Contenidos

Tema 1

Ejercicios Semana No.1: Álgebra vectorial

Prof. Rodolfo Obando

1. Si $\vec{u} = (-1, -2, 5)$ y $\vec{v} = (3, 5, -1)$. Hallar un vector unitario en la dirección $\vec{v} - \vec{u}$.
2. Hallar un vector $\vec{r}$ del punto medio del segmento que va de $A(1, 0, -3)$ a $B(-3, 6, 7)$.
3. Hallar un vector $\vec{r}$ del punto que divide en la razón $\frac{3}{5}$ al segmento que va de $A(5, 2, -1)$ a $B(0, 7, 4)$.
4. Hallar los ángulos del triángulo con vértices $A(2, 2, 2)$, $B(3, -2, 1)$ y $C(-2, -3, 2)$.
5. Si $\vec{a} = (-1, 0, 2)$, $\vec{b} = (2, 3, 6)$ y $\vec{c} = (2, -2, 1)$, hallar:

   a) La proyección escalar de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$.

   b) La proyección escalar de $\vec{c}$ sobre $2\vec{a} - \vec{b}$.

   c) $3\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$ en términos de $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$.

   d) La proyección escalar de $\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$ sobre el eje y.

   e) La proyección escalar de $\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$ sobre la recta que pasa por los puntos $P(0, 0, 0)$ y $Q(1, 1, 1)$.
6. Hallar la componente de $\vec{u}$ en la dirección de $\vec{v}$, si $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$, $\vec{v} = -\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$.
7. Determine la ecuación de la recta L que es perpendicular a las rectas cuyas ecuaciones son:

$$L_1 : \ x = 2 + 2t, \quad y = 1 + 4t, \quad z = -1 - t.$$

$$L_2 : \ x = -31 + 3u, \quad y = 6 + 2u, \quad z = 3 + 6u.$$

8. Calcular la proyección ortogonal $(\text{proy}_{\vec{v}}\,\vec{u})$ de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ y la componente de $\vec{u}$ ortogonal a $\vec{v}$, si $\vec{u} = (-7, 1, 3)$, $\vec{v} = (8, 3, 4)$.
9. a) Hallar el área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ y $\vec{b} = 4\vec{j} + 5\vec{k}$.

   b) Hallar el área del triángulo que tiene sus vértices en $A(2, 3, -1)$, $B(1, -2, 3)$, $C(-2, 1, 4)$.
10. Utilizar el producto vectorial para demostrar la ley de los senos.

11. Hallar un vector unitario perpendicular al plano generado por los vectores $\vec{u} = \vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$ y $\vec{v} = 2\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$.

12. Determine la ecuación del plano que pasa por el punto $P(2,-7,6)$ y que es paralelo al plano $5x-2y+z-9=0$.

13. Reducir la ecuación del plano $5x-2y+z-9=0$, a su forma normal.

14. Determine la ecuación del plano que es paralelo al plano cuya ecuación es $x+2y-2z+7=0$ y que se encuentra a 7 unidades del punto $M(4,3,-2)$.

15. Hallar el punto de intersección de la recta $\frac{x-4}{5} = y+2 = \frac{z-4}{-1}$ y el plano $3x-y+7z+8=0$.

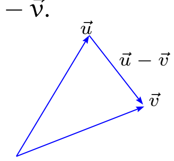
16. Determine las ecuaciones paramétricas de la recta que está en la intersección de los planos $-2x+3y+7z+2=0$ y $x+2y-3z+5=0$.

17. Determine el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos $A(4,5,-3)$, $B(6,3,0)$, $C(8,5,-9)$ y $D(-3,-2,-10)$. Calcule la altura trazada desde el vértice D.

18. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, demuestre que $|\det A|$ es el área del paralelogramo con vértices en $P(0,0)$, $Q(a,c)$ y $R(b,d)$, es decir que área$= |ad-bc| = |\det A|$.

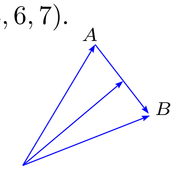
Soluciones ejercicios Semana No.1: µlgebra vectorial
Prof. Rodolfo Obando

1. Si $\vec{u} = (-1, -2, 5)$ y $\vec{v} = (3, 5, -1)$. Hallar un vector unitario en la dirección $\vec{u} - \vec{v}$.



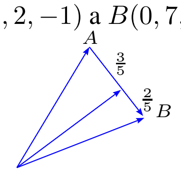
Solución Tenemos que $\vec{u} - \vec{v} = (-4, -7, 6)$, entonces $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{(-4)^2 + (-7)^2 + (6)^2} = \sqrt{101}$ i.e. el vector es $\dfrac{\vec{u} - \vec{v}}{\|\vec{u} - \vec{v}\|^2} = \dfrac{1}{101}(-4, -7, 6)$.

2. Hallar un vector $\vec{r}$ del punto medio del segmento que va de $A(1, 0, -3)$ a $B(-3, 6, 7)$.



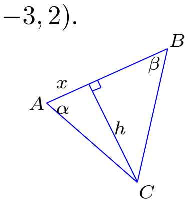
Solución Se tiene que vector que $\vec{r} = A + \frac{1}{2}\vec{AB} = (1, 0, -3) + \frac{1}{2}(-4, 6, 10) = (-1, 3, 2)$.

3. Hallar un vector $\vec{r}$ del punto que divide en la razón $\frac{3}{5}$ al segmento que va de $A(5, 2, -1)$ a $B(0, 7, 4)$.



Solución Se tiene que vector que $\vec{r} = A + \frac{3}{5}\vec{AB} = (5, 2, -1) + \frac{3}{5}(-5, 5, 5) = (2, 5, 2)$.

4. Hallar los ángulos del triángulo con vértices $A(2, 2, 2)$, $B(3, -2, 1)$ y $C(-2, -3, 2)$.



Solución En este caso, tenemos que el ángulo α entre $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$ está dado por la relación $\cos\alpha = \dfrac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{\|\vec{AB}\|\cdot\|\vec{AC}\|} = \dfrac{-4+20}{\sqrt{18}\sqrt{41}} = \dfrac{8\sqrt{182}}{123} \Longrightarrow \alpha = \arccos\dfrac{8\sqrt{182}}{123}$.

El ángulo β entre $\vec{BA}$ y $\vec{BC}$ está dado también por la relación $\cos\beta = \dfrac{\vec{BA}\cdot\vec{BC}}{\|\vec{BA}\|\cdot\|\vec{BC}\|} = \dfrac{5-4+1}{\sqrt{18}\sqrt{27}} = \dfrac{2}{9\sqrt{6}} \Longrightarrow \beta = \arccos\dfrac{2}{9\sqrt{6}}$ y $\gamma = \pi - \alpha - \beta$.

5. Si $\vec{a} = (-1, 0, 2)$, $\vec{b} = (2, 3, 6)$ y $\vec{c} = (2, -2, 1)$, hallar:

a) La proyección escalar de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$.

b) La proyección escalar de $\vec{c}$ sobre $2\vec{a} - \vec{b}$.

c) $3\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$ en términos de $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$.

d) La proyección escalar de $\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$ sobre el eje y.

e) La proyección escalar de $\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$ sobre la recta que pasa por los puntos $P(0, 0, 0)$ y $Q(1, 1, 1)$.

Solución

a) Sea k la proyección de $\vec{\mathrm{a}}$ sobre $\vec{\mathrm{b}}$: $k = \vec{\mathrm{a}}\cdot\dfrac{\vec{\mathrm{b}}}{\|\vec{\mathrm{b}}\|} = \dfrac{-2+12}{(4+9+36)} = \dfrac{10}{49}$.

b) Sea k la proyección de $\vec{\mathrm{a}}$ sobre $\vec{\mathrm{b}}$: $k = \vec{\mathrm{c}}\cdot\dfrac{2\vec{\mathrm{a}}-\vec{\mathrm{b}}}{\|2\vec{\mathrm{a}}-\vec{\mathrm{b}}\|} =$

$(2,-2,1)\cdot\dfrac{(-4,-3,-2)}{29} = \dfrac{-8+6-2}{29} = -\dfrac{4}{29}$.

c) Se tiene que $3\vec{\mathrm{a}}+\vec{\mathrm{b}}-2\vec{\mathrm{c}} = (-3,0,6)+(2,3,6)-(4,-4,2) = (-5,7,10) = -5\vec{\mathrm{i}}+7\vec{\mathrm{j}}+10\vec{\mathrm{k}}$.

d) Tenemos que $\vec{a}-2\vec{\mathrm{b}}+\vec{\mathrm{c}} = (-1,0,2)-(4,6,12)+(2,-2,1) = (-3,-8,-11)$, por lo que $(\vec{a}-2\vec{\mathrm{b}}+\vec{\mathrm{c}})\cdot(0,1,0) = -8$.

e) El vector director de la recta es $\vec{PQ} = (1,1,1)$, por lo tanto;

$k = (-3,-8,-11)\cdot\dfrac{(1,1,1)}{3} = -\dfrac{22}{3}$.

6. Hallar el vector componente de $\vec{\mathrm{u}}$ en la dirección de $\vec{\mathrm{v}}$, si $\vec{\mathrm{u}} = 2\vec{\mathrm{i}}-3\vec{\mathrm{j}}+6\vec{\mathrm{k}}$, $\vec{\mathrm{v}} = -\vec{\mathrm{i}}-2\vec{\mathrm{j}}+2\vec{\mathrm{k}}$.

Solución Es claro que $\vec{\mathrm{u}}\cdot\dfrac{\vec{\mathrm{v}}}{\|\vec{\mathrm{v}}\|^2} = \dfrac{(2,-3,6)\cdot(-1,-2,2)}{9^2} = \frac{1}{9}(-2+6+12) = \frac{16}{81} \Longrightarrow$ la componente de $\vec{\mathrm{u}}$ en la dirección de $\vec{v}$ es:

$\left(\mathrm{pr}_{\,\vec{\mathrm{v}}}\,\vec{\mathrm{u}}\right) = \frac{16}{81}(-1,-2,2)$.

7. Determine la ecuación de la recta L que es perpendicular a las rectas cuyas ecuaciones son:

$$L_1: \; x = 2+2t, \quad y = 1+4t, \quad z = -1-t.$$

$$L_2: \; x = -31+3u, \quad y = 6+2u, \quad z = 3+6u.$$

Solución

- Sabemos que la ecuación vectorial de una recta en el espacio viene dada por la ecuación:

$$\vec{\mathrm{r}} = \vec{\mathrm{r}_0} + t\vec{\mathrm{v}} \quad \text{ó} \quad \vec{\mathrm{r}} - \vec{\mathrm{r}_0} = t\vec{\mathrm{v}}.$$

- El vector director de L_1 es $\vec{\mathrm{a}_1} = (2,4,-1)$ y el vector director de L_2 es $\vec{\mathrm{a}_2} = (3,2,6)$.
- Como la recta L es perpendicular a L_1 y L_2, el vector director de la recta L es:

$$\vec{\mathrm{a}} = \vec{\mathrm{a}_1} \times \vec{\mathrm{a}_2} = (26,-15,-8).$$

- Si $\vec{\mathrm{r}} = (x,y,z)$, $\vec{\mathrm{r}_0} = (2,1,-1)$, $\vec{\mathrm{a}_1} = (2,4,-1)$ y $\vec{\mathrm{a}} = (26,-15,-8)$. El producto mixto

$$(\vec{\mathrm{r}}-\vec{\mathrm{r}_0})\cdot\vec{\mathrm{a}_1}\cdot\vec{\mathrm{a}} = \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 26 & -15 & -8 \end{vmatrix} = 0$$

es la ecuación del plano π_1 : $30 + 47\,x + 10\,y + 134\,z = 0$. En forma similar, el producto mixto

$$(\vec{r} - \vec{r}_0)\cdot\vec{a}_2\cdot\vec{a} = \begin{vmatrix} x+31 & y-6 & z-3 \\ 3 & 2 & 6 \\ 26 & -15 & -8 \end{vmatrix} = 0$$

es la ecuación del plano π_2 : $1505 + 74\,x + 180\,y - 97\,z = 0$.

- Como el vector $\vec{a}$ es común en los dos productos mixtos, la intersección de los planos π_1 y π_2 es la recta perpendicular a L_1 y L_2 cuya ecuación la determinamos resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 30 + 47\,x + 10\,y + 134\,z = 0 \\ 1505 + 74\,x + 180\,y - 97\,z = 0, \end{cases}$$

luego,

$$x = -\frac{135}{193} - \frac{13\,z}{4},\ y = \frac{111}{386} + \frac{15\,z}{8},$$

finalmente, si $z = t$, $t \in \,]-\infty, \infty[$, obtenemos la ecuación de la recta en forma paramétrica:

$$x = -\frac{135}{193} - \frac{13\,t}{4},\ y = \frac{111}{386} + \frac{15\,t}{8},\ z = t\ .$$

8. Calcular la proyección ortogonal $(\text{proy}_{\,\vec{v}}\,\vec{u})$ de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ y la componente de $\vec{u}$ ortogonal a $\vec{v}$, si $\vec{u} = (-7,1,3), \vec{v} = (8,3,4)$.

Solución Sea $\vec{w}_1 = (\text{proy}_{\,\vec{v}}\,\vec{u})$ y $\vec{w}_2$ la componente de $\vec{u}$ ortogonal a $\vec{v}$, entonces

$$\vec{w}_1 = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\,\vec{v} = \frac{(-7,1,3)\cdot(8,3,4)}{\left[\sqrt{8^2+3^2+4^2}\right]^2}\,(8,3,4) = \left(-\frac{328}{89}\,,-\frac{123}{89}\,,-\frac{164}{89}\right),$$

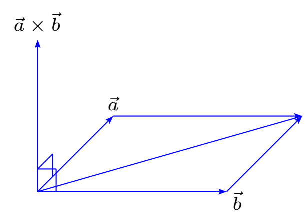
y

$$\vec{w}_2 = \vec{u} - \vec{w}_1 = (-7,1,3) - \left(-\frac{328}{89}\,,-\frac{123}{89}\,,-\frac{164}{89}\right) = \left(-\frac{295}{89}\,,\frac{212}{89}\,,\frac{431}{89}\right).$$

9. a) Hallar el área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ y $\vec{b} = 4\vec{j} + 5\vec{k}$.

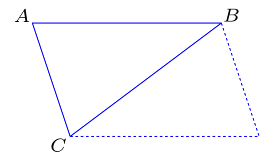
   b) Hallar el área del triángulo que tiene sus vértices en $A(2,3,-1)$, $B(1,-2,3)$, $C(-2,1,4)$.

Solución

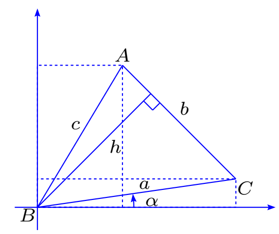


a) Se sabe que el área es $\|\vec{a}\times\vec{b}\|$, donde $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -15\vec{i}-10\vec{j}+8\vec{k} = (-15,-10,8)$, entonces el área $= \|\vec{a}\times\vec{b}\| = \sqrt{(-15)^2+(-10)^2+8^2} = \sqrt{389}$.

b) Consideremos los vectores $\vec{AB} = (-1,-5,4)$, $\vec{AC} = (-4,-2,5)$, entonces $\vec{AB}\times\vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -5 & 4 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 17\vec{\imath} - 10\vec{\jmath} - 18\vec{k} = (-17,-10,-18)$. Así, el área es $\frac{1}{2}\|\vec{AB}\times\vec{AC}\| = \frac{1}{2}\sqrt{(-17)^2+(-10)^2+(-18)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{713}$.



10. Utilizar el producto vectorial para demostrar la ley de los senos.



Solución Consideremos el triángulo ABC y tomemos el origen en el punto B, para simplificar. Así formamos en el plano los vectores $\vec{BA}$, $\vec{AC}$, $\vec{BC}$ y denotemos las normas respectivas c, b y a.

Por otro lado, $\vec{BC} = (a\cos\alpha, a\operatorname{sen}\alpha)$, $\vec{BA} = (c\cos(\alpha+\beta), c\operatorname{sen}(\alpha+\beta))$ y reescribamos estos vectores en $\mathbb{R}^3$, o sea consideremos $\vec{BC} = (a\cos\alpha, a\operatorname{sen}\alpha, 0)$, $\vec{BA} = (c\cos(\alpha+\beta), c\operatorname{sen}(\alpha+\beta), 0)$, por lo tanto el área del triángulo es $\frac{1}{2}\|\vec{BA}\times\vec{BC}\|$, con $\vec{BA}\times\vec{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a\cos\alpha & a\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ c\cos(\alpha+B) & c\operatorname{sen}(\alpha+B) & 0 \end{vmatrix} = \mathrm{k}ac(\cos\alpha\operatorname{sen}(\alpha+B) - \operatorname{sen}\alpha\cos(\alpha+B)) \Longrightarrow$ 2área$= ah =$

$ab\operatorname{sen}C = ac(\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha\cos B + \cos\alpha\operatorname{sen}B\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\cos B + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\alpha\cos B) =$

$ac(\cos^2\alpha\operatorname{sen}B + \operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{sen}B) = ac\operatorname{sen}B \Longrightarrow \dfrac{b}{\operatorname{sen}B} = \dfrac{c}{\operatorname{sen}C}$.

De manera similar se demuestra que $\dfrac{a}{\operatorname{sen}A} = \dfrac{c}{\operatorname{sen}C}$ y finalmente

$$\frac{a}{\operatorname{sen}A} = \frac{b}{\operatorname{sen}B} = \frac{c}{\operatorname{sen}C} \qquad \text{(ley de los senos).}$$

11. Hallar un vector unitario perpendicular al plano generado por los vectores $\vec{u} = \vec{\imath}+3\vec{\jmath}-2\vec{k}$ y $\vec{v} = 2\vec{\imath}-\vec{\jmath}-\vec{k}$.

Solución Sabemos que $\vec{u}\times\vec{v}\perp\vec{u}$ y $\vec{u}\times\vec{v}\perp\vec{v}$, por lo que $\vec{u}\times\vec{v}$ es perpendicular al plano generado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Así tenemos: $\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-3-2)\vec{\imath} - (-1+4)\vec{\jmath} + (-1-6)\vec{k} = (-5,-3,-7)$ y el vector unitario es $\dfrac{\vec{u}\times\vec{v}}{\|\vec{u}\times\vec{v}\|} = -\frac{1}{\sqrt{83}}(5,3,7)$.

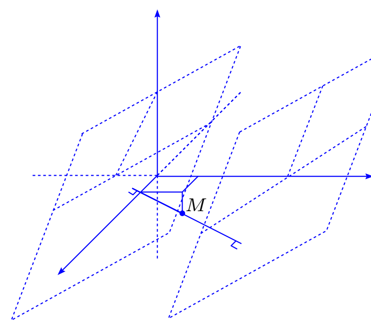
12. Determine la ecuación del plano que pasa por el punto $P(2,-7,6)$ y que es paralelo al plano $5x-2y+z-9=0$.

Solución Sabemos que el vector $\vec{n} = (5,-2,1)$ es ortogonal al plano $5x-2y+z-9=0$, por lo que $(x-2, y+7, z-6)\cdot\vec{n} = 0$ es el plano que buscamos, es decir $5x-2y+z-30=0$.

13. Reducir la ecuación del plano $5x - 2y + z - 9 = 0$, a su forma normal.

Solución El vector ortogonal al plano $\vec{n} = (5, -2, 1)$ tiene norma $\|\vec{n}\| = \sqrt{5^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{30}$ y la ecuación normal es $\dfrac{5}{\sqrt{30}}x - \dfrac{2}{\sqrt{30}}y + \dfrac{1}{\sqrt{30}}z - \dfrac{9}{\sqrt{30}} = 0$.

14. Determine la ecuación del plano que es paralelo al plano cuya ecuación es $x + 2y - 2z + 7 = 0$ y que se encuentra a 7 unidades del punto $M(4, 3, -2)$.



Solución Dado que el plano que buscamos es paralelo a $x + 2y - 2z + 7 = 0$, su ecuación está dada por $x + 2y - 2z + d = 0$.

Por otro lado, la distancia de este plano al punto $M(4, 3, -2)$ es 7, por lo que

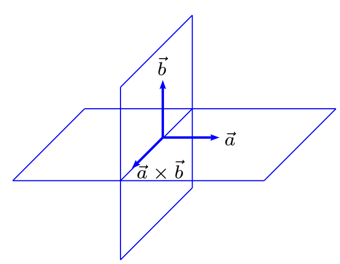
$$7 = \frac{|x + 2y - 2z + d|}{\sqrt{1 + 2^2 + (-2)^2}}\Big|_{(x,y,z)=(4,3,-2)},$$

es decir $7 = \pm(\frac{14}{3} + \frac{1}{3}d) \implies d = 7$ o $d = 35$, es decir se tienen dos planos a una distancia de 7 de $M(4, 3, -2)$.

15. Hallar el punto de intersección de la recta $\dfrac{x-4}{5} = y + 2 = \dfrac{z-4}{-1}$ y el plano $3x - y + 7z + 8 = 0$.

Solución La ecuación de la recta es $\vec{r} = (4, -2, 4) + t(5, 1, -1)$, entonces el punto de intersección satisface la ecuación del plano $2x - y + 7z + 8 = 0$, es decir $3(4 + 5t) - (-2 + t) + 7(4 - t) + 8 - 0 \implies 7t + 50 = 0 \implies t = -\frac{50}{7}$ y el punto es $\frac{1}{7}(-222, -64, 78)$.

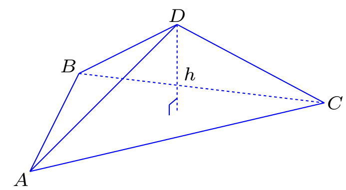
16. Determine las ecuaciones paramétricas de la recta que está en la intersección de los planos $-2x + 3y + 7z + 2 = 0$ y $x + 2y - 3z + 5 = 0$.



Solución Es sabido que el vector director de la recta es $(-2, 3, 7) \times (1, 2, -3) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -23\vec{i} + \vec{j} - 7\vec{k}$.
Determinemos ahora un punto que esté en los dos planos (y por lo tanto en la recta).

Sumando la primera ecuación con dos veces la segunda tenemos $7y + z + 12 = 0$. Si tomamos $y = 0 \implies z = -12$ y $x = -5 + 3z = -41$, por lo tanto la recta $\vec{r} = (-41, 0, -12) + t(-23, 1, -7)$ y las ecuaciones paramétricas son $x = -41 - 23t$, $y = t$, $z = -12 - 7t$.

17. Determine el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos $A(4, 5, -3)$, $B(6, 3, 0)$, $C(8, 5, -9)$ y $D(-3, -2, -10)$. Calcule la altura trazada desde el vértice D.

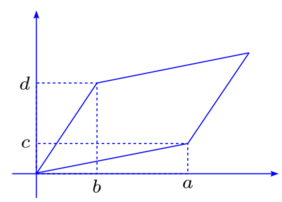


Solución Usemos el punto $A(4,5,-3)$ como punto de referencia y consideremos $\vec{AB} = (2,-2,-3)$, $\vec{AC} = (4,0,-6)$, $\vec{AD} = (-7,-7,-7)$, entonces el volumen de tetraedro es $V = \left| \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & -6 \\ -7 & -7 & -7 \end{vmatrix} \right| = |\frac{1}{6}(-140)| = \frac{70}{3}$.

El área de la base sobre D es $\frac{1}{2}\|\vec{AB} \times \vec{AC}\|$, donde $\vec{AB} \times \vec{AC} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & -6 \end{vmatrix}$

$= 6\vec{\mathrm{i}} + 4\vec{\mathrm{k}} = (6,0,4)$, es decir el área es $\frac{1}{2}\sqrt{6^2+0^2+4^2} = \frac{1}{2}\sqrt{48} = 2\sqrt{3}$ lo que implica que la altura $h = \dfrac{V}{\frac{1}{3}2\sqrt{3}} = \dfrac{35\sqrt{3}}{6}$.

18. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, demuestre que $|\det A|$ es el área del paralelogramo con vértices en $P(0,0)$, $Q(a,c)$ y $R(b,d)$, es decir que área$= |ad-bc| = |\det A|$.



Solución Consideremos el paralelogramo con tres vértices P, Q, R, y consideremos estos puntos en $\mathbb{R}^3$, es decir $P(0,0,0)$, $Q(a,c,0)$, $R(b,d,0)$. Dado que el área del paralelogramo es $\|(a,c,0)\times(b,d,0)\|$, donde:

$(a,c,0)\times(b,d,0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & c & 0 \\ b & d & 0 \end{vmatrix} = \mathrm{k}(ad-bc) = (0,0,ad-bc)$, tenemos que el área es $\sqrt{0^2+0^2+(ad-bc)^2} = |ad-bc| = |\det A|$.

Tema 2

Ejercicios Semana No.2: Funciones vectoriales

Prof. Rodolfo Obando

1. Trace el gráfico de la curva de la función vectorial dada. Escriba la función vectorial en coordenadas rectangulares.

   a) $\vec{\mathrm{r}}(t) = t^2\vec{\mathrm{i}} + (t-1)\vec{\mathrm{j}}$

   b) $\vec{\mathrm{r}}(t) = \cosh(t)\vec{\mathrm{i}} + 2\,\mathrm{senh}\,(t)\vec{\mathrm{j}}$

   c) $\vec{\mathrm{r}}(t) = (-t+1)\vec{\mathrm{i}} + (4t+2)\vec{\mathrm{j}} + (2t+3)\vec{\mathrm{k}}$

   d) $\vec{\mathrm{r}}(t) = \tan t\vec{\mathrm{i}} + t\vec{\mathrm{j}}$

   e) $\vec{\mathrm{r}}(t) = t\vec{\mathrm{i}} - \cos t\vec{\mathrm{j}}$

   f) $\vec{\mathrm{r}}(t) = (t+1)\vec{\mathrm{i}} + (t^2-1)\vec{\mathrm{j}}$.

2. Dibujar la curva descrita por las ecuaciones siguientes paramétricas: $x = 2\cos t$, $y = 2\,\mathrm{sen}\,t$, $z = t$, $0 \leq t \leq 4\pi$.

3. Demuestre que la curva descrita por la función vectorial $\vec{\mathrm{r}}(t) = \mathrm{sen}\,t\vec{\mathrm{i}} + \cos t\vec{\mathrm{j}} + \mathrm{sen}^2\,t\vec{\mathrm{k}}$, es la curva de intersección de las superficies $z = x^2$ y $x^2 + y^2 = 1$.

4. Calcule los siguientes límites:

   a) $\lim\limits_{t\to 0}(\mathrm{e}^{\sqrt{t}}\vec{\mathrm{i}} + \frac{\tan t}{t}\vec{\mathrm{j}} + \mathrm{e}^{-t}\vec{\mathrm{k}})$

   b) $\lim\limits_{t\to 0}(\sqrt{t}\vec{\mathrm{i}} + t\,\mathrm{cotg}\,(\frac{t}{3})\vec{\mathrm{j}} + \mathrm{senh}\ t\vec{\mathrm{k}})$

   c) $\lim\limits_{t\to 0}(\sqrt{t+3}, (1+\mathrm{sen}\,t)^{\frac{1}{t}}, \mathrm{sen}\,t)$

   d) $\lim\limits_{t\to 0}(\dfrac{\ln(t+1)}{t}, 1)$.

5. Discutir la continuidad de la función vectorial en dada por:

   $\vec{\mathrm{r}}(t) = \sqrt{1-t^2}\vec{\mathrm{i}} + \mathrm{arcsen}\ t\vec{\mathrm{j}} + (t-1)\vec{\mathrm{k}}$.

6. Dada la siguiente función vectorial $\vec{\mathrm{r}}(t) = t\vec{\mathrm{i}} + \sqrt{t+1}\vec{\mathrm{j}} + \mathrm{e}^t\vec{\mathrm{k}}$. Hallar:

   a) El dominio de $\vec{\mathrm{r}}$.   b) $\vec{\mathrm{r}}(0)$ c) $\vec{\mathrm{r}}'(0)$

d) $\vec{\mathrm{r}}''(1)$ e) $\|\vec{\mathrm{r}}(t)\|$ f) $\vec{\mathrm{r}}(t)\cdot\vec{\mathrm{r}}'(t)$.

7. Determine el dominio de la siguiente función vectorial:
   $\vec{\mathrm{r}}(t) = \ln(4 - t^2)\vec{\imath} + \sqrt{1 - t^2}\vec{\jmath} + \operatorname{cosech}\, t\vec{\mathrm{k}}$.

8. Dadas las siguientes funciones:

   a) $f(t) = \dfrac{t^2 - 1}{t^3 + 1}$ b) $\vec{\mathrm{v}} = t^{-2}\vec{\imath} + \operatorname{sen} t\vec{\jmath} + \cos t\vec{\mathrm{k}}$

   c) $\vec{\mathrm{u}} = \sqrt{t}\vec{\imath} + t\sqrt{t}\vec{\jmath} + \ln t\vec{\mathrm{k}}$.

   Calcule: $D_t\left[\vec{\mathrm{u}}(t) - \vec{\mathrm{v}}(t)\right]$, $D_t\left[f(t)\vec{\mathrm{u}}(t)\right]$, $D_t\left[\vec{\mathrm{u}}(t)\cdot\vec{\mathrm{v}}(t)\right]$.

9. Para la siguiente función vectorial $\vec{\mathrm{u}}(t) = t^2\vec{\imath} - 2t\vec{\jmath} + \vec{\mathrm{k}}$, calcule $D_t\left[\vec{\mathrm{u}}(t) \times \vec{\mathrm{u}}'(t)\right]$.

10. Calcule las siguientes integrales:
    a) $\displaystyle\int \left[(2t - 1)\vec{\imath} + 4t^3\vec{\jmath} + 3\sqrt{t}\vec{\mathrm{k}}\right] dt$
    b) $\displaystyle\int (\mathrm{e}^t\vec{\imath} + \operatorname{sen} t\vec{\jmath} + \cosh t\vec{\mathrm{k}})\, dt$
    c) $\displaystyle\int (t \operatorname{sen} t\vec{\imath} + \frac{1}{t}\vec{\jmath} + \vec{\mathrm{k}})\, dt$
    d) $\displaystyle\int \left(\sec^2 t\vec{\imath} + \frac{1}{1 - t^2}\vec{\jmath}\right) dt$.

Soluciones ejercicios Semana No.2: Funciones vectoriales
Prof. Rodolfo Obando

1. Trace el gráfico de la curva de la función vectorial dada. Escriba la función vectorial en coordenadas rectangulares.

a) $\vec{r}(t) = t^2\vec{i} + (t-1)\vec{j}$ b) $\vec{r}(t) = \cosh(t)\vec{i} + 2\,\mathrm{senh}\,(t)\vec{j}$

c) $\vec{r}(t) = (-t+1)\vec{i} + (4t+2)\vec{j} + (2t+3)\vec{k}$ d) $\vec{r}(t) = \tan t\vec{i} + t\vec{j}$

e) $\vec{r}(t) = t\vec{i} - \cos t\vec{j}$ f) $\vec{r}(t) = (t+1)\vec{i} + (t^2-1)\vec{j}$.

Observación 1 *Si el parámetro t es el tiempo entonces la función vectorial $\vec{r}(t)$ (vector de posición) nos describe la trayectoria de una partícula P que se desplaza sobre una curva C en el plano o en el espacio. En general la función vectorial $\vec{r}(t)$ nos describe el gráfico de una curva. Las flechas en los gráficos indican la trayectoria, de la partícula P al desplazarse sobre la curva dada.*

Solución a) Las ecuaciones paramétricas de la función vectorial $\vec{r}(t) = t^2\,\vec{i} + (t-1)\,\vec{j}$, son

$$x(t) = t^2, \qquad y(t) = t - 1, \tag{2.1}$$

La tabla 1, nos permite localizar la posición de la partícula P sobre la curva para diferentes instantes de tiempo t. Si eliminamos el parámetro t de las ecuaciones (2.1), obtenemos la ecuación de la curva en coordenadas rectangulares (Figura 1): $y = t - 1 \Longrightarrow t = y + 1$, entonces, $x = (y+1)^2$.

t	- 2	- 1	0	1	2
$x(t)$	4	1	0	1	4
$y(t)$	-3	-2	- 1	0	1

Tabla 1

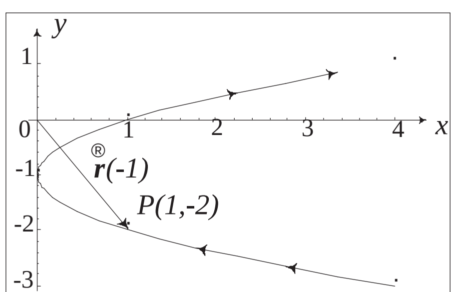


Figura 1

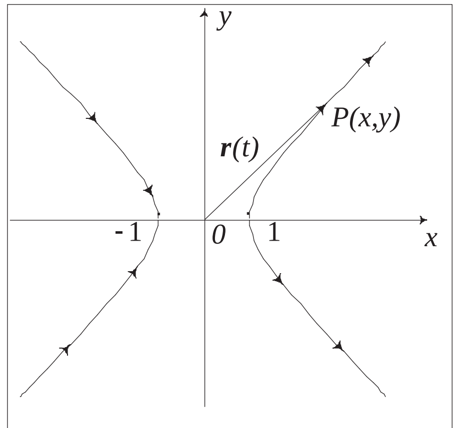


Figura 2

Solución b) Las ecuaciones paramétricas de $\vec{r}(t)$ son:

$$x = \cosh t, \quad y = \operatorname{senh} t, \tag{2.2}$$

si elevamos al cuadrado las ecuaciones (2.2) y las restamos obtenemos $\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = x^2 - y^2 = 1$, luego, en coordenadas rectangulares, la ecuación $x^2 - y^2 = 1$ corresponde a la ecuación de la hipérbola en su forma canónica (Figura 2).

Solución c) Las ecuaciones paramétricas de $\vec{r}(t)$ son:

$$x = (-t+1); \quad y = 4\,t + 2; \quad z = 2\,t + 3, \tag{2.3}$$

Las ecuaciones (2.3) nos describen una recta en el espacio, si despejamos el parámetro t de cada una de estas ecuaciones obtenemos las ecuaciones simétricas de la recta en coordenadas rectangulares (Figura 3): $\dfrac{x-1}{-1} = t$; $\dfrac{y-2}{4} = t$; $\dfrac{z-3}{2} = t \Longrightarrow \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z-3}{2}$.

Solución d) Las ecuaciones paramétricas son: $x = \tan t$, $y = t$, como $t \in [-1, 1]$, la función $x = \tan t$ es estrictamente creciente en ese intervalo, por lo tanto tiene inversa, entonces: $x = \tan t \Longrightarrow t = \arctan x$, luego $y = t = \arctan x$, de tal forma que en coordenadas rectangulares obtenemos la función $y = \arctan x$ (Figura 4).

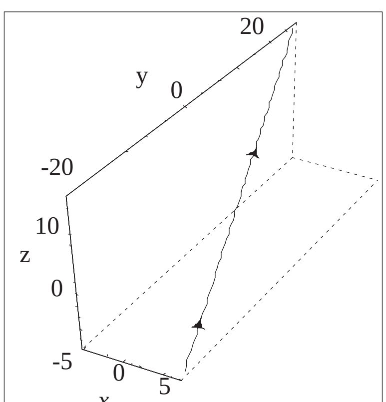


Figura 3

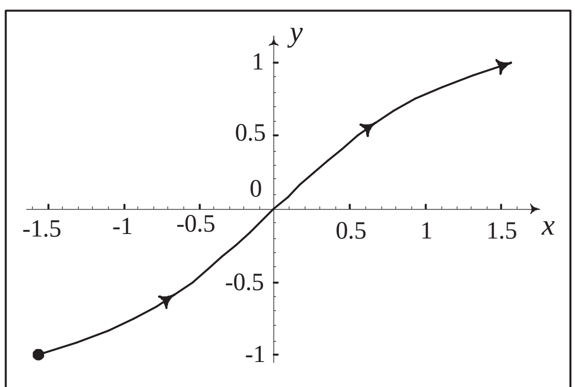


Figura 4

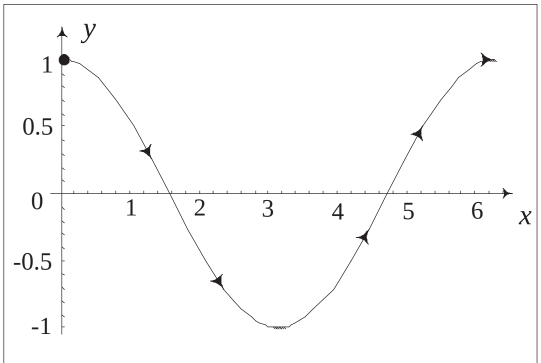


Figura 5

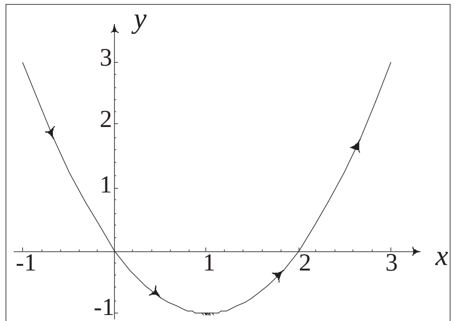


Figura 6

Solución e) Como $x = t$, $y = \cos t$, la función en coordenadas rectangulares es $y = \cos x$ (ver Figura 5).

Solución f) Como ecuaciones paramétricas tenemos $x = t + 1$, $y = t^2 - 1$. De la ecuación $x = t + 1 \Longrightarrow t = x - 1$, este valor de t lo sustituimos en $y = t^2 - 1$, esto es $y = (x - 1)^2 - 1$ y simplificando obtenemos $y = x^2 - 2\,x$, que es la ecuación deseada en coordenadas rectangulares (Figura 6).

2. Dibujar la curva descrita por las ecuaciones siguientes paramétricas: $x = 2\cos t$, $y = 2\,\mathrm{sen}\,t$, $z = t$, $0 \leq t \leq 4\pi$.

Solución El vector

$$\vec{\mathrm{r}}(t) = 2\cos t\,\vec{\mathrm{i}} + 2\,\mathrm{sen}\,t\,\vec{\mathrm{j}} + t\,\vec{\mathrm{k}}$$

describe una curva en el espacio, si t es el tiempo, entonces tenemos la trayectoria de un punto $P(x, y, z)$ que se desplaza sobre la curva C. Si tomamos las ecuaciones paramétricas

$$x = 2\cos t; \quad y = 2\,\mathrm{sen}\,t,$$

las elevamos al cuadrado y luego las sumamos obtenemos

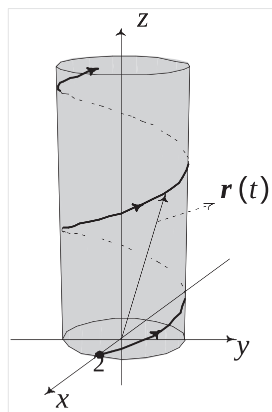


Figura 7

$$4\cos^2 t + 4\,\mathrm{sen}^2\,t = x^2 + y^2 \Longrightarrow x^2 + y^2 = (2)^2.$$

la ecuación $x^2 + y^2 = 4$, nos describe la ecuación de un cilindro circular recto y la ecuación $z = t$ nos describe la curva (trayectoria del punto $P(x, y, z)$ cuando se desplaza por el cilindro para diferentes instantes de tiempo t, cuando $t \in [\,0, 4\pi\,]$ (Figura 7).

3. Demuestre que la curva descrita por la función vectorial $\vec{r}(t) = \operatorname{sen} t\vec{\imath} + \cos t\vec{\jmath} + \operatorname{sen}^2 t\vec{k}$, es la curva de intersección de las superficies $z = x^2$ y $x^2 + y^2 = 1$.

Solución Para demostrar que la curva descrita por la función vectorial $\vec{r}(t)$ es la curva de intersección de las superficies $z = x^2$, $x^2 + y^2 = 1$, tomamos las ecuaciones paramétricas:

$$x = \operatorname{sen} t; \quad y = \cos t \quad z = \operatorname{sen}^2 t$$

las sustituimos en las ecuaciones $z - x^2 = 0$ y $x^2 + y^2 - 1 = 0$ y las igualamos,

$$x^2+y^2-1 = z-x^2 \Longrightarrow \operatorname{sen}^2 t+\cos^2 t-1 = \operatorname{sen}^2 t-\operatorname{sen}^2 t \Longrightarrow \operatorname{sen}^2 t+(1-\operatorname{sen}^2 t)-1 = 0 \Longrightarrow 0 = 0.$$

Queda demostrado así que la curva descrita por $\vec{r}(t)$ es la intersección de las superficies dadas.

4. Calcule los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{t\to 0}(e^{\sqrt{t}}\vec{\imath} + \frac{\tan t}{t}\vec{\jmath} + e^{-t}\vec{k})$

b) $\lim\limits_{t\to 0}(\sqrt{t}\vec{\imath} + t\operatorname{cotg}(\frac{t}{3})\vec{\jmath} + \operatorname{senh} t\vec{k})$

c) $\lim\limits_{t\to 0}(\sqrt{t+3}, (1+\operatorname{sen} t)^{\frac{1}{t}}, \operatorname{sen} t)$

d) $\lim\limits_{t\to 0}(\frac{\ln(t+1)}{t}, 1)$.

Solución Para cada función vectorial calculamos por separado los límites de sus componentes y luego calculamos $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}(t)$.

a) $\lim\limits_{t\to 0} e^{\sqrt{t}} = 1$,

$\lim\limits_{t\to 0} \frac{\tan t}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t\cos t} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} \lim\limits_{t\to 0} \cos t = 1$,

$\lim\limits_{t\to 0} e^{-t} = 1$ y $\lim\limits_{t\to 0} \vec{r}(t) = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$.

b) Calculamos el $\lim\limits_{t\to 0} t \operatorname{cotan}\left(\frac{t}{3}\right)$, los límites de las demás componentes se calculan en forma directa. Hacemos la sustitución $u = \frac{t}{3}$, luego si $t\to 0$, $u\to 0$, además $t = 3u$:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} t \operatorname{cotan}\left(\frac{t}{3}\right) &= \lim_{u\to 0} 3u \operatorname{cotan} u = \lim_{u\to 0} 3u \frac{\cos u}{\operatorname{sen} u} = 3\lim_{u\to 0} u \frac{\cos u}{\operatorname{sen} u}\cdot\frac{\frac{1}{u}}{\frac{1}{u}} = 3\lim_{u\to 0} \cos u\cdot\frac{u}{\operatorname{sen} u}\\ &= 3\left[\lim_{u\to 0} \cos u\cdot \lim_{u\to 0}\frac{u}{\operatorname{sen} u}\right] = 3,\end{aligned}$$

luego,

$$\lim_{t\to 0} \vec{r}(t) = 0\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 0\vec{k} = 3\vec{\jmath}.$$

c) Si evaluamos directamente $\lim\limits_{t\to 0} \vec{r}(t)$ obtenemos $\lim\limits_{t\to 0} \vec{r}(t) = \sqrt{3}\vec{\imath} + \lim\limits_{t\to 0}(1+\operatorname{senh} t)^{\frac{1}{t}}\vec{\jmath} + 0\vec{k}$, el $\lim\limits_{t\to 0}(1+\operatorname{senh} t)^{\frac{1}{t}}$

lo calculamos utilizando la definición del número e:

$$\mathrm{e} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}, \tag{2.4}$$

si hacemos la sustitución $z = \dfrac{1}{x}$, (si $x \to \pm\infty$, entonces, $z \to 0$) obtenemos:

$$\mathrm{e} = \lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}}. \tag{2.5}$$

Ahora podemos calcular el $\lim\limits_{t\to 0}(1+\operatorname{senh}\, t)^{\frac{1}{t}}$ (es una forma indeterminada del tipo 1^{∞}) aplicando la fórmula (2.5).

Sea $y = (1+\operatorname{senh}\, t)^{\frac{1}{t}}$, esta expresión la podemos escribir de la siguiente forma

$$y = (1+\operatorname{senh}\, t)^{\frac{1}{t}} = (1+\operatorname{senh}\, t)^{\frac{\operatorname{senh}\, t}{t\,\operatorname{senh}\, t}} = \left[(1+\operatorname{senh}\, t)^{\frac{1}{\operatorname{senh}\, t}}\right]^{\frac{\operatorname{senh}\, t}{t}},$$

$$y = \left[(1+\operatorname{senh}\, t)^{\frac{1}{\operatorname{senh}\, t}}\right]^{\frac{\operatorname{senh}\, t}{t}},$$

tomamos el logaritmo de la última ecuación

$$\ln y = \ln\left[(1+\operatorname{senh}\, t)^{\frac{1}{\operatorname{senh}\, t}}\right]^{\frac{\operatorname{senh}\, t}{t}} \Longrightarrow \ln y = \frac{\operatorname{senh}\, t}{t}\,\ln\left[(1+\operatorname{senh}\, t)^{\frac{1}{\operatorname{senh}\, t}}\right],$$

Observación 2 *En general, Una vez calculado el $\lim\limits_{t\to a}(\ln y)$, será fácil hallar el $\lim\limits_{t\to a} y$.*

Efectivamente, en virtud de la continuidad de la función logarítmica se tiene que

$\lim\limits_{t\to a}(\ln y) = \ln(\lim\limits_{t\to a} y)$, y si $\ln(\lim\limits_{t\to a} y) = b$, es evidente a que $\lim\limits_{t\to a} y = \mathrm{e}^{b}$. Si como caso particular, $b \to +\infty$ ó $b \to -\infty$, tendremos respectivamente, $\lim\limits_{t\to a} y = +\infty$ ó $\lim\limits_{t\to a} y = 0$.

Ahora, calculamos el $\ln(\lim\limits_{t\to 0} y) = \lim\limits_{t\to 0}(\ln y)$

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}(\ln y) &= \lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{senh}\, t}{t}\,\lim_{t\to 0}\ln\left[(1+\operatorname{senh}\, t)^{\frac{1}{\operatorname{senh}\, t}}\right],\\
\lim_{t\to 0}(\ln y) &= \ln(\mathrm{e})\,\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{senh}\, t}{t} = 1{\cdot}1 = 1,
\end{aligned}$$

luego, como $\lim\limits_{t\to 0}(\ln y) = \ln\left(\lim\limits_{t\to 0} y\right) = 1$, entonces $\lim\limits_{t\to 0} y = \mathrm{e}^{1} = \mathrm{e}$, es decir,

$$\lim_{t\to 0}(1+\operatorname{senh}\, t)^{\frac{1}{t}} = \mathrm{e}.$$

Observación 3 *Demostraremos que, $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\operatorname{senh}\, t}{t} = 1$.*

Calculamos, inicialmente, la tangente z a la hipérbola que pasa por el punto $(1, 0)$ (Figura 8). Los triángulos $\triangle OAB$ y $\triangle OCD$, son semejantes, entonces:

$$\frac{z}{y} = \frac{1}{x} \Longrightarrow z = \frac{y}{x},$$

y como las ecuaciones paramétricas de la hipérbola son

$$x = \cosh t \quad \text{y} \quad y = \operatorname{senh} t,$$

resulta que, $z = \dfrac{\operatorname{senh} t}{\cosh t} = \tanh t$.

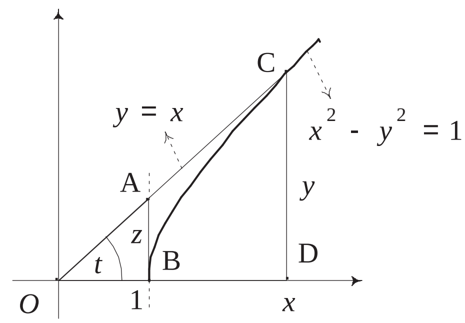


Figura 8

Ahora, comparamos las áreas A_1, A_2 y A_3 (Figura 9, Figura 10, Figura 11). Calculamos las áreas de los triángulos $\triangle OAB$ y $\triangle OCD$:

$$A_1 = \frac{b{\cdot}a}{2} = \frac{1{\cdot}z}{2} = \frac{\tanh t}{2}; \quad A_3 = \frac{x{\cdot}y}{2} = \frac{\cosh t{\cdot} \operatorname{senh} t}{2},$$

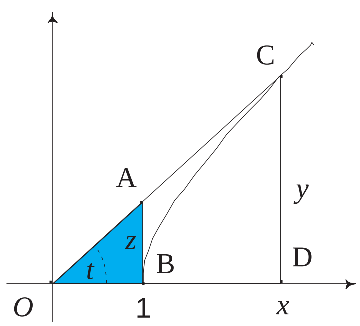


Figura 9

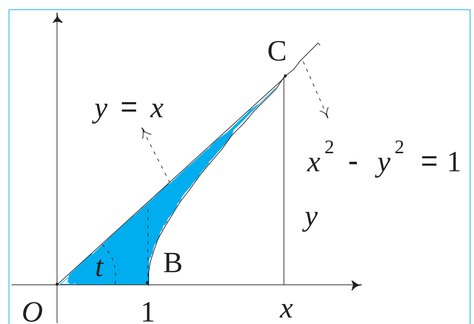


Figura 10

el área del sector hiperbólico OCB (Figura 10), es $A = \dfrac{1}{2}\, t$. Esto se demuestra en el ejercicio 1 de la semana 3. Es evidente que $A_1 \leq A_2 \leq A_3$, ó

$$\frac{1}{2} \tanh t \leq \frac{1}{2}\, t \leq \frac{1}{2} \cosh t{\cdot} \operatorname{senh} t, \tag{2.6}$$

$$\tanh t \leq t \leq \operatorname{senh} t{\cdot} \cosh t, \tag{2.7}$$

la desigualdad (2.7), la multiplicamos por $\dfrac{1}{\operatorname{senh} t}$ y la simplificamos

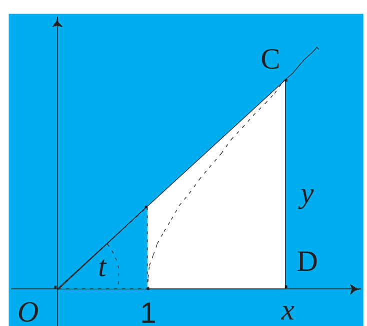


Figura 11

$$\frac{1}{\cosh t} \leq \frac{t}{\operatorname{senh} t} \leq \cosh t. \tag{2.8}$$

Ahora, calculamos el límite de cada uno de los términos de la desigualdad (2.8), cuando $t \to 0$,

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{\cosh t} \leq \lim_{t\to 0}\frac{t}{\text{senh } t} \leq \lim_{t\to 0}\cosh t, \tag{2.9}$$

$$1 \leq \lim_{t\to 0}\frac{t}{\text{senh } t} \leq 1 \tag{2.10}$$

y por el teorema de intercalación deducimos que: $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\text{senh } t} = 1$.

Finalmente, aplicando las propiedades de los límites:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\text{senh } t}{t} = \lim_{t\to 0}\left[\frac{\text{senh } t}{t}\cdot\frac{\frac{1}{\text{senh } t}}{\frac{1}{\text{senh } t}}\right] = \lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{\frac{t}{\text{senh } t}}\right] = \frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\text{senh } t}} = 1.$$

d) Calculamos $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(t+1)}{t}$, aplicando las propiedades de la función logarítmica

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln(t+1)}{t} = \lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{t}\ln(t+1)\right] = \lim_{t\to 0}\ln(1+t)^{\frac{1}{t}} = \ln(\text{e}) = 1,$$

entonces

$$\lim_{t\to 0}\vec{\text{r}}(t) = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$$

5. Discutir la continuidad de la función vectorial en dada por: $\vec{\text{r}}(t) = \sqrt{1-t^2}\,\vec{\imath} + \text{arcsen } t\vec{\jmath} + (t-1)\vec{\text{k}}$.

Solución Para que la función $\vec{\text{r}}(t)$, sea continua tiene que ser continua cada una de sus componentes:

a) La componente $x(t) = \sqrt{1-t^2}$, está definida si y sólo si,

$$1 - t^2 \geq 0 \Longrightarrow (1-t)(1+t) \geq 0,$$

además,

$$\lim_{t\to -1^+}\sqrt{(1-t)(1+t)} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t\to 1^-}\sqrt{(1-t)(1+t)} = 0,$$

por lo tanto la función $x(t)$, es continua en el intervalo $[\,-1,1\,]$.

b) La componente $y(t) = \text{arcsen } t$, es continua en el intervalo $[\,-1,1\,]$, sus límites laterales son

$$\lim_{t\to -1^+}\text{arcsen } t = -\frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad \lim_{t\to 1^+}\text{arcsen } t = \frac{\pi}{2}\,.$$

c) La componente $z(t) = t-1$, es continua en todo $\mathbb{R}$. Como las componentes $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ son continuas en el intervalo $[\,-1,1\,]$, entonces, la función vectorial $\vec{\text{r}}(t)$ es continua para aquellos valores de t, tales que $t \in [\,-1,1\,]$.

6. Dada la siguiente función vectorial $\vec{\text{r}}(t) = t\vec{\imath} + \sqrt{t+1}\vec{\jmath} + \text{e}^t\vec{\text{k}}$, hallar:

a) El dominio de $\vec{\mathrm{r}}$ b) $\vec{\mathrm{r}}(0)$ c) $\vec{\mathrm{r}}'(0)$

d) $\vec{\mathrm{r}}''(1)$ e) $\|\vec{\mathrm{r}}(t)\|$ f) $\vec{\mathrm{r}}(t)\cdot\vec{\mathrm{r}}'(t)$.

Solución

a) El dominio de la función vectorial $\vec{\mathrm{r}}(t)$ se determina, hallando el dominio común (intersección) de sus componentes.

- El dominio de $x(t)$ es: $D_x = \mathbb{R}$.
- Para que la función $y(t)$ esté definida es necesario que, $t+1 \geq 0 \Longrightarrow t \geq -1$, por lo tanto $D_y = [\,-1, \infty\,]$.
- El dominio de $z(t)$ es: $D_z = \mathbb{R}$.

Luego el dominio de $\vec{\mathrm{r}}(t)$ es: $D_r = D_x \cap D_y \cap D_z = [\,-1, \infty\,[$.

b) $\vec{\mathrm{r}}(0) = 0\,\vec{\imath} + \sqrt{0+1}\,\vec{\jmath} + \mathrm{e}^0\,\vec{\mathrm{k}} = \vec{\jmath} + \vec{\mathrm{k}}$.

c) $\vec{\mathrm{r}}\,'(t) = \vec{\imath} + \dfrac{1}{2\sqrt{1+t}}\,\vec{\jmath} + \mathrm{e}^t\,\vec{\mathrm{k}}$, entonces, $\vec{\mathrm{r}}\,'(0) = \vec{\imath} + \dfrac{1}{2}\vec{\jmath} + 1\,\vec{\mathrm{k}}$.

d) $\vec{\mathrm{r}}''(t) = \frac{-1}{4(1+t)^{\frac{3}{2}}}\vec{\jmath} + \mathrm{e}^t\vec{\mathrm{k}}$. $\vec{\mathrm{r}}''(1) = \frac{-1}{8\sqrt{2}}\vec{\jmath} + \mathrm{e}\vec{\mathrm{k}}$.

e) $\|\vec{\mathrm{r}}(t)\| = \sqrt{t^2 + (\sqrt{1+t})^2 + (\mathrm{e}^t)^2} = \sqrt{1 + \mathrm{e}^{2t} + t + t^2}$.

f) $\vec{\mathrm{r}}(t)\cdot\vec{\mathrm{r}}'(t) = (t\vec{\imath} + \sqrt{1+t}\vec{\jmath} + \mathrm{e}^t\vec{\mathrm{k}})\cdot(\vec{\imath} + \dfrac{1}{2\sqrt{1+t}}\vec{\jmath} + \mathrm{e}^t\vec{\mathrm{k}}) = \dfrac{1}{2} + \mathrm{e}^{2t} + t$.

7. Determine el dominio de la siguiente función vectorial $\vec{\mathrm{r}}(t) = \ln(4-t^2)\vec{\imath} + \sqrt{1-t^2}\vec{\jmath} + \operatorname{cosech} t\vec{\mathrm{k}}$.

Solución Determinamos, inicialmente, el dominio de las componentes de $\vec{\mathrm{r}}(t)$.

- La función $x(t) = \ln(4-t^2)$, está definida si y solo si $4 - t^2 > 0 \Longrightarrow (2-t)(2+t) > 0$. Esta desigualdad se cumple para todo t, tal que, $t \in\ ]-2, 2\,[$, ya que

$$\lim_{t\to -2^+} \ln[(2-t)(2+t)\,] = -\infty \ \text{ y } \ \lim_{t\to 2^-} \ln[(2-t)(2+t)\,] = -\infty.$$

- El dominio de $y(t)$ es $D_y = [\,-1, 1\,]$.
- El dominio de $z(t)$ es $D_z =\ ]-1, 1\,[$.

Luego el dominio de $\vec{\mathrm{r}}(t)$ es $D_r = D_x \cap D_y \cap D_z =\ ]-1, 1\,[$.

8. Dadas las siguientes funciones:

a) $f(t) = \dfrac{t^2-1}{t^3+1}$ b) $\vec{\mathrm{v}} = t^{-2}\vec{\imath} + \operatorname{sen} t\vec{\jmath} + \cos t\vec{\mathrm{k}}$

c) $\vec{\mathrm{u}} = \sqrt{t}\vec{\imath} + t\sqrt{t}\vec{\jmath} + \ln t\vec{\mathrm{k}}$.

Calcule: $D_t\,[\vec{\mathrm{u}}(t) - \vec{\mathrm{v}}(t)]$, $D_t\,[f(t)\vec{\mathrm{u}}(t)]$, $D_t\,[\vec{\mathrm{u}}(t)\cdot\vec{\mathrm{v}}(t)]$.

Solución $D_t\left[\vec{\mathrm{u}}(t)-\vec{\mathrm{v}}(t)\right]=D_t\left[\left(\sqrt{t}\,\vec{\mathrm{i}}+t^{\frac{3}{2}}\,\vec{\mathrm{j}}+\ln t\,\vec{\mathrm{k}}\right)-\left(t^{-2}\,\vec{\mathrm{i}}+\operatorname{sen} t\,\vec{\mathrm{j}}+\cos t\,\vec{\mathrm{k}}\right)\right]$, sumamos las componentes, luego derivamos y simplificamos:

$$\begin{aligned}
D_t\left[\vec{\mathrm{u}}(t)-\vec{\mathrm{v}}(t)\right] &= D_t\left[\left(-t^{-2}+\sqrt{t}\right)\vec{\mathrm{i}}+\left(t^{\frac{3}{2}}-\operatorname{sen} t\right)\vec{\mathrm{j}}+\left(-\cos t+\ln t\right)\vec{\mathrm{k}}\right]\\
&= \left(\frac{2}{t^3}+\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)\vec{\mathrm{i}}+\left(\frac{3\sqrt{t}}{2}-\cos t\right)\vec{\mathrm{j}}+\left(\frac{1}{t}+\operatorname{sen} t\right)\vec{\mathrm{k}}\\
&= \left(\frac{4+t^{\frac{5}{2}}}{2\,t^3}\right)\vec{\mathrm{i}}+\left(\frac{3\sqrt{t}-2\cos t}{2}\right)\vec{\mathrm{j}}+\left(\frac{1+t\operatorname{sen} t}{t}\right)\vec{\mathrm{k}}.
\end{aligned}$$

$D_t\left[f(t)\,\vec{\mathrm{u}}(t)\right]=f'(t)\,\vec{\mathrm{u}}(t)+f(t)\,\vec{\mathrm{u}}\,'(t)$.

