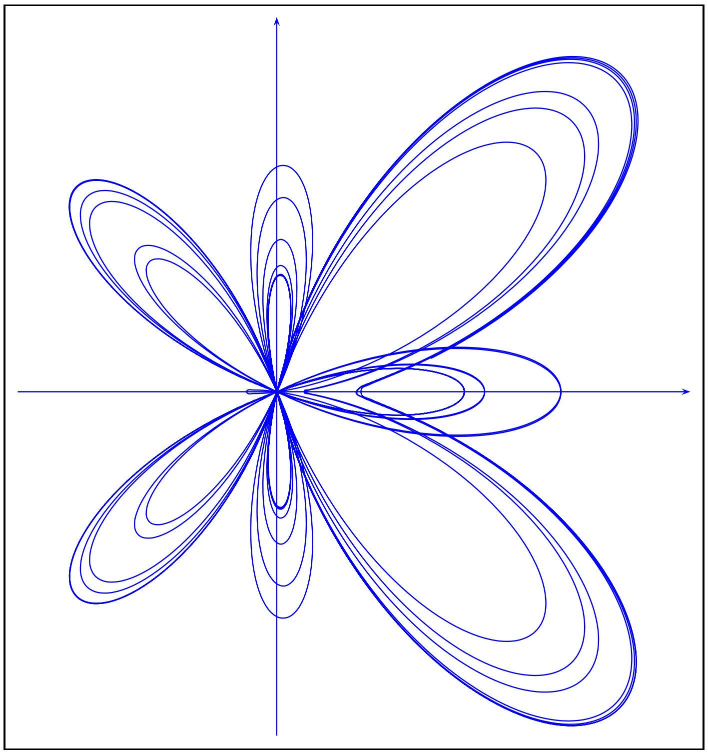
UNIVERSIDAD DE COSTA RICA



Serie: CABÉCAR

Cálculo Diferencial e Integral II

Teoría

Escuela de Matemática

Prof. Rodolfo Obando

Prof. Jorge Poltronieri

2001

Contenidos

Capítulo 1

Álgebra vectorial

1.1 Introducción a los vectores (geométricos)

En esta sección se introduce el concepto de vectores en el plano $\mathbb{R}^2$ y en el espacio $\mathbb{R}^3$. Se definen las operaciones: suma y multiplicación por un escalar de vectores y se establecen algunas propiedades básicas de estas operaciones.

Muchos conceptos físicos, como área, longitud y masa, se definen completamente una vez que se determina un número real, que representa su magnitud. Otras conceptos físicos, que denominamos vectores, no quedan determinados por completo hasta que se especifican una magnitud y una dirección.

Fuerza, desplazamiento y velocidad son ejemplos de estos vectores. Los vectores se pueden representar geométricamente como segmentos rectilíneos dirigidos, o flechas, en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$; la dirección de la flecha especifica la dirección del vector y la longitud del segmento describe su magnitud.[1]

a) El vector $\overrightarrow{AB}$

b) Vectores equivalentes

Figura 1

Si como en la Figura 1a, el punto inicial de un vector $\vec{\mathbf{v}}$, es A y el punto terminal es B, entonces el vector $\vec{\mathbf{v}}$ se puede escribir también de la siguiente manera: $\vec{\mathbf{v}} = \overrightarrow{AB}$.

Los vectores con la misma magnitud y la misma dirección, como los de la Figura 1b, se dice que son *equivalentes*. Si $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{w}}$ son equivalentes se escribe $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{w}}$.

[1] En las figuras los vectores los representaremos con letras negritas

Estos objetos matemáticos se pueden proveer de una suma y una multiplicación por escalar, con el objeto de fortalecer la noción, con la estructura de espacio vectorial.

Definición 1.1.1 Suma de vectores *Si $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{w}}$ son dos vectores cualesquiera, entonces la suma $\vec{\mathbf{v}}+\vec{\mathbf{w}}$ es el vector resultante de realizar la siguiente operación: colóquese el vector $\vec{\mathbf{w}}$ de modo que su punto inicial coincida con el punto terminal de $\vec{\mathbf{v}}$. El vector $\vec{\mathbf{v}}+\vec{\mathbf{w}}$ se representa por medio de la flecha que va del punto inicial de $\vec{\mathbf{v}}$ al punto terminal de $\vec{\mathbf{w}}$. (Figura 2)*

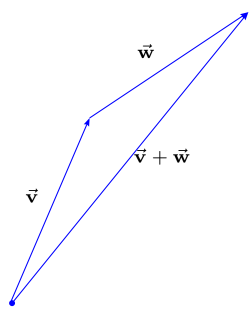
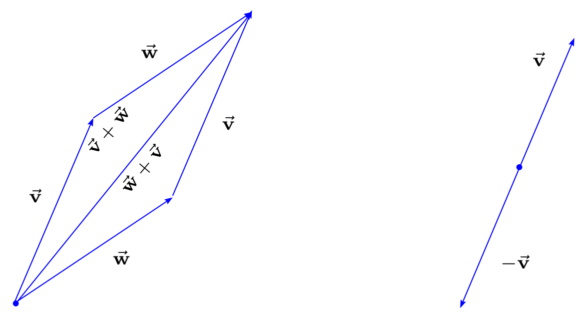


Figura 2



a) b)

Figura 3

En la Figura 3a, se han construido dos sumas, $\vec{\mathbf{v}}+\vec{\mathbf{w}}$ y $\vec{\mathbf{w}}+\vec{\mathbf{v}}$, es claro que: $\vec{\mathbf{v}}+\vec{\mathbf{w}}=\vec{\mathbf{w}}+\vec{\mathbf{v}}$ y que la suma coincide con la diagonal del paralelogramo determinado por $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{w}}$.

El vector de magnitud cero se denomina vector cero y se denota por $\vec{\mathbf{0}}$. Se define:

$$\vec{\mathbf{0}}+\vec{\mathbf{v}}=\vec{\mathbf{v}}+\vec{\mathbf{0}}=\vec{\mathbf{v}}$$

para todo vector $\vec{\mathbf{v}}$. Como no existe dirección natural para el vector cero, se convendrá en que se le puede asignar cualquier dirección, que resulte conveniente para el problema que se esté considerando.

Si $\vec{\mathbf{v}}$ es cualquier vector diferente de $\vec{\mathbf{0}}$, es evidente que el único vector $\vec{\mathbf{w}}$ que satisface $\vec{\mathbf{v}}+\vec{\mathbf{w}}=\vec{\mathbf{0}}$, es el vector que tiene la misma magnitud que $\vec{\mathbf{v}}$ pero cuya dirección es la opuesta Figura 3b). Este vector se conoce como negativo (o inverso aditivo de $\vec{\mathbf{v}}$) y se escribe:

$$\vec{\mathbf{w}}=-\vec{\mathbf{v}}.$$

Además se tiene que $-\vec{\mathbf{0}}=\vec{\mathbf{0}}$.

Definición 1.1.2 *Si $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{w}}$ son dos vectores cualesquiera, entonces la resta se define de la siguiente forma: (Figura 4a).*

$$\vec{\mathbf{v}}-\vec{\mathbf{w}}=\vec{\mathbf{v}}+(-\vec{\mathbf{w}}).$$

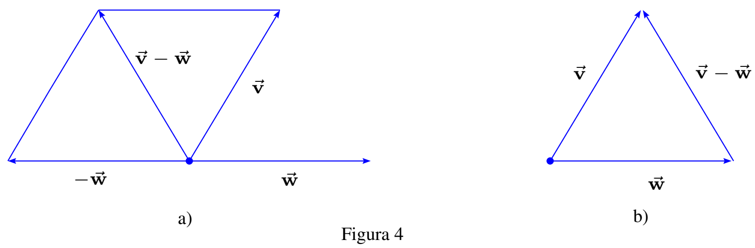


Figura 4

Para obtener la diferencia $\vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{w}}$, sin necesidad de construir $-\vec{\mathbf{w}}$, coloquemos $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{w}}$ de modo que coincidan sus puntos iniciales; el vector que va del punto terminal de $\vec{\mathbf{w}}$ hacia el punto terminal de $\vec{\mathbf{v}}$ es el vector $\vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{w}}$. (Figura 4b).

Definición 1.1.3 *El producto $k\vec{\mathbf{v}}$, $(k \in \mathbb{R})$, se define como el vector cuya magnitud es $|k|$ multiplicado por la longitud de $\vec{\mathbf{v}}$ y cuya dirección es la misma que la de $\vec{\mathbf{v}}$, si $k > 0$, y opuesta a la de $\vec{\mathbf{v}}$, si $k < 0$. Se tiene que $k\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{0}} \iff k = 0$ o $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{0}}$.*

En la Figura 5, se observa la relación entre un vector $\vec{\mathbf{v}}$ y los vectores $\frac{1}{2}\vec{\mathbf{v}}$, $-1\vec{\mathbf{v}}$, $2\vec{\mathbf{v}}$ y $-3\vec{\mathbf{v}}$. Nótese que el vector $-\vec{\mathbf{v}}$ tiene la misma longitud que $\vec{\mathbf{v}}$ pero su dirección es la opuesta. Por lo tanto $-\vec{\mathbf{v}}$ es precisamente el negativo de $\vec{\mathbf{v}}$, es decir $(-1)\vec{\mathbf{v}} = -\vec{\mathbf{v}}$.

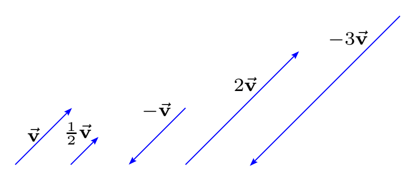


Figura 5

Teorema 1.1.1 *Sean $\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{v}}$, $\vec{\mathbf{w}}$ vectores geométricos y sean k, l, escalares, entonces se cumplen las siguientes propiedades:*

a) $\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{u}}$

b) $(\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}) + \vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{u}} + (\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}})$

c) $\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{0}} = \vec{\mathbf{0}} + \vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{u}}$

d) $\vec{\mathbf{u}} + (-\vec{\mathbf{u}}) = \vec{\mathbf{0}}$

e) $k(l\vec{\mathbf{u}}) = (kl)\vec{\mathbf{u}}$

f) $k(\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}) = k\vec{\mathbf{u}} + k\vec{\mathbf{v}}$

g) $(k + l)\vec{\mathbf{u}} = k\vec{\mathbf{u}} + l\vec{\mathbf{u}}$

h) $1\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{u}}$.

Demostración del inciso b) Supongamos que $\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{w}}$ se representan respectivamente por $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{QR}$ y $\overrightarrow{RS}$, como se muestra en la Figura 6, entonces:

$$\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}} = \overrightarrow{QS} \qquad \text{y} \qquad \vec{\mathbf{u}} + (\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}}) = \overrightarrow{PS},$$

también:

$$\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}} = \overrightarrow{PR} \qquad \text{y} \qquad (\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}) + \vec{\mathbf{w}} = \overrightarrow{PS},$$

por lo tanto: $\vec{\mathbf{u}} + (\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}}) = (\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}) + \vec{\mathbf{w}}$.

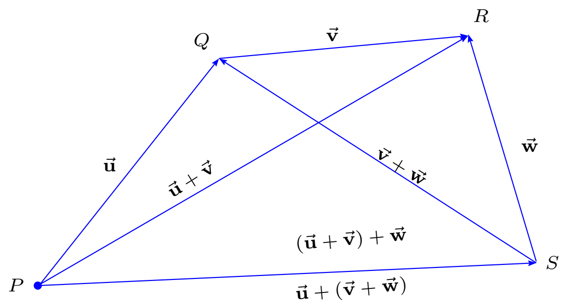


Figura 6

1.2 Vectores en el plano $\mathbb{R}^2$

Todos los segmentos de recta dirigidos de la Figura 7, son representaciones de un mismo vector. De la Figura 7 notamos entonces que un $\vec{\mathbf{v}}$ puede representarse de muchas maneras.

Sea $\overrightarrow{PQ}$ una representación de $\vec{\mathbf{v}}$, entonces sin que cambie su magnitud y su dirección $\overrightarrow{PQ}$ se puede desplazar paralelamente hasta que su punto inicial esté situado en el origen. Obtenemos así el segmento de recta dirigido $\overrightarrow{OR}$, que es otra representación de $\vec{\mathbf{v}}$. (Figura 8a).

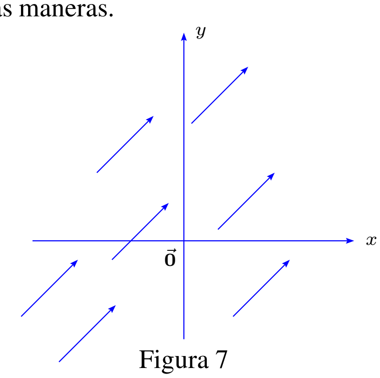
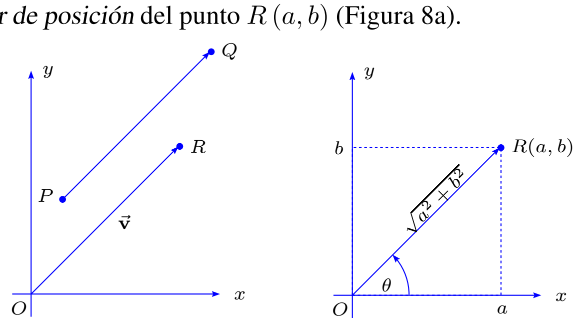


Figura 7

Supongamos ahora que las coordenadas cartesianas son (a, b), entonces el segmento de recta dirigido $\overrightarrow{OR}$ se puede describir mediante las coordenadas (a, b), es decir $\vec{\mathbf{v}} = \overrightarrow{OR}$ es el segmento de recta dirigido con punto inicial $(0, 0)$ y punto terminal (a, b). Como un vector se puede describir mediante cualquiera de sus representaciones, $\vec{\mathbf{v}}$ se puede expresar como (a, b). Esta representación particular de $\vec{\mathbf{v}}$ recibe el nombre de *vector de posición* del punto $R\,(a, b)$ (Figura 8a).



a) b)

Figura 8

Definición 1.2.1 Definición algebraica de un vector *Un vector $\vec{\mathbf{v}}$ en el plano xy es un par ordenado de número reales (a, b). Los números a y b reciben el nombre de componentes de $\vec{\mathbf{v}}$. El $\vec{\mathbf{0}}$ es el vector*

$(0,0)$.

Definición 1.2.2 Norma de un vector *A la magnitud de un vector se le da el nombre de norma de $\vec{\mathbf{v}}$ y se denota por $\|\vec{\mathbf{v}}\|$.*

Empleando la notación $\overrightarrow{OR}$ y escribiendo $\vec{\mathbf{v}}$ en la forma (a,b), tenemos:

$$\|\vec{\mathbf{v}}\| = \text{ magnitud de } \vec{\mathbf{v}} = \sqrt{a^2+b^2}. \tag{1.1}$$

Esto se deduce del teorema de Pitágoras (Figura 8b).

Ejemplo 1 Calcule las magnitudes de los siguientes vectores:

a) $(2,2)$

b) $(2,2\sqrt{3})$

c) $(-2\sqrt{3},2)$

d) $(-3,-3)$

e) $(6,-6)$

f) $(0,3)$.

Solución

a) $\|\vec{\mathbf{v}}\| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

b) $\|\vec{\mathbf{v}}\| = \sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2} = 4$.

c) $\|\vec{\mathbf{v}}\| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2+2^2} = 4$.

d) $\|\vec{\mathbf{v}}\| = \sqrt{(-3)^2+(-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

e) $\|\vec{\mathbf{v}}\| = \sqrt{6^2+(-6)^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

f) $\|\vec{\mathbf{v}}\| = \sqrt{0^2+3^2} = \sqrt{9} = 3$.

Definición 1.2.3 Dirección de un vector *Se define la dirección de $\vec{\mathbf{v}} = (a,b)$, como al ángulo θ, medido en radianes, que el vector $\vec{\mathbf{v}}$ forma con la dirección positiva del eje x.*

Por convención θ se elige de tal manera que $0 \leq \theta < 2\pi$. De la Figura 8b, se tiene que si $a \neq 0$, entonces:

$$\tan\theta = \frac{b}{a}\,. \tag{1.2}$$

Observación 1 $\tan\theta$ es una función periódica, con periodo π, por lo cual si $a \neq 0$, siempre existen dos números en $[\,0, 2\pi\,[$, tales que $\tan\theta = \dfrac{b}{a}$. Luego $\theta = \arctan\dfrac{b}{a}$, entonces:

$$\theta = \begin{cases} \arctan\dfrac{b}{a} & \text{si } x,\ y > 0 \\ \frac{\pi}{2} + \left|\arctan\dfrac{b}{a}\right| & \text{si } x < 0,\ y > 0 \\ \pi + \left|\arctan\dfrac{b}{a}\right| & \text{si } x < 0,\ y < 0 \\ \frac{3\pi}{2} + \left|\arctan\dfrac{b}{a}\right| & \text{si } x > 0,\ y < 0. \end{cases}$$

Por ejemplo, $\tan(\frac{\pi}{4}) = \tan(\frac{5\pi}{4}) = 1$. Con el fin de determinar θ en forma única es necesario determinar el cuadrante en el que se halla $\vec{\mathbf{v}}$ (Figura 9).

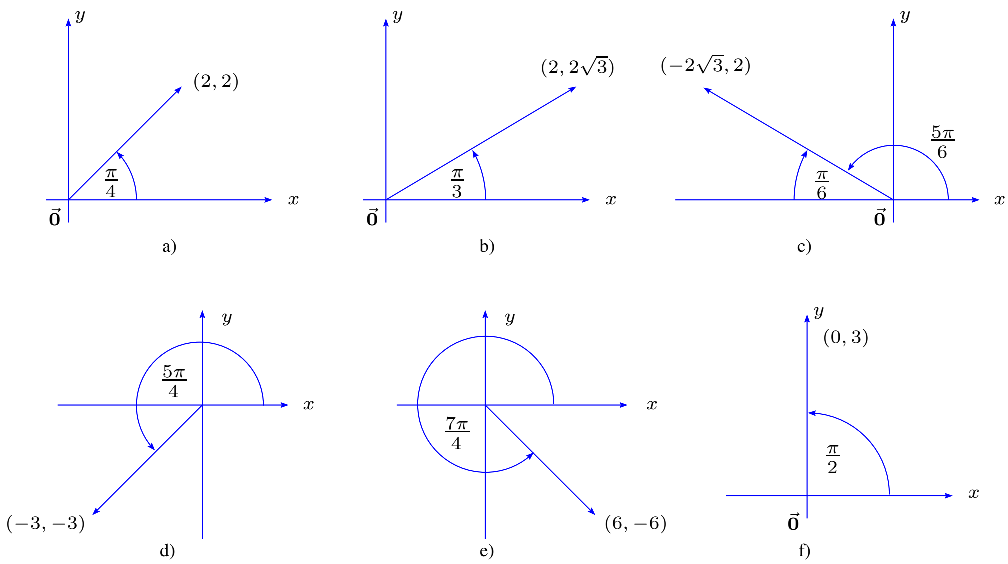


Figura 9

Ejemplo 2 Calcule las direcciones de los vectores del Ejemplo 1.

Solución Los seis vectores se ilustran en la Figura 9.

a) En este caso $\vec{\mathbf{v}}$ está en el primer cuadrante, y como $\tan\theta = \frac{2}{2} = 1 \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$.

b) En este caso $\theta = \arctan(\frac{2\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{3}$, ya que $\vec{\mathbf{v}}$ está en el primer cuadrante.

c) $\vec{\mathbf{v}}$ está en el segundo cuadrante y dado que $\arctan(\frac{2}{2\sqrt{3}}) = \frac{\pi}{6}$ de la Figura 9c, se tiene que: $\theta = \pi - (\frac{\pi}{6}) = \frac{5\pi}{6}$.

d) $\vec{\mathbf{v}}$ está en el tercer cuadrante y como $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, obtenemos que $\theta = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$.

e) Como $\vec{\mathbf{v}}$ está en el cuarto cuadrante y $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4} \Longrightarrow \theta = 2\pi - (\frac{\pi}{4}) = \frac{7\pi}{4}$.

f) No se puede emplear la fórmula (2), pues $a = 0$, pero $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\arctan\dfrac{3}{x}\right] = \dfrac{\pi}{2}$ y se concluye que

$\theta = \frac{\pi}{2}$.

En general, la dirección de $(0, b) = \frac{\pi}{2}$ y la dirección de $(0, -b) = \frac{3\pi}{2}$, (si $b > 0$).

Sean $\vec{\mathbf{v}} = (a_1, b_1)$ y $\vec{\mathbf{w}} = (a_2, b_2)$ vectores en $\mathbb{R}^2$, estos vectores son equivalentes, si y sólo si, tienen las mismas componentes, es decir si $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$.

Las operaciones de adición vectorial y multiplicación por escalares son muy fáciles de llevar a cabo en términos de sus componentes como se ilustra en la Figura 10.

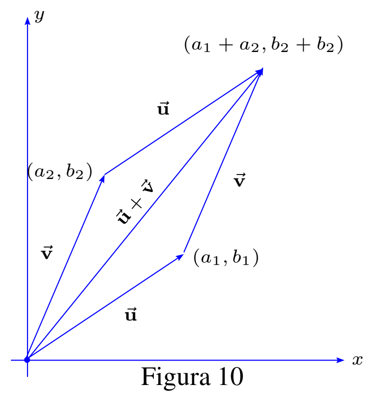


Figura 10

Supóngase que se suman $\vec{\mathbf{u}} = (a_1, b_1)$ y $\vec{\mathbf{v}} = (a_2, b_2)$, de la Figura 10, se deduce que el vector $\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}} = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$, se obtiene trasladando en forma paralela, la representación de $\vec{\mathbf{v}}$ hasta que su punto inicial coincida con el punto terminal (a_1, b_1) de $\vec{\mathbf{u}}$. Por lo tanto $\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}}$ se obtiene dibujando un paralelogramo con un vértice en el origen y lados $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$, entonces $\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}}$ es el vector situado a lo largo de la diagonal del paralelogramo y que apunta alejándose del origen.

Si $\vec{\mathbf{v}} = (a, b)$ y k es un escalar, entonces $k\vec{\mathbf{v}} = (k\,a, k\,b)$. Además se tiene que:

$$\|k\vec{\mathbf{v}}\| = \sqrt{k^2a^2 + k^2b^2} = |k|\,\sqrt{a^2 + b^2} = |k|\,\|\mathbf{v}\|\,. \tag{1.3}$$

Si $k > 0$, entonces $k\vec{\mathbf{v}}$ está en el mismo cuadrante que $\vec{\mathbf{v}}$, por lo que la dirección de $k\vec{\mathbf{v}}$ es la misma que la dirección de $\vec{\mathbf{v}}$, ya que $\arctan\left(\dfrac{k/b}{k/a}\right) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$.

Si $k < 0$, entonces $k\vec{\mathbf{v}}$ apunta en la dirección opuesta a la de $\vec{\mathbf{v}}$. Dicho de otra forma:

Dirección de $k\vec{\mathbf{v}}$ = dirección de $\vec{\mathbf{v}}$, si $k > 0$

Dirección de $k\vec{\mathbf{v}}$ = dirección de $\vec{\mathbf{v}} + \pi$, si $k < 0$.

Observación 2 Como en el plano un segmento de recta es la distancia más corta entre dos puntos, entonces de la Figura 10, se deduce que:

$$\|\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}\| \leq \|\vec{\mathbf{u}}\| + \|\vec{\mathbf{v}}\|\,. \tag{1.4}$$

Esta última desigualdad recibe el nombre de *desigualdad* de Cauchy-Schwarz. La igualdad se da si y sólo si $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ tienen la misma dirección.

Existen dos vectores especiales en $\mathbb{R}^2$, que permiten representar a los demás vectores de $\mathbb{R}^2$ en forma conveniente. Estos vectores son $\vec{\imath} = (1, 0)$ y $\vec{\jmath} = (0, 1)$ (Figura 11). Si $\vec{\mathbf{v}} = (a, b)$ es cualquier vector en el plano, entonces como $\vec{\mathbf{v}} = (a, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$, $\vec{\mathbf{v}}$ se puede escribir de la siguiente forma:

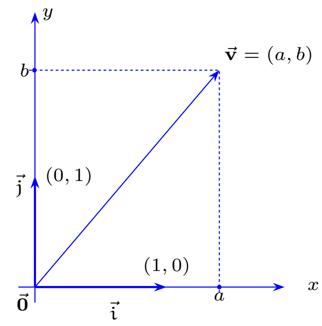


Figura 11

Figura 11

$$\vec{\mathbf{v}} = (a, b) = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}. \tag{1.5}$$

Si se utiliza esta representación se dice que $\vec{\mathbf{v}}$ está expresado en términos de sus componentes horizontal y vertical respectivamente. Los vectores $\vec{\imath}$ y $\vec{\jmath}$ tienen dos propiedades fundamentales:

a) Ninguno de ellos es múltiplo del otro. Se acostumbra decir en este caso, que los vectores $\vec{\imath}$ y $\vec{\jmath}$ son *linealmente independientes*.

b) Cualquier $\vec{\mathbf{v}}$ se puede escribir de manera única, en términos de $\vec{\imath}$ y $\vec{\jmath}$ como en la fórmula (1.5).

Definición 1.2.4 Vector unitario *Un vector unitario $\vec{\mathbf{u}}$ es un vector cuya longitud es* 1.

Observación 3 Los vectores $\vec{\imath}$ y $\vec{\jmath}$ son vectores unitarios y se acostumbra llamarlos *vectores unitarios canónicos o estándares*.

Ejemplo 3 El vector $\vec{\mathbf{u}} = (\frac{1}{2})\vec{\imath} + (\frac{\sqrt{3}}{2})\vec{\jmath}$ es un vector unitario, ya que su norma es igual a 1:

$$\|\vec{\mathbf{u}}\| = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = 1.$$

Sea $\vec{\mathbf{u}} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$ un vector unitario, entonces $\|\vec{\mathbf{u}}\| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$, por lo que $a^2 + b^2 = 1$ y $\vec{\mathbf{u}}$ se puede representar mediante un punto situado sobre el círculo unitario (Figura 12).

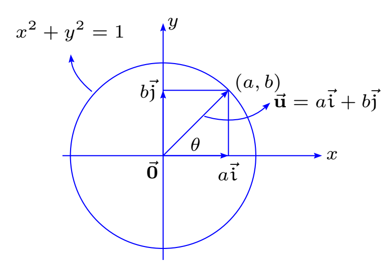


Figura 12

Si la dirección de $\vec{\mathbf{u}}$ es θ, entonces se tiene de inmediato que $a = \cos\theta$ y $b = \operatorname{sen}\theta$, por lo tanto todo vector unitario $\vec{\mathbf{u}}$ se puede escribir en la forma:

$$\vec{\mathbf{u}} = \vec{\imath}\cos\theta + \vec{\jmath}\operatorname{sen}\theta, \tag{1.6}$$

donde θ es la dirección de $\vec{\mathbf{u}}$.

Ejemplo 4 El vector unitario $\vec{\mathbf{u}} = \frac{1}{2}\,\vec{\imath} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\vec{\jmath}$ se puede escribir como en la fórmula 1.6, tomando $\theta = \arccos(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}$:

$$\vec{\mathbf{u}} = \vec{\imath}\cos(\frac{\pi}{3}) + \vec{\jmath}\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{3}).$$

Observación 4 Si $\vec{\mathbf{v}} \neq \vec{\mathbf{0}}$, entonces $\vec{\mathbf{u}} = \dfrac{\vec{\mathbf{v}}}{\|\vec{\mathbf{v}}\|}$, es un vector unitario que tiene la misma dirección que $\vec{\mathbf{v}}$.

Ejemplo 5 Hallar un vector unitario, cuya dirección sea la misma que la de $\vec{\mathbf{v}} = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}$.

Solución En este caso $\|\vec{\mathbf{v}}\| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$, por lo que $\vec{\mathbf{u}} = \dfrac{\mathbf{v}}{\|\vec{\mathbf{v}}\|} = (\frac{2}{\sqrt{13}})\vec{\imath} - (\frac{3}{\sqrt{13}})\vec{\jmath}$, es el vector unitario requerido.

1.3 Vectores en $\mathbb{R}^3$

Precisamente como los vectores en e1 plano se pueden representar por parejas de números reales, es posible describir los vectores en el espacio tridimensional por ternas de números reales, introduciendo un sistema de *coordenadas rectangulares.*

Para construir un sistema de coordenadas de este tipo, se selecciona un punto $\mathbf{0}$, conocido como *origen* y se eligen tres rectas mutuamente perpendiculares, llamadas *ejes de coordenadas*, que pasen por el origen. Estos ejes se denominan como x, y y z. Se selecciona una dirección positiva para cada uno de ellos. así como una unidad de longitud para medir las distancias (Figura 13a).

Cada par de ejes de coordenadas determinan un plano conocido como *plano coordenado.* Estos planos se conocen como *plano* xy, *plano* xz y *plano* yz.

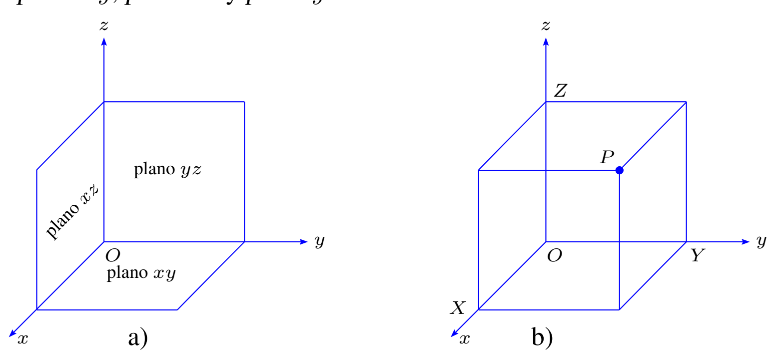


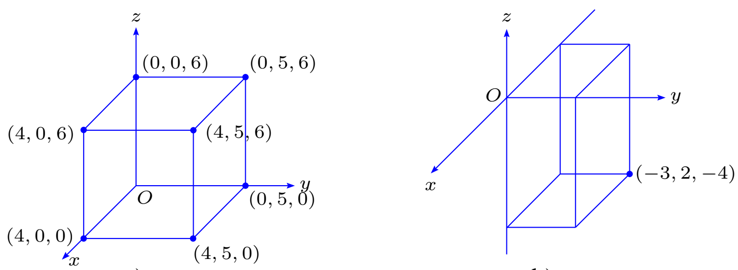
Figura 13

A cada punto P en el espacio tridimensional se le asigna una terna de números (x, y, z), llamados coordenadas de P (Figura 13b), como sigue: se trazan tres planos por P que sean paralelos a los planos coordenados y se denotan los puntos de intersección de estos planos con los tres ejes coordenados por X, Y y Z.

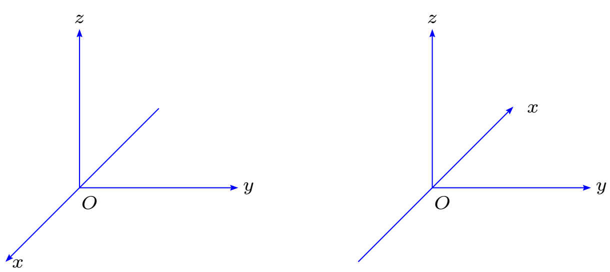
Las coordenadas de P se definen como las longitudes con signo:

$$x = \bar{OX}, \qquad y = \bar{OY}, \qquad z = \bar{OZ}.$$

Ejemplo 6 En la Figura 14a, se han situado varios puntos con sus respectivas coordenadas y en la Figura 14b, hemos ubicado el punto $Q(-3, 2, -4)$.



a) Figura 14 b)



a) Figura 15 b)

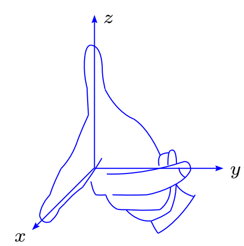


Figura 16

1.3.1 Orientación del espacio $\mathbb{R}^3$

Los sistemas de coordenadas rectangulares se dividen en dos categorías: *sistemas de mano derecha* si los ejes se disponen como en la figura (Figura 15a) y *sistemas de mano izquierda* si los ejes se disponen como en la (Figura 15b).

En las figuras, las flechas indican las direcciones positivas de los ejes. La razón de esta terminología es la siguiente: si es un sistema de mano derecha una persona orienta su mano derecha de tal manera que su dedo índice apunte en la dirección positiva del eje x y su dedo medio apunte en la dirección positiva del eje y, entonces su dedo pulgar apuntará en la dirección positiva del eje z.

Esto se ilustra en la (Figura 16). En un sistema de mano izquierda sucede algo similar pero con la mano izquierda. En lo sucesivo, seguiremos la práctica común, la cual consiste en dibujar los ejes coordenados mediante un sistema de mano derecha. Si como en la Figura 17a), un vector $\vec{v}$ en el espacio tridimensional se ubica de modo que su punto inicial quede en el origen de un sistema rectangular de coordenadas, entonces las coordenadas del punto terminal se conocen como componentes de $\vec{\mathbf{v}}$ y se escribe: (al vector $\vec{\mathbf{v}}$, en este caso también se le llama vector de posición del punto $R\,(v_1, v_2, v_3)$).

$$\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3).$$

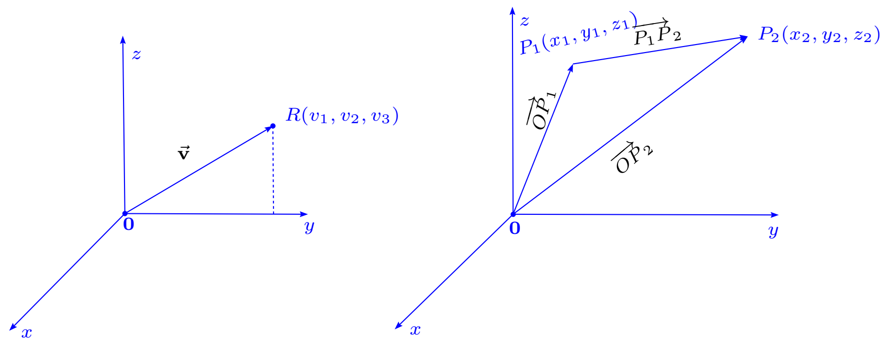


Figura 17

Si $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{\mathbf{w}} = (w_1, w_2, w_3)$ son dos vectores en el espacio tridimensional, entonces es posible aplicar argumentos semejantes a los usados para los vectores en $\mathbb{R}^2$, con el fin de establecer los siguientes resultados:

a) $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{w}}$ son equivalentes si y sólo si $v_1 = w_1$, $v_2 = w_2$ y $v_3 = w_3$.

b) $\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3)$.

c) $k\vec{\mathbf{v}} = (kv_1, kv_2, kv_3)$, donde $k \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 7 Si $\vec{\mathbf{v}} = (1, -3, 2)$ y $\vec{\mathbf{w}} = (4, 2, 1)$, entonces:

a) $\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}} = (1, -3, 2) + (4, 2, 1) = (1 + 4, -3 + 2, 2 + 1) = (5, -1, 3)$.

b) $2\vec{\mathbf{v}} = 2(1, -3, 2) = (2, -6, 4)$.

c) $-\vec{\mathbf{w}} = (-4, -2, -1)$.

d) $\vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{v}} + (-\vec{\mathbf{w}}) = (1, -3, 2) + (-4, -2, -1) = (-3, -5, 1)$.

En muchas ocasiones se tienen vectores que no tienen sus puntos iniciales en el origen. Si el vector $\overrightarrow{P_1P_2}$ tiene el punto inicial $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y el punto terminal $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, entonces:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1), \tag{1.7}$$

es decir las componentes de $\overrightarrow{P_1P_2}$ se obtienen al restar las coordenadas del punto inicial de las coordenadas del punto terminal. Se puede ver esto considerando la Figura 17 b). El vector $\overrightarrow{P_1P_2}$ es la diferencia de los vectores de los vectores de posición $\overrightarrow{OP_1}$ y $\overrightarrow{OP_2}$, de modo que:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1). \tag{1.8}$$

Ejemplo 8 Calcular las componentes de $\overrightarrow{P_1P_2}$, si tiene como punto inicial $P_1(2,-1,4)$ y como punto terminal $P_2(7,5,-8)$.

Solución Las componentes del vector $\vec{\mathbf{v}} = \overrightarrow{P_1P_2}$, de acuerdo a la fórmula (1.8), serán:

$$\vec{\mathbf{v}} = (7-2, 5-(-1), -8-4) = (5, 6, -12).$$

Observación 5 De la misma manera, en el espacio bidimensional, el vector $\vec{\mathbf{v}} = \overrightarrow{P_1P_2}$, con punto inicial en $P_1 = (x_1, y_1)$ y punto terminal en $P_2 = (x_2, y_2)$ es:

$$\vec{\mathbf{v}} = \overrightarrow{P_1P_2} = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) \tag{1.9}$$

Ejemplo 9 Se pueden simplificar las soluciones para muchos problemas, trasladando los ejes de coordenadas a fin de obtener nuevos ejes paralelos a los originales.

Solución En la Figura 18a, se han trasladado los ejes de coordenadas xy, para obtener un sistema de coordenadas $x'y'$ cuyo origen $\mathbf{0}'$ está en el punto $(x,y) = (k,l)$. El punto P en el espacio bidimensional ahora tiene tanto las coordenadas (x,y) como las coordenadas (x',y').

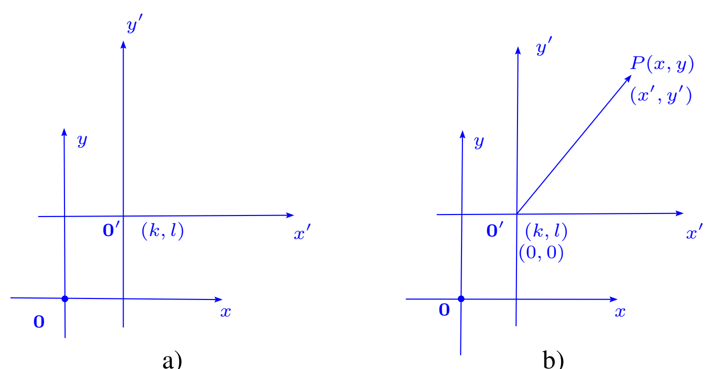


Figura 18

Para ver la forma en la que las dos están relacionadas, consideremos el vector $\overrightarrow{0'P}$, Figura 18b. En el sistema xy, su punto inicial está en (k,l) y su punto terminal en (x,y), por lo tanto $\overrightarrow{0P} = (x-k, y-l)$. En el sistema $x'y'$, su punto inicial está en $(0,0)$ y su punto terminal en (x',y'); así entonces $\overrightarrow{0P} = (x',y')$. Por lo tanto

$$x' = x - k \quad \text{y} \quad y' = y - l. \tag{1.10}$$

Las expresiones (1.10) se llaman *ecuaciones de traslación*

En el espacio tridimensional, las ecuaciones de traslación son:

$$x' = x - k, \quad y' = y - l, \quad z' = z - m,$$

donde (k, l, m), son las coordenadas del nuevo origen.

Ejemplo 10 Si el nuevo origen está en $(k, l) = (4, 1)$ y las coordenadas xy del punto P son $(2, 0)$, entonces las coordenadas $x'y'$ de P son: $x' = 2 - 4 = -2$ y $y' = 0 - 1 = -1$.

1.4 Norma de un vector en $\mathbb{R}^3$. Aritmética vectorial

En esta sección estableceremos las reglas básicas de la aritmética vectorial.

Teorema 1.4.1 *Si $\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{v}}$, $\vec{\mathbf{w}}$ son vectores en $\mathbb{R}^3$ y k, l son escalares, entonces se cumplen las siguientes relaciones:*

a) $\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{u}}$.

b) $(\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}) + \vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{u}} + (\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}})$.

c) $\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{0}} = \vec{\mathbf{0}} + \vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{u}}$.

d) $\vec{\mathbf{u}} + (-\vec{\mathbf{u}}) = \vec{\mathbf{0}}$.

e) $k(l\vec{\mathbf{u}} = (kl)\vec{\mathbf{u}}$.

f) $k(\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}) = k\vec{\mathbf{u}} + k\vec{\mathbf{v}}$.

g) $(k + l)\vec{\mathbf{u}} = k\vec{\mathbf{u}} + l\vec{\mathbf{u}}$.

h) $1\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{u}}$.

Observación 6 En la página 3 dimos una demostración geométrica del inciso b). A continuación daremos una demostración analítica de este mismo inciso para vectores en el espacio tridimensional. La demostración para el espacio bidimensional es similar.

Demostración del inciso b) Si $\vec{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{\mathbf{w}} = (w_1, w_2, w_3)$, entonces:

$$\begin{aligned}
(\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}) + \vec{\mathbf{w}} &= [(u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3)] + (w_1, w_2, w_3) \\
&= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) + (w_1, w_2, w_3) \\
&= ([u_1 + v_1] + w_1, [u_2 + v_2] + w_2, [u_3 + v_3] + w_3) \\
&= (u_1 + [v_1 + w_1], u_2 + [v_2 + w_2], u_3 + [v_3 + w_3]) \\
&= (u_1, u_2, u_3) + (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3) \\
&= \vec{\mathbf{u}} + (\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}}).
\end{aligned}$$

Sea $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$, un vector en $\mathbb{R}^3$. Basándonos en la Figura 19, con dos aplicaciones del teorema de Pitágoras, obtenemos:

$$\|\vec{\mathbf{v}}\|^2 = \left\|\overrightarrow{OR}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{RP}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{OQ}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{OS}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{RP}\right\|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2,$$

por lo tanto,

$$\|\vec{\mathbf{v}}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}. \tag{1.11}$$

Si $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ son dos puntos en $\mathbb{R}^3$ (ver Figura 17b, página 11), entonces la distancia D entre ellos es la *norma* del vector $\overrightarrow{P_1P_2}$.

Debido a que $\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, entonces de (1.11) se deduce que:

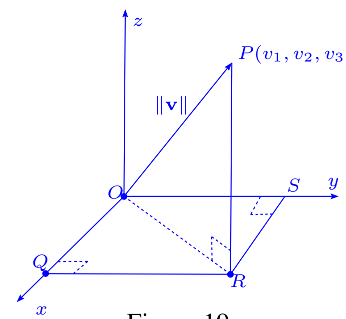


Figura 19

$$D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{1.12}$$

De modo análogo, si $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$, son puntos en $\mathbb{R}^2$, entonces la distancia entre ellos está dada por:

$$D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Observación 7 Un vector unitario $\vec{\mathbf{u}}$ en $\mathbb{R}^3$ es un vector cuya norma es 1. Si $\vec{\mathbf{v}} \neq \vec{\mathbf{0}}$, entonces $\vec{\mathbf{u}} = \dfrac{\vec{\mathbf{v}}}{\|\vec{\mathbf{v}}\|}$, es un vector unitario que apunta en la misma dirección que $\vec{\mathbf{v}}$.

Ejemplo 11 Dados los puntos $P\,(2, 1, 4)$ y $Q\,(3, -2, 8)$.

a) Hallar la norma o distancia de $\overrightarrow{PQ}$.

b) Hallar la norma o distancia de $\overrightarrow{QP}$.

c) Determine un vector unitario $\vec{\mathbf{u}}$ en la dirección de $\overrightarrow{PQ}$.

Solución

a) En este caso aplicamos la fórmula 1.12:

$$D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{(3-2)^2 + (-2-1)^2 + (8-4)^2} = \sqrt{26}.$$

b) Otro procedimiento para calcular la norma consiste en determinar las componentes de $\overrightarrow{QP}$. Luego aplicamos la fórmula (1.11):

$$\vec{\mathbf{v}} = \overrightarrow{QP} = P - Q = (2, 1, 4) - (3, -2, 8) = (-1, 3, -4),$$

luego, la norma de $\vec{\mathbf{v}}$ es la siguiente: $\|\vec{\mathbf{v}}\| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + (-4)^2} = \sqrt{26}$.

c) Determinamos inicialmente el vector $\overrightarrow{PQ}$:

$$\vec{\mathbf{v}} = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (3, -2, 8) - (2, 1, 4) = (1, -3, 4),$$

luego calculamos la norma de $\vec{\mathbf{v}}$:

$$\|\vec{\mathbf{v}}\| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 4^2} = \sqrt{26},$$

entonces por definición, el vector unitario buscado será:

$$\vec{\mathbf{u}} = \frac{\vec{\mathbf{v}}}{\|\vec{\mathbf{v}}\|} = \frac{1}{\sqrt{26}}(1, -3, 4),$$

ya que la norma de $\vec{\mathbf{u}}$ es 1. Verifíquelo !!

Definición 1.4.1 *La dirección de un vector $\vec{\mathbf{v}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ en $\mathbb{R}^3$ se define como el vector unitario $\vec{\mathbf{u}} = \frac{\vec{\mathbf{v}}}{\|\vec{\mathbf{v}}\|}$.*

Observación 8 También se pudo haber definido en esta forma la dirección de un vector $\vec{\mathbf{v}}$ en $\mathbb{R}^2$ ya que si:

$$\vec{\mathbf{u}} = \frac{\vec{\mathbf{v}}}{\|\vec{\mathbf{v}}\|},$$

entonces $\vec{\mathbf{u}} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, donde θ es la dirección de $\vec{\mathbf{v}}$.

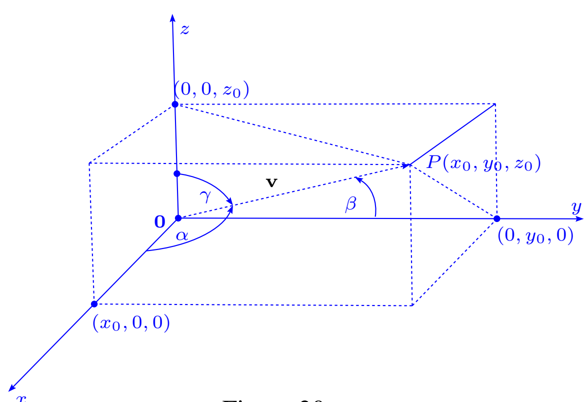


Figura 20

Sea $\vec{\mathbf{v}}$ el vector $\overrightarrow{OP}$ ilustrado en la Figura 20, se definen α como el ángulo entre $\vec{\mathbf{v}}$ y la parte positiva del eje x, β como el ángulo entre $\vec{\mathbf{v}}$ y la parte positiva del eje y, y γ como el ángulo entre $\vec{\mathbf{v}}$ y la parte positiva del eje z. Los ángulos α, β, y γ reciben el nombre de *ángulos de dirección o ángulos directores* del vector $\vec{\mathbf{v}}$. Así, de la Figura 20 tenemos:

$$\cos\alpha = \frac{x_0}{\|\vec{\mathbf{v}}\|}, \quad \cos\beta = \frac{y_0}{\|\vec{\mathbf{v}}\|}, \quad \cos\gamma = \frac{z_0}{\|\vec{\mathbf{v}}\|} \tag{1.13}$$

Si $\vec{\mathbf{v}}$ es un vector unitario, entonces $\|\vec{\mathbf{v}}\| = 1$ y $\cos\alpha = x_0$, $\cos\beta = y_0$, $\cos\gamma = z_0$.

Por definición, cada uno de los ángulos α, β y γ se encuentra en el intervalo $[0, \pi]$. Los cosenos de estos ángulos reciben el nombre genérico de *cosenos directores* de $\vec{\mathbf{v}}$. Además considerando las ecuaciones (1.13), tenemos:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}{\|\vec{\mathbf{v}}\|^2} = \frac{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} = 1. \tag{1.14}$$

Si α, β, γ son tres números (cada uno entre 0 y π), tales que satisfacen la condición (1.14), entonces determinan el vector único dado por $\vec{\mathbf{u}} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

Observación 9 Si $\vec{\mathbf{v}} = (a, b, c)$ y $\vec{\mathbf{v}} \neq 1$, entonces a, b y c reciben el nombre de *números directores* de $\vec{\mathbf{v}}$.

Ejemplo 12 Sea $\vec{\mathbf{v}} = (4, -1, 6)$, determine los cosenos directores de $\vec{\mathbf{v}}$.

Solución Calculemos inicialmente un vector unitario $\vec{\mathbf{u}}$ en la dirección de $\vec{\mathbf{v}}$:

$$\vec{\mathbf{u}} = \frac{\vec{\mathbf{v}}}{\|\vec{\mathbf{v}}\|} = \frac{(4,-1,6)}{\sqrt{4^2+(-1)^2+6^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{53}}\right)(4,-1,6) = \left(\frac{4}{\sqrt{53}}, \frac{-1}{\sqrt{53}}, \frac{6}{\sqrt{53}}\right),$$

luego por la fórmula (1.13) obtenemos:

$$\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{53}}, \quad \cos\beta = \frac{-1}{\sqrt{53}}, \quad \cos\gamma = \frac{6}{\sqrt{53}}.$$

Los ángulos directores de $\vec{\mathbf{v}}$ son $\alpha = \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{53}}\right) = 0,9891\,\mathrm{rad} \approx 56,7°$, $\beta = \arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{53}}\right) = 1,70859 \approx 97,9°$, $\gamma = \arccos\left(\frac{6}{\sqrt{53}}\right) = 0,602073 \approx 34,5°$.

El vector $\vec{\mathbf{v}}$ se muestra en la Figura 21, junto con sus respectivos ángulos.

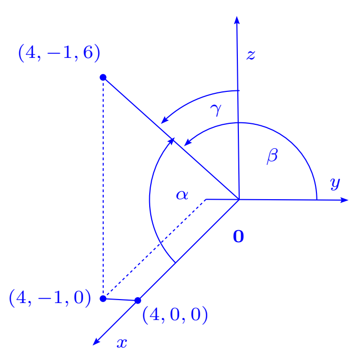


Figura 21

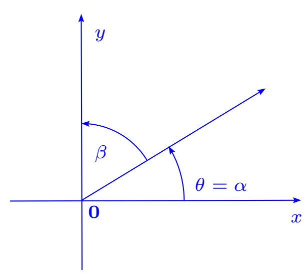


Figura 22

Observación 10 Es interesante notar que si en $\mathbb{R}^2$, $\vec{\mathbf{v}}$ es un vector unitario y se escribe $\vec{\mathbf{v}} = (\cos\theta)\vec{\imath} + (\operatorname{sen}\theta)\vec{\jmath}$, siendo θ la dirección de $\vec{\mathbf{v}}$, entonces $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$ son los cosenos directores de $\vec{\mathbf{v}}$. En este caso $\alpha = \theta$ y β, (ver Figura 22), se define como el ángulo que $\vec{\mathbf{v}}$ forma con en el eje y, entonces $\beta = (\frac{\pi}{2}) - \alpha$, de donde $\cos\beta = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$ y $\vec{\mathbf{v}}$ se puede escribir en la forma de coseno director:

$$\vec{\mathbf{v}} = \vec{\imath}\cos\alpha + \vec{\jmath}\cos\beta.$$

Observación 11 En la sección 1.2, página 4, se observó que todo vector en el plano se puede expresar en términos de los vectores $\vec{\imath}$ y $\vec{\jmath}$. Con el fin de extender esta idea a $\mathbb{R}^3$ se definen:

$$\vec{\mathrm{i}} = (1,0,0), \quad \vec{\mathrm{j}} = (0,1,0), \quad \vec{\mathrm{k}} = (0,0,1)$$

Los vectores $\vec{\mathrm{i}}$, $\vec{\mathrm{j}}$, $\vec{\mathrm{k}}$ son vectores unitarios y están representados en la Figura 23. Si $\vec{\mathbf{v}}$ es cualquier vector en $\mathbb{R}^3$, entonces: $\vec{\mathbf{v}} = (x,y,z) = (x,0,0)+(0,y,0)+(0,0,z) = x\vec{\mathrm{i}} + y\vec{\mathrm{j}} + z\vec{\mathrm{k}}$, es decir todo vector $\vec{\mathbf{v}}$ en $\mathbb{R}^3$ *se puede escribir en forma única en términos de* $\vec{\mathrm{i}}$, $\vec{\mathrm{j}}$, $\vec{\mathrm{k}}$, o bien como una combinación lineal única de estos vectores.

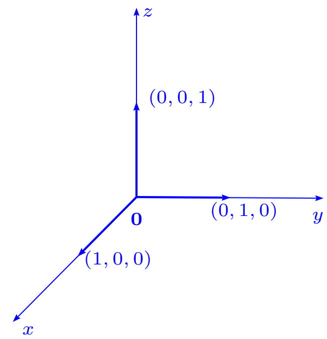


Figura 23

1.5 Producto escalar (punto). Proyecciones

En esta sección presentaremos el producto escalar de vectores en los espacios bidimensional y tridimensional, donde se establecen las propiedades de este producto y se analizan algunas de sus aplicaciones.

Sean $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ dos vectores diferentes de $\vec{\mathbf{0}}$ en los espacios bidimensional o tridimensional y supongamos que estos vectores se han colocado de modo que sus puntos iniciales coincidan. Se dirá que el ángulo entre $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ es el ángulo θ determinado por $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ que satisface $0 \leq \theta \leq \pi$ (Figura 24).

Definición 1.5.1 *Si $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ son vectores en los espacios bidimensional o tridimensional y θ es el ángulo entre $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$, entonces el producto escalar $\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}}$ se define de la siguiente manera:*

$$\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}} = \begin{cases} \|\vec{\mathbf{u}}\|\,\|\vec{\mathbf{v}}\|\cos\theta, & si\ \vec{\mathbf{u}} \neq \mathbf{0}\ y\ \vec{\mathbf{v}} \neq \mathbf{0} \\ 0 & si\ \vec{\mathbf{u}} = 0\ o\ \vec{\mathbf{v}} = \mathbf{0}. \end{cases}$$

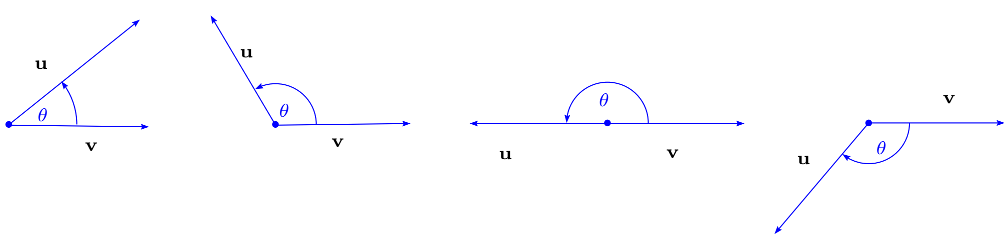


Figura 24

Sean $\vec{\mathbf{u}} = (u_1,u_2,u_3)$ y $\vec{\mathbf{v}} = (v_1,v_2,v_3)$ dos vectores diferentes de $\vec{\mathbf{0}}$, si como en la Figura 25, θ es el ángulo entre $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$, entonces por la ley de los cosenos obtenemos:

$$\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|^2 = \|\vec{\mathbf{u}}\|^2 + \|\vec{\mathbf{v}}\|^2 - 2\,\|\vec{\mathbf{u}}\|\,\|\vec{\mathbf{v}}\|\cos\theta.$$

Puesto que $\overrightarrow{PQ} = \vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{u}}$ (Figura 25), entonces la expresión anterior se puede volver a escribir, como:

$$\|\vec{\mathbf{u}}\|\,\|\vec{\mathbf{v}}\|\cos\theta = \frac{1}{2}\,(\|\vec{\mathbf{u}}\|^2 + \|\vec{\mathbf{v}}\|^2 - \|\vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{u}}\|^2),$$

o bien

$$\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}} = \frac{1}{2}\,(\|\vec{\mathbf{u}}\|^2 + \|\vec{\mathbf{v}}\|^2 - \|\vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{u}}\|^2).$$

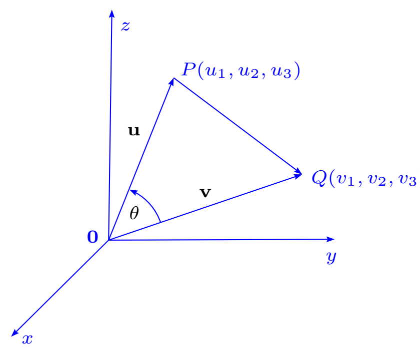


Figura 25

Al hacer la sustitución $\|\vec{\mathbf{u}}\|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$, $\|\vec{\mathbf{v}}\|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$ y $\|\vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{u}}\|^2 = (v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + (v_3 - u_3)^2$, después de simplificar se obtiene:

$$\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3. \tag{1.15}$$

Si $\vec{\mathbf{u}} = (u_1, u_2)$ y $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2)$, son dos vectores en $\mathbb{R}^2$, entonces la fórmula que corresponde a (1.15) es:

$$\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}} = u_1v_1 + u_2v_2.$$

Ejemplo 13 Dados los vectores $\vec{\mathbf{u}} = (2, -1, 1)$ y $\vec{\mathbf{v}} = (1, 1, 2)$:

a) Calcule $\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}}$.

b) Determine el ángulo θ entre $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$.

Solución

a) Aplicando la fórmula 1.15 obtenemos:

$$\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}} = (2)(1) + (-1)(1) + (1)(2) = 3.$$

b) Calculemos las normas de $\vec{\mathbf{u}}$ y de $\vec{\mathbf{v}}$ respectivamente:

$$\|\vec{\mathbf{u}}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6} = \|\vec{\mathbf{v}}\|\,,$$

entonces,

$$\cos\theta = \frac{\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\vec{\mathbf{v}}\|} = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \arccos(\frac{1}{2}) = 60^\circ = \frac{\pi}{3}\,.$$

En el siguiente teorema se demuestra como puede usarse el producto escalar para obtener información acerca del ángulo entre dos vectores. También se establece una importante relación entre la norma y el producto escalar.

Teorema 1.5.1 *Sean* $\vec{\mathbf{u}}$ *y* $\vec{\mathbf{v}}$ *vectores en* $\mathbb{R}^2$ *o en* $\mathbb{R}^3$.

a) $\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{v}} = \|\vec{\mathbf{v}}\|^2$*, es decir,* $\|\vec{\mathbf{v}}\| = (\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{v}})^{\frac{1}{2}}$.

b) Si $\vec{\mathbf{u}}$ *y* $\vec{\mathbf{v}}$ *son vectores diferentes de cero y* θ *es el ángulo entre ellos, entonces:*

θ *es agudo si y sólo si* $\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}} > 0$

θ *es obtuso si y sólo si* $\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}} < 0$

$\theta = \frac{\pi}{2}$ *si y sólo si* $\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}} = 0$.

Demostración

a) Si suponemos que el ángulo θ que está entre $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ es igual a cero, tenemos: $\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{v}} = \|\vec{\mathbf{v}}\|\,\|\vec{\mathbf{v}}\|\cos\theta = \|\vec{\mathbf{v}}\|^2\cos 0 = \|\vec{\mathbf{v}}\|^2$.

b) Dado que $\|\vec{\mathbf{u}}\| > 0$, $\|\vec{\mathbf{v}}\| > 0$ y $\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}} = \|\vec{\mathbf{u}}\|\,\|\vec{\mathbf{v}}\|\cos\theta$, entonces $\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}}$ tiene el mismo signo que $\cos\theta$. Si suponemos que θ satisface $0 \leq \theta \leq \pi$, entonces θ es agudo si y sólo si $\cos\theta > 0$, θ es obtuso si y sólo si $\cos\theta < 0$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$ si y sólo si $\cos\theta = 0$.

Ejemplo 14 Si $\vec{\mathbf{u}} = (1, -2, 3)$, $\vec{\mathbf{v}} = (-3, 4, 2)$ y $\vec{\mathbf{w}} = (3, 6, 3)$, entonces:

$$\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}} = (1)(-3) + (-2)(4) + (3)(2) = -5$$

$$\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{w}} = (-3)(3) + (4)(6) + (2)(3) = 21$$

$$\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{w}} = (1)(3) + (-2)(6) + (3)(3) = 0.$$

Por lo tanto en este ejemplo $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ forman un ángulo obtuso, $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{w}}$, forman un ángulo agudo y $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{w}}$ son perpendiculares.

En el siguiente teorema enunciaremos las propiedades principales del producto escalar.

Teorema 1.5.2 *Si* $\vec{\mathbf{u}}$*,* $\vec{\mathbf{v}}$*,* $\vec{\mathbf{w}}$ *son vectores en* $\mathbb{R}^2$ *o* $\mathbb{R}^3$ *y* $k \in \mathbb{R}$*, entonces:*

a) $\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{u}}$

b) $\vec{\mathbf{u}}\cdot(\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}}) = \vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{w}}$

c) $k(\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}}) = (k\vec{\mathbf{u}})\cdot\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{u}}\cdot(k\vec{\mathbf{v}})$

d) $\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{v}} > 0$ *y* $\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{v}} = 0$ *si y sólo si* $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{0}}$.

Demostración Probaremos c), para vectores en $\mathbb{R}^3$, las demás demostraciones se dejan como ejercicios. Sean $\vec{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$, entonces:

$$k(\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}} = k(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3) = (ku_1)v_1 + (ku_2)v_2 + (ku_3)v_3 = k\vec{\mathbf{u}})\cdot\vec{\mathbf{v}}.$$

De la misma manera se demuestra que $k(\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}}) = \vec{\mathbf{u}}\cdot(k\cdot\vec{\mathbf{v}})$.

En base al inciso b) del Teorema 1.5.1, página 19, se definen dos vectores $\vec{\mathbf{u}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ y $\vec{\mathbf{v}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ como ortogonales (representado de la siguiente forma: $\vec{\mathbf{u}} \perp \vec{\mathbf{v}}$), si $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = 0$.

El producto escalar es sumamente útil cuando se quiere descomponer un vector en una suma de vectores perpendiculares.

Si $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$, son vectores diferentes de $\vec{\mathbf{0}}$ en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$, entonces siempre es posible escribir $\vec{\mathbf{u}}$ como:

$$\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{w}}_1 + \vec{\mathbf{w}}_2,$$

donde $\vec{\mathbf{w}}_1$ es un múltiplo escalar de $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{w}}_2$ es perpendicular a $\vec{\mathbf{v}}$ (Figura 26). El vector $\vec{\mathbf{w}}_1$ recibe el nombre de proyección ortogonal de $\vec{\mathbf{u}}$ sobre $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{w}}_2$ es el vector componente de $\vec{\mathbf{u}}$ ortogonal a $\vec{\mathbf{v}}$.

Los vectores $\vec{\mathbf{w}}_1$ y $\vec{\mathbf{w}}_2$ se pueden obtener de la siguiente manera. Como $\vec{\mathbf{w}}_1$ es un múltiplo escalar de $\vec{\mathbf{v}}$, podemos escribirlo en la forma $\vec{\mathbf{w}}_1 = c\vec{\mathbf{v}}$. Por lo tanto:

$$\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{w}}_1 + \vec{\mathbf{w}}_2 = c\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}}_2. \tag{1.16}$$

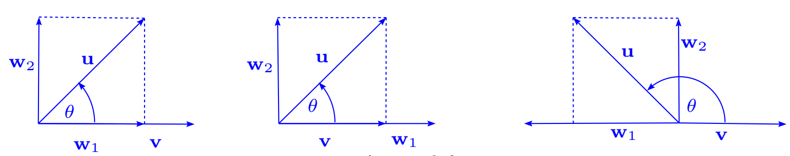


Figura 26

Luego, multiplicamos escalarmente (1.16) por $\vec{\mathbf{v}}$:

$$\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = (c\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}}_2) \cdot \vec{\mathbf{v}} = c \left\| \vec{\mathbf{v}} \right\|^2 + \vec{\mathbf{w}}_2 \vec{\mathbf{v}}.$$

Dado que $\vec{\mathbf{w}}_2$ es el vector perpendicular a $\vec{\mathbf{v}}$ (Figura 26), tenemos que $\vec{\mathbf{w}}_2 \cdot \vec{\mathbf{v}} = 0$, de modo que por la ecuación anterior se llega a:

$$c = \frac{\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}}{\left\| \vec{\mathbf{v}} \right\|^2},$$

y como $\vec{\mathbf{w}}_1 = c\vec{\mathbf{v}}$, obtenemos la proyección ortogonal ($\text{proy}_{\vec{\mathbf{v}}}\, \vec{\mathbf{u}}$) de $\vec{\mathbf{u}}$ sobre $\vec{\mathbf{v}}$:

$$\vec{\mathbf{w}}_1 = \left(\frac{\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}}{\left\| \vec{\mathbf{v}} \right\|^2}\, \vec{\mathbf{v}}\right). \tag{1.17}$$

La proyección ortogonal de $\vec{\mathbf{u}}$ sobre $\vec{\mathbf{v}}$ puede escribirse como un múltiplo escalar de un vector unitario en la dirección de $\vec{\mathbf{v}}$. Esto es:

$$\vec{\mathbf{w}}_1 = (\frac{\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}}}{\|\vec{\mathbf{v}}\|^2})\vec{\mathbf{v}} = (\frac{\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}}}{\|\vec{\mathbf{v}}\|})\,\frac{\vec{\mathbf{v}}}{\|\vec{\mathbf{v}}\|} = k\,\frac{\vec{\mathbf{v}}}{\|\vec{\mathbf{v}}\|}\,,$$

a k la llamaremos la componente de $\vec{\mathbf{u}}$ en la dirección de $\vec{\mathbf{v}}$. Luego:

$k = \dfrac{\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}}}{\|\vec{\mathbf{v}}\|} = \|\vec{\mathbf{u}}\|\cos\theta$ componente de $\vec{\mathbf{u}}$ en la dirección de $\vec{\mathbf{v}}$.

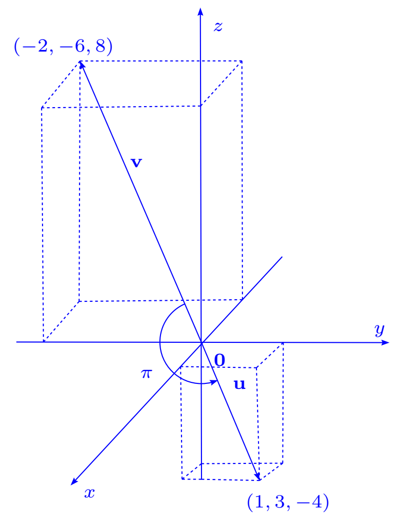


Figura 27

Observación 12 Es necesario hacer la distinción entre los términos *componente y vector componente*. Así, usando los vectores unitarios canónicos con $\vec{\mathbf{u}} = u_1\vec{\imath} + u_2\vec{\jmath}$, tenemos que:

u_1 es la componente de $\vec{\mathbf{u}}$ en la dirección de $\vec{\imath}$, $u_1\vec{\imath}$ es el vector componente en la dirección de $\vec{\imath}$.

Al despejar $\vec{\mathbf{w}}_2$ de (1.16), página 1.16, obtenemos:

$$\vec{\mathbf{w}}_2 = \vec{\mathbf{u}} - \frac{\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}}}{\|\vec{\mathbf{v}}\|^2}\,. \tag{1.18}$$

$\vec{\mathbf{w}}_2$ es el vector componente de $\vec{\mathbf{u}}$ ortogonal a $\vec{\mathbf{v}}$.

1.6 Ejercicios resueltos

1. Muestre que los vectores $\vec{\mathbf{u}} = \vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 4\vec{\mathrm{k}}$ y $\vec{\mathbf{v}} = -2\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} + 8\vec{\mathrm{k}}$, son paralelos.

   Solución Aplicando la fórmula (1.15), página 18, tenemos:

$$\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}} = (1,3,-4)\cdot(-2,-6,8) = -52,$$

   luego en base a la definición 1.5.1, página 17 obtenemos:

$$-52 = (\sqrt{26})\,(2\sqrt{26})\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{-52}{(\sqrt{26})\,(2\sqrt{26})} = -1 \Rightarrow \arccos(-1) = \pi,$$

   el resultado anterior implica que los vectores son paralelos, pero de direcciones opuestas (Figura 27).

Observación 12 El ejercicio 1, se puede resolver de otra forma. Podemos observar que el vector $\vec{\mathbf{v}}$ es un múltiplo escalar del vector $\vec{\mathbf{u}}$, es decir:

$$\vec{\mathbf{v}} = t\vec{\mathbf{u}} = -2\vec{\mathbf{u}} = -2(1,3,-4),$$

donde $-\infty < t < \infty$ y ello implica que los vectores son paralelos.

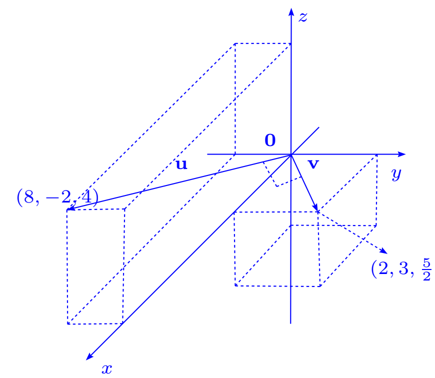


Figura 28

2. Determine el valor de α para que los vectores $\vec{\mathbf{u}} = 8\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 4\vec{k}$ y $\vec{\mathbf{v}} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + \alpha\vec{k}$ sean ortogonales.

   Solución Para que los vectores dados sean ortogonales, se tiene que cumplir que $\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}} = 0$, entonces:

$$\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}} = (8\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 4\vec{k})\cdot(2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + \alpha\vec{k}) = 0 \Rightarrow 10 + 4\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{5}{2}\,.$$

   Así, para que los vectores sean ortogonales es necesario que $\alpha = -\frac{5}{2}$ (Figura 28).

3. Dados los vectores $\vec{\mathbf{u}} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + \vec{k}$ y $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 6\vec{k}$. Determine $\operatorname{proy}_{\vec{\mathbf{v}}}\vec{\mathbf{u}}$.

   Solución $c = \dfrac{\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}}}{\|\vec{\mathbf{v}}\|^2} = \dfrac{2}{41}$, $\operatorname{proy}_{\vec{\mathbf{v}}}\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{w}} = \dfrac{2}{41}\vec{\imath} + \dfrac{4}{41}\vec{\jmath} - \dfrac{12}{41}\vec{\imath}$.

   La componente de $\vec{\mathbf{u}}$ en la dirección de $\vec{\mathbf{v}}$ es:

$$k = \frac{\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}}}{\|\vec{\mathbf{v}}\|} = \frac{2}{\sqrt{41}}\,.$$

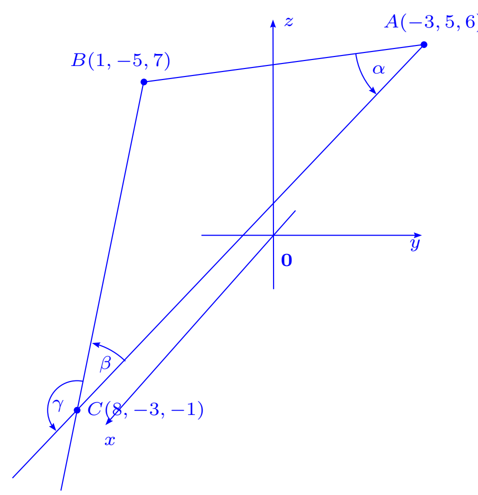


Figura 29

4. Dado el triángulo ABC, formado por los vértices $A\,(-3,5,6)$, $B\,(1,-5,7)$, $C\,(8,-3,-1)$ (Figura 29), calcular los ángulos α y γ.

   Solución El ángulo α, está formado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ (ver Figura 29), entonces:

$$\overrightarrow{AB} = (1,-5,7) - (-3,5,6) = (4,-10,1), \quad \overrightarrow{AC} = (8,-3,-1) - (-3,5,6) = (11,-8,-7),$$

   luego:

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 3\sqrt{13}, \quad \left\|\overrightarrow{AC}\right\| = 3\sqrt{26}, \quad \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = (4,-10,1)\cdot(11,-8,-7) = 117,$$

ahora aplicamos la definición 1.5.1, página 17.

$$\cos\alpha = \frac{117}{(3\sqrt{13})\,(3\sqrt{26})} = \frac{1}{\sqrt{2}} \;\Rightarrow\; \alpha = \arccos(\frac{\sqrt{2}}{2}) = 45^\circ.$$

Para calcular el ángulo externo γ, podemos calcular inicialmente el ángulo interno β que está formado por los vectores $\overrightarrow{CB}$ y $\overrightarrow{CA}$.

$$\overrightarrow{CB} = (1,-5,7) - (8,-3,-1) = (-7,-2,8), \quad \overrightarrow{CA} = (-3,5,6) - (8,-3,-1) = (-11,8,7)$$

$$\left\|\overrightarrow{CB}\right\| = 3\sqrt{13}, \quad \left\|\overrightarrow{CA}\right\| = 3\sqrt{26}, \quad \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA} = (-7,-2,8)\cdot(-11,8,7) = 117$$

$$\cos\beta = \frac{117}{3\sqrt{17}\,3\sqrt{26}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad\Rightarrow\quad \beta = \arccos(\frac{\sqrt{2}}{2}) = 45^\circ = \tfrac{\pi}{4}\,,$$

entonces $\gamma = \dfrac{360^\circ - 90^\circ}{2} = \dfrac{270^\circ}{2} = 135^\circ.$

5. Dados los vectores $\vec{\mathbf{u}} = 4\vec{\mathrm{i}} + \lambda\vec{\mathrm{j}} + 5\vec{\mathrm{k}}$ y $\vec{\mathbf{v}} = \lambda\vec{\mathrm{i}} + 2\vec{\mathrm{j}} - 6\vec{\mathrm{k}}$, determinar para que valores de λ los vectores dados son perpendiculares.

   Solución Dos vectores son perpendiculares si y sólo si su producto escalar es igual a cero, entonces:

$$\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}} = (4\vec{\mathrm{i}} + \lambda\vec{\mathrm{j}} + 5\vec{\mathrm{k}})\cdot(\lambda\vec{\mathrm{i}} + 2\vec{\mathrm{j}} - 6\vec{\mathrm{k}}) = 0 \Longrightarrow 6\,\lambda - 30 = 0 \quad\Rightarrow\quad \lambda = 5.$$

1.7 Introducción a los determinantes

Definición 1.7.1 *Se llama matriz de m líneas y n columnas del tipo $m\times n$ todo arreglo rectangular*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Se usarán letras mayúsculas para denotar matrices y minúsculas para denotar los elementos del arreglo.

