0, 1)$ y $\left\| \frac{\partial R}{\partial \theta} \times \frac{\partial R}{\partial z} \right\| = r$ y finalmente $dS = d\theta dz$.

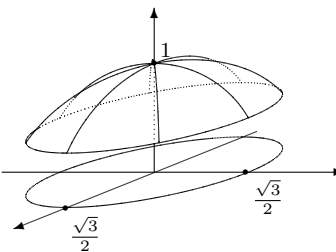
Así tenemos que $\iint_S f dS = \int_1^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \cos \theta \sin \theta e^{\cos \theta} dz d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta (e^{\cos \theta} - 1) d\theta = -e^{\cos \theta} + \cos \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = e - 2$.

b) Usando coordenadas esféricas ($dS = r^2 \cos \phi d\theta d\phi$). En efecto,

$R: D \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(\theta, \phi) \mapsto (x, y, z)$, donde $x = r \cos \phi \cos \theta$,

$y = r \cos \phi \sin \theta$, $z = r \sin \phi$, con $D = [-\pi, \pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, por

lo que $\frac{\partial R}{\partial \theta} = (-r \cos \phi \sin \theta, r \cos \phi \cos \theta, 0)$,



$\frac{\partial R}{\partial \phi} = (-r \sin \phi \cos \theta, -r \sin \phi \sin \theta, r \cos \phi) \implies$

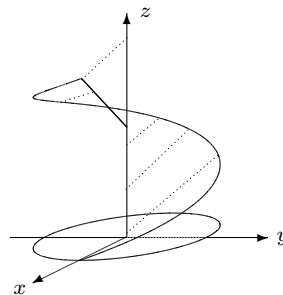
$\left\| \frac{\partial R}{\partial \theta} \times \frac{\partial R}{\partial \phi} \right\|^2 = (r^2 \cos^2 \phi \cos \theta)^2 + (r^2 \cos \phi \sin \theta)^2 + (r^2 \sin \phi \cos \phi)^2 = r^4 \sin^2 \phi$, o sea $dS =$

$r^2 \cos \phi d\theta d\phi$, con $r = 1$.

Finalmente, $\iint_S f dS = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin \phi) \cos \phi d\phi = 2\pi \int_{\frac{1}{2}}^1 \ln t dt = \pi(\ln 2 - 1)$.

c) En este caso $R(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, \theta)$, $\frac{\partial R}{\partial r} = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$, $\frac{\partial R}{\partial \theta} = (-r \sin \theta, r \cos \theta, 1)$, $\frac{\partial R}{\partial r} \times \frac{\partial R}{\partial \theta} = (\sin \theta, -\cos \theta, -r)$, $\left\| \frac{\partial R}{\partial r} \times \frac{\partial R}{\partial \theta} \right\| = \sqrt{r^2 + 1}$ y tenemos

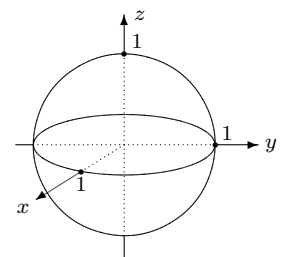
$$\iint_S f dS = \iint_D f(r \cos \theta, r \sin \theta, \theta) \left\| \frac{\partial R}{\partial r} \times \frac{\partial R}{\partial \theta} \right\| dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{r^2 + 1} \sqrt{r^2 + 1} dr d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{4}{3} d\theta = \frac{8}{3}\pi.$$



d) Usando la parametrización de la esfera del ejercicio b)

tenemos $\left\| \frac{\partial R}{\partial \theta} \times \frac{\partial R}{\partial \phi} \right\| = |\sin \phi|$, o sea: $\iint_S z^2 dS =$

$$\begin{aligned} \iint_D \cos^2 \phi \left\| \frac{\partial R}{\partial \theta} \times \frac{\partial R}{\partial \phi} \right\| d\phi d\theta &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos^2 \phi |\sin \phi| d\phi d\theta = \\ \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos^2 \phi \sin \phi d\phi d\theta &= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} -\cos^3 \phi \Big|_0^\pi d\theta = \\ \frac{2}{3} \int_0^{2\pi} d\theta &= \frac{4}{3}\pi. \end{aligned}$$



23. Calcular el área de la porción de superficie helicoidal definida por $x = at \cos \theta$, $y = at \sin \theta$, $z = ht$,

$$(\theta, t) \in [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 1], a > 0, h > 0.$$

Solucin Dado que $A(S) = \iint_S dx dy =$

$$\int_D \left\| \frac{\partial R}{\partial \theta} \times \frac{\partial R}{\partial t} \right\| d\theta dt, \text{ donde } R : D \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ es}$$

una representación paramétrica de S , tenemos $\frac{\partial R}{\partial \theta} =$

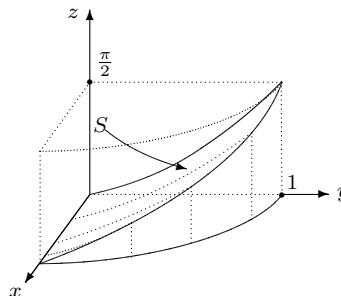
$$(-at \sin \theta, at \cos \theta, h), \frac{\partial R}{\partial t} = (a \cos \theta, a \sin \theta, 0)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial R}{\partial \theta} \times \frac{\partial R}{\partial t} = (-ah \sin \theta, ah \cos \theta, -a^2 t), \left\| \frac{\partial R}{\partial \theta} \times \frac{\partial R}{\partial t} \right\| = a\sqrt{h^2 + a^2 t^2}.$$