Calculamos las respectivas derivadas y las simplificamos:

$$f'(t)=\frac{-3\,t^2\,\left(-1+t^2\right)}{\left(1+t^3\right)^2}+\frac{2\,t}{1+t^3}=\frac{(2-t)\,t}{\left(1-t+t^2\right)^2},$$

$$\vec{\mathrm{r}}\,'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}\vec{\mathrm{i}}+\frac{3\sqrt{t}}{2}\vec{\mathrm{j}}+\frac{1}{t}\vec{\mathrm{k}}.$$

Ahora, calculamos

$$\begin{aligned}
D_t\left[f(t)\,\vec{\mathrm{u}}(t)\right] &= \left[\frac{(2-t)\,t}{\left(1-t+t^2\right)^2}\right]\left(\sqrt{t}\vec{\mathrm{i}}+t^{\frac{3}{2}}\vec{\mathrm{j}}+\ln t\vec{\mathrm{k}}\right)+\left[\frac{-1+t^2}{1+t^3}\right]\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\vec{\mathrm{i}}+\frac{3\sqrt{t}}{2}\vec{\mathrm{j}}+\frac{1}{t}\vec{\mathrm{k}}\right)\\
&= \frac{(2-t)\,t^{\frac{3}{2}}}{\left(1-t+t^2\right)^2}\vec{\mathrm{i}}+\frac{(2-t)\,t^{\frac{5}{2}}}{\left(1-t+t^2\right)^2}\vec{\mathrm{j}}+\frac{(2-t)\,t\,\ln t}{\left(1-t+t^2\right)^2}\vec{\mathrm{k}}\\
&\quad+\frac{-1+t^2}{2\sqrt{t}\,\left(1+t^3\right)}\vec{\mathrm{i}}+\frac{3\sqrt{t}\,\left(-1+t^2\right)}{2\,\left(1+t^3\right)}\vec{\mathrm{j}}+\frac{-1+t^2}{t\,\left(1+t^3\right)}\vec{\mathrm{k}},\\
&= \left(\frac{(2-t)\,t^{\frac{3}{2}}}{\left(1-t+t^2\right)^2}+\frac{-1+t^2}{2\sqrt{t}\,\left(1+t^3\right)}\right)\vec{\mathrm{i}}+\left(\frac{(2-t)\,t^{\frac{5}{2}}}{\left(1-t+t^2\right)^2}+\frac{3\sqrt{t}\,\left(-1+t^2\right)}{2\,\left(1+t^3\right)}\right)\vec{\mathrm{j}}\\
&\quad+\left(\frac{-1+t^2}{t\,\left(1+t^3\right)}+\frac{(2-t)\,t\,\ln t}{\left(1-t+t^2\right)^2}\right)\vec{\mathrm{k}},\\
&= \left(\frac{-1+2\,t+2\,t^2-t^3}{2\sqrt{t}\left(1-t+t^2\right)^2}\right)\vec{\mathrm{i}}+\left(\frac{\sqrt{t}\,\left(-3+6\,t-2\,t^2+t^3\right)}{2\left(1-t+t^2\right)^2}\right)\vec{\mathrm{j}}\\
&\quad+\left(\frac{-1+2\,t-2\,t^2+t^3+2\,t^2\,\ln t-t^3\,\ln t}{t\left(1-t+t^2\right)^2}\right)\vec{\mathrm{k}}.
\end{aligned}$$

$D_t\left[\,\vec{\mathrm{u}}(t)\cdot\vec{\mathrm{v}}(t)\,\right]=\vec{\mathrm{u}}'(t)\cdot\vec{\mathrm{v}}(t)+\vec{\mathrm{v}}'(t)\cdot\vec{\mathrm{u}}(t)$

$$\begin{aligned}
D_t\left[\,\vec{\mathrm{u}}(t)\cdot\vec{\mathrm{v}}(t)\,\right] &= \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\vec{\mathrm{i}}+\frac{3\sqrt{t}}{2}\vec{\mathrm{j}}+\frac{1}{t}\vec{\mathrm{k}}\right)\cdot\left(t^{-2}\vec{\mathrm{i}}+\operatorname{sen} t\vec{\mathrm{j}}+\cos t\vec{\mathrm{k}}\right)\\
&+ \left(\frac{-2}{t^3}\vec{\mathrm{i}}+\cos t\vec{\mathrm{j}}-\operatorname{sen} t\vec{\mathrm{k}}\right)\cdot\left(\sqrt{t}\vec{\mathrm{i}}+t^{\frac{3}{2}}\vec{\mathrm{j}}+\ln t\right),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{2\,t^{\frac{5}{2}}} + \frac{\cos t}{t} + \frac{3\sqrt{t}\,\operatorname{sen} t}{2}\right) + \left(\frac{-2}{t^{\frac{5}{2}}} + t^{\frac{3}{2}}\,\cos t - \ln t\,\operatorname{sen} t\right)\\
&= \frac{-3}{2\,t^{\frac{5}{2}}} + \frac{\cos t}{t} + t^{\frac{3}{2}}\,\cos t + \frac{3\sqrt{t}\,\operatorname{sen} t}{2} - \ln t\,\operatorname{sen} t\\
&= \frac{-3 + 2\,t^{\frac{3}{2}}\,\cos t + 2\,t^{4}\,\cos t + 3\,t^{3}\,\operatorname{sen} t - 2\,t^{\frac{5}{2}}\,\ln t\,\operatorname{sen} t}{2\,t^{\frac{5}{2}}}.
\end{aligned}
$$

9. Para la siguiente función vectorial $\vec{u}(t) = t^2\vec{\imath} - 2t\vec{\jmath} + \vec{k}$, calcule $D_t\left[\vec{u}(t) \times \vec{u}'(t)\right]$.

Solución

$$
\begin{aligned}
D_t\left[\vec{u}(t) \times \vec{u}\,'(t)\right] &= \overbrace{\vec{u}\,'(t) \times \vec{u}\,'(t)}^{0} + \vec{u}(t) \times \vec{u}\,''(t)\\
&= (t^2\vec{\imath} - 2\,t\vec{\jmath} + \vec{k}) \times (2\vec{\imath}) = 2\vec{\jmath} + 4\,t\vec{k}.
\end{aligned}
$$

10. Calcule las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \left[(2t-1)\vec{\imath} + 4t^3\vec{\jmath} + 3\sqrt{t}\vec{k}\right]\,dt$

b) $\displaystyle\int (e^t\vec{\imath} + \operatorname{sen} t\vec{\jmath} + \cosh t\vec{k})\,dt$

c) $\displaystyle\int (t\operatorname{sen} t\vec{\imath} + \frac{1}{t}\vec{\jmath} + \vec{k})\,dt$

d) $\displaystyle\int \left(\sec^2 t\vec{\imath} + \frac{1}{1-t^2}\vec{\jmath}\right)\,dt.$

Solución

a) $\displaystyle\int \left[(-1+2\,t)\vec{\imath} + 4\,t^3\vec{\jmath} + 3\sqrt{t}\vec{k}\right]dt = \left(-t + t^2 + C_1\right)\vec{\imath} + \left(t^4 + C_2\right)\vec{\jmath} + \left(2\,t^{\frac{3}{2}} + C_3\right)\vec{k}.$

b) $\displaystyle\int \left[e^t\vec{\imath} + \operatorname{sen} t\vec{\jmath} + \cosh t\vec{k}\right]dt = (e^t + C_1)\,\vec{\imath} + (-\cos t + C_2)\,\vec{\jmath} + (\operatorname{senh}\,t + C_3)\,\vec{k}.$

c) $\displaystyle\int \left[t\,\operatorname{sen} t\vec{\imath} + \frac{1}{t}\vec{\jmath} + \vec{k}\right]dt = (-t\,\cos t + \operatorname{sen} t + C_1)\,\vec{\imath} + (\ln t + C_2)\,\vec{\jmath} + (t + C_3)\,\vec{k}.$

La integral $\displaystyle\int t\,\operatorname{sen} t\,dt$, se calcula por partes: $u = t$; $dv = \operatorname{sen} t\,dt$, $du = dt$, $v = -\cos t$, luego:

$$\int t\,\operatorname{sen} t\,dt = -t\cos t + \int \cos t\,dt = -t\cos t + \operatorname{sen} t + C.$$

d) $\displaystyle\int \left[\sec^2 t\vec{\imath} + \frac{1}{1-t^2}\vec{\jmath}\right]dt = (\tan t + C_1)\,\vec{\imath} + \left(\tanh^{-1} t + C_2\right)\vec{\jmath}.$

Tema 3

Ejercicios Semana No.3: Funciones vectoriales

Prof. Rodolfo Obando

1. Demuestre que el área del sector hiperbólico sombreado OCB de la Figura 1, es $A(t) = \dfrac{1}{2}t$. (Sugerencia: Utilice el teorema fundamental del cálculo).

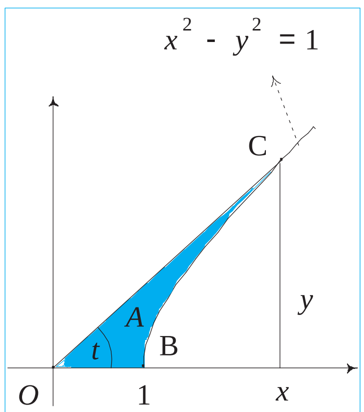


Figura 1

2. Una partícula se desplaza a lo largo de la curva $\vec{r}(t) = (4\cos 3t, 5\operatorname{sen} 3t)$, donde t es el tiempo. Hallar la velocidad y la aceleración de la partícula cuando $t = \frac{\pi}{2}$. Hallar la posición de la partícula cuando la rapidez $\|\vec{v}\|$ es mínima. Trace el gráfico de la curva e indique la dirección de la partícula cuando la rapidez es mínima.

3. Se lanza un proyectil de masa m desde una posición inicial $\vec{r_0}$, con una velocidad inicial $\vec{v_0}$. Determine su vector de posición en función del tiempo.

4. Calcule la longitud de arco de las curvas dadas por las siguientes funciones:

   a) $\vec{r} = (2t, 3\operatorname{sen} t, 3\cos t)$; $a \leq t \leq b$

   b) $\vec{r}\,(t) = (e^t, e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t)$; $0 \leq t \leq 2\pi$

c) $24xy = x^4 + 48$; $2 \leq x \leq 4$

d) $y = \ln x$; $1 \leq x \leq 2$.

5. Calcule $\vec{\boldsymbol{\tau}}(t)$, $\vec{\boldsymbol{\nu}}(t)$, a_T y a_N; en los instantes de tiempo indicados:

   a) $\vec{\mathrm{r}}(t) = t\vec{\mathrm{i}} + \frac{1}{t}\vec{\mathrm{j}}$; $t = 1$

   b) $\vec{\mathrm{r}}(t) = t\vec{\mathrm{i}} + 3t^2\vec{\mathrm{j}} + \frac{t^2}{2}\vec{\mathrm{k}}$; $t = 2$

   c) $\vec{\mathrm{r}}(t) = \mathrm{e}^t \cos t\vec{\mathrm{i}} + \mathrm{e}^t \operatorname{sen} t\vec{\mathrm{j}} + \mathrm{e}^t\vec{\mathrm{k}}$; $t = 0$.

6. Dada la función vectorial $\vec{\mathrm{r}}(t) = \cos t\vec{\mathrm{i}} + \operatorname{sen} t\vec{\mathrm{j}} + \mathrm{e}^t\vec{\mathrm{k}}$. Determine el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ donde la recta tangente a la curva descrita por $\vec{\mathrm{r}}(t)$, es paralela al plano cuya ecuación es $\sqrt{3}x + y - 4$.

7. Considere la curva $\vec{\mathrm{r}}(t) = \left(2t - t^2, t^2, 2t + t^2\right)$; y el punto $P\,(1, 1, 3)$. Determine:

   a) La ecuación del plano osculador

   b) La ecuación del plano normal

   c) La ecuación del plano rectificante

   d) La ecuación de la recta tangente

   e) La ecuación de la recta normal

   f) La ecuación de la recta binormal

   a la curva definida por la correspondiente función vectorial en el punto indicado.

8. Determinar la longitud del arco de la curva definida por la función $y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}$, comprendida entre el punto mínimo de la curva y el punto donde la curva tiene su máxima curvatura.

9. Un proyectil es lanzado con una velocidad inicial de 500m/s y un ángulo de elevación de $30°$. Determine:

   a) el alcance del proyectil,

   b) la máxima altura que alcanza el proyectil,

   c) la velocidad en el momento del impacto.

10. Hallar el punto P perteneciente a la curva $\vec{\mathrm{r}}(t) = (1 - 2t, t^2, 2\mathrm{e}^{2(t-1)})$, en el que el vector tangente $\vec{\mathrm{r}}(t)$ es paralelo a $\vec{\mathrm{r}}(t)$.

Soluciones ejercicios Semana No.3: Funciones vectoriales
Prof. Rodolfo Obando

1. Demuestre que el área del sector hiperbólico sombreado OCB de la Figura 1, es $A(t) = \frac{1}{2}t$. (Sugerencia: Utilice el teorema fundamental del cálculo).

Solución Para demostrar que el área del sector hiperbólico es, $A = \frac{1}{2}\,t$, consideramos inicialmente, que las ecuaciones paramétricas de la hipérbola son

$$x(t) = \cosh t, \quad y(t) = \text{senh } t, \tag{3.1}$$

y que en el primer cuadrante la ecuación de la hipérbola la podemos expresar como

$$y = \sqrt{x^2 - 1}. \tag{3.2}$$

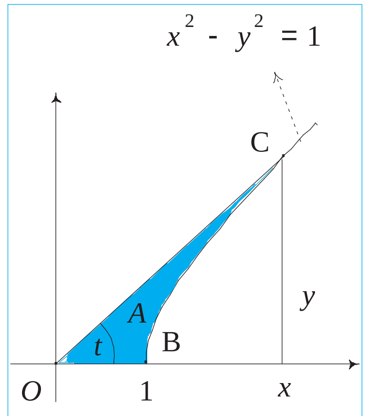


Figura 1

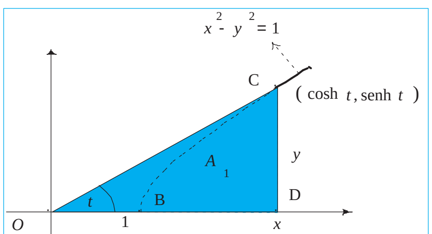


Figura 2

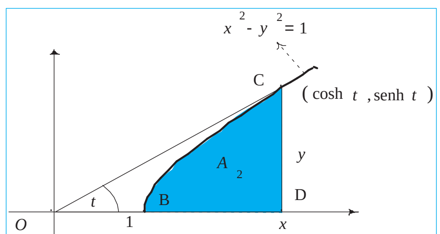


Figura 3

Ahora, calculamos las áreas A_1 y A_2 (Figura 2), (Figura 3), en términos de las ecuaciones paramétricas (1), teniendo en cuenta la ecuación (3.2)

$$A_1 = \frac{1}{2}\,xy = \frac{1}{2}\cosh t\,\text{senh } t; \quad A_2 = \int_1^x y\,dx = \int_1^{\cosh(t)} \sqrt{x^2-1}\,dx,$$

es evidente, que el área A de la Figura 1 es

$$A(t) = A_1(t) - A_2(t) = \frac{1}{2}\cosh t\,\text{senh } t - \int_1^{\cosh t} \sqrt{x^2-1}dx, \tag{3.3}$$

derivamos la expresión (3.3) y la simplificamos:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\cosh^2 t}{2} + \frac{\text{senh}^2 t}{2} - \sqrt{\cosh^2 t - 1}\,\text{senh } t = \frac{\cosh^2 t}{2} + \frac{\text{senh}^2 t}{2} - \sqrt{\text{senh}^2 t}\,\text{senh } t,$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\cosh^2 t}{2} + \frac{\text{senh}^2 t}{2} - \text{senh}^2 t = \frac{1}{2}\left(\cosh^2 t - \text{senh}^2 t\right) = \frac{1}{2}, \tag{3.4}$$

integramos la expresión (3.4) $A = \dfrac{1}{2}t + C$, luego si, $t = 0 \Longrightarrow C = 0$. Queda demostrado así que, $A = \dfrac{1}{2}\,t$.

2. Una partícula se desplaza a lo largo de la curva $\vec{r}(t) = (4\cos 3t, 5\,\mathrm{sen}\,3t)$, donde t es el tiempo. Hallar la velocidad y la aceleración de la partícula cuando $t = \frac{\pi}{2}$. Hallar la posición de la partícula cuando la rapidez $\|\vec{v}\|$ es mínima. Trace el gráfico de la curva e indique la dirección de la partícula cuando la rapidez es mínima.

Solución

- Calculamos la primera y segunda derivadas de $\vec{r}(t) = 4\cos 3t\vec{i} + 5\,\mathrm{sen}\,3t\vec{j}$, $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = -12\,\mathrm{sen}\,3t\vec{i} + 15\cos 3t\vec{j}$, $\vec{a}(t) = \vec{r}''(t) = -36\cos 3t\vec{i} - 45\,\mathrm{sen}\,3t\vec{j}$.
- Evaluamos las expresiones anteriores en $t = \frac{\pi}{2}$: $\vec{v}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 12\vec{i}$, $\vec{a}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 45\vec{j}$.
- Para hallar la posición de la partícula, cuando la rapidez $v(t)$ es mínima, calculamos $v'(t)$:

$$\begin{aligned}
v(t) &= \sqrt{225\mathrm{cos}^2\,3t + 144\mathrm{sen}^2\,3t} + \sqrt{225\cos^2 3t + 144\left(1 - \cos^2 3t\right)} \\
&= \sqrt{144 + 81\cos^2 3t}, \\
v'(t) &= \frac{-486\cos 3t\,\mathrm{sen}\,3t}{2\sqrt{144 + 81\mathrm{cos}^2\,3t}} = \frac{-243\cos 3t\,\mathrm{sen}\,3t}{\sqrt{144 + 81\cos^2 3t}}.
\end{aligned}$$

Determinamos los valores críticos de t: $\dfrac{-243\cos 3t\,\mathrm{sen}\,3t}{\sqrt{144 + 81\cos^2 3t}} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \cos 3t\,\mathrm{sen}\,3t = 0.$

La ecuación $\cos 3t\,\mathrm{sen}\,3t = 0$, se cumple si $\cos 3t = 0$, o $\mathrm{sen}\,3t = 0$, entonces si $t \in [\,0, 2\pi\,]$,

$$\cos 3t = 0 \Longrightarrow \begin{cases} 3t = \dfrac{\pi}{2} \Longrightarrow t = \dfrac{\pi}{6} \\ 3t = -\dfrac{\pi}{2} \Longrightarrow t = -\dfrac{\pi}{6}, \end{cases} \qquad \mathrm{sen}\,3t = 0 \Longrightarrow \begin{cases} 3t = 0 \Longrightarrow t = 0 \\ 3t = \pi \Longrightarrow t = \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

Evaluamos la rapidez $v(t)$ en los valores críticos de t para determinar así, los puntos donde $v(t)$ es mínima:

$$\begin{aligned}
v(0) &= \sqrt{144 + 81\cos^2[\,3(0)\,]} = 15 \ \ \text{(Máximo Absoluto)}, \\
v\left(\tfrac{\pi}{3}\right) &= \sqrt{144 + 81\cos^2\left[3\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\right]} = 15 \ \ \text{(Máximo Absoluto)}, \\
v\left(\tfrac{\pi}{6}\right) &= \sqrt{144 + 81\cos^2\left[3\left(\tfrac{\pi}{6}\right)\right]} = 12 \ \ \text{(Mínimo Absoluto)}, \\
v\left(-\tfrac{\pi}{6}\right) &= \sqrt{144 + 81\cos^2\left[3\left(-\tfrac{\pi}{6}\right)\right]} = 12 \ \ \text{(Mínimo Absoluto)}.
\end{aligned}$$

- Para determinar los puntos de la curva donde la rapidez es mínima, tomamos las ecuaciones paramétricas de la curva: $x(t) = 4\cos 3t$, $y(t) = 5\,\text{sen}\, 3t$ y las evaluamos en $t = \pm\frac{\pi}{6}$.

t	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$
$x(t)$	0	0
$y(t)$	-5	5

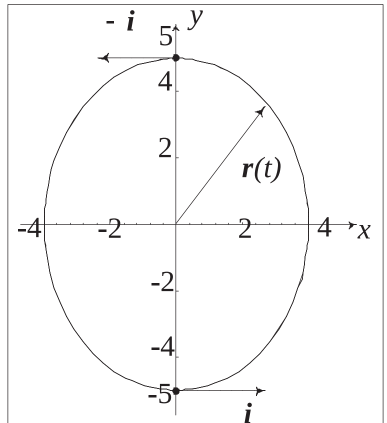


Figura 4

- Para trazar el gráfico de la curva, eliminamos el parámetro t de las ecuaciones paramétricas: $x = 4\cos 3t \Longrightarrow \cos 3t = \frac{x}{4}$; $y = 5\,\text{sen}\, 3t \Longrightarrow \text{sen}\, 3t = \frac{y}{5}$, y como, $\cos^2 3t + \text{sen}^2 3t = 1$, entonces: $\cos^2 3t + \text{sen}^2 3t = \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$, esta última ecuación en coordenadas rectangulares nos describe una elipse (Figura 4).

- El vector velocidad (vector tangente a la curva) $\vec{v}(t) = -12\sin 3t\vec{i} + 15\cos 3t\vec{j}$, nos indica la dirección de la partícula en los puntos $(0,-5)$, y, $(0,5)$ respectivamente: $\vec{v}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 12\vec{i}$ (su vector unitario es $\vec{i}$) y $\vec{v}\left(\frac{\pi}{6}\right) = -12\vec{i}$ (su vector unitario es $-\vec{i}$) (Figura 4).

3. Se lanza un proyectil de masa m desde una posición inicial $\vec{r_0}$, con una velocidad inicial $\vec{v_0}$. Determine su vector de posición en función del tiempo.

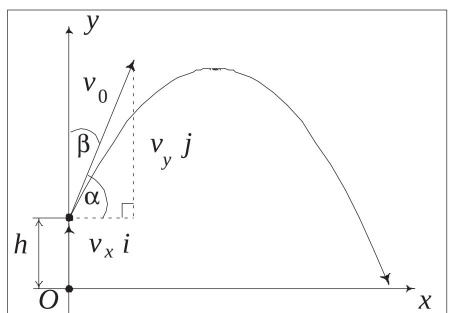


Figura 5

Solución Suponemos que la fuerza de la gravedad es la única fuerza que actúa sobre el proyectil. Para un proyectil de masa m tenemos (Figura 5): $\vec{F} = mg\vec{j}$, donde $g = 9,81 m/seg^2$. Por la Segunda Ley de Newton tenemos:

$$\vec{F} = m\vec{a} = -mg\vec{j} \Longrightarrow \vec{a} = -g\vec{j},$$

donde $\vec{a} = -g\vec{j}$, es la aceleración del proyectil.

- Para determinar la función de posición, $\vec{r}(t)$, integramos dos veces:

$$\vec{v}(t) = \int \vec{a}(t)dt = -gt\vec{j} + \vec{C_1}$$
$$\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t)dt = -\frac{g}{2}t^2\vec{j} + \vec{C_1}t + \vec{C_2},$$

teniendo en cuenta las condiciones iniciales, $\vec{r}(0) = \vec{r_0}$ y $\vec{v}(0) = \vec{v_0}$, calculamos $\vec{C_1}$ y $\vec{C_2}$

$$\vec{v}(0) = -g{\cdot}(0)\vec{j} + \vec{C_1} = \vec{v_0} \Longrightarrow \vec{C_1} = \vec{v_0};$$
$$\vec{v}(0) = -\frac{1}{2}\,g{\cdot}(0)^2\vec{j} + \vec{C_1}{\cdot}(0) + \vec{C_2} = \vec{r_0} \Longrightarrow \vec{C_2} = \vec{r_0},$$

por lo tanto, la función de posición del proyectil $\vec{r}(t)$ es

$$\vec{r}(t) = -\frac{1}{2}\,gt^2\vec{j} + \vec{v_0}t + \vec{r_0}. \tag{3.5}$$

Cuando no se dan los vectores $\vec{r_0}$ y $\vec{v_0}$ en forma explícita como en la fórmula (3.7), pero se conocen la altura h, la rapidez inicial v y el ángulo θ, entonces, para determinar la función de posición del proyectil $\vec{r}(t)$ procedemos de la siguiente manera (Figura 5): $\vec{r_0} = h\vec{j}$, donde, $h = \|\vec{r_0}\|$,la velocidad $\vec{v_0}$, en términos de sus componentes es

$$\vec{v_0} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} = \|\vec{v_0}\|\cos\alpha\vec{i} + \|\vec{v_0}\|\cos\beta\vec{j} \tag{3.6}$$

donde v_x es la proyección escalar de $\vec{v_0}$ sobre el eje x y v_y es la proyección escalar de $\vec{v_0}$ sobre el eje y. Si tenemos en cuenta que $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, y que $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$, entonces

$$\vec{v_0} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} = \|\vec{v_0}\|\cos\alpha\vec{i} + \|\vec{v_0}\|\operatorname{sen}\alpha\vec{j}. \tag{3.7}$$

Sustituyendo las componentes obtenidas de $\vec{r_0}$ y $\vec{v_0}$ en la fórmula (3.7), concluimos que:

$$\vec{r}(t) = -\frac{1}{2}\,gt^2\vec{j} + \left[\|\vec{v_0}\|\cos\alpha\vec{i} + \|\vec{v_0}\|\operatorname{sen}\alpha\vec{j}\right]t + h\vec{j},$$
$$\vec{r}(t) = \|\vec{v_0}\|\cos\alpha t\vec{i} + \left[h + \|\vec{v_0}\|\operatorname{sen}\alpha t - \frac{1}{2}\,gt^2\right]\vec{j}.$$

4. Calcule la longitud de arco de las curvas dadas por las siguientes funciones:

a) $\vec{r} = (2t, 3\operatorname{sen}t, 3\cos t)$; $a \le t \le b$

b) $\vec{r}\,(t) = (e^t, e^t\operatorname{sen}t, e^t\cos t)$; $0 \le t \le 2\pi$

c) $24xy = x^4 + 48$; $2 \le x \le 4$

d) $y = \ln x$; $1 \le x \le 2$.

Solución

(a) Para calcular la longitud del arco de la curva, $\vec{r}(t) = 2t\vec{i} + 3\operatorname{sen}t\vec{j} + \cos t\vec{k}$, aplicamos la fórmula: $L = \displaystyle\int_a^b \|\vec{r}'(t)\|dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt$, donde $\vec{r}'(t) = 2\vec{i} + 3\cos t\vec{j} - 3\operatorname{sen}t\vec{k}$, entonces:

$$L = \int_a^b \sqrt{4 + 9\cos^2 t + 9\operatorname{sen}^2 t}dt = \int_a^b \sqrt{13}dt = \sqrt{13}(b-a)(u.l.).$$

(b) Procedemos de manera similar al ejemplo anterior:

$$\begin{aligned}\vec{\mathrm{r}}'(t) &= \mathrm{e}^t\vec{\mathrm{i}} + (\mathrm{e}^t\cos t + \mathrm{e}^t\operatorname{sen} t)\vec{\mathrm{j}} + (\mathrm{e}^t\cos t - \mathrm{e}^t\operatorname{sen} t)\vec{\mathrm{k}}\\ &= \mathrm{e}^t\vec{\mathrm{i}} + \mathrm{e}^t(\cos t + \operatorname{sen} t)\vec{\mathrm{j}} + \mathrm{e}^t(\cos t - \operatorname{sen} t)\vec{\mathrm{k}},\end{aligned}$$

luego

$$\|\vec{\mathrm{r}}'(t)\| = \sqrt{3\mathrm{e}^{2t}} = \sqrt{3}\mathrm{e}^t \quad\Longrightarrow\quad \int_0^{2\pi}\|\vec{\mathrm{r}}'(t)\|dt = \int_0^{2\pi}\sqrt{3}\mathrm{e}^t dt = \sqrt{3}(\mathrm{e}^{2\pi} - \mathrm{e}^0) = 925,767(u.l.).$$

(c) Para calcular la longitud del arco de una curva en coordenadas rectangulares aplicamos la fórmula: $L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$, calculamos y'_x y la simplificamos:

$$\frac{d\left(\dfrac{48 + x^4}{24x}\right)}{dx} = \frac{96x^4 - 24\left(48 + x^4\right)}{(24x)^2} = \frac{-1152 + 72x^4}{576x^2} = \frac{72(-16 + x^4)}{576x^2} = \frac{-16 + x^4}{8x^2}.$$

Ahora, calculamos

$$\begin{aligned}L &= \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx = \int_2^4 \sqrt{1 + \left(\frac{-16 + x^4}{8x^2}\right)^2}dx = \int_2^4 \sqrt{1 + \frac{256 - 32x^4 + x^8}{64x^4}}dx\\ &= \int_2^4 \sqrt{\frac{256 + 32x^4 + x^8}{64x^4}}dx = \int_2^4 \sqrt{\frac{(16 + x^4)^2}{64x^4}}dx = \int_2^4 \frac{16 + x^4}{8x^2}dx\\ &= \int_2^4 \left(\frac{2}{x^2} + \frac{x^2}{8}\right)dx = \left(\frac{-2}{x} + \frac{x^3}{24}\right)\Bigg|_2^4 = \frac{17}{6}(u.l).\end{aligned}$$

(d) Como la función es, $y = \ln x$, aplicamos la fórmula:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2}dx = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}dx = \int_1^2 \sqrt{\frac{1 + x^2}{x^2}}dx,$$

hacemos la sustitución hiperbólica $x = \operatorname{senh} z \Longrightarrow dx = \cosh z dz$,

$$\sqrt{\frac{1 + x^2}{x^2}} = \sqrt{\frac{1 + \operatorname{senh}^2 z}{\operatorname{senh}^2 z}} = \sqrt{\frac{\cosh^2 z}{\operatorname{senh}^2 z}} = \frac{\cosh z}{\operatorname{senh} z},$$

los nuevos límites de integración los obtenemos a partir de la sustitución $x = \operatorname{senh} z$, $1 = \operatorname{senh} z \Longrightarrow z = \operatorname{senh}^{-1}(1)$; $2 = \operatorname{senh} z \Longrightarrow z = \operatorname{senh}^{-1}(2)$, luego

$$\begin{aligned}\int_1^2 \sqrt{\frac{1 + x^2}{x^2}}dx &= \int_{\operatorname{senh}^{-1}(1)}^{\operatorname{senh}^{-1}(2)} \frac{\cosh z}{\operatorname{senh} z}\cosh z dz = \int_{\operatorname{senh}^{-1}(1)}^{\operatorname{senh}^{-1}(2)} \frac{\cosh^2 z}{\operatorname{senh} z}dz = \int_{\operatorname{senh}^{-1}(1)}^{\operatorname{senh}^{-1}(2)} \frac{1 + \operatorname{senh}^2 z}{\operatorname{senh} z}dz\\ &= \int_{\operatorname{senh}^{-1}(1)}^{\operatorname{senh}^{-1}(2)} \frac{\operatorname{senh}^2 z}{\operatorname{senh} z}dz + \int_{\operatorname{senh}^{-1}(1)}^{\operatorname{senh}^{-1}(2)} \frac{dz}{\operatorname{senh} z}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\operatorname{senh}^{-1}(1)}^{\operatorname{senh}^{-1}(2)} \operatorname{senh} z dz + \int_{\operatorname{senh}^{-1}(1)}^{\operatorname{senh}^{-1}(2)} \frac{1}{\operatorname{senh} z} dz \\
&= \cosh z \Big|_{\operatorname{senh}^{-1}(1)}^{\operatorname{senh}^{-1}(2)} + \underbrace{\int_{\operatorname{senh}^{-1}(1)}^{\operatorname{senh}^{-1}(2)} \frac{1}{\operatorname{senh} z} dz}_{I},
\end{aligned}
$$

calculamos la integral indefinida de I, por medio de la sustitución $u = \tanh \frac{z}{2}$:

$$
\int \frac{1}{\operatorname{senh} z} dz = \int \left(\frac{1-u^2}{2u}\right)\left(\frac{2du}{1-u^2}\right) = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln\left|\tanh \frac{z}{2}\right| + C.
$$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
\int_1^2 \sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}} dx &= \cosh z \Big|_{\operatorname{senh}^{-1}(1)}^{\operatorname{senh}^{-1}(2)} + \int_{\operatorname{senh}^{-1}(1)}^{\operatorname{senh}^{-1}(2)} \frac{1}{\operatorname{senh} z} dz = \cosh z \Big|_{\operatorname{senh}^{-1}(1)}^{\operatorname{senh}^{-1}(2)} + \ln\left|\tanh \frac{z}{2}\right| \Big|_{\operatorname{senh}^{-1}(1)}^{\operatorname{senh}^{-1}(2)} \\
&= 0,821854 + 0,400162 = 1.22202 (u.l.).
\end{aligned}
$$

5. Calcule $\vec{\tau}(t)$, $\vec{\nu}(t)$, a_T y a_N; en los instantes de tiempo indicados:

   a) $\vec{r}(t) = t\vec{i} + \frac{1}{t}\vec{j}$; $t = 1$

   b) $\vec{r}(t) = t\vec{i} + 3t^2\vec{j} + \frac{t^2}{2}\vec{k}$; $t = 2$

   c) $\vec{r}(t) = e^t \cos t\vec{i} + e^t \operatorname{sen} t\vec{j} + e^t\vec{k}$; $t = 0$.

   Solución Para calcular los vectores $\vec{\tau}$ y $\vec{\nu}$, podemos aplicar las fórmulas:

$$
\vec{\tau}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}; \quad \vec{\nu}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|},
$$

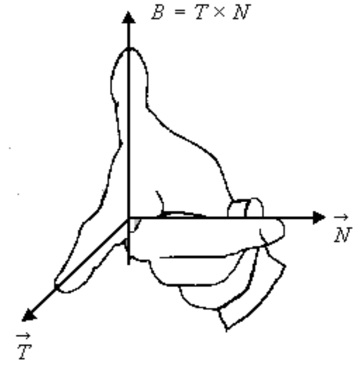


Figura 6

sin embargo en la mayoría de los casos al aplicar estas fórmulas los cálculos resultan complicados, por eso, para simplificar los procedimientos es conveniente tener en cuenta las siguientes observaciones:

– El vector aceleración, $\vec{a}(t) = \vec{r}''(t)$, está en el plano generado por los vectores $\vec{\tau}(t)$ y $\vec{\nu}(t)$ (Figura 7).

– El vector binormal $\vec{B}(t)$ se calcula por medio del producto vectorial $\vec{B} = \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)$, el vector $\vec{T} = \vec{r}'(t)$, es el vector tangente a la curva C (Figura 7).

– Una vez calculados los vectores, $\vec{r}'(t)$ y $\vec{\mathbf{B}}(t)$, calculamos el vector $\vec{\mathbf{N}}(t) = \vec{\mathbf{B}}(t) \times \vec{\mathbf{T}}(t)$.

– Una vez conocidos los vectores $\vec{\mathbf{T}}$, $\vec{\mathbf{N}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$, calculamos sus respectivos vectores unitarios $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ (vector tangente unitario), $\vec{\boldsymbol{\nu}}$ (vector normal principal) y $\vec{\beta}$ (vector binormal principal) (Figura 7).

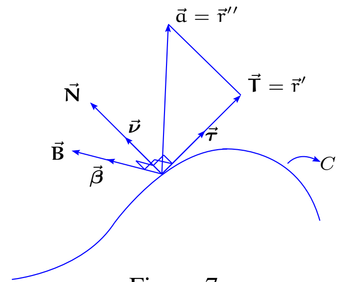


Figura 7

– La dirección positiva de cada vector la da la regla de la mano derecha (Figura 6).

– Si $t = t_0$, es conveniente evaluar el vector obtenido inmediatamente y simplificar al máximo.

a) En este caso la curva es plana ya que $\vec{r}(t) = t\vec{\imath} + \dfrac{1}{t}\vec{\jmath}$. Calculamos $\vec{r}'(t)$ y $\vec{r}''(t)$:

$\vec{r}'(t) = \vec{\imath} - \dfrac{1}{t^2}\vec{\jmath}$, $\vec{r}''(t) = \dfrac{2}{t^3}\vec{\jmath}$, luego, si $t = 1$, $\vec{r}'(1) = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$, $\vec{r}''(1) = 2\vec{\jmath}$, entonces $\vec{\boldsymbol{\tau}}(1) = \dfrac{\vec{r}'(1)}{\|\vec{r}'(1)\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{\imath} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{\jmath}$.

Para obtener el $\vec{\mathbf{N}}$, calculamos inicialmente el vector $\vec{\mathbf{B}}(1) = \vec{r}'(1) \times \vec{r}''(1) = 2\vec{k}$, luego $\vec{\mathbf{N}}(1) = \vec{\mathbf{B}}(1) \times \vec{\mathbf{T}}(1) = 2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$, y $\vec{\boldsymbol{\nu}}(1) = \dfrac{\vec{\mathbf{N}}(1)}{\|\vec{\mathbf{N}}(1)\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{\imath} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{\jmath}$.

La componente tangencial de la aceleración a_T es $a_T = \vec{a}(1)\cdot\vec{\boldsymbol{\tau}}(1) = -\sqrt{2}$,

la componente normal de la aceleración es $a_{\vec{N}} = \vec{a}(1)\cdot\vec{\boldsymbol{\nu}}(1) = \sqrt{2}$.

b) El vector, $\vec{r}(t) = t\vec{\imath} + 3t^2\vec{\jmath} + \dfrac{t^2}{2}\vec{k}$, nos describe una curva en el espacio, luego

$\vec{r}'(t) = 1\vec{\imath} + 6t\vec{\jmath} + t\vec{k}, \quad \vec{r}''(t) = 6\vec{\jmath} + \vec{k}$.

Evaluamos en $t = 2$, $\vec{r}'(2) = \vec{\imath} + 12\vec{\jmath} + 2\vec{k}, \quad \vec{r}(2)''(t) = 6\vec{\jmath} + \vec{k}$, entonces:

$\vec{\boldsymbol{\tau}}(2) = \dfrac{\vec{r}'(2)}{\|\vec{r}'(2)\|} = \dfrac{1}{\sqrt{149}}\vec{\imath} + \dfrac{12}{\sqrt{149}}\vec{\jmath} + \dfrac{2}{\sqrt{149}}\vec{k}$.

Calculamos $\vec{\mathbf{B}}(2) = \vec{r}'(2) \times \vec{r}''(2) = \vec{\jmath} + 6\vec{k}$, luego $\vec{\mathbf{N}}(2) = \vec{\mathbf{B}}(2) \times \vec{\boldsymbol{\tau}}(2) = -74\vec{\imath} + 6\vec{\jmath} + \vec{k}$ y $\vec{\boldsymbol{\nu}}(2) = \dfrac{\vec{\mathbf{N}}(2)}{\|\vec{\mathbf{N}}(2)\|} = \dfrac{-2{\cdot}37}{\sqrt{37}{\cdot}\sqrt{149}}\vec{\imath} + \dfrac{6}{\sqrt{5513}}\vec{\jmath} + \dfrac{1}{\sqrt{5513}}\vec{k} = -2\sqrt{\dfrac{37}{149}}\vec{\imath} + \dfrac{6}{\sqrt{5513}}\vec{\jmath} + \dfrac{1}{\sqrt{5513}}\vec{k}$.

Para simplificar los cálculos, de aquí en adelante, utilizaremos la representación escalar de vectores. Calculamos la componente tangencial y normal de la aceleración

$$a_T = \vec{a}(2)\cdot\vec{\boldsymbol{\tau}}(2) = (0,6,1)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{149}}, \frac{12}{\sqrt{149}}, \frac{2}{\sqrt{149}}\right) = \frac{74}{\sqrt{149}},$$

$$a_N = \vec{a}(2)\cdot\vec{\boldsymbol{\nu}}(2) = (0,6,1)\cdot\left(-2\sqrt{\frac{37}{149}}, \frac{6}{\sqrt{5513}}, \frac{1}{\sqrt{5513}}\right) = \frac{37}{\sqrt{37}\sqrt{149}} = \sqrt{\frac{37}{149}}.$$

c) El vector $\vec{r}(t) = \left(e^t\cos t, e^t\operatorname{sen} t, e^t\right)$, nos describe una curva en el espacio, entonces:

$\vec{r}'(t) = (e^t\cos t - e^t\operatorname{sen} t, e^t\cos t + e^t\operatorname{sen} t, e^t) = (e^t(\cos t - \operatorname{sen} t), e^t(\cos t + \operatorname{sen} t), e^t)$,

$\vec{\mathrm{r}}''(t) = (-2\mathrm{e}^t \operatorname{sen} t, 2\mathrm{e}^t \cos t, \mathrm{e}^t)$, ahora evaluamos en $t = 0$, $\vec{\mathrm{r}}'(0) = (1,1,1)$, $\vec{\mathrm{r}}''(0) = (0,2,1)$, calculamos $\vec{\boldsymbol{\nu}}(0) = \dfrac{\vec{\mathrm{r}}'(0)}{\|\vec{\mathrm{r}}'(0)\|} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$,

calculamos $\vec{\mathbf{B}}(0) = \vec{\mathrm{r}}'(0) \times \vec{\mathrm{r}}''(0) = (-1,-1,2)$, luego $\vec{\mathbf{N}}(0) = \vec{\mathbf{B}}(0) \times \vec{\boldsymbol{\tau}}(0) = (-26, 4, -11)$, entonces $\vec{\boldsymbol{\nu}}(0) = \dfrac{\vec{\mathbf{N}}(0)}{\|\vec{\mathbf{N}}(0)\|} = \left(\dfrac{-26}{\sqrt{813}}, \dfrac{4}{\sqrt{813}}, \dfrac{-11}{\sqrt{813}}\right)$.

Ahora calculamos las componentes tangencial y normal de la aceleración:

$$a_T = \vec{\mathrm{a}}(0) \cdot \vec{\boldsymbol{\tau}}(0) = (0,2,1)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt{3},$$

$$a_N = \vec{\mathrm{a}}(0) \cdot \vec{\boldsymbol{\nu}}(0) = (0,2,1)\left(\frac{-26}{\sqrt{813}}, \frac{4}{\sqrt{813}}, \frac{-11}{\sqrt{813}}\right) = -\sqrt{\frac{3}{271}}.$$

6. Dada la función vectorial $\vec{\mathrm{r}}(t) = \cos t\vec{\imath} + \operatorname{sen} t\vec{\jmath} + \mathrm{e}^t\vec{\mathrm{k}}$. Determine el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ donde la recta tangente a la curva descrita por $\vec{\mathrm{r}}(t)$, es paralela al plano cuya ecuación es $\sqrt{3}x + y - 4$.

   Solución Determinemos inicialmente $\vec{\mathrm{r}}'(t)$, que es el vector tangente a la curva dada en cualquier instante de tiempo t: $\vec{\mathrm{r}}'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, \mathrm{e}^t)$. El vector normal (ortogonal) al plano $\sqrt{3}x + y - 4$ es $\vec{\mathbf{N}} = (\sqrt{3}, 1, 0)$,

   la recta tangente a la curva es paralela al plano dado, en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$, si y sólo si los vectores $\vec{\mathrm{r}}'(t)$ y $\vec{\mathbf{N}}(t)$ son ortogonales, es decir:

$$\vec{\mathrm{r}}'(t) \cdot \vec{\mathbf{N}} = (-\operatorname{sen} t, \cos t, \mathrm{e}^t) \cdot (\sqrt{3}, 1, 0) = 0 \Longrightarrow \cos t - \sqrt{3}\operatorname{sen} t = 0,$$

   resolvemos la ecuación trigonométrica obtenida:

$$\cos t - \sqrt{3}\operatorname{sen} t \left(\frac{-\cos t - \sqrt{3}\operatorname{sen} t}{-\cos t - \sqrt{3}\operatorname{sen} t}\right) = 0 \Longrightarrow -\cos^2 t + 3\operatorname{sen}^2 t = 0,$$

   luego

$$-\cos^2 t + 3\mathrm{sen}^2\, t = -\cos^2 t + 3\left(1 - \cos^2 t\right) = 3 - 4\cos^2 t = 0.$$

   Resolviendo la última ecuación obtenemos $\cos t = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow t = \arccos\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \Longrightarrow t = \pm\dfrac{\pi}{6}$, de los valores obtenidos el que satisface la ecuación $\vec{\mathrm{r}}' \cdot \vec{\mathbf{N}} = 0$ es $t = \dfrac{\pi}{6}$. Ahora escribimos, $\vec{\mathrm{r}}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \mathrm{e}^t)$, en forma paramétrica para obtener las coordenadas del punto P:

$$x = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad y = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, \quad z\left(\frac{\pi}{6}\right) = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}},$$

   entonces en el punto $P\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}, \mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}}\right)$, la recta tangente a la curva descrita por $\vec{\mathrm{r}}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \mathrm{e}^t)$, es paralela al plano cuya ecuación es $\sqrt{3}x + y - 4$.

7. Considere la curva $\vec{r}(t) = \left(2t - t^2, t^2, 2t + t^2\right)$; y el punto $P\,(1,1,3)$. Determine:

   a) La ecuación del plano osculador

   b) La ecuación del plano normal

   c) La ecuación del plano rectificante

   d) La ecuación de la recta tangente

   e) La ecuación de la recta normal

   f) La ecuación de la recta binormal

   a la curva definida por la correspondiente función vectorial en el punto indicado.

Solución Determinamos la primera y segunda derivadas de $\vec{r}(t) = (2t - t^2, t^2, 2t + t^2)$:

$$\vec{r}'(t) = (2 - 2t, 2t, 2 + 2t);\ \ \vec{r}''(t) = (-2, 2, 2),$$

como $P(1,1,3)$ entonces $t = 1$. Ahora evaluamos $\vec{r}'(t)$ en $t = 1$

$$\vec{r}'(1) = (0, 2, 4);\ \ \vec{r}''(1) = (2, 2, 2)$$

y calculamos los vectores $\vec{\boldsymbol{\tau}}$, $\vec{\boldsymbol{\beta}}$ y $\vec{\boldsymbol{\nu}}$ en $t = 1$

$$\vec{\boldsymbol{\tau}}(1) = \frac{\vec{r}'(1)}{\|\vec{r}'(1)\|} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\,(0,2,4) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right),$$

el vector $\vec{\boldsymbol{\beta}}$, lo obtenemos calculando inicialmente el vector $\vec{\mathbf{B}}$.

$$\vec{\mathbf{B}}(1) = \vec{r}'(1) \times \vec{r}''(1) = (0,2,4) \times (2,2,2) = (-4,-8,4),$$

luego

$$\vec{\boldsymbol{\beta}}(1) = \frac{\vec{\mathbf{B}}(1)}{\|\vec{\mathbf{B}}(1)\|} = \frac{1}{4\sqrt{6}}(-4,-8,4) = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right),$$

como el vector tangente a la curva es $\vec{\mathbf{T}}(t) = \vec{r}'(t)$ (Figura 7), entonces:

$$\vec{\mathbf{N}}(1) = \vec{\mathbf{B}}(1) \times \vec{\mathbf{T}}(1) = (-40, 16, -8)$$

y

$$\vec{\boldsymbol{\nu}}(1) = \frac{\vec{\mathbf{N}}(1)}{\|\vec{\mathbf{N}}(1)\|} = \frac{1}{8\sqrt{30}}(-40,16,-8) = \left(-\sqrt{\frac{5}{6}}, \sqrt{\frac{2}{15}}, -\frac{1}{\sqrt{30}}\right)$$

(a) Ecuación del plano osculador: $(\vec{r} - \vec{r_0})\cdot\vec{\mathbf{B}} = 0$,

$$(x,y,z) - (1,1,3)\cdot(-4,-8,4) = 0 \Longrightarrow -4\,(-1+x) - 8\,(-1+y) + 4\,(-3+z) = 0,$$

y simplificando obtenemos $[\,4\,(-x - 2y + z) = 0 \Longrightarrow -x - 2y + z = 0.$

(b) Ecuación del plano normal: $(\vec{r} - \vec{r_0})\cdot\vec{\mathbf{T}} = 0$,

$$(x, y, z) - (1, 1, 3)\cdot (0, 2, 4) = 0 \Longrightarrow 2\,(-1 + y) + 4\,(-3 + z) = 0,$$

es decir $2\,(-7 + y + 2z) = 0 \Longrightarrow -7 + y + 2z = 0$.

(c) Ecuación del plano rectificante: $(\vec{r} - \vec{r_0})\cdot\vec{\mathbf{N}} = 0$,

$$(x, y, z) - (1, 1, 3)\cdot (-40, 16, -8) = 0 \Longrightarrow -40\,(-1 + x) + 16\,(-1 + y) - 8\,(-3 + z) = 0,$$

luego $8\,(6 - 5x + 2y) - 8z = 0 \Longrightarrow 8\,(6 - 5x + 2y - z) = 0$ y finalmente la ecuación del plano rectificante es: $6 - 5x + 2y - z = 0$.

(d) Ecuación de la recta tangente. La recta pasa por el punto $P(1, 1, 3)$ y su vector director es $\vec{\mathbf{T}}(1) = (0, 2, 4)$, entonces $L(s) = (1, 1, 3) + s(0, 2, 4)$, $s \in \mathbb{R}$.

(e) Ecuación de la recta normal. La recta pasa por el punto $P(1, 1, 3)$ y su vector director es $\vec{\mathbf{N}}(1) = (-40, 16, -8)$, entonces $L(s) = (1, 1, 3) + s(-40, 16, -8)$, $s \in \mathbb{R}$.

(f) Ecuación de la recta binormal. La recta pasa por el punto $P(1, 1, 3)$ y su vector director es $\vec{\mathbf{B}}(1) = (-4, -8, 4)$, entonces $L(s) = (1, 1, 3) + s(-4, -8, 4)$, $s \in \mathbb{R}$.

8. Determinar la longitud del arco de la curva definida por la función $y = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{\ln x}{2}$, comprendida entre el punto mínimo de la curva y el punto donde la curva tiene su máxima curvatura.

Solución Para determinar la longitud del arco de la curva definida por la ecuación $y = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{\ln x}{2}$, es necesario hallar los puntos que se piden en el ejercicio.

El dominio de la función es $D_y = \left]0, +\infty\right[$. Para hallar el punto mínimo calculamos la primer derivada de la función $y'(x) = \dfrac{-1}{2x} + \dfrac{x}{2} = \dfrac{-1 + x^2}{2x}$, igualamos a cero, es decir $\dfrac{-1 + x^2}{2x} = 0$, luego los valores críticos de x son $x = 1$, $x = -1 \notin D_y$. Por el criterio de la segunda derivada verificamos si $x = 1$ es un valor mínimo i.e.

$$y''(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2} = \frac{1 + x^2}{2x^2}, \text{ entonces } y''(1) = 1 > 0 \Longrightarrow x = 1 \text{ es un mínimo,}$$

luego, el punto mínimo de la curva es $P\left(1, \frac{1}{4}\right)$.

Ahora, hallamos el punto donde la curva tiene la máxima curvatura, para esto calculamos la curvatura K:

$$K(t) = \frac{|y''|}{\left[1 + (y')^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\dfrac{1 + x^2}{2x^2}}{\left[1 + \left(\dfrac{-1 + x^2}{2x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{1 + x^2}{2x^2\left[1 + \dfrac{\left(-1 + x^2\right)^2}{4x^2}\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{1+x^2}{2x^2\left(1+\dfrac{1-2x^2+x^4}{4x^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1+x^2}{2x^2\left(\dfrac{1+2x^2+x^4}{4x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{1+x^2}{2x^2\left[\dfrac{\left(1+2x^2+x^4\right)^{\frac{3}{2}}}{8x^3}\right]} = \frac{4x\left(1+x^2\right)}{(1+2x^2+x^4)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4x\left(1+x^2\right)}{[(1+x^2)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{4x(1+x^2)}{(1+x^2)^{\frac{6}{3}}} = \frac{4x}{\left(1+x^2\right)^2}.$$

Derivamos $K(x)$, para determinar el valor de x donde la curvatura tiene su punto máximo:

$$K'(t) = \frac{-16x^2\left(1+x^2\right)+4\left(1+x^2\right)^2}{\left(1+x^2\right)^4} = \frac{4-8x^2-12x^4}{\left(1+x^2\right)^4}$$

$$= \frac{4\left(-1-x^2\right)\left(-1+3x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^4} = \frac{4\left(1-3x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^3}.$$

Así los puntos críticos de $K'(t) = \dfrac{4\left(1-3x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^3} = \dfrac{4\left(1-\sqrt{3}x\right)\left(1+\sqrt{3}x\right)}{(1+x^2)^3} = 0$, luego, los valores críticos de x son $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \notin D_y$ y por el criterio de la segunda derivada verificamos que $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, es un valor máximo, pues

$$K''(x) = \frac{48x\left(-1+x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^4}, \text{ evaluamos } K''\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{-27\sqrt{3}}{8} < 0,$$

por lo tanto la curva tiene la máxima curvatura cuando $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

La longitud del arco de la curva la calculamos desde $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, hasta $x = 1$.

$$L = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \sqrt{1+\left(\frac{-1}{2x}+\frac{x}{2}\right)^2}dx = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \sqrt{1+\frac{\left(-1+x^2\right)^2}{4x^2}}dx$$

$$= \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \sqrt{1+\frac{1-2x^2+x^4}{4x^2}}dx = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \sqrt{\frac{1+2x^2+x^4}{4x^2}}dx = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \sqrt{\frac{\left(1+x^2\right)^2}{4x^2}}dx$$

$$= \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{1+x^2}{2x}dx = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \left(\frac{1}{2x}+\frac{x}{2}\right)dx = \frac{x^2}{4}+\frac{\ln|x|}{2}\Bigg|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 = \frac{1}{6}-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= 0.44132.$$

9. Un proyectil es lanzado con una velocidad inicial de $500m/s$ y un ángulo de elevación de $30°$. Determine:

a) el alcance del proyectil,

b) la máxima altura que alcanza el proyectil,

c) la velocidad en el momento del impacto.

Solución

a) Las ecuaciones paramétricas del proyectil son $x = (v_0 \cos\alpha)t$, $y = (v_0 \operatorname{sen}\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$, y la distancia horizontal d es el valor de x cuando $y = 0$. Haciendo $y = 0$, se obtiene $t = 0$ y $t = \frac{2v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g}$. De este último valor de t obtenemos $d = x = (v_0 \cos\alpha)\frac{2v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g} = \frac{v_0^2 2 \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g}$, entonces de acuerdo a los datos del problema tenemos que el alcance del proyectil es:

$$d = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g} = \frac{(500)^2 \operatorname{sen} 2\left(\frac{\pi}{6}\right)}{9.8} = 22,1km.$$

b) La máxima altura, el proyectil la alcanza cuando $y' = 0$, esto es

$$y' = -(gt) + v_0 \operatorname{sen}\alpha = 0 \Longrightarrow t = \frac{v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g} = \frac{500 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)}{9.8} = 25.5102.$$

El valor de t así obtenido es un máximo entonces el proyectil alcanza la altura máxima cuando

$$y_{\max} = -\frac{gt^2}{2} + tv_0 \operatorname{sen}\alpha = -\frac{(9,8)(25.51)^2}{2} + (25.51)(500)\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = 3,188km.$$

b) El vector de posición del proyectil es $\vec{r}(t) = (v_0\cos\alpha)t\vec{i} + \left[(v_0 \operatorname{sen}\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2\right]$, luego la velocidad en cualquier instante de tiempo t es:

$$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = [\, v_0\cos\alpha\,]\,\vec{i} + [-gt + v_0 \operatorname{sen}\alpha]\,\vec{j}.$$

c) En el momento del impacto $t = \frac{2v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g}$, por lo tanto:

$$\vec{v_F} = [\, v_0\cos\alpha\,]\,\vec{i} + \left[-g\frac{2v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g} + v_0 \operatorname{sen}\alpha\right]\vec{j} = v_0\cos\alpha\vec{i} - v_0 \operatorname{sen}\alpha\vec{j}.$$

Se concluye que la velocidad final es el conjugado de $\vec{v_0}$.

10. Hallar el punto P perteneciente a la curva $\vec{r}(t) = (1-2t, t^2, 2e^{2(t-1)})$, en el que el vector tangente $\vec{r}(t)$ es paralelo a $\vec{r}(t)$.

Solución Para que $\vec{r}'(t)$ sea paralelo a $\vec{r}(t)$ ha de existir un escalar α tal que $\vec{r}(t) = \alpha\vec{r}'(t)$, es decir $\left(1-2t, t^2, 2e^{2(-1+t)}\right) = \alpha\left(-2, 2t, 4e^{2(-1+t)}\right)$, por lo que igualando las componentes $1-2t = -2\alpha$, $t^2 = 2\alpha t$, $2e^{2(t-1)} = 4\alpha e^{2(t-1)}$ y de la última ecuación obtenemos que $\alpha = \frac{1}{2}$. Al sustituir, por ejemplo, el valor de α obtenido en la segunda ecuación obtenemos que $t = 1$. Como las ecuaciones paramétricas de la curva dada son $x = 1 - 2t$, $y = t^2$, $z = 2e^{2(t-1)}$, entonces al sustituir el valor $t = 1$ en dichas ecuaciones obtenemos las coordenadas del punto $P(-1, 1, 2)$, en el que el vector tangente $\vec{r}'(t)$ es paralelo al vector de posición $\vec{r}(t)$.

Tema 4

Ejercicios especiales: Funciones hiperbólicas

Prof. Rodolfo Obando

1. Escriba las siguientes expresiones en términos de funciones exponenciales y simplifique los resultados al máximo.

   a) $\cosh(2\ln x)$ b) $\cosh 2x + \operatorname{senh}\, 2x$

   c) $\ln(\cosh x + \operatorname{senh}\, x) + \ln(\cosh x - \operatorname{senh}\, x)$ d) $(x^2+1)\,\operatorname{sech}\,(\ln x)$

2. Calcule las derivadas de las siguientes funciones y simplifíquelas al máximo.

   a) $y = \sqrt[4]{(1+\tanh^2 x)^3}$ b) $y = \sqrt[4]{\dfrac{1-\tanh x}{1+\tanh x}}$

   c) $y = \operatorname{cosech}\,\vartheta\,[\,1-\ln(\operatorname{cosech}\,\vartheta)\,]$ d) $y = \ln \operatorname{senh}\, t - \dfrac{1}{2}\operatorname{cotanh}^2 t$

   e) $y = (x^2+1)\,\operatorname{sech}\,(\ln x)$ f) $y = \cosh^{-1}(2\sqrt{x+1})$

   g) $y = (1-t)\operatorname{cotanh}^{-1}\sqrt{t}$ h) $y = \ln x + \sqrt{1+x^2}\,\operatorname{cosech}^{-1} x.$

3. Calcule las siguientes integrales.

   a) $\displaystyle\int \frac{e^x}{\operatorname{senh}\, x - \cosh x}\,dx$ b) $\displaystyle\int \operatorname{senh}^4 x\,dx$ c) $\displaystyle\int \operatorname{senh}^3 x\,\cosh^2 x\,dx$

   d) $\displaystyle\int \operatorname{cotanh}^3 2x\,dx$ e) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{senh}\, x\,\cosh x}$ f) $\displaystyle\int \sqrt{\tanh x}\,dx$

   g) $\displaystyle\int \operatorname{cotanh}^2 x\,\operatorname{cosech}\, x\,dx$ h) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{5-2\,x+x^2}}$ i) $\displaystyle\int \frac{2\,x+5}{\sqrt{9\,x^2+6\,x+2}}\,dx.$

4. Demuestre la siguientes identidades,

   a) $\operatorname{senh}^{-1} x = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ b) $\cosh^{-1} x = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$

   c) $\tanh^{-1} x = \dfrac{1}{2}\,\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right).$

5. Calcular las siguientes integrales:

   a) $\displaystyle\int \frac{dx}{(5-2\,x+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\,(4-9x^2)^2}.$

Soluciones ejercicios especiales: Funciones hiperbólicas
Prof. Rodolfo Obando

1. Escriba las siguientes expresiones en términos de funciones exponenciales y simplifique los resultados al máximo.

a) $\cosh(2\ln x)$

b) $\cosh 2x + \operatorname{senh} 2x$

c) $\ln(\cosh x + \operatorname{senh} x) + \ln(\cosh x - \operatorname{senh} x)$

d) $(x^2+1)\operatorname{sech}(\ln x)$

Solución

a) Por definición, $\cosh u = \dfrac{e^{-u}+e^{u}}{2}$. Sea $u = 2\ln x = \ln x^2$, entonces:

$\cosh(2\ln x) = \dfrac{e^{\ln x^{-2}} + e^{\ln x^2}}{2} = \dfrac{x^{-2}+x^2}{2} = \dfrac{1}{2\,x^2} + \dfrac{x^2}{2} = \dfrac{1+x^4}{2\,x^2}.$

b) Expresamos $\cosh 2x + \operatorname{senh} 2x$ en términos de funciones exponenciales:

$$\begin{aligned}\cosh 2x + \operatorname{senh} 2x &= \frac{e^{-2x}+e^{2x}}{2} + \frac{-e^{-2x}+e^{2x}}{2} = \frac{1}{2\,e^{2\,x}} + \frac{e^{2\,x}}{2} + \frac{-1}{2\,e^{2\,x}} + \frac{e^{2\,x}}{2}\\ &= \frac{1+e^{4\,x}}{2\,e^{2\,x}} + \frac{-1+e^{4\,x}}{2\,e^{2\,x}} = \frac{1+e^{4\,x}-1+e^{4\,x}}{2e^{2\,x}} = e^{(4\,x-2\,x)} = e^{2\,x}.\end{aligned}$$

c) Sea $f(x) = \ln(\cosh x + \operatorname{senh} x) + \ln(\cosh x - \operatorname{senh} x)$ entonces,

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(\frac{e^{-x}+e^{x}}{2} + \frac{-e^{-x}+e^{x}}{2}) + \ln(\frac{e^{-x}+e^{x}}{2} - \frac{-e^{-x}+e^{x}}{2})\\ &= \ln\left(\frac{1}{2\,e^{x}} + \frac{e^{x}}{2} + \frac{-1}{2\,e^{x}} + \frac{e^{x}}{2}\right) + \ln\left(\frac{1}{2\,e^{x}} + \frac{e^{x}}{2} - \frac{-1}{2\,e^{x}} + \frac{e^{x}}{2}\right)\\ &= \ln\left(\frac{1+e^{2\,x}}{2\,e^{x}} + \frac{-1+e^{2\,x}}{2\,e^{x}}\right) + \ln\left(\frac{1+e^{2\,x}}{2\,e^{x}} - \frac{-1+e^{2\,x}}{2\,e^{x}}\right)\\ &= \ln(e^{x}) + \ln(e^{-x}) = \ln(e^{x}) + \ln\left(\frac{1}{e^{x}}\right) = \ln(e^{x}) + \ln 1 - \ln(e^{x})\\ &= \ln(e^{x}) - \ln(e^{x}) = 0.\end{aligned}$$

d) Recordemos que $\operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x} = \dfrac{2}{e^{-x}+e^{x}} = \dfrac{2\,e^{x}}{1+e^{2\,x}}$ por lo tanto, $(1+x^2)\operatorname{sech}(\ln x) = (1+x^2)\left(\frac{2\,e^{\ln x}}{1+e^{2\ln x}}\right) = (1+x^2)\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right) = 2\,x.$

2. Calcule las derivadas de las siguientes funciones y simplifíquelas al máximo.

a) $y = \sqrt[4]{(1+\tanh^2 x)^3}$

b) $y = \sqrt[4]{\dfrac{1-\tanh x}{1+\tanh x}}$

c) $y = \operatorname{cosech}\vartheta\,[\,1-\ln(\operatorname{cosech}\vartheta)\,]$

d) $y = \ln \operatorname{senh} t - \dfrac{1}{2}\operatorname{cotanh}^2 t$

e) $y = (x^2+1)\operatorname{sech}(\ln x)$

f) $y = \cosh^{-1}(2\sqrt{x+1})$

g) $y = (1-t)\operatorname{cotanh}^{-1}\sqrt{t}$

h) $y = \ln x + \sqrt{1+x^2}\,\operatorname{cosech}^{-1} x.$

Solución

a) Sea $y = \sqrt[4]{(1+\tanh^2 x)^3} = \left(1+\tanh^2 x\right)^{\frac{3}{4}}$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{4\left(1+\tanh^2 x\right)^{\frac{1}{4}}} \cdot 2\,\text{sech}^{\,2} x\, \tanh x = \frac{3\,\text{sech}^{\,2} x\, \tanh x}{2\left(1+\tanh^2 x\right)^{\frac{1}{4}}}.$$

b) Sea $y = \sqrt[4]{\dfrac{1-\tanh x}{1+\tanh x}} = \left(\dfrac{1-\tanh x}{1+\tanh x}\right)^{\frac{1}{4}}$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4\left(\dfrac{1-\tanh x}{1+\tanh x}\right)^{\frac{3}{4}}}\left[\frac{-\text{sech}^{\,2} x\,(1+\tanh x) - \text{sech}^{\,2} x\,(1-\tanh x)}{(1+\tanh x)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{4\left(\dfrac{1-\tanh x}{1+\tanh x}\right)^{\frac{3}{4}}}\left[\frac{-2\,\text{sech}^{\,2} x}{(1+\tanh x)^2}\right] = \frac{-1}{2\left(\dfrac{1-\tanh x}{1+\tanh x}\right)^{\frac{3}{4}}}\left[\frac{\text{sech}^{\,2} x}{(1+\tanh x)^2}\right].$$

c) Se tiene que:

$$\frac{dy}{d\vartheta} = \text{cotanh}\ \vartheta\, \text{cosech}\, \vartheta - \text{cotanh}\ \vartheta\, \text{cosech}\, \vartheta\ [1-\ln(\text{cosech}\, \vartheta)]$$

$$= \text{cotanh}\ \vartheta\, \text{cosech}\, \vartheta\ \ln(\text{cosech}\, \vartheta)$$

d) En este caso

$$\frac{dy}{d\vartheta} = \text{cotanh}\ t + \text{cotanh}\ t\, \text{cosech}^{\,2} t = \text{cotanh}\ t\, \underbrace{(1+\text{cosech}^{\,2}\, t)}_{\text{cotanh}^{\,2} t} = \text{cotanh}^{\,3}\, t.$$

e) En el ejercicio 1d), probamos que $(1+x^2)\ \text{sech}\ x = 2x$, por lo tanto la derivada

$$\frac{d}{dx}\left[(1+x^2)\ \text{sech}\ x\right] = 2.$$

f) Observación: $\cosh^{-1} x$, es la función inversa de $y = \cosh x$.