Ejemplo 15 Los siguientes objetos son matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ \mathbf{-1} & \mathbf{4} \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} \pi & \mathrm{e} & -\sqrt{3} \\ 3 & \mathbf{\tfrac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix}, \; D = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \; E = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

FILA COLUMNA

El tamaño de una matriz se describe especificando el número de filas y columnas de la matriz. Así, la matriz A del ejemplo 1 tiene tres filas y dos columnas. La matriz A es de 3×2, B es de 1×4, C es de 3×3, D es de 2×1 y E es de 2×3.

Una matriz A con n filas y n columnas se denomina matriz cuadrada de orden n. Los elementos $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{ii}, \ldots, a_{nn}$ se dice que están en la diagonal principal de la matriz A (Figura 30).

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Figura 30

Definición 1.7.2 *Se llama determinante de orden n, la función que asocia a toda matriz cuadrada de orden n su determinante. Definiremos esta función por recurrencia sobre n:*

a) El determinante de la matriz $A = (a)$ de orden 1 es a.

b) Suponiendo que el determinante de orden $n-1$ está definido para $n > 1$, el determinante de una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ de orden n es el número:

$$\det A = |\,A\,| = a_{11}\,|\,A_{11}\,| - a_{21}\,|\,A_{21}\,| + \cdots + (-1)^{n+1} a_{n\,1}\,|\,A_{n\,1}\,| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i\,1}\,|\,A_{i\,1}\,| \quad (1.19)$$

$|\,A_{ij}|$ es el determinante de la matriz A_{ij} de orden $n-1$ que se obtiene suprimiendo la i-ésima fila y la j-ésima columna.

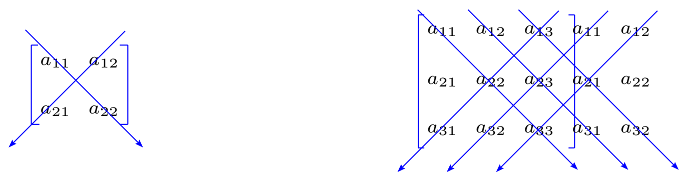
Centraremos nuestra atención solamente en determinantes de matrices 2×2 y 3×3, los cuales se calculan de acuerdo a las siguientes fórmulas:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (1.20)$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{array} \quad (1.21)$$

Para calcular estas fórmulas se sugiere recurrir a la Figura 31. La fórmula (1.20) se obtiene multiplicando los elementos por los que pasa la flecha que apunta hacia la derecha y restando el producto de los elementos por los que pasa la flecha que apunta hacia la izquierda (Figura 31a).

La fórmula (1.21) se obtiene copiando la primera y segunda columnas como se muestran en la Figura 31b). El determinante se calcula al sumar los productos correspondientes a las flechas que apuntan hacia la derecha y restar los productos correspondientes a las flechas que apuntan hacia la izquierda.



a) b)

Figura 31

Ejemplo 16 Calcule los siguientes determinantes:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}, \qquad \det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 93 \end{vmatrix}.$$

Solución Aplicando los métodos de la Figura 31, obtenemos:

$$\det(A) = (3)(-2) - (1)(4) = -10,$$

$$\det(B) = (45) + (84) + (96) - (105) - (-48) - (-72) = 240.$$

Observación 13 Los métodos que se describen en la Figura 31, no son aplicables para determinantes 4×4 o mayores.

1.8 Desarrollo por cofactores

Definición 1.8.1 *Si A es una matriz cuadrada, entonces el menor del elemento a_{ij} se denota por M_{ij} y se define como el determinante de la submatriz que queda después de eliminar de A la i-ésima fila y la j-ésima columna. El número $(-1)^{i+j}M_{ij}$ se denota por C_{ij} y se llama cofactor del elemento a_{ij}.*

Ejemplo 17 Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$. El menor del elemento a_{11} es:

Se anula la primera fila

$$M_{11} = \begin{vmatrix} \cancel{3} & \cancel{1} & \cancel{-4} \\ \cancel{2} & 5 & 6 \\ \cancel{1} & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} = 16.$$

Se anula la primera columna

El cofactor de a_{11} es $C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11} = 16$.

El menor del elemento a_{32} es:

Se anula la segunda columna

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 26.$$

Se anula la tercera fila

El cofactor de a_{32} es:

$$C_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -M_{32} = -26.$$

El lector tiene que haber observado que el cofactor y el menor de un elemento a_{ij} difieren únicamente en el signo, es decir $C_{ij} = \pm M_{ij}$. Una manera rápida de determinar si se usa $+$ o bien $-$, es aplicar el hecho de que el signo que relaciona C_{ij} con M_{ij}, está en la i-ésima fila y j-ésima columna del arreglo adjunto.

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

Por ejemplo, $C_{11} = M_{11}$, $C_{21} = -M_{21}$, $C_{12} = -M_{12}$, $C_{22} = M_{22}$, etc.

Teorema 1.8.1 *Se puede calcular el determinante de una matriz A de $n \times n$ multiplicando los elementos de cualquier fila (o columna) por sus cofactores y sumando los productos que resulten, es decir para cada $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq n$,*

$$\det(A) = a_{1j} C_{1j} + a_{2j} C_{2j} + \cdots + a_{nj} C_{nj},$$

desarrollo por cofactores a lo largo de j-ésima columna y

$$\det(A) = a_{i1} C_{i1} + a_{i2} C_{i2} + \cdots + a_{in} C_{in},$$

desarrollo por cofactores a lo largo de la i-ésima fila.

Ejemplo 18 Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$. Calcule $\det(A)$ por medio de su desarrollo por cofactores a lo largo de la primera fila.

Solución $\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -4 & -4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - (1) \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + (0) \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} =$ $3(-4) - (1) - (1)(-11) + 0 = -1.$

Ejemplo 19 Calcular el determinante de la matriz del ejemplo anterior mediante su desarrollo por cofactores a lo largo de la tercer columna.

Solución $\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} - (3) \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + (-2) \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} =$
$0 - 3(12 - 5) - 2(-12 + 2) = -1.$

Observación 14 La mejor estrategia para evaluar un determinante por medio del desarrollo por cofactores es llevándolo a cabo a lo largo de una fila o columna que contenga el mayor número de ceros.

1.9 Producto vectorial

En diversas aplicaciones de los vectores a problemas de la física, ingeniería y geometría se necesita construir un vector en $\mathbb{R}^3$ que sea perpendicular a dos vectores dados. En esta sección analizaremos un tipo de multiplicación que facilita esta construcción.

Definición 1.9.1 *Si* $\vec{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$ *y* $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$ *son vectores en* $\mathbb{R}^3$*, entonces producto vectorial* $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}$*, es el vector definido de la siguiente manera:*

$$\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1). \tag{1.22}$$

Ejemplo 20 Calcular el producto vectorial de los siguientes vectores $\vec{\mathbf{u}} = \vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}$ y $\vec{\mathbf{v}} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 4\vec{k}$.

Solución Sea $\vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}$, utilizando la fórmula (1.22) tenemos:

$$\vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} = [(-1)(-4) - (2)(3), (2)(2) - (1)(-4), (1)(3) - (-1)(2)] = (-2, 8, 5),$$

o bien

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} &= [(-1)(-4) - (2)(3)]\,\vec{\imath} + [(2)(2) - (1)(-4)]\,\vec{\jmath} + [(1)(3) - (-1)(2)]\,\vec{k} \\ &= -2\vec{\imath} + 8\vec{\jmath} + 5\vec{k}. \end{aligned}$$

Abusando de la notación una forma fácil de calcular $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}$ es mediante el uso de determinantes.

Teorema 1.9.1[2] *Sean* $\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^3$*, entonces* $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$.

Demostración Aplicando el desarrollo por cofactores a lo largo de la primera fila obtenemos:

[2] Este en realidad no es un determinante ya que $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ y $\vec{k}$ son vectores. Sin embargo la notación de determinante ayuda a recordar como se calcula un producto vectorial.

$$\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \vec{\imath}\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - \vec{\jmath}\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 1 & v_3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$
$$= (u_2v_3 - u_3v_2)\vec{\imath} - (u_3v_1 - u_1v_3)\vec{\jmath} + (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{k},$$

de donde se obtiene la fórmula siguiente:

$$\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1).$$

Ejemplo 21 Dados $\vec{\mathbf{u}} = (1, 2, -2)$ y $\vec{\mathbf{v}} = (30, 1)$, calcular $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}$ utilizando el teorema 1.9.1.

Solución $\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \mathrm{i}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \mathrm{j}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \mathrm{k}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 2\vec{\imath} - 7\vec{\jmath} - 6\vec{k}.$

El teorema que sigue nos da una relación importante entre el producto escalar y el producto vectorial y también nos indica que $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}$ es ortogonal ($\perp$), tanto a $\vec{\mathbf{u}}$ como a $\vec{\mathbf{v}}$.

Teorema 1.9.2 *Sean $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ vectores en $\mathbb{R}^3$, entonces:*

a) $\vec{\mathbf{u}}\cdot(\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}}) = 0$	$\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}$ *es ortogonal a* $\vec{\mathbf{u}}$
b) $\vec{\mathbf{v}}\cdot(\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}) = 0$	$\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}$ *es ortogonal a* $\vec{\mathbf{v}}$
c) $\|\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}\|^2 = \|\vec{\mathbf{u}}\|^2\ \|\vec{\mathbf{v}}\|^2 - (\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}})^2$	*Identidad de Lagrange.*

Demostración Sean $\vec{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3)$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$, entonces:

a) $\vec{\mathbf{u}}\cdot(\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}) = (u_1, u_2, u_3)\cdot(u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1) =$

$u_1(u_2v_3 - u_3v_2) + u_2(u_3v_1 - u_1v_3) + u_3(u_1v_2 - u_2v_1) =$

$u_1u_2v_3 - u_1u_3v_2 + u_2u_3v_1 - u_1u_2v_3 + u_1u_3v_2 - u_2u_3v_1 = 0.$

b) Se demuestra en forma semejante al inciso a).

c) Ya que:

$$\|\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}\|^2 = (u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (u_3v_1 - u_1v_3)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2 \tag{1.23}$$

y

$$\|\vec{\mathbf{u}}\|^2\ \|\vec{\mathbf{v}}\|^2 - (\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}})^2 = (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2, \tag{1.24}$$

se puede establecer la identidad de Lagrange al realizar las multiplicaciones de los miembros de la derecha del igual de (1.23) y (1.24) y verificar su igualdad.

A continuación enumeraremos las propiedades principales del producto vectorial.

Teorema 1.9.3 *Sean $\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{v}}$, $\vec{\mathbf{w}}$ vectores en $\mathbb{R}^3$ y $k \in \mathbb{R}$ cualquiera, entonces:*

a) $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} = -(\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{u}})$

b) $\vec{\mathbf{u}} \times (\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}) = (\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}) + (\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{w}})$

c) $(\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}) \times \vec{\mathbf{w}} = (\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{w}}) + (\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}})$

d) $k(\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}) = (k\vec{\mathbf{u}}) \times \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{u}}(k\vec{\mathbf{v}})$

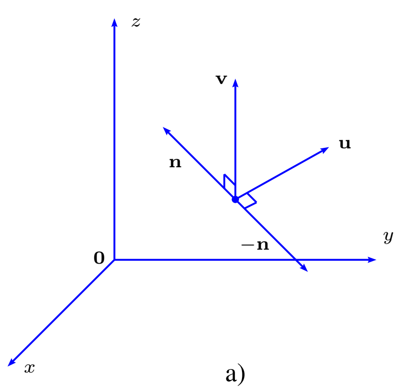
e) $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{0}} = \vec{\mathbf{0}} \times \vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{0}}$

f) $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{0}}$.

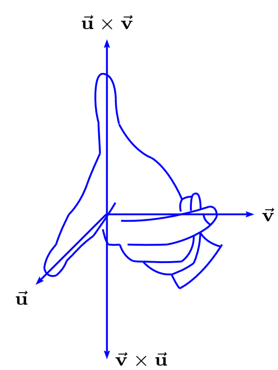
Las demostraciones se dejan como ejercicios.

Los incisos a) y b) del Teorema 1.9.2, son los que más se utilizan. El producto $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}$, es ortogonal tanto a $\vec{\mathbf{u}}$ como a $\vec{\mathbf{v}}$. Pero siempre existen dos vectores unitarios ortogonales tanto a $\vec{\mathbf{u}}$ como a $\vec{\mathbf{v}}$ (ver Figura 32a). Los vectores $\vec{\mathbf{n}}$ y $-\vec{\mathbf{n}}$ ($\vec{\mathbf{n}}$ se denomina vector normal) son ortogonales tanto a $\vec{\mathbf{u}}$ como a $\vec{\mathbf{v}}$. ¿Cuál de ellos nos da la dirección de $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}$? La respuesta la encontramos en la regla de la mano derecha.

Si la mano derecha se coloca de tal forma que el dedo índice apunte en la dirección de $\vec{\mathbf{u}}$ y el dedo medio apunte en la dirección de $\vec{\mathbf{v}}$, entonces el dedo pulgar apuntará en la dirección de $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}$ (ver Figura 32b).



a)



b)

Figura 32

Ahora que hemos determinado la dirección del vector $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}$, analizaremos a continuación lo relativo a su magnitud (norma). La identidad de Lagrange (página 28), establece que:

$$\|\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}\|^2 = \|\vec{\mathbf{u}}\|^2 \ \|\vec{\mathbf{v}}\|^2 - (\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}})^2 \tag{1.25}$$

Si θ es el ángulo entre $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ (Figura 33), entonces $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = \|\vec{\mathbf{u}}\| \ \|\vec{\mathbf{v}}\| \cos\theta$, por lo que la fórmula (1.25) se puede volver a escribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\|\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}\|^2 &= \| \vec{\mathbf{u}} \|^2 \ \| \vec{\mathbf{v}} \|^2 - \| \vec{\mathbf{u}} \|^2 \ \| \vec{\mathbf{v}} \|^2 \cos^2\theta \\ &= \| \vec{\mathbf{u}} \|^2 \ \| \vec{\mathbf{v}} \|^2 (1 - \cos^2\theta) \\ &= \| \vec{\mathbf{u}} \|^2 \ \| \vec{\mathbf{v}} \|^2 \operatorname{sen}^2\theta.\end{aligned}$$

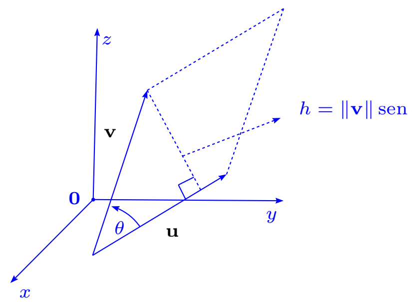


Figura 33

Pero $\| \vec{\mathbf{v}} \| \operatorname{sen}\theta$ es la altura del paralelogramo determinado por $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ (Figura 33), entonces el área del paralelogramo es:

$$A = \text{(base)(altura)} = \| \vec{\mathbf{u}} \| \ \|\vec{\mathbf{v}}\| \operatorname{sen}\theta = \|\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}\|.$$

En otras palabras, la norma de $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}$ es igual al área del paralelogramo determinado por $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$.

Ejemplo 22 Determine el área del paralelogramo cuyos vértices consecutivos están ubicados en $P(1,3,-2)$, $Q(2,1,4)$ y $R(-3,1,6)$. (Figura 34).

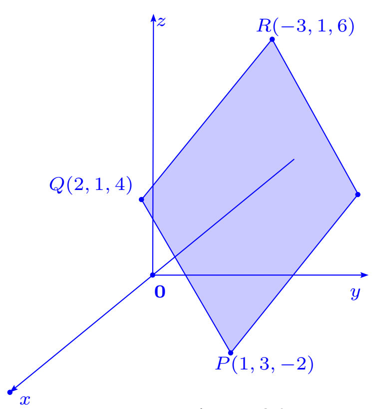


Figura 34

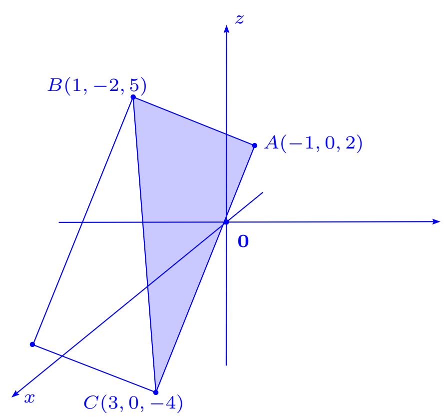


Figura 35

Solución El paralelogramo se muestra en la y tenemos que:

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{QR} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 6 \\ -5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4\vec{\imath} - 32\vec{\jmath} - 10\vec{k},$$

entonces:

$$\begin{aligned}A &= \left\| \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{QR} \right\| = \left\| (\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 6\vec{k}) \times (-5\vec{\imath} + 2\vec{k}) \right\| \\ &= \| -4\mathrm{i} - 32\mathrm{j} - 10\mathrm{k} \| = \sqrt{1140} = 2\sqrt{285}(u.l.)^2.\end{aligned}$$

Ejemplo 23 Calcule el área del triángulo cuyos vértices son $A(-1,0,2)$, $B(1,-2,5)$ y $C(3,0,-4)$. (Figura 35).

Solución Las coordenadas de los vectores $\vec{\mathbf{u}} = \overrightarrow{AB}$ y $\vec{\mathbf{v}} = \overrightarrow{AC}$ son:

$\vec{\mathbf{u}} = (1-(-1), -2-0, 5-2) = (2,-2,3)$ y $\vec{\mathbf{v}} = (-1-3, 0-0, -4-2) = (-4,0,-6)$. Luego,

$$\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & -6 \end{vmatrix} = \mathrm{i} \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} - \mathrm{j} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} + \mathrm{k} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} == 12\vec{\imath} + 24\vec{\jmath} + 8\vec{k}.$$

El área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo, es decir:

$$A_T = \frac{1}{2} \parallel \vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} \parallel = \frac{1}{2}\sqrt{12^2 + 24^2 + 8^2} = \frac{1}{2}\sqrt{784} = \frac{1}{2}(28) = 14(u.l.)^2.$$

1.10 Producto mixto

Definición 1.10.1 *Sean $\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{v}}$, $\vec{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^3$, se define el producto mixto de $\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{v}}$, $\vec{\mathbf{w}}$ como:*

$$(\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}) \cdot \vec{\mathbf{w}},$$

y lo denotamos $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}}$.

Si $\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{w}}$ son tres vectores no coplanares (no pertenecientes al mismo plano), entonces estos vectores forman los lados de un paralelepípedo (Figura 36). Calculemos el volumen de este paralelepípedo. La base es un paralelogramo, cuya área, es igual a:

$$\parallel \vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} \parallel .$$

El vector $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}$ es ortogonal tanto a $\vec{\mathbf{u}}$ como a $\vec{\mathbf{v}}$, como consecuencia de esto, es ortogonal al paralelogramo determinado por $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$.

La altura h del paralelepípedo se mide a lo largo de un vector ortogonal al paralelogramo. Vemos, entonces que la altura h es el valor absoluto de la componente de $\vec{\mathbf{w}}$ en la dirección de $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}$. Por lo tanto $h =$ valor absoluto de la componente de $\vec{\mathbf{w}}$ en la dirección de $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}$, es decir:

$$\left| \frac{\vec{\mathbf{w}} \cdot (\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}})}{\|\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}\|} \right|,$$

entonces el volumen del paralelepípedo es igual al área de la base por la altura, o sea:

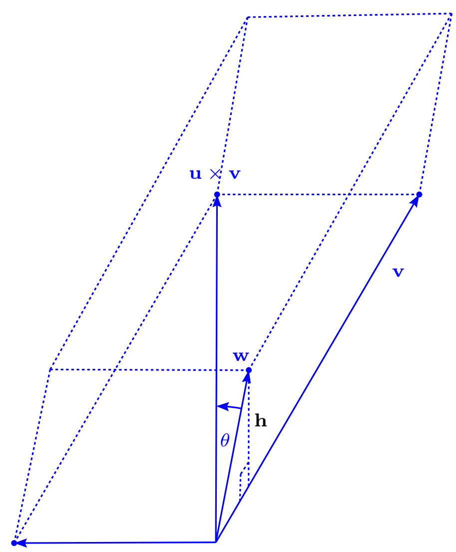


Figura 36

$$V = \parallel \vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} \parallel \left| \frac{\vec{\mathbf{w}} \cdot (\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}})}{\|\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}\|} \right|.$$

El volumen del paralelepípedo determinado por los tres vectores $\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{w}}$ es igual al valor absoluto del triple producto escalar (producto mixto) de $\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{w}}$, es decir:

$$V = \left| (\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}) \cdot \vec{\mathbf{w}} \right| = \left| \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} \right|.$$

Observación 15 El producto mixto de los vectores $\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{v}}$, $\vec{\mathbf{w}}$ se representa de la siguiente manera:

$$\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} = (\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}) \cdot \vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{u}} \cdot (\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{w}}). \tag{1.26}$$

1.10.1 Propiedades del Producto Mixto

Sean $\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{v}}\vec{\mathbf{w}}$ vectores en $\mathbb{R}^3$ y k un escalar, entonces:

a) $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} \cdot \vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{w}} \cdot \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$

b) $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} = -(\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{w}}) = -(\vec{\mathbf{w}} \cdot \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{u}}) = -(\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{w}} \cdot \vec{\mathbf{v}})$

c) $\vec{\mathbf{u}} \cdot (\vec{\mathbf{v}}) + \vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} + \cdot \vec{\mathbf{w}}$

d) $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} \cdot (\vec{\mathbf{w}}) + = \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} + \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} \cdot$

e) $\vec{\mathbf{u}} \cdot (k\vec{\mathbf{v}}) \cdot \vec{\mathbf{w}} = \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}(k\vec{\mathbf{w}}) = k(\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}})$.

De la fórmula (1.26) se puede obtener un resultado útil e interesante. Si $\vec{\mathbf{w}}$ está en el plano formado por el vector $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}$, entonces $\vec{\mathbf{w}}$ es perpendicular a $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}$, lo cual significa que $\vec{\mathbf{w}} \cdot (\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}) = 0$.

Recíprocamente, si $(\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}) \cdot \vec{\mathbf{w}} = 0$, entonces $\vec{\mathbf{w}}$ es perpendicular a $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}$), por lo que $\vec{\mathbf{w}}$ está en el plano determinado por $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$. Se concluye que tres vectores $\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{w}}$ son coplanares (están en el mismo plano) si y sólo si su triple producto escalar es igual a cero.

Si los vectores $\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{w}}$ están dados en términos de sus componentes, es decir:

$$\vec{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, u_3), \quad \vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2, v_3), \quad \vec{\mathbf{w}} = (w_1, w_2, w_3),$$

entonces el producto mixto se puede calcular mediante la siguiente fórmula:

$$\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{w}} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}. \tag{1.27}$$

Ejemplo 24 Dados los vectores $\vec{\mathbf{u}} = (1, 1, 2)$, $\vec{\mathbf{v}} = (2, 1, 1)$, $\vec{\mathbf{w}} = (1, -2, 3)$. Determine el producto mixto de estos tres vectores.

Solución Una manera sencilla de calcular el producto mixto es formar el determinante de $\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{v}}$, $\vec{\mathbf{w}}$.

Haciendo un desarrollo por cofactores a lo largo de la primera fila obtenemos:

$$\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{w}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 5 - 5 - 10 = -10.$$

Ejemplo 25 Demuestre que los vectores $\vec{\mathbf{u}} = (1, 2, -2)$, $\vec{\mathbf{v}} = (1, -2, 1)$, $\vec{\mathbf{w}} = (5, -2, -1)$ están en un mismo plano.

Solución Para demostrar que los vectores son coplanares, es suficiente comprobar que su producto mixto es igual a cero. Hacemos, por ejemplo, el desarrollo por cofactores a lo largo de la tercera fila.

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{w}} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ &= (5)(-2) + (2)(3) - (1)(-4) = 0, \end{aligned}$$

de esta manera queda demostrado que los vectores $\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{w}}$ pertenecen a un mismo plano.

Ejemplo 26 Sean $A(0, -2, 5)$, $B(6, 6, 0)$, $C(3, -3, 6)$, $D(2, -1, 3)$.

a) Determine el volumen del tetraedro $ABCD$.

b) Calcule la altura del tetraedro desde el vértice C al segmento $\overline{AD}$ (Figura 37).

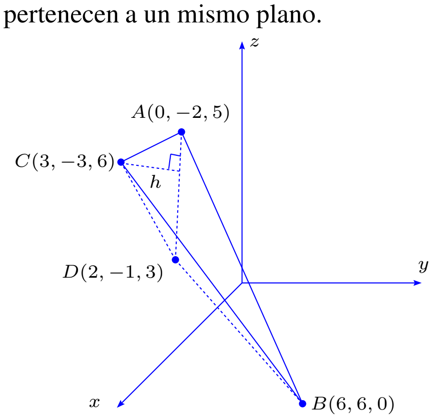


Figura37

Solución

a) Calculemos el volumen del tetraedro.

El área del triángulo DAB, es $\mathsf{A}_1 = \dfrac{1}{2}\mathsf{A}$, donde A es el área del paralelogramo $DAEB$. (Calcule el vértice E) !!

Luego el volumen del tetraedro es:

$$\mathsf{V}_1 = \frac{1}{3}\,\mathsf{A}_1\,h = \frac{1}{3}\,(\frac{1}{2}\,\mathsf{A})\,h = \frac{1}{6}\,\mathsf{A}\,h = \frac{1}{6}\,\mathsf{V}, \tag{1.28}$$

donde $\mathsf{V} = \mathsf{A}\,h$, es el volumen del paralelepípedo. Determinemos tres vectores, partiendo por ejemplo, del vértice D:

$$\vec{\mathbf{u}} = \overrightarrow{DA} = (-2, -1, 2), \quad \vec{\mathbf{v}} = \overrightarrow{DB} = (4, 7, 3), \quad \vec{\mathbf{w}} = \overrightarrow{DC} = (1, -2, 3),$$

entonces por la fórmula (1.27), obtenemos:

$$\frac{1}{6}(\vec{\mathbf{u}}\cdot\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{w}}) = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 4 & 7 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \left| -\frac{15}{2} \right| = \frac{15}{2}\,(u.l.)^3 = \mathrm{V}_1.$$

b) Calculemos la altura h. El área del paralelogramo $DAEB$ es:

$$A = \|\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}\| = \left\| \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{\mathrm{k}} \\ -2 & -1 & 2 \\ 4 & 7 & -3 \end{vmatrix} \right\| = \left\| -11\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 10\mathrm{k} \right\| = 15\ (u.l.)^2,$$

y teniendo en cuenta la fórmula (1.28), obtenemos el valor de la altura h:

$$\frac{15}{2} = \frac{1}{6}\mathrm{A}\,h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{15}{2}\,\frac{6}{A} \quad \Rightarrow \quad h = 3\ (u.l.).$$

1.11 Rectas y planos en el espacio

Una recta en $\mathbb{R}^3$ se puede determinar cuando se conoce un punto $P_0\,(x_0, y_0, z_0)$, perteneciente a la recta L y la dirección de L. En el espacio la dirección de una recta se describe convenientemente, por medio de un vector. Designemos por $\vec{\mathbf{v}} = (a, b, c)$ un vector paralelo a la recta$L$. Sea $P\,(x, y, z)$ un punto arbitrario de L y $\vec{\mathbf{r}_0}$ y $\vec{\mathbf{r}}$ los vectores de posición de P_0 y P (estos vectores tienen las representaciones $\overrightarrow{OP_0}$ y $\overrightarrow{OP}$ respectivamente).

Si $\vec{\mathbf{a}} = \overrightarrow{P_0P}$, entonces por la adición de vectores tenemos el siguiente resultado (ver Figura 38):

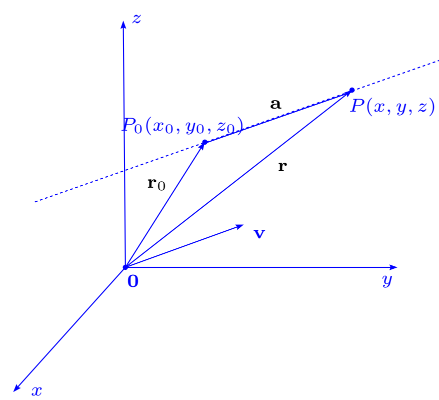


Figura 38

$$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}_0} + \vec{\mathbf{a}}, \tag{1.29}$$

pero como $\vec{\mathbf{a}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ son paralelos, entonces $\vec{\mathbf{a}} = t\vec{\mathbf{v}}$, (ver Observación 12, página 21), por lo tanto la fórmula (1.29) se puede escribir de la siguiente manera:

$$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}_0} + t\vec{\mathbf{v}}.$$

Definición 1.11.1 Ecuación vectorial de la recta *La ecuación*

$$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}_0} + t\vec{\mathbf{v}} \tag{1.30}$$

recibe el nombre de ecuación vectorial de la recta L*, donde* t *es un escalar cualquiera.*

Si escribimos la ecuación (1.30) en términos de sus componentes entonces tenemos que:

$$x\vec{\mathrm{i}} + y\vec{\mathrm{j}} + z\vec{\mathrm{k}} = x_0\vec{\mathrm{i}} + y_0\vec{\mathrm{j}} + z_0\vec{\mathrm{k}} + t(x - x_0)\vec{\mathrm{i}} + t(y - y_0)\vec{\mathrm{j}} + t(z - z_0)\vec{\mathrm{k}},$$

o bien,

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + t(x - x_0) \\ y &= y_0 + t(y - y_0) \\ z &= z_0 + t(z - z_0) \end{aligned}\right\}, \qquad -\infty < t < \infty. \tag{1.31}$$

Las ecuaciones (1.31) son las ecuaciones paramétricas de la recta.

Si $a = x - x_0$, $b = y - y_0$, $c = z - z_0$, entonces las ecuaciones (1.31) toman la siguiente forma:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + ta \\ y &= y_0 + tb \\ z &= z_0 + tc \end{aligned}\right\}, \qquad -\infty < t < \infty. \tag{1.32}$$

Si despejamos el parámetro t de (1.32) obtenemos las ecuaciones simétricas de la recta:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}\,. \tag{1.33}$$

Un plano en el espacio se puede determinar si se conoce un punto $M_0(x_0, y_0, z_0)$ perteneciente al plano y un vector $\vec{\mathbf{n}} = (a, b, c)$ perpendicular (ortogonal) a ese plano, que recibe el nombre de **v**ector normal. Sean $M(x, y, z)$ un punto arbitrario del plano y $\vec{\mathbf{r}}$, $\vec{\mathbf{r}_0}$ los vectores de posición de M y M_0 respectivamente, entonces

$$\overrightarrow{MM_0} = \vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}_0}.$$

El vector $\vec{\mathbf{n}}$ es ortogonal a todo vector perteneciente al plano, en particular al vector $\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}_0}$ (ver Figura 39). Para que estos vectores sean perpendiculares es necesario y suficiente que su producto escalar sea igual a cero:

$$\vec{\mathbf{n}}\cdot(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}_0}) = 0.$$

Definición 1.11.2 Ecuación vectorial del plano *La ecuación*

$$\vec{\mathbf{n}}\cdot(\vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}_0}) = 0, \tag{1.34}$$

se llama ecuación vectorial del plano.

Si desarrollamos la ecuación (1.34) obtenemos

$$(a, b, c)\cdot [(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)] = 0,$$

o bien:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0. \tag{1.35}$$

La ecuación (1.35) recibe el nombre de ecuación escalar del plano.

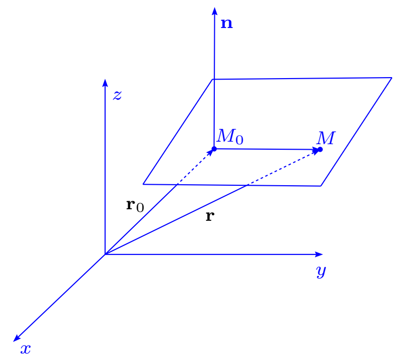


Figura 39

Si abrimos paréntesis y agrupamos términos en la fórmula (1.35), obtenemos la ecuación general del plano en coordenadas rectangulares (ecuación (1.36)).

$$ax + by + cz + (-ax_0 - by_0 - cz_0) = 0,$$

y si $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$, entonces:

$$ax + by + cz + d = 0. \tag{1.36}$$

Si las constantes a, b, c y d son todas diferentes de cero entonces, la ecuación del plano se puede transformar de la siguiente forma:

$$ax + by + cz = -d \quad \Rightarrow \quad \frac{ax}{-d} + \frac{by}{-d} + \frac{cz}{-d} = 1.$$

Si hacemos $-\frac{d}{a} = \alpha$, $-\frac{d}{b} = \beta$, $-\frac{d}{c} = \gamma$, obtenemos la ecuación del plano en segmentos (ver Figura 40). Esta última ecuación es de suma utilidad para ver la disposición del plano con respecto al sistema de coordenadas rectangulares, entonces:

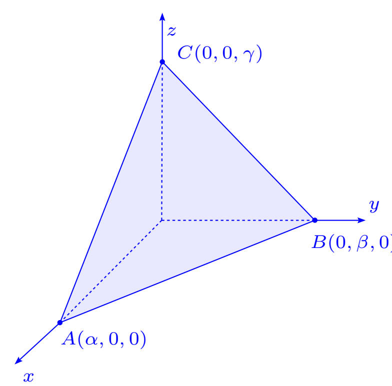


Figura 40

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 1 \tag{1.37}$$

A continuación, examinaremos los casos particulares de la ecuación de primer grado (1.36), cuando algunas de las constantes a, b, c, o d son iguales a cero y analizaremos la posición del plano con respecto al sistema de coordenadas rectangulares.

1. Si $d = 0$, entonces $ax + by + cz = 0$, en este caso la ecuación anterior define un plano que pasa por el origen del sistema de coordenadas (los valores $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ satisfacen la ecuación del plano).

2. Si $a = 0$, entonces $by + cz + d = 0$ y el vector normal $\vec{\mathbf{n}}$ al plano dado, es ortogonal al eje x ($\vec{\imath} \cdot \vec{\mathbf{n}} = 0$), en este caso el plano es paralelo al eje x (en particular el plano pasa por el eje x si $d = 0$).

3. Si $b = 0$, entonces $ax + cz + d = 0$. En este caso tenemos un plano paralelo al eje y, ya que $\vec{\jmath} \cdot \vec{\mathbf{n}} = 0$ (en particular el plano pasa por el eje y si $d = 0$).

4. Si $c = 0$, entonces $ax + by + d = 0$ y el plano es paralelo al eje z $\vec{\mathrm{k}} \cdot \vec{\mathbf{n}} = 0$. En particular el plano pasa por el eje z si $d = 0$.

5. Si $a = 0$ y $b = 0$, la ecuación (1.36) toma la siguiente forma $cz + d = 0$ y determina un plano paralelo al plano xy.

6. Si $a = 0$ y $c = 0$ entonces, $by + d = 0$ y se obtiene un plano paralelo al plano xz.

7. Si $b = 0$ y $c = 0$ entonces, $ax + d = 0$. Esta última ecuación determina un plano paralelo al plano yz.

1.11.1 Ejercicios resueltos sobre rectas y planos

1. Determine una ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas y las ecuaciones simétricas de la recta L que pasa por los puntos $Q\,(2, 1, 3)$ y $R\,(1, 2, -1)$ (Figura 41).

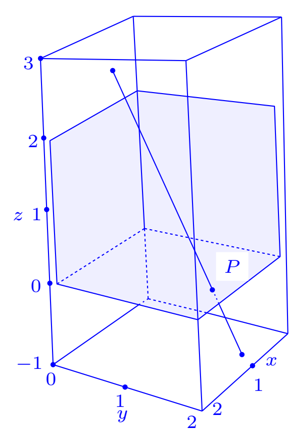


Figura 41

Solución Calculemos el vector director de la recta $\vec{\mathbf{v}} = \overrightarrow{PQ} = [(1-2), (2-1), (-1-3)] = (-1, 1-4)$, entonces una ecuación vectorial de la recta (tomando por ejemplo el punto $P(2, 1, 3)$) y considerando que $S\,(x, y, z)$ es cualquier punto perteneciente a L es:

$$x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{\mathrm{k}} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 3\vec{\mathrm{k}} + t(-\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 4\vec{\mathrm{k}}).$$

Las ecuaciones paramétricas de la recta de acuerdo a la fórmula (1.32), página 35, son:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2 - t \\ y &= 1 + t \\ z &= 3 - 4t \end{aligned}\right\}, \text{ con } -\infty < t < \infty.$$

Los números directores de la recta son $a = -1$, $b = 1$ y $c = -4$, entonces las ecuaciones simétricas de la recta (ver fórmula (1.33), página 35, son:

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{-4}\,.$$

Observación 16 Podemos determinar otros puntos pertenecientes a la recta L, dándole al parámetro t diferentes valores, en particular si $t = \dfrac{3}{4}$, obtenemos el punto P, donde la recta se interseca con el plano

$z = 0$: (ver Figura 41)

$$x_1 = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}, \quad y_1 = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}, \quad z_1 = 3 - (4)\left(\frac{3}{4}\right) = 0,$$

entonces las coordenadas del punto P son $P\left(\frac{5}{4}, \frac{7}{4}, 0\right)$.

2. Determine las ecuaciones simétricas de la recta L, que pasa por el punto $P(1, -2, 4)$ y es paralela al vector $\vec{\mathbf{v}} = (1, 1, -1)$.

   Solución Como la recta es paralela al vector $\vec{\mathbf{v}}$, entonces como vector director de ella se puede tomar el vector $\vec{\mathbf{v}}$ y considerando que pasa por el punto $P(1, -2, 4)$, la ecuación de la recta es la siguiente:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-4}{-1}.$$

3. Determine las ecuaciones paramétricas de la recta L que contiene los puntos $A(3, 4, -1)$ y $B(-2, 4, 6)$.

   Solución Calculamos el vector director de la recta L.

$$\vec{\mathbf{u}} = \overrightarrow{AB} = [(-2-3), (4-4), (6+1)] = (-5, 0, 7),$$

   la recta pasa por el punto A y aplicando la fórmula (1.32), página 35, obtenemos la respuesta.

$$\left.\begin{aligned} x &= 3 - 5t \\ y &= 4 \\ z &= -1 + 7t \end{aligned}\right\}, \text{ con } -\infty < t < \infty.$$

   El lector puede observar que en este caso uno de los números directores de la recta L es igual a 4, (ver Figura 42). Esta es una situación particular de la recta, la cual pertenece al plano $y = 4$, paralelo al plano xz.

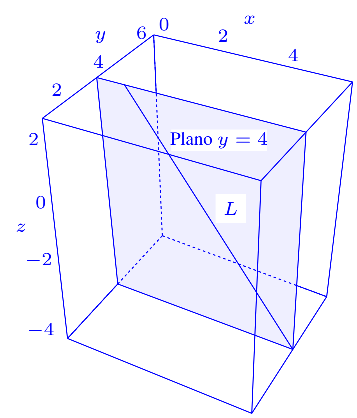


Figura 42

4. Encuentre las ecuaciones paramétricas de la recta, que pasa por los puntos $P(2, 1, 2)$ y $Q(2, -3, 2)$.

   Solución Determinemos el vector director de la recta L, $\vec{\mathbf{v}} = \overrightarrow{PQ} = (2, 1, 2) - (2, -3, 2) = (0, -4, 0)$.

   Las ecuaciones paramétricas son las siguientes:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 1 - 4t \\ z &= 2 \end{aligned}\right\}, \text{ con } -\infty < t < \infty.$$

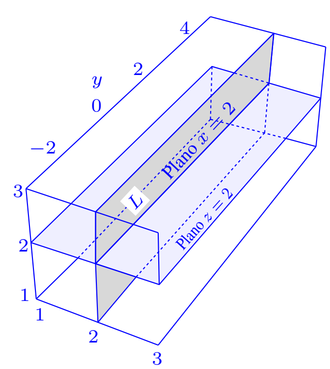


Figura 43

Este ejemplo, nos presenta otro caso particular de una recta. Observamos que dos números directores del vector $\vec{\mathbf{v}}$ son constantes: $x = 2$ y $z = 2$ y representan dos planos en $\mathbb{R}^3$, mientras que $y = 1 - 4t$ es una recta L que representa la intersección de los planos $x = 2$ y $z = 2$ (ver Figura 43).

5. Encuentre las coordenadas del punto A que divide el segmento $\overrightarrow{A_1A_2}$, en una relación dada $\lambda = \frac{m}{n}$.

   Solución Suponemos que los vectores $\overrightarrow{A_1A}$ y $\overrightarrow{AA_2}$ tienen la misma dirección y que la relación de sus módulos es igual a λ (ver Figura 44), entonces

$$\overrightarrow{A_1A} - \lambda\overrightarrow{AA_2} = \vec{\mathbf{0}}$$

   ó

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA}_1 - \lambda(\overrightarrow{OA}_2 - \overrightarrow{OA}) = \vec{\mathbf{0}},$$

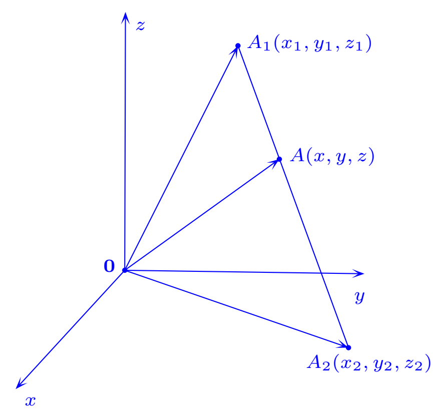


Figura 44

   de donde obtenemos $\overrightarrow{OA} = \dfrac{\overrightarrow{OA_1} + \lambda\overrightarrow{OA}_2}{1+\lambda} = \dfrac{\overrightarrow{OA_1} + \frac{m}{n}\overrightarrow{OA_2}}{1+\frac{m}{n}} = \dfrac{n\overrightarrow{OA_1} + m\overrightarrow{OA_2}}{n+m}$.

   Como las coordenadas del punto A, son las coordenadas del vector $\overrightarrow{OA}$, entonces tenemos que las coordenadas de A son:

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} = \dfrac{nx_1 + mx_2}{n+m} \\ y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} = \dfrac{ny_1 + my_2}{n+m} \\ z = \dfrac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda} = \dfrac{nz_1 + mz_2}{n+m}. \end{array}\right\}$$

6. El segmento $\overline{AB}$, donde $A\,(3, -5, 2)$ y $B\,(5, -3, 1)$, está dividido por los puntos C y D en tres partes iguales. Determine las coordenadas de los puntos C y D.

   Solución Por condición del problema, tenemos las siguientes proporciones: $\overline{AC} \div \overline{CB} = 1 \div 2$, o lo que es equivalente $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \dfrac{1}{2} = \lambda$, entonces aplicando las fórmulas del ejemplo 5 obtenemos las coordenadas del punto C, $x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} = \dfrac{3 + (\frac{1}{2})5}{1+\frac{1}{2}} = \frac{11}{3}$; $y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} = \dfrac{-5 + (\frac{1}{2})\,(-3)}{1+\frac{1}{2}} = -\frac{13}{3}$, $z = \dfrac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda} = \dfrac{2 + (\frac{1}{2})1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{5}{3}$.

   Las coordenadas del punto D se determinan con ayuda de las mismas fórmulas, $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \dfrac{2}{1} = \lambda$, $x = \dfrac{3 + 2{\cdot}5}{1+2} = \dfrac{13}{3}$; $y = \dfrac{-5 + 2(-3)}{1+2} = -\dfrac{11}{3}$; $z = \dfrac{2 + 2{\cdot}1}{1+2} = \dfrac{4}{3}$.

   Por lo tanto las coordenadas buscadas son: $C\,(\frac{11}{3}, -\frac{13}{3}, \frac{5}{3})$ y $D\,(\frac{13}{3}, -\frac{11}{3}, \frac{4}{3})$.

7. Dados los vértices $A(2, 2, 2)$, $B(6, 5, 0)$ y $C\,(0, 3, 8)$ del paralelogramo $ABCD$. Determine las coorde-

nadas del vértice D.

Solución Supongamos que el punto O es el punto de intersección de las diagonales del paralelogramo (ver Figura 45). Como O es el punto medio del segmento $\overline{AC}$, entonces $\dfrac{\overline{AO}}{\overline{OC}} = \dfrac{1}{1} = \lambda$, por lo tanto, las coordenadas de O (en este caso se llaman las coordenadas del punto medio), las determinamos de la siguiente forma: $x = \dfrac{2+0}{2} = 1$, $y = \dfrac{2+3}{2} = \dfrac{5}{2}$, $z = \dfrac{2+8}{2} = 5$. O es el punto medio del segmento $\overline{BD}$, por lo que las coordenadas del punto D serán: $1 = \dfrac{6+x}{2}$, $\dfrac{5}{2} = \dfrac{5+y}{2}$, $5 = \dfrac{0+z}{2}$, de donde obtenemos $x = -4$, $y = 0$, $z = 10$, o bien $D\,(-4, 0, 10)$.

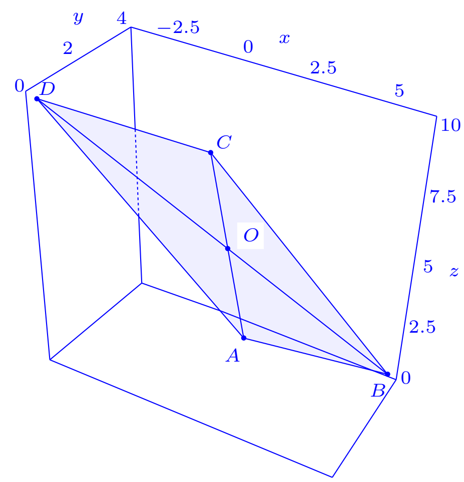


Figura 45

8. Determine la ecuación del plano, que es perpendicular al vector $\vec{\mathbf{n}} = (2, -1, 4)$ y que pasa por el punto $M_0\,(5, 2, -3)$. ¨Pertenecen al plano los siguientes puntos $P\,(1, 2, -1)$, $Q\,(4, 5, 1)$, $R\,(-6, 2, -3)$.

Solución Apliquemos la ecuación (1.35), página 36, $2(x-5)-(y-2)+4(z+3) = 0$, al abrir paréntesis y sumar términos semejantes obtenemos la ecuación general del plano:

$$2x - y + 4z + 4 = 0.$$

A continuación analizaremos si los puntos P, Q y R pertenecen al plano, para esto, sustituimos las coordenadas de P, Q y R respectivamente, en la ecuación del plano $2x - y + 4z + 4 = 0$:

$$\begin{aligned} 2(1) - (2) + 4(-1) + 4 &= 0 \\ 0 &= 0, \end{aligned}$$

las coordenadas de P satisfacen la ecuación del plano, por lo tanto P pertenece al plano en cuestión;

$$\begin{aligned} 2(4) - 5 + 4(1) + 4 &> 0 \\ 11 &> 0, \end{aligned}$$

las coordenadas de Q no satisfacen la ecuación del plano. El punto Q no pertenece al plano;

$$\begin{aligned} 2(-6) - 2 + 4(-3) + 4 &< 0 \\ -22 &< 0, \end{aligned}$$

las coordenadas de R tampoco satisfacen la ecuación del plano. El punto R no pertenece al plano.

Observación 17 El plano $ax + by + cz + d = 0$, divide al espacio en dos semiespacios. Los puntos pertenecientes a un semiespacio satisfacen la desigualdad $ax+by+cz+d<0$, y los puntos pertenecientes al otro semiespacio satisfacen la desigualdad $ax + by + cz + d > 0$.

9. Determinar la ecuaciones de los planos de acuerdo a los siguientes datos.

a) El plano es perpendicular al eje z y pasa por el punto $P\,(1, -2, 3)$.

Solución El plano es perpendicular al eje z y es paralelo al plano coordenado xy. Su ecuación es $cz + d = 0$, sustituyendo en esta ecuación las coordenadas del punto P obtenemos,

$$3c + d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = -3c,$$

entonces:

$$cz - 3c = 0 \quad \Rightarrow \quad c(z - 3) = 0,$$

como $c \neq 0$ finalmente obtenemos (Figura 46), $z - 3 = 0 \Longrightarrow z = 3$.

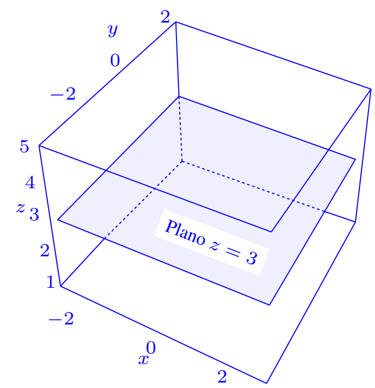


Figura 46

b) El plano es paralelo al eje x y pasa por los puntos $R\,(1, 1, 2)$ y $S\,(5, 3, -2)$.

Solución La ecuación del plano es de la forma (la variable x no está presente):

$$by + cz + d = 0. \tag{1.38}$$

R y S pertenecen al plano, por lo tanto sus coordenadas satisfacen a la ecuación $by + cz + d = 0$, por lo que al sustituir las coordenadas de R y S en la ecuación del plano obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} b + 2c + d = 0 \\ 3b - 2c + d = 0. \end{cases}$$

Resolviendo este sistema para b y c tenemos que $b = -\frac{1}{2}\,d$ y $c = -\frac{1}{4}\,d$. Estos valores los sustituimos en la ecuación (1.38) $-\frac{1}{2}\,dy + (-\frac{1}{4}\,d)z + d = 0$ y factorizando la constante $-d$, $(d \neq 0)$, obtenemos la ecuación del plano:

$$-d(\frac{1}{2}\,y + \frac{1}{4}\,z - 1 = 0) \quad \Rightarrow \quad \frac{2y + z - 4}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2y + z - 4 = 0.$$

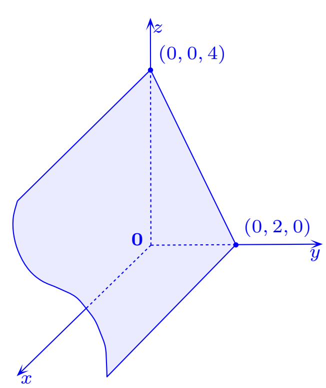


Figura 47

Si $z = 0$, entonces $2y + 0 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 2$, si $y = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 4$ (Figura 47).

10. Dibujar el plano, cuya ecuación es $x - y + 4z + 4 = 0$.

Solución En este caso aplicamos la ecuación del plano en segmentos (ecuación (1.37), página 43).

$$x - y + 4z = -4 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y - \frac{4}{4}z = 1,$$

y al simplificar, obtenemos la ecuación deseada:

$$\frac{x}{-4} + \frac{y}{4} + \frac{z}{-1} = 1,$$

entonces, $\alpha = -4$, $\beta = 4$, $\gamma = -1$, (Figura 48).

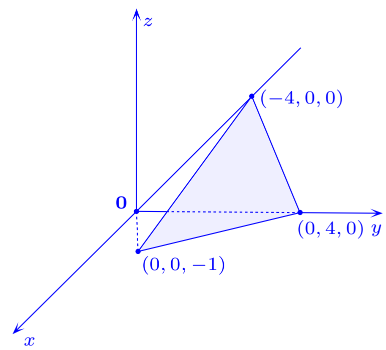


Figura 48

11. Si un plano está dado por su ecuación general

$$ax + by + cz + d = 0,$$

determine la ecuación normal de ese plano.

Solución Si el punto $A(x_1, y_1, z_1)$ pertenece al plano Π, cuya ecuación general es:

$$\Pi : \quad ax + by + cz + d = 0,$$

entonces sus coordenadas satisfacen a la ecuación del plano Π, es decir se cumple la igualdad:

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0.$$

Analicemos, a continuación, el significado geométrico de la expresión $ax_1 + by_1 + cz_1 + d$, cuando el punto A no pertenece al plano Π.

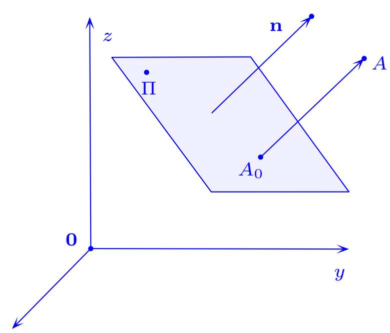


Figura 49

Tracemos una recta perpendicular desde el punto A al plano Π y consideremos el punto $A_0(x_0, y_0, z_0)$ como la base de esa perpendicular (Figura 49), para que el punto A_0 pertenezca al plano Π se tiene que cumplir la siguiente igualdad:

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0,$$

de la última expresión obtenemos el valor de d:

$$d = -ax_0 - by_0 - cz_0,$$

el cual lo sustituimos en la expresión $ax_1 + by_1 + cz_1 + d$ para obtener la igualdad:

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + (-ax_0 - by_0 - cz_0) = a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0),$$

el segundo miembro es el producto escalar del vector $\vec{\mathbf{n}} = (a, b, c)$ normal al plano Π y el vector director

$$\overrightarrow{A_0A} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0),$$

de la recta trazada perpendicularmente desde el punto A al plano Π, entonces por definición del producto escalar (página 17) tenemos:

$$a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0) = \vec{\mathbf{n}} \cdot \overrightarrow{A_0A} = \|\vec{\mathbf{n}}\| \, \|\overrightarrow{A_0A}\| \cos\theta,$$

donde, $D = \left\|\overrightarrow{A_0A}\right\|$, es la distancia del punto A al plano Π y como los vectores $\vec{\mathbf{n}}$ y $\overrightarrow{A_0A}$ son paralelos (colineales), entonces $\cos\theta = \pm 1$, por lo que, para la expresión $ax_1 + by_1 + cz_1 + d$ obtenemos el siguiente resultado final:

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = \pm \|\vec{\mathbf{n}}\| \, D. \tag{1.39}$$

Los signos $\pm$ en la expresión (1.39), nos indican que $ax_1 + by_1 + cz_1 + d$ es positiva para los puntos que se encuentran de un lado del plano y negativa para los puntos que se encuentran del otro lado del plano respectivamente, y en valor absoluto es proporcional a la distancia D del punto A al plano Π.

El coeficiente de proporcionalidad se define de la siguiente forma:

$$k = \pm \|\vec{\mathbf{n}}\| = \pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Si en la ecuación del plano Π: $ax + by + cz + d = 0$, los coeficientes de x, y, z respectivamente, satisfacen la condición:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$

entonces la expresión $ax_1 + by_1 + cz_1 + d$ es exactamente igual a la distancia del punto A al plano Π. En este caso decimos que la ecuación del plano Π está dada en su *forma normal* y los coeficientes de x, y, z son *los cosenos directores* del vector normal $\vec{\mathbf{n}}$ al plano Π.

Para obtener la forma normal de la ecuación del plano Π es suficiente multiplicarla por el siguiente coeficiente de normalización:

$$M = \frac{1}{\pm \|\vec{\mathbf{n}}\|} = \frac{1}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\,. \tag{1.40}$$

De la expresión (1.40) obtenemos la fórmula para calcular la distancia del punto A al plano Π,

$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\,. \tag{1.41}$$

La ecuación normal del plano Π la buscamos de acuerdo a la siguiente fórmula:

$$M(ax + by + cz + d) = \frac{ax + by + cz + d}{\pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0. \tag{1.42}$$

La ecuación normal de un plano se puede, también, escribir de la siguiente manera:

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0,$$

donde p es un número positivo numéricamente igual a la longitud de la normal trazada por el origen al plano normal y los ángulos α, β y γ son los ángulos directores de dicha normal dirigida del origen hacia el plano.

Observación 18 Como la normal al plano es una recta dirigida y tiene, por lo tanto, un sistema único de cosenos directores, entonces no podemos usar ambos signos de M. Para determinar el signo que debemos usar adoptamos ciertos convenios que daremos a continuación.

Si en la ecuación general del plano:

$$\Pi : \quad ax + by + cz + d = 0,$$

a) $d \neq 0$, M es de signo contrario al signo de d.

b) $d = 0$ y $c \neq 0$, M y c son del mismo signo.

c) $d = c = 0$ y $b \neq 0$, M y b son del mismo signo.

d) $d = c = b = 0$, entonces $a \neq 0$, M y a son del mismo signo.

12. La ecuación de un plano es $2x - y + 2z - 6 = 0$. Reducir dicha ecuación a la forma normal y hallar la longitud de la recta normal y sus cosenos directores.

Solución Para normalizar la ecuación del plano $2x - y + 2z - 6 = 0$ aplicamos la fórmula (1.42). Como $d = -6$, entonces M es positivo,

$$M(2x - y + 2z - 6) = \frac{2x - y + 2z - 6}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z - 2 = 0,$$

y la ecuación del plano Π en la forma normal es:

$$\Pi : \quad \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z - 2 = 0.$$

La longitud de la normal desde el origen del sistema de coordenadas hasta su intersección con el plano normal Π es $p = 2$, (Figura 50).

Para determinar el punto de intersección del plano Π con la recta normal procedemos de la siguiente forma:

El vector normal al plano Π es,

$$\vec{\mathbf{n}} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right),$$

entonces la recta normal tiene como números directores las componentes del vector normal al plano Π, además la recta normal pasa por el origen $O\,(0, 0, 0)$, por lo que las ecuaciones paramétricas de la recta normal serán:

$$x = \frac{2}{3}\,t, \quad y = -\frac{1}{3}\,t, \quad z = \frac{2}{3}\,t,$$

los valores así obtenidos de x, y, z los sustituimos en la ecuación del plano Π, para obtener el valor del parámetro t que nos dará las coordenadas del punto P, común a la recta normal y al plano Π, como veremos a continuación:

$$\Pi : \quad \frac{2}{3}\,x - \frac{1}{3}\,y + \frac{2}{3}\,z - 2 = 0 \Rightarrow \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\,t\right) - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\,t\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\,t\right) - 2 = 0,$$

al simplificar obtenemos, $t - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 2$, éste valor del parámetro t lo sustituimos en la ecuación del plano Π, o bien en las ecuaciones paramétricas de la recta normal y obtenemos el punto $P\,\left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$, común a la normal y al plano.

Los ángulos directores de la normal, los cuales se miden en el sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj (sentido positivo) son:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{2}{3}\right) = 48.2°$$
$$\beta = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) = 109.5°$$
$$\gamma = \arccos\left(\frac{2}{3}\right) = 48.2°$$

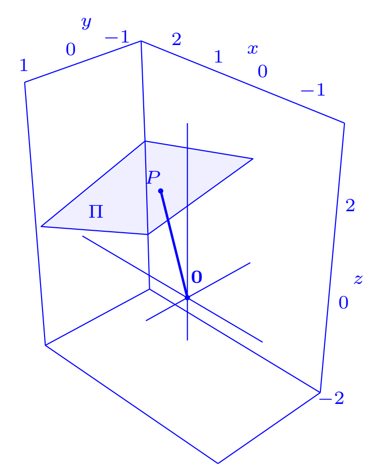


Figura 50

13. Hallar:

a) La distancia del punto $A(-3, -4, 2)$ al plano $x + y + z - 1 = 0$.

b) La distancia dirigida del punto $A(-3, -4, 2)$ al plano $x + y + z - 1 = 0$. Interpretar el signo de esta distancia.

c) Determine la ecuación normal del plano y dibuje el plano dado y el plano en la forma normal, en un mismo sistema de coordenadas.

Solución

a) La distancia del punto A al plano $x+y+z-1=0$, la calculamos de acuerdo a la fórmula (1.41), página 43.

$$D=\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|(1)(-3)+(1)(-4)+(1)(2)-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}.$$

b) La distancia dirigida δ del punto A al plano $x+y+z-1=0$, se obtiene por medio de la fórmula,

$$\delta=\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \tag{1.43}$$

donde el signo del radical se escoge de acuerdo a como se escoge el signo de M (ver Observación 18, página 44). Como $d=-1$, el signo del radical es positivo, entonces:

$$\delta=\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{(1)(-3)+(1)(-4)+(1)(2)-1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=-2\sqrt{3}.$$

El signo negativo indica que el punto y el origen están del mismo lado del plano.

Para interpretar el signo de esta distancia nos basamos en la siguiente observación.

Observación 19 La distancia dirigida δ del punto $A(x_1,y_1,z_1)$ al plano $ax+by+cz+d=0$, se obtiene de acuerdo a la siguiente fórmula:

$$\delta=\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

el signo del radical se escoge tal y como escogemos el de M (Observación 18). Si el plano no pasa por el origen, δ es positiva si el punto A y el origen están de lados opuestos del plano y δ es negativa si el punto A y el origen están del mismo lado del plano. Si el plano pasa por el origen aplicamos los convenios adoptados en la Observación 18.

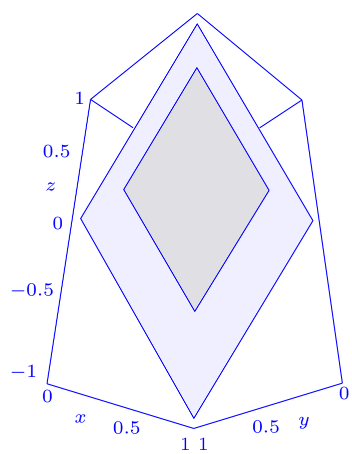


Figura 51

c) Calculemos la ecuación del plano en la forma normal. (En la Figura 51, el plano normal es el más pequeño).

Solución

$M(x+y++z-1)=\dfrac{x+y+z-1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=0,\quad \dfrac{1}{\sqrt{3}}x+\dfrac{1}{\sqrt{3}}y+\dfrac{1}{\sqrt{3}}z-\dfrac{1}{\sqrt{3}}=0$, luego,

$$\Pi:\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}y+\frac{1}{\sqrt{3}}z-\frac{1}{\sqrt{3}}=0.$$

14. Hallar la distancia dirigida del punto $P(-3,-4,2)$, al plano $3x+12y-4z-39=0$. Interpretar el signo de esta distancia.

Solución Aplicamos la fórmula de la Observación 19, como en la ecuación del plano d es negativo entonces el signo del radical es positivo:

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{3(-3)+12(-4)-4(2)-39}{\sqrt{3^2+12^2+(-4)^2}}\\ &= \frac{-104}{13} = -8,\end{aligned}$$

el signo negativo indica que el punto P y el origen están del mismo lado del plano (Figura 52). Las coordenadas del punto Q, se determinan mediante el procedimiento aplicado en el ejercicio 12. Solamente es necesario considerar que en este caso la recta pasa por el punto P y no por el origen. Sus coordenadas son $Q\left(-\frac{15}{13},\frac{44}{13},-\frac{6}{13}\right)$.

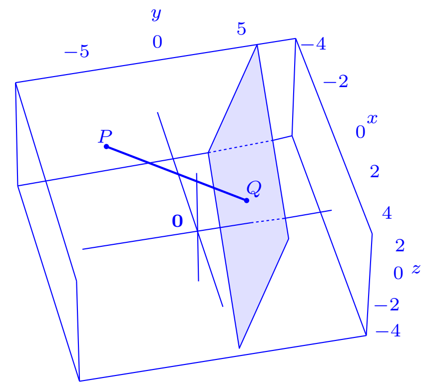


Figura 52

15. Hallar:

a) La distancia dirigida del punto $Q(3,4,-1)$, al plano $4x+5y-2z-18$. Interpretar el signo de esta distancia.

b) La distancia del punto Q al plano $4x+5y-2z-18$.

Solución
a) El signo de la constante d es negativo, entonces el radical es positivo, por lo tanto la distancia dirigida es:

$$\delta = \frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{4(3)+5(4)-2(-1)-18}{\sqrt{4^2+5^2+(-2)^2}} = \frac{16}{3\sqrt{5}}$$

como δ es positivo entonces, el punto Q y el origen están de diferentes lados del plano (Figura 53).

b) Calculemos a continuación la distancia del punto al plano:

$$D = \frac{|4(3)+5(4)-2(-1)-18|}{\sqrt{4^2+5^2+(-2)^2}} = \frac{16}{3\sqrt{5}}.$$

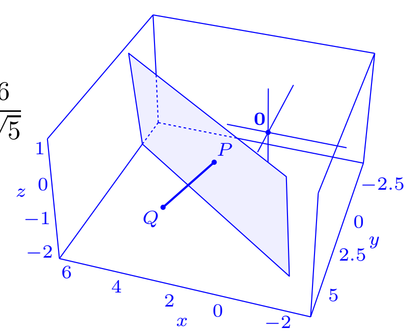


Figura53

16. Obtener una fórmula para calcular la ecuación del plano Π que pasa por los puntos $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_3)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$, (Figura 54).

Solución Sea $M(x, y, z)$ un punto arbitrario perteneciente al plano Π y $\overrightarrow{\mathbf{r_1}} = \overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{\mathbf{r_2}} = \overrightarrow{OM_2}$, $\overrightarrow{\mathbf{r_3}} = \overrightarrow{OM_3}$ y $\overrightarrow{\mathbf{r}} = \overrightarrow{OM}$ los vectores deposición de M_1, M_2, M_3 y M respectivamente. A continuación formemos los vectores, $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{\mathbf{r_2}} - \overrightarrow{\mathbf{r_1}}$, $\overrightarrow{M_1M_3} = \overrightarrow{\mathbf{r_3}} - \overrightarrow{\mathbf{r_1}}$, $\overrightarrow{M_1M} = \overrightarrow{\mathbf{r}} - \overrightarrow{\mathbf{r_1}}$. Como estos tres vectores pertenecen al plano, su producto mixto es igual a cero:

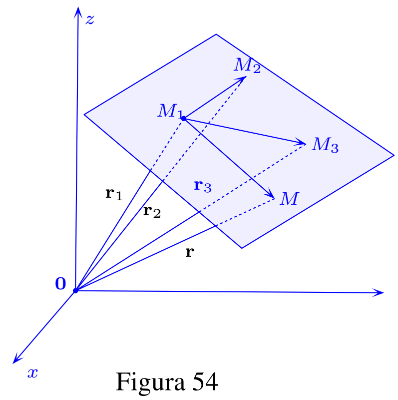


Figura 54

$$(\overrightarrow{\mathbf{r}} - \overrightarrow{\mathbf{r_1}})\cdot(\overrightarrow{\mathbf{r_2}} - \overrightarrow{\mathbf{r_1}})\cdot(\overrightarrow{\mathbf{r_3}} - \overrightarrow{\mathbf{r_1}}) = 0,$$

o bien

$$(\overrightarrow{\mathbf{r}} - \overrightarrow{\mathbf{r_1}})\cdot(\overrightarrow{\mathbf{r_2}} - \overrightarrow{\mathbf{r_1}})\cdot(\overrightarrow{\mathbf{r_3}} - \overrightarrow{\mathbf{r_1}}) = \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (1.44)$$

17. Determine la ecuación del plano que pasa por los puntos $M_1(1, 3, -2)$, $M_2(4, -5, 6)$ y $M_3(-3, 1, 2)$.

Solución De acuerdo a la fórmula (1.44), tenemos:

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 3 & z + 2 \\ 4 - 1 & -5 - 3 & 6 + 2 \\ -3 - 1 & 1 - 3 & 2 + 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - 1 & y - 3 & z + 2 \\ 3 & -8 & 8 \\ -4 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

haciendo el desarrollo por cofactores a lo largo de la primera fila obtenemos:

$$(x - 1)\begin{vmatrix} -8 & 8 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} - (y - 3)\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} + (z + 2)\begin{vmatrix} -8 & 8 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

y simplificando, obtenemos la ecuación del plano:

$$-(16x + 44y + 38z - 72 = 0) \quad \Rightarrow \quad 8x + 22y + 19z - 36 = 0.$$

Capítulo 2

Desarrollos limitados

2.1 Funciones equivalentes

En el estudio de los límites de funciones es de gran utilidad la noción de desarrollo limitado de la función alrededor de un punto. En este sentido, es necesario definir la noción de dominación y de equivalencia de funciones.

Definición 2.1.1 *Sean f y g dos funciones reales definidas en un vecindario abierto de $a \in \mathbb{R}$, excepto quizás en $x = a$, se dice que f está dominada por g (o que g domina a f) en un vecindario de a, y se denota $f = O(g)$, si existen $\eta > 0$ y $\beta > 0$ tales que $\forall\, x \in \,]\, a - \eta, a + \eta\, [$ se tiene $|f(x)| \leq \beta |g(x)|$.*

Cuando la función g no se anula en el vecindario de a, podemos definir el cociente f/g en $]\, a - \eta, a + \eta\, [$.
La relación $f = O(g)$ significa que la restricción de f/g a $]\, a - \eta, a + \eta\, [$ es acotada, es decir existe $M > 0$ tal que $\left| \dfrac{f(x)}{g(x)} \right| \leq M$. Se dice también que f/g es acotada en un vecindario de a.
La relación de dominación es compatible con la multiplicación: si $f_1 = O(g_1)$ y $f_2 = O(g_2)$, entonces $f_1 f_2 = O(g_1 g_2)$.
Además, si $f_1 = O(g)$ y $f_2 = O(g)$, entonces $\alpha f_1 + \alpha' f_2 = O(g)$.

Definición 2.1.2 *Sean f y g dos funciones definidas en un vecindario abierto de a, excepto quizás en $x = a$, decimos que f es despreciable frente a g, en un vecindario de a, y se denota $f = o(g)$, si $\forall\, \epsilon > 0$ existe $\eta > 0$ tal que $\forall\, x \in \,]\, a - \eta, a + \eta\, [$ se tiene $|f(x)| \leq \epsilon |g(x)|$.*

Observación
La relación $f = o(g)$ implica la relación $f = O(g)$, pero el recíproco es falso.
Si $0 < \alpha < \beta$, entonces $x^\alpha = o(x^\beta)$ en un vecindario de 0.
$\forall\, \alpha < 0$, $\ln x = o(x^\alpha)$, en un vecindario de 0.
Si $f_1 = o(g_1)$ y $f_2 = o(g_2)$, entonces $f_1 f_2 = o(g_1 g_2)$.

Si $f_1 = o(g_1)$ y $f_2 = O(g_2)$, entonces $f_1 f_2 = o(g_1 g_2)$.

Si $f_1 = o(g)$ y $f_2 = o(g)$, entonces $\alpha f_1 + \alpha' f_2 = o(g)$.

Cuando la función $g(x)$ no se anula en el vecindario de a, podemos definir el cociente f/g en $]\,a-\eta, a+\eta\,[$. La relación $f(x) = o(g(x))$, cuando $x \to a$, significa que $\lim\limits_{x\to a} f(x)/g(x) = 0$.

Definición 2.1.3 *Sean f y g dos funciones reales (o complejas), se dice que f es equivalente a g cuando $x \to a$, si existe una función h, definida en un vecindario abierto de a, tal que $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} \longrightarrow 1$, cuando $x \to a$ y se escribe $f \sim g$.*

Observemos que $f \sim g \Longleftrightarrow f - g = o(g)$.

En la definición anterior no interesa el valor de las funciones f y g en el punto $x = a$. Podría ocurrir que las funciones no estén definidas en $x = a$.

a) $\operatorname{sen} x = x + o(x)$, si $x \to 0$, pues $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

b) $\operatorname{sen}^2 x = o(x)$, si $x \to 0$, pues $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x} = 0$.

c) $\ln(1+x) = x + o(x)$, si $x \to 0$, pues $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) - x}{x} = 0$.

d) Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, entonces es claro que $f(x) = o(1)$, cuando $x \to a$. Recíprocamente, la frase $f(x) = o(1)$, si $x \to a$, significa simplemente que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

e) Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$, donde $a_n \neq 0$, se tiene que $P(x) \sim a_n x^n$ cuando $n \to \pm\infty$.

Teorema 2.1.1 *Si f y g tienen el mismo límite $\ell \neq 0$, cuando $x \to a$, entonces $f \sim g$ cuando $x \to a$.*

Demostración Sea $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, entonces $h(x) \longrightarrow \dfrac{\ell}{\ell} = 1$, cuando $x \to a$.

Teorema 2.1.2 *Si $f \sim g$ cuando $x \to a$ y si $f(x) \longrightarrow \ell$, cuando $x \to a$, entonces $g(x) \longrightarrow \ell$, cuando $x \to a$ (igualmente si $a \in \mathbb{R}$ o $a = \pm\infty$.)*

Demostración Como $g(x) = f(x)h(x)$, con $h(x) \longrightarrow 1$ cuando $x \to a$, $g(x) \longrightarrow \ell$.

Teorema 2.1.3 *Si $f \sim f_1$ y $g \sim g_1$ cuando $x \to a$, entonces $fg \sim f_1 g_1$ y $f/g \sim f_1/g_1$, cuando $x \to a$.*

Demostración Sea $f(x) = f_1(x)h(x)$, $g(x) = g_1(x)k(x)$ con $h(x) \longrightarrow 1$ y $k(x) \longrightarrow 1$, cuando $x \to a$. Entonces $f(x)g(x) = f_1(x)g_1(x)(h(x)k(x))$, $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)} \dfrac{h(x)}{k(x)}$ y $h(x)k(x) \longrightarrow 1$ y $\dfrac{h(x)}{k(x)} \longrightarrow 1$.

Error a evitar Si $f \sim f_1$ y $g \sim g_1$ cuando $x \to a$, no se tiene en general $f + g \sim f_1 + g_1$ ni $f - g \sim f_1 - g_1$, cuando $x \to a$.

Si $f \sim g$, cuando $x \to a$, no significa que $f(x) - g(x) \longrightarrow 0$, cuando $x \to a$. Por ejemplo, cuando

$x \to 0$, se tiene $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \sim \frac{1}{x^2}$, pero $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x} \longrightarrow +\infty$.

Cuando $x \to 0$ se tiene $x + x^2 \sim x + x^3$, pues $\frac{x + x^3}{x + x^2} \longrightarrow 1$. También $x \sim x$, pero $(x + x^2) - x = x^2 \not\sim (x + x^3) - x = x^3$.