Se observa que $\frac{\partial R}{\partial \theta} \perp \frac{\partial R}{\partial t}$. Así tenemos que:

$$A(S) = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \sqrt{h^2 + a^2 t^2} dt d\theta = \frac{1}{2} \pi a h \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{at}{h}\right)^2} dt =$$

$$\frac{1}{4} \pi \left(h^2 \ln \left(\frac{a}{h} + \sqrt{1 + \frac{a^2}{h^2}} \right) + a\sqrt{a^2 + h^2} \right).$$



24. Calcular el área de la porción S del paraboloide de ecuación $z = xy$, que se proyecta sobre el plano xy

dentro del disco D definido por $x^2 + y^2 \leq 1$.

Solucin Dado que $z = \phi(x, y)$ sobre D , entonces S tiene

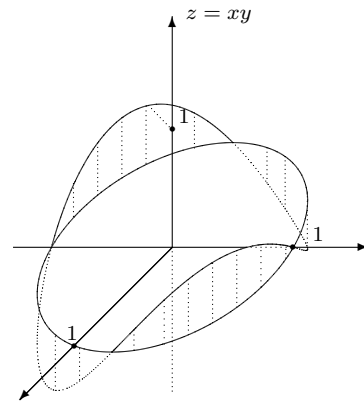
por representación paramétrica $R: D \rightarrow \mathbb{R}^3$, $R(x, y) =$

$$(x, y, \phi(x, y)) : \frac{\partial R}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{pmatrix},$$

$$\left\| \frac{\partial R}{\partial x} \times \frac{\partial R}{\partial y} \right\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2}, \text{ por lo que: } A(S) =$$

$$\iint_D \sqrt{1 + y^2 + x^2} dx dy = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 \sqrt{1 + \rho^2} \rho d\rho d\theta =$$

$$\frac{2\pi}{3} \left[(1 + \rho^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2\pi}{3} (2\sqrt{2} - 1).$$



25. Calcular el área S de las siguientes superficies:

a) $x^2 + y^2 = r^2, x > 0, \alpha \leq z \leq \beta x, 0 < \alpha < \beta, r > 0.$

b) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z > 0, x^2 + y^2 - ax \leq 0, a > 0,$ (ventana de Viviani).

c) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, 0 \leq z \leq \frac{xy}{c}, a, b, c > 0.$

d) $x^2 + y^2 + z^2 = r^2, x + y \leq r, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, r > 0.$

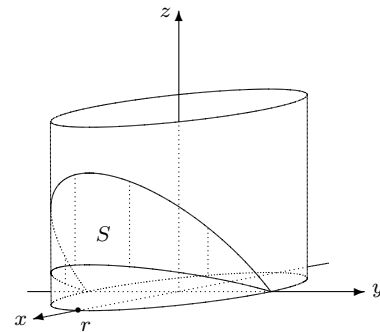
e) $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax = 0, z \geq 0, x^2 + y^2 \leq z^2 \tan^2 \alpha, a > 0, \alpha \in]0, \frac{\pi}{2} [.$

Solucin

a) Pasando a coordenadas cilíndricas tenemos:

$$A(S) = \iint_S dS = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\alpha r \cos \theta}^{\beta r \cos \theta} r dz \right) d\theta =$$

$$(\beta - \alpha)r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta = 2(\beta - \alpha)r^2.$$



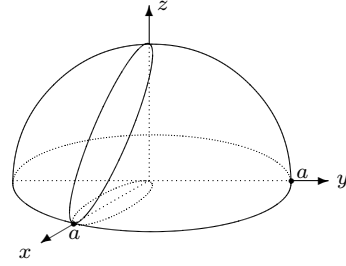
b) Pasando a coordenadas esféricas con $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$,

$0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$, tenemos $x^2 + y^2 - ax \leq 0 \iff \theta \leq \phi$, pues $a^2 \cos^2 \phi \leq$

$a^2 \cos \phi \cos \theta \iff \cos \phi \leq \cos \theta$. Finalmente,

$$A(S) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos \phi d\phi \right) d\theta = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin \theta) d\theta =$$

$$2a^2 [\theta + \cos \theta] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = (\pi - 2)a^2.$$



c) Usando la representación paramétrica $R : D \rightarrow \mathbb{R}^3$

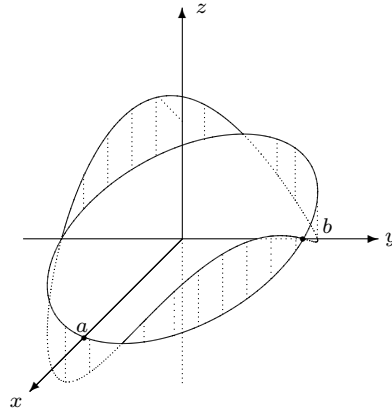
definida por:

$$f(u, v) = (a \cos u, b \sin u, \frac{ab}{c} v \sin u \cos u), \text{ donde}$$

$D = [-\pi, \pi] \times [0, 1]$, tenemos:

$$\frac{\partial R}{\partial u} = (-a \sin u, b \cos u, \frac{ab}{c} v \cos 2u),$$

$$\frac{\partial R}{\partial v} = (0, 0, \frac{ab}{c} \cos u \sin u),$$



$\left\| \frac{\partial R}{\partial v} \times \frac{\partial R}{\partial u} \right\| = \frac{ab}{c} |\cos u \sin u| \sqrt{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u}$, por lo que:

$$S = \iint_D \frac{ab}{c} |\cos u \sin u| \sqrt{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u} du dv = 4 \frac{ab}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u \cos u \sqrt{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u} du =$$

$$\frac{2ab}{c} \int_0^1 \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2)t} dt, \text{ usando la sustitución } t = \sin^2 u.$$

Si $a = b$, $S = \frac{2a^3}{c}$.