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{\sqrt{\left(2\sqrt{x+1}\right)^2 - 1}}\right)\left(\frac{2}{2\sqrt{x+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{-1+4\,(1+x)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{\sqrt{(3+4\,x)(1+x)}}.$$

g) Observación: $\text{cotanh}^{\,-1} x$, es la función inversa de $y = \text{cotan}\ x$.

$$\frac{dy}{dt} = -\,\text{cotanh}^{\,-1}\sqrt{t} + (1-t)\left[\frac{1}{1-(\sqrt{t})^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}\right] = -\,\text{cotanh}^{\,-1}\sqrt{t} + (1-t)\left[\frac{1}{1-t}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{t}} - \text{cotanh}^{\,-1}(\sqrt{t}) = \frac{1-2\sqrt{t}\,\text{cotanh}^{\,-1}\sqrt{t}}{2\sqrt{t}}.$$

h) Tenemos que $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x\,\text{cosech}^{\,-1} x}{\sqrt{1+x^2}} + \sqrt{1+x^2}\cdot\dfrac{-1}{x\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x\,\text{cosech}^{\,-1} x}{\sqrt{1+x^2}} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x\,\text{cosech}^{\,-1} x}{\sqrt{1+x^2}}$.

3. Calcule las siguientes integrales.

a) $\displaystyle\int \frac{e^x}{\operatorname{senh} x - \cosh x}\,dx$ b) $\displaystyle\int \operatorname{senh}^4 x\,dx$ c) $\displaystyle\int \operatorname{senh}^3 x\,\cosh^2 x\,dx$

d) $\displaystyle\int \operatorname{cotanh}^3 2x\,dx$ e) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{senh} x\,\cosh x}$ f) $\displaystyle\int \sqrt{\tanh x}\,dx$

g) $\displaystyle\int \operatorname{cotanh}^2 x\,\operatorname{cosech} x\,dx$ h) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}}$ i) $\displaystyle\int \frac{2x+5}{\sqrt{9x^2+6x+2}}\,dx$

Solución

a) Expresamos la función integrando en términos de funciones exponenciales y simplificamos,

$$\frac{e^x}{\operatorname{senh} x - \cosh x} = \frac{e^x}{\dfrac{-e^{-x}+e^x}{2} - \dfrac{e^{-x}+e^x}{2}} = \frac{e^x}{\dfrac{-1+e^{2x}}{2\,e^x} - \dfrac{1+e^{2x}}{2\,e^x}} = \frac{e^x}{-e^{-x}} = -e^{2x}.$$

Luego,

$$\int \frac{e^x}{\operatorname{senh} x - \cosh x}\,dx = -\int e^{2x}\,dx = \frac{-e^{2x}}{2} + C.$$

b) Transformamos, la función integrando utilizando las identidades hiperbólicas,

$$\begin{aligned}\operatorname{senh}^4 x = (\operatorname{senh}^2 x)^2 &= \left[\frac{-1+\cosh(2x)}{2}\right]^2 = \frac{1}{4} - \frac{\cosh(2x)}{2} + \frac{\cosh^2(2x)}{4}\\ &= \frac{1}{4} - \frac{\cosh(2x)}{2} + \frac{1+\cosh(4x)}{8}.\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}\int \operatorname{senh}^4 x\,dx &= \int \left(\frac{1}{4} - \frac{\cosh(2x)}{2} + \frac{1+\cosh(4x)}{8}\right) dx\\ &= \frac{3x}{8} - \frac{\operatorname{senh}(2x)}{4} + \frac{\operatorname{senh}(4x)}{32} + C\\ &= \frac{12x - 8\operatorname{senh}(2x) + \operatorname{senh}(4x)}{32} + C.\end{aligned}$$

c) Separamos un $\operatorname{senh} x$ de la integral dada, lo agrupamos con el dx y luego aplicamos las identidades hiperbólicas,

$$\int \operatorname{senh}^3 x\,\cosh^2 x\,dx = \int \operatorname{senh}^2 x\,\cosh^2 x(\operatorname{senh} x\,dx) = \int (\cosh^2 x - 1)\,\cosh^2 x(\operatorname{senh} x\,dx).$$

Ahora, hacemos la sustitución $u = \cosh x \Longrightarrow du = \operatorname{senh} x\,dx$ e integramos,

$$\int \operatorname{senh}^3 x\,\cosh^2 x\,dx = \int (u^2-1)\,u^2\,du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + C = \frac{\cosh^5 x}{5} - \frac{\cosh^3 x}{3} + C.$$

d) Aplicando las identidades hiperbólicas, tenemos:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{cotanh}^3(2x)\,dx &= \int \operatorname{cotanh}^2(2x)\,\operatorname{cotanh}(2x)\,dx = \int \left[1+\operatorname{cosech}^2(2x)\right]\,\operatorname{cotanh}(2x)\,dx\\ &= \int \operatorname{cotanh}(2x)\,dx + \int \operatorname{cotanh}(2x)\,\operatorname{cosech}^2(2x)\,dx\\ &= \frac{\ln(\operatorname{senh} 2x)}{2} - \frac{\operatorname{cotanh}^2(2x)}{4} + C\end{aligned}$$

e) Expresamos la función integrando por medio de funciones exponenciales y simplificamos,

$$\frac{1}{\operatorname{senh} x \cosh x} = \frac{1}{\left(\dfrac{2}{-e^{-x}+e^{x}}\right)\left(\dfrac{2}{e^{-x}+e^{x}}\right)} = \frac{1}{\left(\dfrac{2\,e^{x}}{-1+e^{2\,x}}\right)\left(\dfrac{2\,e^{x}}{1+e^{2\,x}}\right)}$$
$$= \frac{4\,e^{2\,x}}{(-1+e^{2\,x})\,(1+e^{2\,x})} = \frac{4\,e^{2\,x}}{-1+e^{4\,x}}\,.$$

Cambiamos de signo en el denominador y hacemos la sustitución $u = e^{2x} \Longrightarrow du = 2e^{2x}\,dx \Longrightarrow \frac{1}{2}\,du = e^{2x}$. Integramos,

$$\int \frac{dx}{\operatorname{senh} x \cosh x} = \int \frac{4\,e^{2\,x}}{-1+e^{4\,x}}\,dx = -4\int \frac{e^{2x}}{1-\left(e^{2x}\right)^2}\,dx = -\frac{4}{2}\int \frac{du}{1-u^2}\,.$$

Finalmente,

$$\int \frac{dx}{\operatorname{senh} x \cosh x} = -2\int \frac{du}{1-u^2} = -2\tanh^{-1} u + C = -2\tanh^{-1}\left(e^{2x}\right) + C$$

f) Hacemos una primera sustitución, $u = \tanh x \Longrightarrow x = \tan^{-1} u \Longrightarrow dx = \dfrac{du}{1-u^2}$. Así, $\displaystyle\int \sqrt{\tanh x}\,dx = \int \frac{\sqrt{u}}{1-u^2}\,du$. Como el numerador es irracional, hacemos una segunda sustitución, $t^2 = u \Longrightarrow 2t\,dt = du$, además $1-u^2 = 1-t^4$, entonces,

$$\int \sqrt{\tanh x}\,dx = \int \frac{\sqrt{u}}{1-u^2}\,du = \int \frac{t}{1-t^4}\,2t\,dt = 2\int \frac{t^2}{1-t^4}\,dt.$$

La última integral, la resolvemos por el método de fracciones parciales,

$$2\int \frac{t^2}{1-t^4}\,dt = \int \frac{1}{2\,(1-t)}\,dt + \int \frac{1}{2\,(1+t)}\,dt - \int \frac{1}{1+t^2}\,dt$$
$$= -\frac{\ln(1-t)}{2} + \frac{\ln(1+t)}{2} - \arctan t + C = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) - \arctan t + C$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sqrt{u}}{1-\sqrt{u}}\right) - \arctan\sqrt{u} + C$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sqrt{\tanh x}}{1-\sqrt{\tanh x}}\right) - \arctan\sqrt{\tanh x} + C$$

Observación: Antes de resolver el ejercicio 3g), es conveniente que el lector se familiarice con la siguiente sustitución, que es muy útil en el cálculo de integrales hiperbólicas.

Las funciones $\operatorname{senh} x$ y $\cosh x$ se pueden expresar por medio de $\tanh \frac{x}{2}$,

$$\operatorname{senh} x = \frac{2\operatorname{senh}\dfrac{x}{2}\cosh\dfrac{x}{2}}{\cosh^2\dfrac{x}{2} - \operatorname{senh}^2\dfrac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{senh}\dfrac{x}{2}\cosh\dfrac{x}{2}}{\cosh^2\dfrac{x}{2}\left(1-\dfrac{\operatorname{senh}^2\dfrac{x}{2}}{\cosh^2\dfrac{x}{2}}\right)} = \frac{2\operatorname{senh}\dfrac{x}{2}}{\cosh\dfrac{x}{2}\left(1-\tanh^2\dfrac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{2\ \tanh\ \dfrac{x}{2}}{\left(1-\tanh^2\ \dfrac{x}{2}\right)}.$$

$$\cosh x = \frac{\cosh^2\ \dfrac{x}{2}+\operatorname{senh}^2\dfrac{x}{2}}{\cosh^2\ \dfrac{x}{2}-\operatorname{senh}^2\dfrac{x}{2}} = \frac{\cosh^2\ \dfrac{x}{2}\left(1+\dfrac{\operatorname{senh}^2\dfrac{x}{2}}{\cosh^2\ \dfrac{x}{2}}\right)}{\cosh^2\ \dfrac{x}{2}\left(1-\dfrac{\operatorname{senh}^2\dfrac{x}{2}}{\cosh^2\ \dfrac{x}{2}}\right)} = \frac{1+\tanh^2\ \dfrac{x}{2}}{1-\tanh^2\ \dfrac{x}{2}}.$$

Si hacemos $u=\tanh\dfrac{x}{2}$, entonces $\dfrac{x}{2}=\tanh^{-1}u$ y $x=2\tanh^{-1}u$, luego $dx=\dfrac{2\,du}{1-u^2}$, entonces:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{senh}\ x &= \frac{2\,u}{1-u^2}\\ \cosh x &= \frac{1+u^2}{1-u^2}\end{aligned}\right\}\quad \text{con}\quad dx=\frac{2\,du}{1-u^2},$$

y podemos calcular una integral de una función hiperbólica, cuando por otros métodos de integración no es posible o su cálculo se torna bastante difícil.

g) Escribimos la integral dada de la siguiente manera,

$$\int \operatorname{cosech}^3 x\,dx = \int \operatorname{cotanh}^2 x\ \operatorname{cosech}\ x\,dx = \int (1+\operatorname{cosech}^2 x)\ \operatorname{cosech}\ x\,dx,$$

$$\int \operatorname{cosech}^3 x\,dx = \underbrace{\int \operatorname{cosech}\ x\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int \operatorname{cosech}^3 x\,dx}_{I_2},$$

y calculamos las integrales I_1 e I_2 por separado.

La integral I_1, la calculamos utilizando la sustitución $u=\tanh\dfrac{x}{2}$.

$$I_1=\int \operatorname{cosech}\ x\,dx = \int \frac{dx}{\operatorname{senh}\ x} = \int \frac{1}{\dfrac{2\,u}{1-u^2}}\cdot\frac{2\,du}{1-u^2} = \int \frac{du}{u} = \ln u + C = \ln\left|\tanh\frac{x}{2}\right| + C_1.$$

Para calcular la integral I_2, expresamos el integrando como un producto.

$$I_2=\int \operatorname{cosech}^3 x\,dx = \int \underbrace{\operatorname{cosech}\ x}_{u}\ \underbrace{\left(\operatorname{cosech}^2 x\,dx\right)}_{dv},$$

luego $du=(-\operatorname{cotanh}\ x\ \operatorname{cosech}\ x)\,dx$, y, $v=-\operatorname{cotanh}\ x$ e integramos por partes,

$$\begin{aligned}\int \operatorname{cosech}^3 x\,dx &= -\operatorname{cotanh}\ x\ \operatorname{cosech}\ x - \int \operatorname{cotanh}^2 x\ \operatorname{cosech}\ x\,dx\\ &= -\operatorname{cotanh}\ x\ \operatorname{cosech}\ x - \int (1+\operatorname{cosech}^2 x)\ \operatorname{cosech}\ x\,dx\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\operatorname{cotanh} x \operatorname{cosech} x - \int \operatorname{cosech} x\, dx - \int \operatorname{cosech}^3 x\, dx\\
2\int \operatorname{cosech}^3 x\, dx &= -\operatorname{cotanh} x \operatorname{cosech} x - \underbrace{\int \operatorname{cosech} x\, dx}_{I_1}\\
\int \operatorname{cosech}^3 x\, dx &= -\frac{1}{2}\operatorname{cotanh} x \operatorname{cosech} x - \frac{1}{2}\ln\left|\tanh\frac{x}{2}\right| + C_2.
\end{aligned}
$$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
\int \operatorname{cosech}^3 x\, dx = I_1 + I_2 &= \ln\left|\tanh\frac{x}{2}\right| + C_1 - \frac{1}{2}\operatorname{cotanh} x \operatorname{cosech} x - \frac{1}{2}\ln\left|\tanh\frac{x}{2}\right| + C_2\\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\tanh\frac{x}{2}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{cotanh} x \operatorname{cosech} x + C.
\end{aligned}
$$

h) Esta integral la calculamos completando cuadrados,

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-2x+1)-1+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2+(2)^2}}\\
&= \operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right) + C.
\end{aligned}
$$

i) En este caso:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{2x+5}{\sqrt{9x^2+6x+2}}\, dx &= \int \frac{\overbrace{\frac{1}{9}(18x+6)+\frac{13}{3}}^{2x+5}}{\sqrt{9x^2+6x+2}}\, dx\\
&= \frac{1}{9}\int \frac{\overbrace{(18x+6)\,dx}^{du}}{\sqrt{\underbrace{9x^2+6x+2}_{u}}} + \frac{13}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+6x+2}}\\
\int \frac{2x+5}{\sqrt{9x^2+6x+2}}\, dx &= \frac{2}{9}\sqrt{9x^2+6x+2} + \frac{13}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{9\left(x^2+\frac{2}{3}x+\frac{2}{9}\right)}}\\
&= \frac{2}{9}\sqrt{9x^2+6x+2} + \frac{13}{3\cdot 3}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}\right)-\frac{1}{9}+\frac{2}{9}}}\\
&= \frac{2}{9}\sqrt{9x^2+6x+2} + \frac{13}{6}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}}\\
&= \frac{2}{9}\sqrt{9x^2+6x+2} + \frac{13}{6}\operatorname{senh}^{-1} 3(x+\frac{1}{3}) + C\\
&= \frac{2}{9}\sqrt{9x^2+6x+2} + \frac{13}{6}\operatorname{senh}^{-1}(3x+1) + C.
\end{aligned}
$$

4. Demuestre la siguientes identidades,

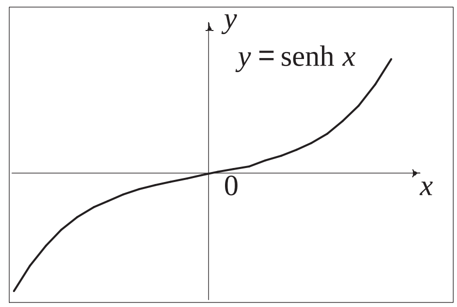
a) $\operatorname{senh}^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ b) $\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$

c) $\tanh^{-1} x = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

Solución

a) La función, $y = \operatorname{senh} x$, es estrictamente creciente en todo su dominio $\mathbb{R}$, por lo tanto tiene su respectiva función inversa $y = \operatorname{senh}^{-1} x$, la cual también se puede escribir de la siguiente forma

$$x = \operatorname{senh}\, y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}\,.$$



La última expresión la resolvemos para la variable y

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \Longrightarrow 2e^y\, x = (e^y)^2 - 1 \Longrightarrow 0 = (e^y)^2 - 2e^y\, x - 1,$$

ahora, hacemos la sustitución $t = (e^y)$ y resolvemos la ecuación cuadrática $t^2 - (2x)\,t - 1 = 0$ aplicando la fórmula general

$$t_{1,2} = \frac{2\,x \pm \sqrt{4 + 4\,x^2}}{2} = x \pm \sqrt{1 + x^2},$$

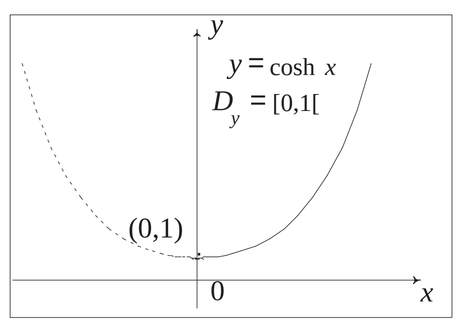
la raíz t_2 se desprecia, puesto que, $x - \sqrt{x^2+1} < 0$ y $e^y > 0$, $\forall\, y \in \mathbb{R}$, luego,

$$e^y = x + \sqrt{1+x^2} \Longrightarrow \ln(e^y) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) \Longrightarrow y = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right).$$

y como $y = \operatorname{senh}^{-1} x$, concluimos finalmente que

$$\operatorname{senh}^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

b) La función $y = \cosh x$ es estrictamente creciente en el intervalo $[\,0, \infty\,[$ y en ese intervalo tiene su respectiva inversa $y = \cosh^{-1} x$, la cual se puede escribir también como $x = \cosh y = \dfrac{e^y + e^{-y}}{2}$, esta ecuación la resolvemos para la variable y.



$$x = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \Longrightarrow (2\,x)e^y = (e^y)^2 + 1 \Longrightarrow (e^y)^2 - (2\,x)e^y + 1 = 0,$$

hacemos la sustitución $t = \mathrm{e}^y$, entonces

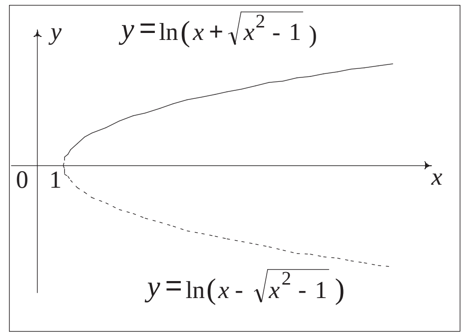
$$t^2 - (2\,x)t + 1 = 0$$

y por la fórmula general obtenemos

$$t_{1,2} = \frac{2\,x \pm \sqrt{4\,x^2 - 4}}{2}\,,$$

luego,

$$x \pm \sqrt{x^2 - 1} \Longrightarrow \mathrm{e}^y = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$$



de la última ecuación obtenemos dos valores para y $y = \cosh^{-1} x = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$, como el dominio principal de $\cosh x$ es $[\,0, \infty\,[$ y en ese intervalo $\cosh x$ es estrictamente creciente, entonces su inversa $y = \cosh^{-1} x$ también tiene que ser estrictamente creciente en su respectivo intervalo y esto se cumple si y solo si (ver figura adjunta)

$$\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad (x \geq 1).$$

Demostramos así, que $\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, $(x \geq 1)$.

c) La función $y = \tanh x$ es estrictamente creciente en todo su dominio $\mathbb{R}$, por lo tanto tiene inversa $y = \tanh^{-1} x$ la cual, también la podemos escribir de la siguiente forma $x = \tanh^{-1} y$.

Ahora escribimos $x = \tanh^{-1} y$, en términos de funciones exponenciales

$$x = \tan^{-1} x = \frac{-\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{x}} = \frac{-1 + \mathrm{e}^{2\,x}}{1 + \mathrm{e}^{2\,x}} = 1 - \frac{2}{1 + \mathrm{e}^{2\,x}}$$

y la resolvemos para la variable y

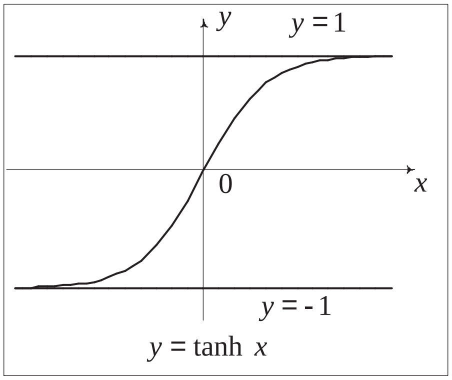
$$x - 1 = \frac{-2}{1 + (\mathrm{e}^y)^2} \Longrightarrow 1 + (\mathrm{e}^y)^2 = \frac{-2}{x - 1} \Longrightarrow (\mathrm{e}^y)^2 = \frac{-2 - x + 1}{x - 1}\,,$$

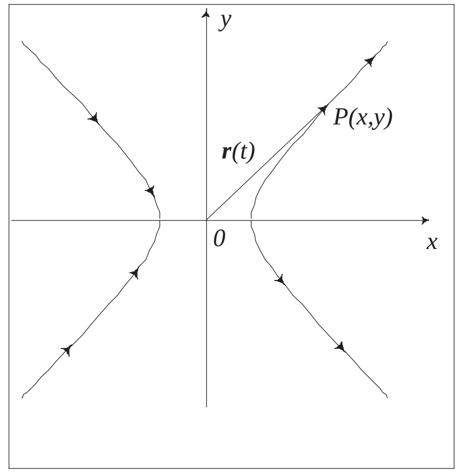
cambiamos de signo en el término derecho del igual y sumamos términos semejantes

$$(\mathrm{e}^y)^2 = \frac{1 + x}{1 - x}\,, \quad \text{luego} \quad 2\ln(\mathrm{e}^y) = \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right),$$

finalmente,

$$y = \tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right), \quad D_y = \,]-1, 1\,[\,.$$





5. Calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{(5-2\,x+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\,(4-9x^2)^2}$.

Solución

a) Completamos cuadrados:

$$\int \frac{dx}{(5-2\,x+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{dx}{[(x-1)^2+(2)^2]^{\frac{3}{2}}}\,,$$

hacemos la sustitución $u = x-1 \Longrightarrow du = dx$,

$$\int \frac{dx}{(5-2\,x+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{dx}{[(x-1)^2+(2)^2]^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{du}{[u^2+(2)^2]^{\frac{3}{2}}}\,,$$

ahora, hacemos la sustitución hiperbólica $u = 2\,\text{senh}\;x \Longrightarrow du = 2\cosh x\,dx$, luego $(u^2+4)^{\frac{3}{2}} = (4\,\text{senh}^{\,2} z+4)^{\frac{3}{2}} = 4^{\frac{3}{2}}(1+\text{senh}^{\,2} z)^{\frac{3}{2}} = 8(\cosh^2 z)^{\frac{3}{2}} = 8\,\cosh^3 z$, entonces

$$\int \frac{du}{[u^2+(2)^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{8}\int \frac{\cosh z\,dz}{\cosh^3 z} = \frac{1}{4}\int \text{sech}^{\,2} z\,dz = \frac{1}{4}\,\tanh z + C = \frac{1}{4}\,\frac{\text{senh}\;z}{\cosh z} + C,$$

si consideramos que $u = 2\;\text{senh}\;z \Longrightarrow \text{senh}\;z = \frac{u}{2}$, y que $\cosh^2 z = 1+\text{senh}^{\,2} z \Longrightarrow \cosh z = \sqrt{1+\frac{u^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4+u^2}$, obtenemos, teniendo en cuenta las sustituciones que hemos hecho:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(5-2\,x+x^2)^{\frac{3}{2}}} &= \int \frac{du}{[u^2+(2)^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{8}\int \frac{\cosh z\,dz}{\cosh^3 z}\\ &= \frac{1}{4}\int \text{sech}^{\,2} z\,dz = \frac{1}{4}\,\tanh z + C = \frac{1}{4}\,\frac{\text{senh}\;z}{\cosh z} + C\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}\ \frac{\frac{u}{2}}{\frac{\sqrt{4+u^2}}{2}} + C = \frac{1}{4}\ \frac{u}{\sqrt{u^2+4}} + C$$
$$= \frac{1}{4}\ \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2+4}} + C = \frac{1}{4}\ \frac{x-1}{\sqrt{5-2\,x+x^2}} + C.$$

b) Esta integral se resuelve en forma similar a la del ejercicio 5, haciendo la sustitución hiperbólica $x = \frac{2}{3}\ \text{sech}\ z \Longrightarrow dx = -\frac{2}{3}\ \text{sech}\ z\ \tanh z\, dz$, luego $(4-9\,x^2)^2 = \left[4 - 9\left(\frac{4}{9}\ \text{sech}^{\,2} z\right)\right]^2 = 16\,(1 - \text{sech}^{\,2} z)^2 = 16\,(\tanh^2 z)^2$, así

$$\int \frac{dx}{x\,(4-9x^2)^2} = \frac{1}{16}\ \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} \int \frac{\text{sech}\ z\ \tanh z}{\text{sech}\ z\ \tanh^4 z}\ dz = -\frac{1}{16}\int \frac{\tanh z}{\tanh^4 z}\ dz = -\frac{1}{16}\int \frac{dz}{\tanh^3 z}$$
$$= -\frac{1}{16}\int \frac{\cosh^3 z}{\text{senh}^{\,3} z}\, dz = -\frac{1}{16}\int \frac{\cosh^2 z}{\text{senh}^{\,3} z}\ \cosh z\, dz$$
$$= -\frac{1}{16}\int \frac{1+\text{senh}^{\,2} z}{\text{senh}^{\,3} z}\ \cosh z\, dz,$$

ahora, hacemos la sustitución $u = \text{senh}\ z \Longrightarrow du = \cosh z\, dz$,

$$\int \frac{dx}{x\,(4-9x^2)^2} = -\frac{1}{16}\int \frac{1+\text{senh}^{\,2} z}{\text{senh}^{\,3} z}\ \cosh z\, dz = -\frac{1}{16}\int \frac{1+u^2}{u^3}\, du$$
$$= -\frac{1}{16}\int u^{-3}\, du - \frac{1}{16}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{32}\ \frac{1}{u^2} - \frac{1}{16}\ \ln|u| + C$$
$$= \frac{1}{32}\ \frac{1}{\text{senh}^{\,2} z} - \frac{1}{16}\ \ln|\,\text{senh}\ z| + C,$$

si consideramos que $x = \frac{2}{3}\,\frac{1}{\cosh z} \Longrightarrow \cosh z = \frac{2}{3\,x}$ y que $\text{senh}^{\,2} z = \cosh^2 z - 1 \Longrightarrow \text{senh}^{\,2} z = \frac{4}{9\,x^2} - 1 = \frac{4-9\,x^2}{9\,x^2}$, entonces:

$$\int \frac{dx}{x\,(4-9x^2)^2} = \frac{1}{32}\ \frac{1}{\text{senh}^{\,2} z} - \frac{1}{16}\ \ln|\,\text{senh}\ z| + C$$
$$= \frac{1}{32}\ \frac{9\,x^2}{4-9\,x^2} - \frac{1}{16}\ \ln\frac{\sqrt{4-9\,x^2}}{3\,|x|} + C.$$

Ejercicio propuestos: Funciones hiperbólicas
Prof. Rodolfo Obando

1. Calcule las derivadas de las siguientes funciones y simplifíquelas al máximo.

   a) $y = \sqrt[4]{(1+\tanh^2 x)^3}$

   b) $y = \sqrt[4]{\dfrac{1-\tanh x}{1+\tanh x}}$

   c) $y = \operatorname{cosech} \vartheta\, [\, 1 - \ln(\operatorname{cosech} \vartheta)\,]$

   d) $y = \ln \operatorname{senh}\, t - \frac{1}{2} \operatorname{cotanh}^2 t$

   e) $y = (x^2+1) \operatorname{sech} (\ln x)$

   f) $y = \cosh^{-1}(2\sqrt{x+1})$

   g) $y = (1-t) \operatorname{cotanh}^{-1} \sqrt{t}$

   h) $y = \ln x + \sqrt{1+x^2}\, \operatorname{cosech}^{-1} x.$

2. Calcule las siguientes integrales.

   a) $\displaystyle\int \frac{e^x}{\operatorname{senh}\, x - \cosh x}\, dx$

   b) $\displaystyle\int \operatorname{senh}^4 x\, dx$

   c) $\displaystyle\int \operatorname{senh}^3 x\, \cosh^2 x\, dx$

   d) $\displaystyle\int \operatorname{cotanh}^3 2x\, dx$

   e) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{senh}\, x\, \cosh x}$

   f) $\displaystyle\int \sqrt{\tanh x}\, dx$

   g) $\displaystyle\int \operatorname{cotanh}^2 x\, \operatorname{cosech}\, x\, dx$

   h) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{5-2\,x+x^2}}$

   i) $\displaystyle\int \frac{2\,x+5}{\sqrt{9\,x^2+6\,x+2}}\, dx$

3. Demuestre la siguientes identidades:

   a) $\operatorname{senh}^{-1} x = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$

   b) $\cosh^{-1} x = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$

   c) $\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right).$

4. Calcular las siguientes integrales

   a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(5-2\,x+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

   b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\left(4-9x^2\right)^2}.$

Ejercicios especiales a): Funciones hiperbólicas Prof. Rodolfo Obando

1. Resolver la desigualdad $\log_a x > \log_{(a^3)}(3x-2)$, con $a > 0$, $a \neq 1$. Discutir las soluciones de acuerdo con los valores de a.

2. Hacer el cuadro de variación y el gráfico de la función f definida por $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^x$. No estudie concavidad.

3. Resuelva la desigualdad siguiente $x^{x^m} > (x^x)^m$, $m \in \mathbb{R}$ y discuta de acuerdo con los posibles valores de m.

4. Calcular los siguientes límites:

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$

   b) Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $u_1 > 1$ y $u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, con $\ell > 0$. Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$. Use el hecho que si $a_n \longrightarrow \ell \Longrightarrow \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \longrightarrow \ell$.

   c) Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!n!}} = 4$ y que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{\mathrm{e}}$.

   d) Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\,\frac{1}{2}(a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}})\,\right]^n = \sqrt{ab}$, con $a > 0$ y $b > 0$.

5. a) Resolver la ecuación $\mathrm{e}^{x+\pi} = \pi^{x+\mathrm{e}}$.

   b) ¿Cuántas soluciones reales tiene la ecuación $x^\pi - 3x^{\mathrm{e}} + 2 = 0$?

6. Resolver la ecuación $\mathrm{ch}\ x + \mathrm{sh}\ x = \frac{1}{\mathrm{sh}\ x} - \frac{1}{\mathrm{ch}\ x}$.

7. a) Probar que para $x \neq 0$, $\frac{1}{\mathrm{ch}\ nx\,\mathrm{ch}\,(n-1)x} = \frac{1}{\mathrm{sh}^2\,x}\left[\frac{\mathrm{ch}\,(n+1)x}{\mathrm{ch}\ nx} - \frac{\mathrm{ch}\ nx}{\mathrm{ch}\,(n-1)x}\right]$.

   b) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{1}{\mathrm{ch}\ 0\,\mathrm{ch}\ x} + \frac{1}{\mathrm{ch}\ x\,\mathrm{ch}\ 2x} + \cdots + \frac{1}{\mathrm{ch}\ nx\,\mathrm{ch}\,(n+1)x}\right]$.

8. Calcular las sumas $s = \mathrm{ch}\ x + \mathrm{ch}\ 2x + \cdots + \mathrm{ch}\ nx$ y $s' = \mathrm{sh}\ x + \mathrm{sh}\ 2x + \cdots + \mathrm{sh}\ nx$.

9. Resolver el sistema $\mathrm{arcsh}\ x = 2\,\mathrm{arcsh}\ y$, $3\log x = 2\log y$.

10. a) Derivar la función $x \longmapsto \mathrm{arcsh}\,(3x + 4x^3)$ y explicar el resultado obtenido.

    b) Simplificar la función $f(x) = \mathrm{arcch}\ \sqrt{\frac{1 + \mathrm{ch}\ x}{2}} - \frac{1}{2}x$.

Soluciones ejercicios especiales a): Funciones hiperbólicas
Prof. Rodolfo Obando

1. Resolver la desigualdad $\log_a x > \log_{(a^3)}(3x-2)$, con $a > 0$, $a \neq 1$. Discutir las soluciones de acuerdo con los valores de a.

   Solución Se sabe que $\log_a x = \dfrac{\log x}{\log a}$, por lo que $\dfrac{\log x}{\log a} > \dfrac{\log(3x-2)}{3\log a}$.

   a) Si $a > 1$, se tiene que $\log a > 0$ y la desigualdad es $3\log x > \log(3x-2)$. Para que estén definidas, se necesita que $x > 0$ y $3x-2 > 0$ i.e. $x > \frac{2}{3}$. Así $x^3 > 3x-2$, o sea $x^3 - 3x + 2 > 0$.

   Por otro lado, $\phi(x) = (x-1)(x^2+x-2) = (x-1)^2(x+2) > 0$, es decir $x > -2$, $x \neq 1$. Basta considerar $x > \frac{2}{3}$, $x \neq 1$ para $a > 1$.

   b) Si $0 < a < 1$, entonces $3\log x < \log(3x-2) \Longrightarrow x^3 < 3x-2 \Longrightarrow x^3 - 3x + 2 < 0$, lo que implica $x < -2$ que es incompatible con $x > \frac{2}{3}$.

   En definitiva hay solución solamente si $a > 1$, en cuyo caso la solución es $x > \frac{2}{3}$ y $x \neq 1$.

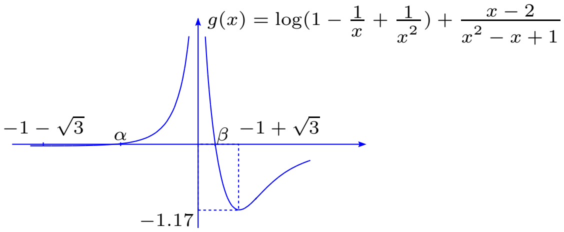
2. Hacer el cuadro de variación y el gráfico de la función f definida por $f(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)^x$. No estudie concavidad.

   Solución El dominio de f es $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, pues la función tiene sentido $\Longleftrightarrow 1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}>0 \Longleftrightarrow x^2-x+1>0$, $x \neq 0$. Sin embargo, se puede redefinir en 0 por $f(0) = 1$, pues $\lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{x\log\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = 1$.

   La derivada $f'(x) = f(x)\left[\log(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}) + \dfrac{x-2}{x^2-x+1}\right]$, entonces f' tiene el mismo signo que $g(x) = \log(1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}) + \dfrac{x-2}{x^2-x+1}$.

   Estudio de $g(x)$ Tenemos que $g'(x) = \dfrac{x^2+2x-2}{x(x^2-x+1)^2}$ y $g'(x) = 0$ para $a = -1-\sqrt{3}$ y $b = -1+\sqrt{3}$. Por otro lado $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = +\infty = \lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = 0^-$.

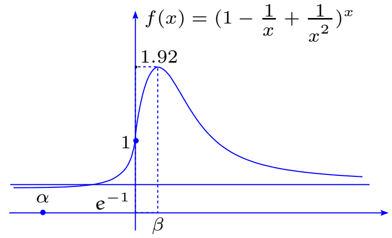
x	$-\infty$		$-1-\sqrt{3}$		0		$-1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	0^-	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	0^-



   Observemos que g tiene dos puntos $\alpha < 0$ y $\beta > 0$ tales que $g(x) < 0$ si $x < \alpha$ o si $x > \beta$, $g(x) > 0$ si $\alpha < x < 0$ o $0 < x < \beta$. Así f es creciente en $[\,\alpha, 0\,[$ y $]\,0, \beta\,]$ y f es decreciente en $]-\infty, \alpha\,[\,\cup\,]\,\beta, +\infty\,[$.

Si $x \to \pm\infty$, definimos $y = \frac{1}{x}$, entonces $f(x) = \mathrm{e}^{\log \frac{1-y+y^2}{y}}$, si $h(y) = \log(1 - y + y^2)$ se tiene $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{h(y)-h(0)}{y-0}} \longrightarrow \mathrm{e}^{h'(0)} = \mathrm{e}^{-1}$, cuando $x \to \pm\infty$.

x	$-\infty$		α		0		β		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	e^{-1}	$\searrow$		$\nearrow$	1	$\nearrow$		$\searrow$	e^{-1}



3. Resuelva la desigualdad siguiente $x^{x^m} > (x^x)^m$, $m \in \mathbb{R}$ y discuta de acuerdo con los posibles valores de m.

Solución Notemos que $x^{x^m} = \mathrm{e}^{x^m \log x} = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{m \log x} \log x}$, $(x^x)^m = \mathrm{e}^m x \log x$, entonces la desigualdad se puede escribir $\mathrm{e}^{(\mathrm{e}^{m \log x} \log x)} > \mathrm{e}^{mx \log x}$ y ambos miembros están definidos para $x > 0$. Puesto que la exponencial es creciente, la desigualdad es equivalente a

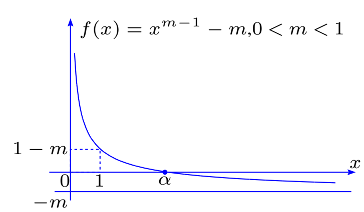
$$\log \mathrm{e}^{m \log x} > mx \log x \iff \log x(\mathrm{e}^{m \log x} - mx) > 0 \iff x \log x(\mathrm{e}^{(m-1)\log x} - m) > 0$$

$$\iff \log x(\mathrm{e}^{(m-1)\log x} - m) > 0.$$

a) Si $m \leq 0 \Longrightarrow \mathrm{e}^{(m-1)\log x} - m > 0$, pues $x^{m-1} - m > 0$ y la desigualdad tiene como solución $x > 1$.

b) Si $0 < m < 1$, $\mathrm{e}^{(m-1)\log x} - m = 0$, o sea $x^{m-1} = m$, tiene sólo una raíz $\alpha = m^{\frac{1}{m-1}}$ y $\alpha > 1$. Del mismo gráfico se ve que $x^{m-1} > m$, si $0 < x < \alpha$ y como $x > 1$ la solución es $1 < x < \alpha$.

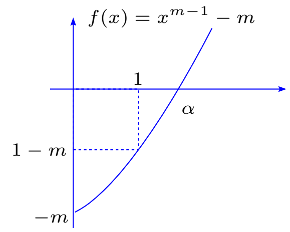
x	0		1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$1-m$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-m$



c) Si $m = 1$, debe tenerse que $\mathrm{e}^{(m-1)\log x} - m = 0$ y no existe x tal que $\log x(\mathrm{e}^{(m-1)\log x} - m) > 0$, es decir no hay solución.

d) Si $m > 1$, se observa que la ecuación $x^{m-1} = m$, tiene sólo una raíz $\alpha(= m^{\frac{1}{m-1}})$ y que $\alpha > 1$. Además si $x > \alpha$, $x^{m-1} > m$ y se debe tiene que $\log x > 0$, es decir $x > 1 \Longrightarrow x > \alpha$. Así $x > \alpha$ es solución.

x	0		1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$		$+$	
$f(x)$	$-m$	$\nearrow$	$1-m$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



Si $x < \alpha \Longrightarrow x^{m-1} < m$ y debe tenerse que $\log x < 0$ i.e. $x < 1$. Así $0 < x < 1$ es solución.

En resumen tenemos:

$m \leq 0$	$x > 1$
$0 < m < 1$	$1 < x < \alpha$, con $\alpha = m^{\frac{1}{m-1}}$
$m = 1$	no hay solución
$m > 1$	$0 < x < 1$ o $x > \alpha$.

4. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$

b) Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $u_1 > 1$ y $u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, con $\ell > 0$. Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$. Use el hecho que si $a_n \longrightarrow \ell \Longrightarrow \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \longrightarrow \ell$.

c) Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{(2n)!}{n!n!}} = 4$ y que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

d) Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\, \frac{1}{2}(a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}})\,\right]^n = \sqrt{ab}$, con $a > 0$ y $b > 0$.

Solución

a) Se sabe que $\sqrt[n]{n} = \mathrm{e}^{\frac{\log n}{n}}$ y como $\dfrac{\log n}{n} \longrightarrow 0$, resulta que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

b) Sea $a_n = \log \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \log u_{n+1} - \log u_n \longrightarrow \log \ell$, pero como:
$\dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = \dfrac{\log u_{n+1} - \log u_1}{n} \longrightarrow \log \ell$, se tiene $\log \sqrt[n]{u_{n+1}} \longrightarrow \log \ell$, o sea $\sqrt[n]{u_n} \longrightarrow \ell$.

c) Sea $u_n = \dfrac{(2n)!}{n!n!}$, entonces $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(2n+1)(2n)}{(n+1)(n+1)} \longrightarrow \ell = 4$, entonces $\sqrt[n]{u_n} \longrightarrow 4$.

Observemos que $\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \sqrt[n]{\dfrac{n!}{n^n}}$ y sea $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$, entonces:
$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}n!} = \dfrac{(n+1)}{(1+\frac{1}{n})^n(n+1)} = \dfrac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \longrightarrow \dfrac{1}{\mathrm{e}}$, o sea $\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} \longrightarrow \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

d) Sabemos que $\log\left[\, \frac{1}{2}(a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}})^n \,\right] = \log a + n\left[\log(1 + (\frac{b}{a})^{\frac{1}{n}})\right] - \log 2$. Sea $n = \dfrac{1}{x}$, entonces $n\left[\log(1 + (\frac{b}{a})^n) - \log 2\,\right] = \dfrac{1}{x}\left[\log(1 + (\frac{b}{a})^x) - \log 2\right]$.

Sea $\phi(x) = \log\left[\,1 + (\frac{b}{a})^x\,\right]$, la expresión $\dfrac{\phi(x) - \phi(0)}{x} = \dfrac{\log(1 + (\frac{b}{a})^x) - \log 2}{x}$, por lo que $\log\left[\, \frac{1}{2}(a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}})^n \,\right] \longrightarrow \log a + \phi'(0) = \log a + \frac{1}{2}\log(\frac{b}{a}) = \frac{1}{2}\log ab$, es decir $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\, \frac{1}{2}(a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}})^n \,\right] = \sqrt{ab}$.

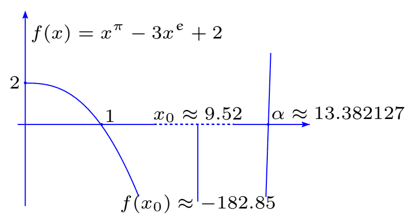
5. a) Resolver la ecuación $\mathrm{e}^{x+\pi} = \pi^{x+\mathrm{e}}$.

b) ¿Cuántas soluciones reales tiene la ecuación $x^\pi - 3x^\mathrm{e} + 2 = 0$?

Solución

a) Usando logaritmos $x + \pi = (x + \mathrm{e}) \log \pi$ y $x = \dfrac{\pi - \mathrm{e} \log \pi}{\log \pi - 1}$.

b) La función $f(x) = x^\pi - 3x^\mathrm{e} + 2$ está definida para $x > 0$ y $f'(x) = \pi x^{\pi-1} - 3\mathrm{e}x^{\mathrm{e}-1}$ la cual se anula para $x^{\pi-\mathrm{e}} = \dfrac{3\mathrm{e}}{\pi}$, que denotamos x_0. De esta forma $\log x_0 = \dfrac{1}{\pi - \mathrm{e}} \log \dfrac{3\mathrm{e}}{\pi} > 0$, por lo que $x_0 > 1$, ($x_0 \approx 9.52$).



Dado que $f(1) = 0$, se tiene $f(x_0) < 0$, de manera que $f(x)$ se anula para un valor $\alpha > x_0$, pues $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ ($\alpha \approx 13.382$).

6. Resolver la ecuación $\mathrm{ch}\ x + \mathrm{sh}\ x = \dfrac{1}{\mathrm{sh}\ x} - \dfrac{1}{\mathrm{ch}\ x}$.

Solución Dado que $\mathrm{ch}\ x + \mathrm{sh}\ x = \dfrac{\mathrm{ch}\ x - \mathrm{sh}\ x}{\mathrm{sh}\ x\, \mathrm{ch}\ x}$ y como $\mathrm{ch}\ x + \mathrm{sh}\ x = \mathrm{e}^x$, $\mathrm{ch}\ x - \mathrm{sh}\ x = \mathrm{e}^{-x}$, $\mathrm{sh}\ x\, \mathrm{ch}\ x = \frac{1}{2}\, \mathrm{sh}\ 2x = \frac{1}{4}(\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-2x})$, la ecuación se transforma en $\mathrm{e}^x = \dfrac{4\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-2x}}$ y si se define $t = \mathrm{e}^{2x}$, $t > 0$, $t(t - \frac{1}{t}) = 4 \Longrightarrow t^2 - 1 = 4$, o sea $t = \sqrt{5}$ y $x = \frac{1}{4}\log 5$. Observe que no se tomó en cuanta la solución $t = -\sqrt{5}$, pues no existe x tal que $\mathrm{e}^x = -\sqrt{5}$.

7. a) Probar que para $x \neq 0$, $\dfrac{1}{\mathrm{ch}\ nx\, \mathrm{ch}\,(n-1)x} = \dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}\left[\dfrac{\mathrm{ch}\,(n+1)x}{\mathrm{ch}\ nx} - \dfrac{\mathrm{ch}\ nx}{\mathrm{ch}\,(n-1)x}\right]$.

b) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{\mathrm{ch}\ 0\, \mathrm{ch}\ x} + \dfrac{1}{\mathrm{ch}\ x\, \mathrm{ch}\ 2x} + \cdots + \dfrac{1}{\mathrm{ch}\ nx\, \mathrm{ch}\,(n+1)x}\right]$.

Solución

a) Observemos que $\mathrm{ch}\,(n+1)x\, \mathrm{ch}\,(n-1)x - \mathrm{ch}^2\, nx = \frac{1}{4}\,[(\mathrm{e}^{(n+1)x} + \mathrm{e}^{-(n+1)x})(\mathrm{e}^{(n-1)x} + \mathrm{e}^{-(n-1)x}) - (\mathrm{e}^{nx} + \mathrm{e}^{-nx})^2\,] = \frac{1}{4}(\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2x} - 2) = \mathrm{sh}^2 x$, lo que permite verificar la identidad para $x \neq 0$.

b) Si $x = 0$, $\mathrm{ch}\ nx = 1, \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\dfrac{1}{\mathrm{ch}\ 0\, \mathrm{ch}\ x} + \cdots + \dfrac{1}{\mathrm{ch}\ nx\, \mathrm{ch}\,(n+1)x} = n + 1$ y el límite es $+\infty$.

Si $x \neq 0$ se tiene: $A_n = \dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}\left[\dfrac{\mathrm{ch}\ 2x}{\mathrm{ch}\ x} - \dfrac{\mathrm{ch}\ x}{\mathrm{ch}\ 0} + \dfrac{\mathrm{ch}\ 2x}{\mathrm{ch}\ 2x} - \dfrac{\mathrm{ch}\ 2x}{\mathrm{ch}\ x} + \cdots + \dfrac{\mathrm{ch}\,(n+2)x}{\mathrm{ch}\,(n+1)x)} - \dfrac{\mathrm{ch}\,(n+1)x}{\mathrm{ch}\ nx}\right]$
$= \dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}\left[\dfrac{\mathrm{ch}\,(n+2)x}{\mathrm{ch}\,(n+1)x} - \mathrm{ch}\ x\right]$, pero $\dfrac{\mathrm{ch}\,(n+2)x}{\mathrm{ch}\,(n+1)x} = \dfrac{\mathrm{e}^{(n+1)x}\,[\,\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-(2nx-3x)}\,]}{\mathrm{e}^{(n+1)x}\,[\,1 + \mathrm{e}^{-2(n+1)x}\,]} \longrightarrow \mathrm{e}^x$, si $n \to \infty$ y $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \dfrac{1}{\mathrm{sh}\ x}$, $x \neq 0$.

8. Calcular las sumas $s = \mathrm{ch}\ x + \mathrm{ch}\ 2x + \cdots + \mathrm{ch}\ nx$ y $s' = \mathrm{sh}\ x + \mathrm{sh}\ 2x + \cdots + \mathrm{sh}\ nx$.

Solución Notemos que $s = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} + \dfrac{\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2x}}{2} + \cdots + \dfrac{\mathrm{e}^{nx} + \mathrm{e}^{-nx}}{2} = \frac{1}{2}\,[\,\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x} + \cdots +$

$\mathrm{e}^{nx}+\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-2x}+\cdots+\mathrm{e}^{-nx}\,]$ y como $x+x^2+\cdots+x^n=\dfrac{x^{n+1}-x}{x-1}$, se tiene que

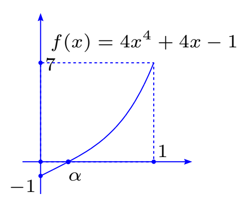
$$s=\tfrac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{e}^{(n+1)x}-\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}-1}+\frac{\mathrm{e}^{-(n+1)x}-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}-1}\right]=\tfrac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{e}^{x}(\mathrm{e}^{nx}-1)}{\mathrm{e}^{x}-1}+\frac{\mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^{-nx}-1)}{\mathrm{e}^{-x}-1}\right]$$
$$=\tfrac{1}{2}\left[\frac{(1-\mathrm{e}^{x})(\mathrm{e}^{nx}-1)}{(\mathrm{e}^{x}-1)(\mathrm{e}^{-x}-1)}+\frac{(1-\mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^{-nx}-1)}{(\mathrm{e}^{x}-1)(\mathrm{e}^{-x}-1)}\right]=\tfrac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{e}^{nx}-1}{\mathrm{e}^{-x}-1}+\frac{\mathrm{e}^{-nx}-1}{\mathrm{e}^{x}-1}\right]$$
$$=\tfrac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}nx}(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}nx}-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}nx})}{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}-\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x})}+\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}nx}(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}nx}-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}nx})}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}-\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x})}\right]=\frac{\mathrm{sh}\,\frac{1}{2}nx\,\mathrm{ch}\,\frac{1}{2}(n+1)x}{\mathrm{sh}\,\frac{1}{2}x}.$$

Por otro lado, $s'=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx})-\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-x}+\cdots+\mathrm{e}^{-nx})=\frac{1}{2}\left[\dfrac{\mathrm{e}^{(n+1)x}-\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}-1}+\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}-1)}{\mathrm{e}^{-x}-1}\right]=$ $\frac{1}{2}\left[\dfrac{\mathrm{e}^{(n-\frac{1}{2})x}-\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}+\mathrm{e}^{-(n-\frac{1}{2})x}-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}}\right]=\frac{1}{4}\left[\dfrac{\mathrm{ch}\,(n-\frac{1}{2})x-\mathrm{ch}\,\frac{1}{2}x}{\mathrm{sh}\,\frac{1}{2}x}\right]=\dfrac{\mathrm{ch}\,\frac{1}{2}nx\,\mathrm{sh}\,\frac{1}{2}(n-1)x}{\mathrm{sh}\,\frac{1}{2}x}.$

9. Resolver el sistema $\mathrm{arcsh}\ x=2\,\mathrm{arcsh}\ y$, $3\log x=2\log y$.

Solución Dado que $3\log x=2\log y\iff\log x^3=\log y^2\iff x^3=y^2$, se debe tener $x,\,y>0$. Sea $2\,\mathrm{arcsh}\ y=a\iff\mathrm{arcsh}\ y=\frac{1}{2}a\iff\mathrm{sh}\ \frac{1}{2}a=y$. Por otro lado $\mathrm{arcsh}\ x=a\iff\mathrm{sh}\ a=x$, pero $\mathrm{sh}\ x=2\,\mathrm{sh}\ \frac{1}{2}x\,\mathrm{ch}\ \frac{1}{2}x\implies\mathrm{sh}\ a=2\,\mathrm{sh}\ \frac{1}{2}a\,\mathrm{ch}\ \frac{1}{2}a$. Además $\mathrm{ch}^2\,\frac{1}{2}a=1+\mathrm{sh}^2\,\frac{1}{2}a\implies\mathrm{sh}\ a=2\,\mathrm{sh}\ \frac{1}{2}a\sqrt{1+\mathrm{sh}^2\,\frac{1}{2}a}$, de donde $x=2y\sqrt{1+y^2}\implies x=2x^{3/2}\sqrt{1+x^3}\implies x^2=4x^3(1+x^3)$. Como $x>0$, $1=4x(1+x^3)$, por lo que $f(x)=4x^4+4x-1=0$ tiene una única solución real entre cero y uno.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	7	$\nearrow$	$+\infty$



En efecto, $f'(x)=16x^3+4>0$, $\forall x>0$, $f(0)=-1$ y $f(1)=7$.

10. a) Derivar la función $x\longmapsto\mathrm{arcsh}\,(3x+4x^3)$ y explicar el resultado obtenido.

b) Simplificar la función $f(x)=\mathrm{arcch}\ \sqrt{\dfrac{1+\mathrm{ch}\ x}{2}}-\frac{1}{2}x$.

Solución

a) Puesto que $(\mathrm{arcsh}\,(3x+4x^3))'=\dfrac{3+12x^2}{\sqrt{1+9x^2+24x^4+16x^6}}=\dfrac{3(1+4x^2)}{\sqrt{(1+4x^2)^2(x^2+1)}}=\dfrac{3}{\sqrt{x^2+1}}$ $=(3\,\mathrm{arcsh}\ x)'$, o sea $\mathrm{arcsh}\,(3x+4x^2)=3\,\mathrm{arcsh}\ x+C$. Pero en $x=0$ y $C=0$, es decir $\mathrm{arcsh}\,(3x+4x^3)=3\,\mathrm{arcsh}\ x$.

En efecto, sea $3\,\mathrm{arcsh}\ x=a\iff\mathrm{sh}\ \frac{1}{3}a=x$, pero $\mathrm{sh}\ a=\mathrm{sh}\,(\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}a)=\mathrm{sh}\ \frac{1}{3}a\,\mathrm{ch}\,(\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}a)+\mathrm{sh}\,(\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}a)\,\mathrm{ch}\ \frac{1}{3}a=(\mathrm{ch}^2\,\frac{1}{3}a+\mathrm{sh}^2\,\frac{1}{3}a)+2\,\mathrm{sh}\ \frac{1}{3}a\,\mathrm{ch}^2\,\frac{1}{3}a=x(1+x^2+x^2)+2(x(1+x^2))=x+2x^3+2x+2x^3=3x+4x^3\implies\mathrm{sh}\ a=3x+4x^3\iff a=\mathrm{arcsh}\,(3x+4x^3)$, lo que verifica la identidad $\operatorname{arcsh}(3x+4x^3) = 3\operatorname{arcsh} x$.

b) Derivando tenemos que $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{ch} x}{2} - 1}} \cdot \dfrac{1}{2} \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{ch} x}{2}}} \cdot \dfrac{\operatorname{sh} x}{2} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}\Big[\dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}} \operatorname{sh} x - 1\Big] = \dfrac{1}{2}\Big[\dfrac{\operatorname{sh} x}{|\operatorname{sh} x|} - 1\Big]$. Observe que f no es derivable en 0 y que $f'(x) = 0$ si $x > 0$, $f'(x) = -1$ si $x < 0$ lo que conlleva a $f(x) = c_1$ si $x > 0$, $f(x) = -x + c_2$ si $x < 0$. Pero $f(0) = 0$ y como f es continua en cero, resulta que $c_1 = 0 = c_2$, o sea $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$

Demostremos que el resultado es cierto para $x \geq 0$, es decir hay que probar la igualdad que $\operatorname{arcch} \sqrt{\dfrac{1+\operatorname{ch} x}{2}} = \dfrac{x}{2}$, o sea $\dfrac{1+\operatorname{ch} x}{2} = \operatorname{ch}^2 \dfrac{x}{2}$. En efecto, $\operatorname{ch} x = \operatorname{ch}^2 \dfrac{x}{2} + \operatorname{sh}^2 \dfrac{x}{2} = \operatorname{ch}^2 \dfrac{x}{2} + \operatorname{ch}^2 \dfrac{x}{2} - 1 \Longrightarrow \operatorname{ch} x + 1 = 2\operatorname{ch}^2 \dfrac{x}{2}$.

Si $x < 0$, se debe demostrar que $\operatorname{arcch} \sqrt{\dfrac{1+\operatorname{ch} x}{2}} - \dfrac{x}{2} = -x$, o sea $\operatorname{arcch} \sqrt{\dfrac{1+\operatorname{ch} x}{2}} = -\dfrac{x}{2}$. Dado que $-\dfrac{x}{2} > 0$ se puede tomar el inverso aditivo, es decir $\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{ch} x}{2}} = \operatorname{ch}(-\dfrac{x}{2}) = \operatorname{ch} \dfrac{x}{2}$ y se tiene el resultado.

Ejercicios especiales b): Coordenadas polares Prof. Pedro Díaz

1. Sean $A = (\alpha, r_1)$, $B(\beta, r_2)$ dos puntos dados en coordenadas polares sobre la gráfica $r = f(\theta)$. La longitud de arco entre A y B está dada por $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}\, d\theta$.

   a) Determine la longitud de la circunferencia $r = 2\cos\theta$.

   b) Determine la longitud de la cardioide $r = 2(1 + \cos\theta)$.

2. Sea f continua y no negativa en el intervalo cerrado $[\,\alpha, \beta\,]$. Sea R la región limitada por la curva cuya ecuación polar es $r = f(\theta)$ y por las rectas $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$, entonces la región R tiene área A dada por $A = \frac{1}{2}\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} [\, f(\theta)\,]^2\, d\theta$.

   a) Determine el área limitada por la cardioide $r = 2(1 + \cos\theta)$.

   b) Hallar el área limitada por la lemniscata $r = a^2 \cos 2\theta$.

   c) Hallar el área de la región dentro de la circunferencia $r = 3\operatorname{sen}\theta$ y fuera de la limazón de Pascal $r = 2 - \operatorname{sen}\theta$.