Definición 2.1.4 *Si $f(x) \sim \alpha(x-a)^r$ cuando $x \to a$, $\alpha \in \mathbb{R}$, se dice que $\alpha(x-a)^r$ es la parte principal de $f(x)$.*

Supongamos que f y g admiten partes principales $\alpha(x-a)^r$ y $\beta(x-a)^s$ en un vecindario de a, entonces:
si $r < s$, $f + g$ tiene por parte principal a $\alpha(x - a)^r$
si $r = s$, $f + g$ tiene por parte principal a $(\alpha + \beta)(x - a)^r$.
Por ser de uso frecuente, en el caso particular en que $a = 0$ se omite la notación "$x \to 0$", y se escribe simplemente $f(x) = o(g(x))$. Por ejemplo, $\operatorname{sen}^2(x) = o(x)$.
También se escribe frecuentemente $f(x) = g(x)o(1)$, en vez de $f(x) = o(g(x))$, pues ambas expresiones significan lo mismo: $\lim_{x \to 0} f(x)/g(x) = 0$. De esta forma, si $f(x) = o(x^n)$, entonces tenemos que $f(x) = x^n o(1)$. Por ejemplo, son equivalentes las siguientes dos frases: $\operatorname{sen} x = x + o(x)$ y $\operatorname{sen} x = x + xo(1)$.
Debe tenerse especial cuidado con frases como "$o(g(x)) = o(h(x))$", pues éstas se interpretan como sigue: si $f(x) = o(g(x))$, entonces $f(x) = o(h(x))$. Bajo esta interpretación, el símbolo "=" en la frase "$o(g(x)) = o(h(x))$" no es simétrico. Por ejemplo, la frase "$o(x^2) = o(x)$" denota una propiedad verdadera, sin embargo se puede verificar fácilmente que "$o(x) = o(x^2)$" es falsa.
A continuación se presenta una lista de propiedades algebraicas elementales, frecuentes en el manejo de cálculos con la notación "o" de Landau.

Proposición 2.1.1 *Cuando $(x \to a)$, en un vecindario abierto V de a:*

a) $\lambda \cdot o(g(x)) = o(\lambda g(x)) = o(g(x))$, *para* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$.
b) $o(g(x)) \pm o(g(x)) = o(g(x))$.
c) Si $m \geq n$, *entonces* $o(x^m) = o(x^n)$.
d) Si $m \geq n$, *entonces* $o(a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \cdots + a_m x^m) = o(x^n)$.
e) Si $m \geq n$, *entonces* $a_n o(x^n) + \cdots + a_m o(x^m) = o(x^n)$.
f) $o(g_1(x)) \cdot o(g_2(x)) = o(g_1(x) g_2(x))$.
g) Si $\lim_{x \to a} g_1(x)/g_2(x) = 1$, *entonces* $f(x) = o(g_1(x))$ *si y sólo si* $f(x) = o(g_2(x))$.

Demostración Se deja de ejercicio.

2.2 El teorema de Taylor

2.2.1 Notaciones

$C^n(I)$ denotará la clase de funciones reales de variable real n-veces derivables en el intervalo I, con la n-ésima derivada continua en I. $C^0(I)$ denotará la clase de funciones continuas en I, mientras que $C^\infty(I)$ denotará la clase de funciones infinitamente derivables en I. Si $n > m$ entonces se cumplen las relaciones de inclusión $C^\infty(I) \subseteq C^n(I) \subseteq C^m(I) \subseteq C^0(I)$.
Para una función específica f, la notación $f^{(n)}$ denotará la n-ésima derivada de f, cuando ésta exista. Escribimos $f^{(0)} = f$.

Teorema 2.2.1 Fórmula de Taylor *Sea I un intervalo, sea $a \in I$ y sea $f \in C^n(I)$, entonces para cada $x \in I$ se tiene:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,f^{(n)}(t)dt.$$

Demostración Sea $n = 1$, la fórmula se reduce a $f(x) = f(a) + \displaystyle\int_a^x f'(t)dt$.
Supongamos que la fórmula es válida hasta el orden n y probemos que vale para $n+1$. Usando integración por partes:

$$\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt =$$

$$-\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t)\Big|_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

Corolario 2.2.1 *Sea I un intervalo y sea $a \in I$. Sea f de la clase $C^n(I)$ de modo que $|f^{(n)}(x)|$ está mayorada por una constante M, entonces para cada $x \in I$:*

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k \right| \leq M\,\frac{(x-a)^n}{n!}\,.$$

Demostración Si $a < x$, $\displaystyle\left|\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt\right| \leq \int_a^x \left|\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\right| dt \leq$

$$\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} M dt = -\frac{M}{(n-1)!}\frac{(x-t)^n}{n}\Big|_a^x = M\frac{(b-a)^n}{n!}.$$

Similarmente se demuestra el caso $a > x$.

Corolario 2.2.2 Fórmula de Taylor–Young *Sea I un intervalo, sea x_0 un punto en el interior de I y sea f de clase $C^n(I)$, entonces si $h \to 0$:*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h}{1!}\,f'(x_0) + \frac{h^2}{2!}\,f''(x_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!}\,f^{(n)}(x_0) + h^n o(1).$$

Demostración Reemplazando en la fórmula de Taylor a por x_0 y x por x_0+h tenemos:

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{h}{1!}\,f'(x_0)+\frac{h^2}{2!}\,f''(x_0)+\cdots+\frac{h^n}{n!}\,f^{(n)}(x_0)+g(h),$$

con

$$g(h)=\int_{x_0}^{x_0+h}\frac{(x_0+h-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,f^{(n)}(t)dt-\frac{h^n}{n!}\,f^{(n)}(x_0)=\int_{x_0}^{x_0+h}\frac{(x_0+h-t)^{n-1}}{(n-1)!}\left[f^{(n)}(t)-f^{(n)}(x_0)\right]dt.$$

Sea $\epsilon(h)$ la cota superior de $|f^{(n)}(t)-f^{(n)}(x_0)|$ en el intervalo de extremos x_0 y x_0+h. Como $f^{(n)}(t)$ es continua, $\epsilon(h)\longrightarrow 0$ cuando $h\to 0$. Así:

$$|g(h)|\le\int_{x_0}^{x_0+h}\frac{(x_0+h-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,\epsilon(h)dt=\frac{h^n}{n!}\,\epsilon(h)\text{ si }h\ge 0,$$

y

$$|g(h)|\le\int_{x_0+h}^{x_0}\frac{(t-x_0-h)^{n-1}}{(n-1)!}\,\epsilon(h)dt=(-1)^n\,\frac{h^n}{n!}\,\epsilon(h),\ \text{si }h\le 0,$$

por lo tanto en todos los casos $g(h)=h^n o(1)$ cuando $h\to 0$.

Fórmula de Maclaurin Reemplazando en la fórmula de Taylor a por 0 tenemos:

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}\,f'(0)+\frac{x^2}{2!}\,f''(0)+\cdots+\frac{x^n}{n!}\,f^{(n)}(0)+\int_0^x\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,f^{(n)}(t)dt.$$

Si f admite derivadas continuas hasta el orden n y si $f^{(n)}$ está mayorada por una constante M en el intervalo de extremos 0 y x se tiene:

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}\,f'(0)+\frac{x^2}{2!}\,f''(0)+\cdots+\frac{x^n}{n!}\,f^{(n)}(0)+x^n o(1).$$

2.3 Desarrollos limitados

Definición 2.3.1 *Una función f definida en un vecindario abierto V de un punto a se dice que admite un desarrollo limitado de orden $n\ge 0$ alrededor de a, si existen constantes $a_0,a_1,\ldots,a_n$ tales que:*

$$f(x)=a_0+a_1\,(x-a)+\cdots+a_n(x-a)^n+(x-a)^n o(1),\qquad x\to a.$$

Observaciones

a) Cuando f admite desarrollo limitado de orden 0 alrededor de un punto a, digamos $f(x)=a_0+o(1)$, $x\to a$, entonces sólamente puede decirse que $\lim\limits_{x\to a}f(x)=a_0$. No necesariamente la función f es continua en $x=a$, aunque en todo caso la función podría redefinirse en $x=a$ de forma tal que sea continua en a. Obsérvese que no interesa el valor concreto de la función f en el punto $x=a$. Por ejemplo, la función $(\operatorname{sen}x)/x$ admite un desarrollo limitado alrededor de 0 de orden 0, pues $\frac{\operatorname{sen}x}{x}=$

$1 + o(1)$, aunque sin embargo esta función no está definida en $x = 0$.

b) Si la función f admite un desarrollo limitado de orden 1 alrededor del punto $x = a$, $f(x) = a_0 + a_1(x - a) + (x - a)o(1)$, $x \to a$, entonces es claro que $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - a_0}{x - a} = a_1$. Si adicionalmente la función f está definida en $x = a$ y además $f(a) = a_0$, entonces lo anterior demuestra que f es derivable en $x = a$ y su derivada $f'(a) = a_1$. En general f no tiene que ser derivable en $x = a$ pese a que admita desarrollo limitado de orden 1 o mayor. Sin embargo, en aquellos casos en que f no esté definida en $x = a$, o alternativamente $f(a) \neq a_0$, puede redefinirse la función en $x = a$ como sigue:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \neq a \\ a_0, & \text{si } x = a \end{cases}$$

La función $\tilde{f}$ así definida, resulta ser derivable en $x = a$, y además $\tilde{f}'(a) = a_1$.

Teorema 2.3.1 *Suponga que f admite un desarrollo limitado de orden n alrededor de $a \in V$, entonces:*

a) Este desarrollo es único.

b) f admite desarrollo limitado alrededor de a de cualquier orden menor.

Demostración

a) Sean $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n o(1)$, $f(x) = b_0 + b_1(x-a) + \cdots + b_n(x-a)^n + (x-a)^n o(1)$, dos desarrollos de $f(x)$ alrededor de a, entonces:

$$0 = a_0 - b_0 + (a_1 - b_1)(x-a) + \cdots + (a_n - b_n)(x-a)^n + (x-a)^n o(1).$$

Sea $0 \leq k \leq n$ el menor entero tal que $a_k \neq b_k$, entonces $0 = (a_k - b_k)(x-a)^k + \cdots + (a_n - b_n)(x-a)^n + (x-a)^n o(1)$, es decir $0 = (a_k - b_k) + \cdots + (a_n - b_n)(x-a)^{n-k} + (x-a)^{n-k} o(1)$ y si $x \to a$, $0 = a_k - b_k$ que es una contradicción. Así, $a_k = b_k \; \forall k = 1, \ldots, n$.

b) Es inmediato pues si $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n o(1)$, también $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_k(x-a)^k + (x-a)^k(a_{k+1}(x-a) + a_n(x-a)^{n-k} + (x-a)^{n-k} o(1)) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_k(x-a)^k + (x-a)^k o(1))$, con $k = 1, \ldots, n$.

Teorema 2.3.2 *Si f es de la clase $C^n(I)$ y $a \in I$, entonces f admite un desarrollo limitado de orden n alrededor de a.*

Demostración La fórmula de Taylor–Young es un desarrollo limitado de orden n alrededor de a.

Observaciones

a) Sea f una función par admitiendo un desarrollo limitado de orden n, alrededor de 0, entonces $f(x) = f(-x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + x^n o(1) = a_0 - a_1 x + \cdots + (-1)^n a_n x^n + x^n o(1)$ y como el desarrollo es único, $a_1 = a_3 = \cdots = 0$.

Si f es impar $a_0 = a_2 = \cdots = 0$.

b) Sea f una función admitiendo un desarrollo limitado de orden n, alrededor de 0 y sea k el menor natural tal que $a_k \neq 0$, entonces $f(x) = a_k x^k (1 + \frac{a_{k+1}}{a_k} x + \cdots + \frac{a_n}{a_k} x^{n-k}) + x^{n-k} o(1)$, es decir $f(x) \sim a_k x^k$ cuando $x \to 0$. Así, el desarrollo limitado aporta una información más precisa que la parte principal, sobre el comportamiento de la función alrededor del punto.

Teorema 2.3.3 *Si f es una función definida en un vecindario de a y si existen constantes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tales que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - a_0 - a_1(x-a) - \cdots - a_n(x-a)^n}{(x-a)^n} = 0$, entonces la función admite un desarrollo limitado de orden n en a.*

Observación Es importante destacar que si $f(x) \sim g(x) \not\Longrightarrow \mathrm{e}^{f(x)} \sim \mathrm{e}^{g(x)}$. Por ejemplo si $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$ entonces $f(x) \sim g(x)$, cuando $x \to 0$, pero $\mathrm{e}^{f(x)}/\mathrm{e}^{g(x)} = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \longrightarrow \pm\infty$, cuando $x \to 0$, es decir $\mathrm{e}^{f(x)} \not\sim \mathrm{e}^{g(x)}$. En resumen tenemos:

Proposición 2.3.1 *Para que $\mathrm{e}^{f(x)} \sim \mathrm{e}^{g(x)}$ es necesario y suficiente que $f(x) - g(x) \longrightarrow 0$, cuando $x \to a$. Dicho de otra forma, para que $f(x) \sim g(x)$ es necesario y suficiente que $\ln f(x) - \ln g(x) \longrightarrow 0$, cuando $x \to a$.*

Destaquemos otro ejemplo de errores que se cometen al manipular equivalencias entre exponenciales o logaritmos de las funciones.

Sea $f(x) = \left(1 + x\mathrm{e}^{-x}\right)^{1+x^2} - 1$, entonces $\mathrm{e}^{(1+x^2)\ln(1+x\mathrm{e}^{-x})} - 1 = \mathrm{e}^{(1+x^2)(x\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-2x} + o(x^2\mathrm{e}^{-2x}))}$ $- 1 = \mathrm{e}^{x\mathrm{e}^{-x} - \frac{x^2}{2\mathrm{e}^{-2x}} + x^3\mathrm{e}^{-x} - \frac{x^4}{2\mathrm{e}^{-2x}} + o(x^4\mathrm{e}^{-2x})} - 1 \sim x\mathrm{e}^{-x}$, cuando $x \to +\infty$.

Si consideramos que $(1+x^2)\ln(1+x\mathrm{e}^{-x}) \sim x^3\mathrm{e}^{-x}$ y que $\left(1+x\mathrm{e}^{-x}\right)^{1+x^2} - 1 \sim \mathrm{e}^{x^3\mathrm{e}^{-x}} - 1 \sim x^3\mathrm{e}^{-x}$, es decir que $x^3\mathrm{e}^{-x} \sim x\mathrm{e}^{-x}$, cuando $x \to +\infty$ que es imposible.

2.3.1 µlgebra de desarrollos limitados

Suma y producto Sean f y g dos funciones definidas en un vecindario V del punto a. Supongamos que f y g admiten desarrollos limitados de orden n alrededor de a, entonces para cada α, $\beta \in \mathbb{R}$, las funciones $\alpha f + \beta g$ y $f{\cdot}g$ admiten desarrollos limitados de orden n alrededor de a, cuando $x \to a$:

$$(\alpha f + \beta g)(x) = c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + (x-a)^n o(1),$$

$$(f{\cdot}g)(x) = d_0 + d_1(x-a) + \cdots + d_n(x-a)^n + (x-a)^n o(1),$$

donde para cada $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $c_i = \alpha a_i + \beta b_i$, $d_i = \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}$.

Composición Sea f una función que admite un desarrollo limitado de orden n alrededor de a y sea g

una función que admite un desarrollo limitado de orden n alrededor del punto a_0, entonces la función composición $g \circ f$ admite un desarrollo limitado de orden n alrededor de a.

Demostración Cuando $x \to a$, $f(x) - a_0 = a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n o(1) = o(1)$, por lo que $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sum_{k=0}^{n} b_k (f(x) - a_0)^k + (f(x) - a_0)^n o(1)$. El término $f(x) - a_0$ admite un desarrollo limitado de orden n alrededor de a, y en virtud del teorema precedente aplicado al producto de funciones, cada uno de los términos $(f(x) - a_0)^2, \ldots, (f(x) - a_0)^n$ admite también un desarrollo limitado de orden n alrededor de a. Así tenemos que $g \circ f$ admite desarrollo limitado de orden n alrededor de a.

Observaciones

a) Una función $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ puede admitir un desarrollo limitado de orden n alrededor de un punto, sin que la fórmula de Taylor sea aplicable.

b) La función $f\colon\ ]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$ admite un desarrollo limitado de orden n alrededor de 0: la función nula, ya que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^n}\, \mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}} = 0$, o sea $f(x) = o(x^n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.3.2 Desarrollos limitados usuales

De la fórmula de Taylor pueden calcularse los desarrollos limitados alrededor de 0 de las funciones usuales:

a) Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$, las derivadas sucesivas son $\cos x, -\operatorname{sen} x, -\cos x, \operatorname{sen} x, \ldots$ y evaluando las derivadas en 0 tenemos el desarrollo limitado del $\operatorname{sen} x$:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1} o(1).$$

b) Sea $f(x) = \cos x$, las derivadas sucesivas son $-\operatorname{sen} x, -\cos x, \operatorname{sen} x, \cos x, \ldots$; evaluando las derivadas en 0 tenemos:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}).$$

c) Sea $f(x) = a^x$, las derivadas sucesivas son $a^x \log a, a^x \log^2 a, \ldots, a^x \log^n a$, y evaluando las derivadas en 0 tenemos:

$$a^x = 1 + \frac{x \log a}{1!} + \frac{x^2 \log^2 a}{2!} + \cdots + \frac{x^n \log^n a}{n!} + x^n o(1), \text{ cuando } x \to 0.$$

En particular $\mathrm{e}^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + x^n o(1)$, cuando $x \to 0$.

d) Las derivadas sucesivas del $\operatorname{sh}\, x$ son $\operatorname{ch}\, x, \operatorname{sh}\, x, \operatorname{ch}\, x, \operatorname{sh}\, x, \ldots$, con lo que:

$$\operatorname{sh}\, x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}), \text{ cuando } x \to 0.$$

e) Las derivadas sucesivas del $\operatorname{ch}\, x$ son $\operatorname{sh}\, x, \operatorname{ch}\, x, \operatorname{sh}\, x, \operatorname{ch}\, x, \ldots$, con lo que:

$$\operatorname{ch}\, x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}), \text{ cuando } x \to 0.$$

f) La función $f(x) = (1+x)^\alpha$ está definida para $x > -1$, si $\alpha \in \mathbb{R}$. Las derivadas sucesivas de $f(x)$ son:

$\alpha(1+x)^{\alpha-1}, \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3}, \dots, \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$,

entonces si $x \to 0$ tenemos:

$(1+x)^\alpha = 1 + \dfrac{\alpha}{1}x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n o(1)$.

g) En el caso que $\alpha = \frac{1}{2}$, $\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} = \dfrac{1\cdot(-1)\cdot(-3)\cdots(-2n+3)}{2^n n!} =$

$(-1)^{n-1}\dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots(2n)}$. Así tenemos que:

$\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2\cdot 4}x^2 + \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 + \cdots + (-1)^{n+1}\dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots 2n}x^n + o(x^n)$.

h) En el caso que $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} = \dfrac{(-1)\cdot(-3)\cdot(-5)\cdots(-2n+1)}{2^n n!} =$

$(-1)^n\dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}$. Así tenemos que:

$\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 + \cdots + (-1)^n\dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}x^n + o(x^n)$.

i) Si $\alpha = -1$ se tiene $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$.

j) $\log(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n} + o(x^n)$.

k) $\tan x = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + \dfrac{17x^7}{315} + \cdots + \dfrac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n x^{2n-1}}{(2n)!} + o(x^{2n-1})$.

l) $\operatorname{cotg} x = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{3} - \dfrac{x^3}{45} - \dfrac{2x^5}{945} - \cdots - \dfrac{2^{2n}B_n x^{2n-1}}{(2n)!} + o(x^{2n-1})$.

m) $\sec x = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5x^4}{24} + \dfrac{61x^6}{720} + \cdots + \dfrac{E_n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$.

n) $\csc x = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{6} + \dfrac{7x^3}{360} + \dfrac{31x^5}{15120} + \cdots + \dfrac{2(2^{2n-1}-1)B_n x^{2n-1}}{(2n)!} + o(x^{2n-1})$.

ñ) $\operatorname{arcsen} x = x + \dfrac{1}{2}\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\dfrac{x^5}{5} + \dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\dfrac{x^7}{7} + \cdots + \dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$.

o) $\arctan x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$.

p) $\tanh x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} - \dfrac{17x^7}{315} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n x^{2n-1}}{(2n)!} + o(x^{2n-1})$.

q) $\operatorname{cotgh} x = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{3} - \dfrac{x^3}{45} - \dfrac{2x^5}{945} - \cdots - \dfrac{2^{2n}B_n x^{2n-1}}{(2n)!} + o(x^{2n-1})$.

r) $\operatorname{sech} x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5x^4}{24} - \dfrac{61x^6}{720} + \cdots + \dfrac{(-1)^n E_n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$.

s) $\operatorname{csch} x = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{6} + \dfrac{7x^3}{360} - \dfrac{31x^5}{15120} + \cdots + \dfrac{(-1)^n 2(2^{2n-1}-1)B_n x^{2n-1}}{(2n)!} + o(x^{2n-1})$.

t) $\operatorname{arcsenh} x = x - \dfrac{1}{2}\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\dfrac{x^5}{5} - \dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\dfrac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n\dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$.

u) $\operatorname{arctanh} x = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{x^7}{7}\cdots + \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$.

v) $(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 + \cdots + (-1)^{n+1}(n+1)x^n + o(x^n)$.

w) $(1+x)^{-3} = 1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + 15x^4 + \cdots + (-1)^n(n+1)(n+2)x^n + o(x^n)$.

x) $(1+x)^{-\frac{1}{3}} = 1 - \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1\cdot 4}{3\cdot 6}x^2 - \dfrac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9}x^3 + \dfrac{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10}{3\cdot 6\cdot 9\cdot 12}x^4 + \cdots + (-1)^n\dfrac{1\cdot 4\cdots(3n-2)}{3\cdot 6\cdots 3n}x^n + o(x^n)$.

y) $(1+x)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3{\cdot}6}x^2 + \frac{2{\cdot}5}{3{\cdot}6{\cdot}9}x^3 - \frac{2{\cdot}5{\cdot}8}{3{\cdot}6{\cdot}9{\cdot}12}x^4 + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{2{\cdot}5\cdots(3n-4)}{3{\cdot}6\cdots 3n}x^n + o(x^n)$.

donde los B_i y los E_i son los números de Bernoulli y de Euler respectivamente.

Los números de Bernoulli $B_1, B_2, B_3, \ldots$ se definen por las series:

$$\frac{x}{e^x-1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{B_1x^2}{2!} - \frac{B_2x^4}{4!} + \frac{B_3x^6}{6!} - \cdots \qquad |x| < 2\pi$$

$$1 - \frac{x}{2}\operatorname{cotg}\frac{x}{2} = \frac{B_1x^2}{2!} + \frac{B_2x^4}{4!} + \frac{B_3x^6}{6!} + \cdots \qquad |x| < \pi$$

Los números de Euler E_1, E_2, E_3,... se definen por las series:

$$\operatorname{sech} x = 1 - \frac{E_1x^2}{2!} + \frac{E_2x^4}{4!} + \frac{E_3x^6}{6!} - \cdots \qquad |x| < \tfrac{1}{2}\pi$$

$$\sec x = 1 + \frac{E_1x^2}{2!} + \frac{E_2x^4}{4!} + \frac{E_3x^6}{6!} + \cdots \qquad |x| < \tfrac{1}{2}\pi$$

Algunos números de Bernoulli y de Euler:

Números de Bernoulli	Números de Euler
$B_1 = 1/6$	$E_1 = 1$
$B_2 = 1/30$	$E_2 = 5$
$B_3 = 1/42$	$E_3 = 61$
$B_4 = 1/30$	$E_4 = 1.385$
$B_5 = 5/66$	$E_5 = 50.521$
$B_6 = 691/2730$	$E_6 = 2.702.765$
$B_7 = 7/6$	$E_7 = 199.360.981$
$B_8 = 3617/510$	$E_8 = 19.391.512.145$
$B_9 = 43.867/798$	$E_9 = 2.404.879.675.441$
$B_{10} = 174.611/330$	$E_{10} = 370.371.188.237.525$
$B_{11} = 854.513/138$	$E_{11} = 69.348.874.393.137.901$
$B_{12} = 236.364.091/2.730$	$E_{12} = 15.514.534.163.557.086.905$
$B_{13} = 8.553.103/6$	$E_{13} = 4.087.072.509.293.123.892.361$
$B_{14} = 23.749.461.029/870$	$E_{14} = 1.252.259.641.403.629.865.468.285$
$B_{15} = 8.615.841.276.005/14.322$	$E_{15} = 441.543.893.249.023.104.553.682.821$

Con base en estos desarrollos limitados pueden calcularse los desarrollos de muchas otras funciones. Los ejemplos que siguen ilustran el método.

2.3.3 Ejemplos

a) Hallar el desarrollo limitado de orden 4 de $\cos^2 x$, alrededor de 0.

Solución Dado que $\cos^2 x = (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4))^2 = 1 + (-\frac{x^2}{2!})^2 + 2(-\frac{x^2}{2!}) + 2(\frac{x^4}{4!}) + x^4 o(1) = 1 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 + x^4\, o(1)$. Obsérvese que al elevar al cuadrado el primer paréntesis, sólo se conservan los términos cuyos exponentes son menores o iguales a 4.

b) Hallar el desarrollo limitado de orden 5 de $\tan x$, alrededor de 0.

Solución Por definición $\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\operatorname{sen} x}{1-(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^5))} = \operatorname{sen} x\,\big[1+\big(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^5)\big)+\big(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^5)\big)^2+o(x^5)\big] = (\operatorname{sen} x)\big(1+\frac{x^2}{2}+\frac{5}{24}x^4+o(x^5)\big) = \big(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)\big)\,\big(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+o(x^5)\big) = x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+o(x^5)$.

Obsérvese que aquí se utilizó el desarrollo limitado de la función $g(z)=1/(1-z)$ alrededor de 0, de orden 2. Pese a que se desea el desarrollo limitado de $\tan x$ de orden 5, se empleó un desarrollo de $g(z)$ de orden 2 pues los siguientes términos realmente no aportan nada nuevo, ya que arrojarían potencias de x superiores a 5.

c) Calcule el desarrollo limitado de $\sqrt{1+x}\cos x$ de orden 2, alrededor de 0.

Solución Usando la definición $\sqrt{1+x}\cos x = (1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2))\cdot(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)) = 1+\frac{1}{2}x-\frac{5}{8}x^2+o(x^2)$.

d) Sea f una función tal que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$. Demostrar que no existe el desarrollo limitado de f alrededor de a, de ningún orden.

Solución Basta demostrar que no existe el desarrollo limitado de orden 0 alrededor de a. Esto es claro, pues no hay manera de escoger $a_0 \in \mathbb{R}$ de forma tal que $f(x) = a_0 + o(1)$, si $x \to a$.

e) Calcular el desarrollo limitado de orden 5 en un vecindario de 0 de la función $f(x) = \mathrm{e}^{\operatorname{sen} x}$.

Solución Sabemos que $\operatorname{sen} x = x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+o(x^5)$ y que $\mathrm{e}^y = 1+y+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+\frac{y^4}{4!}+\frac{y^5}{5!}+o(y^5)$, entonces $\big(x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5\big)^2 = x^2\big(1-\frac{1}{6}x^2\big)^2+o(x^5) = x^2\big(1-\frac{1}{3}x^2\big)+o(x^5)$. Similarmente, $\big(x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5\big)^3 = x^3\big(1-\frac{1}{6}x^2\big)^3+o(x^5) = x^3\big(1-\frac{1}{2}x^2\big)+o(x^5)$, $\big(x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5\big)^4 = x^4+o(x^5)$ y $\big(x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5\big)^5 = x^5+o(x^5)$. Finalmente, $\mathrm{e}^{\operatorname{sen} x} = 1+x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{15}x^5+o(x^5)$.

2.3.4 Derivación e integración de desarrollos limitados

Sea $f(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+o(x^n)$, cuando $x\to 0$, el desarrollo limitado de orden n de f en un vecindario de 0. Supongamos que $f \in C^\infty(I)$, con I un intervalo que contiene a 0 como punto interior. Por la fórmula de Taylor y la unicidad del desarrollo limitado se tiene $a_p = \frac{f^{(p)}(0)}{p!}$. Por otro lado la función $g(x) = f'(x)$ es indefinidamente derivable en I y admite un desarrollo limitado $g(x) = b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_{n-1}x^{n-1}+o(x^{n-1})$, cuando $x\to 0$, de modo que $b_p = \frac{g^{(p)}(0)}{p!} = \frac{f^{(p+1)}(0)}{p!} = \frac{(p+1)!a_{p+1}}{p!} = (p+1)a_{p+1}$. Así, $f'(x) = a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+o(x^{n-1})$, cuando $x\to 0$.

Es importante señalar que la existencia de un desarrollo limitado de orden n de la función f en x_0, no implica la existencia de un desarrollo limitado de orden $n-1$ de la función f' alrededor de x_0.
Sea $f(x) = x^3 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$. La función f admite un desarrollo limitado de orden 2, pues $f(x) = o(x^2)$, pero f no es dos veces derivable en 0, por lo que f' no admite desarrollo de orden 1 en 0. Sin embargo, se puede obtener un desarrollo limitado de una derivada f' por derivación del desarrollo limitado de f, en la medida que se sepa de antemano la existencia del desarrollo limitado de f'.

Teorema 2.3.4 *Sea una función continuamente derivable sobre el intervalo I, conteniendo a a como punto interior, que admite un desarrollo limitado $P(x)$ de orden n en a. Si f' admite un desarrollo limitado $Q(x)$ de orden $n-1$ en a, entonces $Q(x) = P'(x)$.*

Teorema 2.3.5 *Sea una función continuamente derivable sobre el intervalo I, conteniendo a a como punto interior, que admite un desarrollo limitado de orden n en a, entonces toda primitiva g de f admite un desarrollo limitado de orden $n+1$ en a, es decir si:*
$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$, *cuando $x \to a$, entonces:*
$g(x) = g(a) + a_0(x-a) + \frac{a_1}{2}(x-a)^2 + \frac{a_2}{3}(x-a)^3 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + o((x-a)^{n+1})$, *cuando $x \to a$.*

Demostración En efecto, $\displaystyle\int_a^x \left[f(t) - \sum_{p=0}^n \alpha_p (t-a)^p\right] dt = o((x-a)^{n+1})$ ya que si $f(x) \sim g(x) \implies \displaystyle\int_a^x f(t)dt \sim \int_a^x g(t)dt$ cuando $x \to a$, pues si $f(x) \sim g(x)$, se tiene $\dfrac{f(x)}{g(x)} \longrightarrow 1$ cuando $x \to a$, y $\dfrac{\displaystyle\int_a^x f(t)dt}{\displaystyle\int_a^x g(t)dt} = \dfrac{\dfrac{1}{x-a}\displaystyle\int_a^x f(t)dt}{\dfrac{1}{x-a}\displaystyle\int_a^x g(t)dt} \longrightarrow 1$ cuando $x \to a$.

2.4 Generalización de desarrollos limitados

Se pueden considerar funciones definidas sobre un intervalo I, donde a no es un punto interior sino que es un extremo. Estas funciones pueden admitir desarrollos limitados alrededor de a. Es el caso de funciones $f(x) \longrightarrow \pm\infty$ cuando $x \to a$, pero puede existir un $\alpha > 0$ tal que $x^\alpha f(x)$ tienda a un límite ℓ cuando $x \to a$. Entonces f admite un desarrollo limitado generalizado en a, conviniendo en asignarle el valor ℓ en a a la función $x^\alpha f(x)$. Es el caso de $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$ cuando $x \to 0$, pues $x \operatorname{cotg} x = x\dfrac{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)}{x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)} = \dfrac{x - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)}{x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)} = \dfrac{1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{1 - \frac{1}{6}x^2 + o(x^3)} = (1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2))(1 + \frac{1}{6}x^2 + o(x^3)) = 1 - \frac{1}{3}x^2 + o(x^3)$, es decir $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} + o(x^2)$, cuando $x \to 0$.

Un caso interesante es el de la función $\operatorname{sen}\sqrt[3]{x}$, la cual puede desarrollarse en un vecindario de 0 como sigue: $\operatorname{sen}\sqrt[3]{x} = \operatorname{sen} z = z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \frac{1}{7!}z^7 + o(z^7) = x^{1/3} - \frac{x}{6} + \frac{x^{5/3}}{120} - \frac{x^{7/3}}{5040} + o(x^{7/3})$. Si deseamos el desarrollo de la función anterior, alrededor de 0, de *orden despreciable frente a* x^2, entonces obtenemos $\operatorname{sen}\sqrt[3]{x} = x^{1/3} - \frac{x}{6} + \frac{x^{5/3}}{120} + o(x^2)$, pues $\frac{1}{5040}x^{7/3} + o(x^{7/3}) = o(x^2)$.

Otro ejemplo es el de la función $\sqrt{x - x^2}$, la cual puede desarrollarse como sigue: $\sqrt{x - x^2} = x^{1/2}(1-x)^{1/2} = x^{1/2}\cdot\big(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + o(x^3)\big) = x^{1/2} - \frac{1}{2}x^{3/2} + \frac{1}{8}x^{5/2} - \frac{1}{16}x^{7/2} + o(x^{7/2})$. Si deseamos el desarrollo de la función anterior, alrededor de 0, de *orden despreciable frente a* x^3, entonces obtenemos $\sqrt{x - x^2} = x^{1/2} - \frac{1}{2}x^{3/2} + \frac{1}{8}x^{5/2} + o(x^3)$, pues $-\frac{1}{16}x^{7/2} + o(x^{7/2}) = o(x^3)$.

Por último consideremos el desarrollo generalizado de la función $f(x) = \operatorname{arcsen}(1 - 2x)$. Es claro que $f(0) = \frac{\pi}{2}$. Además la derivada $f'(x) = (4x - 4x^2)^{-1/2}$ presenta una discontinuidad inevitable en $x = 0$, de donde se concluye que f no admite un desarrollo limitado de orden 1 o mayor alrededor de 0^+. Sin embargo, podemos hallar un desarrollo generalizado de esta función: $f'(x) = (4x - 4x^2)^{-1/2} = \frac{1}{2}x^{-1/2}(1-x)^{-1/2} = \frac{1}{2}x^{-1/2}\big(1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + o(x^3)\big) = \frac{1}{2}x^{-1/2} + \frac{1}{4}x^{1/2} + \frac{3}{16}x^{3/2} + \frac{5}{32}x^{5/2} + o(x^{5/2})$. Integrando este desarrollo generalizado obtendremos el desarrollo generalizado de la función original $f(x)$.

En efecto, $\operatorname{arcsen}(1 - 2x) = \frac{\pi}{2} + x^{1/2} + \frac{1}{6}x^{3/2} + \frac{3}{40}x^{5/2} + \frac{5}{112}x^{7/2} + o(x^{7/2})$.

2.5 Aplicaciones

La primeras aplicaciones de los desarrollos limitados se encuentran en el *cálculo de límites*. Sin embargo la utilidad de los desarrollos limitados no se circunscribe tan solo al cálculo de límites. En efecto, como veremos también son de utilidad en temas como *integrales impropias* y *series numéricas*, entre algunas otras aplicaciones.

Cálculo de límites

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{sen} x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1 + x + o(x) - (1 + (-x) + o(-x))}{x + o(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x(2 + o(1))}{x(1 + o(1))} = 2.$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} x(\ln(1+x) - \ln x) = \lim\limits_{x\to\infty} x\ln(1 + 1/x) = \lim\limits_{y\to 0^+} \frac{\ln(1+y)}{y} = \lim\limits_{y\to 0^+} \frac{y(1 + o(1))}{y} = \lim\limits_{y\to 0^+} 1 + o(1) = 1.$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x - (x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3))}{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - 1 - x - \frac{x^2}{2}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3(\frac{1}{6} + o(1))}{x^3(\frac{1}{6} + o(1))} = 1.$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 - \operatorname{sen}^2 x}{x^2 \operatorname{sen}^2 x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x + \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^2 \operatorname{sen} x} = \lim\limits_{x\to 0} \big(\frac{x}{\operatorname{sen} x} + 1\big) \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^2 \operatorname{sen} x}$
$= 2\cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{x - (x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))}{x^2(x + o(x))} = 2\cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3(\frac{1}{6} + o(1))}{x^3(1 + o(1))} = \frac{1}{3}.$

e) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} - \operatorname{cotg}^2 x = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^2 \operatorname{sen}^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 - x^2\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^2)\right)^2}{x^2(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4))^2}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4) - x^2 + x^4 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4(\frac{2}{3} + o(1))}{x^4(1 + o(1))} = \frac{2}{3}.$

Capítulo 3

Las Reglas de L'Hôpital

3.1 Introducción

Teorema 3.1.1 Teorema de Rolle *Si una función $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$, derivable en todos los puntos interiores del intervalo $[a, b]$ y en los extremos $x = a$ y $x = b$ se cumple que $f(a) = f(b) = 0$, entonces dentro de intervalo $[a, b]$ existe por lo menos un punto $x = c$, $a < x < c$, tal que $f'(c) = 0$.*

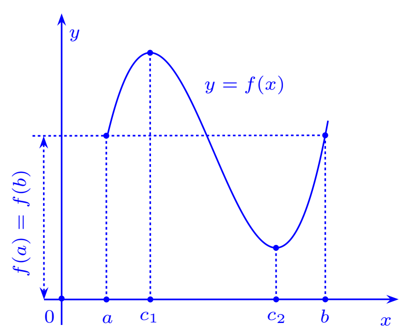


Figura 1

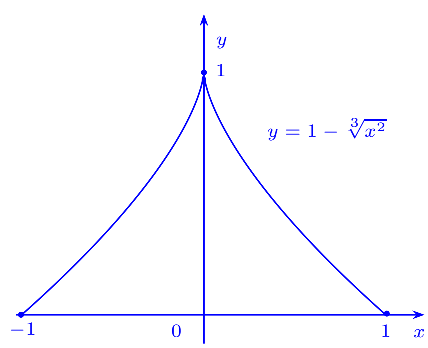


Figura 2

Interpretación Geométrica Si una curva continua con tangente en cada uno de sus puntos, corta al eje x en $x = a$ y $x = b$, entonces a esta curva va a pertenecer por lo menos un punto de abscisa $x = c$, $a < c < b$ donde la tangente es paralela al eje x.

Observación 3.1.1 *El teorema (3.1.1), también es válido para una función derivable, en la que los extremos de $[a, b]$ no sean iguales a cero, pero se cumpla la condición $f(a) = f(b)$ (Figura 1).*

Observación 3.1.2 *Si la función $f(x)$ es tal que $f'(x)$ no existe en todos los puntos de $[a, b]$, el teorema puede ser falso, (es decir que en el intervalo $[a, b]$, puede no existir un $x = c$, en el que la derivada $f'(x)$ sea igual a cero).*

Ejemplo 1 *La función $y = 1 - \sqrt[3]{x^2}$, es continua en $[-1, 1]$ y es igual a cero en todos los extremos de mismo; sin embargo $y' = \dfrac{-2}{3\sqrt{x}}$, no está definida en $x = 0$ (Figura 2).*

El gráfico de la (Figura 3) nos da un ejemplo de una función, cuya derivada no es igual a cero en el intervalo $[a, b]$. Para esta función tampoco se cumplen las condiciones del teorema de Rolle, puesto que la función no tiene derivada en $x = 1$.

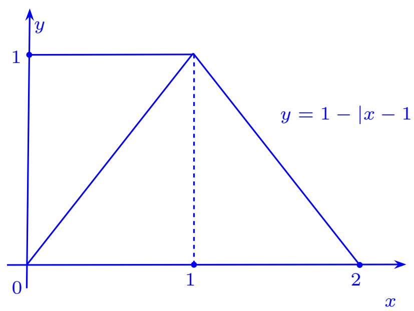


Figura 2

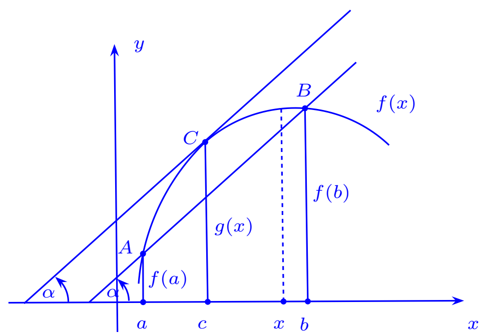


Figura 3

Teorema 3.1.2 Teorema del valor medio (Teorema de Lagrange) *Si la función $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$, entonces en $]a, b[$ existirá al menos un $x = c$, donde $a < c < b$, tal que:*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \tag{3.1}$$

Demostración Sea Q el número:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{3.2}$$

El gráfico de $y = f(x)$ representa una curva en el plano (Figura 4). Determinemos, a continuación la ecuación de la recta secante que pasa por los puntos $A(a, f(a)$ y $B(b, f(b)$, aplicando **la ecuación punto-pendiente de una recta tenemos**:

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a). \tag{3.3}$$

Ahora bien, la diferencia vertical entre los gráficos de f y de g en x es:

$$F(x) = f(x) - g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a). \tag{3.4}$$

La función $F(x)$ satisface las condiciones del Teorema de Rolle en $[a, b]$. Es continua en $[a, b]$ y diferenciable en $]a, b[$ ya que f y g lo son. También se cumple que $F(a) = F(b) = 0$, porque los gráficos de f y g pasan ambos por A y B. Por lo tanto $F' = 0$ en algún $x = c$ de $]a, b[$ (Figura 4). Para verificar que se cumple la ecuación (3.2), diferenciamos ambos lados de la ecuación (3.4), con respecto a x:

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \,.$$

Si $x = c$, entonces:

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

por lo tanto:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = Q,$$

como deseábamos demostrar.

Interpretación geométrica De la (Figura 4) observamos que:

$$\tan(\alpha) = m_c = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \,, \tag{3.5}$$

donde α es el ángulo de inclinación de la recta secante que pasa por los puntos A y B del gráfico. Por otro lado, $f\,'(c)$ es la tangente del ángulo de inclinación de la recta tangente a la curva en el punto C. De modo que el significado geométrico de la igualdad (3.5), es el siguiente: *Si por cada punto del arco $\overset{\frown}{AB}$ puede trazarse una tangente, existirá en este arco, entre A y B un punto C, tal que en el punto C la recta tangente sea paralela a la secante, que pasa por los puntos A y B.* El teorema del valor medio admite varias expresiones de gran utilidad:

$$f(b) = f(a) + (b - a)f\,'(c), \tag{3.6}$$

donde x está entre a y b. Por un simple cambio de notación obtenemos:

$$f(x) = f(a) + (x - a)f\,'(c), \tag{3.7}$$

donde c está entre a y x. De la Figura 4, observamos que el valor de c satisface la condición $a < c < b$, entonces $c - a < c - b$, es decir $c - a = \theta(c - b)$, donde $0 < \theta < 1$. Pero en este caso $c = a + \theta(b - a)$ y la fórmula (3.6), toma la siguiente forma:

$$f(b) = f(a) + (b - a)f\,'\,[\,a + \theta(b - a)\,], \qquad 0 < \theta < 1. \tag{3.8}$$

Si $h = b - a$, entonces:

$$f(a + h) = f(a) + hf\,'(a + \theta h), \qquad 0 < \theta < 1.$$

Finalmente si $a = x$ y $h = \Delta x$ obtenemos:

$$f(x + \Delta x) = f(a) + \Delta x{\cdot}f\,'(x + \theta{\cdot}\Delta x), \qquad 0 < \theta < 1.$$

Teorema 3.1.3 Teorema de Cauchy *Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en $[\,a,b\,]$ y derivables en $]\,a,b\,[$, siendo $g(x)\neq 0$, existe al menos un valor $x=c$, $a<c<b$, tal que:*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f\,'(c)}{g\,'(c)}\,. \tag{3.9}$$

Demostración Definamos el número Q de la siguiente manera:

$$Q=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\,. \tag{3.10}$$

Observemos que $f(b)-g(a)\neq 0$, ya que de lo contrario $g(b)$ sería igual a $g(a)$ y según el teorema de Rolle, la derivada $g\,'(x)$ sería igual a cero en $]\,a,b\,[$ lo que contradice la hipótesis del teorema. Escribamos la función auxiliar:

$$F(x)=f(x)-f(a)-Q\,[\,g(x)-g(a)\,]\,.$$

Es evidente, que $F(a)=F(b)=0$ (que se deduce de la definición de la función $F(x)$ y de la de Q). Si tenemos en cuenta $F(x)$ satisface en $[\,a,b\,]$ todas las condiciones del teorema de Rolle, deducimos que entre a y b existe un valor $x=c$, $(a<c<b)$, tal que $F\,'(c)=0$. Pero, $F\,'(x)=f\,'(x)-Qg\,'(x)$, entonces $F\,'(c)=f\,'(c)-Qg\,'(c)=0$, por lo que:

$$Q=\frac{f\,'(c)}{g\,'(c)}\,.$$

Finalmente sustituyendo el valor de Q en la igualdad (3.10) obtenemos la igualdad (3.9).

3.2 Límites Indeterminados del Tipo $\frac{0}{0}$

Supongamos que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ satisfacen las condiciones del teorema de Cauchy en el intervalo $[\,a,b\,]$ y $f(a)=g(a)=0$. La razón $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ no está definida en $x=a$, pero tiene sin embargo, un valor bien determinado para $x\neq 0$. Por lo tanto se puede plantear el problema de hallar:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\,.$$

El cálculo de límites de este tipo se llama “cálculo de límites indeterminados del tipo $\frac{0}{0}$”. Nos hemos encontrado con límites de este tipo como, por ejemplo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\,x}{x}\,.$$

La expresión $\dfrac{\operatorname{sen}\,x}{x}$ no está definida cuando $x=0$, pero su límite existe y es:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\,x}{x}=1.$$

Teorema 3.2.1 Regla de L'Hôpital *Supongamos que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ satisfacen en $[\,a, b\,]$ las condiciones del teorema de Cauchy y $f(a) = g(a) = 0$, entonces si existe $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f\,'(x)}{g\,'(x)}$, también existirá $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ y además $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f\,'(x)}{g\,'(x)}$.*

Demostración Tomemos en $[\,a, b\,]$ un punto $x = a$. Aplicando la fórmula de Cauchy tenemos: $\dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \dfrac{f\,'(\xi)}{g\,'(\xi)}$, donde ξ se encuentra entre a y x. Dado que $f(a) = g(a) = 0$, tenemos:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f\,'(\xi)}{g\,'(\xi).} \tag{3.11}$$

Si $x \to a$, también $\xi \to a$, ya que ξ está entre a y x, por lo que si: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f\,'(x)}{g\,'(x)} = A$, entonces también existe $\lim\limits_{\xi\to a} \dfrac{f\,'(\xi)}{g\,'(\xi)} = A$.

Es evidente que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f\,'(\xi)}{g\,'(\xi)} = \lim\limits_{\xi\to a} \dfrac{f\,'(\xi)}{g\,'(\xi)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f\,'(x)}{g\,'(x)} = A$ y en definitiva:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f\,'(x)}{g\,'(x)} = A.$$

Observación 3.2.1 *El teorema (3.2.1), también es válido cuando las funciones $f(x)$ y $g(x)$ no están definidas en $x = a$, pero:*

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \ \text{ y } \ \lim_{x\to a} g(x) = 0.$$

Para reducir este caso al examinado anteriormente, es necesario definir adicionalmente las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en el punto $x = a$ de tal modo que éstas sean continuas en $x = a$. Para esto es suficiente redefinir la funciones en $x = a$ de la siguiente manera:

$$f(a) = \lim_{x\to a} f(x) = 0 \text{ y } g(a) = \lim_{x\to a} g(x) = 0,$$

ya que:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}\,,$$

no depende de que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ estén o no defnidas en $x = a$.

Observación 3.2.2 *Si $f\,'(a) = g\,'(a) = 0$, y las derivadas $f\,'(x)$ y $g\,'(x)$ satisfacen las condiciones impuestas a las funciones $f(x)$ y $g(x)$, por la hipótesis del teorema (3.2.1), entonces aplicando la regla de L'Hôpital a la razón $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, obtenemos la fórmula:*

$$\lim_{x\to a} \frac{f\,'(x)}{g\,'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f\,''(x)}{g\,''(x)} = \ldots$$

Observación 3.2.3 *Si $g'(a) = 0$, pero $f'(a) \neq 0$, el teorema (3.2.1) se aplica a la razón inversa $\dfrac{g(x)}{f(x)}$ que tiende a cero cuando $x \to a$. Por lo tanto, la razón $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tiende a infinito.*

Ejemplo 2 *Calcular los siguientes límites.*

- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } 6x}{3x} \overbrace{=}^{\frac{0}{0}} \lim_{x\to 0} \frac{6\cos 6x}{3} = \frac{6}{3} = 2.$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \overbrace{=}^{\frac{0}{0}} \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{1+x}}{1} = 1.$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x} - e^{-x} - 2x}{x - \text{sen } x} \overbrace{=}^{\frac{0}{0}} \lim_{x\to 0} \frac{-2 + e^{-x} + e^{x}}{1 - \cos x} \overbrace{=}^{\frac{0}{0}} \lim_{x\to 0} \frac{-e^{-x} + e^{x}}{\text{sen } x} \overbrace{=}^{\frac{0}{0}} \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x} + e^{x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2.$

Observación 3.2.4 *La regla de L'Hôpital también puede ser aplicada cuando $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ y $\displaystyle\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$. En efecto, si hacemos $x = \dfrac{1}{z}$, tenemos que $z \to 0$ cuando $x \to \infty$, entonces $\displaystyle\lim_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = 0$ y $\displaystyle\lim_{z\to 0} g\left(\frac{1}{z}\right) = 0$.*

Si aplicamos la regla de L'Hôpital a la razón: $\dfrac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{g\left(\frac{1}{z}\right)}$, obtenemos:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{z\to 0} \frac{f\left(\dfrac{1}{z}\right)}{g\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \lim_{z\to 0} \frac{f'\left(\dfrac{1}{z}\right)\left(-\dfrac{1}{z^2}\right)}{g'\left(\dfrac{1}{z}\right)\left(-\dfrac{1}{z^2}\right)} = \lim_{z\to 0} \frac{f'\left(\dfrac{1}{z}\right)}{g'\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

lo que se trataba de comprobar.

Ejemplo 3 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\text{sen } \dfrac{k}{x}}{\dfrac{1}{x}} \overbrace{=}^{\frac{0}{0}} \lim_{x\to\infty} \frac{k\cos \dfrac{k}{x}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)}{\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)} = k.$

3.3 Límites Indeterminados del Tipo $\frac{\infty}{\infty}$

Teorema 3.3.1 *Supongamos que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas y derivables para todos los valores de $x \neq a$ en la vecindad del punto a y $g'(x) \neq 0$. Supongamos también que $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ y $\displaystyle\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ y que existe:*

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A, \tag{3.12}$$

entonces existirá también

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A. \tag{3.13}$$

Demostración En la vecindad considerada del punto a elijamos dos puntos α y x de tal manera que $\alpha < x < a$ ó $a < x < \alpha$. Sin perder generalidad suponenos que $\alpha < x < a$. Según el teorema de Cauchy, tenemos:

$$\frac{f(x) - f(\alpha)}{g(x) - g(\alpha)} = \frac{f\,'(c)}{g\,'(c)}\,, \tag{3.14}$$

donde $\alpha < c < x$. El primer miembro de la igualdad (3.14), lo transformamos de la siguiente forma:

$$\frac{f(x) - f(\alpha)}{g(x) - g(\alpha)} = \frac{f(x)}{g(x)}\;\frac{1 - \dfrac{f(\alpha)}{f(x)}}{1 - \dfrac{g(\alpha)}{g(x)}}\,. \tag{3.15}$$

De las expresiones (3.14) y (3.15) obtenemos:

$$\frac{f\,'(c)}{g\,'(c)} = \frac{f(x)}{g(x)}\;\frac{1 - \dfrac{f(\alpha)}{f(x)}}{1 - \dfrac{g(\alpha)}{g(x)}}\,, \tag{3.16}$$

de donde:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\;\frac{1 - \dfrac{g(\alpha)}{g(x)}}{1 - \dfrac{f(\alpha)}{f(x)}}\,. \tag{3.17}$$

De la condición (3.12), se deduce que para cualquier $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeño, se puede elegir α tan próximo a a que para todos los valores de $x = c$, donde $\alpha < c < a$, se cumpla:

$$\left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - A\right| < \varepsilon,$$

o bien,

$$A - \varepsilon < \frac{f'(c)}{g'(c)} < A + \varepsilon. \tag{3.18}$$

Examinemos, ahora, la fracción

$$\frac{1 - \dfrac{g(\alpha)}{g(x)}}{1 - \dfrac{f(\alpha)}{f(x)}}\,.$$

Fijemos α de tal forma que se cumpla la desigualdad (3.18) y aproximemos x al valor de a. Ya que $f(x) \to \infty$ y $g(x) \to \infty$, cuando $x \to a$, tenemos:

$$\lim_{x \to a} \frac{1 - \dfrac{g(\alpha)}{g(x)}}{1 - \dfrac{f(\alpha)}{f(x)}} = 1,$$

y por consiguiente, para el valor de $\varepsilon > 0$, prefijado anteriormente para todo x, suficientemente próximo a a, tenemos:

$$\left| \frac{1 - \dfrac{g(\alpha)}{g(x)}}{1 - \dfrac{f(\alpha)}{f(x)}} - 1 \right| < \varepsilon,$$

o bien

$$1 - \varepsilon < \frac{1 - \dfrac{g(\alpha)}{g(x)}}{1 - \dfrac{f(\alpha)}{f(x)}} < 1 + \varepsilon. \tag{3.19}$$

Multiplicando miembro a miembro las desigualdades (3.18) y (3.19), obtenemos:

$$(A - \varepsilon)(1 - \varepsilon) < \frac{f'(c)}{g'(c)} \, \frac{1 - \dfrac{g(\alpha)}{g(x)}}{1 - \dfrac{f(\alpha)}{f(x)}} < (A + \varepsilon)(1 + \varepsilon),$$

y en virtud de la igualdad (3.17):

$$(A - \varepsilon)(1 - \varepsilon) < \frac{f(x)}{g(x)} < (A + \varepsilon)(1 + \varepsilon).$$

Puesto que ε es un número arbitrariamente pequeño, para todo x lo suficientemente próximo a a, de las últimas desigualdades se deduce que:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A,$$

o, de acuerdo a la fórmula (3.12):

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

Lo que se trataba de demostrar.

Observación 3.3.1 *Si en la fórmula (3.12), $A = \infty$, es decir $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$, la igualdad (3.13) sigue siendo válida.*

En efecto, de la expresión anterior se tiene que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{g'(x)}{f'(x)} = 0$. Según el teorema demostrado $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{g'(x)}{f'(x)} = 0$, de donde: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

Observación 3.3.2 *El teorema se puede generalizar fácilmente al caso cuando $x \to \infty$.*

Si $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \infty$ y existe $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,. \tag{3.20}$$

Esto se demuestra haciendo la sustitución $x = \dfrac{1}{z}$, como se hizo al calcular los límites indeterminados del tipo $\dfrac{0}{0}$ (observación (3.2.4), pag. 68).

Ejemplo 4 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{1} = \infty.$

Observación 3.3.3 *Es necesario insistir en que las fórmulas (3.13) y (3.20) se verifican sólo cuando existe el límite del segundo miembro. Puede suceder que exista el límite del primer miembro y el del segundo no, como ocurre con el límite* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x + \operatorname{sen} x}{x}$.

Este límite existe y es igual a 1. En efecto, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x + \operatorname{sen} x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = 1$. Pero la razón de las derivadas $\dfrac{(x + \operatorname{sen} x)'}{(x)'} = \dfrac{1 + \cos x}{1} = 1 + \cos x$, no tiende a ningún límite cuando $x \to \infty$, sino que oscila entre 0 y 2.

Ejemplo 5 *Calcular los siguientes límites*

- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{ax^2 + b}{cx^2 - d} \overbrace{=}^{\frac{\infty}{\infty}} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2ax}{2cx} = \dfrac{a}{c}.$

- $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\tan 3x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} \frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\dfrac{1}{\cos^2 3x}} \overbrace{=}^{\frac{\infty}{\infty}} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3}\ \frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x}\ \left(\frac{0}{0}\right)$$
$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3}\ \frac{2{\cdot}3 \cos 3x \operatorname{sen} 3x}{2 \cos x \operatorname{sen} x} \overbrace{=}^{\frac{0}{0}} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos x} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x}$$
$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-3 \operatorname{sen} 3x}{-\operatorname{sen} x}\ \frac{(-1)}{(1)} = 3\ \frac{(-1)}{(1)}\ \frac{(-1)}{(1)} = 3.$$

- $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} \overbrace{=}^{\frac{\infty}{\infty}} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} = 0.$

Los límites indeterminados que simbólicamente se representan como:

$$\boxed{0{\cdot}\infty, \qquad 0^0, \qquad \infty^0, \qquad 1^\infty, \qquad \infty - \infty,}$$

se pueden calcular con ayuda de los casos ya examinados.

- Si suponemos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, y, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, entonces:

$$\lim_{x\to a} [\, f(x)\, g(x)\,] \overbrace{=}^{0\cdot\infty} \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}\ \left(\frac{0}{0}\right),$$

o bien,

$$\lim_{x\to a} [\, f(x)\, g(x)\,] \overbrace{=}^{0\cdot\infty} \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}\ \left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

Por ejemplo $\lim\limits_{x\to 0} x^n \ln x \overbrace{=}^{0\cdot(-\infty)} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x^n}} \overbrace{=}^{\frac{\infty}{\infty}} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{n}{x^{n+1}}} = \lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{x^n}{n}\right) = 0.$

- Sea $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, calcular $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)^{g(x)}\right]$ $\left(0^0\right)$.

Tomemos $y = [f(x)]^{g(x)}$, entonces aplicando las propiedades de la función logarítmica tenemos:

$$\ln y = g(x) \ln \left[\, f(x) \,\right].$$

Si $x \to a$, obtenemos en el segundo miembro una forma indeterminada $(0{\cdot}\infty)$. Una vez calculado el $\lim\limits_{x\to a} \ln y$, es fácil hallar el $\lim\limits_{x\to a} y$. Efectivamente, en virtud de la continuidad de la función logarítmica se tiene que $\lim\limits_{x\to a}(\ln y) = \ln\left(\lim\limits_{x\to a} y\right)$, si $\ln\left(\lim\limits_{x\to a} y\right) = b$, entonces es evidente que $\lim\limits_{x\to a} y = \mathrm{e}^b$. Ahora bien, si como caso particular, $b = +\infty$ ó $b = -\infty$, entonces $\lim\limits_{x\to a} y = +\infty$, ó $\lim\limits_{x\to a} y = 0$ respectivamente.

Ejemplo 6 *Calcular los siguientes límites.*

a) $\lim\limits_{x\to 0} x^x$

b) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

Solución

a) Haciendo $y = x^x$, (si $x \to 0$, entonces la forma indeterminada es 0^0) tenemos:

$$\begin{aligned}
\ln(\lim_{x\to 0} y) &= \lim_{x\to 0}(\ln y) = \lim_{x\to 0} \ln x^x = \lim_{x\to 0} x \ln x \overbrace{=}^{0\cdot(-\infty)} \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\dfrac{1}{x}} \ \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0} x = 0 \implies \ln \lim_{x\to 0} y = 0 \implies \lim_{x\to 0} y = \mathrm{e}^0.
\end{aligned}$$

Finalmente $\lim\limits_{x\to 0} x^x = 1$.

b) Haciendo $y = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$, (si $x \to 0$, entonces la forma indeterminada es 1^∞) tenemos:

$$\ln(\lim_{x\to 0} y) = \lim_{x\to 0}(\ln y) = \lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}} = \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln(\cos x)}_{(1)}.$$

Calculemos el límite (1):

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln(\cos x) \overbrace{=}^{\infty\cdot 0} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\tan x}{1} = 0,$$

entonces:

$$\ln(\lim_{x\to 0} y) = 0 \implies \lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

3.4 Ejercicios Resueltos

1. $$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to a}\frac{2}{3\sqrt[6]{x}}=\frac{1}{3\sqrt[6]{a}}.$$

2. $$\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{1+x^2}}{3\,x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3\,(1+x^2)}=\frac{1}{3}\,.$$

3. $$\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen}\,x}{x-\tan\,x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\,x}{1-\sec^2\,x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\,x}{-2\sec^2\,x\,\tan\,x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos^3\,x}{2}=-\frac{1}{2}\,.$$

4. $$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi-2\,\operatorname{arccotg}\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{-2}{\left(1+x^{-2}\right)\,x^2}}{-\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\,x^2}}=\lim_{x\to\infty}2\,x\,(1+x)1+x^2=2.$$

5. $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\operatorname{sen}\,2x)}{\ln(\operatorname{sen}\,x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\,\operatorname{cotan}\,(2\,x)}{\operatorname{cotan}\,(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-4\,\operatorname{cosec}^2(2\,x)}{-\operatorname{cosec}^2(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{4}{\operatorname{sen}^2(2\,x)}}{\operatorname{cosec}^2(x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{4}{4\,\operatorname{sen}^2(x)\cos^2(x)}}{\operatorname{cosec}^2(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{cosec}^2(x)\,\sec^2(x)}{\operatorname{cosec}^2(x)}=\lim_{x\to 0}\sec^2(x)=1.$$

6. $$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(1-x)+\tan\left(\dfrac{\pi\,x}{2}\right)}{\operatorname{cotan}\,(\pi x)}=\underbrace{\lim_{x\to 1}\frac{\ln(1-x)}{\operatorname{cotan}\,(\pi x)}}_{(a)}+\underbrace{\lim_{x\to 1}\frac{\tan\left(\dfrac{\pi\,x}{2}\right)}{\operatorname{cotan}\,(\pi x)}}_{(b)}\,.$$

Calculemos los límites (a) y (b):

(a) $$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(1-x)}{\operatorname{cotan}\,(\pi x)}=\lim_{x\to 1}\frac{-\dfrac{1}{1-x}}{-\pi\,\operatorname{cosec}\,(\pi\,x)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{sen}^2\,(\pi\,x)}{\pi\,(1-x)}=$$
$$\lim_{x\to 1}\frac{2\,\pi\,\cos\,(\pi\,x)\,\operatorname{sen}\,(\pi\,x)}{-\pi}=0.$$

(b) $$\lim_{x\to 1}\frac{\tan\left(\dfrac{\pi\,x}{2}\right)}{\operatorname{cotan}\,(\pi\,x)}=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{\pi\sec^2\left(\dfrac{\pi\,x}{2}\right)}{2}}{-\pi\,\operatorname{cosec}^2\,(\pi\,x)}=-\lim_{x\to 1}\left[\frac{\pi\sec^2\left(\dfrac{\pi\,x}{2}\right)}{2}\;\frac{1}{\dfrac{\pi}{\operatorname{sen}^2\,(\pi\,x)}}\right]=$$
$$-\lim_{x\to 1}\frac{\sec^2\left(\dfrac{\pi\,x}{2}\right)\operatorname{sen}^2\,(\pi\,x)}{2}=-\lim_{x\to 1}\left[\frac{\sec^2\left(\dfrac{\pi\,x}{2}\right)}{2}\,4\,\cos^2\left(\frac{\pi\,x}{2}\right)\,\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi\,x}{2}\right)\right]=$$
$$-2\lim_{x\to 1}\left[\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi\,x}{2}\right)\right]=-2.$$

Finalmente, $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\ln(1-x)+\tan\left(\dfrac{\pi\,x}{2}\right)}{\operatorname{cotan}\,(\pi x)}=0-2=-2.$

7. $$\lim_{x\to 0}(\mathrm{e}^x-1)\,\operatorname{cotan}\,x=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{\tan\,x}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x}{\sec^2\,x}=\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^x\,\cos^2\,x=1.$$

8. $\displaystyle \lim_{x\to 1} \operatorname{cosec}(\pi x)\ln x = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{[\operatorname{cosec}(\pi x)]^{-1}}$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\dfrac{1}{x}}{-\pi\,[\operatorname{cosec}(\pi x)]^{-2}\,[\,-\operatorname{cosec}(\pi x)\,\operatorname{cotan}(\pi x)\,]}$$
$$= \frac{1}{\pi}\lim_{x\to 1} \frac{[\,\operatorname{cosec}(\pi x)\,]^2}{x\,\operatorname{cosec}(\pi x)\,\operatorname{cotan}(\pi x)} = \frac{1}{\pi}\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{cosec}(\pi x)}{x\,\operatorname{cotan}(\pi x)}$$
$$= \frac{1}{\pi}\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{1}{\operatorname{sen}(\pi x)}}{x\,\dfrac{\cos(\pi x)}{\operatorname{sen}(\pi x)}} = \frac{1}{\pi}\lim_{x\to 1}\frac{1}{x\,\cos(\pi x)} = -\,\frac{1}{\pi}\,.$$

9. $\displaystyle \lim_{x\to 2}\left(\frac{4}{x^2-4} - \frac{1}{x-2}\right) = \lim_{x\to 2}\left[\frac{4-(x+2)}{x^2-4}\right] = \lim_{x\to 2}\left[\frac{-(x-2)}{(x-2)(x+2)}\right]$
$$= -\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2} = -\,\frac{1}{4}\,.$$

10. $\displaystyle \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{x-1-x\ln x}{(x-1)\ln x} = \lim_{x\to 1}\frac{-\ln x}{\dfrac{x-1}{x}+\ln x}$
$$= \lim_{x\to 1} -\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{x-1}{x^2}+\dfrac{2}{x}} = -\lim_{x\to 1}\frac{x}{x+1} = -\,\frac{1}{2}\,.$$

11. $\displaystyle \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$. Por ser una forma indeterminada del tipo 0^0, procedemos tal y como lo hicimos en el ejemplo 6b): $y = (\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x} \Longrightarrow \ln y = \left(\frac{\pi}{2}-x\right)\ln(\cos x)$, entonces $\ln\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} y\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\ln(\cos x)\right]$, luego:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\ln(\cos x)\right] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\cos x)}{\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}-x}} = -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2\tan x\right] = -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}{\dfrac{1}{\tan x}}$$
$$= -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}{\operatorname{cotan} x} = -2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{-\operatorname{cosec}^2 x} = 0.$$

Finalmente, $\displaystyle \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = \mathrm{e}^0 = 1.$

3.5 Ejercicios

1. $\displaystyle \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^n-1}$ Resp./ $\dfrac{1}{n}$

2. $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^-x}{\operatorname{sen} x}$ Resp./ 2

3. $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x-\operatorname{sen} x}$ Resp./ 2

4. $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1-\cos x}}$ Resp./ No existe

5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln(\text{sen } x)}{(\pi-2x)^2}$ Resp./ $-\dfrac{1}{8}$

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-b^x}{x}$, con a y b constantes Resp./ $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)$

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\text{arcsen } x}{\text{sen}^3 x}$ Resp./ $-\dfrac{1}{6}$

8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^y+\text{sen } y-1}{\ln(1+y)}$ Resp./ 2

9. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\text{arccotg } x}$ Resp./ 1

10. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)}{\ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right)}$ Resp./ 1

11. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x-1)-x}{\tan\left(\dfrac{\pi}{2x}\right)}$ Resp./ 0

12. $\lim\limits_{x\to 1} (1-x)\tan\left(\dfrac{2x}{\pi}\right)$ Resp./ 0

13. $\lim\limits_{x\to 1} \left[\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right]$ Resp./ $-\dfrac{1}{2}$

14. $\lim\limits_{x\to 1} \left[\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right]$ Resp./ -1

15. $\lim\limits_{x\to 1} \left[\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right]$ Resp./ $\dfrac{1}{2}$

16. $\lim\limits_{x\to 0} x \text{ cotan } 2x$ Resp./ $\dfrac{1}{2}$

17. $\lim\limits_{x\to 0} x^2\, \mathrm{e}^{\left(\frac{1}{x^2}\right)}$ Resp./ ∞

18. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\left(\frac{1}{1-x}\right)}$ Resp./ $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

19. $\lim\limits_{t\to\infty} \sqrt[t]{t^2}$ Resp./ 1

20. $\lim\limits_{\alpha\to 0} \left(\dfrac{\text{sen }\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha^2}}$ Resp./ $\dfrac{1}{\sqrt[6]{\mathrm{e}}}$

21. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x\,(1-\mathrm{e}^x)}{(1+x)\,\ln(1-x)}$ Resp./ 1

Capítulo 4

Integrales Impropias

4.1 Introducción

La definición de la integral definida $\int_a^b f(x)dx$, requiere que el intervalo $[\,a,b\,]$ sea finito y que la función $f(x)$ sea acotada en ese intervalo. En esta sección aplicaremos la teoría de límites para calcular integrales que no satisfacen los requisitos anteriores debido a que:

1. Uno o ambos límites de integración son infinitos.
2. La función $f(x)$ tiene un número finito de discontinuidades infinitas (puntos singulares) en $[\,a,b\,]$.

Las integrales con una o ambas de estas propiedades reciben el nombre de *integrales impropias*. Las integrales impropias de los casos 1) y 2) se llaman *integrales impropias de primera y segunda especie* respectivamente. Las integrales que presentan ambas condiciones se llaman *integrales impropias de tercera especie*.

Ejemplo 7 *Algunos ejemplos de integrales impropias son:*

1. *Las integrales* $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ *y* $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$*, son integrales impropias de primera especie, porque uno o ambos límites de integración son infinitos.*
2. *Las integrales* $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ *y* $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{(x+1)^2}$*, son integrales impropias de segunda especie porque:*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} \text{ presenta una discontinuidad infinita en } x = 1.$$
$$g(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \text{ presenta una discontinuidad infinita en } x = -1.$$

3. *La integral,* $\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$ *es una integral impropia de tercera especie.*
4. *La integral,* $\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$ *es una integral propia ya que* $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

El siguiente ejemplo nos ayuda a introducir la noción de convergencia de una integral impropia.

Ejemplo 8 *Consideremos la integral impropia*

$$\int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = -\frac{1}{b} + 1 = 1 - \frac{1}{b}\,.$$

Esta integral puede interpretarse como el área de la región sombreada (ver Figura 1), donde $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Tomando el límite cuando $b \to \infty$ y utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo obtenemos el siguiente resultado:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty}\left(\int_1^b \frac{dx}{x^2}\right) = \lim_{b\to\infty}\left(1 - \frac{1}{b}\right) = 1.$$

De esta manera, consideramos la integral impropia como el *área de la región no acotada* entre el gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ y el eje x (ver Fig. 2).

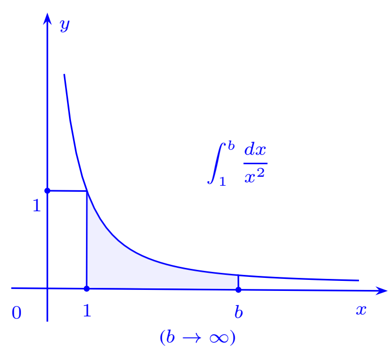


Figura 1

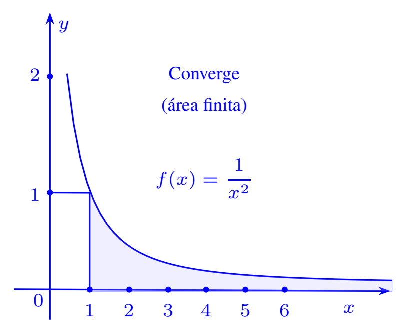


Figura 2

4.2 Integrales Impropias con Límites de Integración Infinitos de Primera Especie

Definición 4.2.1

1. *Sea f una función continua en el intervalo $[\,a, \infty\,[$, entonces si $\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$, existe y es finito decimos que la integral impropia converge y escribimos:*

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

2. *Sea f una función continua en el intervalo $]\,-\infty, a\,]$, entonces si $\lim_{b\to-\infty}\int_b^a f(x)dx$, existe y es finito decimos que la integral impropia converge y escribimos:*

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{b\to-\infty}\int_b^a f(x)dx.$$

3. *Si f es continua en el intervalo $]-\infty,\infty[$, entonces:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx, \quad c \in \mathbb{R},$$

converge siempre y cuando:

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)dx \quad y \quad \int_{c}^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_{c}^{b} f(x)dx,$$

sean convergentes. Si al menos una de estas integrales diverge, entonces la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

diverge.

Ejemplo 9 *Determine, utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo, si la integral* $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}$ *converge.*

Tenemos que:

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty}\Big[\ln x\Big]_1^b = \lim_{b\to+\infty}(\ln b - \ln 1) = +\infty.$$

Como el límite no es finito, la integral diverge.

Observación 4.2.1 *Las funciones de las figuras 2 y 3 tienen gráficos similares, sin embargo la región sombreada que se muestra en la Figura 2 tiene área finita, mientras que la región sombreada de la Figura 3 tiene área infinita.*

Ejemplo 10 *Verifique que la siguiente integral (ver Figura 4)* $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$ *converge al valor de* $\frac{\pi}{2}$.

Podemos observar que la función integrando es continua en el intervalo $]-\infty,\infty[$. Para calcular esta integral elegimos un punto arbitrario $x = c$ (elijamos $c = 0$) y aplicando el Teorema Fundamental obtenemos:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx &= \int_{-\infty}^{0}\frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx + \int_{0}^{\infty}\frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\Big[\arctan(e^x)\Big]_a^0 + \lim_{b\to\infty}\Big[\arctan(e^x)\Big]_0^b \\ &= \lim_{a\to-\infty}\Big[\frac{\pi}{4} - \arctan(e^a)\Big] + \lim_{b\to\infty}\Big[\arctan(e^b) - \frac{\pi}{4}\Big] = \frac{\pi}{4} - 0 + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\,.\end{aligned}$$

Hemos comprobado así que la integral I converge al valor de $\frac{\pi}{2}$.

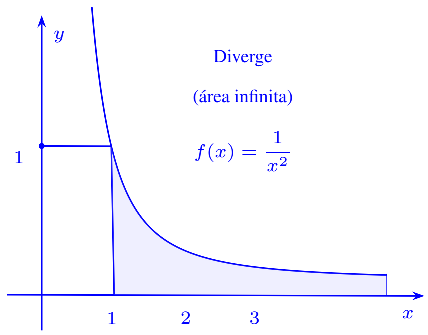


Figura 3

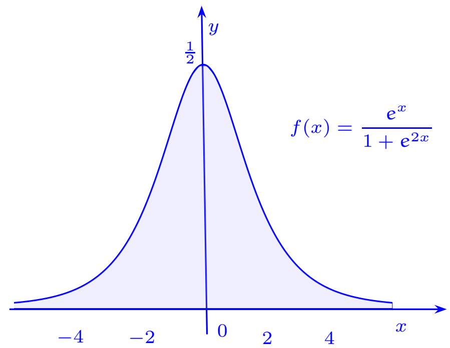


Figura 4

Ejemplo 11 *Determinar los valores de $\lambda > 0$, para los cuales la integral $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^{\lambda}}$, con $a > 0$ converge.*

Llamaremos a esta integral "Integral-λ de primera especie" por la importancia que tiene al aplicar los criterios de comparación que analizaremos posteriormente.