Si $a \neq b$, tomemos $y = \sqrt{b^2 + (a^2 - b^2)t}$, entonces

$$S = \frac{4ab}{c(a^2 - b^2)} \int_b^a y^2 dy = \frac{4ab(a^2 + b^2 + ab)}{3c(a + b)}.$$

d) Pasando a coordenadas esféricas, tenemos $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ y para $x + y \leq r \iff$

$(\cos \theta + \sin \theta) \cos \phi \leq 1$, por lo que:

$$A(S) = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\arccos \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \phi d\phi \right) d\theta = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \left(\arccos \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta} \right) d\theta =$$

$$\begin{aligned}
r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{(\cos \theta + \operatorname{sen} \theta)^2}} d\theta &= r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta}}{\cos \theta + \operatorname{sen} \theta} d\theta \stackrel{\alpha = \theta - \frac{\pi}{4}}{=} r^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\cos 2\alpha}}{\sqrt{2} \cos \alpha} d\alpha = \\
\sqrt{2} r^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\cos 2\alpha}}{\cos \alpha} d\alpha &\stackrel{u = \operatorname{sen} \alpha}{=} \sqrt{2} r^2 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\sqrt{1 - 2u^2}}{1 - u^2} du \stackrel{v = \sqrt{2}u}{=} r^2 \int_0^1 \frac{2\sqrt{1 - v^2}}{2 - v^2} dv \stackrel{\beta = \arcsen v}{=} \\
2r^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 \beta}{2 - \operatorname{sen}^2 \beta} d\beta &\stackrel{u = \tan \beta}{=} 2r^2 \int_0^{\infty} \frac{dt}{(2 + t^2)(1 + t^2)} = 2r^2 \int_0^{\infty} \left(-\frac{1}{2 + t^2} + \frac{1}{1 + t^2} \right) dt = \\
r^2 \left(-\sqrt{2} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}} + 2 \arctan t \right) \Big|_0^{+\infty} &= \frac{1}{2} \pi (\sqrt{2} - 1) r^2.
\end{aligned}$$

e) Usando coordenadas esféricas $x = \rho \cos \theta \cos \phi$, $y = \rho \operatorname{sen} \theta \cos \phi$, $z = \rho \operatorname{sen} \phi$, con $-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$, pues $x \geq 0$ y

$0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$, pues $z \geq 0$. Además, $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax = 0 \iff \rho = 2a \cos \theta \cos \phi$, $x^2 + y^2 \leq z^2 \tan^2 \alpha \iff$

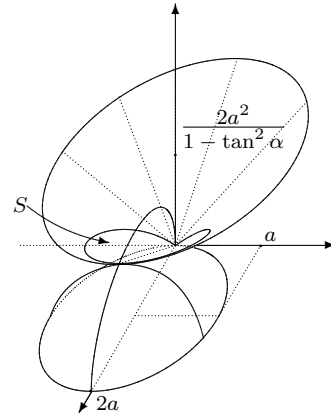
$$\tan^2 \phi \geq \frac{1}{\tan^2 \alpha} \iff \frac{\pi}{2} - \alpha \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}.$$

En efecto, $\tan^2 \phi \geq \cotan^2 \alpha \iff \tan \phi \geq \pm \cotan \alpha \iff$

$\tan \phi \geq \tan(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ o $\tan \phi \geq \tan(\frac{\pi}{2} + \alpha) \iff \phi \geq \frac{\pi}{2} - \alpha$

o $\phi \geq \frac{\pi}{2} + \alpha$. Este último resultado no es viable pues

$$0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \text{ y } 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}.$$



De esta manera S tiene la representación paramétrica $R: D \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida por $R(\theta, \phi) = 2a \cos \theta \cos \phi (\cos \theta \cos \phi, \operatorname{sen} \theta \cos \phi, \operatorname{sen} \phi)$

$$D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \times \left[\frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{\pi}{2} \right].$$

Si consideramos $\mathbf{u} = (\cos \theta, \operatorname{sen} \theta, 0)$, $\mathbf{v} = (-\operatorname{sen} \theta, \cos \theta, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$, escribimos $R(\theta, \phi) =$

$$2a \cos \theta \cos \phi (\cos \theta \mathbf{u} + \operatorname{sen} \phi \mathbf{k}) \text{ y así tenemos } \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta} = 2a \cos \theta (-\operatorname{sen} \theta \cos \phi \mathbf{u} + \cos \theta \cos \phi \mathbf{v} - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \mathbf{k}),$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \phi} = 2a \cos \theta (-\operatorname{sen} 2\phi \mathbf{u} + \cos 2\phi \mathbf{k}), \text{ de donde } \left\| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \phi} \right\| = 4a^2 \cos \theta \cos^2 \phi \text{ y el área es:}$$

$$A(S) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\frac{\pi}{2} - \alpha}^{\frac{\pi}{2}} 4a^2 \cos \theta \cos^2 \phi d\phi \right) d\theta = 4a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \int_{\frac{\pi}{2} - \alpha}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \phi d\phi = 4a^2 (\alpha - \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha).$$