3. Determine los puntos de intersección de los gráficas dadas por las ecuaciones polares $r = 2 - 2\cos\theta$, $r = 2\cos\theta$.

4. Haga el análisis completo a las siguientes ecuaciones en coordenadas polares. Para esto indique: Dominio, simetrías, reducción del dominio, tangentes al polo, análisis de primera derivada y cuadro de variación. Trace la gráfica.

   a) $r = 3\operatorname{sen} 2\theta$ b) $r = 2 + 3\cos\theta$ c) $r^2 = 4\operatorname{sen} 2\theta$

   d) $r = 5\cos\theta$ e) $r = \theta$

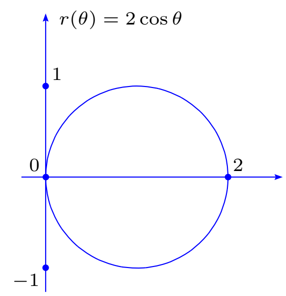
Soluciones ejercicios especiales b): Coordenadas polares Prof. Pedro Díaz

1. Sean $A = (\alpha, r_1)$, $B(\beta, r_2)$ dos puntos dados en coordenadas polares sobre la gráfica $r = f(\theta)$. La longitud de arco entre A y B está dada por $\displaystyle\int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}\, d\theta$.

   a) Determine la longitud de la circunferencia $r = 2\cos\theta$.

   b) Determine la longitud de la cardioide $r = 2(1 + \cos\theta)$.

   Solución

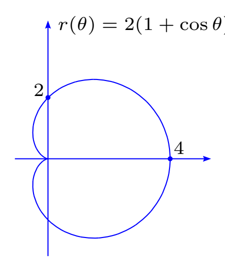
   a) La ecuación polar $r = 2\cos\theta$ representa la ecuación de la circunferencia de radio 2 centrada en $(2, 0)$ (coordenadas rectangulares) o bien $(0, 2)$ en coordenadas polares.

   Por la simetría con respecto al eje polar podemos determinar la longitud de la semi-circunferencia desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \frac{\pi}{2}$ y multiplicar el resultado por 2, para obtener la longitud total L.

$$L = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}\, d\theta.$$

   Como $r = 2\operatorname{sen}\theta \Longrightarrow \dfrac{dr}{d\theta} = -2\operatorname{sen}\theta$ y $\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2 = (-2\operatorname{sen}\theta)^2 + (2\cos\theta)^2 = 2^2(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta) = 2^2 \Longrightarrow \sqrt{\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2} = 2$, luego

$$L = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2d\theta = 4\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4(\frac{\pi}{2} - 0) = 2\pi.$$

   b) Como existe simetría polar, hallamos la longitud de la curva para $0 \leq \theta \leq \pi$ y multiplicamos por 2.

   De $r = 2 + 2\cos\theta$ se tiene $\dfrac{dr}{d\theta} = -2\operatorname{sen}\theta$, entonces $\sqrt{\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2} = \sqrt{4\operatorname{sen}^2\theta + (2 + 2\cos\theta)^2} = 2\sqrt{2}\sqrt{1 + \cos\theta}$. Usando la identidad $\cos^2\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1 + \cos\theta}{2}$, o sea $\sqrt{2}\cos\dfrac{\theta}{2} = \sqrt{1 + \cos\theta}$.

   Como aquí $0 \leq \theta \leq \pi \Longrightarrow 0 \leq \dfrac{\theta}{2} \leq \dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\theta}{2}$ pertenece al primer cuadrante y $\cos\dfrac{\theta}{2} \geq 0$. Luego,

$$L = 2\int_0^\pi 2\sqrt{2}\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta = 8\int_0^\pi \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta = 16\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\Big|_0^\pi = 16.$$

2. Sea f continua y no negativa en el intervalo cerrado $[\,\alpha, \beta\,]$. Sea R la región limitada por la curva cuya ecuación polar es $r = f(\theta)$ y por las rectas $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$, entonces la región R tiene área A dada por

$A = \frac{1}{2}\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} [\, f(\theta)\,]^2 \, d\theta.$

a) Determine el área limitada por la cardioide $r = 2(1 + \cos\theta)$.

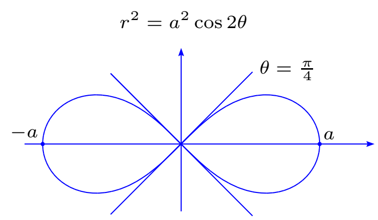
b) Hallar el área limitada por la lemniscata $r = a^2 \cos 2\theta$.

c) Hallar el área de la región dentro de la circunferencia $r = 2\,\mathrm{sen}\,\theta$ y fuera de la limazón de Pascal $r = 2 - \mathrm{sen}\,\theta$.

Solución

a) Por la simetría con el eje polar se tiene que $A = 2\left(\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi} [\, f(\theta)\,]^2 \, d\theta\right)$. Como $r = f(\theta) = 2{+}2\cos\theta$ se tiene que $r^2 = 4 + 8\cos\theta + 4\cos^2\theta$, de donde $A = 4\displaystyle\int_0^{\pi} (1 + \cos\theta + \cos^2\theta)d\theta = 4\Big(\theta + 2\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}\,2\theta\Big)\Big|_0^{\pi} = 6\pi$.

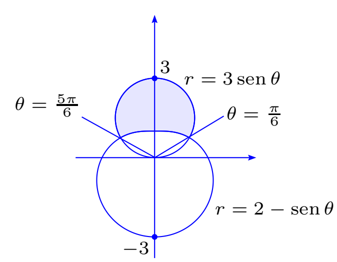
b) Dado que $a^2 \cos 2\theta \geq 0$, es decir $\cos 2\theta \geq 0$, se sigue que $-\frac{\pi}{2} \leq 2\theta \leq \frac{\pi}{2} \Longrightarrow -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$.



Por la simetría podemos hallar el área entre $\theta = 0$ y $\theta = \frac{\pi}{4}$ y multiplicarla por 4.

$$A = 4\left(\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\theta d\theta\right) = 2a^2 \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2.$$

c) Los puntos de intersección de las dos curvas son $(\frac{\pi}{6}, \frac{3}{2})$ y $(\frac{5\pi}{6}, \frac{3}{2})$.



$$\begin{aligned} A &= 2\left(\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \Big[9\,\mathrm{sen}^2\,\theta - (2 - \mathrm{sen}\,\theta)^2\Big] d\theta\right) \\ &= 8\frac{\theta}{2} - \frac{8}{4}\,\mathrm{sen}\,2\theta - 4\cos\theta - 4\theta\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = 3\sqrt{3}. \end{aligned}$$

3. Determine los puntos de intersección de los gráficas dadas por las ecuaciones polares $r = 2 - 2\cos\theta$, $r = 2\cos\theta$.

Solución Para $r = 2{-}2\,\mathrm{sen}\,\theta$, hacemos $r = 0$ y se tiene $0 = 2{-}2\cos\theta$, es decir $\cos\theta = 1 \Longrightarrow \theta = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Para $r = 2\cos\theta$, hacemos $r = 0$ y obtenemos $2\cos\theta = 0$, es decir $\cos\theta = 0 \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$. Luego, como existe θ (aunque sea diferente del encontrado para ambas ecuaciones) que satisface $r = 0$, se tiene que el **polo** es punto de intersección de las curvas.

Mediante las ecuaciones:

$$(1) \qquad (-1)^n r = f(\theta + n\pi), \quad n = 1, 2, \ldots$$

determinamos todas las ecuaciones equivalentes a la primera ecuación:

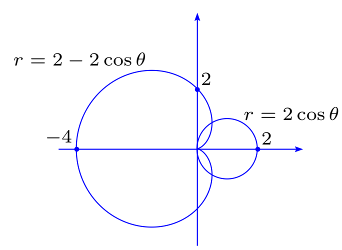
$\boxed{n=1}$, $(-1)^1 r = f(\theta+\pi) \Longleftrightarrow -r = 2 - 2\cos(\theta+\pi) = 2 + 2\cos\theta \therefore r = -2 - 2\cos\theta$ es otra ecuación equivalente $r = f(\theta)$.

$\boxed{n=2}$, $(-1)^2 r = f(\theta+2\pi) \Longleftrightarrow r = 2 - 2\cos(\theta+2\pi) = 2 - 2\cos\theta$, que es la misma ecuación $r = f(\theta)$. Luego las ecuaciones equivalentes de $r = f(\theta)$ son $r = 2 - 2\cos\theta$ o $r = -2 - 2\cos\theta$.

Análogamente, determinamos las ecuaciones equivalentes de la segunda ecuación $r = g(\theta) = 2\cos\theta$. Usando la fórmula (1) se tiene que:

Para $n = 1$, $(-1)^1 r = g(\theta+\pi) \Longleftrightarrow -r = 2\cos(\theta+\pi) = -2\cos\theta \Longrightarrow r = 2\cos\theta$, por lo tanto se obtienen la misma ecuación polar y la segunda ecuación no tiene ecuaciones equivalentes.
Así se obtienen los sistemas:

$$\begin{cases} r = 2 - 2\cos\theta \\ r = 2\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} r = -2 - 2\cos\theta \\ r = 2\cos\theta. \end{cases}$$



Resolviendo ambas sistemas se tienen las soluciones $(\frac{\pi}{3}, 1)$, $(\frac{5\pi}{3}, 1)$ del primer sistema y $(\frac{2\pi}{3}, -1)$, $(\frac{4\pi}{3}, -1)$. Puesto que los puntos son los mismos se tiene que los puntos de intersección son: $(\frac{\pi}{3}, 1)$, $(\frac{5\pi}{3}, 1)$ y $(0, 0)$.

4. Haga el análisis completo a las siguientes ecuaciones en coordenadas polares. Para esto indique: Dominio, simetrías, reducción del dominio, tangentes al polo, análisis de primera derivada y cuadro de variación. Trace la gráfica.

a) $r = 3\,\mathrm{sen}\,2\theta$ b) $r = 2 + 3\cos\theta$ c) $r^2 = 4\,\mathrm{sen}\,2\theta$

d) $r = 5\cos\theta$ e) $r = \theta$

Solución

a) $r = 3\,\mathrm{sen}\,2\theta$.

i) $\boxed{\text{Dominio}}$ Como $\mathrm{sen}\,\theta$ es periódica, de período 2π, se tiene que $0 \le 2\theta \le 2\pi \Longleftrightarrow 0 \le \theta \le \pi \therefore$ Dominio$= [\,0, \pi\,]$.

ii) $\boxed{\text{Simetrías}}$

$\boxed{x^+}$ $(r,\theta) \longmapsto (r,-\theta)$, $r = 3\,\mathrm{sen}(-2\theta) = -3\,\mathrm{sen}\,2\theta \therefore$ no hay simetría en $\boxed{x^+}$.

$\boxed{x^-}$ $(r,\theta) \longmapsto (-r,\pi-\theta)$, $-r = 3\,\mathrm{sen}(2\pi - 2\theta) = 3(\mathrm{sen}\,2\pi\cos 2\theta - \cos 2\pi\,\mathrm{sen}\,2\theta) = -3\,\mathrm{sen}\,2\theta \Longrightarrow$

$r = 3\operatorname{sen} 2\theta \therefore$ si hay simetría en $\boxed{x^-}$.

$\boxed{y^+}$ $(r,\theta) \longmapsto (r, \pi-\theta)$, $r = 3\operatorname{sen} 2(\pi-\theta) = -3(\operatorname{sen} 2\pi\cos 2\theta - \cos 2\pi \operatorname{sen} 2\theta) = -3\operatorname{sen} 2\theta \therefore$ no hay simetría en $\boxed{y^+}$.

$\boxed{y^-}$ $(r,\theta) \longmapsto (-r,-\theta)$, $-r = 3\operatorname{sen}(-2\theta) \Longrightarrow r = 3\operatorname{sen} 2\theta \therefore$ si hay simetría en $\boxed{y^-}$.

Así, hay simetría polar pues hay simetría $\boxed{x^-}$ y $\boxed{y^-}$.

iii) $\boxed{\text{Reducción del dominio}}$ Como se tienen todas las simetrías, basta graficar $[\,0, \frac{\pi}{2}\,]$.

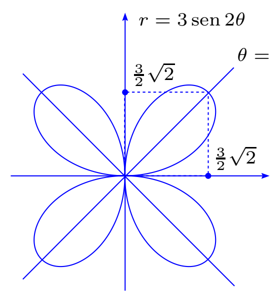
iv) $\boxed{\text{Tangentes al polo}}$ $r = 0$, con $\theta \in [\,0, \frac{\pi}{2}\,]$, $r = 0 \Longleftrightarrow 3\operatorname{sen} 2\theta = 0 \Longleftrightarrow 2\theta = 0, \pi \Longleftrightarrow \theta = 0, \frac{\pi}{2} \therefore$ $\theta = 0$ es tangente al polo y $\theta = \frac{\pi}{2}$ es tangente al polo.

v) $\boxed{\text{Análisis de la primera derivada}}$ $r' = 6\cos 2\theta = 0 \Longleftrightarrow \cos 2\theta = 0 \Longleftrightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} \Longleftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \therefore$ $(\frac{\pi}{4}, 3)$ es un punto crítico.

vi) $\boxed{\text{Cuadro de variación}}$

θ	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
r	0	$\nearrow$	$+3$	$\searrow$	0
r'		$+$	0	$-$	

vii) $\boxed{\text{Gráfico}}$



Rosa de 4 pétalos

b) $r = 2 + 3\cos\theta$

i) $\boxed{\text{Dominio}}$ Como $\cos\theta$ es periódica, de período 2π, basta graficar en $[\,0, 2\pi\,]$.

ii) $\boxed{\text{Simetrías}}$

$\boxed{x^+}$ $(r,\theta) \longmapsto (r,-\theta)$, $r = 2 + 3\cos(-\theta) = 2 + 3\cos\theta \therefore$ hay simetría en $\boxed{x^+}$.

$\boxed{y^+}$ $(r,\theta) \longmapsto (r,\pi-\theta)$, $r = 2 + 3\cos(\pi-\theta) = 2 - 3\cos\theta \therefore$ no hay simetría en $\boxed{y^+}$.

$\boxed{y^-}$ $(r,\theta) \longmapsto (-r,-\theta)$, $-r = 2 + 3\cos(-\theta) = 2 + 3\cos\theta \Longrightarrow r = -2 - 3\cos\theta \therefore$ no hay simetría en $\boxed{y^-}$.

Así, no hay simetría en y, por lo que no hay simetría polar, pues si hubiese también habría simetría en y.

iii) $\boxed{\text{Reducción del dominio}}$ Como sólo hay simetría $\boxed{x^+}$ graficamos en $[\,0, \pi\,]$.

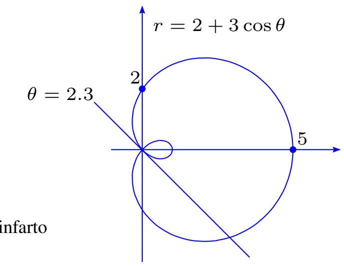
iv) $\boxed{\text{Tangentes al polo}}$ $r = 0 \Longleftrightarrow 2 + 3\cos\theta = 0 \Longleftrightarrow \cos\theta = -\frac{2}{3} \Longleftrightarrow \theta = \arccos(-\frac{2}{3}) \approx 2.3\text{rad} \approx 131.81^o$.

v) $\boxed{\text{Análisis de la primera derivada}}$ $r' = -3\operatorname{sen}\theta = 0 \Longleftrightarrow \theta = 0, \pi \therefore$ hay puntos críticos en $(0,5)$ y

$(\pi, -1)$.

vi) $\boxed{\text{Cuadro de variación}}$ vii) $\boxed{\text{Gráfico}}$

θ	0		2.3		π
r	5	$\searrow$	0	$\searrow$	-1
r'		$-$		$-$	0



Cardioide con infarto

Nota Para este gráfico es conveniente analizar las tangentes horizontales, verticales y en $\theta = \frac{\pi}{2}$ mediante las fórmula:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\frac{d}{d\theta}(f(\theta)\operatorname{sen}\theta)}{\frac{d}{d\theta}(f(\theta)\cos\theta)} = \frac{f'(\theta)\operatorname{sen}\theta + f(\theta)\cos\theta}{f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\operatorname{sen}\theta}.$$

c) $r^2 = 4\operatorname{sen}2\theta$

i) $\boxed{\text{Dominio}}$ Dado que $\operatorname{sen}\theta$ es periódica, de período 2π, se tiene que $0 \leq 2\theta \leq 2\pi \iff \theta \in [0, \pi]$, pero como $\operatorname{sen}2\theta$ debe ser positivo, $2\theta \in [0, \pi] \Longrightarrow \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

ii) $\boxed{\text{Simetrías}}$

$\boxed{x^+}$ $(r, \theta) \longmapsto (r, -\theta)$, $r = 4\operatorname{sen}(-2\theta) = -4\operatorname{sen}2\theta \therefore$ no hay simetría en $\boxed{x^+}$.

$\boxed{x^-}$ $(r, \theta) \longmapsto (-r, \pi - \theta)$, $(-r)^2 = 4\operatorname{sen}2(\pi - \theta) = -4\operatorname{sen}2\theta \therefore$ no hay simetría en $\boxed{x^-}$.

$\boxed{y^+}$ $(r, \theta) \longmapsto (r, \pi - \theta)$, $r = 4\operatorname{sen}2(\pi - \theta) = 4(\operatorname{sen}2\pi\cos2\theta - \cos2\pi\operatorname{sen}2\theta) = -4\operatorname{sen}2\theta \therefore$ no hay simetría en $\boxed{y^+}$.

$\boxed{y^-}$ $(r, \theta) \longmapsto (-r, -\theta)$, $r = (-r)^2\operatorname{sen}(-2\theta) = -4\operatorname{sen}2\theta \therefore$ no hay simetría en $\boxed{y^-}$.

$\boxed{P^+}$ $(r, \theta) \longmapsto (r, \pi + \theta)$, $r^2 = 4\operatorname{sen}(2\pi + 2\theta) = 4\operatorname{sen}2\theta \therefore$ hay simetría polar $\boxed{P^+}$.

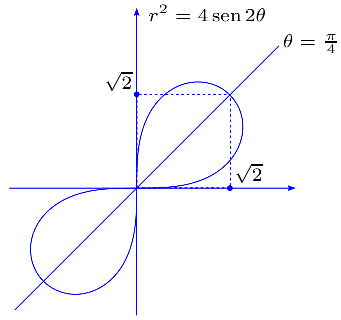
iii) $\boxed{\text{Reducción del dominio}}$ $[0, \frac{\pi}{2}]$.

iv) $\boxed{\text{Tangentes al polo}}$ $r = 0 \iff r^2 = 0 \iff 4\operatorname{sen}2\theta = 0 \iff \operatorname{sen}2\theta = 0, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \iff \theta = 0, \frac{\pi}{2}$ $\therefore \theta = 0$ es tangente al polo y $\theta = \frac{\pi}{2}$ es tangente al polo.

v) $\boxed{\text{Análisis de la primera derivada}}$ $2rr' = 8\cos2\theta \iff r' = \dfrac{8\cos2\theta}{2{\cdot}4\operatorname{sen}2\theta} = \operatorname{cotg}\,2\theta = 0 \iff 2\theta = \frac{\pi}{2} \iff \theta = \frac{\pi}{4} \therefore (\frac{\pi}{4}, 4)$ es punto crítico. r' no existe en $\theta = 0$.

vi) $\boxed{\text{Cuadro de variación}}$ vii) $\boxed{\text{Gráfico}}$

θ	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
r	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0
r'		$+$	0	$-$	



Lemniscata rotada

d) $r = 5\cos\theta$

i) $\boxed{\text{Dominio}}$ Dado que $\cos\theta$ es periódica, de período 2π, el dominio es $[\,0, 2\pi\,]$.

ii) $\boxed{\text{Simetrías}}$

$\boxed{x^+}$ $(r,\theta) \longmapsto (r,-\theta)$, $r = 5\cos(-\theta) = 5\cos\theta$ $\therefore$ hay simetría en $\boxed{x^+}$.

$\boxed{y^+}$ $(r,\theta) \longmapsto (r,\pi-\theta)$, $r = 5\cos(\pi-\theta) = -5\cos\theta$ $\therefore$ no hay simetría en $\boxed{y^+}$.

$\boxed{y^-}$ $(r,\theta) \longmapsto (-r,-\theta)$, $-r = 5\cos(-\theta) \Longrightarrow r = -5\cos\theta$ $\therefore$ no hay simetría en $\boxed{y^-}$.

Finalmente, no hay simetría $\boxed{y^+}$ ni $\boxed{y^-}$, pero hay $\boxed{x^+}$ lo que implica que no hay simetría $\boxed{P^+}$ o $\boxed{P^-}$.

iii) $\boxed{\text{Reducción del dominio}}$ $[\,0, \pi\,]$, pues hay $\boxed{x^+}$.

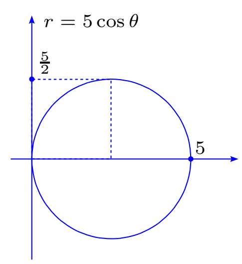
iv) $\boxed{\text{Tangentes al polo}}$ $r = 0 \Longleftrightarrow 5\cos\theta = 0 \Longleftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ $\therefore$ $\theta = \frac{\pi}{2}$ es tangente al polo.

v) $\boxed{\text{Análisis de la primera derivada}}$ $r' = -5\,\text{sen}\,\theta = 0 \Longleftrightarrow \theta = 0, \pi$ $\therefore$ $(0,5)$, $(\pi,-5)$ es puntos críticos.

vi) $\boxed{\text{Cuadro de variación}}$

θ	0		$\frac{\pi}{2}$		π
r	5	$\searrow$	0	$\searrow$	-5
r'	0	$-$	-5	$-$	0

vii) $\boxed{\text{Gráfico}}$



Círculo centrado en $(0, \frac{5}{2})$

e) $r = \theta$

i) $\boxed{\text{Dominio}}$ $\mathbb{R}$.

ii) $\boxed{\text{Simetrías}}$

$\boxed{x^+}$ $(r,\theta) \longmapsto (r,-\theta)$: $r = -\theta$ $\therefore$ no hay simetría en $\boxed{x^+}$.

$\boxed{x^-}$ $(r,\theta) \longmapsto (-r, \pi - \theta) \Longrightarrow r = \theta - \pi \therefore$ no hay simetría en $\boxed{x^-}$.

$\boxed{y^+}$ $(r,\theta) \longmapsto (r, \pi - \theta)$, $r = \pi - \theta \therefore$ no hay simetría en $\boxed{y^+}$.

$\boxed{y^-}$ $(r,\theta) \longmapsto (-r, -\theta)$, $-r = -\theta \Longrightarrow r = \theta \therefore$ hay simetría en $\boxed{y^-}$.

Finalmente, no puede haber simetría $\boxed{P^+}$ ni $\boxed{P^-}$.

iii) $\boxed{\text{Reducción del dominio}}$ $\mathbb{R}^+$.

iv) $\boxed{\text{Tangentes al polo}}$ $r = 0 \Longleftrightarrow \theta = 0 \therefore \theta = 0$ es tangente al polo.

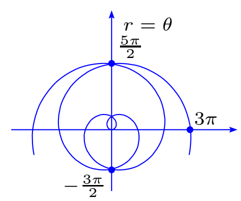
v) $\boxed{\text{Análisis de la primera derivada}}$ $r' = 1 \neq 0$. No hay puntos críticos y $r' > 0 \Longrightarrow r$ crece en todo $\mathbb{R}^+$.

vi) $\boxed{\text{Cuadro de variación}}$

θ	0	$+\infty$
r	0 $\nearrow$	
r'	$+$	

vii) $\boxed{\text{Gráfico}}$

Espiral



Tema 5

Ejercicios Semana No.4: Fórmula de Taylor — Fórmula de MacLaurin   Prof. Rodolfo Obando

1. Determine los desarrollos de MacLaurin de orden n de las siguientes funciones:

a) $\operatorname{sen} x$	b) $\cos x$	c) $\operatorname{senh}\, x$	d) $\cosh x$
e) e^x	f) $\ln(1+x)$	g) $\dfrac{1}{1-x}$	h) $\arctan x$

2. a) Aproxime la función $f(x) = \ln x$, mediante un polinomio de Taylor de grado 3, centrado en $a = 4$.

   b) ¿Que precisión tiene esta aproximación, cuando $3 \leq x \leq 5$?

3. a) Sea $f(x) = \operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{3})$, determine los polinomios de orden 3 y 4, centrados en $c = \frac{\pi}{3}$ y sus respectivos restos de Lagrange, para la función $f(x)$.

   b) Demuestre que $R_3(x) - R_4(x) = 0$.

   c) Aproxime $\operatorname{sen} 32^o$, aplicando los polinomios obtenidos en a) y determine una cota para el error que se comete en cada caso. ¿Cuál de ellas da la mejor información sobre la exactitud de la aproximación.

4. Se desea aproximar la función $f(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{5}{4}x^2$ alrededor de $x = 1$.

   a) Demuestre aplicando el Teorema de Taylor la fórmula:

$$f(x) \approx -\frac{5}{4} - 2(x-1) - \frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3.$$

   b) Demuestre que el resto R_3 en la parte a), satisface $R_3 \leq \frac{2}{27}(x-1)^4$, para $\frac{3}{4} \leq x \leq 1$.

5. Hallar el grado mínimo del polinomio de Taylor, centrado en $c = 1$, que debe usarse para aproximar $\ln 1.2$ con un error menor que 0.001.

6. a) Demuestre que $\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a = \cos a(x-a) - \frac{1}{2!}\operatorname{sen} a(x-1)^2 - \frac{1}{3!}\cos z(x-1)^3$, con z entre a y x.

   b) Utilice la parte a) para calcular $\operatorname{sen} 51^\circ$ y demuestre que el error que se comete es menor o igual a 0.0002, considerando que el valor de a es igual a $\dfrac{\pi}{4}$.

7. a) Calcule el polinomio de Maclaurin de orden 3 de la función $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

   b) Utilice la parte a) para calcular $\ln(1.2)$.

   c) ? Cuántas cifras de exactitud se obtienen?

8. Utilizando la fórmula aproximada $e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2$, calcular $\dfrac{1}{\sqrt[4]{e}}$ y valorar el error.

9. a) Determine el polinomio de Taylor de cuarto grado, centrado en $c = 0$, para la función $f(x) = \ln(1+x)$ y determine una cota para el error si $0 \leq x \leq \dfrac{1}{5}$.

   b) Deduzca cuántas cifras exactas tiene $\ln(1.2)$, utilizando el polinomio hallado en a). Justifique debidamente su respuesta.

10. Estime el error, si se usan los tres primeros términos no nulos del polinomio de Taylor correspondiente, para aproximar la integral $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{1+x^3}\,dx$.

11. Determinar el número de términos del desarrollo en serie de MacLaurin de $f(x) = \ln(1+x)$ que hay que tomar para que el error cometido al hallar el $\ln 1.5$ sea menor que 0.00000005.

12. Determinar entre qué valores debe estar comprendido un ángulo, para que el valor de $\cos x$ calculado con los tres primeros términos del desarrollo en serie de Taylor en potencias de $(x - \frac{\pi}{3})$, venga dado con un error menor que 0.00005.

13. a) Aproximar la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ mediante un polinomio de Taylor de segundo grado, centrado en $c = 8$.

    b) ¿Qué tan precisa es ésta aproximación, cuando $7 \leq x \leq 9$?

14. a) Determine al máximo error posible que se comete al usar la aproximación $\operatorname{sen} x \approx x - \dfrac{1}{3!}x^3 + \dfrac{1}{5!}x^5$, cuando $-0.3 \leq x \leq 0.3$.

    b) Utilice esta aproximación para calcular $\operatorname{sen} 12^\circ$ con seis cifras decimales exactas.

Ejercicios recomendados del libro Calculo N-2 (J. Poltronieri)

Ejercicios 1.6.1.: c,d,e,f pág. 13-14.

Ejercicios 1.6.2.: a,b,c,d pág. 14.

Ejercicios 1.6.3.: a,c,e,j,i,l,q pág. 15-17.

Ejercicios 1.6.4.: a,b,c,i,h pág. 18-19.

Ejercicios 1.6.5.: a,c,f,i pág. 20-21.

Ejercicios 1.6.6.: a,b,h,k,o,v,w,b',d',m' pág. 21-27.

Soluciones ejercicios Ejercicios Semana No.4: Fórmula de Taylor — Fórmula de MacLaurin Prof. Rodolfo Obando

1. Determine los desarrollos de MacLaurin de orden n de las siguientes funciones:

a) $\operatorname{sen} x$	b) $\cos x$	c) $\operatorname{senh}\, x$	d) $\cosh x$
e) e^x	f) $\ln(1+x)$	g) $\dfrac{1}{1-x}$	h) $\arctan x$

Solución

a) Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$, las derivadas sucesivas son $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\operatorname{sen} x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \operatorname{sen} x$,... y evaluando las derivadas en 0 tenemos que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = 1$, $f^{(4)}(0) = 0$,... El desarrollo de MacLaurin del $\operatorname{sen} x$ es:

$\operatorname{sen} x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dfrac{(-1)^n \operatorname{sen} z}{(2n+2)!} x^{2n+2}$, con z entre 0 y x.

b) Sea $f(x) = \cos x$, las derivadas sucesivas son $f'(x) = -\operatorname{sen} x$, $f''(x) = -\cos x$, $f'''(x) = \operatorname{sen} x$, $f^{(4)}(x) = \cos x$,... y evaluando las derivadas en 0 tenemos que $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 1$, $f'''(0) = 0$, $f^{(4)}(0) = 1$,... El desarrollo de MacLaurin del $\cos x$ es:

$\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \dfrac{(-1)^n \operatorname{sen} z}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, con z entre 0 y x.

c) Las derivadas sucesivas de $\operatorname{senh}\, x$ son $f'(x) = \cosh x$, $f''(x) = \operatorname{senh}\, x$, $f'''(x) = \cosh x$, $f^{(4)}(x) = \operatorname{senh}\, x$,..., los cuales al evaluarlos en $x = 0$ nos dan:

$\operatorname{senh}\, x = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dfrac{x^7}{7!} + \cdots + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dfrac{\operatorname{senh}\, z}{(2n+2)!} x^{2n+2}$, con z entre 0 y x.

d) Las derivadas sucesivas de $\cosh x$ son $f'(x) = \operatorname{senh}\, x$, $f''(x) = \cosh x$, $f'''(x) = \operatorname{senh}\, x$, $f^{(4)}(x) = \cosh x$,..., con lo que:

$\cosh x = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^6}{6!} + \cdots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \dfrac{\operatorname{senh}\, z}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, con z entre 0 y x.

e) Sea $f(x) = e^x$, las derivadas sucesivas son $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$,...,$f^{(n)}(x) = e^x$ y evaluando las derivadas en 0 tenemos:

$e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + e^z \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$, con z entre 0 y x.

f) Las derivadas sucesivas de $\ln(1+x)$ son $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $f''(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$, $f'''(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3}$, $f^{(4)}(x) = -\dfrac{2\cdot 3}{(1+x)^4}$,...,$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$, con lo que $f'(0) = 1$, $f''(0) = -1$, $f'''(0) = 2$, $f^{(4)}(0) = -2\cdot 3$,...,$f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$ y

$\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1} \dfrac{x^n}{n} + \dfrac{(-1)^{n+2} x^{n+1}}{(n+1)(1+z)^{n+1}}$, con z entre 0 y x, $-1 < x \leq 1$.

g) Las derivadas sucesivas de $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ son $f'(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$, $f''(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3}$, $f'''(x) = -\dfrac{2{\cdot}3}{(1+x)^4}$,...,$f^{(n)}(x) = (-1)^n \dfrac{n!}{(1+x)^{n+1}}$. Así evaluando en 0 tenemos $f'(0) = -1$, $f''(0) = 2$, $f'''(0) = 2{\cdot}3$,...,$f^{(n)}(0) = (-1)^n n!$ y

$\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + (-1)^{n+1}\dfrac{x^{n+1}}{(1+z)^{n+1}}$, con z entre 0 y x, $-1 < x < 1$.

h) Las derivadas sucesivas de $f(x) = \arctan x$ son $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $f''(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$, $f'''(x) = \dfrac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$, $f^{(4)}(x) = -\dfrac{24x(x^2-1)}{(1+x^2)^4}$ y la fórmula general de la derivada no se ve claramente. Por es razón es preferible usar el ejercicio g), para desarrollar $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, es decir usar $\dfrac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 + \cdots + (-1)^n y^n + (-1)^{n+1}\dfrac{y^{n+1}}{(1+z)^{n+1}}$, con z entre 0 y y, pues si tomamos $y = x^2$ se tiene:

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + (-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n+2}}{(1+z^2)^{n+1}}$, donde z está entre 0 y x, $-1 < x < 1$. Integrando de 0 a x la función $f'(t)$ tenemos:

$f(x) = \arctan x = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+2}\,dt}{(1+z^2)^{n+1}}$, donde $0 \le z \le t \le x$.

2. a) Aproxime la función $f(x) = \ln x$, mediante un polinomio de Taylor de grado 3, centrado en $a = 4$.

   b) ¿Que precisión tiene esta aproximación, cuando $3 \le x \le 5$?

   Solución

a) Sabemos que $f(x) = \ln x$, las derivadas sucesivas son $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f'''(x) = \frac{2}{x^3}$, $f^{(4)}(x) = -\dfrac{2{\cdot}3}{x^4}$,...,$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$, con lo que $f'(4) = \frac{1}{4}$, $f''(0) = -\frac{1}{4^2}$, $f'''(0) = \frac{2}{4^3}$, $f^{(4)}(z) = -\dfrac{3!}{z^4}$ y $\ln x = \ln 4 + \frac{1}{4}(x-4) - \dfrac{1}{4^2 2!}(x-4)^2 + \dfrac{2}{4^3 3!}(x-4)^3 - \dfrac{3!}{4! z^4}(x-4)^4$, con z entre 4 y x.

b) Cuando $3 \le x \le 5$ se tiene $3 \le z \le 5 \Longrightarrow \frac{1}{z} \le \frac{1}{3}$ y $|R_4| = |-\dfrac{(x-4)^4}{4z^4}| \le \dfrac{|x-4|^4}{4{\cdot}3^4} \le \dfrac{1^4}{4{\cdot}3^4} = 0.003086419753$.

3. a) Sea $f(x) = \operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{3})$, determine los polinomios de orden 3 y 4, centrados en $c = \frac{\pi}{3}$ y sus respectivos restos de Lagrange, para la función $f(x)$.

   b) Demuestre que $R_3(x) - R_4(x) = 0$.

   c) Aproxime $\operatorname{sen} 32^o$, aplicando los polinomios obtenidos en a) y determine una cota para el error que se comete en cada caso. ¿Cuál de ellas da la mejor información sobre la exactitud de la aproximación.

   Solución

a) Consideremos la función $f(x) = \operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{3})$, entonces $f'(x) = \cos(x - \frac{\pi}{3})$, $f''(x) = -\operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{3})$,

$f'''(x) = -\cos(x - \frac{\pi}{3})$, $f^{(4)}(x) = \operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{3})$ y $f(\frac{\pi}{3}) = 0$, $f'(\frac{\pi}{3}) = 1$, $f''(\frac{\pi}{3}) = 0$, $f'''(\frac{\pi}{3}) = -1$, $f^{(4)}(\frac{\pi}{3}) = 0$. De esta forma tenemos que $f(x) = f(\frac{\pi}{3}) + f'(\frac{\pi}{3})(x - \frac{\pi}{3}) + \dfrac{f''(\frac{\pi}{3})}{2!}(x - \frac{\pi}{3})^2 + \dfrac{f'''(\frac{\pi}{3})}{3!}(x - \frac{\pi}{3})^3 + R_3(x) = (x - \frac{\pi}{3}) - \frac{1}{3!}(x - \frac{\pi}{3})^3 + R_3(x) = (x - \frac{\pi}{3}) - \frac{1}{3!}(x - \frac{\pi}{3})^3 + R_4(x)$, donde $R_3(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(z - \frac{\pi}{3})}{4!}(x - \frac{\pi}{3})^4$ y $R_4(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(z' - \frac{\pi}{3})}{5!}(x - \frac{\pi}{3})^5$, con z y z' entre 0 y x.

b) Se observa que $R_3(x) = R_4(x)$.

c) Observemos que $2° = \dfrac{\pi}{90}$, $30° = \frac{\pi}{6}$ y que $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} = 30°$, con lo cual tenemos que si $x = 32° = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{90}$ y $\operatorname{sen} 32° = \operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{3}) = (x - \frac{\pi}{3}) + \frac{1}{3!}(x - \frac{\pi}{3})^3 + (R_3(x) = R_4(x)) = (\ \pi\ -\ 3x\ )\ \dfrac{9x^2 - 6\pi x + \pi^2 - 54}{162} + (R_3(x) = R_4(x))$, con $R_3(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(z - \frac{\pi}{3})}{4!}(x - \frac{\pi}{3})^4$, $R_4(x) = \dfrac{\cos(z' - \frac{\pi}{3})}{5!}(x - \frac{\pi}{3})^5$.

Así tenemos que: $|R_3(x)| = \left|\dfrac{\operatorname{sen}(z - \frac{\pi}{3})}{4!}(x - \frac{\pi}{3})^4\right| \leq \dfrac{(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{90})^4}{4!} = 0.004054134399$

$$|R_4(x)| = \left|\dfrac{\cos(z' - \frac{\pi}{3})}{5!}(x - \frac{\pi}{3})^5\right| \leq \dfrac{(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{90})^5}{5!} = 0.000001479810553.$$

4. Se desea aproximar la función $f(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{5}{4}x^2$ alrededor de $x = 1$.

a) Demuestre aplicando el Teorema de Taylor la fórmula:

$$f(x) \approx -\frac{5}{4} - 2(x-1) - \frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3.$$

b) Demuestre que el resto R_3 en la parte a), satisface $R_3 \leq \frac{2}{27}(x-1)^4$, para $\frac{3}{4} \leq x \leq 1$.

Solución

a) Las derivadas de $f(x)$ son $f'(x) = x\ln x - 2x$, $f''(x) = \ln x - 1$, $f'''(x) = \dfrac{1}{x}$, $f^{(4)}(x) = -\dfrac{1}{x^2}, \ldots$, $f^{(n)}(x) = -\dfrac{(-1)^{n-1}(n-3)!}{x^{n-2}}$, si $n \geq 3$. De esta forma $f(1) = -\frac{5}{4}$, $f'(1) = -2$, $f''(1) = -1$, $f'''(1) = 1$ y $f(x) = -\frac{5}{4} - 2(x-1) - \frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3 + R_3(x)$, donde $R_3(x) = \dfrac{f^{(4)}(z)}{4!}(x-1)^4$ y z está entre 1 y x.

b) Lo anterior, nos permite escribir $R_3(x) = \dfrac{1}{24z^2}(x-1)^4 \leq \dfrac{1}{24(\frac{3}{4})^2}(x-1)^4 = \frac{2}{27}(x-1)^4$, ya que si $\frac{3}{4} \leq x \leq 1 \Longrightarrow \frac{3}{4} \leq x \leq z \leq 1 \Longrightarrow \dfrac{1}{z} \leq \frac{4}{3} = \dfrac{1}{\frac{3}{4}}$.

5. Hallar el grado mínimo del polinomio de Taylor, centrado en $c = 1$, que debe usarse para aproximar $\ln 1.2$ con un error menor que 0.001.

Solución

Se sabe que $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n} + \dfrac{(-1)^{n+2}x^{n+1}}{(n+1)(1+z)^{n+1}}$, con $0 < z < x$.

En nuestro caso $x = 0.2$ y debemos determinar n para el cual $\left|\dfrac{(-1)^{n+2}x^{n+1}}{(n+1)(1+z)^{n+1}}\right| < 0.001$. De esta manera $|R_n| = \left|\dfrac{(-1)^{n+2}x^{n+1}}{(n+1)(1+z)^{n+1}}\right| = \left|\dfrac{(0.2)^{n+1}}{(n+1)(1+z)^{n+1}}\right| \leq \dfrac{(0.2)^{n+1}}{n+1} \leq 0.001$.

Calculando los valores para $n = 1, \ldots$ tenemos:

n	R_n	
1	$\frac{0.04}{2} = 0.02$	$\nleq 0.001$
2	$\frac{0.008}{3} = 0.00266666$	$\nleq 0.001$
3	$\frac{0.0016}{4} = 0.0004$	$\leq 0.001,$

por lo que el grado del polinomio es 3.

6. a) Demuestre que $\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a = \cos a(x-a) - \frac{1}{2!}\operatorname{sen} a(x-1)^2 - \frac{1}{3!}\cos z(x-1)^3$, con z entre a y x.

   b) Utilice la parte a) para calcular $\operatorname{sen} 51°$ y demuestre que el error que se comete es menor o igual a 0.0002, considerando que el valor de a es igual a $\frac{\pi}{4}$.

   Solución

a) Usando la fórmula de Taylor en $f(x) = \operatorname{sen} x$ tenemos:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \tfrac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \tfrac{1}{3!}f'''(z)(x-a)^3$$

$$f(x) = \operatorname{sen} a + \cos a(x-a) - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} a(x-a)^2 - \tfrac{1}{3!}\cos z(x-a)^3,$$

con z entre a y x.

b) Si tomamos $a = \frac{\pi}{4} = 45°$, entonces $x = 45° + 6° = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{30}$ y

$$f(x) \approx \operatorname{sen}\tfrac{\pi}{4} + \cos\tfrac{\pi}{4}(x - \tfrac{\pi}{4}) - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}\tfrac{\pi}{4}(x - \tfrac{\pi}{4})^2 = 0.777277683$$

$$|R_3| = |\tfrac{1}{3!}\cos z(x - \tfrac{\pi}{4})^3| \leq |\tfrac{1}{3!}(\tfrac{\pi}{30})^3| = 0.0001913967 \leq 0.0002.$$

ya que $x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{30}$. El valor "real" de 9 cifras significativas es $\operatorname{sen} 51° = 0.777145961\ldots$.

7. a) Calcule el polinomio de Maclaurin de orden 3 de la función $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

   b) Utilice la parte a) para calcular $\ln(1.2)$.

   c) ¿Cuántas cifras de exactitud se obtienen?

   Solución

a) Las derivadas de $f(x)$ son $f'(x) = -\dfrac{2}{x^2-1}$, $f''(x) = \dfrac{4x}{(x^2-1)^2}$, $f'''(x) = -\dfrac{4(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}$, $f^{(4)}(x) = \dfrac{48x(x^2+1)}{(x^2-1)^4}$ y evaluadas en 0 son $f(0) = 0$, $f'(0) = 2$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = 4$, lo que determina la expresión $f(x) = 2x + \frac{2}{3}x^3 + R_3(x)$, donde $R_3(x) = \dfrac{48z(z^2+1)}{(z^2-1)^4}\dfrac{x^4}{4!}$, y z está entre 0 y x.

b) Considerando que $\dfrac{1+x}{1-x}=1.2 \Longrightarrow x=\dfrac{0.2}{2.2}=0.09090909$ y por la parte a) tenemos que $f(1.2)\approx 2(0.09090909)+\frac{2}{3}(0.09090909)^3=0.182319057$.

c) Dado que $|R_3(x)|=\left|\dfrac{2z(z^2+1)x^4}{(z^2-1)^4}\right|\leq\dfrac{2(0.09090909)(0.09090909^2+1)}{(-1)^4}(0.09090909)^4=0.0000125211$, lo que permite decir que se tienen 3 cifras significativas.

8. Utilizando la fórmula aproximada $\mathrm{e}^x\approx 1+x+\frac{1}{2}x^2$, calcular $\dfrac{1}{\sqrt[4]{\mathrm{e}}}$ y valorar el error.

Solución

Sea $x=-\frac{1}{4}$, entonces $\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}\approx 1-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}(\frac{1}{4})^2=0.78125$, con $|R_2(x)|=\left|\mathrm{e}^z\dfrac{x^3}{3!}\right|\leq\left|\dfrac{(\frac{1}{4})^3}{3!}\right|=0.002604$.

Nota Observemos que $\dfrac{1}{\sqrt[4]{\mathrm{e}}}=0.778800783$ y que $|0.78125-0.778800783|=0.002449217<0.002604$.

9. a) Determine el polinomio de Taylor de cuarto grado, centrado en $c=0$, para la función $f(x)=\ln(1+x)$ y determine una cota para el error si $0\leq x\leq\frac{1}{5}$.

b) Deduzca cuántas cifras exactas tiene $\ln(1.2)$, utilizando el polinomio hallado en a). Justifique debidamente su respuesta.

Solución

a) Tenemos que $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^5}{5(1+z)^5}$, con $0<x<\frac{1}{5}$, $0<z<x\leq\frac{1}{5}$ y $\left|\dfrac{x^5}{5(1+z)^5}\right|\leq\dfrac{(\frac{1}{5})^5}{5}=0.000064$.

b) Dado que $\ln 1.2\approx(0.2)-\dfrac{(0.2)^2}{2}+\dfrac{(0.2)^3}{3}-\dfrac{(0.2)^4}{4}=0.182266$ se tiene que tenemos 3 cifras exactas ya que el error 0.000064 afecta la quinta cifra y podría tener repercusiones sobre la cuarta cifra.

Observemos que $\ln 1.2=0.182321556\ldots$.

10. Estime el error, si se usan los tres primeros términos no nulos del polinomio de Taylor correspondiente, para aproximar la integral $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{1+x^3}\,dx$.

Solución

Derivando la función $f(x)=\sqrt[3]{1+x^3}$ tenemos $f'(x)=\dfrac{x^2}{(1+x^3)^{\frac{2}{3}}}$, $f''(x)=\dfrac{2x}{(1+x^3)^{\frac{5}{3}}}$,

$f'''(x)=-\dfrac{2(3x^3-1)}{(1+x^3)^{\frac{8}{3}}}$, $f^{(4)}(x)=\dfrac{40x^2(x^3-1)}{(1+x^3)^{\frac{11}{3}}}$, $f^{(5)}(x)=-\dfrac{80x(3x^6-7x^3+1)}{(1+x^3)^{\frac{14}{3}}}$,

$f^{(6)}(x)=\dfrac{80(21x^9-91x^6+41x^3-1)}{(1+x^3)^{\frac{17}{3}}}$, $f^{(7)}(x)=-\dfrac{1120x^2(12x^9-85x^6+80x^3-10)}{(1+x^3)^{\frac{20}{3}}}$, donde

$R_7(x)=-\dfrac{1120z^2(12z^9-85z^6+80z^3-10)}{(1+z^3)^{\frac{20}{3}}}\dfrac{x^7}{7!}$ y z está entre 0 y x.

De esta manera $\sqrt[3]{1+x^3} = 1 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{9}x^6 + R_7(x)$.

Integrando de 0 a $\frac{1}{2}$ la función $f(x)$ se establece que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{1+x^3}\,dx = x + \frac{x^4}{12} - \frac{x^7}{63}\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \int_0^{\frac{1}{2}} R_7(x)\,dx$, donde $\displaystyle\left|\int_0^{\frac{1}{2}} R_7(x)\,dx\right| \leq 1120(\tfrac{1}{2})^2(12(\tfrac{1}{2})^9 + 85(\tfrac{1}{2})^6 + 80(\tfrac{1}{2})^3 + 10)\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^7}{7!}\,dx = 1120(\tfrac{1}{2})^2(12(\tfrac{1}{2})^9 + 85(\tfrac{1}{2})^6 + 80(\tfrac{1}{2})^3 + 10)\frac{(\frac{1}{2})^8}{8!} = 0.00926717$.

11. Determinar el número de términos del desarrollo en serie de MacLaurin de $f(x) = \ln(1+x)$ que hay que tomar para que el error cometido al hallar el $\ln 1.5$ sea menor que 0.00000005.

Solución Es sabido que $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n} + \dfrac{(-1)^{n+2}x^{n+1}}{(n+1)(1+z)^{n+1}}$, con z entre 0 y x, $-1 < x \leq 1$. En nuestro caso, $x = \frac{1}{2}$, $0 < z < x = \frac{1}{2}$ y se tiene que $|R_n(x)| = \left|\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)(1+z)^{n+1}}\right| \leq \dfrac{|x|^{n+1}}{n+1} \leq 0.00000005 = 5 \times 10^{-8}$.
Calculando los valores para $n = 1, \ldots$ tenemos:

n	R_n	
4	$\dfrac{(\frac{1}{2})^5}{5} = 6.25 \times 10^{-3}2$	$\not\leq 5 \times 10^{-8}$
9	$\dfrac{(\frac{1}{2})^{10}}{10} = 9.765625 \times 10^{-5}$	$\not\leq 5 \times 10^{-8}$
18	$\dfrac{(\frac{1}{2})^{19}}{19} = 1.0038677 \times 10^{-7}$	$\not\leq 5 \times 10^{-8}$
19	$\dfrac{(\frac{1}{2})^{20}}{20} = 4.76837 \times 10^{-8}$	$\leq 5 \times 10^{-8}$

por lo que debemos considerar 19 términos.

12. Determinar entre qué valores debe estar comprendido un ángulo, para que el valor de $\cos x$ calculado con los tres primeros términos del desarrollo en serie de Taylor en potencias de $(x - \frac{\pi}{3})$, venga dado con un error menor que 0.00005.

Solución

La fórmula de Taylor alrededor de $\frac{\pi}{3}$ establece que $\cos x = \cos\frac{\pi}{3} - (x - \frac{\pi}{3})\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} - \dfrac{(x-\frac{\pi}{3})^2}{2!}\cos\frac{\pi}{3} + \dfrac{(x-\frac{\pi}{3})^3}{3!}\operatorname{sen} z$, donde z está entre x y $\frac{\pi}{3}$. De esta forma, para $\delta > 0$ tal que $|x - \frac{\pi}{3}| < \delta$, se tiene que $|R_3(x)| = \dfrac{|\operatorname{sen} z||x-\frac{\pi}{3}|^3}{3!} \leq \dfrac{\delta^3}{3!} < 5 \times 10^{-5} \Longrightarrow |\delta| < \sqrt[3]{30 \times 10^{-5}} = 0.66943295 = \alpha$.
Finalmente el ángulo debe estar comprendido entre $\frac{\pi}{3} - \alpha$ y $\frac{\pi}{3} + \alpha$ i.e. $x \in \,]\,\frac{\pi}{3} - \alpha, \frac{\pi}{3} + \alpha\,[$.

13. a) Aproximar la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ mediante un polinomio de Taylor de segundo grado, centrado en $c = 8$.

b) ¿Qué tan precisa es ésta aproximación, cuando $7 \leq x \leq 9$?

Solución

a) Las derivadas de $f(x)$ son $f'(x) = \dfrac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$, $f''(x) = -\dfrac{2}{9x^{\frac{5}{3}}}$, $f'''(x) = -\dfrac{10}{27x^{\frac{8}{3}}}$ y la fórmula de Taylor establece que alrededor de 8, $f(x) = 2 + \dfrac{1}{12}(x-8) - \dfrac{1}{144}(x-8)^2 + \dfrac{10}{27z^{\frac{8}{3}}}(x-8)^3$, con z entre 8 y x.

b) Si $7 \leq x \leq 9 \implies 7 \leq z \leq 9$ y tenemos que $|R_2(x)| = \dfrac{10}{27z^{\frac{8}{3}}}|x-8|^3 \leq \dfrac{10}{27z^{\frac{8}{3}}} \leq \dfrac{10}{27 \cdot 7^{\frac{8}{3}}} =$ 0.002065577349, ya que $\dfrac{1}{z} \leq \dfrac{1}{7}$. La precisión de la aproximación es de una cifra exacta.

14. a) Determine al máximo error posible que se comete al usar la aproximación $\operatorname{sen} x \approx x - \dfrac{1}{3!}x^3 + \dfrac{1}{5!}x^5$, cuando $-0.3 \leq x \leq 0.3$.

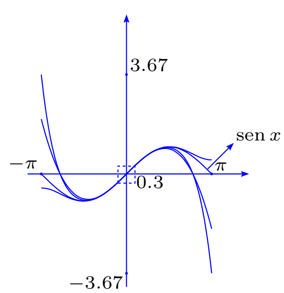
b) Utilice esta aproximación para calcular $\operatorname{sen} 12^\circ$ con seis cifras decimales exactas.

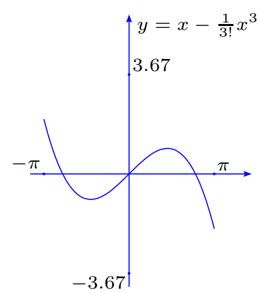
Solución

a) La fórmula de MacLaurin establece que $\operatorname{sen} x \approx x - \dfrac{1}{3!}x^3 + \dfrac{1}{5!}x^5 + R_5(x)$, donde $R_5(x) = \operatorname{sen}\psi \dfrac{x^6}{6!}$ y ψ está entre 0 y x. De esta manera tenemos que $|R_5(x)| \leq \dfrac{|x|^6}{6!} \leq \dfrac{(0.3)^6}{6!} = 1.0125 \times 10^{-6}$.

b) Observemos que $30^\circ = \dfrac{\pi}{30} = 0.104719755$, de modo que $|R_n(x)| \leq \dfrac{|x|^n}{n!} \leq 10^{-8}$. En la tabla siguiente tenemos:

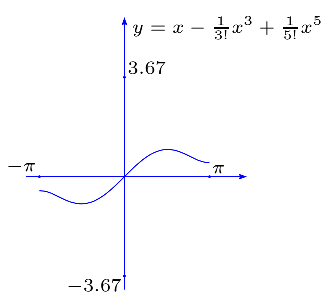
n	R_n	
4	5.01077×10^{-6}	$\nleq 10^{-8}$
5	1.04945×10^{-7}	$\nleq 10^{-8}$
6	1.83163×10^{-9}	$\leq 10^{-8}$

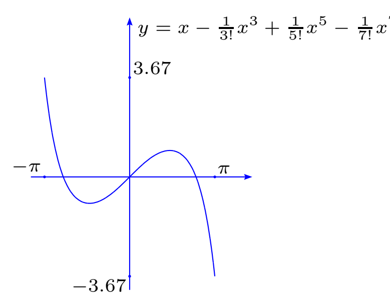




y se necesita un polinomio de grado 7 para tener la precisión deseada.

Como una ilustración a la precisión de la aproximación tenemos el gráfico siguiente:





Tema 6

Ejercicios Semanas No.5-6: Regla de l'Hôpital – Desarrollos limitados. Prof. Rodolfo Obando, Prof. Jorge Poltronieri

1. Calcular los siguientes l¡mites usando L'H“pital:

   a) $\lim_{x\to 0} \frac{1+\operatorname{sen} x - \cos x}{\tan x}$

   b) $\lim_{x\to 1} \frac{\arctan \frac{1-x}{1+x}}{x-1}$

   c) $\lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x\right)^2}{x\cos x - \operatorname{sen} x}$

   d) $\lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2-x+1} + \sqrt[3]{x^3+2x^2+1}\right)$.

2. Calcular los siguientes l¡mites usando L'H“pital:

   a) $\lim_{x\to 1} \frac{1-x+\log x}{1-\sqrt{2x-x^2}}$

   b) $\lim_{x\to 0} \frac{3\cos x - \cos 3x - 3\tan^2 x - 2}{(\mathrm{e}^x-1)^4}$

   c) $\lim_{x\to 0} \frac{2^x+1}{2^{1/x}+1}$

   d) $\lim_{x\to +\infty} (x+2^x)^{1/x}$

   e) $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2}$

   f) $\lim_{x\to +\infty} (\log x)^{1/x}$

   g) $\lim_{x\to 0^+} (1+x)^{\log x}$

   h) $\lim_{x\to +\infty} (\pi/2 - \arctan x)^{1/\log x}$

   i) $\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$

   j) $\lim_{x\to +\infty} ((x+1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}} - x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}})$.

3. Calcule los siguientes límites. Use en lo posible desarrollos limitados.

   a) $\lim_{x\to \mathrm{e}} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{\mathrm{e}}}{\ln x - 1}$

   b) $\lim_{x\to 1} \frac{\cos^2(\frac{1}{2}\pi x)}{\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}}$

   c) $\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{\ln x - x + 1}$

   d) $\lim_{x\to \infty} \left\{\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x - 1\right\} \ln x$

   e) $\lim_{x\to 0} \ln(1+\operatorname{sen} x) \operatorname{cotg} 2x$

   f) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \ln(1+x^2)}{x\tan x}$

   g) $\lim_{x\to \infty} \frac{x\ln(\cosh x - 1)}{x^2+1}$

   h) $\lim_{x\to 1^+} \frac{x^x - 1}{\ln(1-\sqrt{x^2-1})}$

   i) $\lim_{x\to 0^+} \frac{(\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x} - 1}{(\tan x)^{\tan x} - 1}$

   j) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x\mathrm{e}^x(x+1)} - \frac{1}{x\cos x}\right)$.

4. Calcule los siguientes límites. Use en lo posible desarrollos limitados.

   a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{sen} x}$

   b) $\lim\limits_{x\to\infty} x(\ln(1+x) - \ln x)$

   c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2}}$

   d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \dfrac{1}{x^2}$.

5. Encuentre el desarrollo limitado "generalizado" de las siguientes funciones, en un vecindario de 0.

   a) $g(x) = \csc\, x$; orden despreciable frente a x^6.

   b) $g(x) = \operatorname{cotgh}\, x$; orden despreciable frente a x^5.

6. Calcule los siguientes límites. Use en lo posible desarrollos limitados.

   a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln^2(1+x) - \operatorname{sen}^2 x}{1 - e^{-x^2}}$

   b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x e^{\cos x}}{1 - \operatorname{sen} x - \cos x}$

   c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 + 2\cos^3 x - 3(\cos 2x)^{\frac{1}{2}}}{\operatorname{sen}^4 x}$.

   d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cos^2(\frac{1}{2}\pi x)}{e^x - xe}$

   e) $\lim\limits_{x\to 1^-} (1-x)^{\tan \frac{1}{2}\pi x}$

   f) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2(1+\frac{1}{x})^x - ex^3\ln(1+\frac{1}{x})$

   g) $\lim\limits_{x\to\infty} \big\{\big(\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}\big)^x - 1\big\}\ln x$.

Soluciones ejercicios Semanas No.5-6: Regla de l'Hôpital – Desarrollos limitados.