Observamos que:

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^{\lambda}} = \lim_{b\to\infty} \int_a^b \frac{dx}{x^{\lambda}} = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{1}{1-\lambda} x^{1-\lambda} \right]_a^b = \left(\frac{1}{1-\lambda} \right) \lim_{b\to\infty} \left[b^{1-\lambda} - a^{1-\lambda} \right].$$

a) Si $\lambda > 1$, tenemos que:

$$\left(\frac{1}{1-\lambda} \right) \lim_{b\to\infty} \left[\frac{b}{b^{\lambda}} - \frac{a}{a^{\lambda}} \right] = -\frac{1}{1-\lambda} \left(\frac{a}{a^{\lambda}} \right) = \frac{1}{\lambda - 1} \left(\frac{a}{a^{\lambda}} \right)$$

y la integral converge ya que $\lim_{b\to\infty} \left(\frac{b}{b^{\lambda}} \right) = 0$.

b) Si $0 < \lambda < 1$, la integral es divergente debido a que $\lim_{b\to\infty} \left(\frac{b}{b^{\lambda}} \right) = \infty$.

c) Si $\lambda = 1$, tenemos que $\lim_{b\to\infty} \left[\ln x \right]_a^b = \lim_{b\to\infty} (\ln b - \ln a) = \infty$, entonces en este caso la integral también es divergente.

En resumen la integral $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^{\lambda}}$ converge si y sólo si $\lambda > 1$.

4.3 Propiedades de las Integrales Impropias de Primera Especie

1. Si la integral $\int_a^{\infty} f(x)dx$ converge y $A > a$, entonces también es convergente la integral $\int_A^{\infty} f(x)dx$ y se tiene que $\int_a^{\infty} f(x)dx = \int_a^A f(x)dx + \int_A^{\infty} f(x)dx$.
2. Si la integral $\int_a^{\infty} f(x)dx$ converge, entonces $\lim_{A\to\infty} \int_A^{\infty} f(x)dx = 0$.
3. Si la integral $\int_a^{\infty} f(x)dx$ converge, también es convergente la integral

$$\int_a^{\infty} cf(x)dx = c\int_a^{\infty} f(x)dx, \quad (c \in \mathbb{R}).$$

4. Si las integrales $\int_a^\infty f(x)dx$ y $\int_a^\infty g(x)dx$ convergen, también es convergente la integral

$$\int_a^\infty [\, f(x) \pm g(x)\,]\, dx = \int_a^\infty f(x)dx \pm \int_a^\infty g(x)dx \ \text{ (el recíproco es falso).}$$

4.4 Criterios de Convergencia para Integrales Impropias de Primera Especie

Definición 4.4.1 *Para que la integral*

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx, \tag{4.1}$$

sea convergente (para $f(x) \geq 0$) es necesario y suficiente que la integral (4.1), cuando $b \to \infty$ sea acotada superiormente, es decir:

$$\int_a^b f(x)dx \leq L, \ \ \textit{(L es una constante), } (\forall\, b \geq a).$$

Si esta condición no se cumple, entonces:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx = \infty \ \textit{ (diverge).} \tag{4.2}$$

Observación 4.4.1 *En la definición (4.2), $f(x)$* **siempre tiene que ser mayor o igual que cero***, ya que de lo contrario el resultado puede ser falso.*

En base a la definición (4.2), podemos enunciar los siguientes criterios de comparación para integrales impropias para $f(x) \geq 0$.

4.4.1 Criterio de Comparación Directa

1. Sea $g(x) \geq 0$, para todo $x \geq a$ y supongamos que $\int_a^\infty g(x)dx$ converge, entonces si $0 \leq f(x) \leq g(x)$, para todo $x \geq a$, la integral $\int_a^\infty f(x)dx$ también converge.

2. Sea $g(x) \geq 0$, para todo $x \geq a$ y supongamos que la integral $\int_a^\infty g(x)dx$ diverge, entonces si $f(x) \geq g(x) \geq 0$, para todo $x \geq a$, la integral $\int_a^\infty f(x)dx$ también diverge.

Ejemplo 12 *Analizar la convergencia de la siguiente integral impropia:*

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{1+\mathrm{e}^x}\,.$$

Es evidente que: $\underbrace{\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}}_{f(x)} < \underbrace{\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}}_{g(x)} = \mathrm{e}^{-x}$*, luego, la integral impropia:*

$$I_1 = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \mathrm{e}^{-x}dx = \lim_{b\to\infty} \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^b = \lim_{b\to\infty} \left(-\mathrm{e}^{-b} + \mathrm{e}^0\right) = -\lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{\mathrm{e}^b}\right) + 1 = 1,$$

es decir la integral I_1 converge y por el criterio de comparación 4.4.1, la integral I también converge (ver Figura 5).

Ejemplo 13 *Analizar la convergencia de la siguiente integral impropia $I = \displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{\ln x}$.*

Dado que $\underbrace{\frac{1}{\ln x}}_{f(x)} > \underbrace{\frac{1}{x}}_{g(x)}$, para $x \geq 2$ y la integral $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{x}$ diverge (Integral-λ, con $\lambda = 1$, (ver ejemplo 11, página 80), entonces por el criterio 4.4.1 se deduce que la integral I diverge (ver Figura 6).

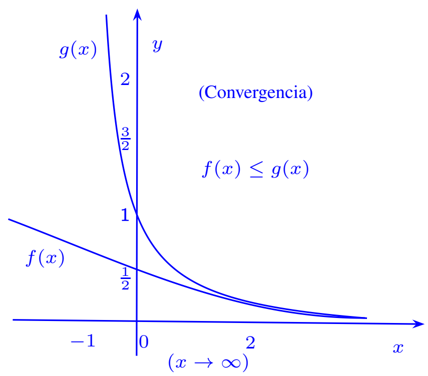


Figura 5

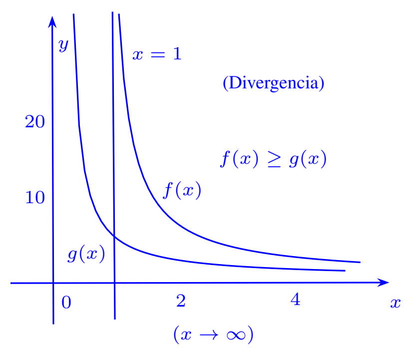


Figura 6

4.4.2 Criterio del Cociente (Criterio de Comparación en el Límite)

1. Si $f(x) \geq 0$ y $g(x) \geq 0$ y si $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0$, $A \neq \infty$, entonces si $\displaystyle\int_a^{\infty} g(x)dx$ converge, también converge $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)dx$.

   Si $\displaystyle\int_a^{\infty} g(x)dx$ diverge, entonces también diverge $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)dx$.

2. Si $A = 0$, en 1.) y $\displaystyle\int_a^{\infty} g(x)dx$ converge, entonces $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)dx$ converge.

3. Si $A = \infty$ en 1.) y $\displaystyle\int_a^{\infty} g(x)dx$ diverge, entonces $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)dx$ diverge.

Corolario 4.4.1 *Si $f(x) \sim g(x)$, cuando $x \to \infty$, entonces las integrales $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)dx$, $\displaystyle\int_a^{\infty} g(x)dx$ ambas convergen o ambas divergen.*

Este criterio se relaciona con el criterio de comparación y se usa a menudo en vez de este. En particular, tomando $g(x) = \dfrac{1}{x^{\lambda}}$, se tiene en virtud de las conocidas propiedades de la integral-λ, el siguiente teorema.

Teorema 4.4.1 *Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{\lambda} f(x) = A$, $f(x) \geq 0$, entonces:*

1. $\int_a^{\infty} f(x)dx$ *converge si* $\lambda > 1$ *y* A *es finito,*
2. $\int_a^{\infty} f(x)dx$ *diverge si* $\lambda \leq 1$ *y* $A \neq 0$*, (*A *puede ser infinito).*

Observación 4.4.2 *Existen criterios semejantes en el caso en el que el límite de integración es* $-\infty$ *(con el cambio de variable* $x = -y$ *el límite de integración será* ∞*).*

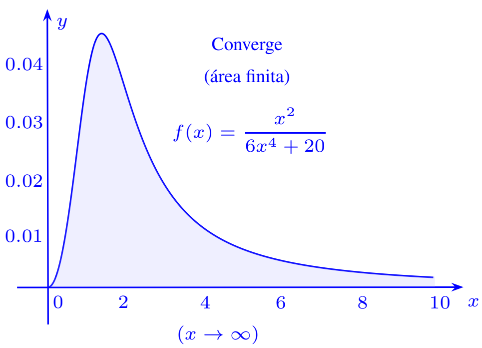


Figura 7

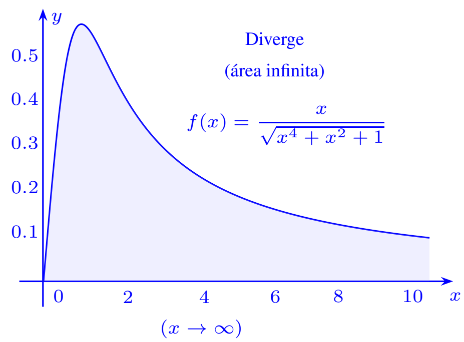


Figura 8

Ejemplo 14 *Una aplicación del teorema (4.4.1).*

1. $\int_0^{\infty} \frac{x^2dx}{6x^4+20}$ es convergente porque $\lim_{x\to\infty} x^{\lambda}\left(\frac{x^2}{6x^4+20}\right) = \lim_{x\to\infty} x^{\lambda}\cdot\frac{x^2}{6x^4} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^{(\lambda+2)}}{6x^4} = \frac{1}{6}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{[4-(\lambda+2)]}}$.

   Resolviendo para λ, tenemos $4-(\lambda+2) = 0 \implies \lambda = 2 > 1$ y como $\lim_{x\to\infty} x^2\frac{x^2}{6x^4+20} = \frac{1}{6}$, se deduce del teorema (4.4.1), que la integral considerada converge (ver Figura 7).

2. $I = \int_0^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x^{\lambda}\left(\frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+1}}\right) &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^{(1+\lambda)}}{\sqrt{x^4+x^2+1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^{(1+\lambda)}}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^{(1+\lambda)}}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{[2-(1+\lambda)]}}\,.\end{aligned}$$

   Resolviendo para λ, tenemos que $2-(1+\lambda) = 0 \implies \lambda = 1$ y como $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{\sqrt{x^4+x^2+1}} = 1$, la integral I diverge por el teorema (4.4.1) (ver Figura 8).

3. $\int_1^{\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^3}}dx$.

$$\lim_{x\to\infty} x^{\lambda}\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^3}}\right) = \lim_{x\to\infty} x^{\lambda}\left[\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{x}}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{x^{\lambda}}{x^{\frac{1}{2}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)}}.$$

Resolviendo para λ, tenemos que $\dfrac{1}{2} - \lambda = 0 \implies \lambda = \dfrac{1}{2} < 1$ y como $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1$, por el teorema (4.4.1), la integral I diverge.

Ejemplo 15 *Analizar la convergencia de la siguiente integral impropia:*

$$I = \int_1^{\infty} \frac{xdx}{3x^4 + 5x^2 + 1}\,.$$

Analizaremos la convergencia de la integral I aplicando el criterio de comparación. Es evidente que si $x \geq 1$, entonces:

$$\frac{x}{3x^4 + 5^2 + 1} \leq \frac{1}{3x^3}$$

y como $\dfrac{1}{3}\displaystyle\int_1^{\infty} \dfrac{dx}{x^3}$ es una integral-λ convergente $(\lambda = 3 > 1)$, entonces la integral I converge.

Ejemplo 16 *Analizar la convergencia de la siguiente integral impropia:*

$$I = \int_2^{\infty} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x^6 + 16}} dx.$$

Si $x \to \infty$, entonces:

$$\frac{x^2 - 1}{\sqrt{x^6 + 16}} = \frac{x^2\left(1 - x^{-2}\right)}{\sqrt{x^6(1 + 16\,x^{-6})}} \sim \frac{x^2}{\sqrt{x^6}} = \frac{1}{x}\,,$$

como la integral $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{x}$ diverge, entonces también diverge la integral I.

Si aplicamos el criterio de comparación es necesario multiplicar $g(x) = \dfrac{1}{x}$ por $\left(\dfrac{3}{2\sqrt{5}}\right)$, para que el criterio se cumpla.

Así tenemos, (ver observación 4.4.4 y la Figura 9) $\underbrace{\dfrac{x^2 - 1}{\sqrt{x^6 + 16}}}_{f(x)} \geq \underbrace{\dfrac{3}{2\sqrt{5}x}}_{g(x)\cdot\frac{3}{2\sqrt{5}}}$ y la integral I diverge ya que $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{3dx}{x2\sqrt{5}}$ es divergente..

En efecto, si $x \geq 2$, $\dfrac{x^2 - 1}{\sqrt{x^6 + 16}} = \dfrac{x^2(1 - \frac{1}{x^2})}{x^3\sqrt{1 + \frac{16}{x^6}}} \geq \dfrac{1 - \frac{1}{x^2}}{x\sqrt{1 + \frac{16}{2^6}}} \geq \dfrac{1 - \frac{1}{4}}{x\sqrt{\frac{5}{4}}} = \dfrac{3}{x2\sqrt{5}}$.

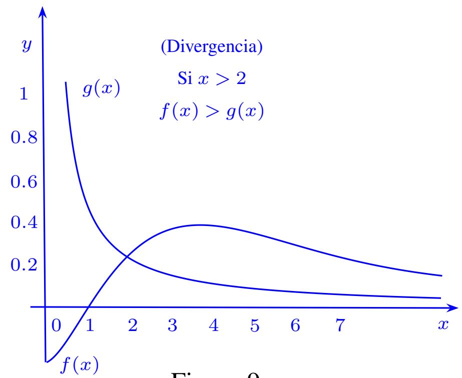


Figura 9

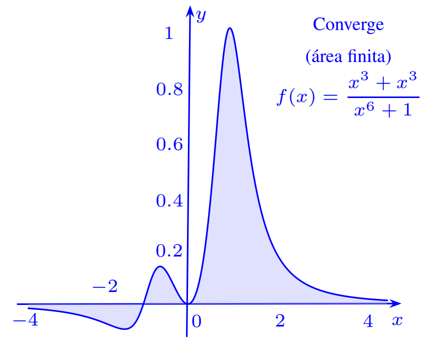


Figura 10

Observación 4.4.3 *El sentido de analizar la función integrando cuando $x \to \infty$, es el de obtener una función apropiada para la comparación.*

Observación 4.4.4 *El criterio de comparación puede exigir, a menudo, que se obtenga un factor de desigualdad apropiado (en el ejemplo 16, el factor es $\dfrac{3}{2\sqrt{5}}$ o cualquier constante menor que $\dfrac{3}{2\sqrt{5}}$) antes que se pueda aplicar dicho criterio. El teorema 4.4.1 y el criterio del cociente no exigen esta condición.*

Ejemplo 17 *Demuestre que la siguiente integral es convergente $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 + x^2}{x^6 + 1} dx$.*

Sea $I = \underbrace{\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{x^3 + x^2}{x^6 + 1}\, dx}_{I_1} + \underbrace{\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x^3 + x^2}{x^6 + 1}\, dx}_{I_2}.$

Analicemos la integral I_1. Sea $x = -y$, entonces:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{0} \frac{x^3 + x^2}{x^6 + 1}\, dx = \int_{\infty}^{0} \frac{y^2 - y^3}{y^6 + 1}\, dy = -\int_{\infty}^{0} \frac{y^3 - y^2}{y^6 + 1}\, dy = \int_{0}^{\infty} \frac{y^3 - y^2}{y^6 + 1}\, dy,$$

y aplicando el teorema (4.4.1), obtenemos:

$$\lim_{y\to\infty} y^{\lambda} \left(\frac{y^3 - y^2}{y^6 + 1} \right) = \lim_{y\to\infty} y^{\lambda} \left(\frac{y^3}{y^6} \right) = \lim_{y\to\infty} \frac{y^{\lambda+3}}{y^6} = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{y^{[\,6-(\lambda+3)\,]}}\,.$$

Calculamos el valor de λ: $6 - (\lambda + 3) = 0 \Longrightarrow\ \lambda = 3 > 1$ y $\displaystyle\lim_{y\to\infty} y^3 \left(\frac{y^3 - y^2}{y^6 + 1} \right) = 1$, luego por el teorema (4.4.1), la integral I_1 converge. La integral I_2 también converge por el teorema (4.4.1) ya que:

$$\lim_{x\to\infty} x^3 \left(\frac{x^3 + x^2}{x^6 + 1} \right) = 1 \ \text{ y } \lambda = 3 > 1.$$

Finalmente, como $I = I_1 + I_2$; la integral I converge (ver Figura 10).

4.5 Convergencia Absoluta y Condicional

Los criterios 4.4.1 y 4.4.2 nos permiten analizar la convergencia de integrales impropias con funciones-integrando positivas en el intervalo $[\,a, \infty\,[$. Ahora bien, si:

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx = A\in\mathbb{R} \Longrightarrow \lim_{b\to\infty}\int_a^b (-f(x))\,dx = -A\in\mathbb{R},$$

entonces los criterios 4.4.1 y 4.4.2 nos permiten también realizar el estudio sobre la convergencia de integrales con funciones-integrando negativas o que varían de signo en $[\,a,\infty\,[$, como por ejemplo $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\,dx$. En este caso el concepto de convergencia absoluta es de gran ayuda.

Definición 4.5.1 *Se dice que la integral* $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ *es absolutamente convergente, si la integral* $\displaystyle\int_a^{\infty}|f(x)|\,dx$ *es convergente.*

Teorema 4.5.1 *Si* $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ *es absolutamente convergente, es convergente.*

Demostración Sabemos que $-|f(x)|\le f(x)|\le |f(x)|,\ \forall\, x\in[\,a,\infty\,[$, entonces $0\le f(x)+|f(x)|\le 2|f(x)|,\ \forall\, x\in[\,a,\infty\,[$.

Ahora bien, como $\displaystyle\int_a^{\infty}|f(x)|\,dx$ converge, entonces $\displaystyle\int_a^{\infty}(f(x)+|f(x)|)\,dx$ converge, pero como $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b (f(x)+|f(x)|)\,dx - \int_a^b |f(x)|\,dx$, y como los dos límites de la derecha de la igualdad son finitos, entonces $\displaystyle\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ también es finito.

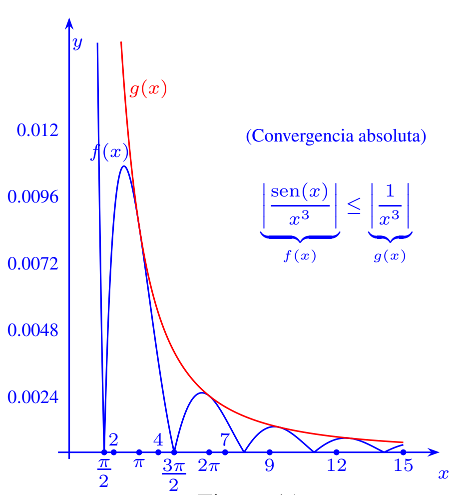


Figura 11

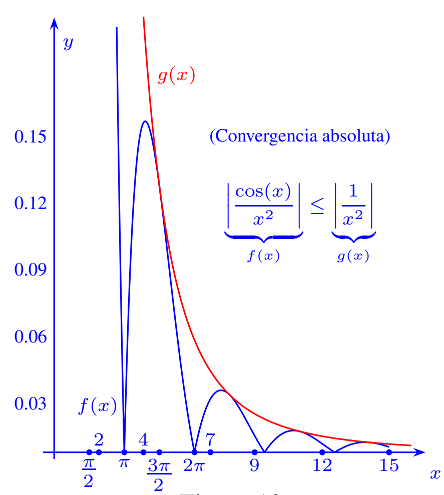


Figura 12

Ejemplo 18 *Analizar la convergencia de las siguientes integrales impropias.*

1. $I = \displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^3} dx.$

   En este caso la función integrando es de signo variable. Notemos que si $x \geq 1$, $\underbrace{\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x^3}\right|}_{f(x)} \leq \underbrace{\frac{1}{x^3}}_{g(x)}$, y la integral $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx$ es una integral convergente $(\lambda = 3 > 1)$. Por el criterio de comparación directa, la integral $\displaystyle\int_1^{\infty} \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x^3}\right| dx$ converge, o sea la integral I converge absolutamente, por lo tanto I converge (ver Figura 11).

2. $I = \displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx.$

   La función integrando es de signo variable, $\underbrace{\left|\frac{\cos x}{x^2}\right|}_{f(x)} \leq \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{g(x)}$ y la integral $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ converge $(\lambda = 2 > 1)$.

   Luego la integral $\displaystyle\int_1^{\infty} \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| dx$, por el criterio de comparación directa, también converge y en forma absoluta, por lo tanto I converge (ver Figura 12).

4.6 Integrales Impropias de Segunda Especie

Definición 4.6.1 *Sea $f(x)$ una función no acotada, solamente en el extremo $x = a$ (punto singular) del intervalo $]\,a, b\,]$ si:*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

existe y es finito, decimos que la integral impropia es convergente y la denotamos como $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$. En caso contrario la integral $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ diverge.

Definición 4.6.2 *Sea $f(x)$ una función no acotada, solamente en el extremo $x = b$ (punto singular) del intervalo $[\,a, b\,[$ si:*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

existe y es finito, decimos que la integral impropia es convergente y la denotamos como $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$. En caso contrario la integral $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ diverge.

Definición 4.6.3 *Si $f(x)$ es una función no acotada en un único punto interior $x = x_0$ del intervalo $[\,a, b\,]$, se define entonces:*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_a^{x_0-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int_{x_0+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx.$$

Si ambos límites existen, la integral de la izquierda converge. En caso contrario la integral diverge.

Observación 4.6.1 *Estas definiciones se pueden generalizar al caso en que la función $f(x)$ no sea acotada en dos o mas puntos de intervalo $[\,a,b\,]$.*

Observación 4.6.2 *Las propiedades de las integrales impropias de segunda especie son similares a las propiedades de las integrales definidas (propias). Hay que tener en cuenta solamente, que en los puntos singulares es necesario tomar el límite de las integrales.*

4.7 Integrales Impropias Especiales de Segunda Especie

Ejemplo 19 *Analizar la convergencia de la siguientes integrales:*

1. La integral impropia $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\lambda}$ presenta un punto singular en $x=a$, entonces:

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\lambda} &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{(x-a)^\lambda}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{(x-a)^{(1-\lambda)}}{1-\lambda}\right]_{a+\varepsilon}^b \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{x-a}{(1-\lambda)\;(x-a)^\lambda}\right]_{a+\varepsilon}^b = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{b-a}{(b-a)^\lambda\;(1-\lambda)} - \frac{\varepsilon^{1-\lambda}}{1-\lambda}\right] \\
&= \frac{1}{1-\lambda}\left[(b-a)^{1-\lambda} - \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{(1-\lambda)}\right],
\end{aligned}$$

luego:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{(1-\lambda)} = \begin{cases} \infty, & \text{si } \lambda > 1 \\ 0, & \text{si } \lambda < 1. \end{cases}$$

Queda por evaluar la integral $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\lambda}$, para $\lambda = 1$. Así tenemos:

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\lambda} &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^b \frac{dx}{x-a} = \lim_{\varepsilon\to 0}\Big[\ln(x-a)\Big]_{\varepsilon+a}^b = \ln(b-a) - \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\ln(\varepsilon+a-a)\right] \\
&= \ln(b-a) - \lim_{\varepsilon\to 0^+}\ln\varepsilon = +\infty,
\end{aligned}$$

y la integral diverge. Se concluye finalmente que la integral:

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\lambda} \quad \begin{cases} \text{es convergente, si } \lambda < 1 \\ \text{es divergente, si } \lambda \geq 1. \end{cases}$$

2. El análisis de la integral $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda}$ se lleva a cabo de forma similar a la integral anterior. Así:

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda} \quad \begin{cases} \text{es convergente, si } \lambda < 1 \\ \text{es divergente, si } \lambda \geq 1. \end{cases}$$

Observación 4.7.1 *La integral* $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\lambda}$ *se llama* Integral–λ *de segunda especie.*
Si $\lambda \leq 0$, *las integrales a) y b) ya no son impropias.*

Aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo podemos determinar si una integral impropia converge o diverge como veremos en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 20 *Determinar si las siguientes integrales convergen o divergen.*

1. La integral $I = \displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{2\,x\,dx}{x^2-1}$ presenta dos puntos singulares ($x = \pm 1$) y la función primitiva de $f(x) = \dfrac{2\,x}{x^2-1}$, $F(x) = \ln|1-x^2| + C$ se indefine en esos puntos. Por lo tanto la integral I diverge.
2. La integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{\text{arcsen } x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ presenta un punto singular en $x = 1$, pero en este punto la función primitiva $F(x) = \dfrac{1}{2}\,\text{arcsen}^{\,2}\,x + C$ es continua, por lo que la integral converge a $\displaystyle\int_0^1 \frac{\text{arcsen } x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \left[\frac{(\text{arcsen } x)^2}{2}\right]_0^1 = \frac{(\text{arcsen } 1)^2}{2} - \frac{(\text{arcsen } 0)^2}{2} = \frac{\pi^2}{8}$.

4.8 Criterios de Convergencia para Integrales Impropias de Segunda Especie de Integrando no Negativo

4.8.1 Criterio de Comparación

1. **Convergencia** Sea $g(x) \geq 0$, con $a < x \leq b$ y supongamos que $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ converge, entonces si $0 \leq f(x) \leq g(x)$ para $a < x \leq b$, la integral $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ también converge.
2. **Divergencia** Sea $g(x) \geq 0$, con $a < x \leq b$ y supongamos que $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ diverge, entonces si $f(x) \geq g(x) \geq 0$, para $a < x \leq b$, la integral $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ también diverge.

Ejemplo 21 *Analizar la convergencia de la integral* $I = \displaystyle\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}}$.

Se tiene un punto singular en $x = 1$, entonces si $x \geq 1$ tenemos que:

$$\frac{1}{\sqrt{x^4-1}} = \frac{1}{\sqrt{(x-1)\,(x+1)\,(x^2+1)}} \leq \frac{1}{\sqrt{(x-1)\,(1+1)\,(1^2+1)}} = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}\,,$$

y como la integral $\displaystyle\int_1^5 \frac{dx}{2\sqrt{x-1}}$ converge (Integral-λ de segunda especie), con $\lambda = \dfrac{1}{2} < 1$, se deduce que I también es convergente por el criterio de comparación directa.

Ejemplo 22 *Analizar la convergencia de la integral impropia* $I = \int_3^6 \frac{\ln x}{(x-3)^4}\, dx$.

Se tiene un punto singular en $x = 3$*; además tenemos que* $\frac{\ln x}{(x-3)^4} > \frac{1}{(x-3)^4}$*, para* $x > 3$ *y como la integral* $\int_3^6 \frac{dx}{(x-3)^4}$ *diverge (Integral-*λ *de segunda especie con* $\lambda = 4 > 1$*), concluimos que la integral* I *diverge por el criterio de comparación directa.*

4.8.2 Criterio del Cociente (Criterio de Comparación en el Límite)

1. Si $f(x) \geq 0$ y $g(x) \geq 0$, para $a < x \leq b$ y si $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A \neq 0$, $A \neq \infty$, entonces las integrales $\int_a^b f(x)dx$ y $\int_a^b g(x)dx$ convergen ambas o divergen ambas.
2. Si $A = 0$ en 1.) y $\int_a^b g(x)dx$ converge, entonces $\int_a^b f(x)dx$ converge.
3. Si $A = \infty$ en 1.) y $\int_a^b g(x)dx$ diverge, entonces $\int_a^b f(x)dx$ diverge.

Corolario 4.8.1 *Si* $f(x) \geq 0$ *y* $g(x) \geq 0$*, para* $a < x \leq b$ *y si* $f(x) \sim g(x)$*, cuando* $x \to a$*, las integrales* $\int_a^b f(x)dx$*,* $\int_a^b g(x)dx$ *ambas convergen o ambas divergen.*

Este criterio se relaciona con el criterio de comparación y es un útil sustituto del mismo. En particular, tomando $g(x) = \frac{1}{(x-a)^\lambda}$, se tiene por las conocidas propiedades de la Integral-λ de segunda especie el siguiente teorema.

Teorema 4.8.1 *Sea* $\lim\limits_{x \to a^+} (x-a)^\lambda f(x) = A$*, entonces:*

1. $\int_a^b f(x)dx$ *converge si* $\lambda < 1$ *y* A *es finito.*
2. $\int_a^b f(x)dx$ *diverge si* $\lambda \geq 1$ *y* $A \neq 0$ *(*A *puede ser infinito).*

Si $f(x)$ es no acotada en el límite superior de la integral, estas condiciones se reemplazan por las del siguiente teorema.

Teorema 4.8.2 *Sea* $\lim\limits_{x \to b^-} (b-x)^\lambda f(x) = B$.

1. $\int_a^b f(x)dx$ *converge si* $\lambda < 1$ *y* B *es finito.*
2. $\int_a^b f(x)dx$ *diverge si* $\lambda \geq 1$ *y* $B \neq 0$ *(*B *puede ser infinito).*

Ejemplo 23 *Analizar la convergencia de las siguiente integrales impropias:*

1. $I = \displaystyle\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}}$.

La integral I presenta un punto singular en $x = 1$.

Método 1 Apliquemos el teorema (4.8.1), si $x \to 1^+$ tenemos que:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^4-1}} = \frac{1}{\sqrt{(x-1)\ (x+1)\ (x^2+1)}} \sim \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

y como $(x-1)^\lambda \left(\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}\right) = \dfrac{1}{(x-1)^{(\frac{1}{2}-\lambda)}}$, resolviendo para λ tenemos $\dfrac{1}{2} - \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = \dfrac{1}{2} < 1$.

Así,

$\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \sqrt{x-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x^4-1}}\right) = \lim_{x\to 1^+} \sqrt{\frac{x-1}{x^4-1}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\sqrt{(x+1)(x^2+1)}} = \frac{1}{2}$ es finito y se concluye por el teorema (4.8.1), que la integral I converge.

Método 2 (Ver el ejemplo 21, pag. 89).

Método 3 Apliquemos el criterio del cociente. Si $x \to 1^+$, entonces

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^4-1}} = \frac{1}{\sqrt{(x-1)\ (x+1)\ (x^2+1)}} \sim \frac{1}{2\sqrt{x-1}}\,.$$

Sea $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$, la integral $\displaystyle\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ es una integral convergente ya que $\lambda = \dfrac{1}{2} < 1$, luego por el criterio del cociente tenemos:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{x^4-1}}}{\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}} = \lim_{x\to 1^+} \sqrt{\frac{x-1}{x^4-1}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\sqrt{(x+1)(x^2+1)}} = \frac{1}{2}\,,$$

por lo tanto la integral I converge (ver Figura 13).

Observe que al escoger $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ ya se sabía que el límite del cociente era precisamente $\dfrac{1}{2}$.

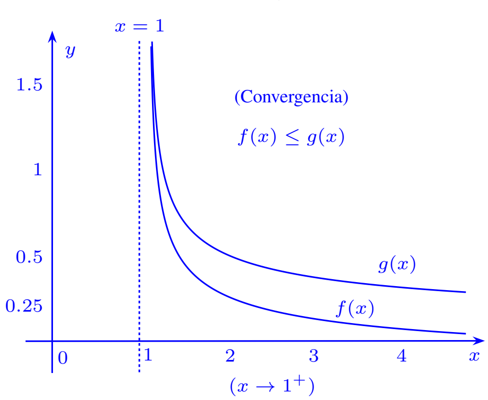


Figura 1

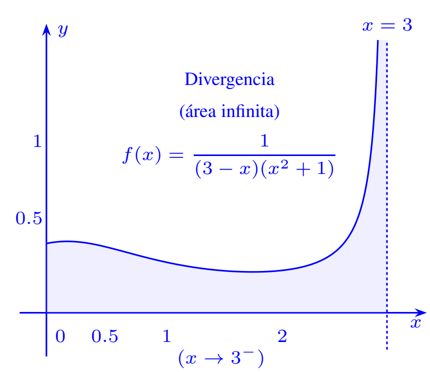


Figura 2

2. $I = \displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{(3-x)(x^2+1)}$.

Esta integral presenta un punto singular en $x = 3$. Probaremos que esta integral diverge aplicando el criterio del cociente.

Dado que si $x \to 3^-$, $\dfrac{1}{(3-x)\,(1+x^2)} \sim \dfrac{1}{10}\,\dfrac{1}{(3-x)}$, se toma $g(x) = \dfrac{1}{3-x}$. Como la integral $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{3-x}$ es una integral divergente ya que $(\lambda = 1)$ y como

$$\lim_{x \to 3^-} \left(\frac{\dfrac{1}{(3-x)\,(1+x^2)}}{\dfrac{1}{3-x}} \right) = \lim_{x \to 3^-} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{10}\,,$$

la integral I diverge por el criterio del cociente (ver Figura 14).

4.9 Convergencia Absoluta y Condicional

Definición 4.9.1 *Si la integral* $\displaystyle\int_a^b |f(x)|dx$ *converge, se dice que la integral* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ *es absolutamente convergente.*

Si la integral $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ *converge pero la integral* $\displaystyle\int_a^b |f(x)|dx$ *diverge, se dice que la integral* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ *converge en forma condicional.*

Teorema 4.9.1 *Si la integral* $\displaystyle\int_a^b |f(x)|dx$ *converge, también converge la integral* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Ejemplo 24 *Analizar la convergencia de la integral* $I = \displaystyle\int_\pi^{4\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt[3]{(x-\pi)}}\,dx$.

Dado que $\left|\dfrac{\operatorname{sen} x}{\sqrt[3]{x-\pi}}\right| \leq \dfrac{1}{\sqrt[3]{x-\pi}}$ *y* $I = \displaystyle\int_\pi^{4\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-\pi}}$ *converge* $\lambda = \dfrac{1}{3} < 1$*, se deduce que la integral* I *converge por el criterio de comparación.*

Observación 4.9.1 *Cualquiera de los criterios que se aplican a integrales de integrando no negativo se puede utilizar como criterio de convergencia absoluta.*

4.10 Integrales Impropias de Tercera Especie

Las integrales impropias de tercera especie se pueden expresar por medio de integrales impropias de primer y segunda especies y el problema de la convergencia se resuelve mediante los resultados ya estudiados.

4.11 Método de Integración por Partes para el caso de Integrales Impropias

En muchas ocasiones el método de integración por partes nos permite deducir si una integral impropia converge, como veremos en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 25 *Analizar la convergencia de la integral impropia* $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\operatorname{sen} x)dx$.

La integral I presenta una singularidad en $x = 0$. Si integramos por partes tenemos $u = \ln(\operatorname{sen} x)$, $dv = dx$, $du = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}dx$, $v = x$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\operatorname{sen} x)dx = x\ln(\operatorname{sen} x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\,dx = \frac{\pi}{2}\ln\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) - \lim_{x\to 0^+}\left[\,x\ln(\operatorname{sen} x)\,\right] - \int_{0^+}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan x}\,dx.$$

El límite $\lim_{x\to 0^+}\left[\,x\ln(\operatorname{sen} x)\,\right]$, existe y es finito. En efecto, por la regla de L'Hôpital tenemos:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{x^{-1}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{-x^{-2}} = -\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2\,\cos x}{\operatorname{sen} x} = -\lim_{x\to 0^+}\frac{2\,x\,\cos x - x^2\,\operatorname{sen} x}{\cos x} = 0.$$

La integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\tan x}\,dx$ es una integral propia, por lo tanto la integral I converge.

Ejemplo 26 *Analizar la convergencia de la integral impropia* $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$.

Escribamos la integral de la siguiente forma $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \underbrace{\int_0^{1} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx}_{I_2}$.

La función $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ es continua en $]\,0,1\,]$, además $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, entonces I_1 converge.

Analicemos la integral I_2. Integrando por partes: $u = \frac{1}{x}$, $du = -\frac{1}{x^2}$, $dv = \operatorname{sen} x dx$, $v = -\cos x$, entonces

$$\lim_{b\to\infty}\left[\int_0^{b} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = -\left[\frac{\cos x}{x}\right]_0^b - \int_0^{b}\frac{-\cos x}{-x^2}\,dx\right] = \underbrace{-\lim_{b\to\infty}\frac{\cos b}{b}}_{0} + \frac{\cos 1}{1} - \underbrace{\int_1^{\infty}\frac{\cos x}{x^2}\,dx}_{I_3}.$$

La integral I_3 converge (ver ejemplo 18.2, pag. 86), por lo tanto la integral I_2 converge y como $I = I_1 + I_2$, la integral I también converge.

4.12 Método de sustitución de variable para integrales impropias

Sea $f(x)$ continua en $[\,a, b\,[$ y consideremos la función monótona creciente $x = \varphi(t)$, continua junto con su primera derivada en el intervalo $[\,\alpha, \beta\,[$, $(\beta \to \infty)$ y supongamos que $\varphi(\alpha) = a$ y $\varphi(\beta) = b$, (se supone que $\lim_{t\to\beta}\varphi(t) = b$). Bajo estas condiciones tenemos la siguiente igualdad:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\left[\,\varphi(t)\,\right]\varphi'(t)dt. \tag{4.3}$$

La integral de la derecha de la última expresión será propia o impropia (con un único punto singular $t = \beta$).

Por el teorema de la función inversa, t se puede examinar también como una función continua monótona creciente de variable x en $[\,a, b\,[$, es decir $t = \phi(x)$, además $\lim\limits_{x\to b} \phi(x) = \beta$.

Si $a < x_0$ y $\alpha < t_0 < \beta$, $(x_0 \longleftrightarrow t_0)$, entonces por sustitución de variable obtenemos:

$$\int_a^{x_0} f(x)dx = \int_\alpha^{t_0} f\,[\,\varphi(t)\,]\,\varphi'(t)dt. \tag{4.4}$$

Si suponemos que existe la integral de la derecha de la expresión (4.3), entonces en la expresión (4.4), cuando $x_0 \to b$, $t_0 = \phi(x_0) \to \beta$ y de esta forma establecemos la expresión (4.3), simultáneamente con la demostración de la existencia de la integral de la izquierda.

Observación 4.12.1 *Para una función monótona decreciente $\varphi(t)$ y $\alpha > \beta$ el análisis es similar. Lo mismo que para cualquier otro punto singular en $[\,a, b\,]$.*

Observación 4.12.2 *Al sustituir los límites en la integral (4.3), el límite inferior α debe corresponder al límite inferior a y el límite superior debe corresponder al límite superior b independientemente de los signos de α y β.*

Ejemplo 27 *Analizar la convergencia de la integral impropia $I = \displaystyle\int_0^\infty \operatorname{sen}(x^2)dx$.*

Sea $t = x^2 \Longrightarrow x = \sqrt{t}$, $dt = 2\,x\,dx \Longrightarrow dx = \dfrac{dt}{2\sqrt{t}}$. Si $x \to 0 \Longrightarrow t \to 0$ y si $x \to \infty \Longrightarrow t \to \infty$, entonces

$$I = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{t}}\,dt = \underbrace{\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{t}}\,dt}_{I_1} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{t}}\,dt}_{I_2}.$$

La integral I_1 no presenta ningún problema ya que $\dfrac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{t}}$ es continua en $]\,0, 1\,]$ y $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{t}} = 0$ (por L'Hôpital).

Integramos por partes la integral I_2, donde $u = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, $du = -\dfrac{dt}{2\,t^{\frac{3}{2}}}$, $dv = \operatorname{sen} t\,dt$, $v = -\cos t$, se tiene:

$$I_2 = \left[-\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\right]_1^\infty - \int_1^\infty \frac{\cos t}{2\,t^{\frac{3}{2}}}dt = \underbrace{-\lim_{t\to\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}}_{0} + \frac{\cos(1)}{\sqrt{1}} - \underbrace{\int_1^\infty \frac{\cos t}{2\,t^{\frac{3}{2}}}}_{I_3}.$$

La integral I_3 converge por el criterio de comparación ya que $\left|\dfrac{\cos t}{t^{\frac{3}{2}}}\right| < \dfrac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$ y la integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}dt$ converge (Integral-λ de primera especie con $\lambda = \dfrac{3}{2} > 1$) por lo tanto I_2 converge. Finalmente como $I = I_1 + I_2$, entonces la integral I también converge.

Ejemplo 28 *Analizar la convergencia de* $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

La función presenta un punto singular en $x = 1$. *Por el método de sustitución de variable tenemos que* $x = \operatorname{sen} t$, $dx = \cos t\, dt$. *Si* $x \to 0 \Longrightarrow t \to 0$ *y si* $x \to 1 \Longrightarrow t \to \dfrac{\pi}{2}$, *entonces:*

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\operatorname{sen} t}}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\operatorname{sen} t}}{\cos t} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\operatorname{sen} t} dt.$$

Como la última integral es uan integral propia, entonces I *converge.*

Ejemplo 29 *Analizar la convergencia de las siguientes integrales impropias.*

1. $I = \displaystyle\int_a^\infty \frac{dx}{x \ln^\lambda x}$, $(\lambda > 0,\ a > 1)$.

   Sea $t = \ln x$, $x = \mathrm{e}^t$, $dx = \mathrm{e}^t dt$. *Si* $x \to a \Longrightarrow t \to \ln a$ *y si* $x \to \infty \Longrightarrow t \to \infty$, *entonces:*

$$I = \int_a^\infty \frac{dx}{x \ln^\lambda x} = \int_{\ln a}^\infty \frac{\mathrm{e}^t dt}{e^t\, t^\lambda} = \int_{\ln a}^\infty \frac{dt}{t^\lambda}.$$

   Si $\lambda > 1$ *la integral* I *converge.*

2. $I = \displaystyle\int_A^\infty \frac{dx}{x \ln x \ln^\lambda(\ln x)}$, $(\lambda > 0,\ A > \mathrm{e})$.

   Sea $u = \ln(\ln x)$, $\mathrm{e}^u = \ln x$, $\mathrm{e}^u du = \frac{dx}{x}$. *Si* $x \to A \Longrightarrow u \to \ln(\ln A)$ *y si* $x \to \infty \Longrightarrow u \to \infty$, *luego:*

$$\int_A^\infty \frac{dx}{x \ln x \ln^\lambda(\ln x)} = \int_{\ln(\ln A)}^\infty \frac{\mathrm{e}^u du}{\mathrm{e}^u u^\lambda} = \int_{\ln(\ln A)}^\infty \frac{du}{u^\lambda}.$$

   Por lo tanto la integral I, converge si $\lambda > 1$.

4.13 Desarrollos Limitados para Integrales Impropias

Los desarrollos limitados también son útiles para analizar la convergencia de las integrales impropias como lo veremos en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 30 *Determine los valores de* k, *para los cuales la integral* $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{x^k} dx$ *converge (*I*, tiene punto singular en* $x = 0$*).*

Por desarrollos limitados tenemos: $\dfrac{1-\cos x}{x^k} = \dfrac{\frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x)^2}{x^k + \mathrm{o}(x^k)} = \dfrac{\frac{x^2}{2}(1+o(1))}{x^k(1+o(1))}$, *luego si* $x \to 0^+$ *tenemos:* $\dfrac{1-\cos x}{x^k} \sim \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x^{(k-2)}}\right)$.

La integral $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{x^{(k-2)}}$ *es una integral-*λ *de segunda especie, converge si* $\lambda = k - 2 < 1$. *Resolviendo para* k *obtenemos* $k < 3$. *La integral* I_1 *converge para* $k < 3$ *y diverge para* $k \geq 3$. *Luego, por el criterio del cociente la integral* I *también converge para* $k < 3$ *y diverge para* $k \geq 3$.

Ejemplo 31 *Analizar la convergencia de la integral impropia* $I = \int_0^1 -\dfrac{\ln \cos \sqrt[3]{x}}{x^k}\, dx.$

Se tiene un punto singular en $x = 0$. *Por desarrollos limitados tenemos:*

$$-\frac{\ln \cos \sqrt[3]{x}}{x^k} = -\frac{\dfrac{-x^{\frac{2}{3}}}{2} + (o(x))^{\frac{2}{3}}}{x^k + o(x^k)} = \frac{1}{2}\left(\frac{x^{\frac{2}{3}}(1+o(1))}{x^k(1+o(1))}\right),$$

luego, si $x \to 0^+$ *tenemos:*

$$-\frac{\ln \cos \sqrt[3]{x}}{x^k} \sim \frac{1}{2}\,\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^k} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^{(k-\frac{2}{3})}}\right).$$

La integral $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^{(k-\frac{2}{3})}}$ *es una integral-*λ *de segunda especie y converge si y sólo si* $\lambda = k - \dfrac{2}{3} < 1$.

Resolviendo para k *obtenemos* $k < \dfrac{5}{3}$.

La integral I_1 *converge para* $k < \dfrac{5}{3}$ *y diverge para* $k \geq \dfrac{5}{3}$. *Por el criterio de comparación directa la integral* I *también converge para* $k < \dfrac{5}{3}$ *y diverge para* $k \geq \dfrac{5}{3}$.

Capítulo 5

Sucesiones

5.1 Inducción matemática

Principio de inducción matemática

El principio de inducción matemática establece que si un conjunto $S \subset \mathbb{N}$ satisface que:

a) $1 \in S$

b) y que si $n \in S \Longrightarrow n+1 \in S$, entonces $S = \mathbb{N}$.

Ejemplo 1 Probar que $1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$.

Solución Sea $S = \{n \in \mathbb{N} /$ satisface la igualdad $1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)\}$.

a) $1 \in S$. En efecto, $1 = \frac{1}{2} \cdot 1(1+1)$.

b) ($n \Longrightarrow n+1$). Supongamos que la fórmula es válida para n, entonces $1 + 2 + \cdots + n + n + 1 = \frac{1}{2}n(n+1) + n + 1 = (n+1)(\frac{1}{2}n + 1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$, es decir $n+1 \in S$, por lo que $S = \mathbb{N}$ y la igualdad se satisface $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 2 Sea $a \in \mathbb{R}$, $a > -1$, $a \neq 0$, demostrar que $(1+a)^n > 1 + na$ para $n \geq 2$.

Solución Sea $S = \{n \in \mathbb{N} /$ satisface la desigualdad $(1+a)^n > 1 + na\}$.

a) $2 \in S$. En efecto, $(1+a)^2 = 1 + 2a + a^2 > 1 + 2a$.

b) ($n \Longrightarrow n+1$). Supongamos que la fórmula es válida para n, entonces $(1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a) > (1+na)(1+a) = 1 + (n+1)a + na^2 > 1 + (n+1)a$. Así, $n+1 \in S$ por lo que $S = \mathbb{N} \backslash \{1\}$.

5.2 Sucesiones

Definición 5.2.1 *Una sucesión es una función* $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, *donde* $f(n) = u_n$ *y se denota* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *o simplemente* $(u_n)_n$.

Definición 5.2.2 *La sucesión* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *tiene por límite* ℓ, *si* $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ *tal que si* $n \geq N \Longrightarrow |u_n - \ell| < \epsilon$ *y escribimos* $\lim_{n \to \infty} f(n) = \lim_{n \to \infty} u_n = \ell$. *También se dice que* u_n *tiende a* ℓ *y lo* *denotamos $u_n \longrightarrow \ell$, cuando $n \to \infty$.*

Si el límite no existe o es $\pm\infty$, se dice que la sucesión diverge.

Teorema 5.2.1 *Si el límite de una sucesión existe, es único.*

Demostración Supongamos que la sucesión $(u_n)_n$ converge a ℓ' y a ℓ'', entonces dado $\epsilon > 0$, existe $N' \in \mathbb{N}$ y $N'' \in \mathbb{N}$ tales que si $n \geq N'$ se tiene $|u_n - \ell'| < \frac{1}{2}\epsilon$ y si $n \geq N''$ se tiene $|u_n - \ell''| < \frac{1}{2}\epsilon$. Así, $|\ell' - \ell''| \leq |u_n - \ell'| + |u_n - \ell''| < \epsilon, \forall \epsilon > 0$, es decir que $\ell' = \ell''$.

Teorema 5.2.2 *Si $\lim_{n\to\infty} u_n = \alpha$ y $\lim_{n\to\infty} v_n = \beta$, entonces:*

a) $\lim_{n\to\infty} u_n^2 = \alpha^2$ b) $\lim_{n\to\infty}(u_n + v_n) = \alpha + \beta$ c) $\lim_{n\to\infty} cu_n = c\lim_{n\to\infty} u_n = c\alpha$

d) $\lim_{n\to\infty} u_n v_n = \alpha\beta$ e) si $\lim_{n\to\infty} u_n^2 = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 0$,

Demostración

a) Dado que la sucesión $(u_n)_n$ es convergente, existe $A > 0$ tal que $|u_n| \leq \frac{1}{2}A$, $\forall n \in \mathbb{N}$. En particular $|\lim_{n\to\infty} u_n| = |\alpha| \leq \frac{1}{2}A$.

   Por hipótesis dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ se tiene que $|u_n - \alpha| \leq \epsilon/A$. Así, cuando $n > N$ tenemos que $|u_n^2 - \alpha^2| = |u_n + \alpha|\,|u_n - \alpha| \leq A\epsilon/A = \epsilon$, es decir $\lim_{n\to\infty} u_n^2 = \alpha^2$.

b) Por hipótesis dado $\epsilon > 0$, existe $N' \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N'$ se tiene que $|u_n - \alpha| < \frac{1}{2}\epsilon$ y existe $N'' \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N''$ se tiene que $|v_n - \beta| < \frac{1}{2}\epsilon$, con lo cual si $n > \max\{N', N''\}$ tenemos $|u_n + v_n - \alpha - \beta| \leq |u_n - \alpha| + |v_n - \beta| \leq \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon$.

c) Por hipótesis dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ se tiene que $|u_n - \alpha| < \epsilon/|c|$, con lo cual si $n > N$ tenemos $|cu_n - c\alpha| = |c||u_n - \alpha| \leq |c|\epsilon/|c| = \epsilon$.

d) Dada la relación $2u_n v_n = (u_n + v_n)^2 - u_n^2 - v_n^2$, tenemos la convergencia de $(u_n v_n)_n$ a $\frac{1}{2}((\alpha + \beta)^2 - \alpha^2 - \beta^2) = \alpha\,\beta$.

   La justificación es la siguiente: $u_n + v_n \longrightarrow \alpha + \beta$ por b), $(u_n + v_n)^2 \longrightarrow (\alpha + \beta)^2$ por a) y $\frac{1}{2}((u_n + v_n)^2 - u_n^2 - v_n^2) \longrightarrow \frac{1}{2}((\alpha + \beta)^2 - \alpha^2 - \beta^2)$ por b).

e) Por hipótesis dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ se tiene que $|u_n|^2 < \epsilon^2$; entonces si $n > N$ tenemos que $|u_n| < \epsilon$.

Teorema 5.2.3 *Sean $(u_n)_n$ y $(v_n)_n$ dos sucesiones convergentes tales que $\lim_{n\to\infty} u_n = u$ y $\lim_{n\to\infty} v_n = v$, entonces si $u_n \leq v_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, se tiene que $u \leq v$.*

Demostración Demostremos primero que si $u_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y es convergente a u, se tiene que $u \geq 0$. En efecto, si $u < 0$, tomemos $\epsilon = -u > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ se tiene que $u < u_n - u < -u \Longrightarrow$

$u_n < 0$ que es una contradicción. La única posibilidad es que $u \geq 0$.

Ahora si tomamos $x_n = v_n - u_n \geq 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} v_n - \lim_{n\to\infty} u_n = u - v \geq 0$.

Teorema 5.2.4 *Sean $(u_n)_n$ y $(v_n)_n$ dos sucesiones de modo que $\lim_{n\to\infty}(u_n - v_n) = 0$, entonces ambas convergen al mismo límite o ambas divergen.*

Demostración Dos casos se presentan: las dos divergen o bien una de las dos converge.

Si una converge, digamos $(u_n)_n$, entonces $\lim_{n\to\infty} u_n = u$, por lo que $\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} u_n - (u_n - v_n) = \lim_{n\to\infty} u_n - \lim_{n\to\infty}(u_n - v_n) = u - 0 = u$.

Teorema 5.2.5 *Sean $(u_n)_n$ y $(v_n)_n$ dos sucesiones convergentes al mismo límite ℓ y si existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $u_n \leq z_n \leq v_n$, $\forall n \geq N_0$, entonces $\lim_{n\to\infty} z_n = \ell$.*

Demostración Dado $\epsilon > 0$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_1$ se tiene $v_n - \ell < \epsilon$, y $-\epsilon < u_n - \ell$, entonces si $n \geq \max\{N_0, N_1\}$ tenemos $-\epsilon < u_n - \ell \leq z_n - \ell \leq v_n - \ell < \epsilon$, o sea $\lim_{n\to\infty} z_n = \ell$.

Teorema 5.2.6 *Sean $(u_n)_n$ una sucesión convergente tal que $\lim_{n\to\infty} u_n = u \neq 0$ y existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $u_n \neq 0$, $\forall n \geq N_0$, entonces $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{u}$.*

Demostración Supongamos sin pérdida de generalidad que $u > 0$, entonces existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_1$ tenemos $|u_n - u| \leq \frac{1}{2}u \implies 0 < \frac{1}{2}u \leq u_n \implies 0 < \dfrac{1}{u_n} < \dfrac{2}{u}$. Por otro lado, dado $\epsilon > 0$ existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_2$, $|u_n - u| \leq \dfrac{u^2\epsilon}{2}$. Así, cuando $n \geq \max\{N_0, N_1, N_2\}$ se tiene $\left|\dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{u}\right| = \left|\dfrac{u_n - u}{u_n u}\right| \leq |u_n - u|\dfrac{1}{|u_n||u|} \leq |u_n - u|\dfrac{2}{u^2} \leq \epsilon$.

Teorema 5.2.7 *Sea $(u_n)_n$ una sucesión tal que $\lim_{n\to\infty} u_n = u$, entonces $\lim_{n\to\infty} |u_n| = |u|$.*

Demostración Es inmediata, pues dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ se cumple $|u_n - u| < \epsilon$, entonces $||u_n| - |u|| \leq |u_n - u| < \epsilon$, o sea $\lim_{n\to\infty} |u_n| = |u|$.

Teorema 5.2.8 *Sean $(u_n)_n$ una sucesión acotada y $(v_n)_n$ una sucesión que tiende a 0, entonces $\lim_{n\to\infty} u_n v_n = 0$.*

Demostración Dado que $(u_n)_n$ es una sucesión acotada, existe $M > 0$ tal que $|u_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Además, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ se tiene $|u_n| \leq \dfrac{\epsilon}{M}$, por lo tanto si $n \geq N$ tenemos $|u_n v_n| \leq |u_n| M \leq \dfrac{\epsilon}{M} M = \epsilon$.

Definición 5.2.3 *Se dice que la sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene por límite $+\infty$ (resp. $-\infty$), si $\forall A > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N \implies u_n > A$ (resp. $< -A$) y escribimos $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$ (resp. $-\infty$).*

Teorema 5.2.9 *– Sean $(u_n)_n$ y $(v_n)_n$ dos sucesiones tales que $\lim_{n\to\infty} u_n = \pm\infty$ y $(v_n)_n$ es acotada, entonces si $\lim_{n\to\infty}(u_n + v_n) = \pm\infty$.*
– Si $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$ (resp. $-\infty$) y si $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, $v_n \geq u_n$ (resp. $v_n \leq u_n$), entonces $\lim_{n\to\infty} v_n = +\infty$ (resp. $-\infty$).
– Si $(u_n)_n$ es acotada y $(v_n)_n$ es tal que $\lim_{n\to\infty} v_n = \pm\infty$, entonces si $\lim_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$.

Demostración

– Supongamos que $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$ (el otro caso se analiza similarmente). Dado que $(v_n)_n$ es una sucesión acotada, existe $M > 0$ tal que $|v_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Además, dado $A > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N \Longrightarrow u_n > A + M$, pero $u_n + v_n \geq u_n - M > A$, o lo que es igual $\lim_{n\to\infty} (u_n + v_n) = +\infty$.
– Supongamos que $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$ (el otro caso se analiza similarmente). Así, dado $A > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_0 \Longrightarrow u_n > A$, pero si $n \geq \max\{N, N_0\}$ se tiene $v_n \geq u_n > A$, o sea $\lim_{n\to\infty} v_n = +\infty$.
– Supongamos que $\lim_{n\to\infty} v_n = +\infty$ (el otro caso se analiza similarmente). Dado que $(u_n)_n$ es una sucesión acotada, existe $M > 0$ tal que $|u_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Además, dado $\epsilon > 0$, entonces $\exists\, N_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_0$ tenemos $v_n > \dfrac{M}{\epsilon}$, por lo que si $n \geq \max\{N_0, N\}$ se cumple que $\left|\dfrac{u_n}{v_n}\right| = \dfrac{|u_n|}{v_n} \leq \dfrac{M}{v_n} < M\dfrac{\epsilon}{M} = \epsilon$.

Definición 5.2.4 *Se dice que la sucesión $(u_n)_n$ es creciente (resp. decreciente) si $u_n \leq u_{n+1}$ (resp. $u_n \geq u_{n+1}$), para todo $n \in \mathbb{N}$ y lo denotamos $(u_n)_n\!\uparrow$ (resp. $(u_n)_n\!\downarrow$).*

Teorema 5.2.10 *a) Sea $(u_n)_n$ una sucesión de números reales creciente, entonces la sucesión converge si y sólo si $(u_n)_n$ es acotada superiormente (es decir si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $u_n \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$).*
b) Sea $(u_n)_n$ una sucesión de números reales decreciente, entonces la sucesión converge si y sólo si $(u_n)_n$ es acotada inferiormente (es decir si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $M \leq u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$).

Demostración

a) ($\Longrightarrow$) Dado que la sucesión $(u_n)_n\!\uparrow$ se tiene que $u_0 \leq u_1 \leq \cdots \leq u_n \leq \sup_{n\geq 0} u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, es decir la sucesión $(u_n)_n$ es acotada.
($\Longleftarrow$) Consideremos la sucesión $(u_n)_n\!\uparrow$ tal que $u_n \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y sea $\ell = \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n$. Probemos que $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$. En efecto, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\ell - \epsilon \leq u_N \leq \ell$ y como $(u_n)_n$ es creciente, $\ell - \epsilon \leq u_N \leq u_n \leq \ell$, $\forall n \geq N$, es decir $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$.

b) Por hipótesis la sucesión $(u_n)_n\!\downarrow$ y acotada inferiormente, si y sólo si la sucesión $(-u_n)_n\!\uparrow$ y acotada superiormente, si y sólo si $(-u_n)_n$ es convergente, si y sólo si $(u_n)_n$ es convergente.

Teorema 5.2.11 *Sean $(u_n)_n$ y $(v_n)_n$ dos sucesiones tales que $(u_n)_n$ es creciente y $(v_n)_n$ es decreciente, de modo que $u_n \leq v_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty}(u_n - v_n) = 0$, entonces:*
– $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_0 \leq u_1 \leq \cdots \leq u_n \leq v_n \leq \cdots \leq v_1 \leq v_0$ y las dos sucesiones convergen al mismo límite.

Demostración Por las hipótesis la sucesión $(u_n)_n$ está acotada superiormente por v_0 y la sucesión $(v_n)_n$ está acotada inferiormente por u_0, entonces por el Teorema 6.4.1 ambas sucesiones convergen. Así tenemos que $\lim_{n\to\infty}(u_n - v_n) = \lim_{n\to\infty} u_n - \lim_{n\to\infty} v_n = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n$.

Definición 5.2.5 *Una subsucesión de $(u_n)_n$ es una sucesión $(u_{n_k})_k$ para la cual existe una aplicación estrictamente creciente $h\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, de modo que $h(k) = n_k$.*

Si tomamos $n_k = 2k$, tenemos la subsucesión (u_{2k}), de índice par.

Teorema 5.2.12 *Si $(u_n)_n$ es una sucesión que converge a u, entonces la subsucesión (u_{n_k}) converge también a u.*

El recíproco es falso pues la sucesión $u_n = (-1)^n$ es divergente y $u_{2k} = (-1)^{2k} = 1$ es convergente.
Demostración Sea $\epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N \Longrightarrow |u_n - u| < \epsilon$, pero $n_{k+1} > n_k \geq k$, entonces is $k \geq N \Longrightarrow n_k \geq N \Longrightarrow |u_{n_k} - u| < \epsilon$, es decir $\lim_{k\to\infty} u_{n_k} = u$.

Teorema 5.2.13 **Teorema de Bolzano–Weierstrass** *De toda sucesión acotada $(x_n)_n$, se puede extraer una subsucesión convergente $(x_{n_k})_k$.*

Demostración La demostración sale de los objetivos planteados aquí. Sin embargo daremos una demostración del teorema.
Sea $(u_n)_n$ una sucesión acotada i.e. existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a \leq u_n \leq b$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Si $\{u_n/n \in \mathbb{N}\}$ es finito, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que si $u_n = u_N$, $\forall n \geq N$ es decir la sucesión es constante a partir de N y converge. Si $\{u_n/n \in \mathbb{N}\}$ es infinito, partimos el intervalo $[\,a, b\,]$ en dos de manera que $[\,a, b\,] = [\,a, \frac{1}{2}(a+b) \cup [\,\frac{1}{2}(a+b), b\,]$ y escogemos un intervalo de estos que contenga un número infinito de elementos de la sucesión $(u_n)_n$ y denotamos tal intervalo por $[\,a_1, b_1\,]$. Partimos este intervalo en dos $[\,a_1, \frac{1}{2}(a_1+b_1) \cup [\,\frac{1}{2}(a_1+b_1), b_1\,]$ y escogemos un intervalo que contenga un número infinito términos y lo denotamos $[\,a_2, b_2\,]$, y así sucesivamente. De este modo se construye una sucesión de intervalos $([\,a_n, b_n\,])_n$ tales que $[\,a_{n+1}, b_{n+1}\,] \subset [\,a_n, b_n\,]$ satisfaciendo que $a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n < b_n \leq \cdots \leq b_1 \leq b_0$ y que $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}\,(b-a) \longrightarrow 0$, por lo que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \ell$.
Construyamos una subsucesión de $(u_n)_n$ que converja a ℓ. En efecto, sea $u_{n_1} \in [\,a_1, b_1\,]$, entonces $\exists n_2 > n_1$ tal que $u_{n_2} \in [\,a_2, b_2\,]$, $\exists n_3 > n_2$ tal que $u_{n_3} \in [\,a_3, b_3\,]$,$\ldots$, $\exists n_k > n_{k-1}$ tal que $u_{n_k} \in [\,a_k, b_k\,]$,$\ldots$
Así tenemos que $|u_{n_k} - \ell| \leq |b_k - a_k| = \frac{1}{2^k}\,(b-a) \longrightarrow 0$, cuando $k \to \infty$, es decir $\lim_{k\to\infty} u_{n_k} = \ell$.

Definición 5.2.6 *Sea $(u_n)_n$ una sucesión acotada, se define $v_n = \sup_{k\geq n} u_k$ que es una sucesión decreciente y acotada, es decir es convergente. Llamamos al límite $v = \lim_{n\to\infty} v_n$, límite superior de la sucesión $(u_n)_n$ y escribimos $v = \lim_{n\to\infty} \sup u_n$.*

Definición 5.2.7 *Similarmente, si $(u_n)_n$ una sucesión acotada, se define $v_n = \inf_{k\geq n} u_k$ que es una sucesión decreciente y acotada, es decir es convergente. Llamamos al límite $v = \lim_{n\to\infty} v_n$, límite inferior de la sucesión $(u_n)_n$ y escribimos $v = \lim_{n\to\infty} \inf u_n$.*

Teorema 5.2.14 *Si $(u_n)_n$ y $(v_n)_n$ son sucesiones acotadas, entonces:*

a) $\lim_{n\to\infty} \inf u_n \leq \lim_{n\to\infty} \sup u_n$, *b)* $\lim_{n\to\infty} \inf u_n = -\lim_{n\to\infty} \sup(-u_n)$,
c) $\lim_{n\to\infty} \sup(u_n + v_n) \leq \lim_{n\to\infty} \sup u_n + \lim_{n\to\infty} \sup v_n$,
d) $\lim_{n\to\infty} \inf u_n + \lim_{n\to\infty} \inf v_n \leq \lim_{n\to\infty} \inf(u_n + v_n)$.

Demostración

a) Sea $a_n = \inf_{k\geq n} u_k \leq b_n = \sup_{k\geq n} u_k$, $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$, es decir $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} u_k = \lim_{n\to\infty} \inf u_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} u_k = \lim_{n\to\infty} \sup u_n$.

b) $\lim_{n\to\infty} \sup(-u_n) = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n}(-u_k) = \lim_{n\to\infty}(-\inf_{k\geq n} u_k) = -\lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} u_k = -\lim_{n\to\infty} \inf u_n$.

c) $\lim_{n\to\infty} \sup(u_n+v_n) = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n}(u_n+v_n) \leq \lim_{n\to\infty}(\sup_{k\geq n} u_k+\sup_{k\geq n} v_k) = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} u_k+ \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} v_k = \lim_{n\to\infty} \sup u_n + \lim_{n\to\infty} \sup v_n$.

d) $\lim_{n\to\infty} \inf(u_n+v_n) = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n}(u_n+v_n) \leq \lim_{n\to\infty}(\inf_{k\geq n} u_k+\inf_{k\geq n} v_k) = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} u_k+ \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} v_k = \lim_{n\to\infty} \inf u_n + \lim_{n\to\infty} \inf v_n$.

Teorema 5.2.15 **Caracterización de sucesiones convergentes** *La sucesión $(u_n)_n$ converge hacia u si y sólo si $\lim_{n\to\infty} \inf u_n = \lim_{n\to\infty} \sup u_n = u$.*

Demostración

($\Longrightarrow$) Sea $\lim_{n\to\infty} u_n = u$, $y_n = \inf_{k\geq n} u_k$ y $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ (que siempre existe). Probemos que $u = y$.

Sea $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N \Longrightarrow |u_n - u| < \frac{1}{2}\epsilon$ y $|y_n - y| < \frac{1}{4}\epsilon$. Además, dado que $y_N = \inf_{k\geq N} u_k$, existe $k \geq N$ tal que $y_N - \frac{1}{4}\epsilon < u_k < y_N \Longrightarrow |y_N - u_k| < \frac{1}{4}\epsilon$, por lo tanto $|u_k-y| \leq |u_k-y_N|+|y_N-y|<\frac{1}{4}\epsilon+\frac{1}{4}\epsilon = \frac{1}{2}\epsilon$. Finalmente, $|u-y| \leq |u-u_k|+|u_k-y|<\frac{1}{2}\epsilon+\frac{1}{2}\epsilon = \epsilon$. Así probamos que $\lim_{n\to\infty} \inf u_n = \lim_{n\to\infty} u_n = u$, De manera similar se prueba que $\lim_{n\to\infty} \sup u_n = \lim_{n\to\infty} u_n = u$.

($\Longleftarrow$) Supongamos que $\lim_{n\to\infty}\inf u_n = \lim_{n\to\infty}\sup u_n = u$ y sea $y_n = \inf_{k\geq n} u_k$, $z_n = \sup_{k\geq n} u_k$, entonces $y_n \leq u_n \leq z_n$ y como $\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n = u$ se tiene $u = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} z_n$.

Teorema 5.2.16 *Sea $(u_n)_n$ una sucesión convergente a u, de modo que $u_n \in [\,a, b\,]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, y sea $f\colon [\,a, b\,] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[\,a, b\,]$, entonces $\lim_{n\to\infty} f(u_n) = f(u)$.*

Demostración Como f es continua en $[\,a, b\,]$, es continua en $u \in [\,a, b\,]$, pues $a \leq u_n \leq b$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y $a \leq \lim_{n\to\infty} u_n = u \leq b$. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|x - u| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(u)| < \epsilon$ y como $\delta > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N \Longrightarrow |u_n - u| < \delta \Longrightarrow |f(u_n) - f(u)| < \epsilon$, es decir $\lim_{n\to\infty} f(u_n) = f(u)$.

Definición 5.2.8 *Una sucesión $(u_n)_n$ se dice satisfacer la condición de Cauchy si $\forall \epsilon > 0$, $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ y $m \geq N$ se cumple $|u_n - u_m| < \epsilon$.*

Esta condición es fundamental pues si una sucesión la satisface, es convergente e inversamente.

Teorema 5.2.17 Criterio de Cauchy para la existencia del límite

Sea $(u_n)_n$ una sucesión, entonces la sucesión satisface la condición de Cauchy si y sólo si es convergente.

Demostración

($\Longrightarrow$) Sea $\epsilon' = 1$, entonces $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_1 \Longrightarrow |u_n - u_{N_1}| < 1$. Así tenemos que $|u_n| \leq \max\{1 + |u_{N_1}|, |u_0|, \ldots, |u_{N_1 - 1}|\}$, es decir es acotada y por el Teorema de Bolzano–Weierstrass existe una subsucesión $(u_{n_k})_k$ convergente.

Sea $0 < \epsilon < 1$, entonces $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N_0 \Longrightarrow |u_n - u_m| < \frac{1}{2}\epsilon$ y $\exists K \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq K \Longrightarrow |u_{n_k} - u| < \frac{1}{2}\epsilon$. Así cuando $p, q, k \geq N = \max\{N_0, N_1, K\}$ tenemos $|u_p - u_q| < \frac{1}{2}\epsilon$, $|u_{n_k} - u| < \frac{1}{2}\epsilon$. Recordemos que si $n \geq N \Longrightarrow n_N \geq N$, lo que implica $|u_n - u| \leq |u_n - u_{n_N}| + |u_{n_k} - u| < \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon$, o sea $\lim_{n\to\infty} u_n = u$.

($\Longleftarrow$) Si la sucesión converge, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N \Longrightarrow |u_n - u| < \frac{1}{2}\epsilon$, entonces si $n, m \geq N$ tenemos $|u_n - u_m| \leq |u_n - u| + |u - u_m| < \epsilon$, o sea satisface la condición de Cauchy.

Definición 5.2.9 *Dos sucesiones $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son adyacentes si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\!\uparrow$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}\!\downarrow$ y $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$.*

Teorema 5.2.18 *Sea $a_2 u_{n+2} + a_1 u_{n+1} + a_0 u_n = 0$ con $a_2 \neq 0$, $a_0 \neq 0$, entonces si λ_1 y λ_2 son soluciones de la ecuación $a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$ se tiene:*

a) Si λ_1, λ_2 son distintas y reales la solución de la ecuación homogénea es $u_n = \alpha_1\lambda_1^n + \alpha_2\lambda_2^n$ con α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$.

b) Si λ_1, λ_2 son distintas y complejas, entonces $\lambda_1 = \lambda$ y $\lambda_2 = \bar{\lambda}$ y se tiene que la solución de la ecuación homogénea es $u_n = \alpha\rho^n \cos t\theta + \beta\rho^n \operatorname{sen} t\theta$ con α, $\beta \in \mathbb{R}$ y $\lambda = \rho(\cos\theta + \mathfrak{i}\operatorname{sen}\theta)$.

c) Si se tiene una raíz doble λ, la solución de la ecuación homogénea es $u_n = \alpha_1\lambda^n + \alpha_2 t\lambda^n$, con α_1, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$.

5.3 Ejercicios

1. Demuestre las siguientes igualdades. Use en lo posible inducción matemática.

a) $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n+1)$.

Solución Utilizando el ejemplo 1 tenemos $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$. Si se multiplica por 2 a ambos lados tenemos el resultado.

b) $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n-2) = \frac{1}{2}n(3n-1)$.

Solución Sea $S = \{n \in \mathbb{N}/$ satisface la igualdad $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n-2) = \frac{1}{2}n(3n-1)\}$.

i) $1 \in S$. En efecto, $1 = \frac{1}{2}{\cdot}1(3-1)$.

ii) ($n \Longrightarrow n+1$). Supongamos que la fórmula es válida para n, entonces $1+4+7+\cdots+(3n-2)+(3n+1) = \frac{1}{2}n(3n-1) + (3n+1) = \frac{3}{2}n^2 + \frac{5}{2}n + 1 = \frac{1}{2}(n+1)(3n+2)$, es decir $n+1 \in S$, lo que implica que $S = \mathbb{N}$ y la igualdad se satisface $\forall n \in \mathbb{N}$.

c) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$.

Solución Sea $S = \{n \in \mathbb{N}/$ satisface la igualdad $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2\}$.

i) $1 \in S$. En efecto, $1 = 1^2$.

ii) ($n \Longrightarrow n+1$). Supongamos que la fórmula es válida para n, así $1+3+5+\cdots+(2n-1)+(2n+1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$, es decir $n+1 \in S$, entonces $S = \mathbb{N}$ y la igualdad se satisface $\forall n \in \mathbb{N}$.

d) $3 + 9 + 15 + \cdots + (6n-3) = 3n^2$.

Solución Sea $S = \{n \in \mathbb{N}/$ satisface la igualdad $3 + 9 + 15 + \cdots + (6n-3) = 3n^2\}$.

i) $1 \in S$. En efecto, $2 = 3{\cdot}1^2$.

ii) ($n \Longrightarrow n+1$). Supongamos que la fórmula es válida para n, así $3+9+15+\cdots+(6n-3)+(6n+3) = 3n^2 + 6n + 3 = 3(n+1)^2$, es decir $n+1 \in S$, entonces $S = \mathbb{N}$ y la igualdad se satisface $\forall n \in \mathbb{N}$.

e) $2 + 7 + 12 + \cdots + (5n-3) = \frac{1}{2}n(5n-1)$.

Solución Sea $S = \{n \in \mathbb{N}/$ satisface la igualdad $2 + 7 + 12 + \cdots + (5n-3) = \frac{1}{2}n(5n-1)\}$.

i) $1 \in S$. En efecto, $2 = \frac{1}{2}{\cdot}1(5-1)$.

ii) ($n \implies n+1$). Supongamos que la fórmula es válida para n, así $2+7+12+\cdots+(5n-3)+(5n+2) = \frac{1}{2}n(5n-1)+(5n+2) = \frac{5}{2}\,n^2 - \frac{9}{2}\,n + 2 = \frac{1}{2}(n+1)(5n+4)$, es decir $n+1 \in S$, entonces $S = \mathbb{N}$ y la igualdad se satisface $\forall n \in \mathbb{N}$.

f) $2+6+18+\cdots+2{\cdot}3^{n-1} = 3^n - 1$.