26. Determinar el centro de la placa homogénea S de densidad 1, donde S es la superficie definida por

$$x = ue^v \cos v, y = ue^v \operatorname{sen} v, z = e^v, (u, v) \in [0, 1] \times [0, 1].$$

Solucin Se tiene que $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u} = (e^v \cos v, e^v \operatorname{sen} v, 0)$, $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v} = (ue^v (\cos v - \operatorname{sen} v), ue^v (\operatorname{sen} v + \cos v), e^v)$,

$$\frac{\partial R}{\partial u} \times \frac{\partial R}{\partial v} = (e^{2v} \sen v, -e^{2v} \cos v, ue^{2v}), \left\| \frac{\partial R}{\partial u} \times \frac{\partial R}{\partial v} \right\| = e^{2v} \sqrt{1+u^2}.$$

$$\text{La masa de la placa es } \mu = \int_S \left\| \frac{\partial R}{\partial u} \times \frac{\partial R}{\partial v} \right\| du dv = \int_0^1 \sqrt{1+u^2} du \int_0^1 e^{2v} dv =$$

$$\frac{1}{4}(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))(e^2 - 1).$$

El centro de gravedad es:

$$\mathbf{g} = \frac{1}{\mu} \int_S \left\| \frac{\partial R}{\partial u} \times \frac{\partial R}{\partial v} \right\| (x, y, z) du dv = \frac{1}{\mu} \int_0^1 \int_0^1 e^{2v} \sqrt{1+u^2} (ue^v \cos v, ue^v \sen v, e^v) du dv =$$

$$\frac{1}{\mu} \left(\int_0^1 e^{3v} \cos v dv \right) \left(\int_0^1 u \sqrt{1+u^2} du \right) \mathbf{i} + \frac{1}{\mu} \left(\int_0^1 e^{3v} \sen v dv \right) \left(\int_0^1 u \sqrt{1+u^2} du \right) \mathbf{j} +$$

$$\frac{1}{\mu} \left(\int_0^1 e^{3v} dv \right) \left(\int_0^1 \sqrt{1+u^2} du \right) \mathbf{k} =$$

$$\frac{1}{30\mu} ((3 \cos 1 + \sen 1)e^3 - 3)(2\sqrt{2} - 1) \mathbf{i} + \frac{1}{30\mu} ((3 \sen 1 - \cos 1)e^3 + 1)(2\sqrt{2} - 1) \mathbf{j} +$$

$$\frac{1}{12\mu} (e^3 - 1)(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})) \mathbf{k}.$$

27. Si S es la superficie del paraboloide $z = 2 - (x^2 + y^2)$ sobre el plano OXY , calcule:

a) Las coordenadas del centroide de esta superficie.

b) El momento de inercia de esta superficie con respecto al eje OZ , siendo la densidad de la superficie

1.

Solucin

a) Usando las coordenadas cilíndricas tenemos

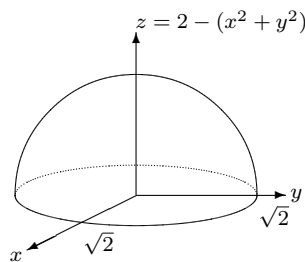
$$R(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sen \theta, 2 - r^2), \quad \frac{\partial R}{\partial r} \times \frac{\partial R}{\partial \theta} =$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos \theta & \sen \theta & -2r \\ -r \sen \theta & r \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = (2r^2 \cos \theta, 2r^2 \sen \theta, r),$$

$$dS = \left\| \frac{\partial R}{\partial r} \times \frac{\partial R}{\partial \theta} \right\| dr d\theta = r\sqrt{4r^2 + 1} dr d\theta,$$

$$M = \iint_S dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} r\sqrt{4r^2 + 1} dr d\theta = \pi \int_0^{\sqrt{2}} 2r\sqrt{4r^2 + 1} dr = \pi \left[\frac{1}{6} (4r^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\sqrt{2}} =$$

$$\frac{1}{6} \pi ((8 + 1)^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}) = \frac{14}{3} \pi.$$



$$\dot{x} = \frac{1}{M} \iint_S r \cos \theta r \sqrt{4r^2 + 1} dr d\theta = \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r^2 \sqrt{4r^2 + 1} dr = 0,$$

$$\dot{y} = \frac{1}{M} \iint_S r \sin \theta r \sqrt{4r^2 + 1} dr d\theta = \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r^2 \sqrt{4r^2 + 1} dr = 0,$$

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \frac{1}{M} \iint_S (2 - r^2) r \sqrt{4r^2 + 1} dr d\theta = \frac{2\pi}{M} \left[\int_0^{\sqrt{2}} 2r \sqrt{4r^2 + 1} - \int_0^{\sqrt{2}} r^3 \sqrt{4r^2 + 1} dr \right] \\ &= \frac{2\pi}{M} \left[\frac{1}{6} (4r^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\sqrt{2}} - \int_1^9 \frac{u-1}{4} \cdot u^{\frac{1}{2}} \frac{du}{8}, \text{ donde } u = 4r^2 + 1 \implies du = 8r dr \implies \frac{du}{8} = r dr; \\ r^2 &= \frac{u-1}{4}. \text{ Así, } \dot{z} = \frac{2\pi}{M} \left[\frac{1}{6} [27 - 1] \right] - \frac{1}{32} \int_1^9 (u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}}) du = \frac{2\pi}{M} \left[\frac{28}{6} - \frac{1}{32} \left[2 \frac{u^{\frac{5}{2}}}{5} - 2 \frac{u^{\frac{3}{2}}}{3} \right]_1^9 \right] = \\ &= \frac{2\pi}{M} \left[\frac{14}{3} - \frac{1}{16} \left[\frac{3^6 - 5 \cdot 3^3 - 3 + 5}{15} \right] \right] = \frac{2\pi}{14\pi} \cdot 3 \left[\frac{14}{3} - \frac{1}{16} \left[\frac{3^3(27-5) + 2}{15} \right] \right] = \frac{131}{140}. \end{aligned}$$