Prof. Rodolfo Obando, Prof. Jorge Poltronieri

1. Calcular los siguientes límites usando L'Hôpital:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1+\operatorname{sen}x-\cos x}{\tan x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\arctan\frac{1-x}{1+x}}{x-1}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\cos x\right)^2}{x\cos x-\operatorname{sen}x}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}\right).$

Solución

a) Usando la regla de L'Hôpital se obtiene que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\operatorname{sen}x-\cos x}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+\operatorname{sen}x}{1+\tan^2 x}=1.$$

b) Usando L'Hôpital se tiene que:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\arctan\frac{1-x}{1+x}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left[\frac{-\frac{2}{(1+x)^2}\,\frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}}{1}=\frac{-2}{2+2x^2}\right]=-\frac{1}{2}.$$

c) Usando dos veces la regla de L'Hôpital se tiene que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\cos x\right)^2}{x\cos x-\operatorname{sen}x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{-2\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\cos x\right)\left(\frac{2}{\cos^3 x}+1\right)\operatorname{sen}x}{\cos x-x\operatorname{sen}x-\cos x}=\frac{2\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\cos x\right)\left(\frac{2}{\cos^3 x}+1\right)}{x}\right]=$$

$$\lim_{x\to 0}2\left[\left(\frac{2\operatorname{sen}x}{\cos^3 x}+\operatorname{sen}x\right)\left(\frac{2}{\cos^3 x}+1\right)+\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\cos x\right)\left(\frac{-6\operatorname{sen}x}{\cos^4 x}\right)\right]=0.$$

d) Haciendo el cambio de variable $x=1/t$ y usando L'Hôpital se tiene:

$$\lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}\right)=\lim_{t\to 0^-}\frac{-\sqrt{1-t+t^2}+\sqrt[3]{1+2t+t^3}}{t}=$$

$$\lim_{t\to 0^-}\left[-\tfrac{1}{2}(-1+2t)\frac{1}{\sqrt{1-t+t^2}}+\tfrac{1}{3}(2+3t^2)\frac{1}{(1+2t+t^3)^{\frac{2}{3}}}\right]=\tfrac{1}{2}+\tfrac{2}{3}=\tfrac{7}{6}.$$

2. Calcular los siguientes límites usando L'Hôpital:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{1-x+\log x}{1-\sqrt{2x-x^2}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3\cos x-\cos 3x-3\tan^2 x-2}{(\mathrm{e}^x-1)^4}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2^x+1}{2^{1/x}+1}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}(x+2^x)^{1/x}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}(\log x)^{1/x}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\log x}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}(\pi/2-\arctan x)^{1/\log x}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}x^{\operatorname{sen}x}$

j) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\left((x+1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}}-x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right).$

Solución

a) Por l'Hôpital tenemos $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{1-x+\log x}{1-\sqrt{2x-x^2}}=\lim_{x\to 1}\left(\frac{-1+\frac{1}{x}}{-(1-x)}\sqrt{2x-x^2}=\frac{-\sqrt{2x-x^2}}{x}\right)=-1.$

b) Usando cuatro veces la regla de l'Hôpital tenemos $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3\cos x-\cos 3x-3\tan^2 x-2}{(\mathrm{e}^x-1)^4}=$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{3\operatorname{sen} 3x-3\operatorname{sen} x-6\tan x\sec^2 x}{4(\mathrm{e}^x-1)^3}=\frac{3\operatorname{sen} 3x-3\operatorname{sen} x-6\tan x-6\tan^3 x}{4(\mathrm{e}^x-1)^3}\right)=$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{9\cos 3x-3\cos x-24\tan^2 x-18\tan^4 x-6}{12(\mathrm{e}^x-1)^2}=$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{-27\operatorname{sen} 3x-48\tan x-120\tan^3 x-72\tan^5 x+3\operatorname{sen} x}{24(\mathrm{e}^x-1)}=$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{-81\cos 3x+3\cos x-408\tan^2 x-720\tan^4 x-360\tan^6 x-48}{24\mathrm{e}^x}=-\tfrac{126}{24}=-\tfrac{21}{4}.$

c) En este caso el límite no existe pues $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\frac{2^x+1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=2\neq\lim_{x\to 0^+}\frac{2^x+1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=0.$

d) Notemos que usando l'Hôpital $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\log(x+2^x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+2^x\ln 2}{x+2^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2^x}+\ln 2}{\frac{x}{2^x}+1}=$ $\ln 2$, puesto que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2^x}=0$ y nos queda $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(x+2^x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\log(x+2^x)}=$ $\mathrm{e}^{\log 2}=2.$

e) Es claro que $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\tan x}{2x}=-\lim_{x\to 0}\frac{1+\tan^2 x}{2}=-\tfrac{1}{2}$, usando l'Hôpital dos veces, con lo que se tiene: $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}\ln\cos x}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}.$

f) Sabemos que $(\log x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(\ln x)}$, entonces por l'Hôpital $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\ln x}\frac{1}{x}}{1}=$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\ln x}=0$ y tenemos $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\log x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(\ln x)}=\mathrm{e}^0=1.$

g) En este caso $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\log x}=\lim_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{\log x\log(1+x)}=1$. En efecto, $\displaystyle\log x\log(1+x)=x\log x\frac{\log(1+x)}{x}$, por l'Hôpital $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}x\log x=\lim_{x\to 0}\frac{\log x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to 0^+}x=0$ y $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\log(1+x)}{x}=$ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=1$ y se tiene $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\log x}=\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\log x\log(1+x)}=\mathrm{e}^0=1.$

h) Usando l'Hôpital $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(\frac{\pi}{2}-\arctan x)}{\log x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{1+x^2}}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}}{-\frac{1}{1+x^2}}=$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x^2}{1+x^2}=-1$, lo que conduce a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\tfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\log x}}=\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\frac{\log(\frac{\pi}{2}-\arctan x)}{\log x}}=\frac{1}{\mathrm{e}}.$

i) Por la regla de l'Hôpital, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}x\log x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0$, entonces

$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x \log x = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} x\log x = 1{\cdot}0 = 0$ y tenemos $\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\operatorname{sen} x \log x} = \mathrm{e}^0 = 1.$

j) Realizando el cambio de variable $x = \frac{1}{t}$ y usando l'Hôpital tenemos que:

$$\lim_{x\to+\infty} \big((x+1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}} - x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\big) = \lim_{t\to 0^+} \frac{(t+1)\mathrm{e}^{\frac{t}{t+1}} - \mathrm{e}^t}{t} = \lim_{t\to 0^+} \big(\mathrm{e}^{\frac{t}{t+1}} + \frac{1}{t+1}\mathrm{e}^{\frac{t}{t+1}} - \mathrm{e}^t\big) = 1.$$

Por otro lado, efectuando el cambio de variable $t = \frac{1}{x}$ se obtiene finalmente que:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2^{\frac{1}{x}} + 3^{\frac{1}{x}} + 4^{\frac{1}{x}}}{3}\right)^x = \lim_{t\to 0^+} \mathrm{e}^{\frac{1}{t}\ln\left(\frac{2^t+3^t+4^t}{3}\right)} = \mathrm{e}^{\ln\sqrt[3]{24}} = \sqrt[3]{24}.$$

3. Calcule los siguientes límites. Use en lo posible desarrollos limitados.

a) $\lim_{x\to \mathrm{e}} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{\mathrm{e}}}{\ln x - 1}$

Tomemos $f(x) = \sqrt{x}$, entonces $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ y si $g(x) = \ln x$, entonces $f'(x) = \frac{1}{x}$, por lo que $\sqrt{x}-\sqrt{\mathrm{e}} = \frac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}}}(x-\mathrm{e})+o(x-\mathrm{e})$ y $\ln x - 1 = \frac{1}{\mathrm{e}}(x-\mathrm{e})+o(x-\mathrm{e})$. Así $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\mathrm{e}}}{\ln x - 1} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}}}+o(1)}{\frac{1}{\mathrm{e}}+o(1)} \longrightarrow \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$.

b) $\lim_{x\to 1} \frac{\cos^2(\frac{1}{2}\pi x)}{\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}}$

Sea $f(x) = \cos\frac{1}{2}\pi x$, $f(1) = 0$, $f'(1) = -\frac{1}{2}\pi$, $f''(1) = 0$, $f'''(1) = (\frac{1}{2}\pi)^3$, entonces $\cos\frac{1}{2}\pi x = -\frac{1}{2}\pi(x-1) + (\frac{1}{2}\pi)^3(x-1)^3 + o(x-1)^3$ i.e. $(\cos\frac{1}{2}\pi x)^2 = (\frac{1}{2}\pi)^2(x-1)^2 + o(x-1)^2$. Por otro lado $\mathrm{e}^x = \mathrm{e} + \mathrm{e}(x-1) + \frac{1}{2}\mathrm{e}(x-1)^2 + o(x-1)^2$ y se tiene $\frac{\cos^2(\frac{1}{2}\pi x)}{\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}} = \frac{(\frac{1}{2}\pi)^2(x-1)^2 + o(x-1)^2}{\frac{1}{2}\mathrm{e}(x-1)^2 + o(x-1)^2} = \frac{\pi^2}{2\mathrm{e}} + o(1) \longrightarrow \frac{\pi^2}{2\mathrm{e}}$.

c) $\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{\ln x - x + 1}$

Tomemos $f(x) = x^x$; así $f(1) = 1$, $f'(x) = x^x(\ln x + 1)$, $f'(1) = 1$, $f''(x) = x^x(\ln x+1)^2 + x^{x-1}$, $f''(1) = 2$ y la expresión $x^x = 1+(x-1)+(x-1)^2+o((x-1)^2) = x+(x-1)^2+o((x-1)^2)$. Similarmente tomando $g(x) = \ln x$, $g(1) = 0$, $g'(x) = \frac{1}{x}$, $g'(1) = 1$, $g''(x) = -\frac{1}{x^2}$, $g''(1) = -1$ y tenemos $\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$ con lo que $\frac{x^x - x}{\ln x - x + 1} = \frac{(x-1)^2 + o((x-1)^2)}{-\frac{1}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2)} = \frac{1+o(1)}{-\frac{1}{2}+o(1)} \longrightarrow -2.$

d) $\lim_{x\to\infty} \big\{\big(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\big)^x - 1\big\}\ln x$

Sea $y = \frac{1}{x}$, así $x\to\infty \iff y \to 0$ y se tiene $\frac{\ln(1+\frac{1}{y})}{-\ln y} = \frac{\ln(1+y)-\ln y}{-\ln y} = 1 - \frac{1}{\ln y}(y+o(y))$, por lo que $-\,[\,\mathrm{e}^{\frac{1}{y}\ln(1-\frac{1}{\ln y}(y+o(y)))} - 1\,]\ln y = -\,[\,\mathrm{e}^{\frac{1}{y}(-\frac{y}{\ln y}+o(\frac{y}{\ln y}))} - 1\,]\ln y = -\,[\,\mathrm{e}^{\frac{1}{\ln y}+o(\frac{1}{\ln y})} - 1\,]\ln y = -\,[\,1 - \frac{1}{\ln y} + o(\frac{1}{\ln y}) - 1\,]\ln y = 1 + o(1) \longrightarrow 1.$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \ln(1+\operatorname{sen} x)\operatorname{cotg} 2x$

Sabemos que $\operatorname{sen} x = x + o(x)$, $\ln(1+\operatorname{sen} x) = \ln(1+x+o(x)) = x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2) = x + o(x)$. Así $\operatorname{cotg} 2x = \dfrac{\cos 2x}{\operatorname{sen} 2x} = \dfrac{1}{x}\dfrac{1-2x^2+o(x^2)}{2x+o(x)}$ y $\ln(1+\operatorname{sen} x)\operatorname{cotg} 2x = x(1+o(1))\dfrac{1}{x}\dfrac{1-2x^2+o(x^2)}{2+o(1)} = \dfrac{1+o(1)}{2+o(1)} \longrightarrow \dfrac{1}{2}$.

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x \ln(1+x^2)}{x\tan x}$

Tenemos que $\dfrac{\operatorname{sen} x\ln(1+x^2)}{x\tan x} = \dfrac{\operatorname{sen} x\ln(1+x^2)}{x\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} = \dfrac{\cos x\ln(1+x^2)}{x} = (1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2))\dfrac{x^2+o(x^2)}{x} = (1+o(1))(x+o(x)) = x+o(x) \longrightarrow 0$.

g) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x\ln(\cosh x - 1)}{x^2+1}$

Dado que $\cosh x = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\dfrac{x\ln(\cosh x-1)}{x^2+1} = \dfrac{x\ln(e^x(\frac{1+e^{-2x}}{2} - e^{-x}))}{x^2+1} = \dfrac{x(x+\ln(\frac{1+e^{-2x}}{2}-e^{-x}))}{x^2+1}$ y cuando $x\to+\infty$, $e^{-x}\longrightarrow 0$, $e^{-2x}\longrightarrow 0$ y por lo tanto: $\ln(\dfrac{1+e^{-2x}}{2} - e^{-x}) \longrightarrow \ln\dfrac{1}{2}$. Así, $\dfrac{x\ln(\cosh x-1)}{x^2+1} = \dfrac{x^2}{x^2+1}(1+\dfrac{1}{x}\ln(\dfrac{1+e^{-2x}}{2}-e^{-x})) \longrightarrow 1$.

h) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^x-1}{\ln(1-\sqrt{x^2-1})}$

Sea $x = u+1$, entonces $x\to 1^+ \iff x-1 = u \to 0^+$ y $x^x - 1 = e^{x\ln x} - 1 = e^{(u+1)\ln(1+u)} - 1 = e^{(u+1)(u-\frac{1}{2}u^2+o(u))} - 1 = e^{u+\frac{1}{2}u^2+o(u^2)} - 1 = 1 + (u+\frac{1}{2}u^2) + \frac{1}{2}(u+\frac{1}{2}u^2)^2 + o(u+\frac{1}{2}u^2)^2 - 1 = u + u^2 + o(u^2)$. Ahora:

$\ln(1-\sqrt{x^2-1}) = \ln(1-\sqrt{(u+1)^2-1}) = -\sqrt{u^2+2u} - \frac{1}{2}(u^2+2u) + o(u) = -\sqrt{u^2+2u} - u + o(u)$,

por lo tanto:

$$\frac{x^x-1}{\ln(1-\sqrt{x^2-1})} = \frac{u+o(u)}{-\sqrt{u}(\sqrt{2+u}+\sqrt{u}+o(u^{\frac{1}{2}}))} = -\frac{u^{\frac{1}{2}}+o(u^{\frac{1}{2}})}{\sqrt{2+u}+\sqrt{u}+o(u^{\frac{1}{2}})} \longrightarrow 0, \text{ si } u\to 0^+.$$

i) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{(\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x} - 1}{(\tan x)^{\tan x} - 1}$

Dado que $(\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x} - 1 = e^{\operatorname{sen} x\log\operatorname{sen} x} - 1 = e^{(x+o(x))\log(x+o(x))} - 1 = e^{x\log x + o(x\log x)} - 1 = 1 + x\log x + o(x\log x) - 1 = x\log x + o(x\log x)$ y $(\tan x)^{\tan x} - 1 = e^{(x+o(x))\log(x+o(x))} - 1 = e^{x\log x+o(x\log x)} - 1 = x\log x + o(x\log x)$, tenemos que el cociente $\dfrac{(\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}-1}{(\tan x)^{\tan x}-1} = \dfrac{x\log x+o(x\log x)}{x\log x+o(x\log x)} = \dfrac{1+o(1)}{1+o(1)} \longrightarrow 1$.

j) $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{xe^x(x+1)} - \dfrac{1}{x\cos x})$

Consideremos $\dfrac{1}{x(x+1)e^x} = \dfrac{1}{(x^2+x)(1+x+o(x))} = \dfrac{1}{x^2+x+x^2+o(x^2)} = \dfrac{1}{x+2x^2+o(x^2)} =$

$\frac{1}{x}\frac{1}{1+2x+o(x)} = \frac{1}{x}(1-2x+o(x)) = \frac{1}{x} - 2 + o(1).$

Por otro lado, $\frac{1}{x\cos x} = \frac{1}{x(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2))} = \frac{1}{x}(1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)) = \frac{1}{x}+\frac{1}{2}x+o(x)$ y finalmente $\frac{1}{x\mathrm{e}^x(x+1)} - \frac{1}{x\cos x} = \frac{1}{x} - 2 + o(1) - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}x + o(x) = -2 + o(1) \longrightarrow -2.$

4. Calcule los siguientes límites. Use en lo posible desarrollos limitados.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\operatorname{sen} x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1+x+o(x)-(1+(-x)+o(-x))}{x+o(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x(2+o(1))}{x(1+o(1))} = 2.$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} x(\ln(1+x)-\ln x) = \lim\limits_{x\to\infty} x\ln(1+1/x) = \lim\limits_{y\to 0^+}\frac{\ln(1+y)}{y} = \lim\limits_{y\to 0^+}\frac{y(1+o(1))}{y} = \lim\limits_{y\to 0^+}(1+o(1)) = 1.$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen} x}{\mathrm{e}^x-1-x-\frac{x^2}{2}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x-(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3))}{1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)-1-x-\frac{x^2}{2}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3(\frac{1}{6}+o(1))}{x^3(\frac{1}{6}+o(1))} = 1.$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}-\frac{1}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-\operatorname{sen}^2 x}{x^2\operatorname{sen}^2 x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x+\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}\cdot\frac{x-\operatorname{sen} x}{x^2\operatorname{sen} x} = \lim\limits_{x\to 0}\big(\frac{x}{\operatorname{sen} x}+1\big)\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen} x}{x^2\operatorname{sen} x}$
$= 2\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))}{x^2(x+o(x))} = 2\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3(\frac{1}{6}+o(1))}{x^3(1+o(1))} = \frac{1}{3}.$

5. Encuentre el desarrollo limitado "generalizado" de las siguientes funciones, en un vecindario de 0.

a) $g(x) = \csc x$; orden despreciable frente a x^6.

A partir de la definición de $\csc x$ y usando un desarrollo de orden 8 se tiene:

$$g(x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+o(x^8)} = \frac{1}{x}\frac{1}{1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+o(x^7)} =$$
$$\frac{1}{x}\Big(1-\big(-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}\big)+\big(-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}\big)^2-\big(-\frac{x^2}{3!}\big)^3+o(x^7)\Big) =$$
$$\frac{1}{x}(1+\frac{1}{6}x^2+\frac{7}{360}x^4+\frac{31}{15120}x^6+o(x^7)) = \frac{1}{x}+\frac{1}{6}x+\frac{7}{360}x^3+\frac{31}{15120}x^5+o(x^6).$$

b) $g(x) = \operatorname{cotgh} x$; orden despreciable frente a x^5.

Usando un desarrollo limitado de orden 6 en el $\cosh x$ y de orden 7 en el $\operatorname{senh} x$ nos queda: $\operatorname{cotgh} x =$

$$\frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x} = \frac{1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+o(x^6)}{x\big(1+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+\frac{x^6}{7!}+o(x^6)\big)} =$$
$$\frac{1}{x}\big(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+o(x^6)\big)\ \Big(1-\big(\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}+\frac{x^6}{7!}\big)+\big(\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}\big)^2-\big(\frac{x^2}{3!}\big)^3+o(x^6)\Big) =$$
$$\frac{1}{x}\big(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}\big)\big(1-\frac{x^2}{3!}-\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\frac{x^4}{(3!)^2}+\frac{2x^6}{3!5!}-\frac{x^6}{(3!)^3}+o(x^6)\big) =$$
$$\frac{1}{x}\big(1-\frac{x^2}{6}+\frac{7x^4}{360}+\frac{36x^6}{7!3!}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{3!}+\frac{7x^6}{720}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{3!4!}+\frac{x^6}{6!}-\frac{x^6}{(3!)^3}+o(x^6)\big) =$$
$$\frac{1}{x}+\frac{x}{3}-\frac{1}{45}x^3+\frac{2}{945}x^5+o(x^5).$$

6. Calcule los siguientes límites. Use en lo posible desarrollos limitados.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln^2(1+x) - \operatorname{sen}^2 x}{1 - e^{-x^2}}$

Tomando un desarrollo limitado de orden 2 se tiene:

$$\frac{\ln^2(1+x) - \operatorname{sen}^2 x}{1 - e^{-x^2}} = \frac{(x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2))^2 - (x + o(x))^2}{1 - (1 - x^2 + o(x^2))} = \frac{x^2 - x^3 - x^2 + o(x^3)}{x^2 + o(x^2)} = \frac{-x^3 + o(x^3)}{x^2 + o(x^2)}$$
$$= \frac{-x + o(x)}{1 + o(1)} \longrightarrow 0.$$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x e^{\cos x}}{1 - \operatorname{sen} x - \cos x}$

En virtud que $\dfrac{x e^{1+o(1)}}{1 - \operatorname{sen} x - \cos x} = \dfrac{x e(1 + o(1))}{1 - x + o(x) - 1} = \dfrac{e + o(1)}{-1 + o(1)} \longrightarrow -e.$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 + 2\cos^3 x - 3(\cos 2x)^{\frac{1}{2}}}{\operatorname{sen}^4 x}$

Con un desarrollo limitado de orden 4 tenemos:

$$\frac{1 + 2\cos^3 x - 3(\cos 2x)^{\frac{1}{2}}}{\operatorname{sen}^4 x} = \frac{1 + 2(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4))^3 - 3(1 - \frac{4}{2!}x^2 + \frac{16}{4!}x^4 + o(x^4))^{\frac{1}{2}}}{(x + o(x))^4} =$$
$$\frac{3 - 3x^2 + \frac{7}{4}x^4 - 3 + 3x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)}{x^4(1 + o(1))} = \frac{\frac{9}{4}x^4 + o(x^4)}{x^4(1 + o(1))} = \frac{\frac{9}{4} + o(1)}{1 + o(1)} \longrightarrow \frac{9}{4}.$$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cos^2(\frac{1}{2}\pi x)}{e^x - xe}$

Sea $f(x) = \cos\frac{1}{2}\pi x$, $f(1) = 0$, $f'(1) = -\frac{1}{2}\pi$, $f''(1) = 0$, $f'''(1) = (\frac{1}{2}\pi)^3$, entonces $\cos\frac{1}{2}\pi x = -\frac{1}{2}\pi(x-1) + (\frac{1}{2}\pi)^3(x-1)^3 + o(x-1)^3$ i.e. $(\cos\frac{1}{2}\pi x)^2 = (\frac{1}{2}\pi)^2(x-1)^2 + o(x-1)^2$. Por otro lado $e^x = e + e(x-1) + \frac{1}{2}e(x-1)^2 + o(x-1)^2$ y se tiene $\dfrac{\cos^2(\frac{1}{2}\pi x)}{e^x - xe} = \dfrac{(\frac{1}{2}\pi)^2(x-1)^2 + o(x-1)^2}{\frac{1}{2}e(x-1)^2 + o(x-1)^2} = \dfrac{\pi^2}{2e} + o(1) \longrightarrow \dfrac{\pi^2}{2e}$.

e) $\lim\limits_{x\to 1^-} (1-x)^{\tan\frac{1}{2}\pi x}$

Sea $f(x) = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}x)$, $f(1) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$, $f'(x) = \frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{2}x)$, $f''(x) = -(\frac{\pi}{2})^2\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}x)$ y sea $g(x) = \cos(\frac{\pi}{2}x)$, $g(1) = 0$, $g'(x) = \frac{\pi}{2}\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}x)$, entonces si $y = 1 - x$ obtenemos:

$$\tan(\tfrac{1}{2}\pi x) = \frac{1 - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi)^2(x-1)^2 + o((x-1)^2)}{\frac{1}{2}\pi(x-1) + o(x-1)} = \frac{1 - \frac{1}{8}\pi^2 y^2 + o(y^2)}{-\frac{1}{2}\pi y + o(y)} = -\frac{2}{\pi}\frac{\frac{1}{y} - \frac{1}{8}\pi^2 y + o(y)}{1 + o(1)}$$

y por lo tanto se tiene $(1-x)^{\tan\frac{1}{2}\pi x} = e^{-\frac{2}{\pi}\frac{\frac{1}{y} - \frac{1}{8}\pi^2 y + o(y)}{1+o(1)}\ln y} = e^{-\frac{2}{\pi}\frac{\frac{\ln y}{y} - \frac{1}{8}\pi^2 y\ln y + o(y\ln y)}{1+o(1)}} \sim e^{-\frac{2}{\pi}\frac{\ln y}{y}} \longrightarrow +\infty$ cuando $y \to 0^+$.

f) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2(1 + \frac{1}{x})^x - e x^3\ln(1 + \frac{1}{x})$

Sea $\dfrac{1}{x} = y$, entonces $x \to \infty \Longleftrightarrow y \to 0$ y se tiene que:

$$x^2(1 + \frac{1}{x})^x - e x^3\ln(1 + \frac{1}{x}) = \frac{1}{y^2}(1+y)^{\frac{1}{y}} - e\frac{1}{y^3}\ln(1+y).$$

Ahora $\dfrac{1}{y^2}e^{\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}} = \dfrac{1}{y^2}e^{\frac{1}{y}\ln(1+y)} = \dfrac{1}{y^2}e(1-\frac{1}{2}y+(\frac{1}{3}+\frac{1}{8})y^2+o(y^2))$ y $e\dfrac{1}{y^3}\ln(1+y) =$ $e\dfrac{1}{y^3}(y-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3+o(y^3))$. Finalmente $\dfrac{1}{y^2}(1+y)^{\frac{1}{y}} - e\dfrac{1}{y^3}\ln(1+y) = e(\frac{1}{8}+o(1)) \longrightarrow \frac{1}{8}e$.

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\Big\{\big(\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}\big)^x - 1\Big\}\ln x$

Sea $y = \dfrac{1}{x}$, así $x \to \infty \iff y \to 0$ y se tiene $\dfrac{\ln(1+\frac{1}{y})}{-\ln y} = \dfrac{\ln(1+y)-\ln y}{-\ln y} = 1 - \dfrac{1}{\ln y}(y+o(y))$, por lo que $-\,[\,e^{\frac{1}{y}\ln(1-\frac{1}{\ln y}(y+o(y))} - 1\,]\ln y = -\,[\,e^{\frac{1}{y}(-\frac{y}{\ln y}+o(\frac{y}{\ln y}))} - 1\,]\ln y =$ $-\,[\,e^{\frac{1}{\ln y}+o(\frac{1}{\ln y})} - 1\,]\ln y = -\,[\,1 - \dfrac{1}{\ln y} + o(\dfrac{1}{\ln y}) - 1\,]\ln y = 1 + o(1) \longrightarrow 1.$

Tema 7

Ejercicios Semanas No.7-8: Integrales impropias

Prof. Rodolfo Obando, Prof. Jorge Poltronieri

1. Determinar el valor hacia el cual converge cada una de las siguientes integrales impropias:

   a) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{3+x}{-1+x-x^2+x^3}\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^{3} \frac{dx}{(-1+x)^{\frac{2}{3}}}$

   c) $\displaystyle\int_0^{2} \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}}$ d) $\displaystyle\int_0^{1} x\,\ln x\,dx.$

2. Analizar la convergencia de las siguientes integrales impropias:

   a) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{-1+x^4}}$ b) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^2+2}{x^{\frac{2}{3}}\sqrt{1-x^2}}\,dx$

   c) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{t}+\operatorname{sen} t}$ d) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx.$

3. i) Verifique que las siguientes integrales son convergentes.

   a) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x\ln^2 x}$ b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{e^x}\,dx.$

   ii) Calcule el valor de la constante k, tal que:

   a) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x\ln^2(k\,x)} = -\frac{1}{\ln 2-1}$ b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{e^{(k\,x)}} = \frac{1}{4}.$

4. Analizar la convergencia de las siguientes integrales impropias:

   a) $\displaystyle\int_0^{2} \left(\frac{-1+\sqrt{x+1}}{x^2}\right)^{\alpha} dx$ b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}\,\operatorname{sen}\left(x^{-2}\right)}{\ln(1+x)}\,dx$

   c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \left(-\frac{k}{1+x}+\frac{1}{\sqrt{1+2\,x^2}}\right) dx$ d) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^k}{1+x^t}\,dx.$

5. Aplicando el método de integración por partes, demuestre que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{(1+x)^3}\,dx = \frac{1}{2}.$

6. Aplicando el método de sustitución de variable, demuestre que $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}\,dx = \frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}.$

7. Analizar la convergencia de las siguientes integrales impropias (aplique el método de integración por partes o el método de sustitución de variable, según sea el caso).

   a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x}\, dx$

   b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \cos(x^2)\, dx$

   c) $\displaystyle\int_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x \ln x \ln^2(\ln x)}\, dx$

   d) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\, dx.$

   Ejercicios recomendados del libro: Poltronieri, Jorge. Cálculo N-2. Serie CABÉCAR. UCR. 1998.
   Ejercicios 2.6 pag. 63: 1c, 1d, 1e, 1f, 1i, 1k, 1l. pag. 69: 2b, 2c, 2f, 2g. Pag. 72: 5a, 5g,

Soluciones ejercicios Semanas No.7-8: Integrales impropias
Prof. Rodolfo Obando, Prof. Jorge Poltronieri

1. Para calcular el valor hacia el cual converge cada una de las integrales dadas, aplicamos el teorema fundamental del cálculo y la teoría de límites.

(a) $I = \displaystyle\int_2^{\infty} \frac{3+x}{-1+x-x^2+x^3}\, dx.$

- La integral es impropia de primera especie.
- Factorizamos la función integrando y luego aplicamos el método de fracciones parciales

$$\frac{3+x}{-1+x-x^2+x^3} = \frac{3+x}{(-1+x)\,(1+x^2)} = \frac{2}{-1+x} - \frac{1+2\,x}{1+x^2}.$$

- Calculamos inicialmente la integral indefinida

$$\begin{aligned}
\int \frac{3+x}{-1+x-x^2+x^3}\, dx &= \int \left(\frac{2}{-1+x} - \frac{1+2\,x}{1+x^2}\right) dx \\
&= \int \frac{2}{-1+x}\, dx - \int \frac{1+2\,x}{1+x^2}\, dx \\
&= 2\,\ln(-1+x) - \left(\int \frac{1}{1+x^2}\, dx + \int \frac{2\,x}{1+x^2}\, dx\right) \\
&= 2\,\ln(-1+x) - \ln(1+x^2) - \arctan x + C \\
&= \ln\left[\frac{(-1+x)^2}{1+x^2}\right] - \arctan x + C.
\end{aligned}$$

- Evaluamos la integral I:

$$\begin{aligned}
I &= \int_2^{\infty} \frac{3+x}{-1+x-x^2+x^3}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_2^{b} \frac{3+x}{-1+x-x^2+x^3}\, dx \\
&= \lim_{b\to\infty} \left[\ln\left[\frac{(-1+x)^2}{1+x^2}\right] - \arctan x\right]_2^b \\
&= \lim_{b\to\infty} \left[\ln\left[\frac{(-1+b)^2}{1+b^2}\right] - \arctan(b)\right] - \left[\ln\left[\frac{(-1+2)^2}{1+(2)^2}\right] - \arctan(2)\right] \\
&= \ln\left[\lim_{b\to\infty} \left(\frac{1-2\,b+b^2}{1+b^2}\right)\right] - \lim_{b\to\infty} [\,\arctan(b)\,] - \ln\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan(2) \\
&= \ln(1) - \frac{\pi}{2} - \ln\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan(2) = 1.14579.
\end{aligned}$$

(b) $I = \displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{(-1+x)^{\frac{2}{3}}}$.

- La integral I es impropia de segunda especie ya que la función integrando se indefine en $x = 1$ (punto singular), entonces:

$$I = \int_0^3 (-1+x)^{-\frac{2}{3}}\,dx = \underbrace{\int_0^1 (-1+x)^{-\frac{2}{3}}\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_1^3 (-1+x)^{-\frac{2}{3}}\,dx}_{I_2}$$

- Evaluamos I_1.

$$I_1 = \int_0^1 (-1+x)^{-\frac{2}{3}}\,dx \quad = \quad \lim_{c\to 1^-}\left(\int_0^c (-1+x)^{-\frac{2}{3}}\,dx\right) = \lim_{c\to 1^-}\left[3\,(-1+x)^{\frac{1}{3}}\right]_0^c$$

$$I_1 = \lim_{c\to 1^-}\left[3\,(-1+c)^{\frac{1}{3}}\right] - 3\,(-1)^{\frac{1}{3}} = 3\,(-1+1)^{\frac{1}{3}} - 3\,(-1)^{\frac{1}{3}} = 0+3 = 3.$$

- Evaluamos I_2

$$I_2 = \int_1^3 (-1+x)^{-\frac{2}{3}}\,dx = \lim_{c\to 1^+}\left(\int_c^3 (-1+x)^{-\frac{2}{3}}\,dx\right) = \lim_{c\to 1^+}\left[3\,(-1+x)^{\frac{1}{3}}\right]_c^3$$

$$I_2 = (3)\,\left(2^{\frac{1}{3}}\right) - \lim_{c\to 1^+}\left[3\,\left(-1+c\right)^{\frac{1}{3}}\right] = 3\sqrt[3]{2} - 0 = 3\sqrt[3]{2}.$$

- Como las integrales I_1 e I_2 convergen a los valores respectivos, entonces I converge al valor de

$$I = I_1 + I_2 = 3 + 3\sqrt[3]{2} = 3(1+\sqrt[3]{2}).$$

(c) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}}$.

- La integral es impropia de segunda especie, tiene un punto singular en $x = 1$ y por definición, tenemos que el valor absoluto de

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{si, } x-1>0 \Longrightarrow x>1 \\ -(x-1), & \text{si, } x-1<0 \Longrightarrow x<1. \end{cases}$$

- Si $x < 1$ tenemos:

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{c\to 1^-}\left(\int_0^c \frac{dx}{\sqrt{1-x}}\right) = \lim_{c\to 1^-}\left(-2\sqrt{1-x}\right)\Big|_0^c$$
$$= -2\left(\lim_{c\to 1^-}\left(\sqrt{1-c}\right) - \sqrt{1-0}\right) = -2(0-1) = 2.$$

- Si $x > 1$,

$$I_2 = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{-1+x}} = \lim_{c\to 1^+}\left(\int_c^2 \frac{dx}{\sqrt{-1+x}}\right) = \lim_{c\to 1^+}\left(2\sqrt{-1+x}\right)\Big|_c^2$$
$$= 2\left(\sqrt{-1+2} - \lim_{c\to 1^+}\left(\sqrt{-1+c}\right)\right) = 2(1-0) = 2.$$

- Ambas integrales convergen al valor de 2, entonces

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}} = I_1 + I_2 = 2 + 2 = 4.$$

(d) $I = \displaystyle\int_0^1 x \, \ln x \, dx.$

- La integral es impropia de segunda especie (tiene un punto singular en $x = 0$).
- Integramos por partes $u = \ln x$, $du = \dfrac{dx}{x}$, $dv = x\,dx$, $v = \dfrac{x^2}{2}$, luego

$$\begin{aligned}\int_0^1 x \, \ln x \, dx &= \frac{x^2}{2} \ln x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} \ln x\Big|_0^1 - \frac{x^2}{4}\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\ln(1) - \frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+} x^2 \, \ln x - \frac{1}{4}(1-0) = -\frac{1}{2}\underbrace{\lim_{x\to 0^+} x^2 \, \ln x}_{0\cdot\infty} - \frac{1}{4},\end{aligned}$$

aplicando la regla de L'Hôpital tenemos que:

$$\lim_{x\to 0^+} x^2 \, \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-1}}{-2\,x^{-3}} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+} \frac{x^3}{x} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+} x^2 = 0,$$

por lo tanto, la integral I converge al valor de $-\dfrac{1}{4}$.

2. Analizar la convergencia de las integrales dadas.

(a) $I = \displaystyle\int_2^\infty \frac{xdx}{\sqrt{-1+x^4}}$

- Tenemos una integral impropia de primera especie.
- Para analizar su convergencia aplicamos el criterio de comparación en el límite.
- Aplicamos el concepto de límite, cuando $x \to \infty$.
  Si $x \to \infty$, $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^4 - 1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^4(1-x^{-4})}} \sim \dfrac{x}{x^2} = \dfrac{1}{x}$, la integral $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x}$ diverge ($\lambda = 1$), luego la integral I también diverge.

(b) $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{2+x^2}{x^{\frac{2}{3}}\sqrt{1-x^2}}\, dx.$

- La integral dada es una integral impropia de segundo especie (tiene dos puntos singulares $x = 0$ y $x = 1$.
- Es necesario analizar el comportamiento de la función integrando cuando $x \to 0^+$ y $x \to 1^-$, para esto, procedemos de la siguiente forma:

$$I = \int_0^1 \frac{2+x^2}{x^{\frac{2}{3}}\sqrt{1-x^2}}\, dx = \underbrace{\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2+x^2}{x^{\frac{2}{3}}\sqrt{1-x^2}}\, dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{2+x^2}{x^{\frac{2}{3}}\sqrt{1-x^2}}\, dx}_{I_2}.$$

- Analizamos la convergencia de las integrales I_1 e I_2 separadamente. Para la integral I_1 tenemos que si $x \to 0^+$

$$\frac{2+x^2}{x^{\frac{2}{3}}\sqrt{1-x^2}} = \frac{2+x^2}{x^{\frac{2}{3}}\sqrt{(1-x)\,(1+x)}} \sim \frac{2}{x^{\frac{2}{3}}},$$

la integral, $2\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}}$, converge ya que $\lambda = \dfrac{2}{3} < 1$ y la integral I_1 también converge.

Para la integral I_2, si $x \to 1^-$, $\dfrac{2+x^2}{x^{\frac{2}{3}}\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{2+x^2}{x^{\frac{2}{3}}\sqrt{(1-x)\,(1+x)}} \sim \dfrac{3}{\sqrt{2}\sqrt{1-x}}$, la integral $\dfrac{3}{\sqrt{2}}\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ converge ya que $\lambda = \dfrac{1}{2} < 1$ y la integral I_2 también converge.

- De la convergencia de las integrales I_1 e I_2 se deduce la convergencia de la integral I.

(c) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{t}+\operatorname{sen} t}$.

- La integral es impropia de segunda especie. Tiene un punto singular en $x = 0$.
- $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}+\operatorname{sen} t} > 0$ en el intervalo $]\,0, \pi\,]$.
- Para analizar su convergencia aplicamos el criterio de comparación directa:

$$\sqrt{t}+\operatorname{sen} t \geq \sqrt{t} \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{t}+\operatorname{sen} t} \leq \frac{1}{\sqrt{t}},$$

la integral $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{t}}$ converge ya que, $\lambda = \dfrac{1}{2} < 1$ y la integral $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{t}+\operatorname{sen} t}$ también converge.

(d) $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{x^{\frac{3}{2}}}\, dx$.

- La integral es impropia de tercera especie (puntos singulares: $x = 0$, $x = \infty$).
- Para analizar su convergencia escribimos la integral I de la siguiente forma:

$$I = \underbrace{\int_0^1 \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{x^{\frac{3}{2}}}\, dx}_{I_1} + \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{x^{\frac{3}{2}}}\, dx}_{I_2}$$

- Analizamos la convergencia de la integral I_1. Para esto, multiplicamos la función integrando por el conjugado del numerador

$$\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}{x^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}} = \frac{1+x-x}{x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})},$$

si $x \to 0^+$ tenemos que $\dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})} \sim \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ y la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$, es una integral de segunda especie divergente, ya que $\lambda = \frac{3}{2} > 1$ y la integral I_1 es divergente.

- Como la integral I_1 es divergente, la integral I diverge.

Observación 4 *El lector debe recordar que si $I = I_1 + I_2$ y al menos una de las integrales de la derecha diverge, la integral I diverge.*

3. i) Comprobamos que las integrales dadas convergen.

(a) $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x\,\ln^2 x}$.

- La integral es impropia de segunda especie.
- Sea $y = \ln x$, $dy = \dfrac{dx}{x}$, por lo tanto $\displaystyle\int \frac{dy}{y} = -\frac{1}{y} + C = \frac{1}{\ln x} + C$ y evaluando tenemos que $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x}\Big|_0^{\frac{1}{e}} = 1.$

(b) $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x}\, dx.$

- La integral dada es de primera especie. Por el criterio de comparación directa la integral I converge ya que si $x \geq 0$, $x < \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \Longrightarrow x\,\mathrm{e}^{-x} \leq \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$, y la integral $\displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\, dx$ converge al valor de 2.

ii) Determinamos el valor de la constante k.

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x\,\ln^2(k\,x)} = -\frac{1}{\ln 2 - 1}.$

- Calculamos, inicialmente, la integral indefinida. Aplicamos el método de sustitución. Sea $u = \ln(k\,x)$, $du = \dfrac{k}{k\,x}\,dx = \dfrac{dx}{x}$, entonces

$$\int \frac{dx}{x\,\ln^2(k\,x)} = \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C = -\frac{1}{\ln(k\,x)} + C.$$

- Evaluamos la integral $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x\,\ln^2(k\,x)} = -\lim_{c\to 0^+}\left(\frac{1}{\ln(k\,x)}\right)\Big|_c^{\frac{1}{e}} = -\frac{1}{\ln\left(\dfrac{k}{e}\right)} + \underbrace{\lim_{c\to 0^+}\left(\frac{1}{\ln(k\,c)}\right)}_{0}.$

- Igualamos y resolvemos la ecuación para k: $-\dfrac{1}{\ln\left(\dfrac{k}{\mathrm{e}}\right)} = -\dfrac{1}{\ln\,2 - 1} \Longrightarrow -\dfrac{1}{\ln k - \ln \mathrm{e}} = -\dfrac{1}{\ln 2 - 1} \Longrightarrow$ $\ln 2 - 1 = \ln k - 1 \Longrightarrow \mathrm{e}^{\ln 2} = \mathrm{e}^{\ln k} \Longrightarrow k = 2.$

(b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{\mathrm{e}^{(k\,x)}} = \frac{1}{4}.$

- Calculamos la integral indefinida. Aplicamos el método de integración por partes $u = x$, $du = dx$, $dv = \mathrm{e}^{(-k\,x)}\,dx$, $v = -\dfrac{1}{k}\,\mathrm{e}^{(-k\,x)}$, luego

$$\begin{aligned}\int x\,\mathrm{e}^{(-k\,x)}\,dx &= -\frac{1}{k}\,x\,\mathrm{e}^{(-k\,x)} + \frac{1}{k}\int \mathrm{e}^{(-k\,x)}\,dx = -\frac{1}{k}\,x\,\mathrm{e}^{(-k\,x)} - \frac{1}{k^2}\,\mathrm{e}^{(-k\,x)} + C\\ &= -\mathrm{e}^{(-k\,x)}\left(\frac{x}{k} + \frac{1}{k^2}\right) + C = -\frac{1 + k\,x}{\mathrm{e}^{(k\,x)}\,k^2} + C.\end{aligned}$$

- Evaluamos la integral $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{\mathrm{e}^{(k\,x)}} = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1+k\,x}{\mathrm{e}^{(k\,x)}\,k^2}\right)\Big|_0^b = -\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1+k\,b}{\mathrm{e}^{(k\,b)}\,k^2}\right) + \frac{1}{k^2} = 0 + \frac{1}{k^2} = \frac{1}{k^2}.$
- Resolvemos la ecuación para k, $\dfrac{1}{k^2} = \dfrac{1}{4}$, $k^2 = 4 \Longrightarrow k = \pm 2$, luego $k = 2$. Observemos que se eliminó la solución -2, pues en este caso la integral diverge.

4. Analizar la convergencia de las siguientes integrales

(a) $I = \displaystyle\int_0^2 \left(\frac{-1 + \sqrt{x+1}}{x^2}\right)^{\alpha} dx.$

- La integral es impropia de segunda especie (punto singular en $x = 0$).
- Para analizar la convergencia de la integral I, multiplicamos la expresión entre paréntesis por su conjugado.

$$\left(\frac{-1+\sqrt{1+x}}{x^2}\right)^{\alpha} = \left(\frac{-1+\sqrt{1+x}}{x^2}\cdot\frac{-1-\sqrt{1+x}}{-1-\sqrt{1+x}}\right)^{\alpha} = \left(\frac{-x}{x^2\left(-1-\sqrt{1+x}\right)}\right)^{\alpha}$$
$$= \left(-\frac{1}{x\left(-1-\sqrt{1+x}\right)}\right)^{\alpha},$$

si $x \to 0^+$, tenemos $\left(-\frac{1}{x\left(-1-\sqrt{1+x}\right)}\right)^{\alpha} \sim \frac{1}{(2\,x)^{\alpha}}$, la integral $\int_0^2 \frac{dx}{(2\,x)^{\alpha}}$ converge si $\alpha < 1$, diverge si $\alpha \geq 1$ y la integral I también converge si $\alpha < 1$ y diverge si $\alpha \geq 1$.

(b) $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}\ \mathrm{sen}\left(x^{-2}\right)}{\ln(1+x)}\ dx.$

- Para analizar la convergencia de la integral dada la escribimos de la siguiente manera

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}\ \mathrm{sen}\left(x^{-2}\right)}{\ln(1+x)}\ dx = \underbrace{\int_0^{\mathrm{e}} \frac{\sqrt{x}\ \mathrm{sen}\left(x^{-2}\right)}{\ln(1+x)}\ dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{\mathrm{e}}^{\infty} \frac{\sqrt{x}\ \mathrm{sen}\left(x^{-2}\right)}{\ln(1+x)}\ dx}_{I_2}.$$

- Para la integral I_1, tenemos que por comparación directa $\sqrt{x}\,\mathrm{sen}\,x^{-2} \leq \sqrt{x}$, para $x \geq 0$ y como (aplicamos la regla de L'Hôpital) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$, entonces $\ln(1+x) \sim x$ y $\dfrac{\sqrt{x}\ \mathrm{sen}\left(x^{-2}\right)}{\ln(1+x)} \sim \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, cuando $x \to 0^+$.
- La integral $\displaystyle\int_0^{\mathrm{e}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ es una integral-λ de segunda especie convergente ($\lambda = \frac{1}{2} < 1$), se deduce entonces que la integral I_1 converge.
- Para la integral I_2, mediante procedimientos similares, tenemos (aplicamos la regla de L'Hôpital) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{sen}(x^{-2})}{x^{-2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-2\,\cos(x^{-2})}{x^3}}{\frac{-2}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \cos(x^{-2}) = 1$, entonces $\mathrm{sen}(x^{-2}) \sim x^{-2}$ y $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+x)}{\ln x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+x} = 1$, entonces $\ln(1+x) \sim \ln x$, cuando $x \to \infty$, o sea

$$\frac{\sqrt{x}\ \mathrm{sen}\left(x^{-2}\right)}{\ln(1+x)} \sim \frac{\sqrt{x}\,x^{-2}}{\ln x} = \frac{\sqrt{x}}{x^2\ \ln x} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}\ln x},$$

pero como $x \geq \mathrm{e}$, $x^{\frac{3}{2}}\ln x \geq x^{\frac{3}{2}} \Longrightarrow \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}\ln x} \leq \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$.

- La integral $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ es una integral-λ de primera especie convergente ($\lambda = \frac{3}{2} > 1$), por lo tanto I_2 también converge.

- Como I_1 e I_2 convergen, la integral I también es convergente.

(c) $I = \displaystyle\int_0^\infty \left(-\frac{k}{1+x} + \frac{1}{\sqrt{1+2\,x^2}} \right) dx.$

- Para determinar el valor de la constante k de tal manera que la integral I, sea convergente transformamos inicialmente la función integrando

$$-\frac{k}{1+x} + \frac{1}{\sqrt{1+2\,x^2}} = \frac{(1+x) - k\sqrt{1+2\,x^2}}{(1+x)\,\sqrt{1+2\,x^2}},$$

Si $x \to \infty$ tenemos que

$$\begin{aligned} -\frac{k}{1+x} + \frac{1}{\sqrt{1+2\,x^2}} &= \frac{(1+x) - k\sqrt{1+2\,x^2}}{(1+x)\,\sqrt{1+2\,x^2}} = \frac{1+x-k\sqrt{1+2\,x^2}}{\sqrt{1+2\,x^2} + x\sqrt{1+2\,x^2}} \\ &= \frac{x\left(1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{k\sqrt{1+2\,x^2}}{x}\right)}{x^2\left(\dfrac{\sqrt{1+2\,x^2}}{x^2} + \dfrac{\sqrt{1+2\,x^2}}{x}\right)} \sim \frac{1-\sqrt{2}\,k}{\sqrt{2}\,x}, \end{aligned}$$

resolviendo para k, $1 - \sqrt{2}\,k = 0 \Longrightarrow k = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

- Verificamos que la integral converge para el valor hallado de k

$$-\frac{1}{\sqrt{2}\,(1+x)} + \frac{1}{\sqrt{1+2\,x^2}} = \frac{2+2\,x - \sqrt{2}\sqrt{1+2\,x^2}}{2\,(1+x)\,\sqrt{1+2\,x^2}},$$

racionalizamos

$$\frac{\left[(2+2\,x) - \sqrt{2}\sqrt{1+2\,x^2}\,\right]\left[(2+2\,x) + \sqrt{2}\sqrt{1+2\,x^2}\,\right]}{2\,(1+x)\,\sqrt{1+2\,x^2}\,\left[(2+2\,x) + \sqrt{2}\sqrt{1+2\,x^2}\,\right]} =$$

$$\frac{2+8\,x}{2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\,x + 4\sqrt{2}\,x^2 + 4\sqrt{2}\,x^3 + 4\sqrt{1+2\,x^2} + 8\,x\sqrt{1+2\,x^2} + 4\,x^2\sqrt{1+2\,x^2}},$$

si $x \to \infty$ tenemos que

$$\frac{x\left(8 + \dfrac{2}{x}\right)}{x^3\left(4\sqrt{2} + \dfrac{2\sqrt{2}}{x^3} + \dfrac{2\sqrt{2}}{x^2} + \dfrac{4\sqrt{2}}{x} + \dfrac{4\sqrt{1+2\,x^2}}{x^3} + \dfrac{8\sqrt{1+2\,x^2}}{x^2} + \dfrac{4\sqrt{1+2\,x^2}}{x}\right)} =$$

$$\frac{8\,x}{8\sqrt{2}\,x^3} \sim \frac{1}{\sqrt{2}\,x^2}.$$

- La integral $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2}$, es una integral-$\lambda$ de primera especie convergente ($\lambda = 2$) por lo tanto la integral I converge para el valor de $k = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

(d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^k}{1+x^t}\,dx.$

- Analizamos tres casos:

i. Si $x \to \infty$ y $t > 0$, $\dfrac{x^k}{1+x^t} \sim \dfrac{1}{x^{t-k}}$, $t-k > 1 \Longrightarrow t > 1+k$.

ii. Si $x \to \infty$ y $t = 0$, $\dfrac{x^k}{1+x^t} \sim \dfrac{1}{x^{-k}}$, $-k > 1 \Longrightarrow k < -1$.

iii. Si $x \to \infty$ y $t < 0$, $\dfrac{x^k}{1+x^t} \sim \dfrac{1}{x^{-k}}$, $-k > 1 \Longrightarrow k < -1$.

- Finalmente, tenemos que la integral

$$\int_0^\infty \frac{x^k}{1+x^t}\,dx, \text{ converge si : } \begin{cases} k < -1, \text{ para } t \le 0, \\ t > 1+k, \text{ para } t > 0. \end{cases}$$

5. Aplicando el método de integración por partes, demuestre que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{(1+x)^3}\,dx = \frac{1}{2}$.

- Sea $u = x \Longrightarrow du = dx$, $dv = \dfrac{dx}{(1+x)^3} \Longrightarrow v = \dfrac{-1}{2\,(1+x)^2}$, luego

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{x}{(1+x)^3}\,dx &= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left[\frac{-x}{(1+x)^2}\right]_0^b + \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left(\int_0^b \frac{dx}{(1+x)^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-\lim_{b\to\infty}\frac{b}{(1+b)^2} + 0\right) + \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^b \\
&= \frac{1}{2}(0+0) + \frac{1}{2}\left(-\lim_{b\to\infty}\frac{1}{1+b} + 1\right) = 0 + \frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

6. Aplicando el método de sustitución de variable, demuestre que:

$$I = \int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}\,dx = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\,.$$

- Sea $x = u^2$, $dx = 2u\,du$, $\sqrt{x} = u$, $\dfrac{1}{(1+x)^2} = \dfrac{1}{(1+u^2)^2}$.
  Si $x \to \infty$, $u \to \infty$ y si $x \to 1$, $u \to 1$.

- Sustituyendo en la integral I obtenemos:

$$I = \int_1^\infty \int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}\,dx = \int_1^\infty \frac{u(2u\,du)}{(1+u^2)^2} = 2\underbrace{\int_1^\infty \frac{u^2\,du}{(1+u^2)^2}}_{I_1}\,.$$

- Para evaluar la integral I_1 calculamos, inicialmente, la integral indefinida:

$$\int \frac{u^2\,du}{(1+u^2)^2}\,,$$

mediante la sustitución trigonométrica $u = \tan z$:

$$u = \tan z, \quad du = \sec^2 z\,dz, \qquad (1+u^2)^2 = (1+\tan^2 z)^2 = \sec^4 z.$$

- Sustituyendo, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\int \frac{u^2\,du}{(1+u^2)^2} &= \int \frac{\tan^2 z\,(\sec^2 z\,dz)}{\sec^4 z} \\
&= \int \frac{\tan^2 z\,dz}{\sec^2 z} = \int \frac{\operatorname{sen}^2 z}{\cos^2 z}\cos^2 z\,dz \\
&= \int \operatorname{sen}^2 z\,dz = \frac{1}{2}\int [\,1-\cos(2z)\,]\;dz = \frac{1}{2}z - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2z) + C \\
&= \frac{1}{2}z - \frac{1}{4}[\,2\,\operatorname{sen} z\,\cos z\,] + C,
\end{aligned}$$

con ayuda del triángulo adjunto expresamos la función primitiva en términos de la variable u:

(a) Como $u = \tan z$, entonces, $z = \arctan u$.

(b) De acuerdo al triángulo tenemos $2\,\operatorname{sen} z\,\cos z = 2\left(\dfrac{u}{\sqrt{1+u^2}}\;\dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}}\right) = \dfrac{2\,u}{1+u^2}$ y finalmente:

$$\int \frac{u^2\,du}{(1+u^2)^2} = \frac{1}{2}\arctan u - \frac{1}{4}\left(\frac{2\,u}{1+u^2}\right) + C = \frac{1}{2}\arctan u - \frac{1}{2}\left(\frac{u}{1+u^2}\right) + C.$$

- Ahora, evaluamos la integral I

$$\begin{aligned}
I = 2\int_1^{\infty} \frac{u^2\,du}{(1+u^2)^2} &= 2\lim_{b\to\infty}\left(\int_1^{b} \frac{u^2\,du}{(1+u^2)^2}\right) \\
&= 2\lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{2}\arctan u - \frac{1}{2}\left(\frac{u}{1+u^2}\right)\right]_1^b = \lim_{b\to\infty}\left[\arctan u - \left(\frac{u}{1+u^2}\right)\right]_1^b \\
&= \lim_{b\to\infty}\left[\arctan(b) - \left(\frac{b}{1+b^2}\right)\right] - \left[\arctan(1) - \left(\frac{1}{1+1^2}\right)\right] \\
&= \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

- Queda demostrado así que $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}\,dx}{(1+x)^2}\;dx = 2\int_1^{\infty}\frac{u^2\,du}{(1+u^2)^2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}.$

7. Analizar la convergencia de las siguientes integrales impropias.

(a) $\displaystyle I = \int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x}\;dx = \int_1^{\infty} x^{-1}\,\cos x\,dx.$

- Aplicamos el método de integración por partes.

  Sea $u = x^{-1}$, $du = -x^{-2}\,dx$, $dv = \cos x\,dx$, $v = \operatorname{sen} x$, luego,

$$\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x}\;dx = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)\Big|_1^b + \int_1^{\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\;dx.$$

i. $\displaystyle\lim_{b\to\infty}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{\operatorname{sen} b}{b}\right) = 0.$ (el límite existe y es finito)

ii. $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\;dx.$ Esta integral converge por el criterio de comparación directa.

En efecto, $\left|\dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2}\right| \leq \dfrac{1}{x^2}$, la integral $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge ($\lambda = 2 > 1$), esto implica que la integral $\displaystyle\int_1^{\infty} \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\right| dx$ converge en forma absoluta, por lo tanto la integral $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}$ converge.

- Por lo analizado en los puntos i) y ii) la integral I converge.

(b) $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \cos(x^2)\, dx.$

- Aplicamos el método de sustitución de variable.

  Sea $u = x^2$, $du = 2\,x\,dx$, $\sqrt{u} = x$, $\dfrac{1}{2}\dfrac{du}{\sqrt{u}} = dx$.

  Si $x \to \infty$, $u \to \infty$ y si $x \to 0$, $u \to 0$, luego, $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \cos(x^2)\, dx = \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{\cos(u)}{\sqrt{u}}\, du}_{I_1}.$

- Como la integral I_1 tiene dos puntos singulares ($u = 0,\ u = \infty$) la escribimos de la siguiente forma:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos u}{\sqrt{u}}\, du = \underbrace{\int_0^{1} \frac{\cos u}{\sqrt{u}}\, du}_{I_2} + \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{\cos(u)}{\sqrt{u}}\, du}_{I_3}$$

i. Analizamos la convergencia de la integral I_2. Aplicamos el método de integración por partes: $z = \cos u$, $dz = -\operatorname{sen} u\, du$, $dv = \dfrac{du}{\sqrt{u}}$, $v = 2\sqrt{u}$,

$$I_2 = \int_0^{1} \frac{\cos u}{\sqrt{u}}\, du = 2\sqrt{u}\, \cos u\Big|_0^1 + 2\int_0^1 \sqrt{u}\, \operatorname{sen} u\, du = 2\, \cos 1 + 2\int_0^1 \sqrt{u}\, \operatorname{sen} u\, du,$$

la integral $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{u}\, \operatorname{sen} u\, du$, es propia, por lo tanto la integral I_2 converge.

ii. Analizamos la convergencia de la integral I_3 aplicando el método de integración por partes $z = \dfrac{1}{\sqrt{u}}$, $dz = \dfrac{-1}{2\,u^{\frac{3}{2}}}\, du$, $dv = \cos u\, du$, $v = \operatorname{sen} u$,

$$I_3 = \int_1^{\infty} \frac{\cos u}{\sqrt{u}}\, du = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{\sin u}{\sqrt{u}}\right]_1^b + \frac{1}{2}\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen} u}{u^{\frac{3}{2}}}\, du.$$

A. $\displaystyle\lim_{b\to\infty} \frac{\operatorname{sen} u}{\sqrt{u}}\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty} \frac{\operatorname{sen} b}{\sqrt{b}} - \frac{\operatorname{sen}(1)}{\sqrt{1}} = 0 - \operatorname{sen} 1 = -\operatorname{sen} 1$ (existe y es finito).

B. La integral $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen} u}{u^{\frac{3}{2}}}\, du$ converge, pues $\left|\dfrac{\operatorname{sen} u}{u^{\frac{3}{2}}}\right| \leq \dfrac{1}{u^{\frac{3}{2}}}$, y $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{du}{u^{\frac{3}{2}}}$ converge $\left(\lambda = \frac{3}{2} > 1\right)$. Por el criterio de comparación directa la integral $\displaystyle\int_1^{\infty} \left|\frac{\operatorname{sen} u}{u^{\frac{3}{2}}}\right| du$ converge en forma absoluta, por lo tanto $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen} u}{u^{\frac{3}{2}}}\, du$ también converge.

C. Por lo analizado en los puntos A) y B), la integral I_3 converge.

- Finalmente la integral I converge por el análisis realizado en los puntos i) y ii).

(c) $I = \displaystyle\int_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x\ln x \ln^2(\ln x)}\ dx.$

- La convergencia de la integral I la analizamos aplicando el método de sustitución de variable $u = \ln(\ln x)$, $du = \dfrac{dx}{x\ \ln x}$.

  Si $x \to \infty$, $u \to \infty$ y si $x = e^2$, $u = \ln 2$, luego

$$\int_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x\ln x \ln^2(\ln x)}\ dx = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{du}{u^2}\,,$$

  $\lambda = 2 > 1$, la integral converge (integral impropia de primera especie).

8. $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)}{x}\ dx.$

- Hacemos cambio de variable $u = \dfrac{1}{x}$, $du = -\dfrac{dx}{x^2} \Longrightarrow dx = -\dfrac{du}{u^2}$.

  Si $x \to \infty$, $u \to 0$ y si $x = 1$, $u = 1$, luego

$$\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)}{x}\ dx = \int_1^{0} \frac{\operatorname{sen} u}{\dfrac{1}{u}} \left(-\frac{du}{u^2}\right) = -\int_1^{0} \frac{\operatorname{sen} u}{u}\ du = \int_0^{1} \frac{\operatorname{sen} u}{u}\ du,$$

  la última integral tiene un punto singular en $u = 0$, pero como $\displaystyle\lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen} u}{u} = 1$, la integral converge.

Ejercicios Semanas No.7-8 a): Integrales impropias

Prof. Geovanni Figueroa, Prof. Luis Pacheco

1. Verificar si cada una de las siguientes integrales converge y calcule su valor, si es del caso:

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(1-x^2)\operatorname{arctanh} x}$ b) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$

c) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$ d) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3}}$.

2. Estudie la convergencia de las siguientes integrales.

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}\operatorname{sen}\frac{1}{x^2}}{\ln(1+x)}dx$ b) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$ c) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}dx$

d) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}\ln x}{x^2+1}dx$ e) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}\ln x}{e^x}dx$ f) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\operatorname{senh} x}{\sqrt{x}}dx$

g) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x-x^4}}$ h) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{-\ln(\operatorname{sen} x)}{x}dx$ i) $\displaystyle\int_0^{\infty} \cos x^3\,dx$

j) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{2+x\cos^2 x}{\sqrt{1+x^5}}dx$ k) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{1-x^4}$.

3. ¿Para qué valor(es) del parámetro la integral dada converge?

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} x^{\alpha}(1-e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}})dx$ b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx$ c) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-\ln x}{(1-x)^{\alpha}}dx$

d) $\displaystyle\int_1^{2} \frac{dx}{(\ln x)^{\alpha}}$ e) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\arctan(ax)}{x^{\alpha}}dx,\ a\neq 0$ f) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x^{\alpha}}{(1+x)^{\beta}}dx$.

4. Encuentre el valor del parámetro para que la integral dada converja y calcule su valor.

a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \left(\frac{x}{2x^2+2\alpha}-\frac{\alpha}{x+1}\right)dx$ b) $\displaystyle\int_2^{\infty} \left(\frac{x\alpha}{x^2+1}-\frac{1}{2x+1}\right)dx$

5. Estudie la convergencia condicional o absoluta de las siguientes integrales.

a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x}dx$ b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x\sqrt{x+1}}dx$

c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} 3x^2\ln x}{x^2}dx$ d) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}dx$.

6. Encuentre los valores de a y b de forma que: $\displaystyle\int_1^{\infty} \left(\frac{2x^2+bx+a}{x(2x+a)}-1\right)dx = 1$.

Soluciones ejercicios Semanas No 7-8a: Integrales impropias
Prof. Geovanni Figueroa, Prof. Luis Pacheco

1. a) En 0^+, $\dfrac{1}{(1-x^2)(\text{arctanh } x)} \sim \dfrac{1}{x}$, por lo tanto la integral diverge.

   b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \int_1^2 \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}} + \int_2^\infty \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}.$

   En 1^+, $\dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{1}{x^2\sqrt{(x-1)(x+1)}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{x-1}}$ converge.

   En $+\infty$, $\dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}} \sim \dfrac{1}{x^3}$ converge.

   Sea $x = \sec\theta \Longrightarrow dx = \sec\theta\tan\theta d\theta$,

   $$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec\theta\,\tan\theta\,d\theta}{\sec^2\theta\sqrt{\sec^2\theta-1}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sec\theta} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta = 1.$$

   c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} + \int_2^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}.$

   En 1^+, $\dfrac{1}{x\sqrt{x-1}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ converge.

   En $+\infty$, $\dfrac{1}{x\sqrt{x-1}} \sim \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ converge.