Solución Sea $S = \{n \in \mathbb{N}/$ satisface la igualdad $2+6+18+\cdots+2{\cdot}3^{n-1} = 3^n - 1\}$.

i) $1 \in S$. En efecto, $2 = 3^1 - 1$.

ii) ($n \implies n+1$). Supongamos que la fórmula es válida para n, así $2+6+18+\cdots+2{\cdot}3^{n-1}+2{\cdot}3^n = 3^n - 1 + 2{\cdot}3^n = 3{\cdot}3^n - 1 = 3^{n+1} - 1$, es decir $n+1 \in S$, entonces $S = \mathbb{N}$ y la igualdad se satisface $\forall n \in \mathbb{N}$.

g) $1+2{\cdot}2^1+3{\cdot}2^2+\cdots+n{\cdot}2^{n-1} = 1+(n-1)2^n$.

Solución Sea $S = \{n \in \mathbb{N}/$ satisface la igualdad $1+2{\cdot}2^1+3{\cdot}2^2+\cdots+n{\cdot}2^{n-1} = 1+(n-1)2^n\}$.

i) $1 \in S$. En efecto, $1 = 1+(1-1)2^1$.

ii) ($n \implies n+1$). Supongamos que la fórmula es válida para n, así $1+2{\cdot}2^1+3{\cdot}2^2+\cdots+n{\cdot}2^{n-1}+(n+1){\cdot}2^n = 1+(n-1)2^n+(n+1)2^n = 1+2n{\cdot}2^n = 1+n2^{n+1}$, es decir $n+1 \in S$, entonces $S = \mathbb{N}$ y la igualdad se satisface $\forall n \in \mathbb{N}$.

h) $(-1)^1+(-1)^2+(-1)^3+\cdots+(-1)^n = \frac{1}{2}((-1)^n - 1)$.

Solución Sea $S = \{n{\in}\mathbb{N}/$ satisface la igualdad $(-1)^1+(-1)^2+(-1)^3+\cdots+(-1)^n = \frac{1}{2}((-1)^n-1)\}$.

i) $1 \in S$. En efecto, $(-1)^1 = \frac{1}{2}((-1)^1 - 1)$.

ii) ($n \implies n+1$). Supongamos que la fórmula es válida para n, así $(-1)^1+(-1)^2+(-1)^3+\cdots+(-1)^n+(-1)^{n+1} = \frac{1}{2}((-1)^n-1)+(-1)^{n+1} = \frac{1}{2}((-1)^n-1+2(-1)^{n+1}) = \frac{1}{2}((-1)^n(1+(-1))+(-1)^{n+1}-1) = \frac{1}{2}((-1)^{n+1}-1)$, es decir $n+1 \in S$, entonces $S = \mathbb{N}$ y la igualdad se satisface $\forall n \in \mathbb{N}$.

i) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{1}{6}\,n(n+1)(2n+1)$.

Solución Sea $S = \{n \in \mathbb{N}/$ satisface la igualdad $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{1}{6}\,n(n+1)(2n+1)\}$.

i′) $1 \in S$. En efecto, $1^2 = \frac{1}{6}\cdot 1(1+1)(2{\cdot}1+1)$.

ii′) ($n \implies n+1$). Supongamos que la fórmula es válida para n, entonces $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2+(n+1)^2 = \frac{1}{6}\,n(n+1)(2n+1)+(n+1)^2 = \frac{1}{6}\,(n+1)(2n^2+7n+6) = \frac{1}{6}\,(n+1)(n+2)(2n+3)$, es decir $n+1 \in S$. Así $S = \mathbb{N}$ y la igualdad se satisface $\forall n \in \mathbb{N}$.

j) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \left[\frac{1}{2}\,n(n+1)\right]^2$.

Solución Sea $S = \{n \in \mathbb{N}/$ satisface la igualdad $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \left[\frac{1}{2}\,n(n+1)\right]^2\}$.

i) $1 \in S$. En efecto, $1^3 = (\frac{1}{2}\cdot 1(1+1))^2$.

ii) ($n \Longrightarrow n+1$). Supongamos que la fórmula es válida para n, entonces $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3+(n+1)^3 = \frac{1}{4}\,n^2(n+1)^2+(n+1)^3 = \frac{1}{4}\,(n+1)^2(n^2+4n+4) = \frac{1}{4}\,(n+1)^2(n+2)^2$, es decir $n+1 \in S$. Así $S=\mathbb{N}$ y la igualdad se satisface $\forall n \in \mathbb{N}$.

k) $\frac{1}{1{\cdot}2}+\frac{1}{2{\cdot}3}+\frac{1}{3{\cdot}4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$.

Solución Sea $S=\{n \in \mathbb{N}/$ satisface la igualdad $\frac{1}{1{\cdot}2}+\frac{1}{2{\cdot}3}+\frac{1}{3{\cdot}4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}\}$.

i) $1 \in S$. En efecto, $\frac{1}{1{\cdot}2} = \frac{1}{1+1}$.

ii) ($n \Longrightarrow n+1$). Supongamos que la fórmula es válida para n, entonces $\frac{1}{1{\cdot}2}+\frac{1}{2{\cdot}3}+\frac{1}{3{\cdot}4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$, es decir $n+1 \in S$. Así $S=\mathbb{N}$ y la igualdad se satisface $\forall n \in \mathbb{N}$.

l) $\frac{1}{1{\cdot}2{\cdot}3}+\frac{1}{2{\cdot}3{\cdot}4}+\frac{1}{3{\cdot}4{\cdot}5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$.

Solución Sea $S=\{n \in \mathbb{N}/$ satisface la igualdad $\frac{1}{1{\cdot}2{\cdot}3}+\frac{1}{2{\cdot}3{\cdot}4}+\frac{1}{3{\cdot}4{\cdot}5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}\}$.

i) $1 \in S$. En efecto, $\frac{1}{1{\cdot}2{\cdot}3} = \frac{1(1+3)}{4(1+1)(1+2)}$.

ii) ($n \Longrightarrow n+1$). Supongamos que la fórmula es válida para n, entonces $\frac{1}{1{\cdot}2{\cdot}3}+\frac{1}{2{\cdot}3{\cdot}4}+\frac{1}{3{\cdot}4{\cdot}5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{n(n+3)^2+4}{4(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{n^3+6n^2+9n+4}{4(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{(n+1)^2(n+4)}{4(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)}$.
Así $S=\mathbb{N}$ y la igualdad se satisface $\forall n \in \mathbb{N}$.

m) $3^1+3^2+3^3+\cdots+3^n = \frac{3}{2}\,(3^n-1)$.

Solución Sea $S=\{n \in \mathbb{N}/$ satisface la igualdad $3^1+3^2+3^3+\cdots+3^n = \frac{3}{2}\,(3^n-1)\}$.

i) $1 \in S$. En efecto, $3^1 = \frac{3}{2}\,(3^1-1)$.

ii) ($n \Longrightarrow n+1$). Supongamos que la fórmula es válida para n, entonces $3^1+3^2+3^3+\cdots+3^n+3^{n+1} = \frac{3}{2}\,(3^n-1)+3^{n+1} = \frac{1}{2}\,3^{n+1}-\frac{3}{2}+3^{n+1} = \frac{3}{2}\,3^{n+1}-\frac{3}{2} = \frac{3}{2}\,(3^{n+1}-1)$. Así $S=\mathbb{N}$ y la igualdad se satisface $\forall n \in \mathbb{N}$.

n) $1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$.

Solución Sea $S=\{n \in \mathbb{N}/$ satisface la igualdad $1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)\}$.

i) $1 \in S$. En efecto, $1^3 = 1^2(2{\cdot}1^2-1)$.

ii) ($n \Longrightarrow n+1$). Supongamos que la fórmula es válida para n, entonces $1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3+(2n+1)^3 = n^2(2n^2-1)+(2n+1)^3 = 2n^4-n^2+8n^3+12n^2+6n+1 = (n^2+2n+1)(2n^2+4n+1) =$

$(n^2+2n+1)(2(n^2+2n+1)-1)=(n+1)^2(2(n+1)^2-1)$. Así $S=\mathbb{N}$ y la igualdad se satisface $\forall n\in\mathbb{N}$.

o) $n<2^n$, si $n\geq 1$.

Solución Sea $S=\{n\in\mathbb{N}/$ satisface la desigualdad $n<2^n\}$.

i) $1\in S$. En efecto, $1<2^1$.

ii) $(n\Longrightarrow n+1)$. Supongamos que la desigualdad es válida para n, entonces $n+1<n+n=2n<2\cdot 2^n=2^{n+1}$. Así $S=\mathbb{N}$ y la desigualdad se satisface $\forall n\in\mathbb{N}$.

p) $1+2n<3^n$, si $n\geq 2$.

Solución Sea $S=\{n\in\mathbb{N}/$ satisface la desigualdad $1+2n<3^n\}$.

i) $2\in S$. En efecto, $1+2\cdot 2<3^2$.

ii) $(n\Longrightarrow n+1)$. Supongamos que la desigualdad es válida para n, entonces $1+2(n+1)=3+2n<3+6n=3(1+2n)<3\cdot 3^n=3^{n+1}$. Así $S=\mathbb{N}\backslash\{1\}$ y la desigualdad se satisface $\forall n\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$.

q) $1+2+3+\cdots+n<\frac{1}{8}(2n+1)^2$.

Solución Sea $S=\{n\in\mathbb{N}/$ satisface la desigualdad $1+2+3+\cdots+n<\frac{1}{8}(2n+1)^2\}$.

i) $1\in S$. En efecto, $1<\frac{1}{8}(2\cdot 1+1)^2$.

ii) $(n\Longrightarrow n+1)$. Supongamos que la desigualdad es válida para n, entonces $1+2+3+\cdots+n+(n+1)<\frac{1}{8}(2n+1)^2+(n+1)=\frac{1}{8}(4n^2+4n+1+8n+8)=\frac{1}{8}(2n+3)^2$. Así $S=\mathbb{N}$ y la desigualdad se satisface $\forall n\in\mathbb{N}$.

r) Si $0<a<b$, entonces $\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}<\left(\frac{a}{b}\right)^n$.

Solución Sea $S=\{n\in\mathbb{N}/$ satisface la desigualdad $\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}<\left(\frac{a}{b}\right)^n\}$.

i) $1\in S$. En efecto, dado que $0<a<b$ se tiene que $0<\dfrac{a}{b}<1$. Multiplicando por $\dfrac{a}{b}$ se tiene $0<\left(\dfrac{a}{b}\right)^2<\dfrac{a}{b}$.

ii) $(n\Longrightarrow n+1)$. Supongamos que la desigualdad es válida para n, entonces $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{n+1}<\left(\dfrac{a}{b}\right)^n$ por lo que multiplicando por $\dfrac{a}{b}$ se tiene $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{n+2}<\left(\dfrac{a}{b}\right)^{n+1}$. Así $S=\mathbb{N}$ y la desigualdad se satisface $\forall n\in\mathbb{N}$.

2. Calcule el límite de las siguientes sucesiones $(u_n)_n$:

a) $u_n=\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$.

b) $u_n=\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n-1}{n^2}$.

c) $u_n=\dfrac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}$, $|a|<1$, $|b|<1$.

d) $u_n=\dfrac{1^2}{n^3}+\dfrac{2^2}{n^3}+\cdots+\dfrac{(n-1)^2}{n^3}$.

e) $u_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}$.

f) $u_n=\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}$.

g) $u_n=\dfrac{1}{3^1}+\dfrac{2}{3^2}+\cdots+\dfrac{n}{3^n}$.

h) $u_n=\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[9]{4}\cdot\sqrt[27]{8}\cdots\sqrt[3^n]{2^n}$.

i) $u_n = (a^n + b^n)^{1/n}, \quad 0 \leq a \leq b.$

j) $u_n = \left(\dfrac{a^{1/n} + b^{1/n}}{2}\right)^n$, $a, b \in \mathbb{R}^+$.

Solución

a) $u_n = \dfrac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} = \dfrac{(-\frac{2}{3})^n + 1}{3((-\frac{2}{3})^{n+1} + 1)} \longrightarrow \dfrac{1}{3}$, ya que $(-\frac{2}{3})^n \longrightarrow 0$ si $n \to \infty$.

b) $u_n = \dfrac{1 + 2 + \cdots + (n-1)}{n^2} = \dfrac{(n-1)n}{2}\dfrac{1}{n^2} = \frac{1}{2}\,(1 - \dfrac{1}{n}) \longrightarrow \frac{1}{2}$ cuando $n \to \infty$.

c) $u_n = \dfrac{1 + a + \cdots + a^n}{1 + b + \cdots + b^n} = \dfrac{\dfrac{1 - a^{n+1}}{1 - a}}{\dfrac{1 - b^{n+1}}{1 - b}} = \dfrac{1 - b}{1 - a}\dfrac{1 - a^{n+1}}{1 - b^{n+1}} \longrightarrow \dfrac{1 - b}{1 - a}$, pues si $|a| < 1$, $|b| < 1$, $a^n \longrightarrow 0$ y $b^n \longrightarrow 0$ cuando $n \to \infty$.

d) $u_n = \dfrac{1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2}{n^3} = \dfrac{\frac{1}{6}\,(n-1)n(2n-1)}{n^3} = \dfrac{1}{6}(1 - \dfrac{1}{n})(2 - \dfrac{1}{2n}) \longrightarrow \dfrac{1}{3}$, cuando $n \to \infty$.

e) $u_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2^2} + \dfrac{5}{2^3} + \cdots + \dfrac{2n-1}{2^n} = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{k}{2^{k-1}} - 1 - \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2^k} + 1$ ya que $\dfrac{2k-1}{2^k} = \left(\dfrac{k}{2^{k-1}} - \dfrac{1}{2^k}\right)$.

En consecuencia $u_n = \dfrac{n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} - \dfrac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} + 1 \longrightarrow \dfrac{1}{\frac{1}{4}} - \dfrac{1}{\frac{1}{2}} + 1 = 3$, cuando $n \to \infty$.

Se utilizó el hecho que $\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + \cdots + x^n = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$ y que $\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right)' = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \dfrac{nx^{n-1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$.

f) $u_n = \sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}$, por lo que $\log u_n = \dfrac{1}{2}\log 2 + \dfrac{1}{4}\log 2 + \dfrac{1}{8}\log 2 + \cdots + \dfrac{1}{2^n}\log 2 = \dfrac{1}{2}(1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{2^{n-1}})\log 2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}}\log 2 = (1 - (\frac{1}{2})^n)\log 2 \longrightarrow \log 2$.

g) $u_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3^2} + \dfrac{3}{3^3} + \cdots + \dfrac{n}{3^n} = \dfrac{1}{3}(1 + \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{3^2} + \cdots + \dfrac{n}{3^{n-1}}) \longrightarrow \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{(1 - \frac{1}{3})^2} = \dfrac{3}{4}$, usando la fórmula del ejercicio 2.

h) $u_n = \sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[9]{4}\cdot\sqrt[27]{8}\cdots\sqrt[3^n]{2^n}$. Tomando el logaritmo se tiene $\log u_n = \dfrac{1}{3}\log 2 + \dfrac{2}{9}\log 2 + \cdots + \dfrac{n}{3^n}\log 2 = \dfrac{1}{3}\log 2(1 + 2(\dfrac{1}{3}) + 3(\dfrac{1}{3})^2 + \cdots + n(\dfrac{1}{3})^{n-1})$.

Por otro lado si definimos $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$, entonces $\displaystyle\int_0^x f(t)dt = x + x^2 + \cdots + x^n = x\dfrac{1 - x^{n-1}}{1 - x} = \dfrac{x - x^n}{1 - x}$. Derivando esta expresión nos queda $f(x) = \dfrac{1 - (n-1)x^n - nx^{n-1}}{(1-x)^2}$, y por lo tanto: $\log u_n = \dfrac{1}{3}\log 2\dfrac{1 + (n-1)(\frac{1}{3})^n - n(\frac{1}{3})^{n-1}}{(1 - \frac{1}{3})^2} \longrightarrow \dfrac{\frac{1}{3}\log 2}{(\frac{2}{3})^2}$

$= \frac{3}{4}\log 2$ i.e. $u_n \longrightarrow 2^{\frac{3}{4}}$.

i) $u_n = (a^n + b^n)^{1/n}$, $0 \leq a \leq b$.

Analicemos primeramente el caso $0 \leq a = b$. Así tenemos $u_n = 2^{1/n}a \longrightarrow a$.

Si $0 < a < b$, $u_n = \left[b^n\left(1 + \left(\dfrac{a}{b}\right)^n\right)\right]^{\frac{1}{n}} = b\left(1 + \left(\dfrac{a}{b}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}$ y $\log u_n = \log b + \dfrac{1}{n}\log\left(1 + \left(\dfrac{a}{b}\right)^n\right) = \log b + \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{a}{b}\right)^n + o\left(\left(\dfrac{a}{b}\right)^n\right) \longrightarrow \log b$, es decir $u_n \longrightarrow b$.

Se usó el hecho que $a^n \longrightarrow 0$ cuando $n \to \infty$, si $|a| < 1$.

j) $u_n = \left(\dfrac{a^{1/n} + b^{1/n}}{2}\right)^n$.

Si $a = b$, $u_n = a$, $\forall n \in \mathbb{N}$ con lo cual es suficiente analizar el caso $b < a$. Así $\log u_n = \log a + n \log\left(\dfrac{1+(b/a)^{1/n}}{2}\right)$. Notemos que $\log{(b/a)}^{1/n} = \dfrac{1}{n}\log\dfrac{b}{a} \longrightarrow 0$, si $n \to \infty$, por lo tanto $(b/a)^{1/n} \longrightarrow 1$ y $\dfrac{1+(b/a)^{1/n}}{2} \longrightarrow 1$.

Veamos que $\lim_{x\to\infty} x \log\left(\frac{1+(b/a)^{1/x}}{2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\log\left(\frac{1+(b/a)^{x}}{2}\right) = f'(0) = \frac{1}{2}\log(b/a)$, con $f(x) = \log\left(\dfrac{1+\alpha^x}{2}\right)$ ya que $f'(x) = \dfrac{\alpha^x}{1+\alpha^x}\log\alpha$. Finalmente $u_n \longrightarrow a\mathrm{e}^{\log(a/b)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{ab}$.

3. Calcule el límite de las siguientes sucesiones $(u_n)_n$. Utilice sumas de Riemann, si desea.

a) $u_n = \sum_{k=0}^n \dfrac{n}{n^2+k^2}$

b) $u_n = \sum_{k=0}^n \dfrac{1}{\alpha n + \beta k}$, $\quad (\alpha > 0, \beta > 0)$

c) $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^n \sqrt[n]{a^k}$

d) $u_n = n\displaystyle\sum_{k=1}^n \dfrac{\mathrm{e}^{-n/k}}{k^2}$

e) $u_n = (2^2 \cdot 3^3 \cdots n^n)^{1/n^2 \ln n}$

f) $u_n = (2^{2^p} \cdot 3^{3^p} \cdots n^{n^p})^{1/n^{p+1}\ln n}$

g) $u_n = \left(\dfrac{(2n)!}{n!\, n^n}\right)^{1/n}$

h) $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^n \left(1 + \dfrac{k^2}{n^2}\right)^{1/n}$

Solución

a) $u_n = \sum_{k=0}^n \dfrac{n}{n^2+k^2} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^n \dfrac{1}{1+\dfrac{k^2}{n^2}} \longrightarrow \displaystyle\int_0^1 \dfrac{1}{1+x^2} = \arctan 1 = \tfrac{1}{4}\pi$.

b) $u_n = \sum_{k=0}^n \dfrac{1}{\alpha n + \beta k} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^n \dfrac{1}{\alpha + \beta\dfrac{k}{n}} \longrightarrow \displaystyle\int_0^1 \dfrac{1}{\alpha+\beta x}dx = \dfrac{1}{\beta}\ln(\alpha+\beta x)\Big|_0^1 = \dfrac{1}{\beta}\ln\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha}$.

c) $u_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^n \sqrt[n]{a^k} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^n a^{k/n} \longrightarrow \displaystyle\int_0^1 a^x dx = \dfrac{1}{\ln a}(a-1)$.

d) $u_n = n\sum_{k=1}^n \dfrac{\mathrm{e}^{-n/k}}{k^2} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^n \dfrac{1}{k^2/n^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{k/n}} \longrightarrow \displaystyle\int_0^1 \dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-1/x}dx = \mathrm{e}^{-1/x}\Big|_0^1 = \mathrm{e}^{-1}$.

e) $u_n = (2^2 \cdot 3^3 \cdots n^n)^{1/n^2 \ln n}$, entonces $\ln u_n = \dfrac{1}{n^2 \ln n}\sum_{k=2}^n k\ln k = \dfrac{1}{\ln n}\left[\dfrac{1}{n}\sum_{k=2}^n \dfrac{k}{n}\ln\dfrac{k}{n}\right] = -\dfrac{1}{n}\sum_{k=2}^n \dfrac{k}{n^2 \ln n}\ln\dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{\ln n}\left[\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^n \dfrac{k}{n}\ln\dfrac{k}{n}\right] + \dfrac{1}{n^2}\left[\dfrac{n(n+1)}{2} - 1\right] \longrightarrow 0 \cdot \displaystyle\int_0^1 x\ln x\, dx + \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}$ y $u_n \longrightarrow \sqrt{\mathrm{e}}$.

f) $u_n = (2^{2^p} \cdot 3^{3^p} \cdots n^{n^p})^{1/n^{p+1}\ln n}$, y tomando el logartimo $\ln u_n = \dfrac{1}{n^{p+1}\ln n}\sum_{k=2}^n k^p \ln(\dfrac{k}{n}n) = \dfrac{1}{\ln n}\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^n \left(\dfrac{k}{n}\right)^p \ln\dfrac{k}{n} + \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^n \left(\dfrac{k}{n}\right)^p \longrightarrow 0 \cdot \displaystyle\int_0^1 x^p \ln x\, dx + \int_0^1 x^p\, dx = \dfrac{1}{p+1}$, si $p > -1$. Así $u_n \longrightarrow \mathrm{e}^{\frac{1}{p+1}}$.

g) $u_n = \left(\dfrac{(2n)!}{n!\, n^n}\right)^{1/n}$, y tomando el logartimo $\ln u_n = \dfrac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{2n}\ln k - \sum_{k=1}^n \ln k - n\ln n\right) = \dfrac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}\ln\dfrac{k}{n} \longrightarrow \displaystyle\int_1^2 \ln x\, dx = x\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 dx = 2\ln 2 - 1$ y $u_n \longrightarrow \dfrac{4}{\mathrm{e}}$.

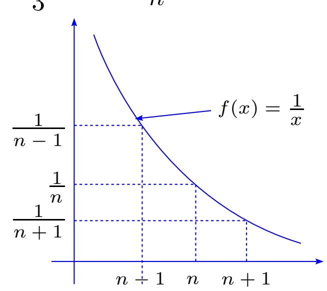
h) $u_n=\prod_{k=1}^n\left(1+k^2/n^2\right)^{1/n}$, por lo que $\ln u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\left(1+\dfrac{k^2}{n^2}\right)\longrightarrow\displaystyle\int_0^1\ln(1+x^2)dx=x\ln(1+x^2)\Big|_0^1-2\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx=\ln 2-2\left(\int_0^1 dx-\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}\right)=\ln 2-2(1-\arctan x)\Big|_0^1=\ln 2-2(1-\tfrac14\pi)$. Finalmente $u_n\longrightarrow 2\mathrm{e}^{-2(1-\frac14\pi)}$.

4. Pruebe que la sucesión $(v_n)_n$ es convergente y calcule su límite, donde $v_n=\dfrac{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}{3\cdot5\cdot7\cdots(2n+1)}$; $n\geq 1$.

   Solución Reescribiendo la expresión $v_n=\dfrac{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}{3\cdot5\cdot7\cdots(2n+1)}=\dfrac{(2\cdot4\cdot6\cdots(2n))^2}{(2n+1)!}=\dfrac{(2^nn!)^2}{(2n+1)!}$. Además, $\ln v_n=2\ln(2^nn!)-\ln(2n+1)!=2\left[n\ln 2+\sum_{k=1}^n\ln k\right]-\sum_{k=1}^{2n+1}\ln k=2n\ln 2-\ln(2n+1)+\sum_{k=1}^n\ln\dfrac{k/n}{1+k/n}$. Ahora, $\frac1n\sum_{k=1}^n\ln\dfrac{k/n}{1+k/n}\longrightarrow\displaystyle\int_0^1\ln\frac{x}{1+x}dx=\int_0^1\ln x dx-\int_0^1\ln(1+x)dx=(x\ln x-x)\Big|_0^1-\int_1^2\ln y dy=-1-y\ln y\Big|_1^2-\int_1^2 dx=-2\ln 2$. Por lo tanto $\frac1n\sum_{k=1}^n\ln\dfrac{k/n}{1+k/n}=-2\ln 2+o(1)$ y se tiene $v_n\sim\mathrm{e}^{-\ln(2n+1)+o(1)}\longrightarrow 0$.

5. Demuestre que la sucesión $(z_n)_n$ es convergente, donde $z_n=1+\dfrac12+\dfrac13+\cdots+\dfrac1n-\ln n$, $n\geq 1$.

   Solución Observemos que la sucesión $u_n>0$. En efecto $u_n=1+\dfrac12+\dfrac13+\cdots+\dfrac1n-\ln n=\sum_{k=1}^{n-1}\displaystyle\int_k^{k+1}\left(\frac1k-\frac1x\right)dx+\frac1n>0$. Además, $u_n-u_{n+1}=\ln(n+1)-\ln n-\dfrac{1}{n+1}=\ln(1+\frac1n)-\dfrac{1}{n+1}>0$. Por lo tanto $(u_n)_n\downarrow$ y acotada inferiormente, es decir es convergente a algún valor $\gamma=\lim_{n\to\infty}u_n$.

   Este valor es conocido como constante de Euler.

6. Demuestre que la sucesión $(u_n)_n$ es convergente y calcule su límite, donde $u_n=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}$; $n\geq 1$.

   Solución Se sabe que $u_n=\sum_{k=1}^n\dfrac{1}{n+k}=\dfrac1n\sum_{k=1}^n\dfrac{1}{1+k/n}\longrightarrow\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2$.

7. Sea $g\colon[1,\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ una función positiva, decreciente y continua en $[1,\infty[$. Demuestre que la sucesión $(d_n)_n$ es convergente, donde $d_n=g(1)+g(2)+\cdots+g(n)-\displaystyle\int_1^n g(x)\,dx$ $n\geq 1$.

   g14**Solución** Usando los mismos argumentos que en el ejercicio 5, $d_n=g(1)+g(2)+\cdots+g(n)-\displaystyle\int_1^n g(x)\,dx\geq 0$ y que $d_n-d_{n+1}=\displaystyle\int_n^{n+1}g(x)dx-g(n+1)\geq 0$. Así la sucesión $(d_n)_n\downarrow$ y como es acotada inferiormente, converge a algún valor $d\in\mathbb{R}$.

8. Demuestre que la sucesión definida por $u_n=(1+\frac1n)^n$, con $n\geq 1$, es creciente y acotada superiormente, mientras que la sucesión definida por $v_n=(1+\frac1n)^{n+1}$, con $n\geq 1$, es decreciente y acotada inferiormente. Deduzca que ambas sucesiones son convergentes al mismo límite.

Sugerencia: Calcule los cocientes u_{n+1}/u_n y v_{n+1}/v_n, y utilice la famosa desigualdad de Bernoulli: $(1+x)^n \geq 1+nx, \forall x > -1, \forall n \geq 0$.

Solución Analicemos el cociente $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^n (1+\frac{1}{n+1}) = \left(1-\frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n (1+\frac{1}{n+1}) \geq \left(1-\frac{n}{n^2+2n+1}\right)(1+\frac{1}{n+1}) = \frac{(n+1)^3+(n+1)^2-n^2-n-n}{(n+1)^3} = \frac{(n+1)^3+1}{(n+1)^3} > 1$, por lo tanto $u_{n+1} > u_n$.

El otro cociente:
$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \left(\frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}}\right)^{n+1} (1+\frac{1}{n+1}) = \left(\frac{n(n+2)}{n^2+2n+1}\right)^{n+1} (1+\frac{1}{n+1}) = \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} (1+\frac{1}{n+1})$.

Si invertimos este cociente tenemos:
$\frac{v_n}{v_{n+1}} = \left(\frac{n^2+2n+1}{n(n+2)}\right)^{n+1} \frac{n+1}{n+2} = \left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1} (1-\frac{1}{n+2}) > \left(1+\frac{n+1}{n^2+2n}\right)(1-\frac{1}{n+2}) = 1-\frac{1}{n+2}+\frac{n+1}{n^2+2n}-\frac{n+1}{n(n+2)^2} = \frac{n(n+2)^2+3}{n(n+2)^2} > 1$, por lo tanto $v_n > v_{n+1}$.

Ahora $u_n = (1+\frac{1}{n})^n < (1+\frac{1}{n})^n(1+\frac{1}{n}) = v_n$, es decir $u_0 < u_1 < \cdots < u_n < v_n < \cdots < v_1 < v_0$ y se concluye que existe $\lim_{n\to\infty} u_n$ y $\lim_{n\to\infty} v_n$. Pero, $\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n(1+\frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} u_n \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} u_n = \mathrm{e}$.

9. Utilizando el teorema de convergencia monótona demuestre que cada una de las siguientes sucesiones es convergente:

a) $u_n = p_0 + p_1/10 + \cdots + p_n/10^n$, $n \geq 1$, donde $p_i \in \{0,1,\ldots,9\}$.

b) $u_n = (1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{4})\cdots(1-\frac{1}{2^n})$, $n \geq 1$.

c) $u_1 = \sqrt{2}$, y en general $u_{n+1} = \sqrt{2+\sqrt{u_n}}$, $n \geq 1$.

d) $u_n = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$, $n \geq 1$.

Solución

a) La sucesión $(u_n)_n \uparrow$ pues $u_{n+1}-u_n = p_{n+1}/10^{n+1} > 0$. Además $0 \leq 9+9/10+9/10^2+\cdots+9/10^n \leq 9\sum_{k=0}^{\infty} 1/10^k = 9\frac{1}{1-1/10} = 10$ i.e. la sucesión converge.

b) Usando el logaritmo se tiene $\ln u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(1-\frac{1}{2^k})$, pero $\ln(1-\frac{1}{2^k}) \sim \frac{1}{2^k}$ con lo cual se tiene la convergencia de la sucesión $\ln u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(1-\frac{1}{2^k})$.

Otra manera de probarlo es la siguiente: si consideramos el cociente

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{4})\cdots(1-\frac{1}{2^{n+1}})}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{4})\cdots(1-\frac{1}{2^n})} < 1,$$

por lo que la sucesión $(v_n)_n \downarrow$ y converge pues es acotada inferiormente por 0.

c) Probemos por inducción, que $(u_n)_n \uparrow$. En efecto, sea $S = \{n \in \mathbb{N}/0 \le u_n \le u_{n+1}\}$, entonces $1 \in S$ pues $u_2 = \sqrt{2+\sqrt{\sqrt{2}}} > \sqrt{2} = u_1$.

Supongamos que $n \in S$ y probemos que $n+1 \in S$. Al tomar la diferencia $u_{n+1} - u_n = \sqrt{2+\sqrt{u_n}} - \sqrt{2+\sqrt{u_{n-1}}} = \dfrac{\sqrt{u_n}-\sqrt{u_{n-1}}}{\sqrt{2+\sqrt{u_n}}+\sqrt{2+\sqrt{u_{n-1}}}} \ge 0$.

Probemos ahora por inducción, que la sucesión $(u_n)_n$ es acotada por 4.

Claramente $S' = \{n \in \mathbb{N}/0 \le u_n \le 4\} \ne \emptyset$, pues $1 \in S'$. Además si $n \in S'$, entonces se tiene $0 \le u_n \le 4 \Longrightarrow 0 \le u_{n+1} = \sqrt{2+\sqrt{u_n}} \le 2 < 4$. Esto prueba que la sucesión $(u_n)_n$ es convergente.

d) Es claro que la sucesión $(u_n)_n$ es creciente, pues $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{n^2} \ge u_n$. Por otro lado, se sabe que $\sum_{k=2}^n f(k) \le \displaystyle\int_1^n f(x)dx \le \sum_{k=1}^n f(k)$ lo que conduce a $u_n = 1 + \sum_{k=2}^n \dfrac{1}{k^2} = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} \le 1 + \displaystyle\int_1^n \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{n} + 2 \le 2, \forall n \in \mathbb{N}$ y se establece la convergencia de $(u_n)_n$.

10. Sea $(u_n)_n$ una sucesión tal que $u_0 \ge 0$, $u_1 \ge 0$ y además $u_{n+2} = \sqrt{u_n \cdot u_{n+1}}$, para $n \ge 0$. Demuestre que $(u_n)_n$ es convergente al número $(u_0\, u_1^2)^{1/3}$.

Solución Al tomar logaritmos la sucesión se convierte en $v_n = \ln u_n$, donde $v_{n+2} = \frac{1}{2}(v_{n+1}+v_n)$. Si tomamos la diferencia $v_n = v_n - v_{n-1} = \frac{1}{2}(v_{n-1}+v_{n-2}) - v_{n-1} = -\frac{1}{2}(v_{n-1}-v_{n-2}) = -\frac{1}{2}v_{n-1} = (-\frac{1}{2})^2 v_{n-2} = \cdots = (-\frac{1}{2})^{n-2} v_2$.

Por otro lado $v_n - v_1 = v_n - v_{n-1} + v_{n-1} - v_{n-2} + \cdots + v_3 - v_2 + v_2 - v_1 = v_n + v_{n-1} + \cdots + v_3 + v_2 = v_2\,[\,1 + (-\frac{1}{2}) + (-\frac{1}{2})^2 + \cdots + (-\frac{1}{2})^{n-2}\,] = v_2 \dfrac{1-(-\frac{1}{2})^{n-1}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\,v_2 - \frac{2}{3}\,v_2(-\frac{1}{2})^{n-1}$ y $v_n = v_1 + \frac{2}{3}\,v_2 - \frac{2}{3}\,v_1 + v_2(-\frac{1}{2})^n = \frac{2}{3}\,v_1 + \frac{1}{3}\,v_0 + v_2(-\frac{1}{2})^n \longrightarrow \frac{2}{3}\,v_1 + \frac{1}{3}\,v_0 = \frac{1}{3}\,(2v_1 + v_0)$ y obetenemos $u_n \longrightarrow \mathrm{e}^{\ln(u_1^{2/3} u_0^{1/3})} = \sqrt[3]{u_0 u_1^2}$. Observemos que la sucesión oscila alrededor del límite: $v_0 < v_2 < \cdots < v_{2n} < v_{2n+1} < v_{2n-1} < \cdots < v_3 < v_1$.

11. Sea $(u_n)_n$ la sucesión definida por $u_0 > 0$, $u_0 \ne \sqrt{2}$, y en general $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{1}{u_n}$, $n \ge 0$.

a) Demuestre que a partir de u_1 esta sucesión es monótona decreciente y acotada inferiormente por $\sqrt{2}$. Calcule el valor de convergencia de $(u_n)_n$.

b) Demuestre que existe $a > 0$ tal que $\dfrac{u_{n+1}-a}{u_{n+1}+a} = \left(\dfrac{u_n-a}{u_n+a}\right)^2$, $n \ge 0$.

c) Hallar una fórmula para u_n en términos de n y el número $b = (u_0 - a)/(u_0 + a)$ y recalcular el valor de convergencia de $(u_n)_n$ a partir de dicha fórmula.

Solución

a) Verifiquemos usando inducción, que $(u_n)_n$ está acotada inferiormente por $\sqrt{2}$ y que $(u_n)_n\downarrow$.

i) Sea $S=\{n\in\mathbb{N}/\sqrt{2}\leq u_n\}$. $1\in S$ pues $u_1-\sqrt{2}=\dfrac{2+u_0^2}{2u_0}-\sqrt{2}=\dfrac{(u_0-\sqrt{2})^2}{2u_0}>0$.

Verifiquemos que si $n\in S\Longrightarrow n+1\in S$. Al tomar la expresión $u_{n+1}-\sqrt{2}=\dfrac{(u_n-\sqrt{2})^2}{2u_n}>0$, con lo cual se tiene $u_n\geq\sqrt{2}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

ii) Es evidente que $u_{n+1}-u_n=\dfrac{2-u_n^2}{2u_n}\leq 0$, entonces existe el límite de la sucesión $(u_n)_n$ que lo denotaremos ℓ. Dada la relación de recurrencia de la sucesión $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{2}+\dfrac{1}{u_n}$ y dado que el límite existe, se tiene que $\ell=\dfrac{\ell}{2}+\dfrac{1}{\ell}$, es decir $2\ell^2=\ell^2+2\Longrightarrow\ell=\sqrt{2}$.

b) Sabemos que $u_{n+1}-\sqrt{2}=\dfrac{(u_n-\sqrt{2})^2}{2u_n}$ y que $u_{n+1}+\sqrt{2}=\dfrac{(u_n+\sqrt{2})^2}{2u_n}$, lo que conduce a $\dfrac{u_{n+1}-\sqrt{2}}{u_{n+1}+\sqrt{2}}=\left(\dfrac{u_n-\sqrt{2}}{u_n+\sqrt{2}}\right)^2$ y tomamos $a=\sqrt{2}$.

c) Por la parte b) tenemos $\dfrac{u_n-a}{u_n+a}=\left(\dfrac{u_{n-1}-a}{u_{n-1}+a}\right)^2=\left(\dfrac{u_{n-2}-a}{u_{n-2}+a}\right)^{2^2}=\cdots=\left(\dfrac{u_0-a}{u_0+a}\right)^{2^n}=b^{2n}$ y se encuentra que $u_n=a(1+b^{2n})/(1-b^{2n})$, donde $|b|=|u_0-\sqrt{2}|/|u_0+\sqrt{2}|<1$. Así se concluye que $\lim_{n\to\infty}u_n=a=\sqrt{2}$.

12. Si $(u_n)_n$ está definida por $u_1=3$, $u_{n+1}=\dfrac{3(1+u_n)}{3+u_n}$. Probar que $(u_n)_n$ converge y calcular el límite.

Solución Al considerar $u_n-u_{n+1}=u_n-\dfrac{3(1+u_n)}{3+u_n}=\dfrac{(u_n+\sqrt{3})(u_n-\sqrt{3})}{3+u_n}$.

Probemos por inducción que $u_n\geq\sqrt{3}$. Sea $S=\{n\in\mathbb{N}/\sqrt{3}\leq u_n\}$.

a) $2\in S$. En efecto $u_2=\dfrac{3(1+3)}{3+3}=2\geq\sqrt{3}$.

b) Probemos que si la relación es válida para n también es válida para $n+1$.

Al considerar $u_{n+1}-\sqrt{3}=\dfrac{3(u_n-\sqrt{3})-\sqrt{3}(u_n-\sqrt{3})}{3+u_n}=\dfrac{(u_n-\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}{3+u_n}\geq 0$.

Así se deduce que $u_n\geq u_{n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$ y con esto se prueba la convergencia de la sucesión. El límite ℓ satisface la ecuación de recurrencia $\ell=\dfrac{3(1+\ell)}{3+\ell}\Longleftrightarrow\ell^2=3$, por lo que $\ell=\pm\sqrt{3}$. La única solución posible es $\sqrt{3}$.

13. Sea $(u_n)_n\uparrow$ y $(v_n)_n\downarrow$ dos sucesiones tales que $u_n\leq v_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

a) Pruebe que ambas sucesiones son convergentes y $\lim_{n\to\infty}u_n\leq\lim_{n\to\infty}v_n$. Pruebe además que si $\lim_{n\to\infty}(u_n-v_n)=0$, entonces $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}v_n$.

b) Aplicar el resultado a las sucesiones $(u_n)_n$ y $(v_n)_n$ definidas por $0\leq u_0\leq v_0$ y $u_{n+1}=\sqrt{u_nv_n}$, $v_{n+1}=\frac{1}{2}(u_n+v_n)$.

Solución

a) Por las hipótesis, se concluye que $u_0\leq u_1\leq\cdots\leq u_n\leq v_n\leq\cdots\leq v_1\leq v_0$. Esto demuestra que $(v_n)_n$ está acotada inferiormente por u_0 y que $(u_n)_n$ está acotada superiormente por v_0 y por consiguiente ambas sucesiones convergen. En resumen, dado que $u_n \le v_n$, $\lim_{n\to\infty} u_n \le v_n$ y $\lim_{n\to\infty} u_n \le \lim_{n\to\infty} v_n$. Además si $\lim_{n\to\infty}(u_n - v_n) = 0 \implies \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}((u_n - v_n) + v_n) = \lim_{n\to\infty} v_n$.

b) Usando las hipótesis del problema tenemos que $(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2 = u_n + v_n - 2\sqrt{u_n v_n} \ge 0 \implies \frac{1}{2}(u_n + v_n) \ge \sqrt{u_n v_n} \implies v_{n+1} \ge u_{n+1}$. Además $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{2}(u_n - v_n) \le 0$, es decir $(v_n)_n \downarrow$. Sea $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt{\frac{v_n}{u_n}} > 1$, por lo tanto $(u_n)_n \uparrow$, pero como $v_{n+1} - u_{n+1} \le v_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(v_n - u_n) \implies 0 \le v_n - u_n \le (\frac{1}{2})^n (v_0 - u_0) \longrightarrow 0$ y se establece que $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n$.

14. Pruebe que la sucesión definida por $u_1 = 1$, $u_{n+1} = \dfrac{2(2u_n + 1)}{u_n + 3}$ es convergente y calcular el límite.

Solución Notemos que $u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n+2}{u_n+3} - u_n = \frac{2+u_n-u_n^2}{u_n+3} = -\frac{(u_n-2)(u_n+1)}{u_n+3}$. Probemos que $-1 \le u_n \le 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

En efecto, $-1 \le u_1 = 1 \le 2$.

Si $-1 \le u_n \le 2 \implies u_{n+1} - 2 = \dfrac{4u_n + 2}{u_n + 3} - 2 = \dfrac{2u_n - 4}{u_n + 3} \le 0$ y $u_{n+1} + 1 = \dfrac{5(u_n + 1)}{u_n + 3} \ge 0$, es decir $-1 \le u_{n+1} \le 2$ que se deseaba probar.

Finalmente tomando en cuenta que $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{(u_n - 2)(u_n + 1)}{u_n + 3} \ge 0$ i.e. $(u_n)_n \uparrow$ y converge a 2. Esto por cuanto el límite ℓ satisface la ecuación $\ell = \dfrac{4\ell + 2}{\ell + 3}$ cuyas soluciones son -1 y 2 y se desecha la solución -1.

15. a) Sea $(u_n)_n$ una sucesión tal que $|u_{n+1} - u_n| \le M/2^n$, con $M > 0$. Pruebe que es convergente.

b) Sea $(u_n)_n$ una sucesión tal que $|u_n| \le 2$, $|u_{n+2} - u_{n+1}| \le \frac{1}{8}\,|u_{n+1}^2 - u_n^2|$. Pruebe que es convergente.

Solución

a) Probemos que la sucesión es de Cauchy.

En efecto, $|u_{n+m} - u_n| \le |u_{n+m} - u_{n+m-1}| + |u_{n+m-1} - u_{n+m-2}| + \cdots + |u_{n+1} - u_n| \le M/2^n(1 + 1/2 + \cdots + 1/2^m) \le M/2^{n-1}$. Así dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, $N = 2 + [\![\ln(M/\epsilon)/\ln 2]\!]$ tal que si $n \ge N \implies n - 1 \ge [\![\ln(M/\epsilon)/\ln 2]\!] + 1 \implies \epsilon \ge M/2^{n-1} \ge |u_{n+m} - u_n|$, $\forall n \ge N$, $\forall m \in \mathbb{N}$.

b) Dado que $|u_{n+1} - u_n| = \frac{1}{8}\,|u_n^2 - u_{n-1}^2| = \frac{1}{8}\,|u_n - u_{n-1}|\,|u_n + u_{n-1}| \le \frac{1}{2}|u_n - u_{n-1}| \le \dfrac{1}{2^2}|u_{n-1} - u_{n-2}| \le \cdots \le \dfrac{1}{2^n}|u_1 - u_0|$. Utilizando a) se tiene la convergencia de $(u_n)_n$.

16. Sea $(u_n)_n$ una sucesión tal que $u_1 = -\frac{3}{2}$, $3u_{n+1} = 2 + u_n^2$. Pruebe que $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$.

Solución Para $n = 2$, $3u_2 = 2 + \frac{9}{4} = \frac{17}{4} \implies u_2 = \frac{17}{12}$.

Probemos que $1 \le u_n \le 2$, si $n \ge 2$. Si la asumpción es válida para n, verifiquemos que es válida para $n + 1$.

Veamos que $u_{n+1} - 1 = \frac{1}{3}\,(u_n^2 - 1) = \frac{1}{3}\,(u_n - 1)(u_n + 1) \ge 0$ y que $u_{n+1} - 2 = \frac{1}{3}\,(u_n^2 - 4) =$

$\frac{1}{3}(u_n-2)(u_n+2)\leq 0$. Así $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3}(u_n-2)(u_n-1)\leq 0$ y $(u_n)_n\downarrow$ y la sucesión converge a un número real ℓ que satisface la ecuación $\ell=\dfrac{2+\ell^2}{3}$ i.e. $\ell=1$.

17. Sea $(u_n)_n$ una sucesión tal que $u_1=1$, $u_{n+1}=\dfrac{1}{2+u_n}$.

a) Calcule u_2 y u_3.

b) Pruebe que si λ es la raíz positiva de la ecuación $x=\dfrac{1}{2+x}$, entonces $|u_{n+1}-\lambda|\leq\frac{1}{4}|u_n-\lambda|$ y calcular el límite.

Solución

a) Evaluando $u_2=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}$, $u_3=\frac{1}{2+\frac{1}{3}}=\frac{3}{7}$.

b) La ecuación $x^2-2x-1=0$ tiene como raíces $\sqrt{2}-1$ y $-\sqrt{2}-1$. Sea $\lambda=\sqrt{2}-1$, entonces como $u_{n+1}-\lambda=\dfrac{1}{2+u_n}-\dfrac{1}{2+\lambda}=\dfrac{\lambda-u_n}{(2+u_n)(2+\lambda)}$ y como $u_n>0$ y $\lambda>0\Longrightarrow(2+u_n)(2+\lambda)>4$. Así $|u_{n+1}-\lambda|<\dfrac{1}{4}|u_n-\lambda|\Longrightarrow|u_{n+1}-\lambda|<\dfrac{|u_1-\lambda|}{4^n}\longrightarrow 0$.

18. Sea $u_1=2$, $u_2=8$, $u_{2n+1}=\frac{1}{2}(u_{2n}+u_{2n-1})$, $u_{2n+2}=\frac{u_{2n}\cdot u_{2n-1}}{u_{2n+1}}$. Demuestre que $(u_n)_n$ es convergente y calcule su límite.

Solución Es claro que los $(u_n)_n$ son positivos y que $u_{2n+2}\cdot u_{2n+1}=u_{2n}\cdot u_{2n-1}=u_{2n-2}\cdot u_{2n-3}=\cdots=u_2\cdot u_1=16$. Así $u_{2n}=\dfrac{16}{u_{2n-1}}$, $u_{2n+1}=\frac{1}{2}(u_{2n-1}+\dfrac{16}{u_{2n-1}})=\dfrac{a_{2n-1}^2+16}{2u_{2n-1}}$.

Sea $v_{n+1}=u_{2n+1}$, $v_n=u_{2n-1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, entonces $v_{n+1}=\dfrac{v_n^2+16}{2v_n}$ con $v_1=u_1=2$, $\forall n>1$.

Demostremos que $v_n\geq 4$, $\forall n>1$. En efecto, $(v_n-4)^2\geq 0\Longrightarrow v_n^2+16\geq 8v_n\Longrightarrow\dfrac{v_n^2+16}{2v_n}=v_{n+1}\geq 4$, $\forall n>1$.

Probemos que $(v_n)_n$ es decreciente.

En efecto, $v_{n+1}-v_n=\dfrac{v_n^2+16}{2v_n}-v_n=\dfrac{v_n^2+16-2v_n^2}{2v_n}=\dfrac{(4+v_n)(4-v_n)}{2v_n}\leq 0$, pues $v_n\geq 4$, $\forall n>1$. Así, $(v_n)_n$ es decreciente y acotada por lo tanto convergente a ℓ que satisface $\ell=\dfrac{\ell^2+16}{2\ell}$, es decir $\ell^2=16\Longrightarrow\ell=\pm 4$, y tenemos $\ell=4$. Por otro lado $\lim_{n\to\infty}v_n=\lim_{n\to\infty}u_{2n-1}=4$ y como $u_{2n}=\dfrac{16}{u_{2n-1}}$, entonces $\lim_{n\to\infty}u_{2n}=4$ y así $\lim_{n\to\infty}u_n=4$.

19. Sea $(u_n)_n$ definida por $u_1=0$, $u_{n+1}=\dfrac{u_n+2}{u_n+3}$.

a) Demuestre que $0\leq u_n\leq\lambda$, $\forall n\in\mathbb{N}$, con $\lambda=\sqrt{3}-1$ raíz mayor de la ecuación $x=\dfrac{x+2}{x+3}$.

b) Deducir que $(u_n)_n\uparrow$ y calcule el límite.

Solución

a) Sea $u_1=\frac{2}{3}$, $u_2=\dfrac{\frac{2}{3}+2}{\frac{2}{3}+3}=\frac{8}{11}$. Así, $\frac{2}{3}=u_1<u_2$. Además se va a verificar que si $u_n-\lambda<0$, también $u_{n+1}-\lambda<0$. Dado que $\lambda=\sqrt{3}-1$ se tiene $u_{n+1}-\lambda=\dfrac{u_n+2}{u_n+3}-\dfrac{\lambda+2}{\lambda+3}=\dfrac{u_n-\lambda}{(u_n+3)(u_n+\lambda)}<0$.

b) Consideremos $u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n+2}{u_n+3}-u_n=\dfrac{2-u_n^2-2u_n}{u_n+3}=-\dfrac{(u_n+1+\sqrt{3})(u_n-\lambda)}{u_n+3}>0$, entonces la sucesión es creciente y acotada por λ y se concluye que $\lim_{n\to\infty} u_n=\lambda=\sqrt{3}-1$.

20. Demuestre que si $(u_n)_n$ es una sucesión convergente a un límite a y si se cambia un número finito de términos, la sucesión así obtenida también converge hacia a.

Solución Sea $(v_n)_n$ la sucesión a la que se le cambiaron N' términos i.e. $n_1,\ldots,n_{N'}$. Sea $\epsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}$ tal que si $n\geq N$, $|u_n-a|<\epsilon$. Así, si $n\geq \sup\{n_1,\ldots,n_{N'},N\}$ se tiene $|v_n-a|=|u_n-a|<\epsilon$.

21. Demuestre que si $\lim_{n\to\infty} u_n=a$, entonces $\lim_{n\to\infty} u_{k+n}=a$.

Solución Sea $\epsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$ tal que si $n\geq N$, $|u_n-a|<\epsilon$. Así, si $n\geq N \Longrightarrow n+k>N$ y $|u_{n+k}-a|<\epsilon$.

22. Demuestre que si $u_n\longrightarrow a$, entonces $|u_n|\longrightarrow |a|$ y demuestre que lo contrario no es cierto.

Solución Es evidente desde que $|\,|u_n|-|a|\,|\leq |u_n-a|\longrightarrow 0$.

Para probar lo contrario, tomemos $u_n=(-1)^n$ que no converge, pero $|u_n|=1$ si lo hace.

23. Demuestre que si $(v_n)_n$ es acotada y $\lim_{n\to\infty} u_n=0$, entonces $\lim_{n\to\infty} v_nu_n=0$.

Solución Es claro que $|v_nu_n|\leq M|u_n|$ y dado $\epsilon>0$, existe N tal que si $n\geq N\Longrightarrow |u_n|<\epsilon/M\Longrightarrow$ $|v_nu_n|<M|u_n|<\epsilon$, es decir $\lim_{n\to\infty} v_nu_n=0$.

24. Suponga que $\lim_{n\to\infty} u_n=a$ y $\lim_{n\to\infty} w_n=a$. Demuestre que si $(v_n)_n$ es una sucesión tal que $u_n\leq v_n\leq w_n$, entonces $\lim_{n\to\infty} v_n=a$.

Solución Sea $z_n=w_n-v_n\Longrightarrow |z_n|\leq w_n-u_n$ y como $\lim_{n\to\infty}(w_n-u_n)=0$, resulta que dado $\epsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$ tal que si $n\geq N\Longrightarrow |z_n|<\epsilon\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} z_n=0$. Pero como las sucesiones $z_n=w_n-v_n$, w_n y u_n convergen, $v_n=w_n-z_n$ converge y $\lim_{n\to\infty} v_n=\lim_{n\to\infty} w_n-\lim_{n\to\infty} z_n=a-0=a$.

25. a) Demuestre que $\lim_{n\to\infty}\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}=1$.

b) Demuestre que la sucesión $u_n=\sqrt{n^2-n}-n$ es convergente y calcule su límite.

Solución

a) Sabemos que $u_n=\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}\sim 1-\dfrac{1}{2n}\longrightarrow 1$, cuando $n\to\infty$.

b) La expresión $u_n=\dfrac{\left(\sqrt{n^2-n}-n\right)\left(\sqrt{n^2-n}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2-n}+n\right)}=\dfrac{-n}{n\left(\sqrt{1-1/n}+1\right)}\longrightarrow -\frac{1}{2}$.

26. Sea $(u_n)_n$ una sucesión tal que $u_{2k}\longrightarrow \ell$ y $u_{2k+1}\longrightarrow \ell$, si $k\to\infty$. Demuestre que la sucesión $u_n\longrightarrow \ell$, si $n\to\infty$.

Solución Sea $\epsilon>0$, existen $k,k'\in\mathbb{N}$ tales que si $n\geq k\Longrightarrow |u_{2k}-\ell|\leq\epsilon$, $n\geq k'\Longrightarrow |u_{2k+1}-\ell|\leq\epsilon$. Sea $N=\max\{2k,2k'+1\}$, si $n\geq N$ y si $n=2p\Longrightarrow p\geq k\Longrightarrow |u_n-\ell|\leq\epsilon$. Si $n=2p+1\geq$

$2k'+1 \Longrightarrow p \geq k' \Longrightarrow |u_n - \ell| \leq \epsilon$.

27. Demuestre que las siguientes sucesiones son crecientes, $u_n = 2n^2 - 3n + 5$ y $v_n = \dfrac{n}{n+1}$.

    Solución Consideremos $u_{n+1} - u_n = 2(n+1)^2 - 3(n+1) + 5 - 2n^2 + 3n - 5 = 4n - 1 > 0$, si $n \geq 1$ y $v_{n+1} - v_n = \dfrac{n+1}{n+2} - \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$, si $n \geq 1$.

28. Demuestre que $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \dfrac{1}{(2n)^2}\right) = 0$.

    Solución Como $\dfrac{1}{(n+k)^2} \leq \dfrac{1}{n^2}$ para $k = 1, \ldots, n \Longrightarrow 0 \leq \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \dfrac{1}{(2n)^2} < n \cdot \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{1}{n} \longrightarrow 0$.

29. Se considera la sucesión $u_1 = a$, $u_2 = b$, $u_3 = \frac{1}{2}(a+b)$, $u_n = \frac{1}{2}(u_{n-1} + u_{n-2})$, para $n \geq 3$.

    a) Si $v_n = u_n - u_{n-1}$, para $n > 1$, demostrar que $v_n = -\frac{1}{2}v_{n-1}$.

    b) Demostrar que $u_n = \frac{1}{3}(a+2b) - \frac{2}{3}(b-a)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

    c) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

    Solución

    a) Sea $v_n = u_n - u_{n-1} = \frac{1}{2}(u_{n-2} - u_{n-1}) = -\frac{1}{2}(u_{n-1} - u_{n-2}) = -\frac{1}{2}v_{n-1}$.

    b) Se observa que $u_n - u_1 = v_2 + v_3 + \cdots + v_n = v_2\left[1 + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right] = \frac{2}{3}(b-a)\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$ y se tiene $u_n = u_1 + \frac{2}{3}(b-a) - \frac{2}{3}(b-a)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{3}(a+2b) - \frac{2}{3}(b-a)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

    c) Es claro que $\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{3}(a+2b)$.

30. a) Pruebe que si $(u_n)_n$ cumple $u_n \neq 0$, $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \ell < 1$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

    b) Demuestre que $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n}{2^n} = 0$ y $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!} = 0$.

    Solución

    a) Sabemos que $|u_n| = |\frac{u_n}{u_{n-1}}|\cdot|\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}|\cdot|\frac{u_{n-2}}{u_{n-3}}|\cdots|\frac{u_2}{u_1}|\cdot|u_1|$ y como $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \ell$ resulta que $\ell \geq 0$. Además $\ell < 1$, $\frac{1}{2}(1-\ell) > 0$ y existe $N' \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N'$ implica $\left||\frac{u_n}{u_{n-1}}| - \ell\right| < \frac{1}{2}(1-\ell) \Longrightarrow |\frac{u_n}{u_{n-1}}| - \ell < \frac{1}{2}(1-\ell) \Longrightarrow |\frac{u_n}{u_{n-1}}| < \frac{1}{2}(1-\ell) + \ell = \frac{1}{2}(1+\ell)$. Sea $n \geq N'$, entonces $|u_n| = |\frac{u_n}{u_{n-1}}||\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}||\frac{u_{n-2}}{u_{n-3}}|\cdots|\frac{u_{N'+1}}{u_{N'}}|\cdot|u_{N'}| \leq \left(\dfrac{1+\ell}{2}\right)^{n-N'}|u_{N'}|$ y como $\dfrac{\ell+1}{2} < 1$, existe N'' tal que si $n \geq N'' \Longrightarrow \left(\dfrac{1+\ell}{2}\right)^{n-N'}|u_{N'}| < \epsilon$. Por lo tanto, si $n \geq N'$ y N'', $|u_n| < \epsilon$, es decir $u_n \longrightarrow 0$.

    b) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+1}{2^{n+1}}\dfrac{2^n}{n} = \dfrac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \longrightarrow \frac{1}{2} < 1$ y se tiene $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n}{2^n} = 0$.
    $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\dfrac{n!}{n+1} = \dfrac{2}{n+1} \longrightarrow 0 < 1$, es decir $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!} = 0$.

31. Sea $S_n(\alpha) = \operatorname{sen}^3\dfrac{\alpha}{3} + 3\operatorname{sen}^3\dfrac{\alpha}{3^2} + \cdots + 3^{n-1}\operatorname{sen}^3\dfrac{\alpha}{3^n}$, determine el límite de $S_n(\alpha)$.

    Solución Sabemos que $\operatorname{sen} 3\alpha = \operatorname{sen}(2\alpha+\alpha) = \operatorname{sen} 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\operatorname{sen}\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha + (\operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha)\operatorname{sen}\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha(1-\operatorname{sen}^2\alpha) + (1-2\operatorname{sen}^2\alpha)\operatorname{sen}\alpha = 3\operatorname{sen}\alpha - 4\operatorname{sen}^3\alpha$. Así $\operatorname{sen}^3\alpha = \frac{1}{4}(3\operatorname{sen}\alpha -$

$\operatorname{sen} 3\alpha$), de modo que:

$$3^{n-1}\operatorname{sen}^3\frac{\alpha}{3^n}=\frac{3^{n-1}}{4}\left(3\operatorname{sen}\frac{\alpha}{3^n}-\operatorname{sen}\frac{\alpha}{3^{n-1}}\right)=\left[3^n\operatorname{sen}\frac{\alpha}{3^n}-3^{n-1}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{3^{n-1}}\right].$$

Sea $u_n=3^n\operatorname{sen}\dfrac{\alpha}{3^n}$, entonces $S_n(\alpha)=\frac{1}{4}\left[(u_2-u_1)+(u_3-u_2)+(u_4-u_3)+\cdots+(u_{n-1}-u_n)+\right.$ $\left.(u_n-u_{n-1})\right]=\frac{1}{4}\left[\,u_1+u_n\,\right]=\frac{1}{4}\left[\,3^n\operatorname{sen}\frac{\alpha}{3^n}-3\operatorname{sen}\frac{1}{3}\,\alpha\,\right]\longrightarrow\frac{1}{4}\,(\alpha-3\operatorname{sen}\frac{1}{3}\,\alpha)$.

32. Sea $(a_n)_n$ una sucesión de números reales positivos, con $0\le a_n<a$. Estudie la convergencia de la sucesión $u_n=\sqrt{a_1+\sqrt{a_2+\cdots+\sqrt{a_n}}}$.

    Solución Como $a_n\le a_n+\sqrt{a_{n+1}}$, se tiene que $u_n\le u_{n+1}$ y la suecesión es creciente. Además si $v_n=\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}$, entonces $u_n\le v_n$ y v_n es convergente, puesto que es creciente y $v_n<\ell$, donde $\ell=\sqrt{a+\ell}$, o sea $\ell=\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$. Así $u_n\le v_n<\ell$ y $u_n\longrightarrow\ell'\le\ell$.

33. Sea define $u_0=0$; $u_{n+1}=\dfrac{4}{5+u_n}$.

a) Demuestre que $0<u_n<\frac{4}{5}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$.

b) Si es convergente, calcule su límite.

Solución

a) Es claro que $u_n>0$, luego $5<u_n+5\Longrightarrow\dfrac{5}{u_n+5}<1\Longrightarrow\dfrac{4}{u_n+5}<\dfrac{4}{5}\Longrightarrow u_{n+1}<\dfrac{4}{5}$.

b) La función $f(x)=\dfrac{4}{x+5}$ es decreciente. En efecto, si $x_2{>}x_1\Longrightarrow f(x_1){-}f(x_2)=4\left[\dfrac{1}{x_1+5}-\dfrac{1}{x_2+5}\right]=$

$\dfrac{4\,[\,x_2+5-x_1-5\,]}{(x_1+5)(x_2+5)}=\dfrac{4\,[\,x_2-x_1\,]}{(x_1+5)(x_2+5)}>0\Longrightarrow f(x_1)>f(x_2)$.

Se sabe que $u_0<u_2$ y supongamos que $u_{2k}<u_{2k+2}$, entonces se tiene $f(u_{2k})>f(u_{2k+1})$, también $f(f(u_{2k}))<f(f(u_{2k+1}))$ y $u_{2k+2}<u_{2k+4}$. Así (u_{2k}) es creciente y (u_{2k+1}) es decreciente, por lo que existe $\lim_{k\to\infty}u_{2k}$ y $\lim_{k\in\mathbb{N}}u_{2k+1}$ por a).

Por otro lado, $|u_{n+1}-u_n|=|\dfrac{4}{5+u_n}-u_n|=|\dfrac{4}{5+u_n}-\dfrac{4}{5+u_{n-1}}|=4|\dfrac{u_{n-1}-u_n}{(5+u_n)(5+u_{n-1})}|\le$ $\frac{4}{5^2}\,|u_{n-1}-u_n|\le\frac{4}{5^2}\,\frac{4}{5^2}\,|u_{n-2}-u_{n-1}|=(\frac{4}{25})^2|u_{n-2}-u_{n-1}|\le(\frac{4}{25})^n|u_1-u_0|\longrightarrow 0$, por lo tanto $|u_{2k+1}-u_{2k}|\longrightarrow 0$, o sea $\lim_{n\to\infty}u_{2k+1}=\lim_{n\to\infty}u_{2k}$. Así el límite $\lim_{n\to\infty}u_n$ existe y satisface la ecuación $\ell=\dfrac{4}{5+\ell}$, es decir $\ell^2+5l-4=0$. Finalmente $\ell=\dfrac{-5\pm\sqrt{25+16}}{2}=\dfrac{-5\pm\sqrt{41}}{2}$ y $\lim_{n\to\infty}u_n=\dfrac{-5+\sqrt{41}}{2}$.

34. Demuestre que toda subsucesión de una sucesión cuyo límite es ℓ, es convergente al mismo límite. ¿Es cierto el recíproco?

    Solución Sea $\lim_{n\to\infty}a_n=\ell$, dado $\epsilon>0$ existe N tal que si $n\ge N\Longrightarrow|a_n-\ell|<\epsilon$.

    Además tenemos que $n_k\ge k$ para todo $k\in\mathbb{N}$. En efecto por inducción sobre k, $n_1\ge 1$ y si $n_k\ge k\Longrightarrow$ $n_{k+1}>n_k\ge k$, es decir $n_{k+1}>k\Longrightarrow n_{k+1}\ge k+1$.

Si $k \geq N \Longrightarrow n_k \geq n_N \geq N \Longrightarrow |a_{n_k} - \ell| < \epsilon$, o sea que $\lim_{n\to\infty} a_{n_k} = \ell$.

El recíproco es falso, pues si $u_n = (-1)^n$ se establece que $u_{2n} \longrightarrow 1$ y $u_{2n+1} \longrightarrow -1$ y $(u_n)_n$ no converge.

35. Demuestre que $(u_n)_n$ es de Cauchy $\Longleftrightarrow$ $\forall \epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$ y todo $p \in \mathbb{N}$, $|u_{n+p} - u_n| \leq \epsilon$.

Solución

a) Sea $(u_n)_n$ de Cauchy, sea $\epsilon > 0$, $\exists\, N$ tal que si n y $m \geq N \Longrightarrow |u_n - u_m| \leq \epsilon$. Sea $p \in \mathbb{N}$ entonces si n y $n + p \geq N \Longrightarrow |u_{n+p} - u_n| \leq \epsilon$.

b) Supongamos que $(u_n)_n$ cumple la condición y sean n y $m \geq N$, si $n \geq m$, $n = m + p$ para algún $p \in \mathbb{N}$ y $|u_{m+p} - u_m| = |u_n - u_m| \leq \epsilon$.

36. Considere la sucesión $\dfrac{a^n}{n!}$, $a > 0$. Demuestre que si $(u_n)_n$ es una sucesión que cumple $u_{n+1} = u_n \dfrac{a}{n+1}$, entonces $(u_n)_n$ es decreciente a partir de un cierto índice. Concluya que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$.

Solución Definamos $u_1 = a$, entonces $u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{a}{n+1} < 1$ a partir de $n \geq [\![a]\!] + 2$ y $u_{n+1} < u_n$. Así, existe $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$ y se tiene $\lim_{n\to\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to\infty} u_n \lim_{n\to\infty} \dfrac{a}{n+1}$, es decir $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Ahora, como $u_n = \dfrac{a^n}{n!}$ satisface la hipótesis, implica que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$.

37. Sea $a_1 = -\frac{3}{2}$, $3a_{n+1} = 2 + a_n^2$, demuestre que $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

Solución Veamos que $a_2 = \dfrac{2 + (-\frac{3}{2})^2}{3} = \dfrac{2 + \frac{9}{4}}{3} = \frac{17}{12}$; $a_3 = \dfrac{2 + (\frac{17}{12})^2}{3} = \frac{572}{432}$.

Si tomamos la diferencia $a_{n+1} - a_n = \dfrac{2 + a_n^2}{3} - a_n = \dfrac{a_n^2 - 3a_n + 2}{3} = \dfrac{(a_n - 2)(a_n - 1)}{3}$. Verifiquemos que para $n \geq 2$, $1 \leq a_n \leq 2$. En efecto $1 \leq a_2 \leq 2$ y supongamos que $1 \leq a_n \leq 2 \Longrightarrow 1 \leq a_n^2 \leq 4$ y $3 \leq a_n^2 + 2 \leq 6 \Longrightarrow 1 \leq \dfrac{a_n^2 + 2}{3} = a_{n+1} \leq 2$. Así, $a_{n+1} - a_n \leq 0 \Longrightarrow a_{n+1} \leq a_n$ y la sucesión es decreciente y acotada inferiormente por 1, i.e. converge. Sea $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$, entonces ℓ satisface la ecuación $3\ell = 2 + \ell^2$ por lo tanto $\ell = 1$ o 2 y $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

Otra solución Si $f(x) = \dfrac{2 + x^2}{3}$ tenemos que $f(x) - f(x_1) = \dfrac{(x + x_1)(x - x_1)}{3}$ y se concluye que f es creciente para $x \geq x_1 \geq 0$. Como $a_3 \leq a_2$ se tiene que $(a_n)_n$ es decreciente. Es fácil ver que la sucesión está acotada inferiormente, puesto que todos los términos son positivos a partir de $n \geq 2$.

38. Sea $u_0 = \sqrt{2}$, $u_1 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$, $u_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$. Demuestre que dicha sucesión es convergente y calcule su límite.

Solución Dado que $u_n = \sqrt{2 + u_{n-1}}$, entonces $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\sqrt{u_n + 2}}{u_n} = \sqrt{\dfrac{u_n + 2}{u_n^2}}$. Veamos que $\dfrac{u_n + 2}{u_n^2} \geq 1$, es decir $u_n + 2 > u_n^2$ ya que $u_n^2 - u_n - 2 = (u_n - 2)(u_n + 1) \leq 0$ si $-1 < u_n \leq 2$.

Probemos este hecho por inducción. Ya sabemos que $1 < u_1 = \sqrt{2+\sqrt{2}} < \sqrt{2+2} = 2$. Si $1 < u_n \leq 2$ se tiene que $3 < u_n + 2 \leq 4 \Longrightarrow 1 < \sqrt{3} < \sqrt{u_n + 2} = u_{n+1} \leq 2$. Así la sucesión $(u_n)_n$ es creciente y acotada; y por lo tanto convergente a una solución de la ecuación $\ell = \sqrt{\ell + 2}$, o sea $\ell = 1$ o $\ell = 2$. Pero la sucesión es creciente y $1 < u_n \leq 2$, por lo que $\lim_{n\to\infty} u_n = 2$.

39. a) Calcule los siguientes límites $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n},\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$.

b) Sea $(u_n)_n$ una sucesión tal que $u_1 > 1$ y $u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y tal que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, con $\ell > 0$. Demuestre que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$.

c) Demuestre que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{(2n)!}{n!n!}} = 4$ y que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Solución

a) Es claro que $\sqrt[n]{n} = \mathrm{e}^{\frac{\log n}{n}}$ y como $\dfrac{\log n}{n} \longrightarrow 0$ resulta que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Sabemos que $\sqrt[n]{n!} = \mathrm{e}^{u_n}$, con $u_n = \dfrac{1}{n}(\log 1 + \cdots + \log n)$.

Sea $A>0$, como $\log n \longrightarrow \infty$, existe N' tal que si $n>N' \Longrightarrow \log n > 2A$. Reescribamos la sucesión de la siguiente manera: $u_n = \dfrac{\log 1 + \cdots + \log N'}{n} + \dfrac{\log(N'+1) + \cdots + \log n'}{n} \geq \dfrac{\log(N'+1) + \cdots + \log n'}{n} > \dfrac{[n - N' - 1]\,2A}{n}$, pero $\dfrac{n-(N'+1)}{n} \longrightarrow 1$ y existe N'' tal que si $n \geq N'' \Longrightarrow \dfrac{n-(N'+1)}{n} > \frac{1}{2}$, por lo que si $n \geq \max\{N', N''\}$ se cumple que $u_n > A$, o sea $\lim_{n\to\infty} u_n = \infty$ y $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$.

b) Sea $a_n = \log u_{n+1} - \log u_n \longrightarrow \log \ell$, pero dado que $\dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = \dfrac{\log u_{n+1} - \log u_0}{n} \longrightarrow \log \ell$, se tiene $\log \sqrt[n]{u_{n+1}} \longrightarrow \log \ell$ y $\sqrt[n]{u_n} \longrightarrow \ell$.

c) Es una simple aplicación de b), pues:

$$\frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2}\,\frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} \longrightarrow 4 \quad \text{y} \quad \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\,\frac{n^n}{n!} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \longrightarrow \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

40. Sea $u_n = \dfrac{1+2+\cdots+n}{1^3+2^3+\cdots+n^3}$ una sucesión de números reales.

a) Demuestre que $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1+2+\cdots+n)^2$.

b) Calcular u_n en función de n.

c) Calcular $s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ en términos de n y encontrar $\lim_{n\to\infty} s_n$.

Solución

a) Por recurrencia es claro que $1^3 = 1^2$ y si la fórmula es válida para $n\in\mathbb{N}$, entonces $1^3+2^3+\cdots+n^3+(n+1)^3 = (1+2+\cdots+n)^2+(n+1)^3 = \frac{1}{4}\,n^2(n+1)^2+(n+1)^3 = (n+1)^2(\frac{1}{4}\,n^2+n+1) = \frac{1}{4}\,(n+1)^2(n+2)^2$.

b) Por la parte a) $u_n = (1+\cdots+n)^{-1} = \dfrac{2}{n(n+1)}$.

c) Dado que $s_n = \sum_{k=1}^n \dfrac{2}{k(k+1)} = 2\sum_{k=1}^n (\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}) = 2(1 - \dfrac{1}{n+1}) \longrightarrow 2$.

41. Se considera la sucesión $(u_n)_n$ de números reales dados por $u_1 = 1$ y por la relación de recurrencia $(n+1)^3 u_n = (n-1)^3 u_{n-1} + 3n^2 + 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

a) Demuestre que $u_n \geq \frac{1}{2}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ y que $(u_n)_n$ es decreciente.

b) Se define $u_n = t_n + a$, demostrar que existe un valor de la constante a, que da una forma muy simple para la relación de recurrencia entre t_n y t_{n-1}.

c) Calcular $\lim_{n\to\infty} u_n$.

Solución

a) Verifiquemos por inducción que $\frac{1}{2} < u_n \leq 1$ y que $(u_n)_n$ es decreciente.