b) Como $\delta^2 = x^2 + y^2 = r^2$, tenemos $I_z = \iint_S \delta^2 dS = \iint_S r^2 dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} r^2 r \sqrt{4r^2 + 1} dr d\theta =$

$$2\pi \int_0^{\sqrt{2}} r^3 \sqrt{4r^2 + 1} dr = 2\pi \int_1^9 \frac{u-1}{4} u^{\frac{1}{2}} \frac{du}{8} = \frac{\pi}{16} \int_1^9 (u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}}) du = \frac{\pi}{16} \left[2 \frac{u^{\frac{5}{2}}}{5} - 2 \frac{u^{\frac{3}{2}}}{3} \right]_1^9 = \frac{149}{30} \pi.$$

28. Obtenga el área de la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $a > 0$, contenida dentro del cono

$$z \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Solucin $z \operatorname{tg} \alpha = x \implies \operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{z},$

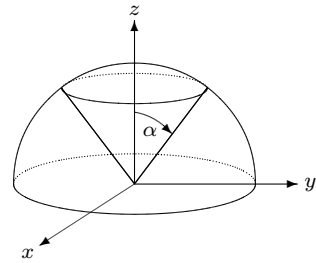
$$R(\theta, \varphi) = (a \operatorname{sen} \varphi \cos \theta, a \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta, a \cos \varphi),$$

$$\frac{\partial R}{\partial \theta} \times \frac{\partial R}{\partial \varphi} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta & a \operatorname{sen} \varphi \cos \theta & 0 \\ a \cos \varphi \cos \theta & a \cos \varphi \operatorname{sen} \theta & -a \operatorname{sen} \varphi \end{vmatrix}$$

$$= a^2 \operatorname{sen} \varphi (\operatorname{sen} \varphi \cos \theta, \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta, \cos \varphi)$$

$$\implies dS = a^2 \operatorname{sen} \varphi d\varphi d\theta \text{ y el área es:}$$

$$\iint_S dS = \int_0^{2\pi} \int_0^\alpha a^2 \operatorname{sen} \varphi d\varphi d\theta = 2\pi a^2 \int_0^\alpha \operatorname{sen} \varphi d\varphi = 2\pi a^2 (1 - \cos \alpha).$$



29. Aplicando únicamente el teorema de Stokes evalúe $\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$, donde $\mathbf{F} = (x - z)\mathbf{i} + (x^3 + yz)\mathbf{j} -$

$3xy^2\mathbf{k}$ y S es la superficie del cono $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ sobre el plano OXY y \mathbf{n} es la normal unitaria

exterior a S .

Solucin La frontera de este cono es un círculo $x^2 +$

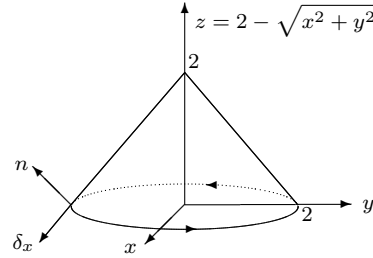
$y^2 = 4$, recorrido en el sentido positivo. Entonces

$\iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Parametrizando C se tiene que $\mathbf{r}(\theta) = (2 \cos \theta, 2 \text{sen } \theta, 0)$, por lo que $\mathbf{F} =$

$$(2 \cos \theta, 8 \cos^3 \theta, -24 \cos \theta \text{sen}^2 \theta),$$

$d\mathbf{r} = (-2 \text{sen } \theta, 2 \cos \theta, 0)d\theta$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} (2 \cos \theta, 8 \cos^3 \theta, -24 \cos \theta \text{sen}^2 \theta) \cdot (-2 \text{sen } \theta, 2 \cos \theta, 0) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (-4 \text{sen } \theta \cos \theta + 16 \cos^4 \theta) d\theta = -2 \int_0^{2\pi} \text{sen } 2\theta d\theta + 16 \int_0^{2\pi} \cos^4 \theta d\theta \\ &= 16 \int_0^{2\pi} \frac{(1 + \cos 2\theta)^2}{4} d\theta = 4 \int_0^{2\pi} \left(1 + \cos 2\theta + \frac{1 + \cos 4\theta}{2}\right) d\theta = 8\pi + 4\pi = 12\pi. \end{aligned}$$



30. Verificar el teorema de Stokes para el campo vectorial $\mathbf{F} = 3y\mathbf{i} - xz\mathbf{j} + yz^2\mathbf{k}$, donde S es la superficie del paraboloides $2z = x^2 + y^2$ limitado por $z = 2$.