   Sea $x = \sec^2\theta \Longrightarrow dx = 2\sec^2\theta\tan\theta\,d\theta$,

   $$\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sec^2\theta\tan\theta d\theta}{\sec^2\theta\sqrt{\sec^2\theta-1}} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi.$$

   d) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3}}.$

   En ∞, $\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+3}} \sim \dfrac{1}{x^2}$ converge.

   Sea $x+1 = \frac{1}{z} \Longrightarrow \dfrac{dx}{x+1} = -\dfrac{dz}{z}$,

   $$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dz}{z\sqrt{\left(\frac{1}{z}-1\right)^2+3}} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dz}{\sqrt{4z^2-2z+1}} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dz}{\sqrt{\left(z-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{3}{16}}} = \frac{1}{2}\ln 3.$$

2. a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\,\text{sen}\,\frac{1}{x^2}}{\ln(1+x)}dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}\,\text{sen}\,\frac{1}{x^2}}{\ln(1+x)}dx + \int_1^\infty \frac{\sqrt{x}\,\text{sen}\,\frac{1}{x^2}}{\ln(1+x)}dx.$

   En 0^+, $\dfrac{\sqrt{x}\,\text{sen}\,\frac{1}{x^2}}{\ln(1+x)} \leq \dfrac{\sqrt{x}}{\ln(1+x)} \sim \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $\therefore$ la integral converge.

   En ∞, $\dfrac{\sqrt{x}\,\text{sen}\,\frac{1}{x^2}}{\ln(1+x)} \leq \dfrac{\sqrt{x}\,\text{sen}\,\frac{1}{x^2}}{\ln x} \sim \dfrac{\sqrt{x}\frac{1}{x^2}}{\ln x} = \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}\ln x} \leq \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$, por lo tanto la integral converge.

   b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx.$

En ∞, $\dfrac{x\ln x}{(1+x^2)^2} \leq \dfrac{x\cdot x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{x^2}{(1+x^2)^2} \sim \dfrac{1}{x^2}$ $\therefore$ la integral converge.

La integral puede calcularse por partes: $u = \ln x$, $dv = \dfrac{x}{(1+x^2)^2}$ y su valor es:

$\left(\dfrac{-\ln x}{2(1+x^2)} + \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x^2}{1+x^2}\right)\Bigg|_1^\infty = 0.$

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}dx.$

En 0^+, $\left|\dfrac{\ln x}{x^{\frac{1}{3}}}\right| < \dfrac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$ por lo tanto converge (es absolutamente convergente).

Se puede integrar por partes $u = \ln x$ y $dv = x^{-\frac{1}{3}}dx$ y su valor es $\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\Big|_0^1 - \frac{3}{2}\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}} = -\frac{9}{4}.$

d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\ln x}{x^2+1}dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}\ln x}{x^2+1}dx + \int_1^\infty \frac{\sqrt{x}\ln x}{x^2+1}dx.$

En 0^+ no hay problema, pues $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x = 0.$

En ∞, $\dfrac{\sqrt{x}\ln x}{x^2+1} < \dfrac{x^{\frac{3}{4}}}{x^2+1} \sim \dfrac{1}{x^{\frac{5}{4}}}$, por lo tanto la integral converge.

e) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\ln x}{e^x}dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}\ln x}{e^x}dx + \int_1^\infty \frac{\sqrt{x}\ln x}{e^x}dx.$

En 0^+ no hay problema pues $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x = 0.$

En ∞, $\dfrac{\sqrt{x}\ln x}{e^x} < \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$, por lo tanto la integral converge.

f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{senh} x}{\sqrt{x}}dx.$

En 0^+, $\dfrac{\operatorname{senh} x}{\sqrt{x}} \sim \dfrac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$, por lo tanto converge.

g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^4}} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x-x^4}} + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^4}}.$

En 0^+, $\dfrac{1}{\sqrt{x-x^4}} = \dfrac{1}{\sqrt{x(1-x^3)}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, por lo tanto la integral converge.

En 1^-, $\dfrac{1}{\sqrt{x-x^4}} = \dfrac{1}{\sqrt{x(1-x^3)}} = \dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)(1+x+x^2)}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{3}\sqrt{1-x}}$ por lo tanto la integral converge.

h) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{-\ln(\operatorname{sen} x)}{x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\ln(\operatorname{sen} x)}{x}dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{-\ln(\operatorname{sen} x)}{x}dx.$

En 0^+, $\dfrac{-\ln(\operatorname{sen} x)}{x} \sim \dfrac{-\ln x}{x} > \dfrac{1}{x}$, por lo tanto la integral diverge.

En π^-, $\dfrac{-\ln(\operatorname{sen} x)}{x} \leq \dfrac{-2\ln(\pi - x)}{\pi} \sim -\frac{2}{\pi}\big(\ln\pi - \frac{x}{\pi}\big)$ y la integral converge.

Luego $\displaystyle\int_0^\pi -\frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{x}dx$ diverge.

i) $\int_0^\infty \cos x^3 dx$.

Por sustitución $z = x^3 \implies dz = 3x^2 dx$, $\int_0^\infty \cos x^3 dx = \frac{1}{3}\int_0^b \frac{\cos(z)}{z^{\frac{2}{3}}}dz$ e integrando por partes, $u = \cos(z)$ y $dv = z^{-\frac{2}{3}}$, $\frac{1}{3}\int_0^b \frac{\cos z}{z^{\frac{2}{3}}}dz = \frac{1}{3}\frac{\operatorname{sen} z}{z^{\frac{2}{3}}}\Big|_0^b + \frac{2}{9}\int_0^b \frac{\operatorname{sen} z}{z^{\frac{5}{3}}}dz$. Tomando el límite cuando $b \to \infty$, el primer término de la última expresión es 0 y la segunda expresión $\lim_{b\to\infty} \frac{2}{9}\int_0^b \frac{\operatorname{sen} z}{z^{\frac{5}{3}}}dz$ converge absolutamente, pues $\left|\frac{\operatorname{sen} z}{z^{\frac{5}{3}}}\right| \leq \frac{1}{z^{\frac{5}{3}}}$.

En conclusión, se tiene que la integral $\int_0^\infty \cos x^3\, dx$ converge.

j) $\int_1^\infty \frac{2 + x\cos^2 x}{\sqrt{1+x^5}}dx$.

En ∞, $\frac{2 + x\cos^2 x}{\sqrt{1+x^5}} \leq \frac{2+x}{\sqrt{1+x^5}} \sim \frac{x}{x^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$, por lo tanto la integral converge.

k) $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^4}$.

En 1^-, $\frac{1}{1-x^4} = \frac{1}{(1+x^2)(1-x^2)} = \frac{1}{(1+x^2)(1+x)(1-x)} \sim \frac{1}{4(1-x)}$, por lo tanto la integral diverge.

3. a) $\int_0^\infty x^\alpha(1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}})dx$.

En 0^+, $x^\alpha(1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}) \sim x^\alpha = \frac{1}{x^{-\alpha}}$ y converge para $\alpha > -1$.

En ∞, $x^\alpha(1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}) \sim \frac{x^\alpha}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}-\alpha}}$ converge para $\alpha < -\frac{1}{2}$.

Por lo tanto la integral converge para $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$.

b) $\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx$.

En 0^+, $\frac{x^{\alpha-1}}{1+x} \sim x^{\alpha-1} = \frac{1}{x^{1-\alpha}}$, converge para $\alpha > 0$.

En ∞, $\frac{x^{\alpha-1}}{1+x} \sim \frac{x^{\alpha-1}}{x} = \frac{1}{x^{2-\alpha}}$ converge para $\alpha < 1$.

Por lo tanto la integral converge para $0 < \alpha < 1$.

c) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-\ln x}{(1-x)^\alpha}dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-u)}{u^\alpha}du$. Obsérvese que se sustituye $u = 1-x$, $du = -dx$.

En 0^+, $\frac{\ln(1-u)}{u^\alpha} \sim \frac{u}{u^\alpha} = \frac{1}{u^{\alpha-1}}$ que converge para $\alpha < 2$.

d) $\int_1^2 \frac{dx}{(\ln x)^\alpha}$.

En 1^+, $\dfrac{1}{(\ln x)^\alpha} \sim \dfrac{1}{(x-1)^\alpha}$ por lo tanto $\begin{cases} \text{converge para } \alpha < 1 \\ \text{diverge para } \alpha > 1. \end{cases}$

e) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan(ax)}{x^\alpha}dx = \int_0^1 \frac{\arctan(ax)}{x^\alpha} + \int_1^\infty \frac{\arctan(ax)}{x^\alpha}dx.$

En 0^+, $\dfrac{\arctan(ax)}{x^\alpha} \sim \dfrac{ax}{x^\alpha} = \dfrac{a}{x^{\alpha-1}}$ por lo tanto converge para $\alpha > 2$.

En ∞, $\dfrac{\arctan(ax)}{x^\alpha} \sim \dfrac{\pi}{2x^\alpha}$ por lo tanto converge para $\alpha > 1$.

Finalmente la integral converge para $1 < \alpha < 2$.

f) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^\alpha}{(1+x)^\beta}dx.$

En ∞, $\dfrac{x^\alpha}{(1+x)^\beta} \sim \dfrac{x^\alpha}{x^\beta} = \dfrac{1}{x^{\beta-\alpha}}$ converge para $\beta - \alpha > 1$.

4. a) $\displaystyle\int_1^\infty \left(\frac{x}{2x^2+2\alpha} - \frac{\alpha}{x+1}\right)dx = \int_1^\infty \frac{x^2(1-2\alpha)+x-2\alpha^2}{2(x^2+\alpha)(x+1)}dx.$

$\dfrac{x^2(1-2\alpha)+x-2\alpha^2)}{2(x^2+\alpha)(x+1)} \sim \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } \alpha = \frac{1}{2} \text{ y converge.} \\ \dfrac{1}{2x} & \text{si } \alpha \neq \frac{1}{2} \text{ y diverge.} \end{cases}$

Para que converja en $\alpha = \frac{1}{2}$, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x-\frac{1}{2}}{(2x^2+1)(x+1)}dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{2x-1}{(2x^2+1)(x+1)}dx =$

$\displaystyle\frac{1}{2}\ln\frac{2x^2+1}{(x+1)^2}\bigg|_0^\infty = \frac{1}{2}\ln 2$, ya que $\dfrac{2x-1}{(2x^2+1)(x+1)} = \dfrac{2x}{2x^2+1} - \dfrac{1}{x+1}$.

b) $\displaystyle\int_2^\infty \left(\frac{x\alpha}{x^2+1} - \frac{1}{2x+1}\right)dx = \int_2^\infty \frac{(2\alpha-1)x^2+\alpha x-1}{(x^2+1)(2x+1)}dx.$

En ∞, $\dfrac{(2\alpha-1)x^2+\alpha x-1}{(x^2+1)(2x+1)} \sim \begin{cases} \dfrac{\alpha}{x} & \text{si } \alpha \neq \frac{1}{2} \text{ diverge} \\ \dfrac{1}{4x^2} & \text{si } \alpha = \frac{1}{2} \text{ converge.} \end{cases}$

Así, la integral converge para $\alpha = \frac{1}{2}$.

$\displaystyle\int_2^\infty \frac{\frac{1}{2}x-1}{(x^2+1)(2x+1)}dx = \frac{1}{2}\int_2^\infty \frac{x-2}{(x^2+1)(2x+1)}dx = \frac{1}{2}\ln\frac{x^2+1}{(2x+1)^2}\bigg|_2^\infty = \frac{1}{2}\ln 5 - \ln 2.$

5. a) La integral converge condicionalmente, pues integrando por partes $u = \dfrac{1}{x}$, $v = \cos(x)$,

$\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos x}{x}dx = \frac{\operatorname{sen} x}{x}\bigg|_1^\infty + \int_1^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}dx.$

Como $\left|\dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2}\right| \leq \dfrac{1}{x^2}$ se tiene que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}dx$ converge. Además $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2} = 0$, luego $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos x}{x}dx$ converge.

Por otro lado $\displaystyle\int_1^\infty \frac{|\cos x|}{x}dx$ diverge, pues $|\cos x| \geq \cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2} \Longrightarrow \dfrac{|\cos x|}{x} \geq \dfrac{1+\cos 2x}{2x}$.

Luego $\displaystyle\int_1^\infty \frac{|\cos x|}{x}dx \geq \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{1+\cos 2x}{x}dx = \frac{1}{2}\left\{\int_1^\infty \frac{dx}{x} + \int_1^\infty \frac{\cos 2x\,dx}{x}\right\}$ que diverge, ya que

$\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ diverge, aunque $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{x}dx = \frac{\operatorname{sen} 2x}{x}\Big|_1^\infty + \tfrac{1}{2}\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen} 2x}{x^2}dx$ converge.

En efecto, la primera parte vale $0 - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2$ y la segunda converge absolutamente.

Finalmente, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{|\cos x|}{x}dx$ diverge.

b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x\sqrt{x+1}}dx = \int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x\sqrt{x+1}}dx + \int_1^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x\sqrt{x+1}}dx.$

En 0^+ no hay problema $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x\sqrt{x+1}} = 1$ y además $\displaystyle\frac{\operatorname{sen} x}{x\sqrt{x+1}} \geq 0 \therefore \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x\sqrt{x+1}}dx$ converge absolutamente.

En ∞, $\displaystyle\frac{|\operatorname{sen} x|}{x\sqrt{x+1}} \leq \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ por lo tanto $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x\sqrt{x+1}}dx$ converge absolutamente.

Finalmente $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x\sqrt{x+1}}dx$ converge absolutamente.

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} 3x^2 \ln x}{x^2}dx = \int_0^1 \frac{\operatorname{sen} 3x^2 \ln x}{x^2}dx + \int_1^\infty \frac{\operatorname{sen} 3x^2 \ln x}{x^2}dx.$

En 0^+, $\displaystyle\left|\frac{\operatorname{sen} 3x^2 \ln x}{x^2}\right| \sim |3\ln x|$ y $\displaystyle\int_0^1 |\ln x|dx$ converge; por lo que la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} 3x^2 \ln x}{x^2}dx$ converge absolutamente.

En ∞, $\displaystyle\left|\frac{\operatorname{sen} 3x^2 \ln x}{x^2}\right| \leq \frac{|\ln x|}{x^2} = \frac{\ln x}{x^2}$ y $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}dx$ converge $\therefore$ la integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen} 3x^2 \ln x}{x^2}dx$ converge absolutamente.

d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}dx = \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}dx + \int_\pi^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}dx.$

En 0^+ no hay problema, pues $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} 2\sqrt{x}\cos x = 0.$

En ∞, integrando por partes $u = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $dv = \operatorname{sen} x dx$ se tiene:

$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}dx = -\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\Big|_\pi^\infty - \tfrac{1}{2}\int_\pi^\infty \frac{\cos x}{x^{\frac{3}{2}}}dx$ y $\displaystyle -\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\Big|_\pi^\infty = \frac{1}{\pi}.$

Como $\displaystyle\left|\frac{\cos x}{x^{\frac{3}{2}}}\right| \leq \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$, la integral $\displaystyle\int_\pi^\infty \frac{\cos x}{x^{\frac{3}{2}}}dx$ converge absolutamente.

Analicemos la convergencia absoluta: $\displaystyle\int_0^\infty \left|\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}\right|dx = \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}dx + \int_\pi^\infty \frac{|\operatorname{sen} x|}{\sqrt{x}}dx.$

En 0^+ no hay problema pues $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} = 0.$

En ∞, $\displaystyle\int_\pi^\infty \frac{|\operatorname{sen} x|}{\sqrt{x}}dx \geq \tfrac{1}{2}\int_\pi^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\cos 2x}{\sqrt{x}}\right)dx.$

Observe que $|\operatorname{sen} x| \geq \operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2} \implies \dfrac{|\operatorname{sen} x|}{\sqrt{x}} \geq \dfrac{1-\cos 2x}{2\sqrt{x}}$, entonces $\displaystyle\int_\pi^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$ diverge y $\displaystyle\int_\pi^\infty \frac{\cos(2x)dx}{\sqrt{x}}$ converge.

Por otro lado $\left.\dfrac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}\right|_{\pi}^{\infty} + \frac{1}{2}\displaystyle\int_{\pi}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ implica que $\displaystyle\int_{\pi}^{\infty} \dfrac{|\operatorname{sen} x|}{\sqrt{x}} dx$ diverge.

Entonces $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} dx$ converge condicionalmente.

6. $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \left(\dfrac{2x^2+bx+a}{x(2x+a)} - 1\right) dx = \int_{1}^{\infty} \dfrac{(b-a)x+a}{x(2x+a)} = 1.$

En ∞, $\dfrac{(b-a)x+a}{x(2x+a)} \sim \begin{cases} \dfrac{a}{2x^2} & \text{si } a=b \text{ converge} \\ \dfrac{b-a}{2x} & \text{si } a \neq b \text{ diverge} \end{cases}$

Para que converja la integral si $a=b$, $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \dfrac{a}{x(2x+a)} = a\int_{1}^{\infty} \left(\dfrac{1/a}{x} - \dfrac{2/a}{2x+a}\right) dx =$

$\ln\left.\left(\dfrac{x}{2x+a}\right)\right|_{1}^{\infty} = \ln\frac{1}{2} - \ln\dfrac{1}{2+a} = \ln\left(1+\frac{a}{2}\right)$, luego $\ln\left(1+\frac{a}{2}\right) = 1 \Longrightarrow 1+\frac{a}{2} = e \Longrightarrow \frac{a}{2} = e-1 \Longrightarrow a = 2e-2.$

Para que la integral valga 1, debe tenerse que $a=b=2e-2$.

7. Analice la convergencia de las siguientes integrales impropias

A) $\displaystyle\int_{0}^{1} \dfrac{\sqrt{x}dx}{e^{\operatorname{sen} x}-1}$ B) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln(\operatorname{sen} x)}{\sqrt{x}} dx$

8. Determine los valores de β para los cuales se verifica que $\displaystyle\int_{0}^{\infty} xe^{-\beta x} dx = \frac{1}{9}$.

9. Analizar la convergencia de las siguientes integrales impropias.

A) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\operatorname{sen} x) dx$ B) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} x\ln(\operatorname{sen} x) dx$

C) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\cot\, x\, dx$ D) $\displaystyle\int_{0}^{1} \dfrac{\ln x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Tema 8

Ejercicios Semanas No.9-10: Inducción y sucesiones

Prof. Jaime Lobo, Prof. Rodolfo Obando

(a) De una prueba inductiva de los resultados siguientes:

a) $(1+x)^n \geq 1+nx, \forall\, x \geq -1, n \in \mathbb{N}$ (desigualdad de Bernoulli).

b) $1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

c) $1^2+2^2+\cdots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(b) Para todo k, $n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ se define $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. Pruebe que: $C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k+1} = C_n^{k+1}$. Pruebe entonces por inducción la fórmula del binomio de Newton:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^k a^{n-k} n^k + \cdots + b^n.$$

(c) Mediante resultados sobre funciones numéricas de variable real, estudie la convergencia y el valor del límite en caso de existir las sucesiones:

i. $a_n = n^\alpha$ ii. $b_n = a^n$ iii. $c_n = \sqrt[n]{a}$ iv. $d_n = \dfrac{n^k}{a^n}$.

(d) Probar que si $(a_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de términos >0 tales que el límite $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ existe y es igual a L, entonces $a_n \longrightarrow 0$, si $L<1$; $b_n \longrightarrow \infty$, si $L>1$. Deducir los límites de $\dfrac{a_n}{n!}$, $\dfrac{n^k}{a^n}$.

(e) Se define la sucesión recurrente por $a_{n+1} = a_n(1-a_n)$, $a \geq 0$. Probar que ésta es convergente $\iff a_0 \in [\,0,1\,]$. Calcule el límite en este caso en función de a_0.

(f) Sea la sucesión: $a_n = 1$, $a_{n+1} = (1+\sqrt{a_n})^{\frac{1}{2}}$, $n \geq 1$. Pruebe que es creciente y acotada por 2. ¿Qué deduce?. Explicar como aproximar una raíz real del polinomio: $p(x) = x^4 - 2x^2 - x + 1$.

(g) Se definen las sucesiones $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, $y_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$, $n \geq 1$. Pruebe que la primera es creciente, la segunda decreciente y ambas acotadas. Explicar cómo emplearlas en la aproximación del número e.

(h) Analice la convergencia de las sucesiones: $x_n = (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}}$, $y_n = \left(\dfrac{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n$, $a, b \in \mathbb{R}^+$.

(i) Estudie, si existe, el límite de cada sucesión:

i. $x_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{n}{n^2k^2}$.

ii. $x_n = n \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{e^{-\frac{n}{k}}}{k^2}$.

iii. $x_n = \left(\dfrac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

(j) Pruebe que la sucesión: $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}\right) - \ln n$, es convergente.

(k) Considere la siguiente sucesión definida por recurrencia:$a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + 3$. Demostrar que $a_n = 3n - 2$.

(l) Demuestre por inducción sobre n que $(1-x)\left[(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{n-1}})\right] = 1 - x^{2^n}$.

Si $|x| < 1$, demuestre que $\lim\limits_{n\to\infty} \left[(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{n-1}})\right] = \dfrac{1}{1-x}$.

(m) Considere la siguiente sucesión definida por recurrencia: $a_1 = 2, a_n = a_{n-1} + n - 2, \forall\, n \geq 2$. Demostrar por inducción que $a_n = 2 + \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$.

(n) Calcule el límite de la sucesión $\{x_n\}$, si: $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} \left(1 + \dfrac{2^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} \cdots \left(1 + \dfrac{n^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$.

(o) Calcule el límite de la sucesión definida por: $x_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{n}\left[\operatorname{sen}\left(\dfrac{2k}{n}\right)\right]^2 \cos\left(\dfrac{k}{n}\right)$.

(p) Calcule el límite de la sucesión $\{x_n\}$, si $x_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{k^2}{n^2\sqrt[3]{n^3+k^3}}$.

(q) Sea $f(x)$ una función continua en $[\,0, 1\,]$ y sea $x_n = \dfrac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right)\right]$.

i. Exprese $\lim\limits_{x\to\infty} x_n$ como una integral definida.

ii. Utilice (a) para calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^{16}}(1^{15} + 2^{15} + 3^{15} + \cdots + n^{15})$.

iii. Utilice b) para calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^{17}}(1^{15} + 2^{15} + 3^{15} + \cdots + n^{15})$.

(r) Suponga que $f(x)$ es una función diferenciable para todo $x \in [\,0, 1\,]$ y que $f(0) = 0$. Sea la sucesión $\{a_n\}$ definida por la fórmula $a_n = nf\left(\frac{1}{n}\right)$.

i. Demuestre que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = f'(0)$.

ii. Utilice a) para calcular $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, si $a_n = n \arctan\left(\frac{1}{n}\right)$.

(s) Utilice inducción matemática para demostrar la identidad: $P(n) = a + (a+1) + (a+2) + \cdots + (a + n - 1) = \frac{1}{2}n(2a + n - 1), \forall\, n = 1, 2, 3, \ldots$, a es una constante fija.

(t) Sea la sucesión $\{a_n\}$ definida por recurrencia de la siguiente manera: $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 4)$; para $n \geq 1$.

i. Demuestre mediante inducción sobre n, que $a_n < 4$, para cada n.

ii. Demuestre que $\{a_n\}$ es creciente. Calcule su límite.

(u) Demuestre por inducción que $3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n = \dfrac{3}{2}(3^n - 1)$.

Soluciones ejercicios Semanas No.9-10: Inducción y sucesiones
Prof. Jaime Lobo, Prof. Rodolfo Obando

(a) De una prueba inductiva de los resultados siguientes:

i. $(1+x)^n \geq 1+nx$, $\forall\, x \geq -1$, $n \in \mathbb{N}$ (desigualdad de Bernoulli).

ii. $1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

iii. $1^2+2^2+\cdots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Solución

i. La desigualdad es trivialmente cierta para $n=1$. Suponiéndola cierta para n y probémosla para $n+1$. En efecto, $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x)$ y como $(1+x) \geq 0$, por la hipótesis de inducción, $(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$, con lo cual se concluye el resultado.

ii. Es cierta para $n=1$. Siendo cierto para n, entonces: $1+\cdots+(n+1) = (1+\cdots+n)+(n+1) = \dfrac{n(n+1)}{2}+(n+1) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2} = \dfrac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$, que es la propiedad para $n+1$.

iii. Es cierto para $n=1$. Siendo cierto para n, entonces tenemos $1^2+\cdots+(n+1)^2 = (1^2+\cdots+n^2)+(n+1)^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2 = (n+1)\left[\dfrac{n(2n+1)}{6}+n+1\right] = (n+1)\left[\dfrac{n(2n+1)+6n+6}{6}\right] = (n+1)\left[\dfrac{2n^2+7n+6}{6}\right] = \dfrac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$, que es la propiedad para $n+1$.

(b) Para todo k, $n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$ se define $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. Pruebe que: $C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k+1} = C_n^{k+1}$. Pruebe entonces por inducción la fórmula del binomio de Newton:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \cdots + C_n^k a^{n-k}n^k + \cdots + b^n.$$

Solución Se tiene que $C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k+1} = \dfrac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \dfrac{(n-1)!}{(k+1)!(n-k-2)!} = \dfrac{(n-1)!\,[(k+1)+(n-1-k)]}{(k+1)!(n-1-k)!} = \dfrac{(n-1)!n}{(k+1)!(n-(k+1))!} = \dfrac{n!}{(n-(k+1)!)(k+1)!} = C_n^{k+1}$.

La fórmula del binomio, es cierta para $n=1$. Siendo cierta para n, entonces:

$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n(a+b) = \big(\sum\limits_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} C_n^k\big)(a+b) = \sum\limits_{k=0}^{n} a^{k+1}b^{n-k}C_n^k + \sum\limits_{k=0}^{n} a^k b^{n-k+1} C_n^k = \sum\limits_{k=1}^{n+1} a^k b^{n-k+1} C_n^{k-1} + \sum\limits_{k=0}^{n} a^k b^{n-k+1} C_n^k = b^{n+1} + \sum\limits_{k=1}^{n} a^k b^{n-k+1}\big(C_n^{k-1}+C_n^k\big) + a^{n+1} =$ fórmula para $n+1$.

(c) Mediante resultados sobre funciones numéricas de variable real, estudie la convergencia y el valor del límite en caso de existir de las sucesiones:

a) $a_n = n^\alpha$. b) $b_n = a^n$. c) $c_n = \sqrt[n]{a}$. d) $d_n = \dfrac{n^k}{a^n}$.

Solución Para cada una de las sucesiones a_n, b_n, c_n, d_n estudiamos el límite en $+\infty$ de las funciones $x \longmapsto x^\alpha$, $x \longmapsto a^x$, $x \longmapsto a^{\frac{1}{x}}$, $x \longmapsto \dfrac{x^k}{a^n}$ respectivamente:

– Puesto que si $x \to \infty$, $x^\alpha \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha < 0 \\ 1 & \text{si } \alpha = 0 \\ +\infty & \text{si } \alpha > 0 \end{cases} \Longrightarrow a_n \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha < 0 \\ 1 & \text{si } \alpha = 0 \\ +\infty & \text{si } \alpha > 0. \end{cases}$

– Puesto que si $x \to \infty$, $a^x \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq a < 1 \\ 1 & \text{si } a = 1 \\ +\infty & \text{si } a > 1 \end{cases} \Longrightarrow b_n \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq a < 1 \\ 1 & \text{si } a = 1 \\ +\infty & \text{si } a > 1. \end{cases}$

– Puesto que si $x \to \infty$, $a^{\frac{1}{x}} \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < a,\ a \neq 1 \\ 1 & \text{si } a = 1 \end{cases} \Longrightarrow c_n \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < a,\ a \neq 1 \\ 1 & \text{si } a = 1. \end{cases}$

– Puesto que si $x \to \infty$, $\dfrac{e^x}{x^\alpha} \longrightarrow \infty, \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$, entonces $\dfrac{x^k}{a^k} \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } a > 1,\ \forall k \\ 0 & \text{si } k < 0,\ a = 1 \\ 1 & \text{si } k = a = 1 \\ +\infty & \text{si } k > 0,\ a = 1 \\ +\infty & \text{si } 0 < a < 1,\ \forall k \end{cases}$

entonces $d_n \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } a > 1,\ \forall\, k \text{ ó } k < 0,\ a = 1 \\ 1 & \text{si } a = k = 1 \\ +\infty & \text{si } k > 0,\ a = 1 \text{ ó } 0 < a < 1, \forall\, k. \end{cases}$

(d) Probar que si $(a_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión de términos >0 tal que el límite $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ existe y es igual a L, entonces $a_n \longrightarrow 0$, si $L < 1$; $b_n \longrightarrow \infty$, si $L > 1$. Deducir los límites de $\dfrac{a_n}{n!}$, $\dfrac{n^k}{a^n}$.

Solución

i. Para $n \geq N$ se tiene $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq L + \varepsilon$, $L + \varepsilon < 1$, entonces $a_{n+1} \leq a_n(L+\varepsilon)$, (pues $a_n > 0$) $\Longrightarrow 0 \leq a_{N+p} \leq a_N(L+\varepsilon)^p$ y como $(L+\varepsilon)^p \longrightarrow 0$, si $p \to \infty$, $a_n \longrightarrow 0$.

ii. Para $n \geq N$ se tiene $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq L - \varepsilon$, con $L - \varepsilon > 1$, entonces para $n \geq N$, $a_{n+1} \geq a_n(L-\varepsilon) \Longrightarrow a_{N+p} \geq a_N(L-\varepsilon)^p$ y como $(L-\varepsilon)^p \longrightarrow \infty$, si $p \to \infty$, entonces $a_n \longrightarrow \infty$, si $n \to \infty$.

Cuando $L = 1$, no hay criterio. Por ejemplo, si $a_n = \dfrac{1}{n}$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow 1$ y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, mientras que para $b_n = n$, $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} \longrightarrow 1$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge.

La sucesión $\dfrac{a^n}{n!}$ es positiva y $\dfrac{\dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{a^n}{n!}} = \dfrac{a}{n+1} \longrightarrow 0$, si $n \to \infty$, lo que implica que $\dfrac{a^n}{n!} \longrightarrow 0$, si $n \to \infty$.

La sucesión $\dfrac{n^k}{a^n}$ satisface que $\dfrac{\frac{n+1^k}{a^{n+1}}}{\frac{n^k}{a^n}} = \dfrac{1}{a}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^k \longrightarrow \dfrac{1}{a}$, si $n \to \infty$, $\forall\, k$, entonces converge a 0, si $a > 1$; diverge a $+\infty$, si $0 < a < 1$. Es claro que para $a = 1$, la sucesión converge a 0, si $k < 0$; diverge a $+\infty$, si $k > 0$ y converge a 1, si $k = 0$.

(e) Se define la sucesión recurrente por $a_{n+1} = a_n(1 - a_n)$, $a \geq 0$. Probar que ésta es convergente $\iff a_0 \in [\,0, 1\,]$. Calcule el límite en este caso en función de a_0.

Solución Observemos primeramente que para cualquier valor inicial a_0, la sucesión es decreciente, pues $a_{n+1} - a_n = -a_n^2 \leq 0$. Supongamos ahora que $a_0 \in [\,0, 1\,]$. Puesto que la función $f(x) = x(1 - x)$ es tal que $f([\,0, 1\,]) = [\,0, \frac{1}{4}\,]$, entonces $a_1 = f(a_0) \in [\,0, \frac{1}{4}\,]$. Por inducción se establece que $\forall\, n \geq 1$, $a_n \in [\,0, \frac{1}{4}\,]$.

Es cierto para $n = 1$. Si $a_n \in [\,0, \frac{1}{4}\,] \Longrightarrow f(a_n) = a_{n+1} \in [\,0, \frac{1}{4}\,]$ y se concluye el resultado.

Como $f(x) \leq x$, $\forall\, x$, entonces $(a_n)_n$ es decreciente y acotada inferiormente por 0, lo que implica que es convergente. Su límite L, satisface la ecuación $L = L(1 - L) \iff L^2 = 0 \Longrightarrow L = 0$.

Supongamos ahora que $a_0 \notin [\,0, 1\,]$, como $f(x) < 0$, si $x \notin [\,0, 1\,]$, se deduce que $a_1 = f(a_0) < 0$. Por inducción se establece entonces que $\forall\, n \geq 1$, $a_n > 0$. Si convergiera, su límite L debe ser 0, lo cual es imposible pues a_n es decreciente y negativa a partir de $n = 1$. Por lo tanto, no puede ser acotada inferiormente y entonces $a_n \longrightarrow -\infty$, si $n \to \infty$.

(f) Sea la sucesión: $a_n = 1$, $a_{n+1} = (1 + \sqrt{a_n})^{\frac{1}{2}}$, $n \geq 1$. Pruebe que es creciente y acotada por 2. ¿Qué deduce? Explicar como aproximar una raíz real del polinomio: $p(x) = x^4 - 2x^2 - x + 1$.

Solución Probemos que es creciente por inducción: $a_2 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} > a_1$.

Si $a_n > a_{n-1} \Longrightarrow a_{n+1} - a_n = (1 + \sqrt{a})^{\frac{1}{2}} - (1 + \sqrt{a_{n-1}})^{\frac{1}{2}} = \dfrac{(\sqrt{1 + \sqrt{a}})^2 - (\sqrt{1 + \sqrt{a_{n-1}}})^2}{\sqrt{1\sqrt{a_n}} + \sqrt{1 + \sqrt{a_{n-1}}}} =$
$\dfrac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}}}{\sqrt{1 + \sqrt{a_n}} + \sqrt{1 + \sqrt{a_{n-1}}}} > 0 \Longrightarrow a_{n+1} - a_n > 0$, es decir es estrictamente creciente.

Probemos que es acotada por 2 por inducción: $a_2 = 1 < 2$.

Si $a_n < 2 \Longrightarrow a_{n+1} = \sqrt{1 + \sqrt{a_{n-1}}} < \sqrt{1 + \sqrt{2}} < \sqrt{4} = 2$. Por lo tanto es convergente. (Teorema de convergencia monótona).

Si $L =$ límite de $(a_n) \Longrightarrow L = (1+\sqrt{2})^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow L^2 = 1+\sqrt{2} \Longrightarrow (L^2-1)^2 = L \Longrightarrow L^4-2L^2-L+1 = 0$. Por lo tanto una raíz real del polinomio $x^4 - 2x^2 - x + 1$ se aproxima por medio de (a_n).

(g) Se definen las sucesiones $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, $y_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$, $n \geq 1$. Pruebe que la primera es creciente, la segunda decreciente y ambas acotadas. Explicar cómo emplearlas en la aproximación del número e.

Solución (x_n) es creciente: $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)\left(\dfrac{1+\dfrac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^n =$
$\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)\left(\dfrac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^n = \left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)\left(1-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)^n$. Usando la desigualdad de Bernoulli (pregunta a) de 1)), tenemos:
$\left(1-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)^n \geq 1-\dfrac{n}{(n+1)^2}$ y por lo tanto $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \geq \left(1+\dfrac{1}{(n+1)}\right)\left(1-\dfrac{n}{(n+1)^2}\right) =$
$\dfrac{(n+2)(n^2+n+1)}{(n+1)^3}$ y esta última cantidad es >1 pues $n^3+3n^2+3n+2 > n^3+3n^2+3n+1, \forall n \in \mathbb{N}$.

(y_n) es decreciente: $\dfrac{y_n}{y_{n+1}} = \dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\dfrac{1+\frac{1}{n}}{1+\dfrac{1}{n+1}}\right)^{n+2}$.

Además, $\left(\dfrac{1+\frac{1}{n}}{1+\dfrac{1}{n+1}}\right)^{n+2} = \left(\dfrac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+2} = \left(1+\dfrac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} \geq 1+\dfrac{(n+2)}{n(n+1)} = 1+\dfrac{1}{n}$

(desigualdad de Bernoulli), por lo que tenemos $\dfrac{y_n}{y_{n+1}} \geq \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2 > 1 \Longrightarrow y_n > y_{n+1} \Longrightarrow (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente.

Es claro que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada; pues es decreciente y positiva. Por lo tanto $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, pues $x_n \leq y_n$. Si $L = \lim x_n \Longrightarrow L = \lim y_n$, pues $y_n = x_n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$. Entonces $x_n \leq L \leq y_n, \forall\, n$, lo que aproxima e por arriba y por abajo.

(h) Analice la convergencia de las sucesiones: $x_n = (a^n+b^n)^{\frac{1}{n}}, \quad y_n = \left(\dfrac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n$, $a, b \in \mathbb{R}^+$.

Solución Si a ó $b = 0$, la sucesión es constante e igual a $\min(a,b)$. Supongamos $a,\, b > 0$, entonces $a^{\frac{1}{n}} = 1+\log\frac{a}{n}+o(\frac{1}{n})$, $b^{\frac{1}{n}} = 1+\log\dfrac{(b)}{n}+o(\frac{1}{n}) \Longrightarrow \log(y_n) = n\log\left(\dfrac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}-2}{2}\right) =$
$n\log\left(1+\dfrac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}-2}{2}\right) = n\log\left(1+\log\dfrac{(ab)}{2n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = n\left(\log\dfrac{(ab)}{2n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = \log\dfrac{(ab)}{2}+$
$o(1) \longrightarrow \log\dfrac{(ab)}{2}$, si $n\to\infty$, por lo que $\log(y_n) \longrightarrow \log\dfrac{(ab)}{2}$, si $n\to\infty$, lo que implica que $y_n \longrightarrow \exp\left(\log\dfrac{(ab)}{2}\right) = \sqrt{ab}$.

(i) Estudie, si existe, el límite de cada sucesión:

i. $x_n = \sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{n}{n^2k^2}$.

ii. $x_n = n\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{e^{-\frac{n}{k}}}{k^2}$.

iii. $x_n = \left(\dfrac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Solución

i. $x_n = \sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{n}{n^2+k^2} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{k}{n}\right)^2}$ = suma de Riemann de $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ de malla $\dfrac{1}{n} \Longrightarrow$

$x_n \longrightarrow \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, si $n \to \infty$.

ii. $x_n = n\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-\frac{n}{k}}}{k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-\frac{n}{k}}}{\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-\frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)}}}{\left(\frac{k}{n}\right)^2}$, corresponde a una suma de Riemann de $f(x) = \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$ en $[\,0,1\,]$, función integrable, pues $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, entonces $x_n \longrightarrow \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}dx$ y tomando $u = \frac{1}{x}$, la integral $= -\displaystyle\int_{+\infty}^{1} e^{-u}du = \int_1^{+\infty} e^{-u}du = \frac{1}{e}$.

iii. $x_n = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{(2n)!}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} \Longrightarrow \log(x_n) = \log\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}\log\left(\frac{(2n)!}{n!}\right)$. Pero $\log\left(\frac{2n!}{n!}\right) = \log(n+1)+\cdots+\log(2n) = n\log n + \log 2 + \log\left(2-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\left(2-\frac{n-1}{n}\right) \Longrightarrow \log(x_n) = \log\left(\frac{1}{n}\right) + \log n + \frac{1}{n}\left(\log 2 + \log\left(2-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\log\left(2-\frac{n-1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n}\left(\log 2+\cdots+\log\left(2-\frac{n-1}{n}\right)\right) =$ suma de Riemann de $f(x) = \log(2-x)$ en $[\,0,1\,] \Longrightarrow \log(x_n) \longrightarrow \displaystyle\int_0^1 \log(2-x)dx = 2\ln 2 - 1 \Longrightarrow x_n \longrightarrow \frac{4}{e}$.

(j) Pruebe que la sucesión: $a_n = \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) - \ln n$, es convergente.

Solución Es fácil ver que $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ es una suma superior de Riemann de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ en $[\,1, n+1\,]$, por lo tanto $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} \geq \ln(n+1) \Longrightarrow a_n \geq \ln(n+1) - \ln(n) > 0 \Longrightarrow (a_n)_n$ es positiva.

Por otro lado, $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \dfrac{1}{n+1} + \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right) = \dfrac{1}{n+1} + \ln\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right) = (*)$.

Por el teorema del valor medio, $\log\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right) = \dfrac{-1}{(n+1)\theta}$, donde $\theta \in \left]\,1-\dfrac{1}{n+1}, 1\,\right[\Longrightarrow \ln\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right) \leq -\dfrac{1}{(n+1)} \Longrightarrow (*) \leq \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+1} = 0 \Longrightarrow a_{n+1} \leq a_n$, es decir (a_n) es decreciente.

Siendo acotada inferiormente y decreciente, es convergente (teorema de convergencia monótona).

Nota El límite de (a_n) es llamado el número gama de Euler.

(k) Considere la siguiente sucesión definida por recurrencia: $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + 3$. Demostrar que $a_n = 3n - 2$.

Solución Demostraremos la relación por inducción. En efecto, $a_1 = 1 = 3(1) - 2$.

$(n \Longrightarrow n+1)$ $a_{n+1} = a_n + 3 = 3n - 2 + 3 = 3n + 1 = 3(n+1) - 2$. Así se ha demostrado que $a_n = 3n - 2, \forall n \in \mathbb{N}$.

(l) Demuestre por inducción sobre n que $(1-x)\left[(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{n-1}})\right] = 1 - x^{2^n}$.

Si $|x| < 1$, demuestre que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{n-1}})\right] = \frac{1}{1-x}$.

Solución Demostraremos la relación por inducción. En efecto, para $n = 1$ la relación es verdadera pues,

$(1-x)\Big[(1+x^{2^1-1})\Big] = 1-x^2$.

$(n \Longrightarrow n+1)$ $(1-x)\Big[(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{n-1}})\Big](1+x^{2^n}) = (1-x^{2^n})(1+x^{2^n}) = 1+x^{2\cdot 2^n} = 1+x^{2^{n+1}}$, lo que concluye la prueba.

Por otro lado, $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{n-1}}) = \dfrac{1-x^{2^n}}{1-x}$ y como $|x|<1$, $x^{2^n} \longrightarrow 0$ y se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty}\Big[(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{n-1}})\Big] = \dfrac{1}{1-x}$.

(m) Considere la siguiente sucesión definida por recurrencia: $a_1 = 2$, $a_n = a_{n-1}+n-2, \forall\, n \geq 2$. Demostrar por inducción que $a_n = 2+\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$.

Solución Demostraremos la relación por inducción. En efecto, para $n=1$ la relación es verdadera pues, $a_1 = 2 = 2+\frac{1}{2}(1-1)(1-2)$.

$(n \Longrightarrow n+1)$ $a_{n+1} = a_n+n-1 = 2+\frac{1}{2}(n-1)(n-1)+(n-1) = 2+\frac{1}{2}(n-1)(n-2+2) = 2+\frac{1}{2}n(n-1) = 2+\frac{1}{2}(n+1-1)(n+1-2)$.

(n) Calcule el límite de la sucesión $\{x_n\}$, si: $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}\left(1+\dfrac{2^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}\cdots\left(1+\dfrac{n^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Solución Tomando logaritmo se tiene:

$\log x_n = \dfrac{1}{n}\left(\log\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)+\log\left(1+\dfrac{2^2}{n^2}\right)+\cdots\log\left(1+\dfrac{n^2}{n^2}\right)\right) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{k^2}{n^2}\right) \longrightarrow$
$\displaystyle\int_0^1 \log(1+x^2)dx = x\log(1+x^2)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2}dx = \log 2 - 2\int_0^1 \frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx =$
$\displaystyle\log 2 - 2\int_0^1 dx + 2\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \log 2 - 2 + 2\arctan x\Big|_0^1 = \log 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$.

(o) Calcule el límite de la sucesión definida por: $x_n = \sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{n}\left[\operatorname{sen}\left(\dfrac{2k}{n}\right)\right]^2\cos\left(\dfrac{k}{n}\right)$.

Solución $x_n = \sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{n}\left[\operatorname{sen}\left(\dfrac{2k}{n}\right)\right]^2\cos\left(\dfrac{k}{n}\right) \longrightarrow \displaystyle\int_0^1 \operatorname{sen}^2(2x)\cos x dx = 4\int_0^1 \cos^3 x \operatorname{sen}^2 x dx =$
$\displaystyle 4\int_0^1 \cos x(1-\operatorname{sen}^2 x)\operatorname{sen}^2 x dx = 4\int_0^1 \operatorname{sen}^2 x\cos x dx - 4\int_0^1 \operatorname{sen}^4 x \cos x dx = \frac{4}{3}\operatorname{sen}^3 x\Big|_0^1 - \frac{4}{5}\operatorname{sen}^5 x\Big|_0^1 =$

$\frac{4}{3}\operatorname{sen}^3 1 - \frac{4}{5}\operatorname{sen}^5 1$.

(p) Calcule el límite de la sucesión $\{x_n\}$, si $x_n = \sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{k^2}{n^2\sqrt[3]{n^3+k^3}}$.

Solución $x_n = \sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{k^2}{n^2\sqrt[3]{n^3+k^3}} = \sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{n\sqrt[3]{1+\left(\frac{k}{n}\right)^3}} \longrightarrow \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{1+x^3}} = \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{du}{\sqrt[3]{u}} = \frac{1}{3}\frac{3}{2}u^{2/3}\Big|_1^2 =$
$\frac{1}{2}(\sqrt[3]{4}-1)$.

(q) Sea $f(x)$ una función continua en $[\,0,1\,]$ y sea $x_n = \dfrac{1}{n}\Big[f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+f(\frac{3}{n})+\cdots+f(\frac{n}{n})\Big]$.

i. Exprese $\lim\limits_{x\to\infty} x_n$ como una integral definida.

ii. Utilice a) para calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^{16}}(1^{15}+2^{15}+3^{15}+\cdots+n^{15})$.

iii. Utilice b) para calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^{17}}(1^{15}+2^{15}+3^{15}+\cdots+n^{15})$.

Solución

i. Es claro que $x_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n} f\big(\frac{k}{n}\big) \longrightarrow \displaystyle\int_0^1 f(x)dx$.

ii. $\dfrac{1}{n^{16}}(1^{15}+2^{15}+3^{15}+\cdots+n^{15}) = \dfrac{1}{n}\Big(\Big(\dfrac{1}{n}\Big)^{15}+\Big(\dfrac{2}{n}\Big)^{15}+\cdots+\Big(\dfrac{n}{n}\Big)^{15}\Big) \longrightarrow \displaystyle\int_0^1 x^{15}dx = \frac{1}{16}$.

iii. $\dfrac{1}{n^{17}}(1^{15}+2^{15}+3^{15}+\cdots+n^{15}) = \dfrac{1}{n}\dfrac{1}{n}\Big(\Big(\dfrac{1}{n}\Big)^{15}+\Big(\dfrac{2}{n}\Big)^{15}+\cdots+\Big(\dfrac{n}{n}\Big)^{15}\Big) \sim \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 x^{15}dx = \frac{1}{16n} \longrightarrow$ 0.

(r) Suponga que $f(x)$ es una función diferenciable para todo $x \in [\,0,1\,]$ y que $f(0)=0$. Sea la sucesión $\{a_n\}$ definida por la fórmula $a_n = nf\big(\frac{1}{n}\big)$.

i. Demuestre que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = f'(0)$.

ii. Utilice a) para calcular $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, si $a_n = n\arctan\big(\frac{1}{n}\big)$.

Solución

i. Tenemos que $a_n = nf\big(\frac{1}{n}\big) = n\big(f\big(\frac{1}{n}\big)-f(0)\big) = nf'(\zeta_n)\frac{1}{n}$, con $0<\zeta_n<\frac{1}{n}$, ya que f es derivable y como f' es continua, $\zeta_n \longrightarrow 0$, si $n\to\infty$, es decir $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} f'(\zeta_n) = f'(0)$.

ii. Por la parte a), con $f(x)=\arctan x$, se tiene $a_n \longrightarrow f'(0) = \dfrac{1}{1+x^2}\Big|_{x=0} = 1$.

(s) Utilice inducción matemática para demostrar la identidad: $P(n) = a+(a+1)+(a+2)+\cdots+(a+n-1) = \frac{1}{2}n(2a+n-1)$, $\forall\, n=1,2,3,\ldots$, a es una constante fija.

Solución Se tiene que $P(1)=a=\frac{1}{2}1(2a+1-1)=a$.

$(n \Longrightarrow n+1)$ $P(n+1) = a+(a+1)+(a+2)+\cdots+(a+n-1)+(a+n) = \frac{1}{2}n(2a+n-1)+(a+n) = na+\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n+a+n = (n+1)a+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n = (n+1)a+\frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(2a+n) = \frac{1}{2}(n+1)(2a+(n+1)-1)$.

(t) Sea la sucesión $\{a_n\}$ definida por recurrencia de la siguiente manera: $a_1=2$, $a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+4)$; para $n\geq 1$.

i. Demuestre mediante inducción sobre n, que $a_n<4$, para cada n.

ii. Demuestre que $\{a_n\}$ es creciente. Calcule su límite.

Solución

i. La relación vale para $n=1$: $a_1=2<4$.

$(n \Longrightarrow n+1)$ Por hipótesis $0<a_n<4 \Longrightarrow 4<a_n+4<8 \Longrightarrow 2<a_{n+1}<4$.

ii. Observemos que $a_{n+1}-a_n = \frac{1}{2}(a_n+4)-a_n = 2-\frac{1}{2}a_n = \frac{1}{2}(4-a_n)<0$, es decir $(a_n)_{n\geq 1}$ es creciente. Así tenemos que $(a_n)_{n\geq 1}$ es creciente y acotada superiormente, por lo que el teorema de convergencia monótona nos garantiza la existencia de un límite $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Calculando el límite cuando $n \to \infty$ en la relación $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 4)$, tenemos que $\ell = \frac{1}{2}(\ell + 4) \Longrightarrow \ell = 4$.

(u) Demuestre por inducción que $3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n = \frac{3}{2}(3^n - 1)$.

Solución Es claro que la relación vale para $n = 1$, pues $3^1 = \frac{3}{2}(3^1 - 1) = 3$.

$(n \Longrightarrow n+1)$ $3+3^2+3^3+\cdots+3^n+3^{n+1} = \frac{3}{2}(3^n-1)+3^{n+1} = \frac{3}{2}3^n+3^{n+1}-\frac{3}{2} = 3^{n+1}(\frac{1}{2}+1)-\frac{3}{2} = \frac{3}{2}(3^{n+1} - 1)$ y la relación vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicios especiales: Semanas No.9-10: Prof. Rodolfo Obando, Prof. J. Poltronieri

(a) Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{x^2} \mathrm{e}^{(t/x)^2}\,dt$ b) $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1-\displaystyle\int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{1+tx}}}{t}$

c) $\lim\limits_{t\to\infty} \displaystyle\int_0 1\mathrm{e}^{\sqrt{x+1}}\cos(tx)\,dx$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \displaystyle\int_x^{2x} \dfrac{\mathrm{e}^t}{t}\,dt.$

(b) Sea $f\colon \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{\mathrm{sen}^2 t}\,dt$. Calcular su desarrollo limitado de 5 alrededor de 0.

(c) Sea $f\colon \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+1}}\,dt$. Calcular su desarrollo limitado de orden 6 alrededor de 0.

(d) Calcular el número π con un error de 10^{-6}.

(e) Sea $f\colon [\,0,1\,]\longrightarrow\mathbb{R}$ una función continua, demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} nf(x)\,dx=f(0)$.

(f) a) Probar que $\forall\, n\geq 3$, $\dfrac{\log(n+1)}{n+1}\leq\displaystyle\int_n^{n+1}\dfrac{\log x}{x}\,dx<\dfrac{\log n}{n}$.

b) Deducir que la secuencia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\log k}{k}-\dfrac{(\log n)^2}{2}$, $x_0=0$ es convergente.

(g) a) Para $n\in\mathbb{N}$, probar que $1+\displaystyle\int_1 nx^p\,dx<1^p+2^p+\cdots+n^p<\displaystyle\int_1^{n+1}x^p\,dx$, si $n>1$.

b) Deducir que $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\dfrac{1}{p+1}$.

(h) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_1^n\dfrac{\mathrm{sen}\,nt}{nt}\,dt.$

(i) Calcular el límite de la sucesión $(x_n)_n$ definida por $x_n=\displaystyle\int_0^n\dfrac{t\,dt}{(\mathrm{sh}\ t+\mathrm{ch}\ t)^n}$.

(j) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1\dfrac{nx}{1+nx^2\log n}\,dx.$

(k) Sea $f\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ una función de clase C^1, $(x_n)_n$ una sucesión de números que converge a $\ell>0$, demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{sen}(n\alpha_n t)\,dt=0.$

(l) Sea $a<b$, $a,b\in\mathbb{R}$ y sea $f\colon[\,a,b\,]\longrightarrow\,]\,0,\infty\,[$ una función continua, demuestre que

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\int_a^b |f(a)|^n\,dt\Big)=\sup_{a\leq x\leq b} f(x).$$

(m) Para cada $n\in\mathbb{N}$ se le asocia la función $f_n\colon[\,0,1\,]\longrightarrow\mathbb{R}$, definida por $f_n(x)=x^n(1-x)$.

a) Demuestre que $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1 f_nf(x)\,dx=\int_0^1\Big(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\Big)\,dx.$

b) ¿Se podría prever el resultado?

(n) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ se considera que la función $f_n\colon [\,0,1\,] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = n^2 x(1-x)^n$, demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\, dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx$.

(o) Sea $(x_n)_n$ la sucesión definida por $x_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n t\, dt$.

a) Verificar que $x_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\, dt$.

b) Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

c) Demostrar que $\forall\, n \geq 2$, $x_n = \dfrac{n-1}{n} x_{n-2}$.

d) Definir que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{2n}}{x_{2n+1}} = 1$.

(p) Utilizando el ejercicio anterior, demostrar que $\forall\, n \geq 0$,

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^4 x \cos^n x\, dx = \frac{3}{(n+1)(n+4)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x\, dx$.

b) Deducir los valores de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^4 x \cos^2 x\, dx$, $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^4 x \cos^4 x\, dx$.

(q) Sea $(x_n)_n$ la sucesión definida por $x_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \operatorname{sen}^n x\, dx$.

a) Demostrar que $\forall n \geq 2$, $x_n = \dfrac{1}{n^2+1} \left(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + n(n-1)x_{n-2} \right)$.

b) Deducir los valores de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \operatorname{sen}^2 x\, dx$, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \operatorname{sen}^3 x\, dx$.

Soluciones ejercicios especiales: Semanas No.9-10: Prof. Rodolfo Obando, Prof. J. Poltronieri

(a) Calcular los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^{x^2} e^{(t/x)^2}\,dt$ b) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{1-\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+tx}}}{t}$

c) $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\int_0 1e^{\sqrt{x+1}}\cos(tx)\,dx$ d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}\,dt.$

Solución

a) Sea $u=\dfrac{t}{x}$, $du=\dfrac{1}{x}\,dt\therefore\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{x^2} e^{-(t/x)^2}\,dt=\int_0^x e^{-u^2}\,du\longrightarrow 0$, si $x\to 0$.

b) Se tiene que $\forall\,0<t<1$, $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+tx}}=\frac{2}{t}\sqrt{1+tx}\Big|_{t=0}^{t=1}=\frac{2}{t}(\sqrt{1+t}-1)=$ $\dfrac{2}{t}\big(\dfrac{t}{2}-\dfrac{t^2}{8}+t^2\epsilon(t)\big)=1-\dfrac{t}{4}+t\epsilon(t)$, donde $\epsilon(t)\longrightarrow 0$, si $x\to 0$.

De esta forma tenemos que $\dfrac{1}{t}\Big(1-\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+tx}}\Big)=\frac{1}{t}\Big(\frac{t}{4}+t\epsilon(t)\Big)=\frac{1}{4}+\epsilon(t)\longrightarrow\frac{1}{4}.$

c) $\displaystyle\int_0^1 e^{\sqrt{x+1}}\cos(tx)\,dx=\frac{1}{t}e^{\sqrt{x+1}}\operatorname{sen}(tx)\Big|_0^1-\frac{1}{2t}\int_0^1\frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}\operatorname{sen}(tx)\,dx=$ $\dfrac{1}{t}e^{\sqrt{2}}\operatorname{sen}t-\dfrac{1}{2t}\displaystyle\int_0^1\frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}\operatorname{sen}(tx)\,dx.$

Por otro lado, $\Big|\dfrac{1}{2t}\displaystyle\int_0^1\frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}\operatorname{sen}(tx)\,dx\Big|\le\frac{1}{2t}\int_0^1\frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}\,dx=\frac{1}{t}e^{\sqrt{x+1}}\Big|_0^1=$ $\dfrac{1}{t}(e^{\sqrt{2}}-e)\longrightarrow 0$, si $x\to 0$, por lo tanto: $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\int_0^1 e^{\sqrt{x+1}}\cos(tx)\,dx=0.$

d) Se tiene que $e^t=1+te^{\theta_t t}$, para algún $\theta_t\in\,]\,0,1\,[$, entonces $\dfrac{e^t}{t}=\dfrac{1}{t}+e^{\theta_t t}$, por lo que si $x\neq 0$, $\displaystyle\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}\,dt=\int_x^{2x}\big(\frac{1}{t}+e^{\theta_t t}\big)\,dt=\ln 2+\int_x^{2x}e^{\theta_t t}\,dt.$

Ahora bien, $x<t<2x$ y como $x\to 0$, entonces $\exists\delta>0$ tal que si $0<x<t<2t<\delta\Longrightarrow 0<e^t<2\Longrightarrow$ $\Big|\displaystyle\int_x^{2x}e^{\theta_t t}\,dt\Big|\le\int_x^{2x}2\,dt=2x$, por lo tanto si $x\to 0$, $\Big|\displaystyle\int_x^{2x}e^{\theta_t t}\,dt\Big|\longrightarrow 0.$

Finalmente $\displaystyle\lim_{t\to 0}\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}=\ln 2.$

(b) Sea $f\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\displaystyle\int_0^x e^{\operatorname{sen}^2 t}\,dt$. Calcular su desarrollo limitado de 5 alrededor de 0.

Solución Sabemos que $\operatorname{sen}x=x+\dfrac{x^3}{3!}+x^3\epsilon_1(x)\Longrightarrow\operatorname{sen}^2 x=x^2-\dfrac{x^4}{3}+x^4\epsilon_2(x)$, donde $\epsilon_1(x)\longrightarrow 0$, $\epsilon_2(x)\longrightarrow 0$, si $x\to 0$.

Ahora bien, $f'(x) = \mathrm{e}^{\operatorname{sen}^2 x} = 1 + x^2 + \dfrac{x^4}{6} + x^4\epsilon_2(x)$, con $\epsilon_2(x) \longrightarrow 0$, si $x \to 0$, por lo que $\displaystyle\int_0^x f'(t)\,dt = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{30} + x^5\epsilon(x)$, donde $\epsilon(x) \longrightarrow 0$, si $x \to 0$.

(c) Sea $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+1}}\,dt$. Calcular su desarrollo limitado de orden 6 alrededor de 0.

Solución Se tiene que $\sqrt{x^2+1} = 1 + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{8} + x^4\epsilon_1(x)$, con $\epsilon_1(x) \longrightarrow 0$, si $x \to 0$, entonces $f'(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+1}} = \mathrm{e}\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+1}-1} = \mathrm{e}\big(1 + \dfrac{1}{2}x^2 + x^5\epsilon_2(x)\big)$, donde $\lim\limits_{x\to 0} \epsilon_2(x) = 0$.

Así se tiene $f(x) = \mathrm{e}\big(x + \dfrac{x^3}{6} + x^6\epsilon(x)\big)$, con $\lim\limits_{x\to 0}\epsilon(x) = 0$.

(d) Calcular el número π con un error de 10^{-6}.

Solución Por Maclaurin tenemos que si $|z| < 1$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1+z}} = 1 - \frac{1}{2}z + \frac{1{\cdot}3}{2{\cdot}4}z^2 + \cdots + (-1)^n\frac{1{\cdot}3\cdots(2n-1)}{2{\cdot}4\cdots(2n)}z^n + \\ (-1)^{n+1}\frac{1{\cdot}3\cdots(2n+1)}{2{\cdot}4\cdots(2n+2)}\big(1+\theta_{z,n}z\big)^{-\frac{2n+3}{2}}z^{n+1},\end{aligned}$$

por lo que si $|t| < 1$, $n > 1$, tenemos:

$\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 1 + \dfrac{1}{2}t^2 + \cdots + \dfrac{1{\cdot}3\cdots(2n-1)}{2{\cdot}4\cdots(2n)}t^{2n} + \dfrac{1{\cdot}3\cdots(2n+1)}{2{\cdot}4\cdots(2n+2)}(1-\theta_{t,n}t)^{-\frac{2n+3}{2}}t^{2(n+1)}$

$\Longrightarrow \pi = 6\arcsen\dfrac{1}{2} = 6\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 6\big(t + \frac{1}{2{\cdot}3}t^3 + \cdots + \frac{1{\cdot}3\cdots(2n-1)}{2{\cdot}4\cdots(2n)(2n+1)}t^{2n+1}\big)\Big|_0^{\frac{1}{2}} + R_n =$
$6\big(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2{\cdot}3{\cdot}2^3} + \cdots + \dfrac{1{\cdot}3\cdots(2n-1)}{2{\cdot}4\cdots(2n)(2n+1)2^{2n+1}}\big) + R_n$,

donde $|R_n| = \Big|6\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1{\cdot}3\cdots(2n+1)}{2{\cdot}4\cdots(2n+2)}\big(1-\theta_{t^2,n}t^2\big)^{-\frac{2n+3}{2}}t^{2(n+1)}\,dt\Big| \leq$
$6\dfrac{1{\cdot}3\cdots(2n+1)}{2{\cdot}4\cdots(2n+2)}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\big|1-\theta_{t^2,n}t^2\big|^{-\frac{2n+3}{2}}t^{2(n+1)}\,dt \leq 6\Big(\frac{3}{4}\Big)^{-\frac{2n+3}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}}t^{2(n+1)}\,dt \leq$
$6{\cdot}\dfrac{2^{2n}}{3^n}{\cdot}\dfrac{11}{9}{\cdot}\dfrac{1}{2n+3}{\cdot}\dfrac{1}{2^{2n}}{\cdot}\dfrac{1}{8} = \dfrac{4}{2n+3}{\cdot}\dfrac{1}{3^{n+1}} < 10^{-6}$, para $n = 11$.
De esta forma $|\pi - 3.141592| < 10^{-6}$.