En efecto $\frac{1}{2} < u_1 = 1 \leq 1$ y si $\frac{1}{2} < u_n \leq 1$, tenemos $\frac{1}{2}(n-1)^3 + 3n^2 + 1 < (n-1)^3 u_n + 3n^2 + 1 \leq (n-1)^3 + 3n^2 + 1$, es decir $\frac{1}{2}(n+1)^3 < (n-1)^3 u_n + 3n^2 + 1 \leq (n+1)^3$, ya que $(n-1)^3 - (n+1)^3 = -6n^2 - 2$. Dividiendo por $(n+1)^3$ se tiene $\frac{1}{2} < u_{n+1} \leq 1$. Por otro lado $u_{n+1} - u_n = \dfrac{n^3 u_n}{(n+2)^3} + \dfrac{3(n+1)^2}{(n+2)^3} + \dfrac{1}{(n+2)^3} - u_n = \dfrac{(n^3-(n+2)^3)u_n + 3(n+1)^2 + 1}{(n+2)^3} = \dfrac{-2(3n^2+6n+4)u_n + 3(n+1)^2 + 1}{(n+2)^3} = \dfrac{(3(n+1)^2+1)(-2u_n+1)}{(n+2)^3} \leq 0.$

b) Desarrolando la expresión $(n+1)^3(t_n + a) = (n-1)^3(t_{n-1} + a) + 3n^2 + 1$ tenemos $(n+1)^3 t_n + (n+1)^3 a = (n-1)^3 t_{n-1} + (n-1)^3 a + 3n^2 + 1$. Determinemos un valor de a tal que $(n+1)^3 a = (n-1)^3 a + 3n^2 + 1$. Recordemos que $(n+1)^3 - (n-1)^3 = 6n^2 + 2$ por lo que $a = \frac{1}{2}$ satisface la condición. Así, dado que $u_n = t_n + a$ resulta que $(n+1)^3 t_n = (n-1)^3 t_{n-1} \Longrightarrow t_n = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^3 t_{n-1}$.

c) Sabemos que $t_n = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^3 \left(\dfrac{n-2}{n}\right)^3 \left(\dfrac{n-3}{n-1}\right)^3 \left(\dfrac{n-4}{n-2}\right)^3 \left(\dfrac{n-5}{n-3}\right)^3 \cdots \left(\dfrac{1}{3}\right)^3 t_1 = \dfrac{8}{(n+1)^3 n^3} t_1$, entonces $u_n - \frac{1}{2} = \dfrac{8}{(n+1)^3 n^3}(u_1 - \frac{1}{2})$ y se tiene $u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\dfrac{8}{(n+1)^3 n^3} \longrightarrow \frac{1}{2}$,

42. Sea $u_{n+1} = \frac{1}{4}(3u_n + v_n + w_n)$, $v_{n+1} = \frac{1}{12}(-u_n + 5v_n + w_n)$, $w_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + v_n + 2w_n)$, con u_0, v_0, w_0 dados. Analice la convergencia de las sucesiones.

Solución Sea $\mathrm{x}_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$, entonces $\mathrm{x}_{n+1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 9 & 3 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix} \mathrm{x}_n = A\mathrm{x}_n$. Diagonalicemos la matriz A, es decir determinemos una matriz T invertible tal que $D = T^{-1}AT$ sea diagonal. Los vectores propios se obtienen considerando el sistema $A\mathrm{x} = \lambda \mathrm{x}$, con $\mathrm{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Así tenemos que $\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 9-12\lambda & 3 & 3 \\ -1 & 5-12\lambda & 1 \\ 4 & 4 & 8-12\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} (3-4\lambda)x + y + z = 0 \\ -x + (5-12\lambda)y + z = 0 \\ x + y + (2-3\lambda)z = 0. \end{cases}$

Resolviendo el sistena tenemos, $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\mathbf{v}_1' = (1,-1,0)$, $\lambda_2 = 1$, $\mathbf{v}_2' = (1,0,1)$, $\lambda_3 = \frac{1}{3}$, $\mathbf{v}_3' = (0,-1,1)$ y $T = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Para calcular T^{-1}, se resuelve el sistema $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} \implies \left\{\begin{aligned} x+y&=x'\\ -x-z&=y'\\ y+z&=z'.\end{aligned}\right.$

Así $T^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$, pero como $A=TDT^{-1}$, $\mathrm{x}_n=A^n\mathrm{x}_0$, es decir $\mathrm{x}_n=TD^nT^{-1}\mathrm{x}_0$ y por lo tanto

$$\mathrm{x}_n=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}(\frac{1}{2})^n+1 & -(\frac{1}{2})^n+1 & -(\frac{1}{2})^n+1\\ -(\frac{1}{2})^n+(\frac{1}{3})^n & (\frac{1}{2})^n+(\frac{1}{3})^n & (\frac{1}{2})^n-(\frac{1}{3})^n\\ 1-(\frac{1}{3})^n & 1-(\frac{1}{3})^n & 1+(\frac{1}{3})^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_0\\v_0\\w_0\end{pmatrix}.$$

$$u_n=\tfrac{1}{2}\left\{[(\tfrac{1}{2})^n+1\,]\,u_0+[\,1-(\tfrac{1}{2})^n\,]\,v_0+[\,1-(\tfrac{1}{2})^n\,]\,w_0\right\}$$

$$v_n=\tfrac{1}{2}\left\{[(\tfrac{1}{3})^n-(\tfrac{1}{2})^n\,]\,u_0+[(\tfrac{1}{2})^n+(\tfrac{1}{3})^n\,]\,v_0+[(\tfrac{1}{2})^n-(\tfrac{1}{3})^n\,]\,w_0\right\}$$

$$w_n=\tfrac{1}{2}\left\{[\,1-(\tfrac{1}{3})^n\,]\,u_0+[\,1-(\tfrac{1}{3})^n\,]\,v_0+[\,1-(\tfrac{1}{3})^n\,]\,w_0\right\},$$

de donde $\lim_{n\to\infty}u_n=\frac{1}{2}(u_0+v_0+w_0)$, $\lim_{n\to\infty}v_n=0$, $\lim_{u_n\to\infty}u_n=\frac{1}{2}(u_0+v_0+w_0)$.

43. Sea $(u_n)_n$ una sucesión de números reales positivos. El objeto del problema es probar la equivalencia siguiente.

$$\text{A) } \lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{\sqrt{n}}=0 \quad\iff\quad \text{B) } \lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{-u_n}\left(1+\frac{u_n}{n}\right)^n=1.$$

a) Sea f la función definida por $f(x)=x-\log(1+x)$ para $x\geq 0$.

i) Hacer el cuadro de variación y el gráfico de f (sin concavidad).

ii) Demuestre que f tiene una función inversa continua en $[\,0,+\infty\,[$.

b) Sea $\alpha>0$, demuestre que la sucesión $(v_n)_n$ está acotada superiormente por un número β estrictamente positivo, donde $v_n=\displaystyle\int_0^\alpha\frac{tdt}{1+t/\sqrt{n}}$.

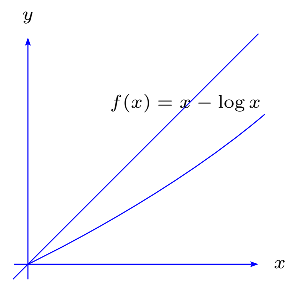
c) Sea $(c_n)_n$ una sucesión de términos positivos y $(d_n)_n$ definida por $d_n=\displaystyle\int_0^{c_n}\frac{tdt}{1+t/\sqrt{n}}$. Demuestre que si $\lim_{n\to\infty}d_n=0\implies\lim_{n\to\infty}c_n=0$.

d) Deduzca que B) $\implies$ A).

e) Demuestre que A) $\implies$ B).

Solución

i) La función $f(x)=x-\log(1+x)$ es tal que $f'(x)=\dfrac{x}{1+x}>0$ si $x>0$, o sea $f(x)$ es estrictamente creciente en $[\,0,+\infty\,[$. Además $f'(x)=0 \iff x=0$.



Cuadro de variación

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	$+$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\nearrow$

ii) La función $f(x)$ es biyectiva en $[\,0,+\infty\,[$ y se tiene que existe la inversa y es continua pues $f'(x)>0$ en $]\,0,+\infty\,[$.

b) Sea $v_n=\displaystyle\int_0^{\alpha}\frac{tdt}{1+t/\sqrt{n}}\le\int_0^{\alpha}tdt=\tfrac12\alpha^2$ y $(v_n)_n$ y es creciente pues $1+t/\sqrt{n+1}\le 1+t/\sqrt{n}\Longrightarrow \dfrac{t}{1+t/\sqrt{n}}\le\dfrac{t}{1+t/\sqrt{n+1}}\Longrightarrow v_n\le v_{n+1}$. Por consiguiente la sucesión $(v_n)_n$ converge.

Por otro lado tenemos que $v_n=\displaystyle\int_0^{\alpha}\frac{tdt}{1+t/\sqrt{n}}=n\int_0^{\alpha/\sqrt{n}}\frac{udu}{1+u}=n(\frac{\alpha}{\sqrt{n}}-\log(1+\frac{\alpha}{\sqrt{n}}))=n(\frac{\alpha}{\sqrt{n}}-(\frac{\alpha}{\sqrt{n}}-\frac{\alpha^2}{2n}+o(\frac{1}{n})))=\tfrac12\alpha^2+o(1)$, pues $\dfrac{\alpha}{\sqrt{n}}\longrightarrow 0$.

c) Sea $d_n=\displaystyle\int_0^{c_n}\frac{tdt}{1+t/\sqrt{n}}=n(\frac{c_n}{\sqrt{n}}-\log(1+\frac{c_n}{\sqrt{n}}))\longrightarrow 0$, entonces $f(\dfrac{c_n}{\sqrt{n}})=\dfrac{c_n}{\sqrt{n}}-\log(1+\dfrac{c_n}{\sqrt{n}})\longrightarrow 0$ y $f^{-1}(f(\dfrac{c_n}{\sqrt{n}}))=\dfrac{c_n}{\sqrt{n}}\longrightarrow 0$, ya que f^{-1} es continua.

Dado que $\dfrac{c_n}{\sqrt{n}}\longrightarrow 0$, $d_n=n(\dfrac{c_n}{\sqrt{n}}-(\dfrac{c_n}{\sqrt{n}}-\dfrac{c_n^2}{n}+o(\dfrac{c_n^2}{n}))=c_n^2+n\,o(\dfrac{c_n^2}{n})\sim c_n^2\longrightarrow 0$ y $c_n\longrightarrow 0$.

d) Si $e^{-u_n}\left(1+\frac{u_n}{n}\right)^n\longrightarrow 1$, tenemos que $-u_n+n\log\left(1+\frac{u_n}{n}\right)=\displaystyle\int_0^{\frac{u_n}{\sqrt{n}}}\frac{tdt}{1+t/\sqrt{n}}\longrightarrow 0$, y por c) $\dfrac{u_n}{\sqrt{n}}\longrightarrow 0$.

e) Si $\dfrac{u_n}{\sqrt{n}}\longrightarrow 0$, la integral $\displaystyle\int_0^{\frac{u_n}{\sqrt{n}}}\frac{tdt}{1+t/\sqrt{n}}=n\int_0^{\frac{u_n}{n}}\frac{udu}{1+u}=n(\frac{u_n}{n}-\log(1+\frac{u_n}{n}))=u_n-n\log(1+\frac{u_n}{n})\le\int_0^{\frac{u_n}{\sqrt{n}}}tdt=\frac12\frac{u_n^2}{n}\longrightarrow 0$, con lo cual se tiene $-u_n+n\log(1+\frac{u_n}{n})\longrightarrow 0$ y $e^{-u_n}\left(1+\frac{u_n}{n}\right)^n\longrightarrow 1$.

44. Calcular el límite de la sucesión definida por su término general:

a) $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k^2}{8k^3+n^3}$

b) $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k^p}{n^{p+1}},\ p>0$

c) $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$

d) $\dfrac1n\sum_{k=1}^{n-1}\cos^2\dfrac{k\pi}{n}$

e) $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}$

f) $n\sum_{k=1}^{n}\dfrac{e^{-n/k}}{k^2}$

Solución

a) $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k^2}{8k^3+n^3}$

Factorizando n^3 se establece que $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \dfrac{(k/n)^2}{1+8(k/n)^3} \longrightarrow \int_0^1 \dfrac{x^2}{1+8x^3}dx = \frac{1}{24}\int_1^9 \dfrac{1}{u}du = \frac{1}{12}\ln 3$.

b) $\sum_{k=1}^n \dfrac{k^p}{n^{p+1}}$, $p>0$

La expresión se escribe $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \big(\frac{k}{n}\big)^p \longrightarrow \int_0^1 x^p dx = \dfrac{1}{p+1}x^{p+1}\big|_0^1 = \dfrac{1}{p+1}$, si $p>-1$ y diverge si $p<-1$. En $p=-1$ se tiene que $\sum_{k=1}^n \dfrac{1}{k}$ diverge.

c) $\sum_{k=1}^n \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$

Factorizando n^2 en la expresión, se tiene $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \dfrac{1}{\sqrt{1+2k/n}} \longrightarrow \int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{1+2x}} = \sqrt{1+2x}\big|_0^1 = \sqrt{3}-1$.

d) $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\cos^2\dfrac{k\pi}{n}$

Por definición de integral de Riemann, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\cos^2\dfrac{k\pi}{n} \longrightarrow \dfrac{1}{\pi}\int_0^1 \cos^2\pi x\, dx =$ $\dfrac{1}{\pi}\int_0^1 \dfrac{1+2\cos 2\pi x}{2}\pi dx = \dfrac{1}{\pi}(\frac{1}{2}\pi x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\pi x)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$.

e) $\sum_{k=1}^n \dfrac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}$

Factorizando $4n^2$, $\sum_{k=1}^n \dfrac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}} = \dfrac{1}{2n}\sum_{k=1}^n \dfrac{1}{\sqrt{1-\big(\frac{k}{2n}\big)^2}} \longrightarrow \dfrac{1}{2}\int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{1-\big(\frac{x}{2}\big)^2}} = \operatorname{arcsen}\dfrac{x}{2}\Big|_0^1 =$ $\operatorname{arcsen}\frac{1}{2} = \frac{1}{6}\pi$.

f) $n\sum_{k=1}^n \dfrac{e^{-n/k}}{k^2}$

Multiplicando por $\dfrac{n^2}{n^2}$ se tiene $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \dfrac{e^{-n/k}}{(k/n)^2} \longrightarrow \int_0^1 \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} = -\int_\infty^1 e^{-u}du = \int_1^\infty e^{-u}du =$ $-e^{-u}\big|_0^1 = e^{-1}$.

45. Calcular el límite de la sucesión definida por su término general:

a) $\sum_{k=n}^{2n} \dfrac{k+1}{kn+n^2}$

b) $\Big(\dfrac{(2n)!}{n!n^n}\Big)^{1/n}$

c) $\prod_{k=1}^n \Big(1+\dfrac{k^2}{n^2}\Big)^{1/n}$

d) $\sum_{k=n}^{2n-1}\dfrac{1}{2k+1}$

e) $\dfrac{1}{n^{p+1}}\sum_{k=1}^n k^{p-1}(k+1)$, $p>1$

f) $\dfrac{1}{n^{2p+1}}\sum_{k=1}^n k^{p-1}(k+1)^p$, $p>0$

g) $\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n \big[\!\big[\sqrt{k}\big]\!\big]$

h) $\sum_{k=1}^n \dfrac{(n+k)^{-\alpha}}{(n+k+1)^\beta}$, $\alpha>0$, $\beta>0$, $\alpha+\beta=1$

i) $\sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+(-1)^k k^2}}$

j) $\sum_{k=0}^{n-2}\dfrac{\sqrt{k^2-k}}{n^2}$

k) $\sum_{k=1}^n \operatorname{sen}\dfrac{k}{n}\operatorname{sen}\dfrac{k}{n^2}$

l) $\sum_{k=n}^{2n}\operatorname{sen}^2\dfrac{1}{\sqrt{k}}$

m) $\sum_{k=1}^n \dfrac{1}{k}\operatorname{sen}\dfrac{k}{n}$

n) $\dfrac{\sum_{k=1}^n \operatorname{sen}^2\frac{k}{n}}{\sum_{k=1}^n \operatorname{senh}^2\frac{k}{n}}$

o) $\prod_{k=1}^{2n}\left(n^2+k^2\right)^{1/n}$ p) $\prod_{k=n+1}^{2n} k^{1/k}$

Solución

a) $\sum_{k=n}^{2n}\dfrac{k+1}{kn+n^2}$

Factorizando n^2 en el denominador, la expresión se convierte en

$\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n}\dfrac{\frac{k}{n}+\frac{1}{n}}{1+\frac{k}{n}} \longrightarrow \displaystyle\int_1^2\frac{xdx}{1+x} = \int_1^2\left(1-\frac{1}{1+x}\right)dx = x-\ln(1+x)\Big|_1^2 = 1-\ln\tfrac{3}{2}$, dado que el resto $\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n}\dfrac{\frac{1}{n}}{1+\frac{k}{n}} = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n}\dfrac{1}{1+\frac{k}{n}}\right) \sim \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_1^2\frac{dx}{1+x} \longrightarrow 0$. Ver problema 55.

b) $\left(\dfrac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$

Si definimos $A=\left(\dfrac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$, entonces $\ln A = \dfrac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{2n}\ln k-\sum_{k=1}^{n}\ln k-n\ln n\right] = \dfrac{1}{n}\left[\sum_{k=n+1}^{2n}\ln k-n\ln n\right] = \dfrac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}\ln\dfrac{k}{n} \longrightarrow \displaystyle\int_1^2\ln xdx = x\ln x-x\Big|_1^2 = 2\ln 2-1$, o sea $A\longrightarrow \mathrm{e}^{\ln 4-1} = 4\mathrm{e}^{-1}$.

c) $\prod_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{k^2}{n^2}\right)^{1/n}$

Tomando el logaritmo tenemos $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\dfrac{k^2}{n^2}\right)\longrightarrow\displaystyle\int_0^1\ln(1+x^2)dx = x\ln(1+x^2)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{2xdx}{1+x^2} = \ln 2-2+2\arctan x\Big|_0^1 = \ln 2+\tfrac{1}{2}\pi-2$, es decir $\prod_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}\longrightarrow 2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\pi-2}$.

d) $\sum_{k=n}^{2n-1}\dfrac{1}{2k+1}$

Al factorizar n en el denominador se tiene $\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\dfrac{1}{2\frac{k}{n}+\frac{1}{n}} \longrightarrow \displaystyle\int_1^2\frac{dx}{2x} = \tfrac{1}{2}\ln 2 = \ln\sqrt{2}$. Ver problema 55.

e) $\dfrac{1}{n^{p+1}}\sum_{k=1}^{n}k^{p-1}(k+1)$, $p>1$

Distribuyendo n^p en el término general de la sumatoria tenemos: $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{p-1}\left(\frac{k}{n}+\frac{1}{n}\right) \longrightarrow \displaystyle\int_0^1 x^{p-1}xdx = \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1}$. Ver problema 55.

f) $\dfrac{1}{n^{2p+1}}\sum_{k=1}^{n}k^{p-1}(k+1)^p$, $p>0$

Usando la misma técnica que en el ejercicio anterior nos queda: $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p\left(\frac{k}{n}+\frac{1}{n}\right)^p \longrightarrow \displaystyle\int_0^1 x^{2p}dx = \frac{1}{2p+1}$. Ver problema 55.

g) $\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\left[\!\left[\sqrt{k}\right]\!\right]$

Recordemos que $\sqrt{\dfrac{k}{n}} \le \dfrac{\left[\!\left[\sqrt{k}\right]\!\right]}{\sqrt{n}} \le \sqrt{\dfrac{k}{n}}+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, entonces se tiene $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\dfrac{k}{n}} \le \dfrac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\left[\!\left[\sqrt{k}\right]\!\right] \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\dfrac{k}{n}}+n\dfrac{1}{n}\dfrac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\dfrac{k}{n}}+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, por lo tanto: $\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\left[\!\left[\sqrt{k}\right]\!\right] \longrightarrow \displaystyle\int_0^1\sqrt{x}dx =$

$\frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}}\big|_0^1 = \frac{2}{3}$. Ver problema 55.

h) $\sum_{k=1}^{n} (n+k)^{-\alpha}(n+k+1)^{-\beta}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha+\beta = 1$

Multiplicando por $\dfrac{n}{n}$ la expresión tenemos, $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} n^{\alpha+\beta}(n+k)^{-\alpha}(n+k+1)^{-\beta} =$
$\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \big(1+\frac{k}{n}\big)^{-\alpha}\big(1+\frac{k}{n}+\frac{1}{n}\big)^{-\beta} \longrightarrow \displaystyle\int_0^1 (1+x)^{-1}dx = \ln(1+x)\big|_0^1 = \ln 2.$

i) $\sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+(-1)^k k^2}}$

Tomando $n = 2m$ par y desarrollando la sumatoria se tiene $\dfrac{1}{\sqrt{n^2-1^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2-3^2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}+$
$\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+4^2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+(n-2)^2}} = \sum_{k=0}^{\frac{1}{2}n-1} \dfrac{1}{\sqrt{n^2-(2k+1)^2}}+\sum_{k=1}^{\frac{1}{2}n-1} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+(2k)^2}} =$

$\dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{\frac{1}{2}n-1} \dfrac{1}{\sqrt{1-\big(\frac{2k+1}{n}\big)^2}} + \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{\frac{1}{2}n-1} \dfrac{1}{\sqrt{1+\big(\frac{2k}{n}\big)^2}} =$

$\dfrac{1}{2m}\sum_{k=0}^{m-1} \dfrac{1}{\sqrt{1-\big(\frac{k}{m}+\frac{1}{2m}\big)^2}} + \dfrac{1}{2m}\sum_{k=1}^{m-1} \dfrac{1}{\sqrt{1+\big(\frac{k}{m}\big)^2}} \longrightarrow \frac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} =$
$\frac{1}{2}\arctan 1 + \frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})\big|_0^1 = \frac{1}{4}\,\pi + \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2}).$

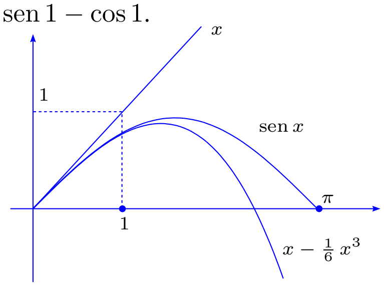
De manera similar, si n es impar se llega a la misma conclusión.

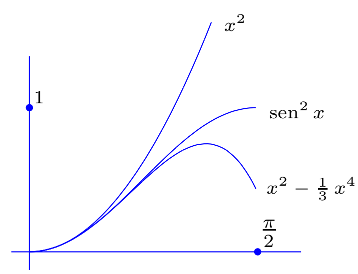
j) $\sum_{k=0}^{n-2} \dfrac{\sqrt{k^2-k}}{n^2}$

La suma se transforma en $\dfrac{1}{n}\sum_{k=2}^{n-2} \sqrt{\dfrac{k}{n}}\sqrt{\dfrac{k}{n}-\dfrac{1}{n}} \longrightarrow \displaystyle\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}.$

k) $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}\dfrac{k}{n}\operatorname{sen}\dfrac{k}{n^2}$

Recordemos que $0 \le x - \dfrac{1}{6}x^3 \le \operatorname{sen} x \le x$, $\forall x \in [0,1]$, entonces se tiene $0 \le \big(\dfrac{k}{n} - \dfrac{k^3}{6n^6}\big)\operatorname{sen}\dfrac{k}{n} \le$
$\operatorname{sen}\dfrac{k}{n}\operatorname{sen}\dfrac{k}{n^2} \le \dfrac{k}{n^2}\operatorname{sen}\dfrac{k}{n}$, con lo cual obtenemos que $0 \le \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n}\operatorname{sen}\dfrac{k}{n} - \dfrac{1}{6n^3}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k^3}{n^3}\operatorname{sen}\dfrac{k}{n} \le$
$\sum_{k=1}^{n}\operatorname{sen}\dfrac{k}{n}\operatorname{sen}\dfrac{k}{n^2} \le \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n}\operatorname{sen}\dfrac{k}{n}$, pero $\dfrac{1}{6n^3}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k^3}{n^3}\operatorname{sen}\dfrac{k}{n} \sim \dfrac{1}{6n^2}\displaystyle\int_0^1 x^3 \operatorname{sen} x\,dx \longrightarrow 0$
y finalmente concluímos que $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n}\operatorname{sen}\dfrac{k}{n} \longrightarrow \displaystyle\int_0^1 x\operatorname{sen} x\,dx = -x\cos x\big|_0^1 + \int_0^1 \cos x\,dx =$
$\operatorname{sen} 1 - \cos 1$.





l) $\sum_{k=n}^{2n} \operatorname{sen}^2\dfrac{1}{\sqrt{k}}$

Sabemos que $0 \leq x - \frac{1}{6}x^3 \leq \operatorname{sen} x \leq x$, $\forall x \in [0,2]$ y elevando al cuadrado $x^2 - \frac{1}{3}x^4 \leq \operatorname{sen}^2 x \leq x^2$, $\forall x \in [0,2]$. Así, $\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2 - \left(\frac{1}{3\sqrt{k}}\right)^4 \leq \operatorname{sen}^2 \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2$, es decir $\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k/n} - \frac{1}{81}\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=n}^{2n} \operatorname{sen}^2 \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k/n}$. Por otro lado, $\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{(k/n)^2}\right) \sim \frac{1}{n}\int_1^2 \frac{dx}{x^2} \longrightarrow 0$, con lo cual tenemos $\sum_{k=n}^{2n} \operatorname{sen}^2 \frac{1}{\sqrt{k}} \longrightarrow \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2$.

m) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \operatorname{sen} \frac{k}{n}$

Multiplicando por $\frac{n}{n}$ la expresión tenemos, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k} \operatorname{sen} \frac{k}{n} \longrightarrow \int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$.

n) $\dfrac{\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}^2 \frac{k}{n}}{\sum_{k=1}^{n} \operatorname{senh}^2 \frac{k}{n}}$

Multiplicando por $\frac{1}{n}$ el numerador y el denominador, $\dfrac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}^2 \frac{k}{n}}{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \operatorname{senh}^2 \frac{k}{n}} \longrightarrow \dfrac{\int_0^1 \operatorname{sen}^2 x dx}{\int_0^1 \operatorname{senh}^2 x dx} = \dfrac{\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x\big|_0^1}{\operatorname{senh} 2x - \frac{1}{2}x\big|_0^1} = \dfrac{2 - \operatorname{sen} 2}{\operatorname{senh} 2 - 2}$.

o) $\prod_{k=1}^{2n} \left(n^2 + k^2\right)^{1/n}$

Tomando el logaritmo de la expresión y factorizando n^2 se tiene: $\ln \prod_{k=1}^{2n} \left(n^2 + k^2\right)^{1/n} = \frac{2}{n}\ln n + 2\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2n} \ln\left(1 + 4\left(\frac{k}{n}\right)^2\right) \longrightarrow 2\int_0^1 \ln(1+4x^2)dx = x\ln(1+4x^2)\big|_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1+4x^2}dx = 2\ln 5 - 4\int_0^1 dx + \int_0^1 \frac{2dx}{1+(2x)^2} = 2\ln 5 - 4 + 2\arctan 2$, es decir $\prod_{k=1}^{2n} \left(n^2 + k^2\right)^{1/n} \longrightarrow 25\mathrm{e}^{-4+\arctan 2}$.

p) $\prod_{k=n+1}^{2n} k^{1/k}$

Usando el logaritmo se tiene $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}\ln k = \frac{1}{n+1}\ln(n+1) + \frac{1}{n+2}\ln(n+2) + \frac{1}{2n}\ln(2n) = \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\left(\ln(1+\frac{1}{n}) - \ln n\right) + \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{2}{n}}\left(\ln(1+\frac{2}{n}) - \ln n\right) + \cdots + \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\left(\ln(1+\frac{n}{n}) - \ln n\right) = \frac{1}{n}\ln n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$, pero $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \longrightarrow \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x}dx$ que converge y $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \longrightarrow \int_0^1 \frac{1}{x+1}dx = \ln 2 > 0$ y $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}\right)\ln n \longrightarrow +\infty$, o sea $\prod_{k=n+1}^{2n} k^{1/k} \longrightarrow +\infty$.

46. Demostar que $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} \sim 2(\sqrt{2}-1)\sqrt{n}$, cuando $n \to \infty$.

Solución Desarrollando la suma tenemos $\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{n}{n}}}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}} = \sqrt{n}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}$, pero $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}} \sim \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}}dx = 2\sqrt{1+x}\big|_0^1 = 2(\sqrt{2}-1)$, por lo que $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} \sim 2(\sqrt{2}-1)\sqrt{n}$.

47. Determinar la parte principal, cuando $n\to\infty$, de $\sum_{k=1}^n \operatorname{sen}\dfrac{1}{(n+k)^2}$.

Solución Dado que $\forall x\in[0,1]$, $x-\frac{1}{3!}x^3\le \operatorname{sen}x\le x$, entonces $\sum_{k=1}^n\big(\dfrac{1}{(n+k)^2}-\dfrac{1}{6(n+k)^6}\big)\le \sum_{k=1}^n \operatorname{sen}\dfrac{1}{(n+k)^2}\le \sum_{k=1}^n\dfrac{1}{(n+k)^2}$.

La expresión $\sum_{k=1}^n\dfrac{1}{(n+k)^2}=\dfrac{1}{n}\big(\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^n\dfrac{1}{1+\big(\frac{k}{n}\big)^2}\big)\sim\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1\dfrac{dx}{(1+x)^2}=\dfrac{1}{2n}$. Además tenemos, $\sum_{k=1}^n\dfrac{1}{6(n+k)^6}=\dfrac{1}{6n^5}\big(\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^n\dfrac{1}{\big(1+\frac{k}{n}\big)^6}\big)\sim\dfrac{1}{6n^5}\displaystyle\int_0^1\dfrac{dx}{(1+x)^6}=\dfrac{31}{960n^5}$, entonces $2n\sum_{k=1}^n\dfrac{1}{(n+k)^2}-\frac{1}{3}n\sum_{k=1}^n\dfrac{1}{(n+k)^6}\le 2n\sum_{k=1}^n\operatorname{sen}\dfrac{1}{(n+k)^2}\le 1$. Determinemos el límite cuando $n\to\infty$ de la expresión de la izquierda. Se ha determinado que $2n\sum_{k=1}^n\dfrac{1}{(n+k)^2}=1+o(1)$ y que $\frac{1}{3}n\sum_{k=1}^n\dfrac{1}{(n+k)^6}=\dfrac{31}{480n^4}+o\big(\dfrac{1}{n^4}\big)$, por lo que $2n\sum_{k=1}^n\dfrac{1}{(n+k)^2}-\frac{1}{3}n\sum_{k=1}^n\dfrac{1}{(n+k)^6}=1+o(1)$, es decir $\lim_{n\to\infty}2n\sum_{k=1}^n\operatorname{sen}\dfrac{1}{(n+k)^2}=1$ o lo que es equivalente $\sum_{k=1}^n\operatorname{sen}\dfrac{1}{(n+k)^2}\sim\dfrac{1}{2n}$.

48. Demostar que $\sum_{k=1}^n\operatorname{sen}\dfrac{k}{n^2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2n}+o\big(\dfrac{1}{n}\big)$.

Solución Tomemos las desigualdades $x-\frac{1}{3!}x^3\le\operatorname{sen}x\le x$, $\forall x\in[0,1]$, entonces $\dfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n k-\sum_{k=1}^n\dfrac{k^3}{6n^6}\le\sum_{k=1}^n\operatorname{sen}\dfrac{k}{n^2}\le\dfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n k=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2n}$. Así, $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2n}-\dfrac{1}{6n^2}\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^n\big(\dfrac{k}{n}\big)^2\le\sum_{k=1}^n\operatorname{sen}\dfrac{k}{n^2}\le\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2n}$, con $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^n\big(\dfrac{k}{n}\big)^2\longrightarrow\displaystyle\int_0^1x^3dx=\dfrac{1}{4}$, es decir $\sum_{k=1}^n\operatorname{sen}\dfrac{k}{n^2}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2n}=-\dfrac{1}{24n^2}+o\big(\dfrac{1}{n^2}\big)$, o bien $\sum_{k=1}^n\operatorname{sen}\dfrac{k}{n^2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2n}+o\big(\dfrac{1}{n}\big)$.

49. Calcular $\lim_{n\to\infty}\left(\left[\sum_{k=1}^n\cosh\dfrac{1}{\sqrt{n+k}}\right]-n\right)$.

Solución Sabemos que $\cosh x=1+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\dfrac{x^6}{6!}+\cdots$ con lo cual $\cosh x=1+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}\big(1+\dfrac{x^2}{5\cdot6}+\dfrac{x^4}{5\cdot6\cdot7\cdot8}+\cdots\big)\le1+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}\big(1+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\cdots\big)=1+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}\cosh x$. Pero si $|x|<1$ tenemos que $\big|\cosh x-1-\dfrac{x^2}{2!}\big|\le\dfrac{x^4}{4!}\cosh x=\dfrac{x^4}{4!}\cosh1=\dfrac{x^4}{4!}\dfrac{\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1}}{2}\le\dfrac{x^4}{4!}\dfrac{3+1}{2}=\dfrac{x^4}{12}$ ya que $\mathrm{e}<3$ y $\mathrm{e}^{-1}<1$. Además, $-\dfrac{1}{4n}\big(\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^n\dfrac{1}{\big(1+\frac{k}{n}\big)^2}\big)\le\sum_{k=1}^n\cosh\dfrac{1}{\sqrt{n+k}}-n-\dfrac{1}{2n}\sum_{k=1}^n\dfrac{1}{1+\frac{k}{n}}\le\dfrac{1}{4n}\big(\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^n\dfrac{1}{\big(1+\frac{k}{n}\big)^2}\big)$. Ahora notemos que, $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^n\dfrac{1}{\big(1+\frac{k}{n}\big)^2}\longrightarrow\displaystyle\int_0^1\dfrac{dx}{(1+x)^2}=-\dfrac{1}{1+x}\Big|_0^1=\dfrac{1}{2}$, o sea $\dfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n\dfrac{1}{\big(1+\frac{k}{n}\big)^2}=o(1)$ y $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^n\dfrac{1}{1+\frac{k}{n}}\longrightarrow\displaystyle\int_0^1\dfrac{dx}{1+x}=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln2$, es decir $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^n\dfrac{1}{1+\frac{k}{n}}=\ln2+o(1)$. Así se establece que $\sum_{k=1}^n\cosh\dfrac{1}{\sqrt{n+k}}-n=\dfrac{1}{2}\ln2+o(1)$, o bien $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^n\cosh\dfrac{1}{\sqrt{n+k}}-n\right)=\dfrac{1}{2}\ln2$.

50. Para $n\in\mathbb{N}^*$, se denota $P_n=\prod_{k=0}^n\dbinom{n}{k}$. Demostrar que $P_n=\prod_{k=1}^n k^{2k-n-1}$. Estudiar la sucesión de

término general $(P_n)^{1/n^2}$.

Solución Tomando el logaritmo de P_n: $\ln P_n = \sum_{k=1}^n \ln \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n \big(\ln n! - \ln k! - \ln(n-k)!\big) = n\sum_{k=1}^n \ln k - \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^k \ln s - \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^{n-k} \ln s = n\ln 1 + n\ln 2 + \cdots + n\ln(n-1) + n\ln n - (\ln 1) - (\ln 1 + \ln 2) - \cdots - (\ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln(n-2) + \ln(n-1) + \ln n) - (\ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln(n-2) + \ln(n-1)) - (\ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln(n-2)) - \cdots - (\ln 1 + \ln 2) - (\ln 1) = -(2n-n)\ln 1 - (2n-n-2)\ln 2 - (2n-n-4)\ln 3 - \cdots - (4-n)\ln(n-2) - (2-n)\ln(n-1) - (1-n)\ln n = \sum_{k=1}^n (2k-1-n)\ln k$ y $P_n = \prod_{k=1}^n k^{2k-1-n}$. Tomemos $\dfrac{1}{n^2}\ln P_n = \dfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n (2k-1-n)\ln k = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^n \big(2\dfrac{k}{n} - \dfrac{1}{n} - 1\big)\big(\ln\dfrac{k}{n} + \ln n\big) = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^n \big(2\dfrac{k}{n} - \dfrac{1}{n} - 1\big)\ln\dfrac{k}{n} + \dfrac{\ln n}{n^2}\sum_{k=1}^n \big(2k-n-1\big)$. La expresión de la derecha es $\ln n \dfrac{1}{n^2}(2\dfrac{n(n+1)}{2} - n^2 - n) = 0$, pues $\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$, lo que conduce a $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^n \big(2\dfrac{k}{n} - \dfrac{1}{n} - 1\big)\ln\dfrac{k}{n} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^n \big(\dfrac{2k}{n}\big)\ln\dfrac{k}{n} - \dfrac{n+1}{n}\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^n \ln\dfrac{k}{n} \longrightarrow 2\displaystyle\int_0^1 x\ln x dx - \int_0^1 \ln x dx = x^2\ln x\Big|_0^1 - \int_0^1 x dx - x\ln x\Big|_0^1 + \int_0^1 dx = -\tfrac{1}{2} + 1 = \tfrac{1}{2}$, por lo tanto $P_n^{1/n^2} \longrightarrow e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$.

51. Sea $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación continua en $[0,1]$, derivable en 0 y tal que $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$ y sea $p \in \mathbb{N}^*$. Se denota $u_n = \sum_{k=0}^n f\big(\dfrac{1}{n+kp}\big)$, para $n \in \mathbb{N}^*$. Determinar $\lim_{n\to\infty} u_n$.

Solución Si f es derivable en 0, $f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x)$, cuando $x \to 0^+$. Aplicando este resultado se obtiene $f(\dfrac{1}{n+kp}) = f'(0)\dfrac{1}{n+kp} + o(\dfrac{1}{n+kp})$. Como la función es continua, dado $\epsilon > 0$, existe $\eta > 0$ tal que si $0 < x < \eta$ implica $\left|\dfrac{f(x)-f(0)}{x} - f'(0)\right| < \epsilon$. Para todo $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $\dfrac{1}{n} < \eta$ se tiene $\dfrac{1}{n+kp} < \dfrac{1}{n} < \eta$, $\forall k = 1,\ldots,n$ lo que implica $\left|f\big(\dfrac{1}{n+kp}\big) - \dfrac{f'(0)}{n+kp}\right| < \epsilon\dfrac{1}{n+kp}$. Sumando nos queda, $\left|\sum_{k=0}^n f\big(\dfrac{1}{n+kp}\big) - \dfrac{f'(0)}{n}\sum_{k=0}^n \dfrac{1}{1+kp/n}\right| < \epsilon\sum_{k=0}^n \dfrac{1}{1+kp/n}$, con lo cual $\sum_{k=0}^n f\big(\dfrac{1}{n+kp}\big) = f'(0)\dfrac{\ln(1+p)}{p} + o(1)$, es decir $u_n \longrightarrow f'(0)\dfrac{\ln(1+p)}{p}$.

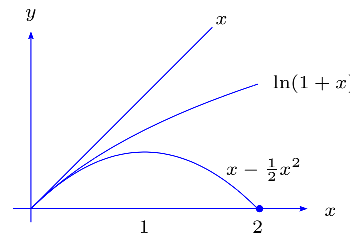
52. Sean α y β números reales tales que $0 < \alpha < \beta$, estudiar la sucesión $u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \dfrac{k^\alpha}{n^\beta}\right)$ y calcular su límite en el caso que haya convergencia.

Solución Utilicemos la desigualdad $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$, $\forall x > 0$, entonces $\dfrac{k^\alpha}{n^\beta} - \dfrac{1}{2}\dfrac{k^{2\alpha}}{n^{2\beta}} \leq \ln\big(1 + \dfrac{k^\alpha}{n^\beta}\big) \leq \dfrac{k^\alpha}{n^\beta}$ y sumando $\dfrac{1}{n^{\beta-\alpha-1}}\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^n \big(\dfrac{k}{n}\big)^\alpha - \dfrac{1}{n^{2(\beta-\alpha-1)}}\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^n \big(\dfrac{k}{n}\big)^{2\alpha} \leq \sum_{k=1}^n \ln\big(1 + \dfrac{k^\alpha}{n^\beta}\big) \leq \dfrac{1}{n^{\beta-\alpha-1}}\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^n \big(\dfrac{k}{n}\big)^\alpha$.

Como $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^n \big(\dfrac{k}{n}\big)^\alpha \longrightarrow \displaystyle\int_0^1 x^\alpha dx = \dfrac{1}{\alpha+1}$ que converge si y sólo si $\alpha > -1$ y $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^n \big(\dfrac{k}{n}\big)^{2\alpha} \longrightarrow \displaystyle\int_0^1 x^{2\alpha} dx = \dfrac{1}{2\alpha+1}$ que converge sii $\alpha > -\frac{1}{2}$. Así que si $\beta - \alpha = 1$, $2\beta - 2\alpha - 1 = \beta - \alpha > 0$, se tiene $\dfrac{1}{n^{\beta-\alpha-1}}\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^n \big(\dfrac{k}{n}\big)^\alpha \longrightarrow 0$ y $u_n \longrightarrow e^{\frac{1}{\alpha+1}} = e^{\frac{1}{\beta}}$.

Si $\beta-\alpha>1$ tenemos que $\beta-\alpha>0$ y $2\beta-2\alpha-1>0$ y $\frac{1}{n^{\beta-\alpha-1}}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha} \longrightarrow 0$ y $\frac{1}{n^{2\beta-2\alpha-1}}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{2\alpha} \longrightarrow 0$, o sea $u_n \longrightarrow \mathrm{e}^0 = 1$.

Si $\beta - \alpha < 1$, $\frac{1}{n^{\beta-\alpha-1}}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha} - \frac{1}{n^{2\beta-2\alpha-1}}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{2\alpha} \longrightarrow \infty$, pues $2\beta-2\alpha-1 = (\beta-\alpha)+(\beta-\alpha-1) > \beta-\alpha-1$ i.e. $n^{2\beta-2\alpha-1} > n^{\beta-\alpha-1}$ o sea $u_n \longrightarrow +\infty$.



53. Sea f una aplicación de clase C^1, estudiar la sucesión $u_n = \sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$. Calcular el límite $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n+3)\cdots(4n-1)}{2n(2n+2)\cdots(4n-3)}$.
Solución Por el teorema del valor medio para una función derivable se tiene $f(x)-f(y)=(x-y)f'(c)$, con c entre x y y, entonces $f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{2n}f'(\zeta_n)$, con $\zeta_n \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k}{n}+\frac{1}{2n}\right]$, lo que lleva a escribir $\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n} f'(\zeta_n) \longrightarrow \frac{1}{2}\int_0^1 f'(t)dt = \frac{1}{2}(f(1)-f(0))$.
Consideremos la función $f(x) = \ln(1+x)$ de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$, es de clase C^1, entonces tomando el logaritmo de la expresión se tiene $\ln\frac{(2n+1)(2n+3)\cdots(4n-1)}{2n(2n+2)\cdots(4n-3)} = \ln\frac{2n+1}{2n} + \ln\frac{2n+3}{2n} + \cdots + \ln\frac{4n+1}{2n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{2}{n}\right) - \cdots - \ln\left(2-\frac{1}{2n}\right) + \ln(4n+1) - \ln 2n$, por lo tanto $\sum_{k=0}^{n-1}\left[\ln\left(1+\frac{k}{2n}\right) - \ln\left(\frac{k}{n}\right)\right] + \ln\frac{4n+1}{2n} \longrightarrow \frac{1}{2}\ln(1+x)\Big|_{x=1} - \frac{1}{2}\ln(1+x)\Big|_{x=0} + \ln 2 = \frac{3}{2}\ln 2$ ya que $\ln\frac{4n+1}{2n} = \ln\left(2+\frac{1}{2n}\right) \longrightarrow \ln 2$.
Finalmente, $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n+3)\cdots(4n-1)}{2n(2n+2)\cdots(4n-3)} = 2^{3/2}$.

54. Sin utlizar la primitiva, calcular $\int_a^b \frac{dx}{x^2}$, para $0<a<b$ y $\int_a^b \mathrm{e}^x dx$, para $a<b$.
Solución Consideremos la suma de Riemann sobre $[a,b]$, entonces se define la partición de $[a,b]$ en n partes de la forma $x_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$, i.e. $x_0 = a$, $x_n = b$, $x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}$, $\forall k = 0,\ldots,n$. Modifiquemos la expresión $\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{x_k^2}$ y consideremos $\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{x_k x_{k+1}} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{a+\frac{k}{n}(b-a)} - \frac{1}{a+\frac{k+1}{n}(b-a)} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+\frac{n+1}{n}(b-a)} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b+\frac{1}{n}(b-a)} \to \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$. Por otro lado observemos que $\frac{1}{x_{k+1}^2} \le \frac{1}{x_k x_{k+1}} \le \frac{1}{x_k^2}$ con lo cual tenemos $\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{x_{k+1}^2} \le \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{x_k x_{k+1}} \le \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{x_k^2} \longrightarrow \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$.
Considerando la suma de Riemann para e^x en $[a,b]$ se establece que $\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{x_k} = \frac{b-a}{n}\mathrm{e}^a\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{\frac{k}{n}(b-a)} = \frac{b-a}{n}\mathrm{e}^a\frac{1-\mathrm{e}^{\frac{n+1}{n}(b-a)}}{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{n}(b-a)}} = \frac{b-a}{n}\mathrm{e}^a\frac{1-\mathrm{e}^{\frac{n+1}{n}(b-a)}}{-\frac{1}{n}(b-a)+o\left(\frac{1}{n}\right)} = \mathrm{e}^a\frac{1-\mathrm{e}^{\frac{n+1}{n}(b-a)}}{-1+o(1)}$
$\longrightarrow -\mathrm{e}^a(1-\mathrm{e}^{b-a}) = \mathrm{e}^b - \mathrm{e}^a$.

55. Sean $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable y $g\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable, con derivada acotada. Demostrar que el

límite $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\big(\frac{k}{n}\big)g\big(\frac{k+1}{n}\big) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$.

Solución En efecto, por hipótesis tenemos que $\left|\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} - g'(x_0)\right| < \epsilon$ y $|g'(x)| < M, \forall x \in [\,0,1\,]$.
Así, $\left|g\big(\frac{k+1}{n}\big) - g\big(\frac{k}{n}\big)\right| = |g'(\zeta_k)|\frac{1}{n} \leq M\frac{1}{n}$, con $\frac{k}{n} < \zeta_k < \frac{k+1}{n}$. De este modo,
$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\big(\frac{k}{n}\big)g\big(\frac{k+1}{n}\big) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\big(\frac{k}{n}\big)g\big(\frac{k}{n}\big)\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|f\big(\frac{k}{n}\big)\right| M\frac{1}{n}$, pero $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|f\big(\frac{k}{n}\big)\right| M\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}M\int_0^1 |f(t)|dt \longrightarrow 0$.
Así, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\big(\frac{k}{n}\big)g\big(\frac{k+1}{n}\big) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\big(\frac{k}{n}\big)g\big(\frac{k}{n}\big) + o(1) \longrightarrow \int_0^1 f(x)g(x)dx$.

56. Sean $a \in\,]\,1,+\infty\,[$ y $f_a\colon\ [\,0,\pi\,] \longrightarrow \mathbb{R}$, con $f_a(x) = \ln(1-2a\cos x + a^2)$, calcular el valor medio (media) de f_a sobre $[\,0,\pi\,]$.

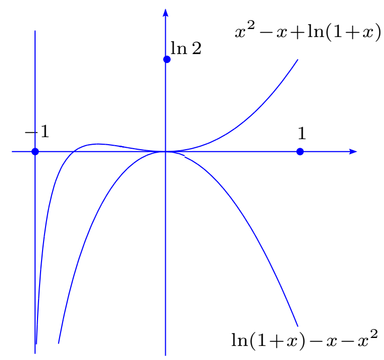
    Solución Tomando la suma de Riemann en el intervalo $[\,0,\pi\,]$ se establece que: $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(1-2a\cos\frac{k\pi}{n}+a^2) = \frac{1}{n}\ln\prod_{k=1}^{n}(a-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}})(a-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}}) = \frac{2}{n}\ln(a^n-1) = \frac{2}{n}\ln a + 2\ln(1-a^{-n}) \longrightarrow 2\ln a$, ya que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}} = \cos\frac{k\pi}{n} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{k\pi}{n}$ y $a^{-n} \longrightarrow 0$. Observe que en la productoria se tienen las raíces complejas de la unidad.

57. Sean $f\colon\ [\,0,1\,] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y $\phi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función convexa. Demostrar que $\phi\Big(\int_0^1 f(t)dt\Big) \leq \int_0^1 \phi\circ f(t)dt$.

    Solución Dado que ϕ es convexa, es continua(integrable) y $\phi\circ f$ es integrable. Además, $\phi(\alpha x+\beta y) \leq \alpha\phi(x)+\beta\phi(y)$ con $\alpha>0$, $\beta>0$, $\alpha+\beta=1$, entonces $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $\phi(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\phi(f(\frac{k}{n}))$. Así tenemos que por ser ϕ continua $\phi(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})) \longrightarrow \phi\Big(\int_0^1 f(t)dt\Big)$ y $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\phi\circ f(\frac{k}{n}) \longrightarrow \int_0^1 \phi\circ f(t)dt$. Finalmente, $\phi\Big(\int_0^1 f(t)dt\Big) \leq \int_0^1 \phi\circ f(t)dt$.

58. Demostrar que $\forall x \in\,]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\,[$, $|\ln(1+x)-x| \leq x^2$. Deducir que si la función $f\colon\ [\,a,b\,] \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable $a<b$, entonces $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\big(1+\frac{b-a}{n}f(a+k\frac{b-a}{n})\big) = \mathrm{e}^{\left(\int_a^b f(x)dx\right)}$.

Solución Sea $g(x) = \ln(1+x) - x - x^2$, entonces si $x \to \infty$ o $x \to -1^+$, $g(x) \longrightarrow -\infty$. Derivando la función $g'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 - 2x = 0 \Longleftrightarrow x(2x+3) = 0$, o sea $x = 0$, $x = -\frac{3}{2}$ y se elimina la solución $x = -\frac{3}{2}$ pues indefine $\ln(1+x)$. Como $g'(x) = -\dfrac{x(2x+3)}{1+x}$, es positiva si $-1 < x < 0$ y negativa si $x > 0$, se tiene que $g(0) = 0$ es un máximo, es decir $\ln(1+x) - x - x^2 \leq 0$, $\forall$x $\in\,]-1, \infty[$ y en particular en $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.



Similarmente $h(x) = x^2 - x + \ln(1+x)$ es tal que $h'(x) = 2x - 1 + \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x(2x+1)}{1+x}$ y $h'(x) = 0$ si $x = -\frac{1}{2}$. Además, $g'(x) > 0$ si $x \in\,]-1, -\frac{1}{2}\,[\cup]\,0, \frac{1}{2}\,[$ y $g'(x) < 0$ si $x \in\,]-\frac{1}{2}, 0\,[$, o sea $h(x) \geq 0$, $\forall x\, [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, es decir $x^2 \geq x - \ln(1+x)$.

En resumen $|\ln(1+x) - x| \leq x^2, \forall x \in\,]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\,[$. Tomando el logaritmo y utilizando la desigualdad que venimos de establecer:

$\left|\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}(b-a)f(a + \frac{k}{n}(b-a))\right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}(b-a)f(a+\frac{k}{n}(b-a))\right| \leq \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{n}(b-a)f(a+\frac{k}{n}(b-a))\right]^2 = \dfrac{b-a}{n}\left[\dfrac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[f(a+\frac{k}{n}(b-a))\right]^2\right] \sim \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\int_a^b f^2(x)dx = o(1)$. Así, $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}(b-a)f(a+\frac{k}{n}(b-a))\right) = \frac{1}{n}(b-a)\sum_{k=1}^{n} f(a+\frac{k}{n}(b-a)) + o(1) \longrightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)dx$ y finalmente $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \dfrac{b-a}{n}f(a+k\dfrac{b-a}{n})\right) \longrightarrow \mathrm{e}^{\left(\int_a^b f(x)dx\right)}$.

59. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a<b$ y sea $f\colon\, [\,a, b\,] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y positiva. Demostrar que $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b \ln\circ f(x)dx \leq \ln\Big(\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx\Big)$. Calcular $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n-1}\displaystyle\int_1^n \left(1+\frac{1}{x}\right)^x dx$.

Solución Sabemos que $\ln x$ es cóncava i.e. $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\ln\left(f(\frac{k}{n})\right) \leq \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})\right)$, con lo cual pasando al límite $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b \ln(f(x))dx \leq \ln\left(\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx\right)$. Es importante destacar la necesidad de que f sea positiva para que tenga sentido $\ln\left(\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx\right)$.

Consideremos ahora $\ln\left(\dfrac{1}{n-1}\displaystyle\int_1^n \left(1+\frac{1}{x}\right)^x dx\right) \geq \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\int_1^n x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)dx = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\int_1^n x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)dx = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\int_1^n x(\ln(1+x) - \ln x)dx = \dfrac{1}{n-1}\left(\frac{1}{2}x^2\ln(1+x) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{4}x^2\right)\Big|_1^n = \dfrac{1}{n-1}\left(\frac{1}{2}n^2\ln\left(\dfrac{1+n}{n}\right) + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}\ln(1+n) - \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\right) \sim \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}n^2\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2} + o(\dfrac{1}{n^2})\right) + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}\ln(1+n)\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}n - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}n + o(1) - \frac{1}{2}\ln(1+n)\right) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{2} + o(\dfrac{1}{n}) - \dfrac{\ln(1+n)}{2n} \longrightarrow 1$.

Por otro lado, $x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \leq 1$, $\forall x \geq 1$, de donde $\mathrm{e}^1 \geq \mathrm{e}^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, por lo tanto

$\dfrac{1}{n-1}\displaystyle\int_1^n \mathrm{e}dx = \mathrm{e} \geq \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\int_1^n \left(1+\frac{1}{x}\right)^x dx$, lo que implica que $1 \geq \ln\left(\dfrac{1}{n-1}\displaystyle\int_1^n \left(1+\frac{1}{x}\right)^x dx\right) \longrightarrow 1$, o sea $\dfrac{1}{n-1}\displaystyle\int_1^n \left(1+\frac{1}{x}\right)^x dx \longrightarrow \mathrm{e}$.

60. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y sea f una aplicación $f\colon\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1.
Determinar $\lim_{n\to\infty} n\left(\displaystyle\int_a^b f(x)dx - \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} f(a+\frac{k}{n}(b-a))\right)$.
Solución Por la definición de la integral de Riemann, sea $x_k = a + \dfrac{k}{n}(b-a)$, entonces:
$n\left(\displaystyle\int_a^b f(x)dx - \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} f(a+\frac{k}{n}(b-a))\right) = n\sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - f(x_k))dx =$
$n\sum_{k=1}^n f'(\zeta_k)\displaystyle\int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - x_k)dx = n\sum_{k=1}^n f'(\zeta_k)\frac{(x_k - x_{k-1})^2}{-2} = n\frac{(b-a)^2}{-2n^2}\sum_{k=1}^n f'(\zeta_k)$, pues la función f' es continua y $f(x) - f(x_k) = f'(\zeta_k)(x - x_k)$, para algún $\zeta_k \in \,]\, x_{k-1}, x_k\, [$.
Así, $-\dfrac{b-a}{2}\dfrac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n f'(\zeta_k) \longrightarrow -\dfrac{b-a}{2}\displaystyle\int_a^b f'(x)dx = -\frac{b-a}{2}(f(b) - f(a))$, pues la integral de Riemann no depende de los puntos escogidos en cada intervalo $[\, x_{k-1}, x_k\,]$ y la función f' es integrable por ser continua.
Finalmente, $n\left(\displaystyle\int_a^b f(x)dx - \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} f\big(a+\frac{k}{n}(b-a)\big)\right) \longrightarrow -\dfrac{b-a}{2}(f(b)-f(a))$.
Observación En este ejercicio se ha establecido que si f es de clase C^1:

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n f\big(a + \frac{k}{n}\,(b-a)\big) = \int_a^b f(x)dx + \frac{a-b}{2}\,(f(b) - f(a))\,\frac{1}{n} + o\big(\frac{1}{n}\big).$$

61. Sea $f\colon\ [\,0,1\,] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[\,0,1\,]$,tal que f' es acotada en $]\,0,1\,[$. Se denota $M = \sup_{t\in]\,0,1\,[}|f'(t)|$, demostrar que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\displaystyle\int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\big(\frac{k}{n}\big)\right| \leq \dfrac{M}{2n}$.
Solución Consideremos la expresión:
$\left|n\Big[\displaystyle\int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\big(\frac{k}{n}\big)\Big]\right| = \left|n\sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \big(f(x) - f\big(\frac{k}{n}\big)\big)dx\right| \leq n\sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} |f'(\zeta_k)|\left|x - \frac{k}{n}\right| dx$
$\leq n\sum_{k=1}^n M\displaystyle\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \big(\frac{k}{n} - x\big)dx = n\sum_{k=1}^n M\frac{1}{2}\big(\frac{1}{n}\big)^2 = \frac{M}{2}$, con $\zeta_k \in \,]\,\dfrac{k-1}{n}, \dfrac{k}{n}\,[$,
es decir se tiene que $\left|\displaystyle\int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\big(\frac{k}{n}\big)\right| \leq \dfrac{M}{2n}$.

62. Sean $f\colon\ [\,0,1\,] \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^3, demostrar que $\dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\big(\frac{k}{n}\big) = \displaystyle\int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{2n}\int_0^1 f'(t)dt + \frac{1}{12n^2}\int_0^1 f''(t)dt + o\big(\frac{1}{n^2}\big)$. Verificar que $\sum_{k=n}^{2n-1}\dfrac{1}{k} = \ln 2 + \dfrac{1}{4n} + \dfrac{1}{16n^2} + o\big(\dfrac{1}{n^2}\big)$.
Solución Haciendo un desarrollo de Taylor de orden 2 en $[\,\dfrac{k-1}{n}, \dfrac{k}{n}\,]$ se tiene:
$\left|f(x) - f\big(\frac{k}{n}\big) - \big(x - \frac{k}{n}\big)f'\big(\frac{k}{n}\big) - \frac{1}{2}\big(x - \frac{k}{n}\big)^2 f''\big(\frac{k}{n}\big)\right| \leq \dfrac{|f'''(\theta_k)|}{3!}\left|x - \frac{k}{n}\right|^3 \leq$
$\dfrac{1}{3!}\sup_{0\leq x\leq 1}|f'''(x)|\sup_{x\in[\,\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\,]}\left|x - \frac{k}{n}\right|^3 = \dfrac{1}{3!n^3}\sup_{0\leq x\leq 1}|f'''(x)|$, con $\theta_k \in \,]\,\dfrac{k-1}{n}, \dfrac{k}{n}\,[$.

Definamos $S_n(f)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\big(\frac{k}{n}\big)$ y $\|f\|=\sup_{0\leq x\leq 1}|f(x)|$, esto nos conduce a que $\sum_{k=0}^{n-1}\displaystyle\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\big(x-\frac{k}{n}\big)f'\big(\frac{k}{n}\big)dx=\frac{1}{2n^2}\sum_{k=0}^{n-1} f'\big(\frac{k}{n}\big)dx=\frac{1}{2n}S_n(f')$, $\sum_{k=0}^{n-1}\displaystyle\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\frac{1}{2}\big(x-\frac{k}{n}\big)^2 f''\big(\frac{k}{n}\big)dx=\frac{1}{6n^3}\sum_{k=0}^{n-1} f''\big(\frac{k}{n}\big)dx$ $=\dfrac{1}{6n^2}S_n(f'')$, con lo cual $\left|\displaystyle\int_0^1 f(x)dx-S_n(f)-\frac{1}{2n}S_n(f')-\frac{1}{6n^2}S_n(f'')\right|\leq\dfrac{\|f'''\|}{6n^3}$, es decir $S_n(f)=$ $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{2n}S_n(f')-\frac{1}{6n^2}S_n(f'')+o\big(\frac{1}{n^2}\big)$.

Similarmente, $S_n(f')=\displaystyle\int_0^1 f'(x)dx-\frac{1}{2n}S_n(f'')+o\big(\frac{1}{n}\big)$, o sea $-\dfrac{1}{2n}S_n(f')=-\dfrac{1}{2n}\displaystyle\int_0^1 f'(x)dx-\frac{1}{4n^2}S_n(f'')+o\big(\frac{1}{n^2}\big)$ y $S_n(f'')=\displaystyle\int_0^1 f''(x)dx+o(1)$ lo que implica $-\dfrac{1}{6n^2}S_n(f'')=$ $-\dfrac{1}{6n^2}\displaystyle\int_0^1 f''(x)dx+o\big(\frac{1}{n^2}\big)$.

En resumen, $S_n(f)=\displaystyle\int_0^1 f(x)dx-\frac{1}{2n}\int_0^1 f'(x)dx-\frac{1}{12n^2}\int_0^1 f''(x)dx+o\big(\frac{1}{n^2}\big)$.

63. Sean $f,g\colon[0,+\infty]\longrightarrow\mathbb{R}$ funciones crecientes, demostrar que:

$$\left(\int_0^x f(t)dt\right)\left(\int_0^x g(t)dt\right)\leq x\int_0^x f(t)g(t)dt,\quad\forall x>0.$$

Solución Sabemos que si $a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n$ y $b_1\leq b_2\leq\cdots\leq b_n$, entonces $(a_i-a_j)(b_i-b_j)=a_ib_i-a_ib_j-a_jb_i+a_jb_j\geq 0$, $\forall i,\forall j$, ya que ambos términos son positivos o negativos. Si sumamos sobre los índices i, se tiene $\sum_{i=1}^n a_ib_i-\Big(\sum_{i=1}^n a_i\Big)b_j-a_j\Big(\sum_{i=1}^n b_i\Big)+na_jb_j\geq 0$, $\forall j$ y si sumamos sobre j tenemos $n\sum_{i=1}^n a_ib_i-\Big(\sum_{i=1}^n a_i\Big)\Big(\sum_{j=1}^n b_j\Big)-\Big(\sum_{j=1}^n a_j\Big)\Big(\sum_{i=1}^n b_i\Big)+n\sum_{j=1}^n a_jb_j\geq 0$, o sea $\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i\Big)\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n b_i\Big)\leq\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_ib_i\Big)$.

Sea $a_k=x\frac{k}{n}$, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(a_k)\longrightarrow\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ y $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n g(a_k)\longrightarrow\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x g(t)dt$, entonces $\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(a_i)\Big)\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n g(b_i)\Big)\leq\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(a_i)g(b_i)\Big)$ y pasando al límite:
$\Big(\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt\Big)\Big(\frac{1}{x}\int_0^x g(t)dt\Big)\leq\frac{1}{x}\int_0^x f(t)g(t)dt$, o bien $\Big(\displaystyle\int_0^x f(t)dt\Big)\Big(\int_0^x g(t)dt\Big)\leq x\int_0^x f(t)g(t)dt$.

64. Calcule los límites de las sucesiones definidas por el término general u_n:

a) $u_n=\dfrac{\operatorname{sen} n}{n}$

Notemos que $|a_n|=\big|\dfrac{\operatorname{sen} n}{n}\big|\leq\dfrac{1}{n}\longrightarrow 0$.

b) $u_n=\dfrac{n!}{n^n}$

Explicitando $u_n=\dfrac{1}{n}\dfrac{2}{n}\dfrac{3}{n}\cdots\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n}{n}\leq\dfrac{1}{n}\longrightarrow 0$.

c) $u_n=[\![(n+\frac{1}{2})^2]\!]\,/\,[\![(n-\frac{1}{2})^2]\!]$.

Sabemos que $(n+\frac{1}{2})^2-1\leq[\![(n+\frac{1}{2})^2]\!]\leq(n+\frac{1}{2})^2$, $\dfrac{1}{(n-\frac{1}{2})^2}\leq\dfrac{1}{[\![(n-\frac{1}{2})^2]\!]}\leq\dfrac{1}{\big(n-\frac{1}{2}\big)^2-1}$, por lo que $\dfrac{(n+\frac{1}{2})^2-1}{(n-\frac{1}{2})^2} \leq u_n \leq \dfrac{(n+\frac{1}{2})^2}{(n-\frac{1}{2})^2-1} \Longrightarrow u_n \longrightarrow 1$.

d) $u_n = \dfrac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}$

Factorizando 3^n se tiene $u_n = \dfrac{1-(\frac{2}{3})^n}{1+(\frac{2}{3})^n} \longrightarrow 1$, pues $(\frac{2}{3})^n \longrightarrow 0$, cuando $n \to \infty$.

e) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

Multiplicando u_n por $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ en el numerador y en el denominador se tiene $u_n = \dfrac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{1}{2\sqrt{n}} + \dfrac{1}{2n} + o(\dfrac{1}{n}) \sim \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \longrightarrow 0$.

f) $u_n = \dfrac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n}$

Factorizando n tenemos $u_n = \dfrac{1-\dfrac{(-1)^n}{n}}{1+\dfrac{(-1)^n}{n}} \longrightarrow 1$.

g) $u_n = \sqrt[n]{n^2}$

Aplicando logaritmos tenemos $\log u_n = \dfrac{1}{n}\log n^2 = \dfrac{2}{n}\log n \longrightarrow 0$, si $n \to \infty$, entonces $u_n \longrightarrow \mathrm{e}^0 = 1$.

h) $u_n = \sqrt[n]{2+(-1)^n}$

Puesto que $\log u_n = \dfrac{1}{n}\log(2+(-1)^n) \leq \dfrac{1}{n} \longrightarrow 0$, entonces $u_n \longrightarrow \mathrm{e}^0 = 1$.

i) $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}\sqrt[n]{\dfrac{(2n)!}{n!}}$, $\alpha > 1$

Escribamos $\log u_n = -\log n^\alpha + \dfrac{1}{n}(\log(2n)! - \log n!) = -\alpha\log n + \dfrac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}\log k \leq -\alpha\log n + \dfrac{1}{n}n\log 2n = \log 2 + (1-\alpha)\log n \longrightarrow -\infty$, entonces $u_n \longrightarrow 0$.

65. Calcule los límites de las sucesiones definidas por el término general u_n:

a) $u_n = \dfrac{1}{n^3}\sum_{k=1}^n k^2$

Consideremos $u_n = \dfrac{1}{n^3}\sum_{k=1}^n k^2 = \dfrac{1}{n^3}\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \dfrac{1}{6}(1+\dfrac{1}{n})(2+\dfrac{1}{n}) \longrightarrow \dfrac{1}{3}$.

b) $u_n = \dfrac{\sum_{k=0}^n (2k+1)}{\sum_{k=1}^n k}$

Utilizando las fórmulas de la suma de los primeros enteros y la fórmula de la suma de los primeros impares tenemos: $u_n = \dfrac{(n+1)^2}{\frac{1}{2}n(n+1)} = 2(1+\dfrac{1}{n}) \longrightarrow 2$.

c) $u_n = \sum_{k=1}^n \dfrac{(2k-1)2k}{n^3}$.

Desarrollando la multiplicación tenemos: $u_n = \dfrac{1}{n^3}\sum_{k=1}^n (4k^2-2k) = \dfrac{2}{n^3}\big(2\dfrac{n(2n+1)}{6} - \dfrac{1}{2}n(n+1)\big) = \dfrac{2}{3}\big(1+\dfrac{1}{n}\big)\big(2+\dfrac{1}{n}\big) - \dfrac{1}{2}\dfrac{n+1}{n^2} \longrightarrow \dfrac{4}{3}$.

d) $u_n = \dfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n [\![kx]\!]$, $x \in \mathbb{R}$

Tomando en cuenta que $kx-1 \leq [\![kx]\!] \leq kx$, tenemos $\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} kx - \frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} kx \Longrightarrow \frac{1}{2}\,(1-\frac{1}{n})x - \frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{2}\,(1+\frac{1}{n})x$, es decir $u_n \longrightarrow \frac{1}{2}\,x$.

e) $u_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}}$

Escribamos $u_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \dfrac{1}{n}\dfrac{1}{\big(1+\frac{k}{n^2}\big)^{\frac{1}{2}}} = \sum_{k=1}^{2n+1} \dfrac{1}{n}\big(1+\dfrac{1}{2}\dfrac{k}{n^2}+o\big(\dfrac{k}{n^2}\big)\big) = \dfrac{1}{n}\big(n+\dfrac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{2n+1} k + \sum_{k=1}^{2n+1} ko\big(\dfrac{1}{n^2}\big)\big) = 1+\dfrac{1}{2n^2}\dfrac{1}{2}(2n+1)(2n+2)+o(1) \longrightarrow 2.$

f) $u_n = \sum_{k=1}^{n^2} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}}$

Por el mismo argumento que en e) $u_n = \sum_{k=1}^{n^2} \dfrac{1}{n}\big(1+\dfrac{1}{2}\dfrac{k}{n^2}+o\big(\dfrac{k}{n^2}\big)\big) = \dfrac{1}{n}\big(n^2+\dfrac{1}{2n^3}\dfrac{1}{2}n^2(n^2+1)^2 + \dfrac{1}{n^3}\dfrac{n^2(n^2+1)}{2}o(1)\big) = n+\dfrac{1}{4}\big(n+\dfrac{1}{n}\big)+o(n) \longrightarrow \infty.$

g) $u_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{(n+k)^2}$

Consideremos $u_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{n^2}\dfrac{1}{\big(1+\frac{k}{n}\big)^2} = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{n^2}\big(1-2\dfrac{k}{n}+o\big(\dfrac{k}{n}\big)\big) = \dfrac{1}{n^2}\big(n-\dfrac{2}{n}n(n+1) + \dfrac{\frac{1}{2}\,n(n+1)}{n^2} - o\big(\dfrac{1}{n^2}\big)\big) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{n+1}{n^2} + o\big(\dfrac{1}{n}\big) \longrightarrow 0.$

h) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n^2+k}$

Factorizando n^2 en la sumatoria tenemos: $u_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\big(1+\frac{k}{n^2}\big)} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\big(1-\dfrac{k}{n^2}+o\big(\dfrac{k}{n^2}\big)\big) = \dfrac{1}{n}\big(n-\dfrac{1}{2}\dfrac{n(n+1)}{n^2}o(1)\big) = 1-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{n}\big(1+\dfrac{1}{n}\big)+o\big(\dfrac{1}{n}\big) \longrightarrow 1.$

i) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n^2-k}}$

Factorizando n^2, $u_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\big(1-\frac{k}{n^2}\big)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\big(1+\dfrac{1}{2}\dfrac{k}{n^2}+o\big(\dfrac{k}{n^2}\big)\big) = \dfrac{1}{n}\big(n+\dfrac{1}{4}\dfrac{n(n+1)}{n^2} + o(1)\big) = 1+\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{n}\big(1+\dfrac{1}{n}\big)+o\big(\dfrac{1}{n}\big) \longrightarrow 1.$

j) $u_n = \sum_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k(k-1)}$

Como $\dfrac{1}{k(k-1)} = \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$, entonces $u_n = \sum_{k=2}^{n}\big(\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{k}\big) = 1-\dfrac{1}{k} \longrightarrow 1.$

k) $u_n = \sum_{k=n}^{2n} \mathrm{e}^{-\sqrt{k}}$

Desarrollando la sumatoria $u_n = \mathrm{e}^{-\sqrt{n}} + \mathrm{e}^{-\sqrt{n+1}} + \cdots + \mathrm{e}^{-\sqrt{2n}} \leq n\mathrm{e}^{-\sqrt{n}} \longrightarrow 0$, pues $\log u_n = \log n - \sqrt{n} \longrightarrow -\infty$, o sea $u_n \longrightarrow 0$.

l) $u_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \cos\dfrac{1}{\sqrt{n+k}}$

Dado que $\cos\dfrac{1}{\sqrt{n+k}} \sim 1+\dfrac{1}{2}\big(\dfrac{1}{\sqrt{n+k}}\big)^2+o\big(\dfrac{1}{n+k}\big) \Longrightarrow u_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\dfrac{1}{\sqrt{n+k}} \sim \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\big(1+$

$\frac{1}{2}\frac{1}{n+k}) = 1 + \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} = 1 + \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}} \sim 1 + \frac{1}{2n} \sim 1.$

66. Determinar $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n} 2^{\frac{k}{2^k}}$.

    Solución Sea $u_n = \prod_{k=1}^{n} 2^{\frac{k}{2^k}}$, entonces $\log u_n = \sum_{k=1}^{n}\log 2^{\frac{k}{2^k}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}\log 2$. Por otro lado, sabemos que $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$, si $|x|<1$ y $\frac{1}{(1-x)^2} = 1+2x+\cdots+nx^{n-1}+\cdots$ y $\frac{x}{(1-x)^2} = x + 2x^2 + \cdots + nx^n + \cdots$, por lo tanto $\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{2}\right)^k \longrightarrow \frac{\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 2$, o sea $u_n \longrightarrow \mathrm{e}^{2\log 2} = 4$.

67. Probar que la sucesión $u_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\binom{n}{k}}$ converge y encontrar el límite.

    Solución Veamos que $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\binom{n}{k}} = \frac{1}{\binom{n}{n}} + \frac{1}{\binom{n}{0}} + \frac{1}{\binom{n}{n-1}} + \frac{1}{\binom{n}{1}} + \sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{\binom{n}{k}} = 2 + \frac{2}{n} + \sum_{k=2}^{n-2}\frac{1}{\binom{n}{k}} = 2 + \frac{2}{n} + o(\frac{1}{n}) \longrightarrow 2$.

68. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión aritmética, $a_n = a_0 + nr$, $r>0$, determinar el límite de $u_n = \frac{1}{a_{2n+2}^4}\sum_{k=0}^{n-1} a_{2k+1}a_{2k+2}a_{2k+3}$.

    Solución Observemos que $a_{2k+1} = (2k+1)r\big(1 + \frac{a_0}{(2k+1)r}\big) \sim 2kr$, entonces $a_{2k+1}a_{2k+2}a_{2k+3}$ $\sim 8k^3r^3$, por lo que $u_n \sim \frac{1}{16r^4n^4}\sum_{k=0}^{n-1} 8k^3r^3 = \frac{r^3}{2r4n^4}\frac{(n-1)^2n^2}{4} = \frac{1}{8r}$ i.e. $u_n \longrightarrow \frac{1}{8r}$.

69. Estudiar la sucesión definida por $u_n = 2\big(2 - \frac{1}{n}\big)\big(2 - \frac{2}{n}\big)\cdots\big(2 - \frac{n-1}{n}\big)$.