Solucin $\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3y & -xz & yz^2 \end{vmatrix} = (z^2 + x, 0, -z - 3),$

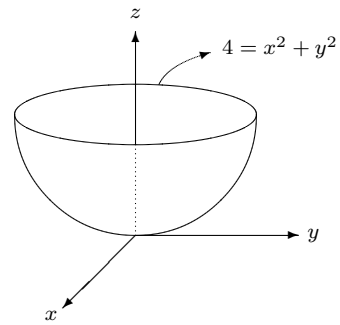
$$\mathbf{n} = \frac{(-2x, -2y, 2)}{2\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} = \frac{(-x, -y, 1)}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}},$$

$$R(r, \theta) = (r \cos \theta, r \text{sen } \theta, \frac{r^2}{2}) \implies \mathbf{n} = \frac{(-r \cos \theta, -r \text{sen } \theta, 1)}{\sqrt{r^2 + 1}},$$

$$\text{rot } \mathbf{F} = \left(\frac{r^4}{4} + r \cos \theta, 0, -\frac{r^2}{2} - 3\right),$$

$$\text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = r \cos \theta \left(\frac{r^4}{4} + r \cos \theta\right) + \frac{r^2}{2} + 3 = \frac{\left(\frac{r^5}{4} \cos \theta + r^2 \cos^2 \theta + \frac{r^2}{2} + 3\right)}{\sqrt{r^2 + 1}},$$

$$\frac{\partial R}{\partial r} \times \frac{\partial R}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos \theta & \text{sen } \theta & r \\ -r \text{sen } \theta & r \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = (-r^2 \cos \theta, -r^2 \text{sen } \theta, r) \implies dS = r\sqrt{r^2 + 1} dr d\theta y$$



$$\begin{aligned} \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS &= - \int_0^2 \int_0^{2\pi} \cos \theta \frac{r^6}{4} \frac{\sqrt{r^2+1}}{\sqrt{r^2+1}} dr d\theta - \int_0^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta r^3 \frac{\sqrt{r^2+1}}{\sqrt{r^2+1}} dr d\theta \\ &- \int_0^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^2}{2} + 3\right) r \frac{\sqrt{r^2+1}}{\sqrt{r^2+1}} dr d\theta = - \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta \cdot \int_0^2 r^3 dr - 2\pi \int_0^2 \left(\frac{r^2}{2} + 3\right) r dr \\ &= -\pi \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2 - 2\pi \int_0^2 \left(\frac{r^3}{2} + 3r\right) dr = -4\pi - 2\pi \left[\frac{r^4}{8} + 3\frac{r^2}{2}\right]_0^2 = -20\pi. \end{aligned}$$

Por otro lado, $\mathbf{r}(\theta) = (2 \cos \theta, 2 \sin \theta, 2) \implies \mathbf{r}'(\theta) = (-2 \sin \theta, 2 \cos \theta, 0)$,

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= (6 \sin \theta, -4 \cos \theta, 8 \sin \theta), \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} (6 \sin \theta, -4 \cos \theta, 8 \sin \theta) \cdot (-2 \sin \theta, 2 \cos \theta, 0) d\theta = \\ &\int_0^{2\pi} (-12 \sin^2 \theta - 8 \cos^2 \theta) d\theta = - \int_0^{2\pi} (4 \sin^2 \theta + 8(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)) d\theta = \\ &- \int_0^{2\pi} 4 \sin^2 \theta d\theta - 8 \int_0^{2\pi} d\theta = -4 \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta - 16\pi = -20\pi. \end{aligned}$$

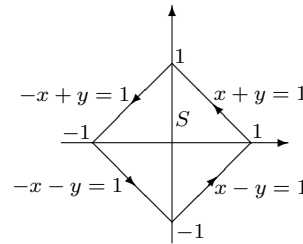
Luego $\iint_S (\operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

31. Usando el teorema de Stokes en el plano, calcular $\oint_C \frac{dx - dy}{x + y + 2}$, tomada a lo largo del contorno del cuadrado que tiene sus vértices en los puntos $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $C(-1, 0)$ y $D(0, -1)$, recorrido en sentido contrario de las manecillas del reloj.

$$\int_C \frac{dx - dy}{x + y + 2} = \int_C \left(\frac{1}{x + y + 2} \right) dx + \left(-\frac{1}{x + y + 2} \right) dy.$$

$\mathbf{F} = \left(\frac{1}{x + y + 2}, -\frac{1}{x + y + 2}, 0 \right)$, $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, 0)$, entonces

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 1) \implies dS = dx dy.$$



$$\text{Por otro lado, } \operatorname{rot} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{x + y + 2} & \frac{-1}{x + y + 2} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$(0, 0, \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{x + y + 2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{x + y + 2} \right)) = (0, 0, \frac{2}{(x + y + 2)^2}) \implies$$

$$\int_C \frac{dx - dy}{x + y + 2} = \iint_S (\operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS = \iint_S \left(0, 0, \frac{2}{(x + y + 2)^2} \right) \cdot (0, 0, 1) dy dx$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \iint_S \frac{2}{(x+y+2)^2} dy dx = 2 \left(\int_{-1}^0 \int_{-x-1}^{1+x} \frac{1}{(x+y+2)^2} dy dx + \int_0^1 \int_{x-1}^{1-x} \frac{1}{(x+y+2)^2} dy dx \right) \\
&= 2 \left[\int_{-1}^0 \left[-\frac{1}{(x+y+2)^2} \right]_{y=-x-1}^{y=x+1} dx + \int_0^1 \left[\frac{1}{(x+y+2)^2} \right]_{y=x-1}^{y=-x+1} dx \right] \\
&= 2 \left[\int_{-1}^0 \left(-\frac{1}{2x+3} + \frac{1}{1} \right) dx + \int_0^1 \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2x+1} \right) dx \right] = 2 \left(1 - \frac{1}{2} \log 3 + \frac{1}{2} \log 3 - \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

32. Verificar el teorema de la divergencia para el sólido limitado por las superficies $z = 0$ y $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$,

donde el campo vectorial es $\mathbf{F} = xz^2\mathbf{i} + (x^2y - z^3)\mathbf{j} + (2xy + y^2z)\mathbf{k}$.