(e) Sea $f\colon [\,0,1\,] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} nf(x)\,dx = f(0)$.

Solución Sabemos que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} nf(x)\,dx = f(c_n)\int_0^{\frac{1}{n}} n\,dx = f(c_n)$, donde $0 < c_n < \dfrac{1}{n}$ y como f es continua, $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} nf(x)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} f(c_n) = f(0)$.

(f) a) Probar que $\forall\, n \geq 3$, $\dfrac{\log(n+1)}{n+1} \leq \displaystyle\int_n^{n+1}\frac{\log x}{x}\,dx < \frac{\log n}{n}$.

b) Deducir que la secuencia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\log k}{k} - \frac{(\log n)^2}{2}$, $x_0 = 0$ es convergente.

Solución

a) Se tiene que $f\colon [\,3,+\infty\,[\, \longrightarrow \mathbb{R}$, con $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$, es tal que $f'(x) = \dfrac{1-\log x}{x^2} < 0$, es decir decreciente, por lo que si $x \in [\,n, n+1\,]$:

$\dfrac{\log(n+1)}{n+1} \leq \dfrac{\log x}{x} \leq \dfrac{\log n}{n} \Longrightarrow \dfrac{\log(n+1)}{n+1} \leq \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq \dfrac{\log n}{n}$.

b) Observemos que $x_{n+1} - x_n = \dfrac{\log(n+1)}{n+1} - \dfrac{(\log n+1)^2}{2} + \dfrac{(\log n)^2}{2} =$

$\dfrac{\log n+1}{n+1} - \displaystyle\int_n^{n+1} \dfrac{\log x}{x}\,dx < 0$, es decir $(x_n)\!\downarrow$.

Ahora bien, $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\log k}{k} - \dfrac{(\log n)^2}{2} = \dfrac{\log 2}{2} + \sum_{k=3}^{n} \dfrac{\log k}{k} - \int_3^n \dfrac{\log x}{x}\,dx - \int_1^3 \dfrac{\log x}{x}\,dx \geq \dfrac{\log 2}{2} -$ $\displaystyle\int_1^3 \dfrac{\log x}{x}\,dx$, por lo que la función es decreciente y acotada inferiormente, o sea convergente.

(g) a) Para $n \in \mathbb{N}$, probar que $1 + \displaystyle\int_1 nx^p\,dx < 1^p + 2^p + \cdots + n^p < \int_1^{n+1} x^p\,dx$, si $n > 1$.

b) Deducir que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \dfrac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \dfrac{1}{p+1}$.

Solución

a) Sea $f\colon]\,0,\infty\,[\, \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^p$, como $f'(x) = px^{p-1} > 0$, si $x > 0$, la función f es constante creciente y

$k^p < \displaystyle\int_k^{k+1} x^p\,dx < (k+1)^p \Longrightarrow 1 + \int_1^n x^p\,dx = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} x^p\,dx < 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)^p = \sum_{k=1}^{n} k^p$.

Además, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p < \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} x^p\,dx = \int_1^{k+1} x^p\,dx$.

b) Integrando tenemos:

$1 + \dfrac{x^{p+1}}{p+1}\Big|_1^n < \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p < \dfrac{x^{p+1}}{p+1}\Big|_1^{n+1} \Longrightarrow 1 + \dfrac{n^{p+1}}{p+1} - \dfrac{1}{p+1} < \sum_{k=1}^{n} k^p < \dfrac{(n+1)^{p+1}}{p+1} - \dfrac{1}{p+1}$

$\Longrightarrow \dfrac{1}{n^{p+1}} + \dfrac{1}{p+1} - \dfrac{1}{n^{n+1}(p+1)} < \dfrac{1}{n^{p+1}} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p < \dfrac{1}{p+1}\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^{p+1} - \dfrac{1}{n^{p+1}}(p+1)$ y si $n \to \infty$ tenemos que $\dfrac{1}{p+1} \leq \displaystyle\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^{n} k^p \leq \dfrac{1}{p+1}$, es decir:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{1}{p+1}.$$

(h) Calcular $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_1^n \dfrac{\operatorname{sen} nt}{nt}\,dt$.

Solución Sabemos que $-1 \leq \operatorname{sen} nt \leq 1 \Longrightarrow -\dfrac{1}{nt} \leq \dfrac{\operatorname{sen} nt}{nt} \leq \dfrac{1}{nt} \Longrightarrow$

$-\displaystyle\int_1^n \dfrac{1}{nt}\,dt \leq \int_1^n \dfrac{\operatorname{sen} nt}{nt}\,dt \leq \int_1^n \dfrac{1}{nt}\,dt \Longrightarrow -\dfrac{\log n}{n} \leq \int_1^n \dfrac{\operatorname{sen} nt}{nt}\,dt \leq \dfrac{\log n}{n} \Longrightarrow$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_1^n \dfrac{\operatorname{sen} nt}{nt}\,dt = 0$, ya que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \dfrac{\log n}{n} = 0$.

(i) Calcular el límite de la sucesión $(x_n)_n$ definida por $x_n = \displaystyle\int_0^n \frac{t\,dt}{(\text{sh } t + \text{ch } t)^n}$.

Solución Tenemos que $(\text{sh } x + \text{ch } x)^n = \mathrm{e}^{nt}$, entonces $\displaystyle\int_0^n \frac{t}{\mathrm{e}^{nt}}\,dt = -\frac{t}{n}\mathrm{e}^{-nt}\Big|_0^n + \frac{1}{n}\int_0^n \mathrm{e}^{-nt}\,dt = -\mathrm{e}^{-n^2} - \frac{1}{n^2}\mathrm{e}^{-nt}\Big|_0^n = -\big(1+\frac{1}{n^2}\big)\mathrm{e}^{-n^2} + \frac{1}{n^2} \longrightarrow 0$, si $n \to \infty$.

(j) Calcular $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx}{1+nx^2\log n}\,dx$.

Solución $\displaystyle\int_0^1 \frac{nx}{1+nx^2\log n}\,dx = \frac{1}{2\log n}\log(1+nx^2\log n)\Big|_0^1 = \frac{\log(1+n\log n)}{2\log n} = \frac{\log\big[n\big(\frac{1}{n}+\log n\big)\big]}{2\log n} = \frac{\log n + \log\big(\frac{1}{n}+\log n\big)}{2\log n} = \frac{1}{2} + \frac{\log\big(\frac{1}{n}+\log n\big)}{\log n} \longrightarrow \frac{1}{2}$, si $n\to\infty$, ya que $\displaystyle\frac{\log\big(\frac{1}{n}+\log n\big)}{\log n} = \frac{\log\big(\frac{1}{n}+\log n\big)}{\frac{1}{n}+\log n}\,\frac{\frac{1}{n}+\log n}{\log n} \longrightarrow 0{\cdot}1 = 0$.

(k) Sea $f\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ una función de clase C^1, $(x_n)_n$ una sucesión de números que converge a $\ell>0$, demostrar que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(t)\,\mathrm{sen}(n\alpha_n t)\,dt = 0$.

Solución Dado que $\ell > 0$, $\exists N_0\in\mathbb{N}$ tal que si $n\geq N_0 \Longrightarrow \alpha_n > 0 \Longrightarrow \displaystyle\lim_{n\to\infty} n\alpha_n = +\infty$.

Por otro lado, $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{sen}(n\alpha_n t)\,dt = -\frac{f(t)\cos(n\alpha_n t)}{n\alpha_n} + \int_0^1 \frac{\cos(n\alpha_n t)}{n\alpha_n} f'(t)\,dt$, pero $\displaystyle\Big|\int_0^1 \frac{\cos(n\alpha_n t)}{n\alpha_n}f'(t)\,dt\Big| \leq \frac{1}{n\alpha_n}\Big|\int_0^1 f'(t)\,dt\Big| = \frac{|f(1)-f(0)|}{n\alpha_n} \longrightarrow 0$, si $n\longrightarrow\infty$, por lo que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(t)\,\mathrm{sen}(n\alpha_n)\,dt = 0$.

(l) Sea $a<b$, $a,b\in\mathbb{R}$ y sea $f\colon[\,a,b\,]\longrightarrow\,]\,0,\infty\,[$ una función continua, demuestre que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\Big(\int_a^b |f(a)|^n\,dt\Big) = \sup_{a\leq x\leq b} f(x)$.

Solución Dado que f es continua sobre el conjunto $[\,a,b\,]$, tenemos que existe $M = \sup f(x)_{x\in[\,a,b\,]} = f(c) > 0$, para algún $c\in[\,a,b\,]$.

Sea $0<\epsilon<\frac{M}{2}$ y como $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(b-a)^{\frac{1}{n}} = 1$, $\exists\, N_1\in\mathbb{N}^*$ tal que si $n\geq N_1 \Longrightarrow |(b-a)^{\frac{1}{n}}-1| < \frac{\epsilon}{M}$, es decir $(b-a)^{\frac{1}{n}} \leq 1+\frac{\epsilon}{M}$, por lo que $\displaystyle\Big(\int_a^b [\,f(t)\,]^n\,dt\Big)^{\frac{1}{n}} \leq M(b-a)^{\frac{1}{n}} \leq M+\epsilon$.

Además, $\exists\delta_1>0$ tal que si $|x-c|<\delta_1 \Longrightarrow f(x)\geq f(c)-\frac{\epsilon}{2} = M-\frac{\epsilon}{2}$.

Escogiendo $\delta = \begin{cases} \min\{\delta_1, b-c\} \text{ si } c\neq b \\ \min\{\delta_1, b-c\} \text{ si } c = b \end{cases}$ se tiene que $\displaystyle\Big(\int_0^b [\,f(x)\,]^n\Big)^{\frac{1}{n}} > \big(M-\frac{\epsilon}{2}\big)\delta_1^{\frac{1}{n}}$ y como $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\delta_1^{\frac{1}{n}} = 1$, existe $N_2\in\mathbb{N}$ tal que si $n>N_2 \Longrightarrow \delta_1^{\frac{1}{n}} \geq 1-\frac{\epsilon}{2M} \Longrightarrow \displaystyle\Big(\int_a^b [\,f(x)\,]^n\,dt\Big)^{\frac{1}{n}} \geq \big(M-\frac{\epsilon}{2}\big)\big(1-\frac{\epsilon}{2M}\big) > M-\epsilon+\frac{\epsilon^2}{4M} > M-\epsilon$.

Finalmente, si $n \geq \sup N_1, N_2$, se tiene que $\left| \left(\int_a^b [\, f(x)\,]^n \; dt \right)^{\frac{1}{n}} - M \right| \leq \epsilon$, es decir que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b [\, f(x)\,]^n \; dt = M$.

(m) Para cada $n \in \mathbb{N}$ se le asocia la función $f_n \colon [\,0,1\,] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f_n(x) = x^n(1-x)$.

a) Demuestre que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n f(x)\, dx = \int_0^1 \Big(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \Big)\, dx$.

b) ¿Se podría prever el resultado?

Solución

a) $\int_0^1 f_n(x)\, dx = \int_0^1 x(1-x)^n\, dx = \int_0^1 x^n(1-x)\, dx = \int_0^1 (x^n - x^{n+1})\, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}\Big|_0^1 - \frac{1}{n+2} x^{n+2}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \longrightarrow 0$, si $n \to \infty$.

Por otro lado, $f_n(x) = x(1-x)^n \longrightarrow 0$, si $n \to \infty$, $\forall\, x \in [\,0,1\,]$, por lo que:

$\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = 0 = \int_0^1 \big(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \big)\, dx$.

b) Sí, dada la convergencia uniforme de la sucesión de funciones a 0.

En efecto, $f_n'(x) = 0 \Longleftrightarrow (1+x)^n + nx(1-n)^{n-1} = 0 \Longrightarrow 1 - x = nx \Longrightarrow x = \frac{1}{n+1} \Longrightarrow$

$0 \leq f(x) \leq \sup f(x) = f\big(\frac{1}{n+1}\big) = \frac{1}{n+1}\big(1 - \frac{1}{n+1}\big)^n \longrightarrow 0, \forall\, x \in [\,0,1\,]$.

(n) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ se considera que la función $f_n \colon [\,0,1\,] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = n^2 x(1-x)^n$, demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx \neq \int_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\, dx$.

Solución $\int_0^1 f_n(x)\, dx = \int_0^1 n^2 x(1-x)^n\, dx = n^2 \int_0^1 x(1-x)^n\, dx = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \longrightarrow 1$.

Pero, $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 x(1-x)^n = 0$, $\forall\, x \in [\,0,1\,]$, ya que $n^p a^n \longrightarrow 0$, si $n \to \infty$ y $0 < a < 1$, por lo que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \Longrightarrow \int_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\, dx = 0 \neq \lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = 1$.

(o) Sea $(x_n)_n$ la sucesión definida por $x_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n t\, dt$.

a) Verificar que $x_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\, dt$.

b) Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

c) Demostrar que $\forall\, n \geq 2$, $x_n = \frac{n-1}{n} x_{n-2}$.

d) Definir que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{2n}}{x_{2n+1}} = 1$.

Solución

a) Sea $x = \frac{\pi}{2} - t$, entonces $x_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 t\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n(\frac{\pi}{2} - x)(-dx) =$

$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n(\frac{\pi}{2} - x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n(\frac{\pi}{2} - x)(dx) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx$.

b) Sea $0 < \epsilon < \frac{\pi}{2}$, entonces $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $|x_n| = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n t\, dt = -\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\epsilon}{2}} \operatorname{sen}^n t\, dt + \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n t\, dt \leq$ $\frac{\pi}{2} \operatorname{sen}^n\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\epsilon}{2}\right) + \frac{\epsilon}{2}$, ya que $0 < \operatorname{sen} t < 1$ en $]\,0, \frac{\pi}{2}\,[$ y el $\operatorname{sen} t$ es creciente en $]\,0, \frac{\pi}{2}\,[$. Pero $\operatorname{sen}^n\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\epsilon}{2}\right) \longrightarrow 0$, si $n \to \infty$, por lo que $\exists\, N_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_0 \Longrightarrow \left|\operatorname{sen}^n\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\epsilon}{2}\right)\right| < \frac{\epsilon}{\pi}$, es decir que si $n \geq N_0 \Longrightarrow |x_n| < \epsilon \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

c) Usando integración por partes tenemos que:

$$x_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n t\, dt = -\cos(\operatorname{sen} t)^{n-1}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t(\operatorname{sen} t)^{n-2}\, dt =$$

$$(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \operatorname{sen}^n t)\operatorname{sen}^{n-1}\, dt = (n-1)x_{n-2} - (n-1)x_n \Longrightarrow x_n = \frac{n-1}{n} x_{n-2}.$$

d) Observemos que $\forall\, t \in [\,0, \frac{\pi}{2}\,](\operatorname{sen} t)^{2n-1} \geq (\operatorname{sen} t)^{2n} \geq (\operatorname{sen} t)^{2n+1}$, por lo que:

$$x_{2n-1} \geq x_{2n} > 0 \Longrightarrow \frac{x_{2n-1}}{x_{2n+1}} \geq \frac{2n+1}{2n} \geq \frac{x_{2n}}{x_{2n+1}} \geq 1 \Longrightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{x_{2n}}{x_{2n+1}} = 1}.$$

(p) Utilizando el ejercicio anterior, demostrar que $\forall\, n \geq 0$,

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^4 x \cos^n x\, dx = \frac{3}{(n+1)(n+4)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x\, dx.$

b) Deducir los valores de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^4 x \cos^2 x\, dx$, $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^4 x \cos^4 x\, dx.$

Solución

a) Se define $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n t\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\, dt$, entonces:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x)\cos^n\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^n x - 2\cos^{n+2} x + \cos^{n+4} x)\, dx = u_n - 2u_{n+2} + u_{n+4} =$$

$$u_n - 2u_{n+2}\frac{n+3}{n+4}u_{n+2} = u_n - \left(2 + \frac{n+3}{n+4}\right)\frac{n+1}{n+2}u_n = u_n\left(1 - \frac{2(n+1)}{n+2} + \frac{(n+3)(n+1)}{(n+4)(n+2)}\right) =$$

$$\frac{n^2 + 6n + 8 - 2n^2 - 10n - 8 + n^2 + 4n + 5}{(n+2)(n+4)}u_n = \frac{3}{(n+1)(n+4)}u_n.$$

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^4 x \cos^2 x\, dx = \frac{3}{4{\cdot}6}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{1}{8}u_2 = \frac{1}{8}\frac{1}{2}u_0 = \frac{\pi}{32}$, por el ejercicio a).

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^4 x \cos^4 x\, dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^4 x \cos^4 x\, dx = 2\frac{3}{6{\cdot}8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^4 x\, dx = 2\frac{3}{6{\cdot}8}{\cdot}\frac{3}{4}u_2 =$$

$\frac{\cancel{2}{\cdot}\cancel{3}}{\cancel{6}{\cdot}8}{\cdot}\frac{3}{4}{\cdot}\frac{1}{2}u_0 = \frac{3\pi}{128}$, por el ejercicio a).

(q) Sea $(x_n)_n$ la sucesión definida por $x_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \operatorname{sen}^n x\, dx.$

a) Demostrar que $\forall n \geq 2$, $x_n = \dfrac{1}{n^2+1}\left(e^{\frac{\pi}{2}} + n(n-1)x_{n-2}\right).$

b) Deducir los valores de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \operatorname{sen}^2 x\, dx$, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \operatorname{sen}^3 x\, dx.$

Solución

a) $x_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \operatorname{sen}^3 x\,dx = \mathrm{e}^x \operatorname{sen}^n x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \cos x \operatorname{sen}^{n-1} x\,dx =$

$\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - n\Big(\mathrm{e}^x \cos x \operatorname{sen}^{n-1} x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x(-\operatorname{sen}^n x + (n+1)\cos^2 x \operatorname{sen}^{n-2} x)\,dx\Big) =$

$\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + n\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x((n-1)\operatorname{sen}^{n-2} x - n\operatorname{sen}^n x)\,dx = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + n(n+1)x_{n-2} - n^2 x_n \Longrightarrow$

$x_n = \dfrac{1}{n^2+1}(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + n(n-1)x_{n-2}).$

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{1}{5}(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + 2x_0) = \frac{1}{5}(3\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - 2).$

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \operatorname{sen}^3 x\,dx = \frac{1}{10}(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + 3(2)x_1) = \frac{1}{10}\Big(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + 6\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x\,dx\Big) =$

$\dfrac{1}{10}(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + 6\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + 1)) = \dfrac{1}{10}(4\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + 3)$, ya que:

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x\,dx = \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \cos x\,dx = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - \Big(\mathrm{e}^x \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x\,dx\Big) \Longrightarrow$

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \cos x\,dx = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + 1).$

Tema 9

Ejercicios semanas No.11-12: Series numéricas

Prof. Rodolfo Obando

(a) Analizar la convergencia de las siguientes series:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+1)^n}{n^{(n+\frac{1}{2})}}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\operatorname{senh}(n)}$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1+2^n+4^n}{3^n}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4^n n!}{n^n}$ e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n+n!}{n^n}$ f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\mathrm{e}^n n!}{n^n}$.

(b) Dadas las series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{sen}\frac{1}{n}$, explique si las series dadas convergen en forma absoluta o condicional. Determine el número de términos necesarios para calcular las sumas de las series dada con un error menor que $0,005$.

(c) Determine los valores de α para los cuales la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n}\right)^{\alpha}$ es convergente.

(d) Analizar la convergencia de las siguientes series.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n^{\alpha}}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{(n+1)}}$.

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)\,[\,\ln(\ln(n))\,]^{\alpha}}$, $\alpha>0$.

(e) Dada la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\,[\,\ln(n+1)\,]^2}$.

a) Aplique el criterio de la integral para demostrar que la serie converge.

b) Determine el número de términos N que se necesitan, para calcular la suma S de la serie por medio de la suma parcial S_n con dos cifras decimales exactas.

(f) Calcule la suma de las series

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{-1+4n^2}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+5^n}{n(n+1)5^n}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

(g) Utilice la igualdad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$, para calcular el número de términos de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ que son necesarios para obtener una aproximación de π^4, con tres decimales exactos.

Criterio de Raabe

(h) Resolver aplicando el criterio de Raabe las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2{\cdot}4\cdots(2n)}{3{\cdot}5\cdots(2n+1)}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2{\cdot}4\cdots(2n)}{5{\cdot}7\cdots(2n+3)}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1{\cdot}2{\cdot}3\cdots n}{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}+1\right)\left(\frac{1}{k}+2\right)\cdots\left(\frac{1}{k}+n-1\right)}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1{\cdot}3{\cdot}5\cdots(-1+2n)}{2{\cdot}4{\cdot}6\cdots(2n)} \cdot \frac{1}{1+2n}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^k{\cdot}4^k\cdots(2n)^k}{4{\cdot}7\cdots(3n+1)}$, $k \in \mathbb{R}$.

Soluciones ejercicios semanas No.11-12: Series numéricas
Prof. Rodolfo Obando

(a) Analizar la convergencia de las siguientes series:

Solución

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+1)^n}{n^{(n+\frac{1}{2})}}$.

Transformemos, inicialmente, la serie dada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+n)^n}{n^{\left(\frac{1}{2}+n\right)}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+n)^n}{n^n \cdot n^{\frac{1}{2}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{n}\right)^n \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}.$$

La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$, la comparamos con la p–serie divergente $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$, aplicando el criterio de comparación en el límite, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}}{\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}} = \mathrm{e}$. Como el límite es finito y positivo, la serie diverge por el criterio aplicado.

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\operatorname{senh}(n)}$.

Escribimos el término a_n de la serie en términos de funciones exponenciales:

$\operatorname{senh} n = \dfrac{-\mathrm{e}^{-n}+\mathrm{e}^n}{2} = \dfrac{-1}{2\mathrm{e}^n} + \dfrac{\mathrm{e}^n}{2} = \dfrac{-1+\mathrm{e}^{2n}}{2\,\mathrm{e}^n}$, luego $a_n = \dfrac{1}{\operatorname{senh} n} = \dfrac{2\,\mathrm{e}^n}{-1+\mathrm{e}^{2n}}$.

Aplicamos el criterio de la raíz: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2\,\mathrm{e}^n}{-1+\mathrm{e}^{2n}}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{e}}{\left(-1+\mathrm{e}^{2n}\right)^{\frac{1}{n}}} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{e}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-1+\mathrm{e}^{2n}\right)^{\frac{1}{n}}}$, el $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-1+\mathrm{e}^{2n}\right)^{\frac{1}{n}}$, lo calculamos aplicando la regla de L'Hôpital.

Sea $\ln y = \left(-1+\mathrm{e}^{2n}\right)^{\frac{1}{n}} \Longrightarrow \ln y = \dfrac{1}{n}\left[\ln(-1+\mathrm{e}^{2n})\right]$, ahora calculamos el $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\left[\ln(-1+\mathrm{e}^{2n})\right]$ (forma indeterminada $0\cdot\infty$).

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\ln(-1+\mathrm{e}^{2n})\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(-1+\mathrm{e}^{2n})}{n} \overbrace{=}^{\frac{\infty}{\infty}} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2\,\mathrm{e}^{2n}}{-1+\mathrm{e}^{2n}}}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\,\mathrm{e}^{2n}}{-1+\mathrm{e}^{2n}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4\,\mathrm{e}^{2n}}{2\,\mathrm{e}^{2n}} = 2, \text{ luego } \ln y = 2 \Longrightarrow y = \mathrm{e}^2.$$

Finalmente, $\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{e}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(-1+\mathrm{e}^{2n}\right)^{\frac{1}{n}}} = \dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^2} = \dfrac{1}{\mathrm{e}} < 1$ y por el criterio de la raíz la serie converge.

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1+2^n+4^n}{3^n}$.

El n–ésimo término de la serie dada es $a_n = \dfrac{1+2^n+4^n}{3^n}$, luego: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1+2^n+4^n}{3^n}\right) = \infty$, por lo tanto la serie diverge por el criterio de divergencia (criterio del n–ésimo término).

Las respuestas de los ejercicios (d), (e) y (f) se obtienen, analizando para qué valores de a, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a^n n!}{n^n}$ es convergente o divergente. Apliquemos, como primer paso la fórmula de Stirling: $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^n}\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2\pi n}\,\frac{a^n}{n^n}\,\frac{n^n}{\mathrm{e}^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2\pi n}\,\frac{a^n}{\mathrm{e}^n}.$$

Como segundo paso, aplicamos el criterio de la raíz n–ésima.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{2\pi n}\cdot\frac{a^n}{\mathrm{e}^n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\,\sqrt{n\,\pi}\right)^{\frac{1}{n}}\cdot \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^n}{\mathrm{e}^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{2n}}\, n^{\frac{1}{2n}}\, \pi^{\frac{1}{2n}}\cdot\frac{a}{\mathrm{e}}.$$

Luego, $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{2n}} = 2^0 = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \pi^{\frac{1}{2n}} = \pi^0 = 1$. El $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2n}} = 1$. En efecto, por la regla de L'Hôpital tenemos que si, $y = x^{\frac{1}{2x}}$, entonces $\ln y = \dfrac{1}{2x}\ln x$, luego:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x}\ln x \overbrace{=}^{(0\cdot\infty)} \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{2x} \overbrace{=}^{(\frac{\infty}{\infty})} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x} = 0,$$

$$\lim_{x\to\infty}(\ln y) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2x}\ln x\right) = 0 \implies \lim_{x\to\infty} y = \mathrm{e}^0 = 1.$$

Por lo tanto, como $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{2x}} = 1 \implies \lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2n}} = 1$. Finalmente:

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{2n}}\, n^{\frac{1}{2n}}\, \pi^{\frac{1}{2n}}}_{1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{a}{\mathrm{e}} = \frac{a}{\mathrm{e}} \implies \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n} \text{ converge, si } \frac{a}{\mathrm{e}} < 1 \implies a < \mathrm{e} \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n} \text{ diverge, si } \frac{a}{\mathrm{e}} > 1 \implies a > \mathrm{e}. \end{cases}$$

Si $a = \mathrm{e}$, tenemos que, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n\,n!}{n^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\mathrm{e}^n n!}{n^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\mathrm{e}^n}{n^n}\,\dfrac{n^n}{\mathrm{e}^n}\sqrt{2\pi n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{2\pi n}$, y por el criterio del n–ésimo término la última serie diverge ya que $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2\pi n} = \infty$. Por lo tanto la serie del ejercicio (d) diverge, la serie del ejercicio (e) converge y la serie del ejercicio (f) diverge.

(b) Dadas las series $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{sen}\dfrac{1}{n}$, explique si las series dadas convergen en forma absoluta o condicional. Determine el número de términos necesarios para calcular las sumas de las series dada con un error menor que $0,005$.

Solución

a) Analicemos la convergencia absoluta de la serie dada. Recordemos que una serie $\sum a_n$, converge en forma absoluta si converge $\sum |a_n|$. Luego, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{\ln(1+n)}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln(1+n)}$.

La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln(1+n)}$, la comparamos con la serie divergente $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln(n)}$, aplicando el criterio de comparación en el límite (y la regla de L'Hôpital),

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{\ln(1+x)}}{\dfrac{1}{\ln x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\ln(1+x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{1+x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+x}{x} = 1,$$

como el límite es igual a 1 se concluye que la serie no converge en forma absoluta.

Sin embargo la serie converge en forma condicional por el criterio de series alternadas. En efecto, la desigualdad $a_{n+1}<a_n \Longrightarrow \dfrac{1}{\ln(2+n)}<\dfrac{1}{\ln(1+n)}$, se cumple para todo $n\geq 1$, además $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\ln(1+n)} = 0$.

Para determinar el número de términos necesarios para calcular la suma de la serie dada con un error menor que $0,005$, por ser una serie alternada, aplicamos la fórmula $|S-S_N|\leq a_{N+1} = \dfrac{1}{\ln(2+N)} \leq 0,005 \Longrightarrow \ln(2+N)\geq \dfrac{1}{0,005} \Longrightarrow \ln(2+N)\geq 200 \Longrightarrow e^{\ln(2+N)}\geq e^{200} \Longrightarrow 2+N\geq e^{200} \Longrightarrow N\geq -2+e^{200} \Longrightarrow N\geq 7,22597{\cdot}10^{86}$.

b) La serie dada no converge en forma absoluta ya que si comparamos la serie dada con la serie divergente $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$, aplicando el criterio de comparación en el límite, tenemos:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|(-1)^n\,\sin\dfrac{1}{n}\right|}{\dfrac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{-\dfrac{1}{n^2}\cos\dfrac{1}{n}}{-\dfrac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\cos\frac{1}{n} = 1\neq 0.$$

Como el límite existe y es finito la serie dada diverge. La serie converge en forma condicional ya que la desigualdad $\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{1+n}\right) < \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{n}\right)$, se cumple para todo $n\geq 1$, además $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$.

Para determinar el número de términos necesarios para calcular la suma de la serie dada con un error menor que $0,005$, por ser una serie alternada, aplicamos la fórmula $|S-S_N|\leq a_{N+1} = \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{1+N}\right) \leq 0,005 \Longrightarrow \dfrac{1}{1+N} \leq \operatorname{arcsen}(0,005) \Longrightarrow \dfrac{1}{1+N} \leq 0,31831 \Longrightarrow 1+N \geq 3,1416 \Longrightarrow N\geq 3,1416-1 = 2,1416 \Longrightarrow N\geq 2$.

(c) Determine los valores de α para los cuales la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n}\right)^{\alpha}$ es convergente.

Solución Para analizar la convergencia de la serie dada aplicamos la fórmula:

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$, entonces:

$$(n+2)^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}} = \frac{((n+2)^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}})((n+2)^{\frac{2}{3}} + (n+2)^{\frac{1}{3}} \cdot n^{\frac{1}{3}} + n^{\frac{2}{3}})}{(n+2)^{\frac{2}{3}} + (n+2)^{\frac{1}{3}} \cdot n^{\frac{1}{3}} + n^{\frac{2}{3}}} =$$

$$\frac{(n+2) + (n+2)^{\frac{2}{3}} \cdot n^{\frac{1}{3}} + (n+2)^{\frac{1}{3}} \cdot n^{\frac{2}{3}} - (n+2)^{\frac{2}{3}} \cdot n^{\frac{1}{3}} - (n+2)^{\frac{1}{3}} \cdot n^{\frac{2}{3}} - n}{(n+2)^{\frac{2}{3}} + (n+2)^{\frac{1}{3}} \cdot n^{\frac{1}{3}} + n^{\frac{2}{3}}} =$$

$$\frac{n+2-n}{((n+2)^{\frac{2}{3}} + (n+2)^{\frac{1}{3}} \cdot n^{\frac{1}{3}} + n^{\frac{2}{3}}} = \frac{2}{(n^2+4n+4)^{\frac{1}{3}} + (n^2+n)^{\frac{1}{3}} + n^{\frac{2}{3}}} =$$

$$\frac{2}{n^{\frac{2}{3}}\left(\left(1 + \frac{4}{n} + \frac{4}{n^2}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}} + 1\right)}$$ y si $n \to \infty$, entonces:

$$\left((n+2)^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}}\right)^{\alpha} = \left[\frac{2}{n^{\frac{2}{3}}\left[\left(1 + \frac{4}{n} + \frac{4}{n^2}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}} + 1\right]}\right]^{\alpha} \sim \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}\right)^{\alpha}.$$

Luego, $\left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}\right)^{\alpha}$ es una p–serie la cual converge si y sólo si $\frac{2\alpha}{3} > 1 \Longrightarrow \alpha > \frac{3}{2}$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+2)^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{3}}\right]^{\alpha}$ también converge para $\alpha > \frac{3}{2}$.

(d) Analizar la convergencia de las siguientes series.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n^{\alpha}}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{(n+1)}}$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n) \left[\ln(\ln(n))\right]^{\alpha}}$, $\alpha > 0$.

Solución

a) Multiplicamos el n–ésimo término de la serie dada por el conjugado del numerador y si $n \to \infty$,

$$\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n^{\alpha}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n^{\alpha}} \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \frac{n+1-(n-1)}{n^{\alpha}\left[\sqrt{(n+1)} + \sqrt{(n-1)}\right]} =$$

$$\frac{2}{n^{\alpha}\left[\sqrt{(n+1)} + \sqrt{(n-1)}\right]} = \frac{2}{n^{\alpha} \cdot n^{\frac{1}{2}}\left[(1+n^{-1})^{\frac{1}{2}} + (1-n^{-1})^{\frac{1}{2}}\right]} \sim \frac{2}{2\, n^{\alpha} \cdot n^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{n^{\alpha} \cdot n^{\frac{1}{2}}}.$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha} \cdot n^{\frac{1}{2}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha + \frac{1}{2}}}$ es una p–serie, la cual converge si $\alpha + \frac{1}{2} > 1 \Longrightarrow \alpha > \frac{1}{2}$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n^{\alpha}}$ también converge para, $\alpha > \frac{1}{2}$.

Simplifiquemos el $n-$ésimo término de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{(n+1)}}$,

$$a_n = \frac{(n+1)^n}{n^{(n+1)}} = \frac{(n+1)^n}{n^n \cdot n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n},$$

si $n \to \infty$,

$$a_n = \frac{(n+1)^n}{n^{(n+1)}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} \sim e\cdot \frac{1}{n}\,.$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, es la serie armónica la cual diverge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{(n+1)}}$ diverge por el criterio de comparación en el límite. En efecto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(1+n)^n}{n^{(1+n)}}}{\dfrac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \cdot \dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n}} = e \neq 0,$$

como el límite es finito la serie dada diverge por el criterio aplicado.

Para analizar la convergencia de esta serie aplicamos inicialmente el criterio de la integral para la serie $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)\ln[\,\ln(n)\,]}$.

La función $f(x) = \frac{1}{x\,\ln x\,\ln(\ln x)}$ es continua, positiva para $x \geq 3$ y decreciente ya que su primer derivada es $f'(x) = -\frac{1}{x^2\ln^2 x\ln^2(\ln x)} - \frac{1}{x^2\ln^2 x\,\ln(\ln x)} - \frac{1}{x^2\,\ln x\,\ln(\ln x)} = -\frac{1+\ln(\ln x)+\ln x\,\ln(\ln x)}{x^2\ln^2 x\ln^2(\ln^2 x)} < 0.$

Como $f(x)$ satisface las condiciones del criterio de la integral, entonces si la integral impropia $\int_3^{\infty} \frac{dx}{x\,\ln x\,\ln(\ln x)}$ converge, también converge la serie $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)\ln[\,\ln(n)\,]}$.

Ahora, hacemos la sustitución $u = \ln(\ln x) \Longrightarrow du = \frac{dx}{x\ln x}$. Los nuevos límites de integración son $u_0 = \ln(\ln 3)$ y $u_1 = \ln(\ln b)$.

La integral impropia $\int_{\ln(\ln 3)}^{\ln(\ln b)} \frac{du}{u}$, cuando $b \to \infty$, diverge ya que es una integral λ de primera especie.

Por lo tanto la serie $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)\ln[\,\ln(n)\,]}$ diverge por el criterio de la integral.

En general la integral impropia $\int_{\ln(\ln 3)}^{\ln(\ln b)} \frac{du}{u^{\lambda}}$ converge si $\lambda > 1$ y diverge si $\lambda \leq 1$. Por lo tanto la serie $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)\,[\,\ln(\ln(n))\,]^{\alpha}}$ converge si $\alpha > 1$ y diverge si $\alpha \leq 1$ por el criterio de la integral.

(e) Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\,[\,\ln(n+1)\,]^2}$.

a) Aplique el criterio de la integral para demostrar que la serie converge.

b) Determine el número de términos N que se necesitan, para calcular la suma S de la serie por medio de la suma parcial S_n con dos cifras decimales exactas.

Solución La función $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)\ln^2(x+1)}$ es continua, positiva para $x \geq 1$ y decreciente ya que $y' = \dfrac{-2}{(1+x)^2\ln^3(1+x)} - \dfrac{1}{(1+x)^2\ln^2(1+x)} = \dfrac{-2-\ln(1+x)}{(1+x)^2\ln^3(1+x)} < 0.$

Como $f(x)$ satisface las condiciones del criterio de la integral, entonces si la integral impropia $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)}$ converge, también converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$.

Ahora, hacemos la sustitución $u = \ln(x+1) \Longrightarrow du = \dfrac{dx}{x+1}$. Los nuevos límites de integración son $u_0 = \ln 2$ y $u_1 = \ln(b+1)$.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)} = \lim_{b\to\infty}\left[\int_1^b \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)}\right] = \lim_{b\to\infty}\left[\int_{\ln 2}^{\ln(b+1)} \frac{du}{u^2}\right]$$
$$= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{u}\Bigg|_{\ln 2}^{\ln(b+1)}\right) = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{\ln(b+1)}\right] + \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}\,.$$

Como la integral converge entonces la serie dada también converge por el criterio de la integral.

Para calcular el número de términos de la serie dada, que son necesarios para calcular la suma S por medio de S_n con dos cifras decimales exactas, aplicamos la fórmula del resto R para series que se analizan por medio del criterio de la integral, esto es:

$$R = S - S_n = \int_n^\infty \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+2)} = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{u}\Bigg|_{\ln(n+1)}^{\ln(b+1)}\right) = \frac{1}{\ln(n+1)}\,.$$

Luego, $R = \dfrac{1}{\ln(n+1)} \leq 0,005 \Longrightarrow \ln(n+1) \geq 200 \Longrightarrow \mathrm{e}^{\ln(n+1)} \geq \mathrm{e}^{200} \Longrightarrow n+1 \geq \mathrm{e}^{200}$, entonces el número de términos que se necesitan es $n \geq \mathrm{e}^{200} - 1$.

(f) Calcule la suma de las series

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{-1+4n^2}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+5^n}{n(n+1)5^n}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Solución

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{-1+4n^2}$.

Por el método de fracciones parciales tenemos $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{-1+4n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{-1+2\,n} - \frac{1}{1+2\,n}\right)$.

Ahora S_n puede escribirse en forma telescópica, para esto calculamos algunas sumas parciales:

$S_1 = \left(1 - \dfrac{1}{3}\right)$,

$S_2 = \left(1 - \dfrac{1}{3}\right) + \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{5}\right),$
$S_3 = \left(1 - \dfrac{1}{3}\right) + \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{5}\right) + \left(\dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7}\right),$
$S_4 = \left(1 - \dfrac{1}{3}\right) + \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{5}\right) + \left(\dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7}\right) + \left(\dfrac{1}{7} - \dfrac{1}{9}\right),$
$\vdots$
$S_n = \left(1 - \dfrac{1}{3}\right) + \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\dfrac{1}{-1+2\,n} - \dfrac{1}{1+2\,n}\right) = 1 - \dfrac{1}{1+2\,n}.$

Luego la serie converge ya que la suma de la serie es igual a 1.

En efecto, $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1 - \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+2\,n} = 1.$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+5^n}{n(n+1)5^n}.$

La serie dada la podemos escribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n+n+n^2}{5^n\,n\,(1+n)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n+(n+n^2)}{5^n\,n\,(1+n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+n^2}{5^n\,n\,(1+n)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{5^n\,n\,(1+n)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(1+n)}\,,\end{aligned}$$

La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n$ es una serie geométrica convergente, puesto que la razón $r = \dfrac{1}{5} < 1$, luego su suma es: $S = \dfrac{a}{1-r} = \dfrac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} = \dfrac{1}{4}.$

El n–ésimo término de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(1+n)}$, por el método de fracciones parciales, lo expresamos de la siguiente manera: $a_n = \dfrac{1}{n\,(1+n)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{1+n}$, ahora la suma S_n puede escribirse en forma telescópica:

$S_1 = 1 - \dfrac{1}{2}$
$S_2 = \left(1 - \dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\right)$
$S_2 = \left(1 - \dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\right) + \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}\right)$
$\vdots$
$S_n = \left(\dfrac{1-1}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\right) + \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{1+n}\right) = 1 - \dfrac{1}{1+n}\,,$

luego la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(1+n)}$ es $S = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{1+n}\right) = 1.$

Finalmente, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^n + n + n^2}{5^n\, n\,(1+n)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{5}\right)^n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\,(1+n)} = \dfrac{1}{4} + 1 = \dfrac{5}{4}$. c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es una p–serie convergente ($p = 2 > 1$), por lo tanto tiene suma. Demostraremos que su suma S es igual a $\dfrac{\pi^2}{6}$.

Evaluamos inicialmente la integral:

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arcsen}(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\operatorname{arcsen}(x)^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{\pi^2}{8}. \tag{9.1}$$

La función $f(x) = \operatorname{arcsen} x$ se puede escribir de la siguiente forma:

$$\operatorname{arcsen} x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = x + \sum_1^{\infty} \frac{1{\cdot}3{\cdot}5\cdots(-1+2\,n)}{2{\cdot}4{\cdot}6\cdots(2\,n)} \cdot \frac{x^{1+2\,n}}{1+2\,n}, \tag{9.2}$$

(en el ejercicio 9 de series de potencias se demuestra como obtener este desarrollo).

Sustituimos el desarrollo del $\operatorname{arcsen} x$ en la integral (9.1)

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1{\cdot}3{\cdot}5\cdots(-1+2\,n)}{2{\cdot}4{\cdot}6\cdots(2\,n)} \cdot \frac{1}{1+2n} \cdot \underbrace{\int_0^1 - \frac{x^{1+2n}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx}_{I_1} = \frac{\pi^2}{8}\,. \tag{9.3}$$

Ahora deducimos una fórmula de reducción para evaluar la integral I_1:

$$\int \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int x^{2n}\,\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\;dx.$$

Sea $u = x^{2\,n}$, $dv = \dfrac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $du = 2\,n\,x^{2n-1}\,dx$, $v = -\sqrt{1-x^2}$, integrando por partes tenemos:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\;dx &= -x^{2\,n}\sqrt{1-x^2} + 2\,n\int x^{2n-1}\sqrt{1-x^2}\,dx \\
&= -x^{2\,n}\sqrt{1-x^2} + 2\,n\int x^{2n-1}\,\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\;dx \\
&= -x^{2\,n}\sqrt{1-x^2} + 2\,n\int \frac{x^{2n-1}}{\sqrt{1-x^2}}\;dx - 2\,n\int \frac{x^{2n-1}\,x^2}{\sqrt{1-x^2}}\;dx \\
&= -x^{2\,n}\sqrt{1-x^2} + 2\,n\int \frac{x^{2n-1}}{\sqrt{1-x^2}}\;dx - 2\,n\int \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\;dx,
\end{aligned}$$

Sumando las integrales iguales deducimos:

$(1+2n)\displaystyle\int \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -x^{2\,n}\sqrt{1-x^2} + 2\,n\int \frac{x^{2n-1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ y finalmente:

$$\int \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\;dx = \frac{-x^{2\,n}\sqrt{1-x^2}}{1+2\,n} + \frac{2\,n}{1+2\,n}\int \frac{x^{2n-1}}{\sqrt{1-x^2}}\;dx.$$

Para $n = 1, 2, 3, \ldots$ tenemos que

$$\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left.\frac{-x^{2\,n}\sqrt{1-x^2}}{1+2\,n}\right|_0^1 + \frac{2\,n}{1+2\,n}\int_0^1 \frac{x^{2\,n-1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{2{\cdot}4{\cdot}6\cdots(2\,n)}{1{\cdot}3{\cdot}5\cdots(1+2\,n)}\,.$$

La última expresión la sustituimos en la fórmula (3)

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1{\cdot}3{\cdot}5\cdots(-1+2\,n)}{2{\cdot}4{\cdot}6\cdots(2\,n)}\cdot\frac{2{\cdot}4{\cdot}6\cdots(2\,n)}{1{\cdot}3{\cdot}5\cdots(1+2\,n)}\cdot\frac{1}{1+2\,n} =$$

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2\,n)!}{(1+2\,n)(2\,n)!}\cdot\frac{1}{1+2\,n} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+2\,n)^2} = \frac{\pi^2}{8} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+2\,n)^2} = \frac{\pi^2}{8}-1. \quad (9.4)$$

Escribamos la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ de la siguiente manera $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots$, los términos de la derecha los podemos reagrupar de la siguiente forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots+\frac{1}{(-1+2\,n)^2}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots+\frac{1}{(2\,n)^2}\right),$$

luego

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-1 = \left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots+\frac{1}{(1+2\,n)^2}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots+\frac{1}{(2\,n)^2}\right),$$

o en forma compacta

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+2\,n)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2\,n)^2} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-1-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+2\,n)^2}\,,$$

ahora bien, por la fórmula (9.4) tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-1 = \frac{\pi^2}{8}-1$ y simplificando $\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Hemos demostrado así que la suma de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ es igual a $\dfrac{\pi^2}{6}$.

(g) Considere la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{n+2}-\frac{1}{n+4}\right)$, determine el valor de la constante a, para el cual la serie dada converge y calcule su suma.

Solución La serie es telescópica y para calcular el valor de la constante a procedemos de la siguiente manera: $a_n = \dfrac{a}{2+n}-\dfrac{1}{4+n} = \dfrac{-2+4\,a-n+a\,n}{(2+n)\,(4+n)} = \dfrac{-2+4\,a+(-1+a)\,n}{(2+n)\,(4+n)}$, para que la serie sea telescópica a, tiene que ser igual a 1.

En efecto, $a_n = \dfrac{-2+4\,a+(-1+a)\,n}{(2+n)\,(4+n)} = \dfrac{2}{(2+n)\,(4+n)} = \dfrac{1}{2+n}-\dfrac{1}{4+n}$.

(h) Para calcular la suma de la serie calculamos algunas sumas parciales:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\\
S_2 &= \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)\\
S_3 &= \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)\\
S_4 &= \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)\\
&\vdots\\
S_n &= \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\frac{1}{2+n}-\frac{1}{4+n}=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{3+n}-\frac{1}{4+n}\\
&=\frac{7}{12}-\frac{1}{3+n}-\frac{1}{4+n}.
\end{aligned}$$

Luego, la suma de la serie es $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{7}{12}-\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3+n}-\frac{1}{4+n}\right)=\frac{7}{12}.$

(i) Utilice la igualdad $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$, para calcular el número de términos de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ que son necesarios para obtener una aproximación de π^4, con tres decimales exactos.

Solución La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$, es una $p-$serie, entonces el error R lo calculamos por medio de la siguiente fórmula $R=S-S_n=\int_n^{\infty}\frac{dx}{x^4}=\frac{1}{3n^3}$, como se pide una aproximación de π^4 con tres decimales exactos, tenemos $R=\frac{1}{3n^3}\leq 0,0005\Longrightarrow 3n^3\geq 2000\Longrightarrow n^3\geq 666,667\Longrightarrow n\geq 8,735\approx 9$, luego $S_9=\sum\limits_{n=1}^{9}\frac{1}{n^4}=1,08194$. Por condición del ejercicio, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}=S$ y aplicando la fórmula de resto $S=S_9+\int_n^{\infty}\frac{dx}{x^4}=S_9+\frac{1}{3n^3}$, tenemos:

$$\frac{\pi^4}{90}\approx 1,08194+\frac{1}{3{\cdot}9^3}\Longrightarrow \pi^4\approx 90\left(1,08194+\frac{1}{3{\cdot}9^3}\right)=97,4154.$$

El valor de π^4 con tres decimales exactos es de $97,415$.

9.1 Criterio de Raabe

(j) Resolver aplicando el criterio de Raabe las siguientes series:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2{\cdot}4\cdots(2n)}{3{\cdot}5\cdots(2n+1)}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2{\cdot}4\cdots(2n)}{5{\cdot}7\cdots(2n+3)}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1{\cdot}2{\cdot}3\cdots n}{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}+1\right)\left(\frac{1}{k}+2\right)\cdots\left(\frac{1}{k}+n-1\right)}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1{\cdot}3{\cdot}5\cdots(-1+2n)}{2{\cdot}4{\cdot}6\cdots(2n)}\cdot\frac{1}{1+2n}$

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^k{\cdot}4^k\cdots(2n)^k}{4{\cdot}7\cdots(3n+1)}$, $k\in\mathbb{R}$.

Solución Recordemos que si $R = \lim_{n\to\infty} n\left[1 - \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\right]$, la serie dada converge si $R > 1$ (puede ser $R = \infty$) y diverge si $R < 1$ (puede ser $R = -\infty$). Si $R = 1$, el criterio no decide.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2{\cdot}4\cdots(2n)}{3{\cdot}5\cdots(2n+1)}$.

$$R = \lim_{n\to\infty} n\left[1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right] = \lim_{n\to\infty} n\left[1 - \frac{\dfrac{\dfrac{2\,n}{1+2\,n}\cdot 2\,(1+n)}{1+2\,(1+n)}}{\dfrac{2\,n}{1+2\,n}}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left[1 - \frac{2\,(1+n)}{1+2(1+n)}\right] = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{3+2\,n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3+2\,n} = \frac{1}{2}\,.$$

Como $R = \dfrac{1}{2} < 1$, entonces la serie dada diverge.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2{\cdot}4\cdots(2n)}{5{\cdot}7\cdots(2n+3)}$.

$$R = \lim_{n\to\infty} n\left[1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right] = \lim_{n\to\infty} n\left[1 - \frac{\dfrac{2\,n}{3+2\,n}\cdot\dfrac{2\,(1+n)}{3+2\,(1+n)}}{\dfrac{2\,n}{3+2\,n}}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left[1 - \frac{2\,(1+n)}{3+2\,(1+n)}\right] = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{3}{5+2\,n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3\,n}{5+2\,n}\right) = \frac{3}{2}.$$

Como $R = \frac{3}{2} > 1$, entonces la serie dada converge.

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1{\cdot}2{\cdot}3\cdots n}{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}+1\right)\left(\frac{1}{k}+2\right)\cdots\left(\frac{1}{k}+n-1\right)}$.

$$R = \lim_{n\to\infty} n\left[1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right] = \lim_{n\to\infty} n\left[1 - \frac{\dfrac{n}{-1+\dfrac{1}{k}+n}\cdot\dfrac{1+n}{\dfrac{1}{k}+n}}{\dfrac{n}{-1+\dfrac{1}{k}+n}}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{1+n}{\dfrac{1}{k}+n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1-k}{1+k\,n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(1-k)\;n}{1+k\,n}\right) = -1 + \frac{1}{k},$$

luego la serie dada converge si $-1 + \dfrac{1}{k} > 1 \Longrightarrow k < \dfrac{1}{2}$, diverge si $-1 + \dfrac{1}{k} < 1 \Longrightarrow k > \dfrac{1}{2}$ y si $k = \dfrac{1}{2}$ tenemos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1{\cdot}2{\cdot}3\cdots n}{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}+1\right)\left(\frac{1}{k}+2\right)\cdots\left(\frac{1}{k}+n-1\right)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1{\cdot}2{\cdot}3\cdots n}{\frac{1}{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}+1\right)\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}+2\right)\cdots\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}+n-1\right)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1{\cdot}2{\cdot}3\cdots n}{2{\cdot}3{\cdot}4\cdots(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}\,,$$

y se concluye que la serie diverge.

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1{\cdot}3{\cdot}5\cdots(-1+2n)}{2{\cdot}4{\cdot}6\cdots(2n)} \cdot \frac{1}{1+2n}$.

$$R = \lim_{n\to\infty} n\left[1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right] = \lim_{n\to\infty} n\left[1 - \frac{\frac{-1+2n}{2n}\,\frac{2(1+n)-1}{2(1+n)}\cdot\frac{1}{2(1+n)+1}}{\frac{-1+2n}{2n}\cdot\frac{1}{1+2n}}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{1+4\,n+4\,n^2}{6+10\,n+4\,n^2}\right) \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{5+6\,n}{2\,\left(3+5\,n+2\,n^2\right)}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n\,\left(5+6\,n\right)}{2\,\left(3+5\,n+2\,n^2\right)} = \frac{3}{2} > 1,$$

por lo tanto la serie converge.

e) $R = \displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left[1 - \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{(2+2n)^k}{(4+3n)}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n+3n^2-n(2+2n)^k}{4+3n}\right)$.

– Si $k<1$, $\displaystyle\frac{4n+3n^2-n(2+2n)^k}{4+3n} = \frac{4+3n-n^k(2+2/n)^k}{3+4/n} \longrightarrow +\infty$ y la serie converge.

– Si $k=1$, $\displaystyle\frac{4n+3n^2-n(2+2n)}{4+3n} = \frac{n^2+2n}{3n+4} \longrightarrow +\infty$ y la serie converge.

– Si $k>1$, $\displaystyle\frac{4n+3n^2-n^{k+1}(2+2/n)}{4+3n} = \frac{4+3n-n^k(2+2/n)^k}{3+4/n} \longrightarrow -\infty$ y la serie diverge.

Ejercicios semanas No.11-12 a) : Series numéricas
Prof. Luis G. Fernández

(a) Valiéndose del criterio de D'Alembert investigue la convergencia de la serie

$$\frac{2}{1} + \frac{2{\cdot}5}{1{\cdot}5} + \frac{2{\cdot}5{\cdot}8}{1{\cdot}5{\cdot}9} + \cdots + \frac{2{\cdot}5{\cdot}8\cdots(3n-1)}{1{\cdot}5{\cdot}9\cdots(4n-3)} + \cdots$$

(b) Utilizando el criterio de Cauchy, investigue la convergencia de la siguiente serie:

$$\frac{3}{3} + \left(\frac{6}{5}\right)^2 + \left(\frac{9}{7}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{3n}{2n+1}\right)^n + \cdots$$

(c) Investigar la convergencia de la serie $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln^2 n}$.

(d) Comprobar que la suma de la serie $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\log\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n (1+n)\right]}{\log n^n \log(n+1)^{(n+1)}}$ es $\log_2 \sqrt{e}$.

(e) Hallar la suma de la serie $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(n-1)(n+1)}{n!}$ sabiendo que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} = e^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Suponga que se puede trabajar con series infinitas como si fueran sumas finitas.

(f) Sea f una función real, monótona, creciente y acotada en el intervalo $[\,0,1\,]$. Definamos dos sucesiones $\{S_n\}$ y $\{t_n\}$ del siguiente modo: $S_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$, $t_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

a) Demostrar que $S_n \le \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx \le t_n$ y que $0 \le \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx - S_n \le \frac{f(1)-f(0)}{n}$.

b) Demostrar que las sumas $\{S_n\}$ y $\{t_n\}$ convergen ambas hacia el límite $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

(g) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n^2+k^2}$.

(h) Estudiar la convergencia de la serie alternada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$.

10. **Criterio de Raabe** Resolver aplicando el criterio de Raabe los siguientes ejercicios:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2{\cdot}4\cdots(2n)}{3{\cdot}5\cdots(2n+1)}$.

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2{\cdot}4\cdots(2n)}{5{\cdot}7\cdots(2n+3)}$.

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1{\cdot}2{\cdot}3\cdots n}{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}+1\right)\left(\frac{1}{k}+2\right)\cdots\left(\frac{1}{k}+n-1\right)}$.

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1{\cdot}3{\cdot}5\cdots(-1+2n)}{2{\cdot}4{\cdot}6\cdots(2n)} \cdot \dfrac{1}{1+2n}$.

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^k{\cdot}4^k\cdots(2n)^k}{4{\cdot}7\cdots(3n+1)}$, $k \in \mathbb{R}$.

Soluciones ejercicios semanas No.11-12 a): Series numéricas
Prof. Luis G. Fernández

1. Valiéndose del criterio de D'Alembert investigue la convergencia de la serie
$$\frac{2}{1}+\frac{2{\cdot}5}{1{\cdot}5}+\frac{2{\cdot}5{\cdot}8}{1{\cdot}5{\cdot}9}+\cdots+\frac{2{\cdot}5{\cdot}8\cdots(3n-1)}{1{\cdot}5{\cdot}9\cdots(4n-3)}+\cdots$$

2. Utilizando el criterio de Cauchy, investigue la convergencia de la siguiente serie:
$$\frac{3}{3}+\left(\frac{6}{5}\right)^2+\left(\frac{9}{7}\right)^3+\cdots+\left(\frac{3n}{2n+1}\right)^n+\cdots$$

3. Investigar la convergencia de la serie $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$.

4. Comprobar que la suma de la serie $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\log\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n(1+n)\right]}{\log n^n\,\log(n+1)^{(n+1)}}$ es $\log_2\sqrt{e}$.

5. Hallar la suma de la serie $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(n-1)(n+1)}{n!}$ sabiendo que $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$, para todo $x\in\mathbb{R}$. Suponga que se puede trabajar con series infinitas como si fueran sumas finitas.

6. Sea f una función real, monótona, creciente y acotada en el intervalo $[\,0,1\,]$. Definamos dos sucesiones $\{S_n\}$ y $\{t_n\}$ del siguiente modo: $S_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)$, $t_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$.

   a) Demostrar que $S_n\le\int_0^1 f(x)\,dx\le t_n$ y que $0\le\int_0^1 f(x)\,dx-S_n\le\frac{f(1)-f(0)}{n}$.

   b) Demostrar que las sumas $\{S_n\}$ y $\{t_n\}$ convergen ambas hacia el límite $\int_0^1 f(x)\,dx$.

7. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$.

8. Estudiar la convergencia de la serie alternada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$.

9. **Criterio de Raabe** Resolver aplicando el criterio de Raabe los siguientes ejercicios:

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2{\cdot}4\cdots(2n)}{3{\cdot}5\cdots(2n+1)}$.

   b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2{\cdot}4\cdots(2n)}{5{\cdot}7\cdots(2n+3)}$.

   c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1{\cdot}2{\cdot}3\cdots n}{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}+1\right)\left(\frac{1}{k}+2\right)\cdots\left(\frac{1}{k}+n-1\right)}$.

   d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1{\cdot}3{\cdot}5\cdots(-1+2n)}{2{\cdot}4{\cdot}6\cdots(2n)}\cdot\frac{1}{1+2n}$.

   e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^k{\cdot}4^k\cdots(2n)^k}{4{\cdot}7\cdots(3n+1)}$, $k\in\mathbb{R}$.

1. Valiéndose del criterio de D'Alembert investigue la convergencia de la serie
$$\frac{2}{1}+\frac{2{\cdot}5}{1{\cdot}5}+\frac{2{\cdot}5{\cdot}8}{1{\cdot}5{\cdot}9}+\cdots+\frac{2{\cdot}5{\cdot}8\cdots(3n-1)}{1{\cdot}5{\cdot}9\cdots(4n-3)}+\cdots$$

Solución Para aplicar el criterio de D'Alembert, $a_n > 0$ a partir de un $n = n_0$, basta con $n_0 = 1$. Ahora calculamos $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{2{\cdot}5{\cdot}8\cdots(3n-1)(3n+2)}{1{\cdot}5{\cdot}9\cdots(4n-3)(4n+1)}}{\dfrac{2{\cdot}5{\cdot}8\cdots(3n-1)}{1{\cdot}5{\cdot}9\cdots(4n-3)}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+2}{4n+1} = \dfrac{3}{4}$.

Como el límite es menor que 1, entonces la serie converge.

2. Utilizando el criterio de Cauchy, investigue la convergencia de la siguiente serie:

$$\frac{3}{3} + \left(\frac{6}{5}\right)^2 + \left(\frac{9}{7}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{3n}{2n+1}\right)^n + \cdots$$

Solución Como $a_n \geq 0$, a partir de $n = 1$, se puede aplicar el criterio de Cauchy. Así, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n}{2n+1}\right)^{\frac{n}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n}{2n+1} = \dfrac{3}{2}$ y como el límite es mayor que 1, la serie diverge.

3. Investigar la convergencia de la serie $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln^2 n}$.

Solución Si hacemos $f(x) = \dfrac{1}{x\ln^2 x}$, se observa claramente que f es decreciente, por lo tanto para $n \geq 2$ podemos aplicar el criterio de la integral. Así $t_n = \displaystyle\int_2^n \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx$; haciendo $u = \ln x \Longrightarrow du = \dfrac{1}{x}\,dx$, si $x = 2$, $u = \ln 2$ y cuando $x = n$, $u = \ln n$. Sustituyendo, $t_n = \displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln n} \frac{1}{u^2}\,du \Longrightarrow t_n = -\frac{1}{u}\Big|_{\ln 2}^{\ln n} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln n}$.

Así $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{\ln 2} - \dfrac{1}{\ln n}\right) = \dfrac{1}{\ln 2}$; como la sucesión t_n converge, se concluye que la serie $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln^2 n}$ converge.