    Solución Siendo $u_n = 2\big(1 + \frac{1}{n}\big)\big(1 + \frac{2}{n}\big)\cdots\big(1 + \frac{n-1}{n}\big) \geq 2\big(\frac{n-1}{n} + \frac{n-2}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\big) = \frac{2n(n-1)}{2n} = n - 1 \longrightarrow \infty$.

70. Estudiar la sucesión definida por $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{2\sqrt{n+u_n}}$.

    Solución Pongamos $\sqrt{n+u_n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2}$, por lo tanto: $u_n + n = \frac{1}{4}(n + 1 + n + 2\sqrt{n(n+1)})$, o sea $u_n = \frac{1}{4}(-2n + 1 + 2\sqrt{n(n+1)}) = \frac{1}{4}\big(1 - 2n + 2n\big(1+\frac{1}{n}\big)^{\frac{1}{2}}\big) = \frac{1}{4}\big(1 - 2n + 2n\big(1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o(\frac{1}{n^2})\big)\big) = \frac{1}{4}\big(2 - \frac{1}{4}\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})\big) \longrightarrow \frac{1}{2}$.

71. Probar que si $(u_n)_n$ converge y $(v_n)_n$ diverge entonces $(u_n + v_n)_n$ diverge.

    Solución Supongamos que $(u_n + v_n)_n$ converge, entonces $u_n + (v_n - u_n) = v_n$ converge, lo que es una contradicción. Así, $(u_n + v_n)$ diverge.

72. Sea C el conjunto de sucesiones convergentes, C_0 el conjunto de sucesiones convergentes a 0, K el conjunto de sucesiones constantes. Probar que C_0 y K son subespacios vectoriales de C suplementarios en C.

    Solución Sea $U = (u_n)_n$ una sucesión tal que $u_n \longrightarrow \ell$, entonces $U = (U - \ell) + \ell$, donde ℓ se denota también la sucesión constante ℓ i.e. $\mathsf{C} = \mathsf{C}_0 + \mathsf{K}$.

73. Sea B el conjunto de sucesiones acotadas, S el conjunto de sucesiones estacionarias (i.e. $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $p,\, q \geq N \implies u_p = u_q$), P el conjunto de sucesiones periódicas y K el conjunto de sucesiones constantes.

a) Demostrar que B es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y que S, P y K son subespacios vectoriales.

b) Verificar que $\mathsf{K} \subset \mathsf{S}$, $\mathsf{P} \cap \mathsf{S} = \mathsf{K}$, $\mathsf{P} \not\subset \mathsf{K}$.

Solución

a) Si $u, v \in \mathsf{B}$ existen K_u , K_v tales que $|u_n| \leq K_u$, $|v_n| \leq K_v\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, por lo que $|u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n| \leq K_u + K_v\ \forall\ n \in \mathbb{N}$, o sea $u + v \in \mathsf{B}$. Similarmente $|\lambda u_n| \leq \lambda K_u \implies \lambda u \in \mathsf{B}$. Análogamente se prueba que S y K son subespacios vectoriales de B. Probemos que P es un subespacio vectorial.

En efecto, sea $u \in \mathsf{P}$ de período p, $v \in \mathsf{P}$ de período q, entonces $u + v$ tiene período $\mathrm{mcm}\,(p, q)$. Además λu tiene período p, o sea $\lambda u \in \mathsf{P}$.

b) $\mathsf{K} \subset \mathsf{S}$ es claro pues tiene período 1. $\mathsf{P} \cap \mathsf{S} = \mathsf{K}$ pues si $v \in \mathsf{P}$, $\exists p \in \mathbb{N}$ tal que $v_{n+p} = v_n$ y si $v \in \mathsf{S}$, $\exists N$ tal que $v_N = v_{N+1} = v_{N+2} = \cdots = v_{N+p} \implies v_{N-1} = v_{N+p-1} = v_N = \cdots = v_{N-p} = v_N = \cdots = v_1 = v_2 = v_3 = \cdots = v_N$ i.e. $v \in \mathsf{K}$.

$\mathsf{P} \not\subset \mathsf{K}$ pues la sucesión $(-1)^n$ es periódica y no es constante.

74. Se define en $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ el conjunto de todas las sucesiones reales, una relación R definida por $u\mathsf{R}v \iff \forall n \in \mathbb{N}\ \exists\ p, q \in \mathbb{N}$ tales que $p \geq n$, $q \geq n$, $u_p \geq v_n$, $v_q \geq u_n$.

a) Probar que R es una relación de equivalencia en E.

b) Sea $a \in \mathbb{R}$, ¿cuál es la clase de la sucesión constante a?

Solución

a) i) Reflexiva: $u\mathsf{R}u$ es evidente pues $u_n \geq u_n$.

ii) Simétrica: $u\mathsf{R}v \implies v\mathsf{R}u$ por la definición.

iii) Transitiva: $u\mathsf{R}v$ y $v\mathsf{R}w \implies u\mathsf{R}w$.

Dado $n \in \mathbb{N}$, $\exists p_n,\, q_n \in \mathbb{N}$ tales que $p_n \geq n$, $q_n \geq n$ y $u_{p_n} \geq v_n$, $v_{q_n} \geq u_n$ $\exists p'_n,\, q'_n \in \mathbb{N}$ tales que $p'_n \geq n$, $q'_n \geq n$ y $v_{p'_n} \geq w_n$, $w_{q'_n} \geq v_n$. Así dado p'_n, $\exists p''_n,\, q''_n \in \mathbb{N}$ tales que $p''_n \geq p'_n$, $q''_n \geq p'_n$ y $u_{p''_n} \geq v_{p'_n}$, $v_{q''_n} \geq u_{p'_n} \implies u_{p''_n} \geq w_n$ y dado q_n, $\exists p'''_n,\, q'''_n \in \mathbb{N}$ tal que $p'''_n \geq q_n$, $q'''_n \geq q_n$ y $v_{p'''_n} \geq w_{q_n}$, $w_{q'''_n} \geq v_{q_n} \implies w_{q'''_n} \geq u_n$, o sea $u\mathsf{R}w$.

b) Sea $u\mathsf{R}a$, entonces $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists p \geq n$ de modo que $u_p \geq a$, $a \geq u_n$, o sea $u_p = a$ i.e. son las sucesiones tales que $u_n \leq a$ y existe una infinidad de términos iguales a a.

75. Sea $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de términos en $\mathbb{Z}$, demostrar que $(u_n)_n$ es convergente si y sólo si $(u_n)_n$ es

estacionaria.

Solución

$(\Longrightarrow)$ Sea $(u_n)_n$ tal que $u_n \longrightarrow \ell$, entonces dado $\epsilon = \frac{1}{2}$, $\exists N$ tal que $p, q \geq N \Longrightarrow |u_p - u_q| < \frac{1}{2} \Longrightarrow u_p = u_q, \forall p \geq N, \forall q \geq N$.

$(\Longleftarrow)$ Si $(u_n)_n$ es estacionaria, $\exists N$ tal que si $p, q \geq N \Longrightarrow u_p = u_q$ i.e. $|u_p - u_q| < \epsilon, \forall \epsilon > 0$, o sea $(u_n)_n$ es convergente.

76. Sea $(u_n)_n$ una sucesión tal que $\forall k, n \in \mathbb{N}^*$, $0 \geq u_k \geq \dfrac{k}{n} + \dfrac{1}{k}$. Probar que $u_n \longrightarrow 0$.

Solución Sea $\epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N \Longrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{2}\epsilon$. Sea $n = k^2$, para $n \geq N$ se tiene $0 \leq u_n \leq \dfrac{k}{n} + \dfrac{1}{k} \leq \dfrac{k}{k^2} + \dfrac{1}{k} = \dfrac{2}{k} = \dfrac{2}{\sqrt{n}} < \epsilon$.

77. Sean $(u_n)_n$ y $(v_n)_n$ dos sucesiones de términos positivos tales que existe $N_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $\forall n \geq N_0 \Longrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$

a) Probar que si $v_n \longrightarrow 0$, entonces $u_n \longrightarrow 0$.

b) Probar que si $u_n \longrightarrow \infty$, entonces $v_n \longrightarrow \infty$.

Solución

a) Sabemos que $0 \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \Longrightarrow 0 \leq \frac{u_{n+1}}{u_n}\frac{u_n}{u_{n-1}} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}\frac{v_n}{v_{n-1}}, \ldots, 0 \leq \frac{u_{n+1}}{u_0} \leq \frac{v_{n+1}}{v_0}$ y así, si $v_n \longrightarrow 0$, $u_n \longrightarrow 0$.

b) Similarmente si $u_n \longrightarrow \infty$, $v_n \longrightarrow \infty$.

78. Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de términos positivos tales que $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a ℓ.

a) Demostrar que si $\ell < 1$, entonces $u_n \longrightarrow 0$.

b) Demostrar que si $\ell > 1$, entonces $u_n \longrightarrow \infty$.

Solución

a) Escribamos $\frac{u_{n+1}}{u_N} = \frac{u_{n+1}}{u_n}\frac{u_n}{u_{n-1}} \cdots \frac{u_{N+1}}{u_N} < q^{n-N}$, si $n \geq N$ con N determinado por $q - \ell = \epsilon > 0$ tal que $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell\right| < q - \ell$ con $\ell < q < 1$. Así $u_{n+1} \leq u_N q^{n-N} \longrightarrow 0$, si $n \to \infty$.

b) Sea $\epsilon = \ell - q$ donde $1 < q < \ell$, $\exists N$ tal que si $n \geq N \Longrightarrow -\ell + q \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell \Longrightarrow 1 < q < \frac{u_{n+1}}{u_n} \Longrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_N} = \frac{u_{n+1}}{u_n} \cdots \frac{u_{N+1}}{u_N} > q^{n-N}$, o sea $u_{n+1} \geq u_N q^{n-N} \longrightarrow \infty$, si $n \to \infty$.

79. Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de términos positivos tales que $\sqrt[n]{u_n} \longrightarrow \ell$.

a) Demostrar que si $\ell < 1$, entonces $u_n \longrightarrow 0$.

b) Demostrar que si $\ell > 1$, entonces $u_n \longrightarrow \infty$.

Solución

a) Sea $\epsilon = q - \ell$ con $\ell < q < 1$, entonces $\exists N$ tal que si $n \geq N \Longrightarrow \sqrt[n]{u_n} - \ell < q - \ell \Longrightarrow u_n < q^n \longrightarrow 0$, si $n \to \infty$.

b) Sea $\epsilon = \ell - q$ con $1 < q < \ell$, entonces existe N tal que $q - \ell < \sqrt[n]{u_n} - \ell < \ell - q \Longrightarrow q^n \leq u_n \longrightarrow \infty$, si $n \to \infty$.

80. Sea $(u_n)_n$ una sucesión de términos positivos .

a) Probar que si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow \ell$, entonces $\sqrt[n]{u_n} \longrightarrow \ell$.

b) Probar que el recíproco es falso.

c) Determinar los límites cuando $n \to \infty$ de:

$$\sqrt[n]{\binom{2n}{n}}, \quad \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}, \quad \frac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)\cdots(n+n)}, \quad \frac{1}{n}\sqrt[3]{1{\cdot}3{\cdot}5\cdots(2n-1)}, \quad \frac{1}{n^2}\sqrt[n]{\frac{(3n)!}{n!}}.$$

Solución

a) Sea $\epsilon > 0$, $\exists N$ tal que $n \geq N \Longrightarrow \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \ell\right| < \epsilon \Longrightarrow \ell - \epsilon < \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < \epsilon + \ell$, $\forall n \geq N \Longrightarrow$ $(\ell-\epsilon)^{n-N} < \dfrac{u_{n+1}}{u_n}\dfrac{u_n}{u_{n-1}}\cdots\dfrac{u_{N+1}}{u_N} < (\epsilon+\ell)^{n-N} \Longrightarrow (\ell-\epsilon)^{n-N}u_N < u_{n+1} < (\ell+\epsilon)^{n-N}u_N \Longrightarrow$ $(\ell-\epsilon)^{\frac{n-N}{n+1}}u_N^{\frac{1}{n+1}} \leq u_{n+1}^{\frac{1}{n+1}} \leq (\ell+\epsilon)^{\frac{n-N}{n+1}}u_N^{\frac{1}{n+1}} \Longrightarrow \ell-\epsilon \leq \lim_{n\to\infty} u_n^{\frac{1}{n}} \leq \ell+\epsilon$, o sea $\lim_{n\to\infty} u_n^{\frac{1}{n}} = \ell$.

b) Contraejemplo. Consideremos $u_{2p} = \dfrac{2^p}{3^p}$, $u_{2p+1} = \dfrac{2^{p+1}}{3^p}$, entonces: $\sqrt[2p]{\left(\frac{2}{3}\right)^p} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$, $\sqrt[2p+1]{\dfrac{2^{p+1}}{3^p}} =$ $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{p+1}{2p+1}}3^{\frac{1}{2p+1}} \longrightarrow \sqrt{\dfrac{2}{3}}$, pero $\dfrac{u_{2p+1}}{u_{2p}} = 2 \not\longrightarrow \sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

c) Utilizaremos el hecho que si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow \ell \Longrightarrow \sqrt[n]{u_n} \longrightarrow \ell$.

i) $u_n = \dbinom{2n}{n}$, entonces $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}\dfrac{n!n!}{(2n)!} = \dfrac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} \longrightarrow 4$.

ii) $u_n = \dfrac{n^n}{n!}$, entonces $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\dfrac{n!}{n^n} = \dfrac{1}{n+1}(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow \mathrm{e}$.

iii) $u_n = \dfrac{1}{n^n}n(n+1)\cdots(n+n)$, entonces $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{n+1}\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\dfrac{(2n+1)(2n+2)}{n} \longrightarrow \dfrac{4}{\mathrm{e}}$.

iv) $u_n = \dfrac{1}{n^n}1{\cdot}3{\cdot}5\cdots(2n-1)$, entonces $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(2n+1)n^n}{(1+n)^{n+1}} = \dfrac{2n+1}{n+1}\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \longrightarrow \dfrac{2}{\mathrm{e}}$.

v) $u_n = \dfrac{1}{n^{2n}}\dfrac{(3n)!}{n!}$, entonces tenemos el cociente $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(3n+3)!}{(n+1)^{2n+2}}\dfrac{n!}{(n+1)!}\dfrac{n^{2n}}{(3n)!} =$ $\dfrac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)(n+1)^2}\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}} \longrightarrow \dfrac{27}{\mathrm{e}^2}$.

81. Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión real tal que $u_n \longrightarrow \infty$, demuestre que $\{u_n/n \in \mathbb{N}\}$ admite un elemento más pequeño.

Solución Existe $A > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que si $n \geq N \Longrightarrow u_n \geq A$ y $\{u_n/u_n > A\} \neq \emptyset$. Tomemos $\inf\{u_0, \ldots, u_N\}$.

82. Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente, demuestre que $\{u_n/n \in \mathbb{N}\}$ admite un menor y un mayor elemento.

Solución Supongamos que la sucesión no es constante.

i) Si $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n \leq \ell = \lim_{n\to\infty} u_n$, entonces dado $\epsilon > 0$ consideremos $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $u_{N_1} < \ell$, pues sino $u_n = \ell, \forall n\in\mathbb{N}$. Así $\exists N_2 > N_1$ tal que si $n > N_2 \Longrightarrow |u_n - \ell| < \ell - u_{N_1} \Longrightarrow u_{N_1} - \ell < u_n - \ell < \ell - u_{N_1}$, entonces $u_n > u_{N_1}$.

ii) Similarmente si $u_n \geq \ell, \forall n \in \mathbb{N}$.

iii) Finalmente si $\exists N_3$ y N_4 tales que $u_{N_3} > \ell$, $u_{N_4} < \ell$, con $u_{N_3} - \ell < \ell - u_{N_4}$. Tomemos $\epsilon = u_{N_3} - \ell < \ell - u_{N_4}$, entonces $\exists N_5$ tal que si $n \geq N_5 \Longrightarrow |u_n - \ell| < u_{N_3} - \ell < \ell - u_{N_4} \Longrightarrow u_{N_4} - \ell < u_n - \ell < u_{N_5} - \ell \Longrightarrow u_{N_4} < u_n < u_{N_3}$, si $n \geq N_5$, entonces $H = \{u_n / 0 \leq n \leq \sup\{N_3, N_4, N_5\}\}$ admite un mayor y un menor elemento, pues H es finito.

83. Sea $(u_n)_n$ una sucesión de términos positivos convergiendo a 0. Demuestre que existe un índice $p \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq p \Longrightarrow u_n \leq u_p$.

    Solución Sea $\epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N \Longrightarrow |u_n| < \epsilon$. Sea $H = \{u_n / u_n > \epsilon\}$ es finito y $H \subset \{u_n / n \leq N-1\}$, entonces si $u_{n_0} = \sup H$ se tiene:

    - si $u_n \in H \Longrightarrow u_n \leq u_{n_0}$
    - si $u_n \notin H \Longrightarrow u_n < \epsilon < u_{n_0}$.

84. Dar un ejemplo de una sucesión real $(u_n)_n$ divergente tal que $\forall k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ la sucesión $(u_{kn})_n$ es convergente.

    Solución Tomemos $u_n = 1$ si n es primo $u_n = 0$ si no es primo, entonces $u_{kn} = 0, \forall k > 1$ y $(u_n)_n$ diverge.

85. Sean $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ dos sucesiones convergentes, demostrar que las sucesiones definidas por $u_n = \inf\{x_n, y_n\}$, $v_n = \sup\{x_n, y_n\}$ son convergentes y calcular los límites.

    Solución Observemos que $\inf\{x,y\} = \frac{1}{2}(x + y - |x-y|)$, $\sup\{x,y\} = \frac{1}{2}(x+y+|x-y|)$, entonces

    - $u_n = \frac{1}{2}(x_n + y_n - |x_n - y_n|) \longrightarrow \frac{1}{2}(x+y-|x-y|) = \inf\{x,y\}$
    - $v_n = \frac{1}{2}(x_n + y_n + |x_n - y_n|) \longrightarrow \frac{1}{2}(x+y+|x-y|) = \sup\{x,y\}$.

86. Demostrar que si $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ es inyectiva, entonces $f(n) \longrightarrow \infty$, si $n \longrightarrow \infty$.

    Solución Para $N \in \mathbb{N}^*$, $f^{-1}(\{0,1,\ldots,N\})$ es finito. Sea $A > 0$ y $N = [\![A]\!] + 1$, entonces si $K = \max f^{-1}(\{0,1,\ldots,N\})$ se tiene que si $n > K \Longrightarrow f(n) > N > A$, es decir $\lim_{n\to\infty} f(n) = \infty$.

87. Sean $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ dos sucesiones de números en $[\,0,1\,]$ tales que $\lim_{n\to\infty} u_n v_n = 1$. Demostrar que $u_n \longrightarrow 1$ y $v_n \longrightarrow 1$.

    Solución Siendo $0 \leq u_n \leq 1$, $0 \leq v_n \leq 1 \Longrightarrow 0 \leq u_n v_n \leq v_n \leq 1$, $0 \leq u_n v_n \leq u_n \leq 1$, o sea $u_n \longrightarrow 1$ y $v_n \longrightarrow 1$

88. Sean $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ dos sucesiones de términos positivos convergiendo a cero. ¿Qué se puede decir de $(u_n)_n$ y $(v_n)_n$ definidas por $u_n = \dfrac{a_n^2 + b_n^2}{a_n + b_n}$, $v_n = \dfrac{a_n + b_n^2}{a_n^2 + b_n}$?

Solución Sabemos que $(a_n + b_n)^2 > a_n^2 + b_n^2 \Longrightarrow a_n + b_n > \dfrac{{a_n}^2 + {b_n}^2}{a_n + b_n} = u_n$, pero $a_n \longrightarrow 0$, $b_n \longrightarrow 0$, por lo que $u_n = \dfrac{{a_n}^2 + {b_n}^2}{a_n + b_n} < a_n + b_n \longrightarrow 0$.

En general $v_n \not\longrightarrow 0$: si $a_n = \dfrac{1}{n^2}$, $b_n = \dfrac{1}{n} \Longrightarrow v_n = \dfrac{\dfrac{2}{n^2}}{\dfrac{1}{n^4} + \dfrac{1}{n}} = \dfrac{\dfrac{2}{n}}{1 + \dfrac{1}{n^3}} \longrightarrow 0$.

- Si $a_n = \dfrac{1}{n}$, $b_n = \dfrac{1}{n}$, $v_n = \dfrac{\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}} = 1 \not\longrightarrow 0$.

- Si $a_n = \dfrac{1 + (-1)^n}{n}$, $b_n = \dfrac{1}{n}$, se tiene que la sucesión (v_n) diverge, pues:

$$v_n = \frac{a_n^2 + b_n}{a_n + b_n^2} = \begin{cases} \dfrac{\dfrac{4}{n^2} + \dfrac{1}{n}}{\dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n^2}} = \dfrac{\frac{1}{n}(1 + \frac{4}{n})}{\frac{1}{n}(2 + \frac{1}{n})} \longrightarrow \dfrac{1}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ \dfrac{b_n}{b_n^2} = \dfrac{n^2}{n} = n \longrightarrow \infty & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

89. Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $(u_n^2)_n$, $(u_n^3)_n$ son convergentes, demostrar que $(u_n)_n$ converge.

Solución Supongamos que $u_n^2 \longrightarrow 0$, entonces dado $\epsilon^2 > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N \Longrightarrow u_n^2 < \epsilon^2 \Longrightarrow |u_n| < \epsilon$, es decir $u_n \longrightarrow 0$.

Si $u_n^2 \longrightarrow \ell \neq 0$, ${u_n}^3 \longrightarrow \lambda$, entonces $u_n = \dfrac{u_n^3}{u_n^2} \longrightarrow \dfrac{\lambda}{\ell}$.

Nota: Se puede probar que $\lambda = \ell^{\frac{2}{3}}$.

90. Sea $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ dos sucesiones reales tales que $u_n^2 + u_n v_n + v_n^2 \longrightarrow 0$, demostrar que $u_n \longrightarrow 0$ y $v_n \longrightarrow 0$.

Solución En virtud que $u_n^2 + u_n v_v + v_n^2 = (u_n + \frac{1}{2} v_n)^2 + \frac{3}{4} v_n^2 \longrightarrow 0$ se tiene que $v_n \longrightarrow 0$ y $u_n + \frac{1}{2} v_n \longrightarrow 0$, o sea $u_n \longrightarrow 0$ y $v_n \longrightarrow 0$.

91. Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de términos positivos, $(v_n)_n$ definida por $v_n = \dfrac{u_n}{1 + u_n^2}$ y suponga que $(u_n)_n$ es acotada y que $v_n \longrightarrow 0$. Probar que $u_n \longrightarrow 0$.

Solución Existe $K > 0$ tal que $|u_n| < K$, $\forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow 1 + u_n^2 \leq 1 + K^2$ y $\dfrac{1}{K^2 + 1} < \dfrac{1}{1 + u_n^2} < 1 \Longrightarrow \dfrac{u_n}{K^2 + 1} \leq \dfrac{u_n}{1 + u_n^2} = v_n < u_n$ y si $v_n \longrightarrow 0$, $u_n \longrightarrow 0$.

92. Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión real tal que $\frac{u_{2n} - u_n}{n} \longrightarrow \ell$, ¿se puede afirmar que $u_{n+1} - u_n \longrightarrow \ell$?

Solución No, pues si $u_n = (-1)^n$ entonces $\dfrac{u_{2n} - u_n}{n} = \begin{cases} \dfrac{1 - 1}{n} = 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \dfrac{1 + 1}{n} = \dfrac{2}{n} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$

por lo que $\dfrac{u_{2n}-u_n}{n} \longrightarrow 0$, pero $u_{n+1}-u_n = \begin{cases} -1-1=-2 & \text{si } n \text{ es par} \\ 1-1=0 & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases}$

o sea $u_{n+1}-u_n \not\longrightarrow 0$.

93. Sea $(u_n)_n$ una sucesión real tal que $n(u_{n+1}-u_n) \longrightarrow 1$. Probar que $u_n \longrightarrow +\infty$.

Solución Por hipótesis existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N \Longrightarrow n(u_{n+1}-u_n) \geq \dfrac{1}{2} \Longrightarrow u_{N+1}-u_N > \dfrac{1}{2N}$, $u_{N+2}-u_{N+1} > \dfrac{1}{2(N+1)}, \ldots, u_{n+1}-u_n \geq \dfrac{1}{2n}$, por lo tanto $u_n - u_N > \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{N}+\dfrac{1}{N+1}+\cdots+\dfrac{1}{n}) > \dfrac{1}{2}(\log n - \log N) \longrightarrow +\infty$, si $n \to \infty$.

94. Sea $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ dos sucesiones tales que $u_n^3 - v_n^3 \longrightarrow 0$, $u_n + v_n \longrightarrow 0$. Demostrar que $u_n \longrightarrow 0$, $v_n \longrightarrow 0$.

Solución Sea $a_n = u_n + v_n$, $b_n = u_n - v_n$, entonces $u_n^3 - v_n^3 = b_n(u_n^2 + u_n v_n + v_n^2) = \frac{1}{4}\, b_n\,[(a_n + b_n)^2 + (a_n - b_n)^2 + a_n^2 - b_n^2\,] = \frac{1}{4}\, b_n(3a_n^2 + b_n^2)$.

– Si $u_n - v_n = b_n > 0$ se tiene $0 \leq \frac{1}{4}\, b_n^3 \leq u_n^3 - v_n^3 \longrightarrow 0$, o sea $b_n \longrightarrow 0$.

– Si $u_n - v_n = b_n < 0$, por lo que $\frac{3}{4}\, a_n^2 |b_n| + \frac{1}{4}\,|b_n^3| = |u_n^3 - v_n^3| \Longrightarrow \frac{1}{4}\,|b_n|^3 \leq |u_n - v_n|^3 \longrightarrow 0$, o sea $|b_n| \longrightarrow 0$ i.e. $b_n \longrightarrow 0$.

Además como $a_n \longrightarrow 0$ y $b_n \longrightarrow 0 \Longrightarrow \dfrac{a_n + b_n}{2} = u_n \longrightarrow 0$ y $\dfrac{a_n - b_n}{2} = v_n \longrightarrow 0$.

95. Sea $(u_n)_n$ una sucesión tal que $u_n \longrightarrow 0$.

a) Si $u_{n+1} + u_n \sim \dfrac{2}{n}$, ¿se puede decir que $u_n \sim \dfrac{1}{n}$?

b) Demuestre que si $u_n + u_{2n} \sim \dfrac{3}{2n}$, entonces $u_n \sim \dfrac{1}{n}$.

Solución

a) No, pues si $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\log n} + \dfrac{1}{n}$, entonces $u_{n+1} + u_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{(-1)^n}{\log n} + \dfrac{(-1)^{n+1}}{\log(n+1)} = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n}(1 - \dfrac{1}{n}) + o(\dfrac{1}{n}) + (-1)^n(\dfrac{1}{\log n} - \dfrac{1}{\log n}(1 - \dfrac{1}{n\log n} + o(\dfrac{1}{n\log n})) = \dfrac{2}{n} - \dfrac{1}{n^2} + o(\dfrac{1}{n^2}) + (-1)^n \dfrac{1}{n\log^2 n} + o(\dfrac{1}{n\log^2 n})$, pero $\dfrac{u_n}{\frac{1}{n}} = \dfrac{\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{\log n}}{\frac{1}{n}} = 1 + (-1)^n \dfrac{n}{\log n} \longrightarrow \pm\infty$, o sea $u_n \not\sim \dfrac{1}{n}$ y $\dfrac{u_{n+1}+u_n}{\frac{2}{n}} = 1 - \dfrac{1}{2n} + o(\dfrac{1}{n}) + (-1)^n \dfrac{1}{2\log^2 n} + o(\dfrac{1}{\log^2 n}) \longrightarrow 1$.

b) Sea $v_n = u_n - \dfrac{1}{n} \Longrightarrow u_n = v_n + \dfrac{1}{n} \Longrightarrow v_n + \dfrac{1}{n} + v_{2n} + \dfrac{1}{2n} = v_n + v_{2n} + \dfrac{3}{2n} \sim \dfrac{3}{2n} \Longrightarrow n(v_n + v_{2n}) + \dfrac{3}{2} \sim \dfrac{3}{2}$ i.e. $n(v_n + v_{2n}) \longrightarrow 0$. Dado $\epsilon > 0$, $\exists\, N$ tal que si $n > N \Longrightarrow n(v_n + v_{2n}) < \epsilon$. Sea n fijo, $n > N$ y tomemos $p \geq 1$, entonces: $|v_n + (-1)^p v_{2^{p+1}n}| = |v_n + v_{2n} - (v_{2n} + v_{4n}) + \cdots + (-1)^p(v_{2^p n} + v_{2^{p+1}n})| \leq \frac{\epsilon}{n} + \frac{\epsilon}{2n} + \cdots + \frac{\epsilon}{2^p n} = \frac{\epsilon}{n}(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{2^p}) < \frac{2\epsilon}{n}$, $\forall p \geq 1$, $\forall \epsilon$, lo que implica que $v_{2^p n} \longrightarrow 0$, si $p \to \infty$, o sea $v_n \longrightarrow 0$, si $n \to \infty$, es decir $u_n \sim \dfrac{1}{n}$.

96. Sean $(u_n)_n$ una sucesión de términos positivos, $v_n = \dfrac{1}{n}(u_1 + \cdots + u_n)$, $w_n = \dfrac{1}{n}(\dfrac{1}{u_1} + \cdots + \dfrac{1}{u_n})$. Se supone que $(v_n)_n$, $(u_n)_n$ tienen límites v, w; probar que $vw \geq 1$.

Solución Multiplicando $v_n w_n = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^n u_i \frac{1}{u_j} = \frac{1}{n^2}\big(n + \sum_{1\le i<j\le n}(\frac{1}{u_i}u_j + u_i\frac{1}{u_j})\big) \ge \frac{1}{n^2}\big(2\frac{n(n+1)}{2} + n\big) = \frac{1}{n^2}(n^2+2n) = 1+\frac{2}{n} \ge 1, \forall n\in\mathbb{N}$, pues si $a>0, b>0$ $\frac{1}{a}b + a\frac{1}{b} = \frac{a^2+b^2}{ab} \ge 2$.

97. Sean p y q enteros ≥ 2, estudiar la sucesión definida por $u_1 = a > 0$, $u_{n+1} = \sqrt[p]{a\sqrt[q]{au_n}}$.

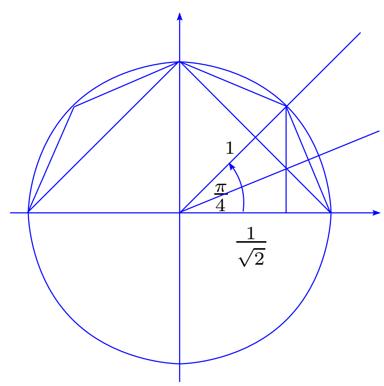
Solución Puesto que $u_{n+1} = a^{\frac{1}{p}}(au_n)^{\frac{1}{pq}} = a^{\frac{1}{p}+\frac{1}{pq}}u_n^{\frac{1}{pq}}$, tenemos $\log u_{n+1} = (\frac{1}{p} + \frac{1}{pq})\log a + \frac{1}{pq}\log u_n$. Así, $v_{n+1} = \alpha + r v_n$, con $\alpha = (\frac{1}{p}+\frac{1}{pq})\log a$, $r = \frac{1}{pq}$, $v_n = \log u_n$ y tenemos que $r_n = \alpha + r(\alpha + r v_{n-2}) = \alpha + r\alpha + r^2 v_{n-2} = \cdots = \alpha + \alpha r + \alpha r^2 + \cdots + \alpha r^{n-2} + r^{n-1}v_1 = \alpha\frac{1-r^{n-1}}{1-r} + r^{n-1}v_1 \longrightarrow \alpha\frac{1}{1-r}$, pues $r = \frac{1}{pq} < 1$ y nos queda $u_n \longrightarrow e^{\alpha\frac{1}{1-r}} = a^{\frac{q+1}{pq}\frac{pq}{pq-1}} = a^{\frac{q+1}{pq-1}}$.

98. a) Demostrar que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\cos\frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}, \quad \operatorname{sen}\frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}.$$

b) Deducir que $\pi = \lim_{n\to\infty} 2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}$, donde cada expresión tiene n radicales.

Solución Se observa que la fórmula que aparece aquí es la fórmula de aproximación de la longitud de la semi-circunferencia de círculo de radio 1, por un polígono regular de 2^n lados.



a) Se tiene que $\cos\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{2^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Utilizando la fórmula de la mitad del ángulo $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$, $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$, se tiene:

$\operatorname{sen}\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2\cdot 2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2\cdot 2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

En general, usando inducción probemos que $n \Longrightarrow n+1$. En efecto:

$\cos\frac{\pi}{2^{n+1}} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{2^n}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}$,

$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2^{n+1}} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{2^n}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}$.

b) Notemos que $2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}} = 2\cdot 2^n \operatorname{sen}\frac{\pi}{2^{n+1}} \sim 2^{n+1}\frac{\pi}{2^{n+1}} = \pi$, o sea que $\lim_{n\to\infty} 2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}} = \pi$.

99. Para $a \in \mathbb{R}$, estudiar la sucesión $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{k\frac{a}{n}}$.

Solución Notemos que $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{a\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n}) \longrightarrow \displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \mathrm{e}^{ax}dx =$ $\begin{cases} \frac{1}{a}(\mathrm{e}^a - 1) & \text{si } a \neq 0 \\ 1 & \text{si } a = 0. \end{cases}$

100. Sea k, $u_0 \in \mathbb{R}$, $(u_n)_n$ una sucesión definida por $u_{n+1} = ku_n^2$.

a) Encuentre una condición necesaria y suficiente sobre (k, u_0), para que $(u_n)_n$ sea convergente.

b) En este caso, estudiar la sucesión definida por $v_n = \sum_{k=1}^{n} |u_k|$.

Solución

a) Analicemos la fórmula $u_n = ku_{n-1}^2 = k^3u_{n-2}^4 = k^7u_{n-3}^8 = \cdots = k^{2^n-1}u_0^{2^n} = k^{-1}(ku_0)^{2n}$ i.e. $(u_n)_n$ converge $\Longleftrightarrow ku_0 \leq 1$.

b) En virtud que $v_n = \sum_{s=1}^{n} |u_s| = \frac{1}{k}\sum_{s=1}^{n} |ku_0|^{2^s} \leq \frac{1}{k}\sum_{s=1}^{n} |ku_0|^s \leq \frac{1}{k}(\frac{1}{1-ku_0} - 1) = \frac{u_0}{1-ku_0}$ i.e. $(v_n)_n$ converge si $|ku_0| < 1$. Si $|ku_0| = 1$, se tiene $v_n = \frac{1}{k}n \longrightarrow +\infty$.

101. Sea $0<\alpha<1$, u_0, $u_1 \in \mathbb{R}$ tales que $0<u_0<u_1$, estudiar la sucesión definida por $u_{n+1} = u_n + \alpha^n u_{n-1}$.

Solución Aplicando la fórmula se tiene $u_2 = u_1+\alpha u_0$, $u_3 = (1+\alpha^2)u_1+\alpha u_0$, $u_4 = (1+\alpha^2+\alpha^3)u_1+(\alpha+\alpha^4)$ lo que sugiere que $(u_n)_n \uparrow$. En efecto, $u_{n+1}-u_n = \alpha^n u_{n-1} \geq 0$ y así $0<u_0<u_1<u_2<\cdots<u_n$. Además es acotada superiormente pues: $u_{n+1} = u_n + \alpha^n u_{n-1} < u_n + \alpha^n u_n = (1+\alpha^n)u_n < (1+\alpha^n)(1+\alpha^{n-1})\cdots(1+\alpha)u_1$ y como $\log(1+x) < x$ se tiene $u_{n+1} \leq \mathrm{e}^{\log(1+\alpha^n)+\cdots+\log(1+\alpha)} \leq \mathrm{e}^{\alpha^n+\alpha^{n-1}+\cdots+\alpha} \leq \mathrm{e}^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$, por lo tanto $(u_n)_n$ converge.

102. Para $\alpha > 0$, estudiar la sucesión definida por $u_n = \dfrac{((n+1)!)^\alpha}{\prod_{k=1}^{n}(1+k^\alpha)}$.

Solución Puesto que $0 \leq u_n = \dfrac{((n-1)!)^\alpha}{\prod_{k=1}^{n}(1+k^\alpha)} \leq \dfrac{((n-1)!)^\alpha}{\prod_{k=1}^{n}k^\alpha} = \dfrac{1}{n^\alpha} \longrightarrow 0$, si $n \to \infty$.

103. Sea $p \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, $x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{R}_+^*$, demostrar que $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{p}\alpha_k x_k^n\right)^{\frac{1}{n}} = \max_{1\leq k\leq n} x_k$, $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{p}\alpha_k x_k^{-n}\right)^{-\frac{1}{n}} = \min_{1\leq k\leq n} x_k$.

Solución Sabemos que $\exists\, k_0 \in \{1, \ldots, p\}$, con $x_{k_0} = \max_{1\leq k\leq n} x_k$, entonces:
$\alpha_{k_0}^{\frac{1}{n}} x_{k_0} \leq \left(\sum_{k=1}^{p}\alpha_k x_k^n\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\sum_{k=1}^{p}\alpha_k\right)^{\frac{1}{n}} x_{k_0} \Longrightarrow x_{k_0} \leq \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{p}\alpha_k x_k^n\right)^{\frac{1}{n}} \leq x_{k_0}$.
Similarmente $\exists\, k_1 \in \{1, \ldots, p\}$ tal que $x_{k_1} = \min_{1\leq k\leq n} x_k$, entonces vamos a tener que $\alpha_{k_1}^{\frac{1}{n}} x_{k_1}^{-1} \leq \left(\sum_{k=1}^{p}\alpha_k x_k^{-n}\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\sum_{k=1}^{p}\alpha_k\right)^{\frac{1}{n}} x_{k_1}^{-1} \Longrightarrow x_{k_1}^{-1} \leq \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{p}\alpha_k x_k^{-n}\right)^{\frac{1}{n}} \leq x_{k_1}^{-1}$, o sea $x_{k_1} = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{p}\alpha_k x_k^{-n}\right)^{-\frac{1}{n}}$.

104. Demostrar que la sucesión $(\tan n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Solución Sabemos que $n \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, entonces $\tan(n+1) = \dfrac{\tan n + \tan 1}{1 - \tan n \tan 1}$. Si suponemos que $\tan n \longrightarrow \ell$, entonces $\ell = \dfrac{\ell + \tan 1}{1 - \ell\tan 1} \Longrightarrow \ell - a\ell^2 = \ell + a \Longrightarrow a(\ell^2+1) = 0$, $a = \tan 1 \Longrightarrow \ell^2 = -1$

que imposible. Así la única posibilidad es que $(\tan n)_n$ diverge.

105. Demuestre que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ la ecuación $x^n + x - 1 = 0$ admite una única solución denotada x_n y establecer que $x_n \longrightarrow 1$.

Solución Sea $f(x) = x^n + x - 1$, entonces $f'(x) = nx^{n-1} + 1 > 0$ si $x > 0$, por lo tanto f es biyectiva de $[\,0, +\infty\,[$ en $[\,-1, +\infty\,[$ y $\exists! x_n$ tal que $f(x_n) = 0$. Probemos que $x_n \longrightarrow 1$. En efecto, veamos que $(x_n)_n$ es creciente y que $0 \leq x_n \leq 1$ ya que $-1 = f(0) < f(x_n) = 0 < f(1) = 1$ y como $x^{n+1} + x - 1 \leq x^n + x - 1$ en $[\,0, 1\,]$ se tiene $x_n^{n+1} + x_n - 1 \leq x_n^n + x_n - 1 = 0 = x_{n+1}^{n+1} + x_{n+1} - 1 \Longrightarrow x_n \leq x_{n+1} \leq 1$. Así $(x_n)_n$ converge a un valor $\ell \leq 1$. Si $\ell < 1$ se tiene $x_n^n + x_n - 1 = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n^n + x_n - 1 = 0 + \ell - 1 = 0$, es decir $\ell = 1$ que es contradictorio. La única posibilidad es que $\ell = 1$.

106. Sea $u_n = \sqrt{n + \sqrt{n - 1 + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}$ para $n \in \mathbb{N}^*$, demostrar que $u_n - \sqrt{n} \longrightarrow \frac{1}{2}$.

Solución Probemos que $\sqrt{n} \leq u_n \leq 2\sqrt{n}$ por inducción.

Para $n = 1$, $\sqrt{1} = 1 = u_1 \leq 2\sqrt{1}$.

Para $n = 2$, $\sqrt{2} \leq \sqrt{2 + \sqrt{1}} = \sqrt{3} < 2\sqrt{2}$.

Asumamos que es cierto para n y probemos que es cierto para $n + 1$. Así:

$\sqrt{n+1} \leq u_{n+1} = \sqrt{n + 1 + \sqrt{n + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}} = \sqrt{n + 1 + u_n} \leq \sqrt{n + 1 + 2\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n+1}$.

Por otro lado, $1 \leq \dfrac{u_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{1 + \dfrac{u_{n-1}}{n}} \leq \sqrt{1 + \dfrac{2}{n}\sqrt{n-1}} = \sqrt{1 + \dfrac{2}{\sqrt{n}}(1 - \dfrac{1}{n})^{\frac{1}{2}}} =$
$\sqrt{1 + \dfrac{2}{\sqrt{n}}(1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{n} + o(\dfrac{1}{n}))} = (1 + \dfrac{2}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}} + o(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}))^{\frac{1}{2}} = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{2n^{\frac{3}{2}}} + o(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}})$, es decir $u_n \sim \sqrt{n}$.

Tomemos $u_n - \sqrt{n} = \dfrac{u_n^2 - n}{u_n + \sqrt{n}} = \dfrac{u_{n-1}}{u_n + \sqrt{n}} \sim \dfrac{\sqrt{n-1}}{2\sqrt{n}} = \dfrac{1}{2}(1 - \dfrac{1}{n})^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}(1 - \dfrac{1}{2n} + o(\dfrac{1}{n})) \longrightarrow \dfrac{1}{2}$.

107. Se denota $H_0 = 0$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

a) Demostrar que $\forall n \in \mathbb{N}$, $H_{2m+1} \geq H_{2m} + \dfrac{1}{2}$.

b) Deducir que $\forall n \in \mathbb{N}$, $H_{2m} \geq \dfrac{m}{2} + 1$ y que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $H_n > \dfrac{1}{2}(\log_2 n + 1)$.

c) Deducir que $H_n \longrightarrow +\infty$.

Solución

a) Por definición $H_{2^{m+1}} = \sum_{k=1}^{2^{m+1}} \dfrac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2^{m+1}-2} \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{2^{m+1}} + \dfrac{1}{2^{m+1}-1} = \cdots = \sum_{k=1}^{2^{m+1}-2^m} \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{2^m} + \dfrac{1}{2^m+1} + \cdots + \dfrac{1}{2^{m+1}} > H_{2^m} + \dfrac{1}{2^{m+1}} 2^m = H_{2^m} + \dfrac{1}{2}$.

b) Aplicando el resultado anterior tenemos $\forall m \in \mathbb{N}$, $H_{2^m} \geq H_{2^{m-1}} + \dfrac{1}{2} \geq H_{2^{m-2}} + 2 \cdot \dfrac{1}{2} \geq H_{2^{m-3}} + 3 \cdot \dfrac{1}{2} \geq \cdots \geq H_{2^0} + \dfrac{1}{2}m = 1 + \dfrac{1}{2}m$. Además dado $n \in \mathbb{N}$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $2^m \leq n < 2^{m+1} \Longrightarrow H_{2^m} \leq H_n \leq H_{2^{m+1}}$ i.e. $H_n > \dfrac{m}{2} + 1 = \dfrac{1}{2}(\log_2 n - 1) + 1 = \dfrac{1}{2}(\log_2 n + 1)$.

c) Por la parte b) tenemos $H_n > \dfrac{1}{2}(\log_2 n + 1) \longrightarrow +\infty$, si $n \to \infty$.

108. Sea $(p_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ una sucesión creciente de enteros >1 y sea $S_n = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{p_1{\cdot}p_2\cdots p_i}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Demuestre que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge a un elemento ℓ de $]\,0,1\,]$.

b) Demostrar que si $(p_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ es estacionaria, entonces $\ell\in\mathbb{Q}$.

Solución

a) Claramente $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ es creciente y además $S_n = \sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{p_1\cdots p_i} < \sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{p_1^i} < \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{p_1}} - 1 = \dfrac{p_1}{p_1-1} - 1 = \dfrac{1}{p_1-1}$, por lo que S_n converge a $\ell \le \dfrac{1}{p_1-1}$, o sea $0<\ell\le 1$.

b) Supongamos que $p_n = p_N, \forall n\ge N$, entonces: $S_n = S_N + \sum_{i=N+1}^{n}\dfrac{1}{p_1\cdots p_i} = S_N + \dfrac{1}{p_1\cdots p_N}\sum_{i=N+1}^{n}\dfrac{1}{p_N^{i-N}} = S_N + \dfrac{1}{p_1\cdots p_N}\dfrac{1-(\frac{1}{p_N})^{n-N}}{1-\frac{1}{p_N}}\dfrac{1}{p_N} \longrightarrow S_N + \dfrac{1}{p_1\cdots p_N}\dfrac{1}{p_N-1}\in\mathbb{Q}$.

109. Sea $\alpha\in\mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$, probar que la existencia de uno de los límites $\lim_{n\to\infty}\operatorname{sen} n\alpha$, $\lim_{n\to\infty}\cos n\alpha$ implica la otra y por lo tanto implica una contradicción. ¿Qué se concluye?

Solución Aplicando la fórmula de suma de ángulos tenemos: $\cos(n{+}1)\alpha = \cos(n\alpha{+}\alpha) = \cos n\alpha\cos\alpha - \operatorname{sen} n\alpha\operatorname{sen}\alpha$, $\operatorname{sen}(n+1)\alpha = \operatorname{sen}(n\alpha+\alpha) = \operatorname{sen} n\alpha\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha\cos n\alpha$.

Si $\operatorname{sen} n\alpha$ converge, entonces $\cos n\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}(n+1)\alpha - \operatorname{sen} n\alpha\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$ converge. Si $\cos n\alpha$ converge, $\operatorname{sen} n\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}(\cos n\alpha\cos\alpha - \cos(n+1)\alpha)$ converge, por lo tanto si $a = \lim_{n\to\infty}\operatorname{sen} n\alpha$, $b = \lim_{n\to\infty}\cos n\alpha$, entonces $b = b\cos\alpha - a\operatorname{sen}\alpha$, $a = a\cos\alpha + b\operatorname{sen}\alpha$, o sea $ab = ab\cos\alpha - a^2\operatorname{sen}\alpha$, $ab = ab\cos\alpha + b^2\operatorname{sen}\alpha$ lo que implica $(a^2+b^2)\operatorname{sen}\alpha = 0 \Longrightarrow \alpha = n\pi$, pues $a^2+b^2=1$ que es una contradicción. En conclusión $(\operatorname{sen} n\alpha)_n$, $(\cos n\alpha)_n$ son divergentes.

110. Demostrar que las sucesiones $(\operatorname{sen}(n+a))_{n\in\mathbb{N}}$, $(\cos(n+a))_{n\in\mathbb{N}}$ divergen, $\forall a\in\mathbb{R}$.

Solución Si la sucesión $(\operatorname{sen}(n{+}a))_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\forall a{\in}\mathbb{R} \Longrightarrow (\cos(n{+}a))_n$ converge, pues $\cos(n{+}a{-}\frac{\pi}{2}) = \operatorname{sen}(n{+}a)$. Así tenemos, $\alpha = \lim_{n\to\infty}\operatorname{sen}(n{+}\alpha) = \alpha\cos a{+}\operatorname{sen} a\beta$, $\beta = \lim_{n\to\infty}\cos(n{+}\alpha) = \beta\cos a - \alpha\operatorname{sen} a \Longrightarrow (\alpha^2+\beta^2)\operatorname{sen} a = 0$, $\forall a\in\mathbb{R}$, o sea $\operatorname{sen} a = 0$, $\forall a\in\mathbb{R}$ resultado que es una contradicción.

111. Sea $x{\in}\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ y $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de racionales convergiendo a x. Para todo $n{\in}\mathbb{N}$ se denota $u_n = \dfrac{p_n}{q_n}$ con $(p_n,q_n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$. Demostrar que $q_n\longrightarrow+\infty$ y $|p_n|\longrightarrow+\infty$.

Solución Supongamos que $q_n \not\longrightarrow +\infty$, entonces existe un subsucesión acotada, pero como $q_n\in\mathbb{N}^*$ se puede extraer una subsucesión constante $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^*}$. Así $u_{n_k}q_{n_k} = p_{n_k}, \forall k\in\mathbb{N} \Longrightarrow u_{n_k}m = p_{n_k}$ y $(p_{n_k})_k$ converge; pero $p_{n_k}\in\mathbb{Z} \Longrightarrow (p_{n_k})_k$ es constante a partir de un valor $k\ge N_1$. Además $u_{n_k} = \dfrac{r}{m}$ y la subsucesión es constante, por lo tanto $u_{n_k}\longrightarrow\dfrac{r}{m} = x\in\mathbb{Q}$ que es una contradicción.

En consecuencia $q_n\longrightarrow+\infty$ y $|p_n|\longrightarrow+\infty$, pues en caso contrario un razonamiento análogo demuestra que $\dfrac{1}{|x|} = |u_n| = \dfrac{q_n}{|p_n|}\in\mathbb{Q}$.

112. Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de términos positivos tales que $\forall p,q\in\mathbb{N}$, $u_{p+q}\leq u_p+u_q+1$. Demuestre que la sucesión $(\frac{u_n}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge y que $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{n}=\inf_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{u_n}{n}$.

Solución Sea $\epsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$ tal que $\left|\frac{u_N}{N}-\lambda\right|<\frac{1}{2}\epsilon$, donde $\lambda=\inf_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{u_n}{n}$, i.e. $\lambda\leq\frac{u_N}{N}<\lambda+\frac{1}{2}\epsilon$. Sea $n>N$, $n=qN+r$, con $0\leq r<q$, entonces $u_n=u_{qN}+u_r\leq qu_N+\frac{1}{2}\epsilon$, pues $u_{qN}\leq u_N+\cdots+u_N=qu_N$. Ahora, $\frac{u_n}{n}\leq q\frac{u_N}{n}+\frac{u_r}{n}\leq\frac{u_N}{N}+\frac{\alpha}{n}$, con $\alpha=\sup\{u_o,u_1,\ldots,u_{q-1}\}$.

Finalmente, para $n\geq\max\{N_1,N_2\}$, con N_1 tal que $\frac{\alpha}{N_1}<\frac{1}{2}\epsilon$, se tiene: $0\leq\frac{u_n}{n}\leq\lambda+\frac{1}{2}\epsilon+\frac{1}{2}\epsilon=\lambda+\epsilon$, o sea $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{n}=\lambda$.

113. Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión real tal que $\forall p,q\in\mathbb{N}^*$, $u_p+u_q-1\leq u_{p+q}\leq u_p+u_q+1$.

a) Demuestre que $(\frac{u_n}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

b) Denotando $\ell=\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{n}$, establecer que $\ell(n-1)\leq u_n\leq\ell(n+1)$.

Solución

a) Observamos que $\forall p\in\mathbb{N}^*,\forall n\in\mathbb{N}^*$, $2u_p-1\leq u_{2p}\leq 2u_p+1$, $3u_p-2\leq u_p+u_{2p}-1\leq u_{3p}=u_{2p+p}\leq u_{2p}+u_p+1\leq 3u_p-2,\ldots,nu_p-(n-1)\leq u_{np}\leq nu_p+(n-1)$, por lo que $\frac{u_p}{p}-\frac{1}{p}<\frac{u_p}{p}-\frac{n-1}{np}\leq\frac{u_{np}}{np}\leq\frac{u_p}{p}+\frac{n-1}{np}\leq\frac{u_p}{p}+\frac{1}{p}$, $\forall p,\forall n$.

Probemos ahora que $(\frac{u_s}{s})_{s\in\mathbb{N}^*}$ es de Cauchy. Sea $s>p$, entonces $s=pq+r$, $0\leq r<q$ y tenemos: $-\frac{1}{p}+\frac{qu_p}{qp}+\frac{u_r-1}{s}\leq\frac{u_pq}{s}+\frac{u_r-1}{s}\leq\frac{u_s}{s}\leq\frac{u_{qp}}{s}+\frac{u_r+1}{s}\leq\frac{qu_p}{qp}+\frac{u_r+1}{s}+\frac{1}{p}$, o sea $-\frac{1}{p}+\frac{u_p}{p}+\frac{u_r-1}{s}\leq\frac{u_s}{s}\leq\frac{u_p}{p}+\frac{1}{p}+\frac{u_r+1}{s}\implies\frac{u_r-1}{s}-\frac{1}{p}\leq\frac{u_s}{s}-\frac{p}{p}\leq\frac{1}{p}+\frac{u_r+1}{s}$, $0\leq r<q$.

Consideremos $\alpha'=\inf\{u_r-1/0\leq r<q\}$, $\alpha=\sup\{u_r+1/0\leq r<q\}$, entonces dado $\epsilon>0$, $\exists N_1\in\mathbb{N}$ tal que si $s>N_1\implies|\frac{\alpha}{s}|<\frac{1}{2}\epsilon$, $|\frac{\alpha'}{s}|<\frac{1}{2}\epsilon$, o sea $-\frac{1}{2}\epsilon<\frac{\alpha'}{s}<\frac{\alpha}{s}<\frac{1}{2}\epsilon$ y exixte $N_2\in\mathbb{N}$ tal que si $p\geq N_2\implies|\frac{1}{p}|\leq\frac{1}{2}\epsilon$. Para $s>P\geq\max\{N_1,N_2\}$ se tiene $-\epsilon<\frac{\alpha'}{s}-\frac{1}{p}\leq\frac{1}{p}+\frac{\alpha}{s}<\epsilon$, es decir: $-\epsilon<\frac{\alpha'}{s}-\frac{1}{p}\leq\frac{u_r-1}{s}-\frac{1}{p}\leq\frac{u_s}{s}-\frac{u_p}{p}\leq\frac{1}{p}+\frac{u_r+1}{s}\leq\frac{1}{p}+\frac{\alpha}{s}<\epsilon$, por lo que $(\frac{u_s}{s})_{s\in\mathbb{N}^*}$ es de Cauchy y converge.

b) Sea $\ell=\lim_{s\to\infty}\frac{u_s}{s}$, entonces como $\frac{\alpha'}{s}-\frac{1}{p}\leq\frac{u_s}{s}-\frac{u_p}{p}\leq\frac{1}{p}+\frac{\alpha}{s}\implies-\frac{1}{p}\leq\ell-\frac{u_p}{p}\leq\frac{1}{p}\implies-1\leq\ell p-u_p\leq 1\implies-1\leq u_p-\ell p\leq 1\implies-1+\ell p\leq u_p\leq\ell p+1$.

114. Sean α, β tales que $0<\alpha<\beta$ y sea $(\alpha_n)_n$ una sucesión real, $(y_n)_n$ una sucesión definida por $y_n=\alpha x_{n-1}+\beta x_n$. Se supone que $(y_n)_n$ converge, demostrar que $(x_n)_n$ converge.

Solución Sea $y\in\mathbb{R}$ tal que $y_n\longrightarrow y$, sea $x=\dfrac{y}{\alpha+\beta}$ y sea $\epsilon>0$, entonces $\exists N_1$ tal que si $n>N_1\implies\epsilon>|y_n-y|=|\alpha x_{n-1}+\beta x_n-\alpha x-\beta y|\geq-\alpha|x_{n-1}-x|+\beta|x_n-x|$, o sea $|x_n-x|\leq\frac{\alpha}{\beta}|x_{n-1}-x|+\frac{\epsilon}{\beta}<\frac{\epsilon}{\beta}+\frac{\alpha}{\beta}(\frac{\epsilon}{\beta}+\frac{\alpha}{\beta}|x_{n-2}-x|)=\frac{\epsilon}{\beta}(1+\frac{\alpha}{\beta})+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2|x_{n-1}-x|\leq\frac{\epsilon}{\beta}\left(1+\frac{\alpha}{\beta}+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right)+\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3|x_{n-3}-x|\leq$

$$\cdots \leq \frac{\epsilon}{\beta}\frac{1-\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1}}{1-\frac{\alpha}{\beta}} + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1}|x_1 - x| \leq \frac{\epsilon}{\beta}\frac{1}{\frac{\beta-\alpha}{\beta}} + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1}|x_1 - x| = \frac{\epsilon}{\beta-\alpha} + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1}|x_1 - x|.$$

Por otro lado $\exists N_2$ tal que si $n \geq N_2 \Longrightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1}|x_1 - x| < \frac{1}{2}\epsilon$ i.e. si $n \geq \max\{N_1, N_2\}$, se tiene que $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{\beta-\alpha}$, por lo tanto $x_n \longrightarrow x$.

115. Sean $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ una sucesión compleja acotada, $v_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n u_i = \frac{1}{n}S_n$, $\alpha \in \mathbb{N}^*$. Demostrar que si $(v_n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, entonces $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge también.

Solución Sea $M>0$ tal que $|u_n|<M$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Sea $p\in\mathbb{N}^*$, entonces $\exists n\in\mathbb{N}^*$ tal que $n^\alpha \leq p<(n+1)^\alpha$ y tenemos: $|v_p - v_{n^\alpha}| = |\frac{S_p}{p} - \frac{S_p}{n^\alpha} + \frac{S_p}{n^\alpha} - \frac{S_{n^\alpha}}{n^\alpha}| \leq S_p|\frac{1}{p} - \frac{1}{n^\alpha}| + \frac{1}{n^\alpha}|S_p - S_{n^\alpha}| \leq \frac{S_p}{p}\frac{|n^\alpha - p|}{n^\alpha} + \frac{1}{n^\alpha}|S_p - S_{n^\alpha}| \leq \frac{M_p}{p}\frac{(n+1)^\alpha - n^\alpha}{n^\alpha} + \frac{M((n+1)^\alpha - n^\alpha)}{n^\alpha} \leq 2M((1+\frac{1}{n})^\alpha - 1) = 2M\frac{\alpha}{n} + o(\frac{1}{n}) \longrightarrow 0$, por lo tanto: $||v_p - v| - |v - v_{n^\alpha}|| \leq |v_p - v_{n^\alpha} + v - v| \leq 2M\frac{\alpha}{n} + o(\frac{1}{n})$. Así tenemos que $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N_1 \Longrightarrow |2M\frac{\alpha}{n} + o(\frac{1}{n})| < \frac{1}{2}\epsilon$ y $\exists N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N_2 \Longrightarrow |v_{n^\alpha} - v| < \frac{1}{2}\epsilon$ y si $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ se tiene $|v_p - v| \leq |v - v_{n^\alpha}| + |2M\frac{\alpha}{n} + o(\frac{1}{n})| < \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon$ o sea $v_p \longrightarrow v$.

116. Demostrar que $\mathbb{Z}$ es completo

Solución Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy, entonces dado $\epsilon = \frac{1}{2}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $p \geq N$, $q \geq N$ implica $|x_p - x_q| < \frac{1}{2}$, i.e. $x_p = x_q = c$ para todo $p, q \geq N$, o sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es estacionaria.

117. Sea $0 \leq k < 1$, $\mathrm{L}_k = \{f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} / \, \forall\, x, y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| < k|x-y|\}$, C es espacio vectorial de aplicaciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

a) ¿Es L_k es un espacio vectorial?

b) Verifique que $\mathrm{L}_k \subset \mathrm{C}$.

c) Sea $f \in \mathrm{L}_k$, $u_0 \in \mathbb{R}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por $u_{n+1} = f(u_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

i) Probar que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en $\mathbb{R}$ y denote $\ell = \lim u_n$.

ii) Probar que la ecuación $f(x) = x$ tiene una solución única en $\mathbb{R}$ que es ℓ.

Solución

a) No, pues si $\lambda > 1$, $f(x) = kx$, $f \in \mathrm{L}_k$ y $\lambda f \notin \mathrm{L}_k$.

b) Es claro que $f \in \mathrm{L}_k$ es uniformemente continua, o sea $f \in \mathrm{C}$.

i) Sea $u_0 \in \mathbb{R}$, $f(u_n) = u_{n+1}$ para todo $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$; probemos que es de Cauchy.

En efecto, $|u_{n+p} - u_n| = |f(u_{n+p-1}) - f(u_{n-1}) \leq k|u_{n+p-1} - u_{n-1}| \leq \cdots \leq k^n|u_p - u_0| \longrightarrow 0$, o sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente a $\ell \in \mathbb{R}$.

ii) Como $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, entonces $\ell = f(\ell)$ pasando al límite y se tiene que ℓ es solución de la ecuación $f(x) = x$. Probemos que es única, o sea si existe $\ell' \neq \ell$ tal que $f(\ell) = \ell'$ implica $|f(\ell) - f(\ell')| \leq$

$k|\ell-\ell'|$, y nos queda $|\ell-\ell'|\leq k|\ell-\ell'|$ implica $k\geq 1$ si $\ell\neq\ell'$. La única posibilidad es que $\ell=\ell'$.

118. Demuestre que la sucesión de término general $u_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$ no es de Cauchy en $\mathbb{R}$.
Solución Pongamos $u_{n+p}-u_n=\sum_{k=n+1}^{n+p}\dfrac{1}{k}\geq\dfrac{1}{n+1}+\log\big(\dfrac{n+p}{n+1}\big)\longrightarrow+\infty$ si $p\to+\infty$.

119. Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión real tal que $\forall n\in\mathbb{N}$, $|u_{n+1}-u_n|<2^{-n}$, demostrar que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Solución Probamos que la sucesión es de Cauchy. En efecto, $|u_{n+p}-u_n|\leq|u_{n+p}-u_{n+p-1}|+|u_{n+p-1}-u_{n+p-2}|+\cdots+|u_{n+1}-u_n|=\dfrac{1}{2^{n+p}}+\dfrac{1}{2^{n+p-1}}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}=\dfrac{1}{2^n}\big(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{2^p}\big)=\dfrac{1}{2^n}\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2^{n-1}}\longrightarrow 0$, si $n,p\to+\infty$.

120. Probar que la sucesión de término general $u_n=\sum_{k=0}^{k}\dfrac{1}{k!}\big(\dfrac{1}{2}\big)^k\in\mathbb{Q}$ converge en $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Solución Observemos que $|u_{n+p}-u_n|=\sum_{k=n+1}^{n+p}\big(\dfrac{1}{2}\big)^k\dfrac{1}{k!}\leq\dfrac{1}{(n+1)!}\sum_{k=n+1}^{n+p}\big(\dfrac{1}{2}\big)^k\leq\dfrac{1}{(n+1)!}\dfrac{1}{2^p}\longrightarrow 0$, sii $n,p\to 0$.

Así $u_n\longrightarrow\ell$ y supongamos que $\ell=\dfrac{m}{q}$, $m,q\in\mathbb{N}^*$, entonces $\forall p\in\mathbb{N},\forall n\in\mathbb{N}$, $|u_{n+p}-u_p|\leq\dfrac{1}{2^p(p+1)!}$ y si $n\to\infty$, $|\ell-u_p|\leq\dfrac{1}{2^p(p+1)!}$. Notemos que $2^pp!\left|\dfrac{m}{q}-u_p\right|\leq\dfrac{1}{p+1}$ y $2^pp!\big(\dfrac{m}{q}-u_p\big)\in\mathbb{Z}$ pues $2^pp!\dfrac{m}{q}\in\mathbb{Z}$ ya que $p\geq q$ y $2^pp!u_p=\sum_{k=0}^{p}\dfrac{p!}{k!}\dfrac{2^p}{2^k}\in\mathbb{Z}$, por lo tanto $2^pp!\big(\dfrac{m}{q}-u_p\big)=0\Longrightarrow u_p=\dfrac{m}{q}$, para todo $p\geq q$ que es contradictorio pues $u_p<u_{p+1}$. Observemos que $u_n\longrightarrow\mathrm{e}^{1/2}=\sqrt{\mathrm{e}}$.

121. Demostrar que para todo $z\in\mathbb{C}$, $u_n(z)=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{z^k}{k!}$ converge en $\mathbb{C}$.

Solución Sea $z\in\mathbb{C}$ fijo, entonces $|u_{n+p}(z)-u_p(z)|\leq\sum_{k=p+1}^{p+n}\dfrac{|z|^k}{k!}=\dfrac{|z|^{p+1}}{(p+1)!}\big(1+\dfrac{|z|}{p+2}+\cdots+\dfrac{|z|^{n-1}}{(p+2)\cdots(p+n)}\big)\leq\dfrac{|z|^{p+1}}{(p+1)!}\big(1+\dfrac{z}{p+2}+\dfrac{|z|^2}{(p+2)^2}+\cdots+\dfrac{|z|^{n-1}}{(p+2)^{n-1}}\big)\leq\dfrac{|z|^{p+1}}{(p+1)!}\dfrac{1}{1-\dfrac{|z|}{p+2}}$, pues existe $p\in\mathbb{N}$ tal que $|z|<p+2$. Recordemos que $u_n(z)\longrightarrow\mathrm{e}^z$. Finalmente $(u_p(z))_p$ es de Cauchy, por lo tanto es convergente para todo $z\in\mathbb{C}$.

122. Sea $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $[-1,1]$; se le asocia la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de reales definidos por $a_n=\epsilon_0+\frac{\epsilon_0\epsilon_1}{2}+\cdots+\frac{\epsilon_0\epsilon_1\cdots\epsilon_n}{2^n}$.

a) Demostrar que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un número real $a\in[-2,2]$.

b) Recíprocamente, demostrar que todo real $a\in[-2,2]$ es límite de una sucesión del tipo precedente.

c) Verificar que para todo $\alpha\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$, $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}+\alpha)=\frac{1}{2}\sqrt{2+2\operatorname{sen}2\alpha}$. Se considera entonces $x_n=\epsilon_0\sqrt{2+\epsilon\sqrt{2+\cdots+\epsilon_{n-1}\sqrt{2+\epsilon_n\sqrt{2}}}}$, $y_n=2\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}a_n)$. Demostrar que para todo $n\in\mathbb{N}$, $x_n=y_n$ y deducir que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

Solución

a) Puesto que $|a_{n+p}-a_p|\leq\dfrac{1}{2^{p+1}}+\cdots+\dfrac{1}{2^{p+n}}=\dfrac{1}{2^{p+1}}\big(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}\big)\leq\dfrac{1}{2^p}\longrightarrow 0$ tenemos que es de Cauchy y converge a un $a \in \mathbb{R}$. Además, $|a_n| \leq \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{2^k} < \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$, por lo tanto $|a| \leq 2$.

b) Sea $a \in [-2, 2]$, si $a \in [-2, 0]$ se toma $\epsilon_0 = -1$, si $a \in [0, 2]$ se toma $\epsilon_0 = 1$. Hay dos escogencias posibles para $a = 0$.

Sea $a - \epsilon_0 \in [-1, 1]$ se escoge $\epsilon_1 = -1$ si $a - \epsilon_0 \in [-1, 0]$, o se escoge $\epsilon_1 = 1$ si $a - \epsilon_0 \in [0, 1]$. Hay dos posibilidades para $a - \epsilon_0 = 0$.

Sea $\alpha = a - \epsilon_0 - \frac{\epsilon_0\epsilon_1}{2} \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, se escoge $\epsilon_2 = -1$ si $\alpha \in [-\frac{1}{2}, 0]$, o se escoge $\epsilon_2 = 1$ si $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$. Hay dos posibilidades para $\alpha = 0$.

$\vdots$

Sea $\alpha = a - \epsilon_0 - \dfrac{\epsilon_0\epsilon_1}{2} - \cdots - \dfrac{\epsilon_0\epsilon_1\cdots\epsilon_n}{2^n} \in [-\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n}]$ es escoge $\epsilon_{n+1} = -1$ si $\alpha \in [-\frac{1}{2^n}, 0]$, o se escoge $\epsilon_{n+1} = 1$ si $\alpha \in [0, \frac{1}{2^n}]$.

Así la sucesión $a_n = \epsilon_0 + \dfrac{\epsilon_0\epsilon_1}{2} + \cdots + \dfrac{\epsilon_0\cdots\epsilon_n}{2^n}$ es tal que $|a_n - a| < \dfrac{1}{2^n}$ y converge a $a \in \mathbb{R}$.

c) Notemos que $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4} + \alpha) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha) = \frac{1}{2}\sqrt{2(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2(1 + 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)}$ $= \frac{1}{2}\sqrt{2 + 2\operatorname{sen}2\alpha}$. Por otro lado $a \in \mathbb{R}$ se puede expresar como el límite de una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, con $a_n = \epsilon_0 + \frac{\epsilon_0\epsilon_1}{2} + \cdots + \frac{\epsilon_0\epsilon_1\cdots\epsilon_n}{2^n}$ con $\epsilon_i \in \{-1, 1\}$, entonces:

$$
\begin{aligned}
y_n &= 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\epsilon_0\big(1 + \frac{\epsilon_1}{2} + \cdots + \frac{\epsilon_1\cdots\epsilon_n}{2^n}\big) = 2\epsilon_0\operatorname{sen}\big(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\frac{\epsilon_1}{2}\big(1 + \frac{\epsilon_2}{2} + \cdots + \frac{\epsilon_2\cdots\epsilon_n}{2^{n-1}}\big)\big) = \\
&\epsilon_0\sqrt{2 + 2\operatorname{sen}\big(\frac{\pi}{4}\epsilon_1\big(1 + \frac{\epsilon_2}{2} + \cdots + \frac{\epsilon_2\cdots\epsilon_n}{2^{n-1}}\big)\big)} = \\
&\epsilon_0\sqrt{2 + 2\epsilon_1\operatorname{sen}\big(\frac{\pi}{4}\big(1 + \frac{\epsilon_2}{2} + \cdots + \frac{\epsilon_2\cdots\epsilon_n}{2^{n-1}}\big)\big)} = \\
&\epsilon_0\sqrt{2 + \epsilon_1\sqrt{2 + 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}2\frac{\epsilon_2}{2}\big(1 + \frac{\epsilon_3}{2} + \cdots + \frac{\epsilon_3\cdots\epsilon_n}{2^{n-2}}\big)}} = \\
&\epsilon_0\sqrt{2 + \epsilon_1\sqrt{2 + 2\epsilon_2\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\big(1 + \frac{\epsilon_3}{2} + \cdots + \frac{\epsilon_3\cdots\epsilon_n}{2^{n-2}}\big)}} = \\
&\epsilon_0\sqrt{2 + \epsilon_1\sqrt{2 + \epsilon_2\sqrt{2 + 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\epsilon_3\big(1 + \frac{\epsilon_4}{2} + \cdots + \frac{\epsilon_4\cdots\epsilon_n}{2^{n-3}}\big)}}} = \cdots = \\
&\epsilon_0\sqrt{2 + \epsilon_1\sqrt{2 + \epsilon_2\sqrt{2 + \cdots + 2\sqrt{2 + 2\epsilon_n\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}}}}} = \\
&\epsilon_0\sqrt{2 + \epsilon_1\sqrt{2 + \epsilon_2\sqrt{2 + \cdots + \epsilon_{n-1}\sqrt{2 + \epsilon_n\sqrt{2}}}}} = x_n.
\end{aligned}
$$

Además como $a_n \longrightarrow a$ y $x_n = y_n \longrightarrow 2\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}a$.

123. Sea B el conjunto de sucesiones complejas acotadas, para $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{B}$, se denota $\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}}|u_n|$. Demuestre que $(\mathrm{B}, \|\ \|_\infty)$ es un espacio vectorial normado completo.

Solución Es claro que B es un espacio vectorial normado, demostremos que es completo.

Sea $(u^p)_{p\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en B, entonces dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $p, q \geq N$ implica

$\|u^p - u^q\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n^p - u_n^q| \leq \epsilon$, o sea $|u_n^p - u_n^q| < \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $p, q \in \mathbb{N}$. Sea $n \in \mathbb{N}$ arbitrario pero fijo, entonces $|u_n^p - u_n^q| < \epsilon$ para todo $p, q \geq N$ implica que $(u_n^p)_p$ es de Cauchy; por lo tanto $u_n^p \longrightarrow v_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Probemos que $u^p \longrightarrow v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

En efecto, si $\|u^p - u^q\|_\infty < \epsilon, \forall p, q \geq N \Longrightarrow |u_n^p - u_n^q| < \epsilon, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N$, y tomando el límite cuando $q \to \infty$: $|u_n^p - v_n| < \epsilon, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \geq N \Longrightarrow \|u^p - v\|_\infty < \epsilon, \forall p \geq N$.

124. Demostrar que una subsucesión de una subsucesión de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solución Recordemos que una subsucesión $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se tiene a través de una aplicación $\tau\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ estrictamente creciente, i.e. $\tau(k) = n_k$. Así, si $(u_{n_{k_l}})_l$ es una subsucesión de $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ existe $\rho\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que $\rho(l) = u_{n_{k_l}}$, i.e. $\lambda = \rho \circ \tau\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ prueba que $(u_{n_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

125. Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una subsucesión real no mayorada, demostrar que existe una subsucesión que tiende a $+\infty$.

Solución Tomemos $1 \in \mathbb{N}$, existe N_1 tal que $u_{N_1} > 1$, existe $N_2 > N_1$ tal que $u_{N_2} > 2, \ldots$, existe $N_k > N_{k-1}$ tal que $u_{N_k} > k$. Así, $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión que tiende a $+\infty$.

126. Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión real tal que las subsucesiones $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergen. Demuestre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Solución La subsucesión $u_{2n} \longrightarrow l$, $u_{2n+1} \longrightarrow l'$, $u_{3n} \longrightarrow l''$, entonces $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $(u_{2n})_n$ y de $(u_{3n})_n$, por lo tanto $l = l''$. También la subsucesión $(u_{6n+3})_n$ es una subsucesión de $(u_{2n+1})_n$ y de $(u_{3n})_n$, por lo que $l' = l''$, o sea $l = l' = l''$.