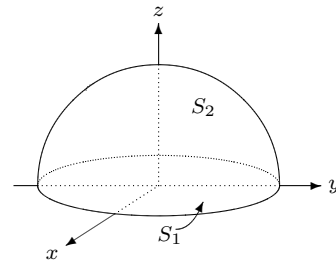
Solucin $\operatorname{div}\mathbf{F} = z^2 + x^2 + y^2 = x^2 + y^2 + z^2 \implies \iiint_V \operatorname{div}\mathbf{F} dV$

$$= \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \rho^2 \rho^2 \operatorname{sen} \varphi d\rho d\varphi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\rho^5}{5} \operatorname{sen} \varphi \right]_0^a d\varphi d\theta = \frac{a^5}{5} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} \varphi d\varphi d\theta =$$

$$\frac{a^5}{5} \int_0^{2\pi} \left[-\cos \varphi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{2}{5} \pi a^5.$$

Por otro lado, $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot (-\mathbf{k}) dS$, donde S_1 y S_2 se aprecian en la gráfica adjunta.



$$\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = - \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} 2xy dx dy = - \int_0^{2\pi} \int_0^a 2(r \cos \theta)(r \operatorname{sen} \theta) r dr d\theta =$$

$$-2 \int_0^{2\pi} \int_0^a r^3 \operatorname{sen} \theta \cos \theta dr d\theta = -2 \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4} \operatorname{sen} \theta \cos \theta \right]_0^a d\theta = -\frac{2a^4}{4} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \theta \cos \theta d\theta = -\frac{a^4}{2} \cdot 0 =$$

0.

Parametrizando S_1 , $R(\theta, \varphi) = (a \operatorname{sen} \varphi \cos \theta, a \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta, a \cos \varphi)$ y usando el ejercicio 28 tenemos

que $dS = a^2 \operatorname{sen} \varphi d\varphi d\theta$ y $\mathbf{n} = (\operatorname{sen} \varphi \cos \theta, \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta, \cos \varphi)$, por lo que:

$$\mathbf{F} = (a^3 \operatorname{sen} \varphi \cos^2 \varphi \cos \theta, a^3 \operatorname{sen}^3 \varphi \operatorname{sen} \theta \cos^2 \theta - a^3 \cos^3 \varphi, 2a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \operatorname{sen} \theta \cos \theta + a^3 \operatorname{sen}^2 \varphi \cos \varphi \operatorname{sen}^2 \theta),$$

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = a^3 \operatorname{sen}^2 \varphi \cos^2 \varphi \cos^2 \theta + a^3 \operatorname{sen}^4 \varphi \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta - a^3 \operatorname{sen} \varphi \cos^3 \varphi \operatorname{sen} \theta + a^3 \operatorname{sen}^2 \varphi \cos^2 \varphi \operatorname{sen}^2 \theta +$$

$$2a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \cos \varphi \operatorname{sen} \theta \cos \theta$$

$$= a^3 \operatorname{sen}^2 \varphi \cos^2 \varphi + a^3 \operatorname{sen}^4 \varphi \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta - a^3 \operatorname{sen} \varphi \cos^3 \varphi \operatorname{sen} \theta + 2a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \operatorname{sen} \theta \cos \theta \implies$$

$$\begin{aligned}
\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} [a^5 \sin^3 \varphi \cos^2 \varphi + a^5 \sin^5 \varphi \sin^2 \theta \cos^2 \theta - a^5 \sin^2 \varphi \cos^3 \varphi \sin \theta + \\
&2a^4 \sin^3 \varphi \sin \theta \cos \theta] d\theta d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} a^5 \sin^3 \varphi \cos^2 \varphi d\theta d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} a^5 \sin^5 \varphi \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta d\varphi \\
&= 2\pi a^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 \varphi) \cos^2 \varphi d\varphi + a^5 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \varphi d\varphi \right) \left(\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta \right) \\
&= 2\pi a^5 \int_1^0 (1 - u^2) u^2 (-du) + a^5 \left(\int_1^0 (1 - u^2)^2 (-du) \right) \left(\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 2\theta d\theta}{4} \right) \\
&= 2\pi a^5 \int_0^1 [u^2 - u^4] du + a^5 \int_0^1 (1 - 2u^2 + u^4) du \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 4\theta d\theta}{8} \\
&= 2\pi a^5 \left[\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} \right]_0^1 + a^5 \left[u - \frac{2u^3}{3} + \frac{u^5}{5} \right]_0^1 \cdot \frac{2\pi}{8} = 2\pi a^5 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \frac{1}{4} \pi a^5 \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) = \frac{2}{5} \pi a^5.
\end{aligned}$$

33. Usar el teorema de la divergencia para evaluar la integral $\iint_S (x^2 + y + z) dS$, donde S es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Solucin Para utilizar el teorema de Gauss, debemos determinar un campo vectorial $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$

sobre la bola sólida $V: x^2 + y^2 + z^2 = 1$, tal que $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = x^2 + y + z$, donde \mathbf{n} es la normal a la superficie

S .