4. Comprobar que la suma de la serie $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\log\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n (1+n)\right]}{\log n^n \log(n+1)^{(n+1)}}$ es $\log_2 \sqrt{\mathrm{e}}$.

Solución La serie $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\log\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n (n+1)\right]}{\log n^n \log(n+1)^{(n+1)}} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\log\left[\left(1+\dfrac{n+1}{n}\right)^n (n+1)\right]}{\log n^n \log(n+1)^{(n+1)}} =$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log\left(\dfrac{(n+1)^(n+1)}{n^n}\right)}{\log n^n \log(n+1)^{(n+1)}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log(n+1)^(n+1) - \log n^n}{\log n^n \log(n+1)^{(n+1)}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n^n} - \frac{1}{\log(n+1)^(n+1)}$$

(por la propiedad telescópica) $= \dfrac{1}{\log 2^2} - \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\log(n+1)^(n+1)} = \dfrac{1}{2\log 2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\dfrac{\log_2 2}{\log_2 \mathrm{e}}} = \dfrac{1}{2}\log_2 \mathrm{e} = \log_2 \sqrt{\mathrm{e}}$.

5. Hallar la suma de la serie $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(n-1)(n+1)}{n!}$ sabiendo que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Suponga que se puede trabajar con series infinitas como si fueran sumas finitas.

Solución Dado que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$, dividiendo por x a ambos lados, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{n-1}}{n!} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$, si derivamos ambos lados, $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(n-1)x^{n-2}}{n!} = \dfrac{xe^x - e^x}{x^2}$,

si multiplicamos por x^3 a ambos lados $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(n-1)x^{n+1}}{n!} = \dfrac{xe^x - e^x}{x}$,

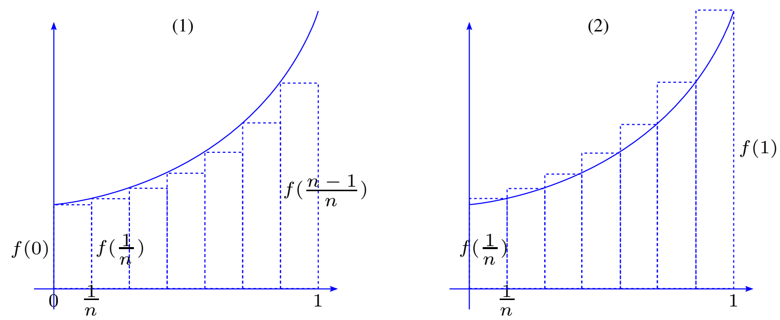
derivando ambos lados $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(n-1)(n+1)x^{n}}{n!} = \dfrac{x^2e^x - xe^x + e^x}{x^2}$

y si $x = 1$ se tiene que $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(n-1)(n+1)}{n!} = \mathrm{e}$.

6. Sea f una función real, monótona, creciente y acotada en el intervalo $[\,0,1\,]$. Definamos dos sucesiones $\{S_n\}$ y $\{t_n\}$ del siguiente modo: $S_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$, $t_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

a) Demostrar que $S_n \leq \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx \leq t_n$ y que $0 \leq \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx - S_n \leq \dfrac{f(1)-f(0)}{n}$.

Solución Sin pérdida de generalidad considere la suma de las siguientes sumas escalonadas de la función $f(x)$.



El intervalo $[\,0,1\,]$ se divide en n intervalos iguales de tamaño $\dfrac{1-0}{n} = \dfrac{1}{n}$, así la suma de los rectángulos de la primera gráfica es:

$f(0)\cdot\frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} + \cdots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (*)$,

mientras que la suma de los rectángulos de la segunda gráfica es:

$f\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} f\left(\frac{2}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} + \cdots + f(1)\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (**)$

y como el área bajo la curva es $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$, se observa que

$\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx \leq \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$, o sea $S_n \leq \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx \leq t_n$.

Si restamos S_n a los lados de la desigualdad se tiene:

$0 \leq \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx - S_n \leq t_n - S_n$, pero como $t_n - S_n = (**) - (*) \Longrightarrow t_n - S_n = f(1)\frac{1}{n} - f(0)\frac{1}{n} = \dfrac{f(1)-f(0)}{n}$.

b) Demostrar que las sumas $\{S_n\}$ y $\{t_n\}$ convergen ambas hacia el límite $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

Solución Como $0 \leq \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx - S_n \leq \frac{f(1)-f(0)}{n}$, cuando $n \to \infty$, $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n$. De igual manera $\dfrac{f(0)-f(1)}{n} \leq \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx - t_n \leq 0 \Longrightarrow 0 \leq t_n - \int_0^1 f(x)\,dx \leq \frac{f(1)-f(0)}{n}$, así cuando $n \to \infty$ tenemos $\displaystyle\lim_{n\to\infty} t_n = \int_0^1 f(x)\,dx$.

7. Calcular $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$.

   Solución Dado que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$, por el ejercicio anterior tomando $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ tenemos:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} \ \therefore\ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \frac{\pi}{4}.$$

8. Estudiar la convergencia de la serie alternada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$.

   Solución Si tomamos el valor absoluto $\left|(-1)^n \dfrac{\ln n}{n}\right| = \left|\dfrac{\ln n}{n}\right| = \dfrac{\ln n}{n}$. Por el criterio de la integral hacemos $t_n = \displaystyle\int_1^n \frac{\ln x}{x} dx$.

   Así $\displaystyle\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} \int_1^n \ln x\, d(\ln x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln^2 x}{2}\Big|_1^n = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln^2 n}{2} = \infty$, es decir la serie diverge absolutamente.

   Aplicando el criterio de Leibniz, se puede ver que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ es convergente ya que es una serie alternada y $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ decrece, pues $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2} < 0, \forall x > \mathrm{e}$ y como $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ se cumplen las condiciones del criterio de Leibniz.

9. **Criterio de Raabe** Resolver aplicando el criterio de Raabe los siguientes ejercicios:

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2{\cdot}4 \cdots (2n)}{3{\cdot}5 \cdots (2n+1)}$.

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2{\cdot}4 \cdots (2n)}{5{\cdot}7 \cdots (2n+3)}$.

   c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1{\cdot}2{\cdot}3 \cdots n}{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}+1\right)\left(\frac{1}{k}+2\right)\cdots\left(\frac{1}{k}+n-1\right)}$.

   d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1{\cdot}3{\cdot}5 \cdots (-1+2n)}{2{\cdot}4{\cdot}6 \cdots (2n)} \cdot \frac{1}{1+2n}$.

   e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^k{\cdot}4^k \cdots (2n)^k}{4{\cdot}7 \cdots (3n+1)}, k \in \mathbb{R}$.

   Solución Recordemos que $R = \displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left[1 - \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\right]$, entonces la serie dada converge si $R > 1$ (puede ser $R = \infty$) y diverge si $R < 1$ (puede ser $R = -\infty$). Si $R = 1$, el criterio no decide.

   a) $R = \displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left[1 - \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty} n\left[1 - \left(\frac{2\,(1+n)}{1+2\,(1+n)}\right)\right] = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{3+2\,n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3+2\,n} =$

$\frac{1}{2} < 1$, entonces la serie dada diverge.

b) $R = \lim\limits_{n\to\infty} n\left[1 - \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\right] = \lim\limits_{n\to\infty} n\left[1 - \left(\dfrac{2\ (1+n)}{3 + 2\ (1+n)}\right)\right] = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{3}{5 + 2\,n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3\,n}{5+2\,n}\right)$

$= \frac{3}{2} > 1$, entonces la serie dada converge.

c) $R = \lim\limits_{n\to\infty} n\left[1 - \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\right] = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(1 - \dfrac{1+n}{\frac{1}{k}+n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{1-k}{1+k\,n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{(1-k)\ n}{1+k\,n}\right) =$
$-1 + \dfrac{1}{k}$, luego la serie dada converge si $-1 + \frac{1}{k} > 1 \Longrightarrow k > \frac{1}{2}$, diverge si $-1 + \frac{1}{k} < 1 \Longrightarrow k < \frac{1}{2}$ y si $k = \frac{1}{2}$ tenemos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1{\cdot}2{\cdot}3\cdots n}{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}+1\right)\left(\frac{1}{k}+2\right)\cdots\left(\frac{1}{k}+n-1\right)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1{\cdot}2{\cdot}3\cdots n}{\dfrac{1}{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{\frac{1}{2}}+1\right)\left(\dfrac{1}{\frac{1}{2}}+2\right)\cdots\left(\dfrac{1}{\frac{1}{2}}+n-1\right)} =$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1{\cdot}2{\cdot}3\cdots n}{2{\cdot}3{\cdot}4\cdots(n+1)}$, y por el criterio de n–ésimo término $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{1+n} = 1$, se concluye que la serie diverge.

d) $R = \lim\limits_{n\to\infty} n\left[1 - \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\right] = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(1 - \dfrac{1+4n+4n^2}{6+10n+4n^2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{5+6n}{2(3+5n+2n^2)}\right) =$
$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n(5+6n)}{2(3+5n+2n^2)} = \frac{3}{2} > 1$, por lo tanto la serie converge.

e) $R = \lim\limits_{n\to\infty} n\left[1 - \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\right] = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(1 - \dfrac{(2+2n)^k}{(4+3n)}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n+3n^2-n(2+2n)^k}{4+3n}\right)$.

– Si $k < 1$, $\dfrac{4n+3n^2-n(2+2n)^k}{4+3n} = \dfrac{4+3n-n^k(2+2/n)^k}{3+4/n} \longrightarrow +\infty$ y la serie converge.

– Si $k = 1$, $\dfrac{4n+3n^2-n(2+2n)}{4+3n} = \dfrac{n^2+2n}{3n+4} \longrightarrow +\infty$ y la serie converge.

– Si $k > 1$, $\dfrac{4n+3n^2-n^{k+1}(2+2/n)}{4+3n} = \dfrac{4+3n-n^k(2+2/n)^k}{3+4/n} \longrightarrow -\infty$ y la serie diverge.

Tema 10

Ejercicios semanas 13-14: Series de potencias

Prof. Rodolfo Obando

1. Sea $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.

(a) Desarrolle en series de potencias la función $f(x)$, centrada en $x = 0$ y determine su intervalo de convergencia.

(b) A partir de la igualdad $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} = \displaystyle\int_0^x \dfrac{dt}{1-t^2}$, descomponga la función $y = \ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ en series de Maclaurin. Determine su intervalo de convergencia.

2. Dada la siguiente serie de potencias $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n)!x^n}{(n!)^2}$.

(a) Determine el radio de convergencia $f(x)$.

(b) Determine el intervalo de convergencia de $f(x)$.

3. Sea $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1+x)^n}{4^n}$.

(a) Determine el intervalo de convergencia de $f(x)$.

(b) Calcule la suma de $f'(x)$.

4. Sea $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{1+n}\, x^{1+n}}{1+n}$.

(a) Determine el intervalo de convergencia de $f(x)$.

(b) Calcule en forma explícita $f(x)$.

5. Sea $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n\, x^n}{(1+n)!}$.

(a) Determine el radio y el intervalo de convergencia de $f(x)$.

(b) Calcule en forma explícita la suma de $f(x)$.

6. Hallar la serie de Maclaurin para la función $f(x) = \displaystyle\int_0^x \operatorname{sen}(t^2)dt$.

(a) Determine el intervalo de convergencia de $f(x)$.

(b) Calcule el valor de $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{sen}(x^2)dx$ con cuatro cifras decimales exactas.

7. Sea $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(-1+n)!} \cdot x^n$.

(a) Determine el intervalo de convergencia.

(b) Demuestre que: $f(x) = x\mathrm{e}^x$, y que: $\mathrm{e} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n!}$.

8. Sea $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n\,x^{2\,n}}{(1+2\,n)!}$.

(a) Determine el intervalo de convergencia de $f(x)$.

(b) Calcule en forma explícita la suma de $f(x)$.

9. Considere la función $f(x) = \operatorname{arcsen} x$.

(a) Determine una representación en serie de potencias para la función $f(x)$.

(b) Determine el radio R y el intervalo de convergencia de la serie hallada en a).

10. Dada la serie de potencias $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{1+n}\,x^n}{1+n}$.

(a) Determine el radio e intervalo de convergencia de $f(x)$.

(b) Determine en forma explícita la suma de $f(x)$.

(c) En base al punto b), verifique que: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{1+n} \dfrac{1}{1+n} = 1 - \ln 2$.

Soluciones ejercicios semanas 13-14: Series de potencias
Prof. Rodolfo Obando

1. Sea $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.

(a) Desarrolle en series de potencias la función $f(x)$, centrada en $x = 0$ y determine su intervalo de convergencia.

(b) A partir de la igualdad: $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} = \displaystyle\int_0^x \dfrac{dt}{1-t^2}$, descomponga la función $y = \ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ en series de Maclaurin. Determine su intervalo de convergencia.

Solución 1a El desarrollo de $f(t) = \dfrac{1}{1-t}$ alrededor de $t = 0$, aplicando la fórmula de Taylor es: $\dfrac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + \cdots + t^n + \cdots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} t^n$, si hacemos la sustitución $t = x^2$, $\dfrac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \cdots + x^{2n} + \cdots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{2n}$, obtenemos el desarrollo deseado.

Determinemos, a continuación, el intervalo de convergencia de la serie de potencias $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{2n}$. Si desarrollamos los 5 primeros términos de la serie, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{2n} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \cdots$, notamos que la serie es geométrica de razón x^2, por lo tanto su intervalo de convergencia es: $\left|x^2\right| = |x| < 1 \Longrightarrow I = -1 < x < 1$.

Solución 1b Para descomponer la función $y = \ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ en series de Maclaurin, apliquemos, inicialmente, las propiedades de la función logarítmica, $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\left[\ln(1+x) - \ln(1-x)\right]$, ahora igualamos, $\dfrac{1}{2}\left[\ln(1+x) - \ln(1-x)\right] = \displaystyle\int_0^x \dfrac{dt}{1-t^2}$, derivamos ambos miembros con respecto a x, $\frac{-1}{2\,(-1+x)} + \dfrac{1}{2\,(1+x)} = \dfrac{1}{1-x^2}$, pero, sabemos que $\dfrac{1}{1-x^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{2n}$, por lo tanto $\frac{-1}{2\,(-1+x)} + \frac{1}{2\,(1+x)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{2n}$, integramos ambos miembros de la última expresión, $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{1+2\,n}}{1+2\,n} + C$, y para calcular el valor de la constante C, hacemos $x = 0$, $\ln\sqrt{\dfrac{1+0}{1-0}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{0^{1+2\,n}}{1+2\,n} + C \Longrightarrow \underbrace{\ln 1}_{=0} = 0 + C \Longrightarrow C = 0$. Por lo tanto la descomposición de $y = \ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ en series de Maclaurin es: $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{1+2\,n}}{1+2\,n}$. El radio de convergencia de la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{1+2\,n}}{1+2\,n}$ es el mismo ($R = 1$), que el de la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{2n}$, sin embargo el intervalo de convergencia puede diferir, por esa razón es necesario analizar el comportamiento de la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{1+2\,n}}{1+2\,n}$ en los extremos $x = \pm 1$.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{1+2\,n}}{1+2\,n}\Big|_{x=1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{1+2\,n}$.

La serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{1+2\,n}$, es una serie armónica (diverge).

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{1+2\,n}}{1+2\,n}\Big|_{x=-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|\dfrac{(-1)^{1+2\,n}}{1+2\,n}\right| = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{1+2\,n}$, la serie diverge en forma absoluta.

Por lo tanto el intervalo de convergencia de la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{1+2\,n}}{1+2\,n}$ es $I = \,]-1, 1\,[$.

2. Dada la siguiente serie de potencias: $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n)!x^n}{(n!)^2}$.

(a) Determine el radio de convergencia $f(x)$.

(b) Determine el intervalo de convergencia de $f(x)$.

Solución 2a Aplicamos el criterio de la razón. Simplificamos inicialmente la razón:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{x^{1+n}(2(1+n))!}{[(1+n)!]^2}}{\dfrac{x^n(2\,n)!}{(n!)^2}} = \frac{x(n!)^2\,[\,2(1+n)\,]!}{(2\,n)!\;[(1+n)!\,]^2} = \frac{x\,(n!)^2(2+2n)!}{(2\,n)!\;[(1+n)!\,]^2} =$$

$$\frac{(n!)^2(1+2\,n)(2+2\,n)(2\,n)!}{(1+n)^2(n!)^2(2\,n)!}\cdot x = \frac{(1+2\,n)(2+2\,n)}{(1+n)^2}\cdot x.$$

Ahora, tomamos su límite $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+2\,n)(2+2\,n)}{(1+n)^2}\cdot|x|$, donde:

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+2\,n)(2+2\,n)}{(1+n)^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+6\,n+4\,n^2}{1+2\,n+n^2} = 4 = L = \dfrac{1}{R}$. El radio de convergencia $R = \dfrac{1}{4}$.

Solución 2b El intervalo de convergencia lo determinamos de la siguiente manera:

$|x| < R \implies |x| < \dfrac{1}{4} \implies -\dfrac{1}{4} < x < \dfrac{1}{4}$. Ahora analizamos el comportamiento de la serie en los extremos $x \pm \dfrac{1}{4}$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n)!\,x^n}{(n!)^2}\Big|_{x=\frac{1}{4}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2\,n)!\left(\frac{1}{4}\right)^n}{(n!)^2}$. Aplicamos (cuando $n \to \infty$) la fórmula de Stirling: $n! \approx \sqrt{2}\,(\frac{n}{e})^n\sqrt{n\pi}$: $(n!)^2 \approx 2\,n\left(\dfrac{n}{e}\right)^{2\,n}\pi$, $(2n)! \approx 2^{(1+2\,n)}\left(\dfrac{n}{e}\right)^{2n}\sqrt{n\,\pi}$, luego $a_n =$

$$\frac{(2\,n)!\left(\frac{1}{4}\right)^n}{(n!)^2} = \frac{2^{(1+2\,n)}\left(\frac{n}{e}\right)^{2\,n}\sqrt{n\,\pi}}{2\,n\left(\frac{n}{e}\right)^{2\,n}\pi}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{\sqrt{\pi\,n}\,2\,2^{2\,n}}{2\pi\,n}\left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{4^n}{\sqrt{\pi}\,\sqrt{n}\,4^n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,n^{\frac{1}{2}}}.$$

La serie $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ es una $p-$ serie divergente ($p = \frac{1}{2} < 1$) y por el criterio de comparación en el límite la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2\,n)!\left(\frac{1}{4}\right)^n}{(n!)^2}$ también es divergente.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(-\frac{1}{4}\right)^n\,(2\,n)!}{(n!)^2}\Big|_{x=-\frac{1}{4}} = -\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{8}-\dfrac{5}{16}+\dfrac{35}{128}-\dfrac{63}{256}+\cdots$, la serie es alternada y por el criterio de series alternadas,

(a) $a_{n+1} < a_n \Longrightarrow \dfrac{\left(\frac{1}{4}\right)^n\,(2\,(1+n))!}{4\,(1+n)!^2} < \dfrac{\left(\frac{1}{4}\right)^n\,(2\,n)!}{n!^2}$ (se cumple).

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2\,n)!\left(\frac{1}{4}\right)^n}{(n!)^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{\pi}\,n^{\frac{1}{2}}} = 0.$

El último resultado se obtuvo aplicando la fórmula de Stirling. Así, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\left(-\frac{1}{4}\right)^n\,(2\,n)!}{(n!)^2}$ converge en forma condicional.

El intervalo de convergencia de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2\,n)!\,x^n}{(n!)^2}$ es $I = \left[-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right[$.

3. Sea $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1+x)^n}{4^n}$.

(a) Determine el intervalo de convergencia de $f(x)$.

(b) Calcule la suma de $f'(x)$.

Solución 3a Calculamos los primeros 4 términos de la serie,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1+x)^n}{4^n} = 1 + \frac{-1+x}{4} + \frac{(-1+x)^2}{16} + \frac{(-1+x)^3}{64} + \frac{(-1+x)^4}{256} + \cdots,$$

la serie es geométrica, su primer término es $a = 1$ y su razón es $r = \dfrac{-1+x}{4}$, entonces su intervalo de convergencia es:

$$\left|\frac{-1+x}{4}\right| < 1 \Longrightarrow -1 < \frac{-1+x}{4} < 1 \Longrightarrow -4 < -1+x < 4 \Longrightarrow I = -3 < x < 5.$$

Solución 3b Como la serie es geométrica, la suma de $f(x)$ es:

$$s(x) = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\left(\dfrac{-1+x}{4}\right)} = \frac{1}{1+\dfrac{1-x}{4}} = \frac{4}{5-x}.$$

Luego, la suma de $f'(x)$ es:

$$s_1(x) = s'(x) = \frac{4}{(5-x)^2}.$$

4. Sea $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{1+n}\,x^{1+n}}{1+n}$.

(a) Determine el intervalo de convergencia de $f(x)$.

(b) Calcule en forma explícita $f(x)$.

Solución 4a Como la serie no es geométrica, aplicamos el criterio de la razón. Simplificamos inicialmente la razón $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$,

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{\dfrac{(-1)^{2+n}\,x^{2+n}}{2+n}}{\dfrac{(-1)^{1+n}\,x^{1+n}}{1+n}}\right| = \left|\frac{\dfrac{(-1)^{2+n}\,x^{2+n}}{2+n}}{\dfrac{(-1)^{1+n}\,x^{1+n}}{1+n}}\right| = \frac{(1+n)\,|x|}{2+n}$$

ahora tomamos su límite,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+n}{2+n}\right)\cdot|x|$$

y calculamos su radio e intervalo de convergencia,

$$L = \lim_{n\to\infty}\frac{1+n}{2+n} = 1, \text{ su radio de convergencia es: } R = \frac{1}{L} = 1$$

luego, $|x| < 1 \Longrightarrow -1 < x < 1$. Ahora, analizamos el comportamiento de la serie en los extremos $x = \pm 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2+2\,n}}{1+n}\Bigg|_{x=-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2\,n}}{1+n} = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots,$$

la serie es de términos positivos y por ser una serie armónica del tipo $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a\,n+b}$ diverge.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{1+n}}{1+n}\Bigg|_{x=1} = \frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\cdots,$$

la serie es alternada y por el criterio de series alternadas,

(a) $a_{n+1} < a_n \Longrightarrow \dfrac{1}{2+n} < \dfrac{1}{1+n}$ (se cumple)

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+n} = 0$,

La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{1+n}}{1+n}$ converge condicionalmente.

Por lo tanto el intervalo de convergencia de la serie $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{1+n}\,x^{1+n}}{1+n}$ es $I = \,]-1, 1\,]$.

Solución 4b Para calcular la suma de la serie $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{1+n}\,x^{1+n}}{1+n}$ derivamos $f(x)$,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{1+n}\,x^n = x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 - \cdots,$$

notamos que la serie obtenida es una serie geométrica, cuyo primer término es $a = x$ y su razón es $r = -x$, entonces la suma de $f'(x)$ es:

$$s_1(x) = \frac{a}{1-r} = \frac{x}{1-(-x)} = \frac{x}{1+x}\,.$$

Para obtener la suma $s(x)$ de $f(x)$ integramos $s_1(x)$,

$$\int s_1(x)\,dx = \int\frac{x}{1+x}\,dx = \int\frac{1+x-1}{1+x}\,dx = \int\frac{1+x}{1+x}\,dx - \int\frac{1}{1+x}\,dx = x - \ln|1+x| + C,$$

para calcular la constante C hacemos $x = 0$,

$$s(0) = 0 - \ln|1+0| + C \Longrightarrow C = 0.$$

Luego, $s(x) = x - \ln|1+x|$.

5. Sea $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^n}{(1+n)!}$.

(a) Determine el radio y el intervalo de convergencia de $f(x)$.

(b) Calcule en forma explícita la suma de $f(x)$.

Solución 5a Aplicamos el criterio de la razón. Simplificamos inicialmente la razón $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|$,

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{\dfrac{(-1)^{1+n} x^{1+n}}{(2+n)!}}{\dfrac{(-1)^n x^n}{(1+n)!}}\right| = \left|-\frac{x\,(1+n)!}{(2+n)!}\right| = \frac{(1+n)!}{(2+n)(1+n)!}\cdot|x| = \left(\frac{1}{2+n}\right)\cdot|x|,$$

ahora tomamos su límite,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2+n}\right)\cdot|x|$$

y calculamos su radio e intervalo de convergencia,

$$L = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+n} = 0, \text{ su radio de convergencia es } R = \frac{1}{0} = \infty,$$

en este caso, como el radio de convergencia es $R = \infty$, el intervalo de convergencia de la serie es $I = \,]-\infty, \infty[$.

Solución 5b Para calcular la suma $s_1(x)$ de $f'(x)$ tomamos el desarrollo

$$\mathrm{e}^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!},$$

si $t = -x$, tenemos:

$$\mathrm{e}^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}, \tag{10.1}$$

integramos los extremos de la expresión (10.1),

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{1+n}}{(1+n)\;n!} = -\mathrm{e}^{-x} + C, \text{ si } x = 0 \implies 0 = -1 + C \implies C = 1,$$

pasamos la variable x a la derecha del "=",

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x x^n}{(1+n)\;n!} = -\mathrm{e}^{-x} + 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(1+n)!} = -\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} + \frac{1}{x},$$

luego la suma de $f(x)$ es: $s(x) = -\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{-1+\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x\,x}$. Finalmente,

$$s_1(x) = s'(x) = -\frac{-1+\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x\,x^2} + \frac{1}{x} - \frac{-1+\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x\,x} = \frac{1-\mathrm{e}^x+x}{\mathrm{e}^x\,x^2}.$$

6. Hallar la serie de Maclaurin para la función $f(x) = \displaystyle\int_0^x \operatorname{sen}(t^2)dt$.

(a) Determine el intervalo de convergencia de $f(x)$.

(b) Calcule el valor de $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{sen}(x^2)dx$ con cuatro cifras decimales exactas.

Solución Para hallar la serie de Maclaurin para $f(x)$, aplicamos el Teorema Fundamental del Cálculo: $f'(x) = \operatorname{sen}(x^2)$. El desarrollo de la función $\operatorname{sen} u$ es:

$$\operatorname{sen} u = u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \frac{u^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, u^{1+2\,n}}{(1+2\,n)!},$$

si $u = x^2$, tenemos,

$$f'(x) = \operatorname{sen}(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2+4\,n}}{(1+2\,n)!},$$

ahora integramos y obtenemos la serie de Maclaurin para $f(x) = \displaystyle\int_0^x \operatorname{sen}(t^2)dt$,

$$f(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(t^2)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{3+4\,n}}{(3+4\,n)\ (1+2\,n)!} + C,\ \text{(si } x = 0; C = 0\text{)}.$$

Solución 6a El intervalo de convergencia lo determinamos aplicando el criterio de la razón,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| &= \left|\frac{\dfrac{(-1)^{1+n}\, x^{3+4\,(1+n)}}{(3+4\ (1+n))\ (1+2\ (1+n))!}}{\dfrac{(-1)^n\, x^{3+4\,n}}{(3+4\,n)\ (1+2\,n)!}}\right| = \left|\frac{-\dfrac{(-1)^n\, x^{7+4\,n}}{(7+4\,n)\ (3+2\,n)!}}{\dfrac{(-1)^n\, x^{3+4\,n}}{(3+4\,n)\ (1+2\,n)!}}\right| \\
&= \left|-\frac{(3+4\,n)\ x^4\ (1+2\,n)!}{(7+4\,n)\ (3+2\,n)!}\right| = \frac{(3+4\,n)\ (1+2\,n)!}{(7+4\,n)\ (3+2\,n)!}\,|x| \\
&= \frac{3+4\,n}{(2+2\,n)\ (3+2\,n)\ (7+4\,n)}\,|x| = \frac{3+4n}{42+94\,n+68\,n^2+16\,n^3}\ |x|
\end{aligned}$$

luego,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 = L = \frac{1}{R} \Longrightarrow R = \infty \Longrightarrow I = \ ]-\infty, \infty[\ .$$

Solución 6b Para calcular el valor de $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{sen}(x^2)dx$ con cuatro cifras decimales exactas, como la serie es alternada, el error que se comete es menor que el primer término que se desprecia. Calculemos el error que se comete al tomar el cuarto término de la serie,

$$E < \left|-\frac{x^{15}}{75600}\right|_{x=1} = \frac{1}{75600} = 0,0000132275 < 0,00005,$$

por lo tanto para calcular el valor de $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{sen}(x^2)dx$ con la precisión deseada, es suficiente tomar solamente los tres primeros términos de la serie

$$\left.\sum_{n=0}^{3} \frac{(-1)^n\, x^{3+4\,n}}{(3+4\,n)\ (1+2\,n)!}\right|_{x=1} = \frac{1^3}{3} - \frac{1^7}{42} + \frac{1^{11}}{1320} = 0.310281 = 0.3103.$$

7. Sea $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-1+n)!} \cdot x^n$.

(a) Determine el intervalo de convergencia.

(b) Demuestre que: $f(x) = x\mathrm{e}^x$, y que: $\mathrm{e} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!}$.

Solución 7a Aplicamos el criterio de la razón,

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{\frac{x^{1+n}}{n!}}{\frac{x^n}{(-1+n)!}}\right| = \frac{|x|\;(-1+n)!}{n!} = \frac{(-1+n)!}{n(-1+n)!} \cdot |x| = \frac{1}{n} \cdot |x|,$$

tomamos el límite: $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot |x|$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 = L \Longrightarrow R = \frac{1}{L} = \infty, \text{ luego, } I = \left]-\infty, \infty\right[\;.$$

Solución 7b Tomamos el desarrollo en serie de potencias de e^x (el lector tiene que poner atención en el hecho de que la suma empieza en $n = 1$),

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \mathrm{e}^x, \tag{10.2}$$

tomamos los extremos de la expresión (10.2), los derivamos y simplificamos,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\, x^{-1+n}}{n!} = \mathrm{e}^x,$$

$$\frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^n}{n(n-1)!} = \mathrm{e}^x, \tag{10.3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} = x\mathrm{e}^x.$$

Queda demostrado así que: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} = x\mathrm{e}^x$. Además de la expresión (10.3), si $x = 1$, obtenemos:

$$\frac{1}{1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n 1^n}{n(n-1)!} = \mathrm{e}^1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} = \mathrm{e}.$$

8. Sea $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n\, x^{2\, n}}{(1+2\, n)!}$.

(a) Determine el intervalo de convergencia de $f(x)$.

(b) Calcule en forma explícita la suma de $f(x)$.

Solución 8a Por el criterio de la razón tenemos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(1+n)\ x^{2\,(1+n)}}{(3+2\,n)!}}{\dfrac{n\,x^{2\,n}}{(1+2\,n)!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(1+n)\ (1+2\,n)!}{n\ (3+2\,n)!}\cdot x^2,$$

luego

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1+n}{n(3+2\,n)(2+2\,n)} = 0 = L = \frac{1}{R} \Longrightarrow R=\infty \Longrightarrow I = \,]-\infty,\infty[\ .$$

Solución 8b Notemos que, $f(x)$ se puede escribir de la siguiente forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\,x^{2\,n}}{(1+2\,n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\,x^{2\,n}}{(1+2\,n)\ (2\,n)!}.$$

Sabemos que $\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2\,n}}{(2\,n)!}$, entonces la suma de $f(x)$ la obtenemos a partir de esta igualdad mediante el siguiente procedimiento

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2\,n}}{(2\,n)!}\,,$$

derivamos

$$\text{senh } x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\,n\,x^{-1+2\,n}}{(2\,n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\,n\,x^{2\,n}\,x^{-1}}{(2\,n)!},$$

$$x\ \text{senh } x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\,n\,x^{2\,n}}{(2\,n)!},$$

integramos (el miembro de la izquierda se integra por partes)

$$x\ \cosh x - \text{senh } x + C = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\,n\,x^{1+2\,n}}{(1+2\,n)\ (2\,n)!},$$

si $x=0 \Longrightarrow C=0$, luego

$$x\ \cosh x - \text{senh}\, x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\,n\,x^{2\,n}\,x}{(1+2\,n)\ (2\,n)!},$$

finalmente la suma de $f(x)$ en forma explícita es $\frac{x\cosh x - \text{senh } x}{2x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{nx^{2n}}{(1+2n)!}$.

9. Considere la función $f(x) = \text{arcsen } x$.

(a) Determine una representación en serie de potencias para la función $f(x)$.

(b) Determine el radio R y el intervalo de convergencia de la serie hallada en (a).

Solución 9a En este caso aplicamos la serie binómica,

$$\begin{aligned}(1+x)^{\alpha} &= 1+\alpha\,x+\frac{(-1+\alpha)\;\alpha}{2!}\,x^2+\frac{(-2+\alpha)\;(-1+\alpha)\;\alpha}{3!}\,x^3+\cdots\\ &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3+\alpha)\;(-2+\alpha)\;(-1+\alpha)\;\alpha\cdots(1+\alpha-n)}{n!}\;x^n,\end{aligned}$$

si sustituimos x por $-x$ y tomamos $\alpha=-\frac{1}{2}$, obtenemos la serie,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=1+\frac{x}{2}+\frac{1{\cdot}3}{2^2{\cdot}\,2!}\;x^2+\frac{1{\cdot}3{\cdot}5}{2^3{\cdot}\,3!}\;x^3+\frac{1{\cdot}3{\cdot}5{\cdot}7}{2^4{\cdot}\,4!}\;x^4+\cdots+\frac{1{\cdot}3{\cdot}5{\cdot}7\cdots(-1+2n)}{2^n{\cdot}n!}\;x^n+\cdots,$$

o bien $\frac{1}{\sqrt{1-x}}=1+\frac{x}{2}+\frac{3\,x^2}{8}+\frac{5\,x^3}{16}+\frac{35\,x^4}{128}+\cdots$, donde los coeficientes numéricos de cada término de la serie se obtienen de la siguiente manera, (el símbolo que utilizaremos se llama productoria).

$$\prod_{k=1}^{1}\frac{(2\,k-1)}{(2\,k)}=\frac{(2{\cdot}1-1)}{(2{\cdot}1)}=\frac{1}{2}\,,$$

$$\prod_{k=1}^{2}\frac{(2\,k-1)}{(2\,k)}=\frac{(2{\cdot}1-1)(2{\cdot}2-1)}{(2{\cdot}1)(2{\cdot}2)}=\frac{1{\cdot}3}{2{\cdot}4}=\frac{3}{8}\,,$$

$$\prod_{k=1}^{3}\frac{(2\,k-1)}{(2\,k)}=\frac{(2{\cdot}1-1)(2{\cdot}2-1)(2{\cdot}3-1)}{(2{\cdot}1)(2{\cdot}2)(2{\cdot}3)}=\frac{1{\cdot}3{\cdot}5}{2{\cdot}4{\cdot}6}=\frac{5}{16}\,,$$

$$\vdots$$

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{(2\,k-1)}{(2\,k)}=\frac{1{\cdot}3{\cdot}5\cdots(2\,n-1)}{2{\cdot}4{\cdot}6\cdots(2\,n)}\,.$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1{\cdot}3{\cdot}5\cdots(2\,n-1)}{2{\cdot}4{\cdot}6\cdots(2\,n)}\cdot x^n,$$

si en la última expresión tomamos $x=t^2$, obtenemos:

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1{\cdot}3{\cdot}5\cdots(2\,n-1)}{2{\cdot}4{\cdot}6\cdots(2\,n)}\cdot t^{2n}. \tag{10.4}$$

De acuerdo al Teorema Fundamental $f(x)=\operatorname{arcsen} x=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, entonces la expresión (10.4) la integramos término a término desde $t=0$ hasta $t=x$:

$$\operatorname{arcsen} x=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=x+\sum_{1}^{\infty}\frac{1{\cdot}3{\cdot}5\cdots(2\,n-1)}{2{\cdot}4{\cdot}6\cdots(2\,n)}\cdot\frac{x^{1+2\,n}}{1+2\,n}+C\text{ (si } x=0\Longrightarrow C=0),$$

para obtener así el desarrollo en serie de potencias de $f(x) = \operatorname{arcsen} x$. El intervalo de convergencia de esta serie lo determinamos aplicando el criterio de la razón $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1+2\,(1+n))\,x^{1+2\,(1+n)}}{2\,(1+n)\,(1+2\,(1+n))}}{\frac{(-1+2\,n)\,x^{1+2\,n}}{2\,n\,(1+2\,n)}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n\,(1+2\,n)^2\,x^2}{-3+n+8\,n^2+4\,n^3}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n\,(1+2\,n)^2}{-3+n+8\,n^2+4\,n^3}\right)\cdot|x|,$$

donde $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\,(1+2\,n)^2}{-3+n+8\,n^2+4\,n^3} = 1 = L = \frac{1}{R}$, luego $R = 1$ y $-1 < x < 1$.

Analizando la serie en los extremos $x \pm 1$, tenemos:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1+2\,n)\,x^{1+2\,n}}{2\,n\,(1+2\,n)}\Big|_{x=-1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{1+2n}(-1+2n)}{2n(1+2n)}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{-1+2n}{2n+4n^2}$, si $n\to\infty$, tenemos que $\frac{-1+2\,n}{2\,n+4\,n^2}\sim\frac{1}{2\,n}$ y la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\,n}$ diverge en forma absoluta, por lo tanto la serie i) diverge también en forma absoluta por el criterio de comparación el límite.

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1+2\,n)\,x^{1+2\,n}}{2\,n\,(1+2\,n)}\Big|_{x=1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{-1+2\,n}{2\,n+4\,n^2}$, también diverge.

Concluimos así, que el intervalo de convergencia es $I = \,]-1,1\,[$.

10. Dada la serie de potencias $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{1+n}\,x^n}{1+n}$.

(a) Determine el radio e intervalo de convergencia de $f(x)$.

(b) Determine en forma explícita la suma de $f(x)$.

(c) En base al punto b), verifique que: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{1+n}\frac{1}{1+n} = 1-\ln(2)$.

Solución 10(a) Por el criterio de la razón tenemos:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{2+n}\,x^{1+n}}{2+n}}{\frac{(-1)^{1+n}\,x^n}{1+n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1+n}{2+n}\,|x|,$$

luego, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1+n)}{2+n} = 1 = L \Longrightarrow R = \frac{1}{L} = 1$, por lo tanto $|x| < 1 \Longrightarrow -1 < x < 1$.

La serie converge en el intervalo $]-1,1\,[$ pero es necesario verificar su convergencia en los extremos del intervalo $]-1,1\,[$.

Si $x = -1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{1+n}\,x^n}{1+n}\Big|_{x=-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{1+2\,n}}{1+n},$$

la serie obtenida es una serie de términos negativos, la cual diverge puesto que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{1+2\,n}}{1+n}\right|$ diverge.

Si $x=1$:
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{1+n}\,x^n}{1+n}\Big|_{x=1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{1+n}}{1+n},$$
obtenemos una serie alternada la cual converge por el criterio de series alternadas. Concluimos así, que el intervalo de convergencia de la serie es $I=]-1,1]$.

Solución 10b La serie se puede escribir de la siguiente manera
$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{1+n}\,x^n}{1+n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{1+n}\,n\,x^n}{n\,(1+n)}\,,$$
luego
$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{1+n}\,\frac{x^n}{n}\,,$$
ahora integramos
$$-x+(1+x)\,\ln(1+x)+C=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\,x^{1+n}}{n\,(1+n)}. \tag{10.5}$$
El término $-x+(1+x)\ln(1+x)+C=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{1+n}}{n(1+n)}$, se obtiene integrando por partes:
$u=\ln(1+x)$, $du=dx\Longrightarrow du=\dfrac{dx}{1+x}$, $v=x$, luego $\displaystyle\int\ln(1+x)\,dx=x\ln(1+x)-\int\frac{x\,dx}{1+x}=$
$\displaystyle x\ln x(1+x)-\int\frac{1+x-1\,dx}{1+x}=x\ln x(1+x)-\int\frac{(1+x)\,dx}{1+x}+\int\frac{dx}{1+x}=$
$x\ln(1+x)-x+\ln(1+x)+C=-x+(1+x)\ln(1+x)+C.$

En la igualdad (10.5) si $x=0$, obtenemos $C=0$, entonces
$$-x+(1+x)\,\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\,x^{1+n}}{n\,(1+n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\,x^n\,x}{n\,(1+n)},$$
$$[-x+(1+x)\,\ln(1+x)]\,x^{-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{1+n}\,x^n}{n\,(1+n)},$$
derivamos y simplificamos
$$\frac{\ln(1+x)}{x}-\frac{-x+(1+x)\,\ln(1+x)}{x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{1+n}\,x^{-1+n}}{1+n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{1+n}\,x^n\,x^{-1}}{1+n},$$
$$\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{1+n}\,x^n\,x^{-1}}{1+n}\Longrightarrow\left[\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\right]x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{1+n}\,x^n}{1+n},$$
finalmente, $\dfrac{x-\ln(1+x)}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{1+n}x^n}{1+n}$.

Si $x=1$, obtenemos $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{1+n}\dfrac{1}{1+n}=1-\ln 2.$

Tema 11

Ejercicios semana 15: Números complejos

Prof. Pedro Díaz, Prof. Edwin Castro

1. Mostrar que la serie $\frac{1+\mathrm{i}}{2} + \left(\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right)^3 + \cdots$, converge absolutamente.
2. Demostrar que $\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x$.
3. Expresar $\cos 5\varphi$ y $\operatorname{sen} 5\varphi$ mediante $\cos\varphi$ y $\operatorname{sen}\varphi$.
4. Resolver la ecuación bimonial $w^3 - 4\sqrt{2}(1+\mathrm{i}) = 0$.
5. Resolver $6z^4 - 25z^3 + 32z^2 + 3z - 10 = 0$.
6. Resolver $z^2(1-z^2) = 16$.
7. Demuestre que todo polinomio de grado impar con coeficientes reales tiene al menos una raíz real.
8. Sea $P(z) = \sum_{i=1}^{n} a_i z^i$ un polinomio con coeficientes reales y sea $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $P(\alpha) = 0$, demostrar que $P(\bar{\alpha}) = 0$, es decir que si un número complejo es un cero de un polinomio con coeficientes reales, su conjugado $\bar{\alpha}$ también lo es.
9. Dado un número complejo z, interpretar geométricamente $ze^{\mathrm{i}\alpha}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.
10. Grafique los siguientes conjuntos: $A = \{z/|z-1| < 3\}$, $\quad B = \{z/|z-2\mathrm{i}| < 2\}$, $\quad A \cap B$, $\quad A \cup B$.
11. Construya una ecuación de segundo grado con coeficientes reales que tenga por raíz al número complejo $5-\mathrm{i}$.
12. Resolver la ecuación $x^2 + 2\mathrm{i}x + 4 = 0$ poniendo las soluciones en la forma $a + b\mathrm{i}$. Comparar con el ejercicio 11.
13. Calcular $\mathrm{i}^{3280} + \mathrm{i}^{7777}$.
14. Probar que $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$, $\operatorname{sen} 3\alpha = 3\operatorname{sen}\alpha - 4\operatorname{sen}^3\alpha$, utilizando la expresión $(\cos\alpha + \mathrm{i}\operatorname{sen}\alpha)^3$.

15. Identificar las curvas y dibujarlas:

    i) $|z|^2 - |z+\bar{z}|^2 = z + \bar{z}$ ii) $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| = k.$

16. Determine las raíces cuartas de 16 y representarlas.

17. Determine las raíces cúbicas de $4 + 3\imath$ y representarlas.

18. Calcular los límites:

    i) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} \imath n}{n^2}$ ii) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{senh}\, \imath n}{1+\cosh \imath n} a^n,\ a \in \mathbb{R}.$

19. Si $|a| = |b|$, pruebe que $|a+b|^2 + |a-b|^2 = 4|a|^2,\ a,\, b \in \mathbb{C}.$

20. Resolver la ecuación $\left(\dfrac{z+1}{z}\right)^6 = 32.$

Soluciones ejercicios semana 15: Números complejos
Prof. Pedro Díaz, Prof. Edwin Castro

1. Mostrar que la serie $\frac{1+\mathrm{i}}{2}+\left(\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right)^3+\cdots$, converge absolutamente.

   Solución Como $1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right]$, $w_n=\left(\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right)^n=\left(\frac{\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}}{2}\right)^n=$
   $\frac{1}{2^{n/2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)\Longrightarrow|w_n|=\frac{1}{2^{n/2}}$.

   Comparemos la serie de módulos $\frac{1}{2^{1/2}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{3/2}}+\cdots$, que es geométrica de razón $\frac{1}{\sqrt{2}}$ menor que 1 y converge. Por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ converge absolutamente.

2. Demostrar que $\cos^3 x=\frac{1}{4}\cos 3x+\frac{3}{4}\cos x$.

   Solución Como $\cos x=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)$, entonces $\cos^3 x=\frac{\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}+3\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}}{8}=$
   $\frac{1}{4}\frac{\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}}{2}+\frac{3}{4}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}=\frac{1}{4}\cos 3x+\frac{3}{4}\cos x$.

3. Expresar $\cos 5\varphi$ y $\operatorname{sen} 5\varphi$ mediante $\cos\varphi$ y $\operatorname{sen}\varphi$.

   Solución Dado que: $(\cos\varphi+\mathrm{i}\operatorname{sen}\varphi)^5=\cos 5\varphi+\mathrm{i}\operatorname{sen}5\varphi$, desarrollando el binomio de Newton al lado derecho se tiene:

   $(\cos\varphi+\mathrm{i}\operatorname{sen}\varphi)^5=\cos^5\varphi+5\mathrm{i}\cos^4\varphi\operatorname{sen}\varphi-10\cos^3\varphi\operatorname{sen}^2\varphi-10\mathrm{i}\cos^2\varphi\operatorname{sen}^3\varphi+5\cos\varphi\operatorname{sen}4\varphi+\mathrm{i}\operatorname{sen}^5\varphi=\cos 5\varphi+\mathrm{i}\operatorname{sen}5\varphi$.

   Igualando parte real e imaginaria a ambos lados se tiene:

   $$\cos 5\varphi=\cos 5\varphi-10\cos^3\varphi\operatorname{sen}^2\varphi+5\cos\varphi\operatorname{sen}^4\varphi,$$

   $$\operatorname{sen}5\varphi=5\cos^4\varphi\operatorname{sen}\varphi-10\cos^2\varphi\operatorname{sen}^3\varphi+\operatorname{sen}^5\varphi.$$

4. Resolver la ecuación bimonial $w^3-4\sqrt{2}(1+\mathrm{i})=0$.

   Solución Como $1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)\Longrightarrow w^3=8\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$. Aplicando la fórmula de raíz n–ésima:

   $$w=\sqrt[3]{8}\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\operatorname{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)\right),\qquad k=0,1,2.$$

   Luego 1– Si $k=0$, $w_0=2(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\operatorname{sen}\frac{\pi}{12})$

   2– Si $k=1$, $w_1=2(\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4})$

   3– Si $k=2$, $w_2=2(\cos\frac{17\pi}{12}+\mathrm{i}\operatorname{sen}\frac{17\pi}{12})$.

5. Resolver $6z^4 - 25z^3 + 32z^2 + 3z - 10 = 0$.

   Solución Por el Teorema de las raíces racionales se obtiene que $z = -\frac{1}{2}$ y $z = \frac{2}{3}$ son soluciones, de donde $(2z+1)(3z-2) = 6z^2 - z - 2$ es un factor de $6z^4 - 25z^3 + 32z^2 + 3z - 10$ siendo el otro factor $z^2 - 4z + 5$. O sea $6z^4 - 25z^3 + 32z^2 + 3z - 10 = (6z^2 - z - 2)(z^2 - 4z + 5)$.

   Luego aplicando la fórmula del trinomio de segundo grado se obtienen las otras raíces. Esto es, las soluciones de $z^2 - 4z + 5 = 0$ son $z = \dfrac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \dfrac{4 \pm 2\mathrm{i}}{2} = 2 \pm \mathrm{i}$.

   Por lo tanto $S = \{-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 2+\mathrm{i}, 2-\mathrm{i}\}$.

6. Resolver $z^2(1 - z^2) = 16$.

   Solución I^a forma: La ecuación se puede escribir como $z^4 - z^2 + 16 = 0 \iff z^4 + 8z^2 + 16 - 9z^2 = 0 \iff (z^2+4)^2 - 9z^2 = 0 \iff (z^2+4+3z)(z^2+4-3z) = 0 \iff (z^2+4+3z) = 0$ o $(z^2+4-3z) = 0 \iff z = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{17}}{2}\mathrm{i}$ o $z = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}\mathrm{i}$, por lo tanto $S = \{-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}\mathrm{i}, -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}\mathrm{i}, \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}\mathrm{i}, \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}\mathrm{i}\}$.

   II^a forma: Sea $w = z^2$, la ecuación puede escribirse $w^2 - w + 16 = 0$, o sea $w = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}\sqrt{7}\mathrm{i} \iff z^2 = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}\sqrt{7}\mathrm{i}$ y aplicando la fórmula de raíces n–ésimas se obtienen las soluciones.

7. Demuestre que todo polinomio de grado impar con coeficientes reales tiene al menos una raíz real.

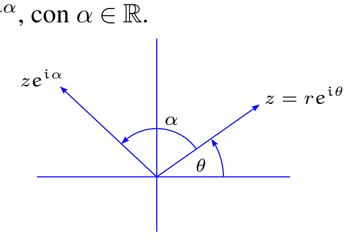
   Solución Se hará la demostración por contradicción. Si todas las raíces de $P(z)$ fueran complejas, deben existir un número par de ellas ya que por el ejercicio 8, si α es raíz, $\bar{\alpha}$ también lo es; pero esto dice que el grado del polinomio es par lo cual es una contradicción, por lo tanto $P(z)$ tiene al menos una raíz real.

8. Sea $P(z) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i z^i$ un polinomio con coeficientes reales y sea $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $P(\alpha) = 0$, demostrar que $P(\bar{\alpha}) = 0$, es decir que si un número complejo es un cero de un polinomio con coeficientes reales, su conjugado $\bar{\alpha}$ también lo es.

   Solución $P(\bar{\alpha}) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(\bar{\alpha})^i = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(\overline{\alpha^i}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \overline{a_i\alpha^i} = \overline{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\alpha^i} = \overline{P(\alpha)}$ y como $P(\alpha) = 0 \Longrightarrow \overline{P(\alpha)} = 0 \Longrightarrow P(\bar{\alpha}) = 0$.

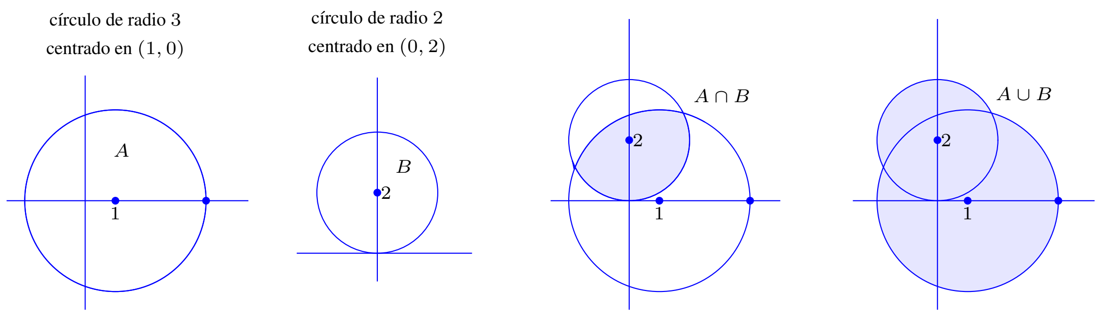
9. Dado un número complejo z, interpretar geométricamente $z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.

   Solución Sea $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \Longrightarrow z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\alpha)}$. Luego la multiplicación de z por $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ consiste en rotar z en sentido contrario a las manecillas del reloj, un ángulo α.



10. Grafique los siguientes conjuntos: $A = \{z/|z-1| < 3\}$, $B = \{z/|z-2\mathrm{i}| < 2\}$, $A \cap B$, $A \cup B$.

    Solución



11. Considere la ecuación con coeficientes reales:

$$az^2 + bz + c = 0. \tag{11.1}$$

Si z es raíz de (11.1), entonces $\bar{z}$ también lo es. En efecto, como $az^2+bz+c=0$ entonces $\overline{az^2+bz+c} = \bar{0}$ y se tiene $\overline{az^2} + \overline{bz} + \bar{c} = 0$ y entonces $\bar{a}\,\overline{z^2} + \bar{b}\bar{z} + \bar{c} = 0$ de aquí se deduce $a\bar{z}^2 + b\bar{z} + c = 0$, así $\bar{z}$ también es raíz de (11.1). Recuerde que si $a \in \mathbb{R}$, $\bar{a} = a$.

Como la ecuación a construir tiene coeficientes reales y una raíz conocida $5 - \mathrm{i}$ deducimos que $5 + \mathrm{i}$ también es raíz de la ecuación y así formamos la ecuación:

$$(z - (5 - \mathrm{i}))(z - (5 + \mathrm{i})) = 0, \text{ o sea } (z-5) - \mathrm{i}^2 = 0, \text{ de donde } z^2 - 10z + 26 = 0.$$

Para lo anterior se necesitaron las propiedades:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{az} = a\bar{z}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2,$$

que son fácilmente demostrables.

12. Aplicando la fórmula general se deduce:

$z_{1,2} = \dfrac{2\mathrm{i} \pm \sqrt{4\mathrm{i}^2 - 16}}{2}$, o sea $z_{1,2} = \dfrac{2\mathrm{i} \pm \sqrt{-20}}{2} = \dfrac{2\mathrm{i} \pm 2\sqrt{5}\mathrm{i}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}\mathrm{i}$.

Observe que para esta ecuación se cumple el resultado (11.1).

13. Se ve que $\mathrm{i}^0 = 1$, $\mathrm{i}^1 = \mathrm{i}$, $\mathrm{i}^2 = -1$, $\mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$, $\mathrm{i}^4 = 1$.

$3280 = 4{\cdot}820$, $\mathrm{i}^{3280} = (\mathrm{i}^4)^{820} = 1$.

$7777 = 4{\cdot}1944 + 1$, $\mathrm{i}^{4\cdot 1944+1} = (\mathrm{i}^4)^{1944}{\cdot}\mathrm{i}^1 = \mathrm{i}$.

Así $\mathrm{i}^{3280} + \mathrm{i}^{7777} = 1 + \mathrm{i}$.

14. Tenemos: $(\cos\alpha + \mathrm{i}\operatorname{sen}\alpha)^3 = \cos 3\alpha + \mathrm{i}\operatorname{sen} 3\alpha$.

Desarrollando $(\cos\alpha + \mathrm{i}\operatorname{sen}\alpha)^3$, se deduce $\cos^3\alpha + 3\cos^2\alpha(\mathrm{i}\operatorname{sen}\alpha) + 3\cos\alpha(\mathrm{i}\operatorname{sen}\alpha)^2 + (\mathrm{i}\operatorname{sen}\alpha)^3 = \cos 3\alpha + \mathrm{i}\operatorname{sen} 3\alpha$, o sea: $\cos^3\alpha - 3\operatorname{sen}^2\alpha\cos\alpha + (3\cos^2\alpha\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}^3\alpha)\mathrm{i} = \cos 3\alpha + \mathrm{i}\operatorname{sen} 3\alpha$, de donde se deduce: $\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\operatorname{sen}^2\alpha\cos\alpha$, $\operatorname{sen} 3\alpha = 3\cos^2\alpha\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}^3\alpha$ y de aquí se obtiene el ejercicio.

15. i) Sea $z = x + \mathrm{i}y$, $|z|^2 = x^2 + y^2$, $\bar{z} = x - \mathrm{i}y$, $z + \bar{z} = 2x$, $|z + \bar{z}| = 4x^2$ sustituyendo en la ecuación dada se tiene:

    $x^2 + y^2 - 4x^2 = 2x$, $-3x^2 + y^2 - 2x = 0$, $y^2 - (3x^2 + 2x) = 0$, $y^2 - 3(x^2 + x) = 0$, o sea $y^2 - 3(x + \frac{1}{2})^2 = -\frac{3}{4}$, $3(x + \frac{1}{2})^2 - y^2 = \frac{3}{4}$ Hipérbola.

    ii) Utilizando la notación de i) $|z-1|^2 = |x+\mathrm{i}y-1|^2 = (x-1)^2+y^2$, $|z+1| = |x+\mathrm{i}y+1| = (x+1)^2+y^2$.

    La ecuación del ejercicio se escribe:

    $|z - 1|^2 = k^2|z + 1|$ o sea: $(x - 1)^2 + y^2 = k^2((x + 1)^2 + y^2)$

    $x^2 - 2x + 1 + y^2 = k^2(x^2 + 2x + y^2 + 1)$, $(1 - k^2)x^2 - 2(1 + k^2)x + (1 - k^2)y^2 = k^2 - 1$.

    Se deben realizar tres casos $k = 1$, $k < 1$, $k > 1$ los detalles se dejan al lector; además se debe excluir al punto:

    $|z + 1| = 0$ o sea $|x + \mathrm{i}y + 1| = 0$ o sea $x + 1 = 0$ y $y = 0$ es decir el punto $(-1, 0)$. Los gráficos quedan al cuidado del estudiante.

16. El ejercicio nos pide resolver la ecuación en $\mathbb{C}: z^4 = 16$.

    Utilizaremos la forma de las raíces de $z^n = a$, a pesar de que el ejercicio se puede resuelve más fácilmente factorizando la expresión $z^4 - 16 = 0$. Se tiene que $\sqrt[4]{16} = 2$, $16 = 16(\cos 0 + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\, 0)$. Así:

    $z_k = 2\left(\cos\left(\frac{0 + 2k\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\left(\frac{0 + 2k\pi}{4}\right)\right)$, $k = 0, 1, 2, 3$, $z_0 = 2$, $z_1 = 2\mathrm{i}$, $z_3 = -2$, $z_4 = -2\mathrm{i}$.

17. $z^3 = 4 + 3\mathrm{i}$.

    $4 + 3\mathrm{i} = 5\left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5}\mathrm{i}\right)$. Sea θ el ángulo agudo tal que $\mathrm{sen}\,\theta = \dfrac{3}{5}$, $\cos\theta = \dfrac{4}{5}$, tenemos:

    $z_k = 5\left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{3}\right)\right)$, $k = 0, 1, 2$.

    Se obtiene
    $$\begin{aligned} z_0 &= 5\left(\cos\frac{\theta}{3} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{3}\right) \\ z_1 &= 5\left(\cos\frac{\theta + 2\pi}{3} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta + 2\pi}{3}\right) \\ z_2 &= 5\left(\cos\frac{\theta + 4\pi}{3} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta + 4\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

    z_0 está en el primer cuadrante, z_1 en el segundo cuadrante y z_2 en el tercer cuadrante (verificarlo).

18. Haremos uso de que $\mathrm{sen}\,\mathrm{i}\theta = -\,\mathrm{senh}\,\theta$, $\cos\mathrm{i}\theta = \cosh\theta$.

    i) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{sen}\,\mathrm{i}n}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-\,\mathrm{senh}\,n}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n}}{2n^2} = -\infty$.

    ii) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{senh}\,\mathrm{i}n}{1 + \cosh\mathrm{i}n} a^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{-\,\mathrm{sen}\,n}{1 + \cos n} a^n = \begin{cases} 0 & \text{si } |a| < 1 \\ \nexists & \text{si } |a| \geq 1. \end{cases}$ (Este hecho puede comprobarse con la calculadora).

19. $|a + a|^2 = (a + b)(\overline{a + b}) = (a + b)(\overline{a + b}) = a\bar{a} + a\bar{b} + b\bar{a} + \bar{b}b + |a|^2 + a\bar{b} + b\bar{a} + |b|^2$.

    $|a - b|^2 = (a - b)(\bar{a} - \bar{b}) = |a|^2 - a\bar{b} - b\bar{a} + |b|^2$ y con la hipótesis dada se sigue el resultado.

20. Hagamos $u = \frac{z+1}{2}$ y resolvemos $u = 32$. Así:

$u_k = 2\left(\cos\frac{2k\pi}{6} + \mathrm{i}\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{6}\right)$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

$$\begin{array}{lclcl}
u_0 & = & 2 & & \\
u_1 & = & 2(\cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}) & = & 2\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + \sqrt{3}\mathrm{i} \\
u_2 & = & 2(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}) & = & -1 + \sqrt{3}\mathrm{i} \\
u_3 & = & 2(\cos\pi + \mathrm{i}\operatorname{sen}\pi) & = & -2 \\
u_4 & = & 2(\cos\frac{4\pi}{3} + \mathrm{i}\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}) & = & -1 - \sqrt{3}\mathrm{i} \\
u_5 & = & 2(\cos\frac{5\pi}{3} + \mathrm{i}\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}) & = & -1 - \sqrt{3}\mathrm{i}
\end{array}$$

A cada una de estas raíces u_k corresponde un z_k. A manera de ilustración hallaremos z_1.

$\frac{z+1}{2} = 1 + \sqrt{3}\mathrm{i}$, $z + 1 = z(1 + \sqrt{3}\mathrm{i})$, $-\sqrt{3}\mathrm{i}z = -1$, $z = \frac{1}{\sqrt{3}\mathrm{i}} = \frac{-\sqrt{3}\mathrm{i}}{3}$. Así $z_1 = \frac{-\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}$.

La representación queda al cuidado del estudiante.