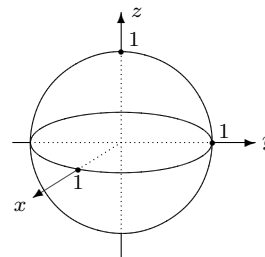
En todo punto de S , la normal $\mathbf{n} = (x, y, z)$, por lo que $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} =$

$$F_1 x + F_2 y + F_3 z \implies F_1 x = x^2, F_2 y = y, F_3 z = z \implies \mathbf{F} =$$

$(x, 1, 1)$. Calculando la divergencia de \mathbf{F} , $\text{div} \mathbf{F} = 1 + 0 + 0 = 1$ y

de esta forma el teorema de Gauss permite escribir:

$$\iint_S (x^2 + y + z) dS = \iiint_V dV = \text{vol}(V) = \frac{4}{3} \pi.$$



34. Evaluar $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ usando el teorema de la divergencia, donde $\mathbf{F} = (xy^2, x^2y, y)$ y S es la superficie del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, acotado por los planos $z = 1$, $z = -1$, incluyendo las porciones $x^2 + y^2 \leq 1$, cuando $z = \pm 1$.

Solucin Es claro que S es la frontera de la región Ω dada por $x^2 + y^2 \leq 1$, $-1 \leq z \leq 1$ y $\text{div} \mathbf{F} =$

$x^2 + y^2 + 0$, por lo que:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz = \int_{-1}^1 \left(\iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) dx dy \right) dz = 2 \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 dr d\theta = \pi.$$

35. Evaluar $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ en los siguientes casos:

a) $\mathbf{F} = (xyz, xyz, xyz)$, S es la superficie del cubo $[0, 1]^3$.

b) $\mathbf{F} = ((x + y)z^2, (y + z)x^2, (z + x)y^2)$, S es la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

c) $\mathbf{F} = (1 - x^2, \frac{1}{2}y^2, z(2x - y))$, S es la superficie $x^2 + y^2 = 1$ y $0 < z < 1$.

d) $\mathbf{F} = (xy^2z(z - 1), x^2yz(z - 1), z^3 - z^2)$, S es la superficie $x^2 + y^2 = 1$ y $0 < z < 1$.

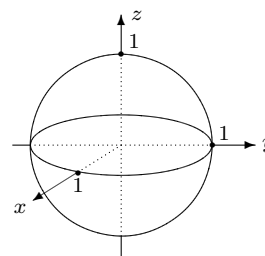
Solucin

a) Denotando V el cubo $[0, 1]^3$, el teorema de Gauss permite escribir:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} dx dy dz = \iiint_{[0,1]^3} (yz + xz + xy) dx dy dz = 3 \left(\int_0^1 x dx \right)^2 = \frac{3}{4}.$$

b) Denotando V la bola de centro $\mathbf{0}$ y radio 1, el teorema de Gauss permite escribir:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} dx dy dz = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^4 \cos \phi d\phi d\theta dr = \frac{4}{5}\pi.$$



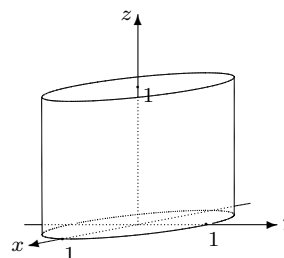
c) Sea $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$, tenemos

que $\partial V = S \cup S_1 \cup S_2$, donde

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = 1, 0 < z < 1\},$$

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\} \text{ y}$$

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq 1, z = 1\}.$$



Por otro lado, $\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = -2x + y + 2x - y = 0$, entonces se tiene que $\iint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$,

por lo que $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} - \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$.

Por otro lado, $\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \begin{pmatrix} 1-x^2 \\ \frac{1}{2}y^2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} dx dy = 0$. Además, $\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} =$

$$\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \begin{pmatrix} 1-x^2 \\ \frac{1}{2}y^2 \\ 2x-y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dx dy = \iint_{[-\pi, \pi] \times [0, 1]} (2 \cos \theta - \sin \theta) \rho^2 d\theta d\rho =$$

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} (2 \cos \theta - \sin \theta) d\theta \right) \left(\int_0^1 \rho^2 d\rho \right) = 0.$$

Finalmente, $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$.

d) Usando la misma notación que en c), se observa que \mathbf{F} se

anula sobre S_1 y S_2 (las componentes de \mathbf{F} contiene el factor

$z(z-1)$), por lo que $\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$. De esta manera

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} dx dy dz =$$

$$\iiint_V (y^2 z(z-1) + x^2 z(z-1) + (3z^2 - 2z)) dx dy dz =$$

$$\iiint_{[-\pi, \pi] \times [0, 1] \times [0, 1]} \rho(\rho^2 z(z-1) + (3z^2 - 2z)) d\theta d\rho dz =$$

$$2\pi \left(\int_0^1 \rho^2 d\rho \right) \left(\int_0^1 z(z-1) dz \right) + 2\pi \left(\int_0^1 \rho d\rho \right) \left(\int_0^1 (3z^2 - 2z) dz \right) =$$

$$2\pi \left(\frac{1}{4} \right) \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) + 2\pi \left(\frac{1}{2} \right) (1 - 1) = -\frac{1}{12} \pi.$$