Probemos que $u_n \longrightarrow l$. Sea $\epsilon > 0$, existe N_1 tal que $n \geq N_1 \Longrightarrow |u_{2n} - l| < \epsilon$ y existe N_2 tal que $n \geq N_2 \Longrightarrow |u_{2n+1} - l| < \epsilon$. Sea $m > 2\sup\{N_1, N_2 + \frac{1}{2}\}$; si m es par, $m = 2n > 2N_1 \Longrightarrow |u_m - l| = |u_{2n} - l| < \epsilon$. Si m es impar, $m = 2n+1 \geq 2N_2 + 1 \Longrightarrow |u_m - l| = |u_{2n+1} - l| < \epsilon$.

127. Sea $(\epsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de valores en $\{-1, 1\}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, se denota $S_n = \sum_{k=0}^{n} \epsilon_k$. Demostrar que el conjunto de valores adherentes de la sucesión $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una intervalo de $\mathbb{Z}$.

Solución Sean $\alpha < \beta \in \mathbb{Z}$ tales que $\alpha, \beta \in \overline{\{S_n | n \in \mathbb{N}\}}$, probemos que si $\alpha < \gamma < \beta$ entonces γ es un punto adherente.

Dado $\epsilon > 0$, $\epsilon < 1$ existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq k_1$ implica $|S_{n_k} - \alpha| < \epsilon < 1$ entonces $S_{n_k} = \alpha$ para todo $k \geq k_1$ (i.e. $S_{n_{k+1}} - S_{n_k} = \epsilon_{n_k+1} + \cdots + \epsilon_{n_{k+1}} = 0$) y existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $l \geq k_2$ implica que $|S_{m_l} - \beta| < \epsilon < 1$, por lo tanto $S_{m_l} = \beta$ para todo $l \geq k_2$.

Sea $v(1) = n_k$ el menor entero tal que $S_{n_k} = \alpha$ y sea $v(1) = m_l$ el menor entero talque $S_{m_l} = \beta$. Como $\alpha < \beta$ se tiene $u(1) < v(1)$.

Tomemos $u(2)$ el menor entero mayor que $v(1)$ con $S_{u(2)} = \alpha$ y sea $v(2)$ el menor entero mayor o igual que $u(2)$ talque $S_{v(2)} = \beta$, y así sucesivamente. Finalmente hemos construido una sucesión de términos $(u(n))_{n\in\mathbb{N}}$ y $(v(n))_{n\in\mathbb{N}}$ tales que para todo $n \in \mathbb{N}$, $S_{u(n)} = \alpha$, $S_{v(n)} = \beta$ con $u(n) < v(n) < u(n+1)$. Ahora para cada $n\in\mathbb{N}$, $\epsilon_{u(n)+1} + \cdots + \epsilon_{v(n)} = \beta - \alpha$ i.e. existe $N_n \in \mathbb{N}$ tal que $u(n)+1 \leq N_n \leq v(n)$ y $\epsilon_{u(n)+1} + \cdots + \epsilon_{N_n} = \gamma - \alpha$, es decir $S_{N_n} = \gamma$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Así, se construyó una subsucesión $(S_{N_n})_{n\in\mathbb{N}}$ talque $S_{N_n} = \gamma$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o sea $\gamma \in \{S_n / n \in \mathbb{N}\}$, por lo que si α y β son puntos adherentes, todos los enteros entre dos son también puntos adherentes.

128. Determinar los puntos de acumulación en $\mathbb{R}$, de cada uno de los siguientes conjuntos:

a) $A = \{\dfrac{(-1)^n}{1+\frac{1}{n}} / n \in \mathbb{N}^*\}$

Si n es par $u_n = \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}} \longrightarrow 1$. Si n es impar $u_n = \dfrac{-1}{1+\frac{1}{n}} \longrightarrow -1$, entonces $A' = \{-1, 1\}$.

b) $A = \{\dfrac{p}{pq+1} / p, q \in \mathbb{N}^*\}$

Notemos que $\dfrac{p}{pq+1} = \dfrac{1}{q+\frac{1}{p}} \longrightarrow \dfrac{1}{q}$ si $p \to +\infty$ y $\dfrac{1}{q+\frac{1}{p}} \longrightarrow 0$ si $q \to +\infty$ entonces $A' = \{\dfrac{1}{q} | q \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}$.

c) $A = \{\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q} / p, q \in \mathbb{N}^*, 1 \leq p \leq q\}$

En virtud que $\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q} = \dfrac{q-p}{pq} \geq 0$, entonces si $q \to \infty$, $\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q} \longrightarrow \dfrac{1}{p}$. Así $A' = \{\dfrac{1}{q} | q \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}$.

d) $A = \{n + \dfrac{1}{p} / n \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N}^*\}$

Si $p \to \infty$, $n + \dfrac{1}{p} \longrightarrow n$, por lo tanto $A' = \mathbb{Z}$.

e) $A = \{\big(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{p}\big)^{n+p} / p, q \in \mathbb{N}^*\}$

Solución Siendo $\big(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{p}\big)^{n+p} = \big(\dfrac{1}{n}\big)^{n+p}\big(1 + \dfrac{n}{p}\big)^{n+p} = \big(\dfrac{1}{n}\big)^{n+p}\big(1 + \dfrac{n}{p}\big)^{n}\big(1 + \dfrac{n}{p}\big)^{p} \longrightarrow 0{\cdot}1{\cdot}\mathrm{e}^n = 0$ si $p \to \infty$. Si $p = 1$, $\big(1 + \dfrac{1}{n}\big)^{n+1} \longrightarrow \mathrm{e}$, entonces $A' = \{0, \mathrm{e}\}$.

129. Dar un ejemplo de una sucesión $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}^2$, no conteniendo ningún valor adherente aunque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ los tienen.

Solución Tomemos $x_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \dfrac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$, $y_n = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$

entonces $(x_n, y_n) = \begin{cases} \big(0, \dfrac{n}{2}\big) & \text{si } n \text{ es par} \\ \big(\dfrac{n+1}{2}, 0\big) & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$ y no tiene puntos adherentes.

130. Estudiar la convergencia de las sucesiones definidas por:

a) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{kn}$

Note que $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \dfrac{1}{k(n+1)} - \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{kn} = \dfrac{1}{(n+1)^2} + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}\big(\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}\big) =$

$\dfrac{1}{(n+1)^2} - \dfrac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{(n+1)^2} - \dfrac{1}{n(n+1)} - \sum_{k=2}^{n}\dfrac{1}{k}\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n+1}\Big(\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}\Big) - \sum_{k=2}^{n}\dfrac{1}{k}\dfrac{1}{n(n+1)} = -\dfrac{1}{(n+1)^2 n} - \dfrac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k} < 0$, por lo tanto $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente de términos positivos y acotada inferiormente, i.e. es convergente.

b) $u_n = \prod_{k=1}^{n}\dfrac{2k-1}{2k}$

En virtud que $u_{n+1} = \dfrac{2n+1}{2n+2}u_n < u_n$, la sucesión converge pues es de términos positivos y decreciente y acotada inferiormente.

c) $u_n = \sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+k}$

Consideremos $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1}\dfrac{1}{n+1+k} - \sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+k} = \dfrac{1}{2n+2} + \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0$ y como $u_n = \sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+k} \leq \dfrac{n}{n+1} \leq 1$, tenemos que es convergente. Más aún, observando más de cerca la expresión vemos que $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+k} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{1+\frac{k}{n}} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\big(\frac{k}{n}\big) \longrightarrow \displaystyle\int_0^1 f(x)dx$, con $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, o sea que $u_n \longrightarrow \displaystyle\int_0^1 \dfrac{1}{1+x}dx = \ln(1+x)|_0^1 = \ln 2$.

d) $u_n = \sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}$

Escribamos $u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1}\dfrac{1}{k^2} = u_n + \dfrac{1}{(n+1)^2} > u_n$, entonces $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente. Por otro lado $u_n = \sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n}\dfrac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^{n}\Big(\dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}\Big) = 2 - \dfrac{1}{n} < 2$ y se tiene que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

e) $u_n = \sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2n+2k-1}$

Usando el hecho que $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{4n+1} + \dfrac{1}{4n+3} - \dfrac{1}{2n+1} > \dfrac{2}{4n+1} - \dfrac{1}{2n+1} = \dfrac{1}{2n+\frac{1}{2}} - \dfrac{1}{2n+1} > 0$, tenemos que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente. Además $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2n+2k-1} \leq \dfrac{n}{2n+1} \leq \frac{1}{2}$ y $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

131. Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión monótona, demostrar que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite una subsucesión convergente, entonces $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

Solución Dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ talque $k \geq N$ implica que $|u_{n_k} - l| \leq \epsilon$. Sea $n \geq n_N$ entonces $|u_n - l| \leq |u_{n_N} - l| < \epsilon$ i.e $u_n \longrightarrow l$.

132. Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión real acotada tal que para todo $n \in \mathbb{N}^*$, $2u_n < u_{n+1} + u_{n-1}$ y $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - u_n$. Estudiar $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solución

a) Verifiquemos que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente. En efecto, $v_{n+1} - v_n = u_{n+2} - u_{n+1} - (u_{n+1} - u_n) = u_{n+2} + u_n - 2u_{n+1} > 0$.

b) Probemos que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada superiormente. En este caso $|v_n| \leq |v_{n+1}| + |v_n| \leq 2k$ y así $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

es acotada. Finalmente $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un valor ℓ.

c) Probemos que $\ell = 0$.

– Si $\ell > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ talque si $n \geq N$ implica que $v_n = u_{n+1} - u_n > 0$. Así tenemos que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y como es acotada es convergente, lo que implica que $v_n = u_{n+1} - u_n \longrightarrow 0$, que es una contradicción.

– Si $\ell < 0$ un argumento semejante prueba que $v_n \longrightarrow 0$ que es contradictorio.

– Por lo tanto, la única posibilidad es que $\ell = 0$.

133. Para $n \in \mathbb{N}^*$ se asume que $H_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ se asume que $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$, donde γ es la constante de Euler. Establecer que $\forall p, q \in \mathbb{N}^*$, $\gamma \leq H_p + H_q - H_{pq} \leq 1$.

Solución Consideremos $\Delta_{p,q} = H_p + H_q - H_{pq}$, entonces $\Delta_{p,q} - \Delta_{p-1,q} = H_p - H_{pq} - H_{p-1} + H_{(p-1)q} = \dfrac{1}{p} - \big(\dfrac{1}{pq-q+1} + \cdots + \dfrac{1}{pq}\big) \leq \dfrac{1}{p} - \dfrac{q}{pq} = 0 \Longrightarrow \Delta_{p,q} \leq \Delta_{p-1,q} \leq \cdots \leq \Delta_{1,q} \leq \Delta_{1,1} = 1$.
Por otro lado $\Delta_{p,q} = \gamma + \ln p + \gamma + \ln q - \gamma - \ln pq + o(1) = \gamma + o(1) \longrightarrow \gamma$, si $p, q \to \infty$.

134. Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ una sucesión real tal que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n \leq 1$, $(1-u_n)u_{n+1} \geq \frac{1}{4}$. Demostrar que $u_n \longrightarrow \frac{1}{2}$.

Solución Notemos que $u_n(1-u_n) = u_n - u_n^2 = -\frac{1}{4} + u_n - u_n^2 + \frac{1}{4} = -(u_n - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4} \leq (1-u_n)u_{n+1} \Longrightarrow u_n \leq u_{n+1}$, o sea $(u_n)_n$ converge a un valor ℓ. Ahora bien, debemos tener $(1-u_n)u_{n+1} \longrightarrow (1-\ell)\ell \geq \frac{1}{4}$, es decir $\ell(1-\ell) = \frac{1}{4} \Longrightarrow \ell^2 - \ell + \frac{1}{4} = (\ell - \frac{1}{2})^2 = 0$ i.e. $\ell = \frac{1}{2}$.

135. Sea $(u_n)_n$ una sucesión de término positivo tal que $u_n \longrightarrow 0$, demostrar que existe una subsucesión decreciente que converge a 0.

Solución Sea

n_1 el mayor entero tal que $u_{n_1} = \sup\{u_n / n \in \mathbb{N}\}$

n_2 el mayor entero tal que $u_{n_2} = \sup\{u_n / n > n_1\}$ i.e. $u_{n_2} < u_{n_1}$

n_k el mayor entero tal que $u_{n_k} = \sup\{u_n / n > n_{k-1}\}$ i.e. $u_{n_k} < u_{n_{k-1}} < \cdots < u_{n_1}$.
Así la subsecución $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es decreciente y converge a 0.

136. Para $n \in \mathbb{N}^*$ se denota $u_n = (1 + \dfrac{1}{n})^n$.

a) Demostrar $\forall \alpha \in \,]\,0,1\,[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2 \Longrightarrow (1-\alpha)^n \geq 1 - n\alpha$.

b) Tomando $\alpha = \dfrac{1}{n^2}$, demostrar que $(u_n)_n$ es creciente.

c) Tomando $\alpha = \dfrac{1}{6n+1}$, demostrar que $(u_n)_n$ es mayorada.

d) ¿Qué concluye?

Solución

a) Probemos la propiedad por inducción sobre $n \geq 2$.

i) $(1-\alpha)^2 = 1 - 2\alpha + \alpha^2 \geq 1 - 2\alpha$.

ii) Asumamos que la propiedad es válida para n y probemos que también vale para $n+1$. En efecto, $(1-\alpha)^{n+1} = (1-\alpha)^n(1-\alpha) > (1-n\alpha)(1-\alpha) = 1 - \alpha - n\alpha + \alpha^2 > 1 - (n+1)\alpha$.

b) Sea $\alpha = \dfrac{1}{n^2}$, $(1-\dfrac{1}{n^2})^n > 1 - \dfrac{n}{n^2} = 1 - \dfrac{1}{n}$. Ahora como $(1-\dfrac{1}{n^2})^n = (1+\dfrac{1}{n})^n(1-\dfrac{1}{n})^n > 1 - \dfrac{1}{n} \Longrightarrow (1+\dfrac{1}{n})^n > (1-\dfrac{1}{n})^{-n+1}$. Además $\dfrac{1}{1-\frac{1}{n}} = \dfrac{n}{n-1} = 1 + \dfrac{1}{n-1} \Longrightarrow u_n > (1-\dfrac{1}{n})^{-n+1} = u_{n-1} \therefore (u_n)_n \uparrow$.

c) Tomemos $(1 - \dfrac{1}{6n+1})^n > 1 - \dfrac{n}{6n+1} = \dfrac{5n+1}{6n+1} > \dfrac{5}{6} \Longrightarrow (1+\dfrac{1}{6n})^{-n} > \dfrac{5}{6} \Longrightarrow (1+\dfrac{1}{6n})^{6n} < (\dfrac{5}{6})^6$. Así, $u_n < u_{6n} < (\dfrac{6}{5})^6$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

d) Finalmente $(u_n)_n \uparrow$, acotada superiormente $\Longrightarrow u_n \longrightarrow \ell \leq (\dfrac{5}{6})^6 = 2.985984$. Además sabemos que $u_n \longrightarrow \mathrm{e} = \ell$, pues $\ln u_n = n\ln(1+\dfrac{1}{n}) = n(\dfrac{1}{n}+o(\dfrac{1}{n})) = 1 + o(1) \longrightarrow 1$, por lo tanto $u_n \longrightarrow \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$.

137. Para $n \in \mathbb{N}^*$ se denota $S_n = \sum_{k=1}^n \dfrac{1}{\sqrt{k}}$, $u_n = \dfrac{S_n}{\sqrt{n}}$, $v_n = S_n - 2\sqrt{n}$.

a) Demostrar que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \leq \sqrt{n} + \sqrt{n-1}$.

b) Demostar que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $2\sqrt{n+1} - 2 \leq S_n$.

c) Establecer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ y $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergen.

Solución

a) Consideremos $S_n = \sum_{k=1}^n \dfrac{1}{\sqrt{k}}$ y probemos por inducción que $S_n \leq \sqrt{n} + \sqrt{n-1}$.

i) Para $n = 1$, $S_1 = 1 \leq \sqrt{1}$; para $n = 2$, $S_2 = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} < \sqrt{2} + 1$.

ii) Supongamos que es válido para n y probemos que es válido para $n+1$.

En efecto, $S_{n+1} = S_n + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} < \sqrt{n} + \sqrt{n-1} + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$, pues $n^2 - 1 = (n-1)(n+1) < n^2 = n^2 + 2n + 1 - 2n - 2 + 1 = 1 - 2(n+1) + (n+1)^2 \Longrightarrow \dfrac{n-1}{n+1} < 1 - \dfrac{2}{n+1} + \dfrac{1}{(n+1)^2} = \big(1 - \dfrac{1}{n+1}\big)^2 \Longrightarrow \dfrac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}} < 1 - \dfrac{1}{n+1} \Longrightarrow \sqrt{n-1} < \sqrt{n+1} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$, o sea $\sqrt{n-1} + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1}$.

b) Demostremos que $2\sqrt{n+1} - 2 \leq S_n$ por inducción sobre n.

i) Para $n = 1$, $2\sqrt{2} - 2 \leq 1$, pues $4{\cdot}2 \leq 9 \Longrightarrow 2\sqrt{2} \leq 3$ i.e. $2\sqrt{2} - 2 \leq 1$.

ii) Asumamos que es cierto para n y probemos que es cierto para $n+1$.

En efecto, $S_{n+1} = S_n + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} > 2\sqrt{n+1} - 2 + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1} + \big(\sqrt[4]{n+1} - \dfrac{1}{\sqrt[4]{n+1}}\big)^2 = \sqrt{n+1} + \dfrac{(\sqrt{n+1}-1)^2}{\sqrt{n+1}} = \dfrac{n+1+n+1-2\sqrt{n+1}+1}{\sqrt{n+1}} = \dfrac{2n+3}{\sqrt{n+1}} - 2 > 2\sqrt{n+2} - 2$, pues $4n^2 + 12n + 9 = (2n+3)^2 > 4n^2 + 12n + 8 = 4(n+1)(n+2)$, o sea $2n + 3 > 2\sqrt{(n+1)(n+2)}$.

c) Por la parte a) y b) se tiene $2(\sqrt{n+1}-1) \leq S_n \leq \sqrt{n} + \sqrt{n-1} \Longrightarrow 2\sqrt{1+\dfrac{1}{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leq u_n \leq 1 + \sqrt{1 - \dfrac{1}{n}}$, o sea $u_n \longrightarrow 2$. Además $v_n = S_n - 2\sqrt{n} \geq 2\sqrt{n+1} - 2 - 2\sqrt{n} = 2\big(\dfrac{1}{\sqrt{(n+1)} + \sqrt{n}} - 1\big) \geq -2$ y

$v_n = S_n - 2\sqrt{n} \leq \sqrt{n} + \sqrt{n-1} - 2\sqrt{n} = \sqrt{n-1} - \sqrt{n} = -\dfrac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}} \leq 0.$

Probemos que $(v_n)_n$ es decreciente. En efecto, $v_{n+1} - v_n = S_{n+1} - 2\sqrt{n+1} - S_n + 2\sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{2}{2\sqrt{n}} < 0$

y como $(v_n)_n$ es acotada inferiormente, se tiene que es convergente.

138. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de términos positivos tales que $x_{n+2} < \dfrac{1}{2}(x_n + x_{n+1})$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Demuestre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

Solución Definamos $y_n = \max\{x_n, x_{n+1}\}$, entonces $y_n \geq x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y verifiquemos que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente. En efecto, consideramos la diferencia $y_{n+1} - y_n = \max\{x_{n+1}, x_{n+2}\} - \max\{x_{n+1}, x_n\}$.

Si $x_{n+1} \geq x_n$, tenemos $x_{n+2} < \dfrac{1}{2}(x_n + x_{n+1})$ y $x_{n+1} > \dfrac{1}{2}(x_n + x_{n+1})$. Así, $\max\{x_{n+1}, x_{n+2}\} = x_{n+1}$ por lo que $y_{n+1} = y_n$.

Si $x_{n+1} < x_n$ se tiene $x_{n+2} < \dfrac{1}{2}(x_n + x_{n+1}) < x_n$, $\max\{x_{n+1}, x_{n+2}\} = x_{n+1}$ o x_{n+2} y se tiene que $\max\{x_{n+1}, x_n\} = x_n \therefore y_{n+1} - y_n = \max\{x_{n+1}, x_{n+2}\} - x_n < 0$.

Finalmente $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y acotada inferiormente por 0, por lo tanto $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un cierto valor $\ell \geq 0$. Probemos que $x_n \longrightarrow \ell$.

Sea $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq \mathbb{N} \Longrightarrow |y_n - \ell| < \frac{1}{3}\,\epsilon$.

Si $y_n = \max\{x_n, x_{n+1}\} = x_n \Longrightarrow |x_n - \ell| < \frac{1}{3}\,\epsilon < \epsilon$.

Si $y_n = \max\{x_{n+1}, x_n\} = x_{n+1} > x_n$, entonces $x_n < x_{n+1} \leq \frac{1}{2}\,(x_n + x_{n-1}) \Longrightarrow x_n < x_{n-1}$, o sea $y_{n-1} = x_{n-1}$. Así tenemos $\ell + \epsilon > y_n > x_n \geq 2x_{n+1} - x_{n-1} = 2y_n - y_{n-1} > 2(\ell - \frac{1}{3}\,\epsilon) - (\ell + \frac{1}{3}\,\epsilon) = \ell - \epsilon$, o sea $|x_n - \ell| < \epsilon$.

139. Demostrar que toda sucesión real $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite una subsucesión monótona.

Solución Sea $E = \{n \in \mathbb{N} / \,\forall\, p \in \mathbb{N},\ p > n \Longrightarrow v_p \leq v_n\}$.

Si E es finito, definimos $n_1 = \max E + 1$, entonces $n_1 \notin E \Longrightarrow \exists p > n_1$ tal que $v_p > v_{n_1}$. Sea $n_2 = p$ y como $n_2 \notin E \Longrightarrow \exists p > n_2$ tal que $v_p > v_{n_2}$. Sea $n_3 = p, \ldots$, así se construye una subsucesión monótona $(v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, con $v_{n_k} > v_{n_{k'}}$ si $k > k'$.

Si E es infinito, sea $n_1 = \min E$, $n_1 \in E$ y sea $n_2 = \min E \backslash \{n_1\}$, $n_2 \in E$, $n_2 > n_1$, donde si $p > n_2 \Longrightarrow v_p \leq v_{n_2} \leq v_{n_1}$.

Sea $n_3 = \min E \backslash \{n_1, n_2\}$, $n_3 \in E$, $n_3 > n_2 > n_1$, donde si $p > n_3 \Longrightarrow v_p \leq v_{n_3} \leq v_{n_2} \leq v_{n_1}, \ldots$ y se tiene $(v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es decreciente.

140. Consideremos $u_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \cdots + \sqrt{n-1+\sqrt{n}}}}}$ y $v_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \cdots + \sqrt{n-1+\sqrt{2n+1}}}}}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Demostrar que $(u_k)_{n\in\mathbb{N}^*}$ es creciente, $(v_n)_{n\geq 2}$ es decreciente y $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq v_n$.

b) Deducir que $(u_n)_n$ converge a un número real ℓ y que $|v_n - \ell| \leq \dfrac{1}{2^{n-1}((n-2)!)^{\frac{1}{2}}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Solución

a) Considerando que $\sqrt{n+\sqrt{n+1}} > \sqrt{n} \Longrightarrow u_{n+1} = \sqrt{1+\cdots+\sqrt{n+\sqrt{n+1}}} > \sqrt{1+\cdots+\sqrt{n}} = u_n$. Similarmente, $v_{n+1} = \sqrt{1+\cdots+\sqrt{n-1+\sqrt{n+\sqrt{2n+3}}}} \leq \sqrt{1+\cdots+\sqrt{n-1+\sqrt{2n+1}}} = v_n$, puesto que $\sqrt{n+\sqrt{2n+3}} < \sqrt{2n+1}$.

En efecto, si $n > \sqrt{2} \Longrightarrow n^2 > 2 \Longrightarrow n^2+2n+1 > 2n+3 \Longrightarrow n+1 > \sqrt{2n+3} \Longrightarrow 2n+1 > n+\sqrt{2n+3}$.

Por otro lado, es claro que $u_n < v_n$, pues $\sqrt{n} < \sqrt{2n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) Considerando las conclusiones de la parte a) tenemos $u_1 \leq u_n \leq v_n \leq v_1$ i.e. ambas sucesiones convergen con $\lim u_n \leq \lim v_n$.

Sea $\ell = \lim u_n$, entonces $|u_n - \ell| = \ell - u_n \leq v_n - u_n =$

$$\sqrt{1+\cdots+\sqrt{n-1+\sqrt{2n+1}}} - \sqrt{1+\cdots+\sqrt{n-1+\sqrt{n}}} =$$

$$\frac{\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n-1+\sqrt{2n+1}}} - \sqrt{2+\cdots+\sqrt{n-1+\sqrt{n}}}}{\sqrt{1+\cdots+\sqrt{n-1+\sqrt{2n+1}}} + \sqrt{1+\cdots+\sqrt{n-1+\sqrt{n}}}} =$$

$$\frac{\sqrt{3+\cdots+\sqrt{n-1+\sqrt{2n+1}}} - \sqrt{3+\cdots+\sqrt{n-1+\sqrt{n}}}}{\sqrt{1+\cdots+\sqrt{n-1+\sqrt{2n+1}}} + \sqrt{1+\cdots+\sqrt{n-1+\sqrt{n}}}} \frac{1}{\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2n+1}}\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n}}}$$

$$= \cdots = \frac{2n+1-n}{(\sqrt{1+\cdots+\sqrt{2n+1}}+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{n}})\cdots(\sqrt{n-1+\sqrt{2n+1}}+\sqrt{n-1+\sqrt{n}})} \leq$$

$$\frac{n+1}{(\sqrt{2n+1}+\sqrt{n})(2\sqrt{n-1})(2\sqrt{n-2})\cdots 2} = \frac{n+1}{(\sqrt{2n+1}+\sqrt{n})2^{n-1}\sqrt{n-1}\cdots\sqrt{1}} \leq$$

$$\frac{1}{2^{n-1}((n-2)!)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{n+1}{(\sqrt{2n+1}+\sqrt{n})\sqrt{n-1}} \leq \frac{1}{2^{n-1}((n-2)!)^{\frac{1}{2}}}, \text{ puesto que}$$

$$\frac{n+1}{(\sqrt{2n+1}+\sqrt{n})\sqrt{n-1}} \leq 1, \text{ si } n \geq 2.$$

141. Sean $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones reales tales que $u_n \longrightarrow 0$, $v_n \longrightarrow 0$, $(v_n > v_{n+1} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*)$. Se supone que $\dfrac{u_n - u_{n+1}}{v_n - v_{n+1}}$ tiene un límite finito ℓ, cuando $n \to \infty$. Demostrar que $\dfrac{u_n}{v_n} \longrightarrow \ell$.

Solución Por hipótesis dado $\epsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N \Longrightarrow \left|\dfrac{u_n - u_{n+1}}{v_n - v_{n+1}} - \ell\right| < \epsilon$ y como $v_n - v_{n+1} > 0$ tenemos $(-\epsilon+\ell)(v_n - v_{n+1}) \leq u_n - u_{n+1} \leq (\epsilon+\ell)(v_n - v_{n+1})$, $\forall n \geq N$. Sumando $p-n$ términos para los valores $n+1, n+2, \ldots, p$, se tiene $(-\epsilon+\ell)(v_n - v_p) \leq u_n - u_p \leq (\epsilon+\ell)(v_n - v_p)$, $\forall n \geq N$, $\forall p \geq N$, por lo que $(-\epsilon+\ell)\big(1 - \dfrac{v_p}{v_n}\big) \leq \dfrac{u_n}{v_n} - \dfrac{u_p}{v_n} \leq (\epsilon+\ell)\big(1 - \dfrac{u_p}{v_n}\big)$ y si tomamos $p \to \infty$, $-\epsilon + \ell \leq \dfrac{u_n}{v_n} \leq \epsilon + \ell$ i.e. $\dfrac{u_n}{v_n} \longrightarrow \ell$.

142. Sea $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión real tal que $u_{n+1} - u_n - u_n^2 \longrightarrow 0$. Probar que $u_n \longrightarrow 0$ o $u_n \longrightarrow +\infty$.

Solución Sea $\epsilon_n = u_{n+1} - u_n - u_n^2$, con $\epsilon_n \longrightarrow 0$, entonces $\exists N$ tal que $n \geq N \Longrightarrow |\epsilon_n| < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Caso 1. Existe $n_0 \geq N$ tal que $u_{n_0} > 1 \Longrightarrow u_{n_0+1} = u_{n_0} + u_{n_0}^2 + \epsilon_n > u_{n_0} > 1 \Longrightarrow (u_n)_{n\geq n_0} \uparrow$ y tiende a $+\infty$, pues $u_{n+1} \geq u_n^2 \geq u_{n-1}^{2^2} \geq u_{n-2}^{2^3} \geq \cdots \geq u_{n_0}^{2^{n-n_0+1}} \longrightarrow +\infty$.

Caso 2. Existe $n_0 \geq N$ tal que $u_{n_0} < -2 \Longrightarrow u_{n_0+1} = u_{n_0} + u_{n_0}^2 + \epsilon_n > u_{n_0}^2 + u_{n_0} + \epsilon_n > u_{n_0}^2 + u_{n_0} - 1 > 1$ y caemos en el caso 1, o sea $u_n \longrightarrow +\infty$.

Caso 3. $-2 \leq u_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$ i.e. la sucesión es acotada. Así existe (u_{n_k}) una subsucesión convergente $x_{n_k} \longrightarrow \ell$ y como $u_{n_k+1} - u_{n_k} - u_{n_k}^2 \longrightarrow 0 \Longrightarrow u_{n_{k+1}} \longrightarrow \ell + \ell^2$, entonces $u_{n_k+2} \longrightarrow \ell + \ell^2 + (\ell + \ell^2)^2 > \ell + 2\ell^2, \ldots, u_{n_k+p} \longrightarrow \ell + p\ell^2$, pero $\exists p$ tal que $\ell + p\ell^2 > 1 \Longrightarrow u_{n_k+p} > 1$ y diverge pues caemos en el caso 1. La única posibilidad es que $\ell = 0$.

Si $u_n \not\longrightarrow 0$, existe una subsucesión $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $|u_{n_k}| > \epsilon$, $\forall k \in \mathbb{N}$, pero (u_{n_k}) es acotada, lo que implica que existe $(u_{n_{k_l}})_{l \in \mathbb{N}}$ subsucesión tal que $u_{n_{k_l}} \longrightarrow 0$ que es imposible pues $|u_{n_{k_l}}| > \epsilon$. Por lo tanto la suposición $u_n \not\longrightarrow 0$ es falsa y $u_n \longrightarrow 0$.

143. Demuestre que las sucesiones siguientes son adyacentes.

a) $u_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$, $v_n = u_n + \dfrac{1}{n!}$.

Es claro que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente pues $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{(n+1)!} \geq u_n$. Por otro lado $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es decreciente ya que $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \dfrac{1}{(n+1)!} - \dfrac{1}{n!} = \dfrac{2}{(n+1)!} - \dfrac{1}{n!} = \dfrac{-n+1}{(n+1)!} \leq 0$, si $n \geq 1$. Además, $u_n \leq v_n$.

b) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^p}$, $v_n = u_n + \dfrac{1}{n^{p-1}}$, $p \geq 2$, p fijo.

i) Veamos que $u_n \leq v_n$, pues $\dfrac{1}{n^{p-1}} > 0, \forall p \geq 2$.

ii) $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{(n+1)^p} \geq u_n$.

iii) $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \dfrac{1}{(n+1)^p} - u_n - \dfrac{1}{n^{p-1}} = \dfrac{1}{(n+1)^{p-1}} - \dfrac{1}{n^p} + \dfrac{1}{(n+1)^p} = \dfrac{(n+1)n^{p-1} - (n+1)^p + n^{p-1}}{(n+1)^p n^{p-1}} = \dfrac{n^p + 2n^{p-1} - (n+1)^p}{(n+1)^p n^{p-1}} < 0$, pues $(n+1)^p = n^p + pn^{p-1} + \frac{1}{2}\, p(p-1)n^{p-2} + \cdots + pn + 1$.

c) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{kk!}$, $v_n = u_n + \dfrac{1}{n^2 n!}$.

i) $u_n \leq v_n$ por la definición.

ii) $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{(n+1)(n+1)!} \geq u_n$.

iii) $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \dfrac{1}{(n+1)^2(n+1)!} - \dfrac{1}{n^2 n!} = \dfrac{1}{(n+1)(n+1)!} + \dfrac{1}{(n+1)^2(n+1)!} - \dfrac{1}{n^2 n!} = \dfrac{n^2(n+1) + n^2 - (n+1)^3}{(n+1)^2 n^2 (n+1)!} = -\dfrac{n^2 + 3n + 1}{(n+1)^2 n^2 (n+1)!} < 0$.

d) $u_n = \sum_{k=0}^{2n+1} \dfrac{(-1)^k}{(2k)!}$, $v_n = u_n + \dfrac{1}{(4n+4)!}$ y probar que el límite es irracional.

i) Dado que $v_n = u_n + \dfrac{1}{(4n+4)!} \geq u_n$.

ii) Sea $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{2n+3} \dfrac{(-1)^k}{(2k)!} = u_n + \dfrac{1}{(4n+4)!} - \dfrac{1}{(4n+6)!} = u_n + \dfrac{(4n+5)(4n+6) - 1}{(4n+6)!} \geq u_n$.

iii) Sea $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \dfrac{1}{(4n+8)!} - \dfrac{1}{(4n+4)!} = \dfrac{1}{(4n+8)!} - \dfrac{1}{(4n+4)!} < 0$. Por otro lado, sabemos que $\ell = \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n > 0$ y supongamos que $\ell = \dfrac{p}{q}$, con $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}^*$ y $(p,q) = 1$. Así se tiene que $u_q < \ell < v_q$ por lo que $u_q = \sum_{k=0}^{2q+1} \dfrac{(-1)^k}{(2k)!} < \dfrac{p}{q} < \sum_{k=0}^{2q+1} \dfrac{(-1)^k}{(2k)!} + \dfrac{1}{(4q+4)!} \implies n = (4q+2)!u_q = (4q+2)! - \dfrac{2}{(4q+2)!} + \cdots + (-1)^{2q}\dfrac{(4q+2)!}{(4q)!} + (-1)^{2q+1} < \dfrac{p}{q}(4q+2)! = k < (4q+2)! - \cdots + (-1)^{2q}\dfrac{(4q+2)!}{(4q)!} + (-1)^{2q+1} + \dfrac{1}{(4q+3)(4q+4)}$. De este modo $n < k < n + \dfrac{1}{(4q+3)(4q+4)} \implies k = \dfrac{p}{q}(4q+2)! \in \mathbb{N}^*$ que es imposible.

e) $u_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{k^2(k+1)^2}$, $v_n = u_n + \dfrac{1}{3n^2}$.

i) En virtud de la definición $u_n + \dfrac{1}{3n^2} = v_n \geq u_n$.

ii) Tomando $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{n^2(n+1)^2} > u_n$.

iii) La diferencia $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \dfrac{1}{3(n+1)^2} - \dfrac{1}{3n^2} = \dfrac{1}{n^2(n+1)^2} + \dfrac{1}{3(n+1)^2} - \dfrac{1}{3n^2} - \dfrac{3+n^2-(n+1)^2}{3(n+1)^2n^2} = \dfrac{2-2n^2}{3(n+1)^2n^2} \leq 0$, para $n \geq 1$.

f) $u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{n} - \ln n$, $v_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{n} - \ln n$.

i) Puesto que $u_n = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \dfrac{2}{n} - \ln n \leq \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{n} - \ln n = v_n$.

ii) Sea $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{n+1} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{n} - \ln n = \dfrac{2}{n} - \dfrac{1}{n+1} - \ln\dfrac{n+1}{n} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n} - \ln(1+\dfrac{1}{n}) \geq 0$, pues $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} > 0$ y $\forall x > 0$, $x > \ln(x+1)$.

iii) Consideremos $v_{n+1} - v_n = \sum_{k=1}^{n+1} \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{n+1} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{n} + \ln n \dfrac{2}{n+1} - \dfrac{1}{n} - \ln\dfrac{n+1}{n} = \dfrac{2n-(n+1)}{n(n+1)} - \ln(1+\dfrac{1}{n}) = (\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2})(1 - \dfrac{1}{n} + o(\dfrac{1}{n})) - (\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + o(\dfrac{1}{n^2})) = -\dfrac{3}{2n^2} + o(\dfrac{1}{n^2}) < 0$.

g) $u_n = (1+\dfrac{1}{n})^n$, $v_n = (1+\dfrac{1}{n})^{n+1}$.

i) Tomando $v_n = (1+\dfrac{1}{n})^n(1+\dfrac{1}{n}) = u_n(1+\dfrac{1}{n}) > u_n$.

ii) Sea $u_{n+1} = \mathrm{e}^{(n+1)\ln(1+\frac{1}{n+1})} = \mathrm{e}^{(n+1)(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2} + \frac{1}{3(n+1)^3} + o(\frac{1}{(n+1)^3}))} = \mathrm{e}(1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{n+1} + 3\dfrac{1}{(n+1)^2} - \dfrac{1}{2}\big(-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{n+1}\big)^2 + o(\dfrac{1}{(n+1)^2})) = \mathrm{e}(1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{23}{8}\dfrac{1}{(n+2)^2} + o(\dfrac{1}{(n+1)^2}))$, por lo tanto $u_{n+1} - u_n = \dfrac{\mathrm{e}}{2}(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}) + o(\dfrac{1}{n^2}) > 0$.

iii) Desarrollando $v_n = \mathrm{e}^{(n+1)\ln(1+\frac{1}{n})} = \mathrm{e}^{(n+1)(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2}))} = \mathrm{e}\big(1 + \dfrac{1}{2n} - \dfrac{2}{3n^2} + \dfrac{1}{4n^2} + o(\dfrac{1}{n^2})\big) = \mathrm{e}(1 + \dfrac{1}{2n} - \dfrac{5}{12n^2} + o(\dfrac{1}{n^2}))$, por lo tanto $v_{n+1} - v_n = \mathrm{e}(-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{5}{6n^3} + o(\dfrac{1}{n^3})) < 0$.

h) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$, $v_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$.

i) Tenemos que $u_n \leq v_n$, pues $-2\sqrt{n+1} < -2\sqrt{n}$.

ii) El término $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \dfrac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+2} - \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}} + 2\sqrt{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+2} -$

$\sqrt{n+1}) = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} \geq 0$, pues $\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1} > 2\sqrt{n+1}$.

iii) Tomando $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}) = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} < 0$.

i) $u_n = \prod_{k=1}^{n}(1+\dfrac{1}{k^2})$, $v_n = (1+\dfrac{1}{n})u_n$.

i) $u_n < (1+\dfrac{1}{n})u_n = v_n$.

ii) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \dfrac{1}{(n+1)^2} > 1$.

iii) $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{u_{n+1}}{v_n}\dfrac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}} = \dfrac{(n+1)^2+1}{(n+1)^2}\cdot\dfrac{n+2}{n+1}\cdot\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{n^4+4n^3+6n^2+4n}{n^4+4n^3+6n^2+4n+1} < 1$.

144. Sea $u_0,\ v_0 > 0,\ p \geq q > 0,\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definida por $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{pu_n+qv_n}{p+q},\ v_{n+1} = \dfrac{pv_n+qv_n}{p+q}$.

a) Demostrar que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son adyacentes.

b) En un plano afín se considera el punto M_n de coordenados (u_n, v_n), ¿la sucesión M_n tiene un límite?

Solución

a) Sin perder generalidad consideremos $u_0 < v_0$.

i) Verifiquemos que $u_n \leq v_n$ por inducción. Verifiquemos que es válido para $n = 1$. Sea $\alpha = \dfrac{p}{p+q} \geq \dfrac{1}{2}$, $1-\alpha = \dfrac{q}{p+q}$, entonces $0 < v_0 - u_0 \Longrightarrow (1-2\alpha)(v_0-u_0) < 0 \Longrightarrow v_0 - v_0 + 2\alpha(u_0-v_0) = \alpha(u_0 - v_0) + (1-\alpha)(v_0-u_0) = \dfrac{p}{p+q}(u_0-v_0) + \dfrac{q}{p+q}(v_0-u_0) < 0 \Longrightarrow \dfrac{pu_0+qv_0}{p+q} = u_1 < \dfrac{qv_0+pv_0}{p+q} = v_1$. Supongamos que es válido para n y probemos que es válido para $n+1$. En efecto, copinando el argumento anterior se tiene el resultado sustituyendo v_0 por v_n y u_0 por u_n ya que $0 < v_n - u_n$ por la hipótesis de inducción.

ii) Probemos que $(u_n)_n$ es creciente y que $(v_n)_n$ es decreciente usando la inducción. Veamos el caso $n = 1$; $u_1 = \alpha u_0 + (1-\alpha)v_0 \geq \alpha u_0 + (1-\alpha)u_0 = u_0$. $v_1 = \alpha v_0 + (1-\alpha)u_0 \leq \alpha v_0 + (1-\alpha)v_0 = v_0$. Verifiquemos que el caso n implica el caso $n+1$: $u_{n+1} = \alpha u_n + (1-\alpha)v_n \geq \alpha u_n + (1-\alpha)u_n = u_n$ ya que $v_n \geq u_n$. Similarmente $v_{n+1} = \alpha v_n + (1-\alpha)u_n \leq \alpha v_n + (1-\alpha)v_n = v_n$.

b) Observemos que $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} v_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$, con A matriz simétrica dada por $\begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & \alpha \end{pmatrix}$, por lo tanto nos interesa diagonalizar la matriz. Dado que A es simétrica, existe P ortogonal tal que $PAP' = D$ con D matriz diagonal de valores propios, por lo tanto $D^n = PAP' \cdots PAP' = PA^nP' \Longrightarrow A^n = P'D^nP$. Calculemos los valores propios de A, o sea $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} \alpha-\lambda & 1-\alpha \\ 1-\alpha & \alpha-\lambda \end{vmatrix} = (\alpha-\lambda)^2 - (1-\alpha)^2 = 0 \Longrightarrow \lambda = 1, \lambda = 2\alpha - 1$. Los vectores propios son $A\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1$, $A\mathbf{u}_2 = (2\alpha-1)\mathbf{u}_2 \therefore \mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. Para el vector $\mathbf{u}_2$ debemos tener $\alpha x + (1-\alpha)y = (2\alpha-1)x$, $(1-\alpha)x + \alpha y = (2\alpha-1)y \Longrightarrow y = \frac{\alpha-1}{1-\alpha}x = -x \therefore \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$. Así tenemos que $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix} \therefore \begin{pmatrix}u_n\\v_n\end{pmatrix} = P'DP = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(2\alpha-1)^n & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_0\\v_0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}(2\alpha-1)^n+1 & -(2\alpha-1)^n+1\\-(2\alpha-1)^n+1 & (2\alpha-1)^n+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_0\\v_0\end{pmatrix}$. Por otro lado, como $0<\alpha<1 \Longrightarrow -1<2\alpha-1<1$ y se tiene cuando $n\to\infty$: $\begin{pmatrix}\ell'\\\ell''\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_0\\v_0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}u_0+v_0\\u_0+v_0\end{pmatrix}$ y $\ell' = \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = \ell'' = \frac{1}{2}(u_0+v_0)$.

145. Sean $a, b > 0$, determinar una condición necesaria y suficiente sobre $u_0 v_0 \geq 0$, para que las sucesiones $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas por $u_{n+1} = \sqrt{a+bu_n}$, $v_{n+1} = \sqrt{a+bv_n}$ sean adyacentes.

Solución Para que $u_n \leq v_n \iff a + bu_{n-1} < a + bv_{n-1} \iff u_{n-1} \leq v_{n-1} \iff u_0 \leq v_0$. Por otro lado $u_{n+1} = \sqrt{a+bu_n} \geq u_n \iff a + bu_n \geq u_n^2 \iff u_n$ está entre las raíces de la ecuación de segundo grado $x^2 - bx - a = 0$, es decir $\frac{b-\sqrt{b^2+4a}}{2} \leq 0 \leq u_n \leq \frac{b+\sqrt{b^2+4a}}{2}$.
También $v_n^2 \leq a + bv_n \iff v_n^2 - bv_n - a \leq 0 \iff v_n \geq \frac{b+\sqrt{b^2+4a}}{2}$ o $v_n \leq \frac{b-\sqrt{b^2+4a}}{2} \leq 0$, pero las soluciones negativas deben eliminarse y $0 \leq u_n \leq \frac{b+\sqrt{b^2+4a}}{2} \leq v_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, o sea $0 \leq v_0 \leq \frac{b+\sqrt{b^2+4a}}{2} \leq v_0$.

Capítulo 6

Series numéricas

6.1 Introducción

Definición 6.1.1 *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales y sea la sucesión $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Al símbolo $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ lo llamamos serie infinita o simplemente serie y a los valores S_n, sumas parciales de la serie. Si la sucesión $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un valor $\alpha \in \mathbb{R}$, se dice que la serie es convergente y escribimos $\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.*
Si la sucesión $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, se dice que la serie diverge.
El término a_n se denomina término general de la serie. Al valor α se le llama también suma de la serie.

Nota En estas condiciones la diferencia $S - S_n$ se denomina resto de la serie. Esta cantidad es el límite, cuando $m \to \infty$ de $S_m - S_n = \sum_{k=n+1}^{m} a_k$, lo que justifica el empleo de la notación $S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$.

Proposición 6.1.1 *Si las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son convergentes, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)$ converge a $\alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*

Demostración Si $\alpha = 0$ o $\beta = 0$ es resultado es evidente. Analicemos el caso en que α y β no son nulos.
Sea $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, entonces dado $\epsilon > 0$, $\exists\, N_1 \in \mathbb{N}$ y $N_2 \in \mathbb{N}$ tales que si $n \geq \max\{N_1, N_2\}$, se tiene $|\sum_{k=1}^{n} a_n - A| \leq \epsilon/(2|\alpha|)$ y $|\sum_{k=1}^{n} b_n - B| \leq \epsilon/(2|\beta|)$, por lo que $|\sum_{k=1}^{n}(\alpha a_k + \beta b_k) - \alpha A - \beta B| \leq \big|\alpha\big(\sum_{k=1}^{n} a_k - A\big)\big| + \big|\beta\big(\sum_{k=1}^{n} b_k - B\big)\big| \leq |\alpha|\epsilon/(2|\alpha|) + |\beta|\epsilon/(2|\beta|) = \epsilon$.

Proposición 6.1.2 *La serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge sii $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que si n, $m \geq N$ se tiene $|\sum_{k=n}^{m} a_k| \leq \epsilon$.*

Demostración Es una consecuencia del criterio de Cauchy aplicado a $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pues dado $\epsilon > 0$, la sucesión $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge sii $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m-1 \geq N$ con $n > m$ implican $|S_n - S_{m-1}| = |\sum_{k=m}^{n} a_k| \leq \epsilon$.

Proposición 6.1.3 *Si la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *converge, entonces* $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ *o equivalentemente, si* $\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0$, *la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *diverge.*

Demostración Tomando $m = n-1$ se tiene $|S_n - S_{n-1}| = |a_n| < \epsilon$, si $n > N$.

Observación El recíproco de esta proposición es falso pues aunque $\dfrac{1}{n} \longrightarrow 0$, la serie armónica $\sum_{i=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ es divergente. En efecto, $\sum_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k} \leq \ln n \leq \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

Ejemplo

i) La serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge sii $|x| < 1$.
En efecto, $1 + x + \cdots + x^n = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ si $x \neq 1$, entonces $\dfrac{1-x^n}{1-x} \longrightarrow \dfrac{1}{1-x}$ si $|x| < 1$.
Si $|x| = 1$, entonces $S_n = n+1$ para $x = 1$ y $S_n = \frac{1}{2}(1-(-1)^{n+1})$ para $x = -1$. Claramente la serie diverge en ambos casos.
Si $|x| > 1$ no hay convergencia, pues $x^n \longrightarrow \infty$ para $x > 1$ y $x^n \longrightarrow \pm\infty$ para $x < -1$, según si n es par o impar.

ii) La serie $\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1}$ converge sii $|x| < 1$.
Observe que $1+2x+\cdots+nx^{n-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2} + \dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n}{(1-x)^2}$ si $x<1$, entonces $\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} \longrightarrow \dfrac{1}{(1-x)^2}$ si $|x| < 1$.
Si $|x| = 1$, entonces $S_n = \frac{1}{2}(n+1)n$ para $x = 1$ y $S_n = \frac{1}{4}\left(1 - 2n(-1)^n - (-1)^n\right)$ para $x = -1$. La serie diverge en ambos casos.
Si $|x| > 1$ no hay convergencia, pues $x^n \longrightarrow \infty$ para $x > 1$ y $x^n \longrightarrow \pm\infty$ para $x < -1$, según si n es par o impar.

Proposición 6.1.4 *Si la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge y la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *diverge, entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ *diverge.*

Demostración Se deja de ejercicio.

6.2 Series telescópicas

Definición 6.2.1 *Sean* $(a_n)_n$ *y* $(b_n)_n$ *dos sucesiones tales que* $a_n = b_{n+1} - b_n$, *entonces se dice que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es telescópica.*

Proposición 6.2.1 *Sean* $(a_n)_n$ *y* $(b_n)_n$ *dos sucesiones tales que* $a_n = b_{n+1} - b_n$, *entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge sii la sucesión* $(b_n)_n$ *converge y en cuyo caso* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = b_1 - \ell$, *donde* $\ell = \lim_{n\to\infty} b_n$.

Demostración La prueba es innmediata, desde que $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1}$.

Ejemplo

1) La serie de término general $\dfrac{1}{n(n+1)}$ es telecópica.

En efecto, $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = 1 - \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 1$.

2) Determine el el límite de la serie de término general $\arctan \dfrac{1}{n^2+n+1}$.

Recordemos que $\arctan \dfrac{a-b}{1+ab} = \arctan a - \arctan b$, si $ab > -1$ y si $a_n = \arctan \dfrac{1}{n^2+n+1} = \arctan \dfrac{n+1-n}{n^2+n+1} = \arctan(n+1) - \arctan n$, por lo tanto $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \frac{1}{2}\pi - \arctan 0 = \frac{1}{2}\pi$.

3) Determine el límite de la serie de término general $\dfrac{1}{(n+x)(n+x+1)(n+x+2)}$, con $x > 0$.

Notemos que:

$\dfrac{1}{(n+x)(n+x+1)(n+x+2)} = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{1}{(n+x)(n+x+1)} - \dfrac{1}{(n+x+1)(n+x+2)}\Big)$ y que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+x)(n+x+1)(n+x+2)} = \dfrac{1}{2(x+1)(x+2)}$.

4) Determine el límite de la serie de término general $\ln \dfrac{n}{n+1}$.

Como $\ln \dfrac{n}{n+1} = \ln n - \ln(n+1)$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \dfrac{n}{n+1}$ diverge.

6.3 Series de términos positivos

Proposición 6.3.1 *Una serie de términos positivos converge sii sus sumas parciales forman una sucesión acotada.*

Demostración Es claro que las sumas parciales $S_n \geq 0$ (los $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$) y es creciente ($S_{n+1} - S_n = a_{n+1} \geq 0$). Así, la sucesión $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y acotada, es decir es convergente.

Proposición 6.3.2 Criterio del comparación *Si las series de términos positivos $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son tales que $a_n \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces:*

i) Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también converge.

ii) Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ también diverge.

Demostración

i) Dado que $a_n \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n} b_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k$, es decir la sucesión $\big(\sum_{k=1}^{n} a_k\big)_{n\in\mathbb{N}}$ que es creciente, también es acotada y por lo tanto la serie converge.

ii) Similarmente, como $a_n \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, se tiene que $0 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n} b_k$. Pero la sucesión $\big(\sum_{k=1}^{n} a_k\big)_{n\in\mathbb{N}}$ no es acotada y como es creciente, tiende a infinito, por lo que $\big(\sum_{k=1}^{n} b_k\big)_{n\in\mathbb{N}}$ también tiende a infinito, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es divergente.

Nota En realidad el resultado es válido si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ se cumple $a_n \leq b_n$.

Corolario 6.3.1 Regla de Riemann *Sea $(a_n)_n$ una sucesión de términos positivos y supongamos que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to\infty} n^\alpha a_n = \ell$ finito o infinito.*

i) Si $\alpha > 1$ y si ℓ es finito, la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge.

ii) Si $\alpha \leq 1$ y si $\ell \neq 0$, la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$ diverge.

Demostración En efecto, en el primer caso $a_n \sim \dfrac{\ell}{n^\alpha}$ y claramente converge.
En el segundo caso, $\alpha \leq 1$ y $a_n \sim \dfrac{\ell}{n^\alpha}$ diverge.

Proposición 6.3.3 Criterio del límite *Si las series de términos positivos $\sum_{k=1}^\infty a_n$ y $\sum_{n=1}^\infty b_n$ son tales que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = A > 0$, entonces las series $\sum_{n=1}^\infty a_n$ y $\sum_{n=1}^\infty b_n$ son ambas convergentes o divergentes.*

Demostración Dado $A > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ se tiene $\left|\dfrac{a_n}{b_n} - A\right| < \frac{1}{2}A$, es decir $\frac{1}{2}Ab_n < a_n < \frac{3}{2}Ab_n$ y por la proposición 6.3.2 se tiene el resultado.

Proposición 6.3.4 Criterio del cociente de d'Alembert *Si la serie de términos positivos $\sum_{k=1}^\infty a_n$ es tal que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$, entonces:*

i) si $\ell < 1$, la serie converge

ii) si $1 < \ell \leq \infty$, la serie diverge

iii) si $\ell = 1$, no hay criterio.

Demostración

i) Sea $\epsilon = \frac{1}{2}(1-\ell) > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ se tiene $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n} - \ell\right| \leq \frac{1}{2}(1-\ell)$, o sea $0 \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1}{2}(1+\ell) = \beta < 1$. Así, para $n \geq N$ se tiene $a_n \leq a_N\beta^{n-N}$ y la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$ converge, pues la serie $a_N \sum_{k=N}^\infty \beta^k$ converge ya que $0 < \beta < 1$.

ii) Sea $\epsilon = \frac{1}{2}(\ell - 1) > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ se tiene $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n} - \ell\right| \leq \frac{1}{2}(\ell-1)$, o sea $1 < \frac{1}{2}(1+\ell) = \beta < \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Así, para $n \geq N$ se tiene $a_N\beta^n \leq a_n$ y la serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$ diverge, pues la serie $a_N \sum_{k=N}^\infty \beta^k$ diverge ya que $1 < \beta$.

iii) Basta un par de ejemplos para verificar la afirmación. La serie $\sum_{n=1}^\infty \dfrac{1}{n}$ diverge y la serie $\sum_{n=1}^\infty \dfrac{1}{n^2}$ converge. Sin embargo en ambos casos $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{(n+1)^2} = \ell = 1$.

Proposición 6.3.5 Criterio de la raíz (Cauchy) *Sea $\sum_{n=1}^\infty a_n$ una serie de términos positivos tal que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$, entonces:*

i) si $\ell < 1$, la serie converge

ii) si $1 < \ell \leq \infty$, la serie diverge

iii) si $\ell = 1$, no hay criterio.

Demostración

i) Sea $\epsilon = \frac{1}{2}(1-\ell) > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ se tiene $\left|\sqrt[n]{a_n} - \ell\right| \leq \frac{1}{2}(1-\ell)$, o sea $0 \leq \sqrt[n]{a_n} < \frac{1}{2}(1+\ell) = \beta < 1$. Así, para $n \geq N$ se tiene $a_n \leq \beta^n$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, pues la serie $\sum_{k=N}^{\infty} \beta^k$ converge ya que $0 < \beta < 1$.

ii) Sea $\epsilon = \frac{1}{2}(\ell-1) > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ se tiene $\left|\sqrt[n]{a_n} - \ell\right| \leq \frac{1}{2}(\ell-1)$, o sea $1 < \frac{1}{2}(1+\ell) = \beta < \sqrt[n]{a_n}$. Así, para $n \geq N$ se tiene $\beta^n \leq a_n$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, pues la serie $\sum_{k=N}^{\infty} \beta^k$ diverge ya que $1 < \beta$.

iii) Basta con los ejemplos de la proposición anterior, pues como sabemos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ diverge y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ converge y en ambos casos $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{n^2}} = \ell = 1$.

Ejemplo Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n}$ y de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

En la primera serie el criterio el cociente dice que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}n!} = \dfrac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \longrightarrow \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ y la serie converge.

El criterio de la raíz para la segunda serie $\sqrt[n]{a_n} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = \dfrac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \longrightarrow \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ y la serie también converge.

Teorema 6.3.1 Criterio de la integral *Sea f una función decreciente y positiva definida para todo $x \geq 1$. Para $n \geq 1$ se define $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$ y $t_n = \displaystyle\int_1^n f(t)dt$, entonces ambas sucesiones convergen o ambas sucesiones divergen.*

Demostración El argumento de la demostración es sencillo, pues basta con notar que $\sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \displaystyle\int_1^n f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k)$.

Ejemplo

1) La serie de Riemann $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ converge sii $p > 1$, pues $\displaystyle\int_1^n \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \dfrac{n^{1-p}-1}{1-p} & \text{si } p \neq 1 \\ \ln n & \text{si } p = 1. \end{cases}$

2) La serie de Bertrand $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n(\ln n)^p}$ converge sii $p > 1$, dado que:

$$\int_2^n \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \begin{cases} \dfrac{(\ln n)^{1-p} - (\ln 2)^{1-p}}{1-p} & \text{si } p \neq 1 \\ \ln\ln n - \ln\ln 2 & \text{si } p = 1. \end{cases}$$

Teorema 6.3.2 *Sean $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ dos sucesiones de modo que $a_n > 0$, $b_n > 0$, para todo $n \geq N$, con $N \in \mathbb{N}$ y sea $c_n = b_n - b_{n+1}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, entonces:*

i) Si existe $r > 0$ tal que $0 < r < c_n$, $\forall n \geq N$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

ii) Si $c_n \leq 0$, $\forall n \geq N$ y si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{b_n}$ diverge, también diverge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Demostración

i) Dado que existe $r > 0$ tal que $\forall n \geq N$, $0 < r < c_n = c_n = b_n - b_{n+1}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ se tiene $0 < ra_n < a_n c_n = b_n a_n - b_{n+1}a_{n+1}$ y $0 < r\sum_{k=1}^{n} a_k < b_1 a_1 - b_{n+1}a_{n+1}$. Así, $0 < \sum_{k=N}^{n} a_k < (b_N a_N - b_{n+1}a_{n+1})/r \leq b_N a_N/r$, es decir la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

ii) Si $c_n \leq 0$, $\forall n \geq N$ se tiene $0 \leq \dfrac{b_n}{b_{n+1}} \leq \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, por lo que $\ln b_n - \ln b_{n+1} \leq \ln a_{n+1} - \ln a_n$ y $\ln b_1 - \ln b_{n+1} \leq \ln a_{n+1} - \ln a_1$, o sea $0 \leq \dfrac{b_1}{b_{n+1}} \leq \dfrac{a_{n+1}}{a_1}$. En consecuencia, si $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{b_n}$ diverge, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Teorema 6.3.3 Criterio de Raabe *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos, si existen $r > 0$ y $N \geq 1$ tales que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \dfrac{1}{n} - \dfrac{r}{n}$, para todo $n \geq N$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge si $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 - \dfrac{1}{n}$, para todo $n \geq N$.*

Demostración Basta tomar en cuenta el Teorema 6.3.2 y considerar $b_{n+1} = n$. En efecto, si $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \dfrac{1}{n} - \dfrac{r}{n}$, $\forall n \geq N$, se tiene $0 < n\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq n - 1 - r$ y $0 < r \leq (n-1) - n\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = b_n - b_{n+1}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
Si $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 - \dfrac{1}{n}$, se tiene $n\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq n - 1 \Longrightarrow b_{n+1}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq b_n$, es decir $c_n = b_n - b_{n+1}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq 0$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Teorema 6.3.4 Criterio de Gauss *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos, si existen $s > 1$, $N \geq 1$ y $M > 0$ tales que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \dfrac{A}{n} + \dfrac{f(n)}{n^s}$, $\forall n \geq N$, donde $|f(n)| < M$, $\forall n \geq N$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si $A > 1$ y diverge si $A \leq 1$.*

Demostración Consideremos primeramente el caso $A = 1$, entonces $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{f(n)}{n^s}$, $\forall n \geq N$ y sea $b_{n+1} = n\ln n$. Sea $c_n = b_n - b_{n+1}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = (n-1)\ln(n-1) + n\ln n(1 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{f(n)}{n^s}) = (n-1)\ln(1 - \dfrac{1}{n}) + \ln n\dfrac{f(n)}{n^{s-1}} = -1 + o(1) + \ln n\dfrac{f(n)}{n^{s-1}}$.
Sea $\epsilon = \frac{1}{4}$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_1$, $|o(1)| \leq \epsilon$ y $\left|\ln n\dfrac{f(n)}{n^{s-1}}\right| \leq M\dfrac{\ln n}{n^{s-1}} \leq \epsilon$, por lo tanto $c_n = -1 + o(1) + \ln n\dfrac{f(n)}{n^{s-1}} \leq -1 + \epsilon + \epsilon = -\frac{1}{2} < 0$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
Si $A < 1$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \dfrac{A}{n} + \dfrac{f(n)}{n^s} = 1 - \dfrac{A}{n} + \dfrac{1-A}{n} + \dfrac{f(n)}{n^s}$. Sea $\epsilon = 1 - A$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, $\left|\dfrac{f(n)}{n^{s-1}}\right| \leq \dfrac{M}{n^{s-1}} < \epsilon$, es decir $-\dfrac{1-A}{n} < \dfrac{M}{n^s} < \dfrac{1-A}{n}$ con lo cual se verifica $0 \leq \dfrac{1-A}{n} + \dfrac{f(n)}{n^s}$ o sea $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 - \dfrac{1}{n}$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.
Si $A > 1$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \dfrac{A}{n} + \dfrac{f(n)}{n^s} = 1 - \dfrac{A}{n} + \dfrac{A-1}{n} + \dfrac{f(n)}{n^s}$. Sea $\epsilon = \frac{1}{2}(1-A)$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

si $n \geq N$, $\left|\dfrac{f(n)}{n^s}\right| < \epsilon$, es decir $\left|\dfrac{f(n)}{n^s}\right| < \dfrac{A-1}{2n}$. Así, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \frac{1}{n} - \frac{r}{n}$ con $r = \frac{1}{2}(A-1)$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Ejemplo Usar el criterio de Gauss para probar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \cdots (2n)}\right)^k$ converge si $k > 2$ y diverge si $k \leq 2$.

El cociente $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\dfrac{2n+1}{2n+2}\right)^k = (1 - \dfrac{1}{2n+2})^k = 1 - \dfrac{k}{2}\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{k^2}{8}\dfrac{1}{(n+1)^2} + o(\dfrac{1}{n^2}) = 1 - \dfrac{k}{2n}(1 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}) + \dfrac{k^2}{8n^2}(1 - \dfrac{2}{n} + \dfrac{3}{n^2}) + o(\dfrac{1}{n^2}) = 1 - \dfrac{k}{2n} + \dfrac{k/2 + k^2/8 + o(1)}{n^2}$. Se define $f(n) = k/2 + k^2/8 + o(1)$ y se tiene $|f(n)| \leq M = |k|/2 + k^2/8 + 1$, pues dado $\epsilon = 1$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ se tiene que $|o(1)| \leq 1$.

Finalmente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si $A = k/2 > 1$ y diverge si $A = k/2 \leq 1$.

6.4 Convergencia condicional y absoluta de series

Definición 6.4.1 *Sea dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge, se dice condicionalmente convergente.*

El interés de esta noción viene de la siguiente proposición.

Proposición 6.4.1 *Una serie absolutamente convergente es convergente.*

Demostración Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente, tenemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, es decir dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n,\ m \geq N$ se tiene $\sum_{k=n}^{m} |a_k| < \epsilon$, pero $|\sum_{k=n}^{m} a_k| \leq \sum_{k=n}^{m} |a_k| < \epsilon$ lo que prueba que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente por el criterio de Cauchy para sucesiones.

Corolario 6.4.1 *Si $|a_n| \leq b_n$, $\forall n \geq N_0 \in \mathbb{N}$ y si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también converge.*

Demostración La prueba es inmediata pues la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente.

Teorema 6.4.1 *Si en la serie absolutamente convergente $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ se denotan $a_1, a_2, a_3,$*
$\ldots$ los términos positivos y $-b_1, -b_2, -b_3, \ldots$ los términos negativos, entonces cada una de las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente y $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.
Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ es condicionalmente convergente, cada una de las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es divergente.

Demostración Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ es absolutamente convergente, entonces para $M = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ se tiene $|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$. Así, $|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| \leq M$, $|b_1| + |b_2| + \cdots + |b_n| \leq M$,

$\forall n \in \mathbb{N}$ y las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son absolutamente convergentes i.e. son convergentes.

Supongamos ahora que tenemos p_n términos positivos y q_n términos negativos en los n primeros términos, es decir $u_1 + \cdots + u_n = (a_1 + \cdots + a_{p_n}) - (b_1 + \cdots + b_{q_n})$, si hay convergencia absoluta, se toman límites y se tiene $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Notemos que si la serie es condicionalmente convergente significa que tenemos una infinidad de términos positivos y una infinidad de términos negativos, es decir $p_n \to \infty$ y $q_n \to \infty$, cuando $n \to \infty$. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente pues es la suma de dos series que convergen, pero tendríamos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ es absolutamente convergente lo que contarice la hipótesis de convergencia condicional.

En conclusión, ambas series deben ser divergentes.

6.4.1 Reordenamiento de términos

Si consideramos dos series $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ convergentes y si sumamos los términos generales el resultado de esta nueva serie será, la suma de las series originales, es decir que si definimos $w_n = u_n + v_n$ se tiene $\sum_{n=1}^{\infty} w_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Sin embargo hay casos en que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ puede ser convergente y si sumamos los términos en diferente orden el resultado es distinto al valor original de la serie e inclusive puede ser infinito.

Ejemplo Reordenando la serie de $\ln 2 = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + (-1)^n \dfrac{1}{n} + \cdots$, de modo que se sumen dos términos positivos y uno negativo se tiene:

$\frac{3}{2} \ln 2 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots$.

En efecto, como $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \cdots$ y $\frac{1}{2} \ln 2 = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + \cdots$, entonces $\frac{3}{2} \ln 2 = 1 + 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots$.

Por otro lado, dado que $1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \cdots + \dfrac{1}{2k-1} + \cdots$ diverge, se puede encontrar un $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \cdots + \dfrac{1}{2k_1 - 1} > 2$. El próximo término que se toma es $-\dfrac{1}{2}$, la suma parcial es mayor que $\dfrac{3}{2}$ y se toman los próximos k_2 términos de modo que la suma se mayor que 4 y otro término negativo $-\dfrac{1}{4}$. Continuando con esta construcción se forman sumas parciales tales que cuando se toma el término $-\dfrac{1}{2n}$, el total sea mayor que $2n - \dfrac{1}{n}$. La serie así formada es divergente. Sin embargo, esto no sucede con las series absolutamente convergentes.

Teorema 6.4.2 *Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ es absolutamente convergente de suma u y si $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ es una serie obtenida reordenando los términos de $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ es convergente de suma igual a u.*

Demostración Consideremos primeramente el caso en que los términos son positivos. Así cada suma parcial $\sum_{k=1}^{n} v_k \leq u$, por lo que $\sum_{k=1}^{n} v_k \longrightarrow v \leq u$. Similarmente, cada suma parcial $\sum_{k=1}^{n} u_k \leq v$, por lo que $\sum_{k=1}^{n} u_k \longrightarrow u \leq v$, es decir $u = v$.

En el caso de una serie absolutamente convergente se tiene por el Teorema 6.4.1 que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, donde $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es la serie de términos positivos y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es la serie de términos negativos. La serie reordenada $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n - \sum_{n=1}^{\infty} b'_n = v$, donde $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ es una reordenación de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b'_n$ es una reordenación de $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, pero por ser ambas de términos positivos se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} b'_n$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ es convergente con suma u.

6.4.2 Multiplicación de series

Teorema 6.4.3 *Si cada una de las series $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ son absolutamente convergentes a u y v respectivamente, la serie producto $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ tiene por término general $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$, es absolutamente convergente y $\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = u{\cdot}v$.*

Demostración Sea $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$, $W_k = \sum_{k=0}^{n} w_k$, $\beta_n = V_n - v$, $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$, entonces $W_n = u_0v_0 + (u_0v_1 + u_1v_0) + \cdots + (u_0v_n + u_1v_{n-1} + \cdots + u_nv_0) = u_0V_n + u_1V_{n-1} + u_2V_{n-2} + \cdots + u_nV_0 = u_0(v + \beta_n) + u_1(v + \beta_{n-1}) + \cdots + u_n(v - \beta_0) = u_nv + u_0\beta_n + u_1\beta_{n-1} + \cdots + u_n\beta_0$. Sea $\gamma_n = u_0\beta_n + u_1\beta_{n-1} + \cdots + u_n\beta_0$, entonces si $\gamma \longrightarrow 0$ tenemos que $W_n \longrightarrow u{\cdot}v$, que es lo que necesitamos probar. En efecto, dado $\epsilon > 0$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_1$ se tiene $|\beta_n| \leq \frac{1}{2}\epsilon/\alpha$ y existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_2$ se tiene $\sum_{k=N_2}^{n} |u_k| \leq \frac{1}{2}\epsilon/\max_{n\in\mathbb{N}} |\beta_n|$. En particular si se toma $n \geq 2N_2$, $n - N_2 \geq N_2$ y se tiene $\sum_{k=n-N_2}^{n} |u_k| \leq \frac{1}{2}\epsilon/\max_{n\in\mathbb{N}} |\beta_n|$. Sea $N = \max\{N_1, 2N_2\}$, entonces si $n \geq 2N$ se verifica que $|\gamma_n| \leq |u_0\beta_n + u_1\beta_{n-1} + \cdots + u_{n-N+1}\beta_{N+1}| + |u_{n-N}\beta_N + \cdots + u_n\beta_0|$
$\leq \frac{1}{2}\epsilon(|u_0| + |u_1| + \cdots + |u_{n-N+1}|)/\alpha + \frac{1}{2}\epsilon \max_{n\in\mathbb{N}} |\beta_n|/\max_{n\in\mathbb{N}} |\beta_n| \leq \epsilon$.

Una interrogante que tiene cabida en este tema es si las series $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ convergen (sin ser absolutamente convergentes) la serie producto $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ converge y su suma $w = u{\cdot}v$. La respuesta es afirmativa, pero se necesitan otros elementos para resolver esta cuestión. Se dará una demostración de este hecho en el capítulo de Series de Potencias.

6.4.3 Otros criterios

Proposición 6.4.2 *Sean $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ dos sucesiones y sea $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, entonces $\sum_{k=1}^{n} a_kb_k = A_nb_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} A_k(b_k - b_{k+1})$.*

Demostración En efecto, $\sum_{k=1}^{n} a_kb_k = \sum_{k=1}^{n}(A_k - A_{k-1})b_k = \sum_{k=1}^{n} A_kb_k - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1}b_k = \sum_{k=1}^{n} A_kb_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_kb_{k+1} = A_nb_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} A_k(b_k - b_{k+1})$, pues $A_0 = 0$.

Teorema 6.4.4 Criterio de Dirichlet *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie cuyas sumas parciales forman una sucesión acotada y sea $(b_n)_n$ una sucesión decreciente que converge a 0, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge.*

Demostración Sabemos que existe $M > 0$ tal que $|A_n| \leq M$, entonces $A_n b_{n+1} \longrightarrow 0$. Falta probar que $\sum_{k=1}^{n} A_k(b_k - b_{k+1})$ es convergente. Pero, $|\sum_{k=1}^{n} A_k(b_k - b_{k+1})| \leq M \sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k+1}) = M(b_1 - b_{n+1}) \longrightarrow Mb_1$ y la serie converge.

Teorema 6.4.5 Criterio de Abel *Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie convergente y sea $(b_n)_n$ una sucesión monótona convergente, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge.*

Demostración Dado que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, la sucesión $(A_n)_n$, con $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ es convergente y $A_n b_{n+1}$ también converge. Así, $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} A_k(b_k - b_{k+1})$ es convergente.

Teorema 6.4.6 Criterio de condensación de Cauchy *Sea $(a_n)_n$ una sucesión positiva y decreciente, entonces la serie convergente sii la serie $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ converge.*

Demostración Sea $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, entonces $(S_n)_n$ converge sii $(S_n)_n$ es acotada, pues $a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Además $(S_n)_n \uparrow$ converge sii $(S_{2^n})_n \uparrow$ converge.
Definamos $K_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k a_{2^k}$. Notemos que:

$S_2 = a_1 + a_2 \leq 2a_1 = a_1 + K_0$

$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \leq a_1 + 1a_1 + 2a_2 = a_1 + K_1$

$S_8 = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_8 \leq a_1 + 1a_1 + 2a_2 + 4a_4 = a_1 + K_2$

$\vdots$

$S_{2^n} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^n} \leq a_1 + 1a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^{n-1}a_{2^{n-1}} = a_1 + K_{n-1}$,

por lo tanto si $(K_n)_n$ es acotado (es decir converge), $(S_{2^n})_n$ converge y $(S_n)_n$ converge. Inversamente,

$K_0 = a_1 \leq a_1$

$K_1 = a_1 + 2a_2 \leq 2(a_1 + a_2) = 2S_2$

$K_2 = a_1 + 2a_2 + 4a_4 \leq a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 2a_4 \leq 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = 2S_4$

$K_3 = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 \leq 2(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_8) \leq 2S_8$

$\vdots$

$K_{2^n} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^n a_{2^n} \leq 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{2^n}) = 2S_{2^n}$.

Una fórmula de gran utilidad en la práctica, es la fórmula de Stirling para la función $\Gamma(x)$, que está dada por:

$$\boxed{\Gamma(x+1) = x^{x+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-x}\sqrt{2\pi}\big(1+\frac{1}{12x}+\frac{1}{288x^2}-\frac{139}{51840x^3}+\cdots\big)}.$$

En el caso que $x+1=n\in\mathbb{N}$ se tiene $n! = \Gamma(n+1)$. En la mayoría de los casos es suficiente usar al aproximación $n! \sim n^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi}$, pero en problemas más delicados aproximaciones de mayor orden se requieren.

6.5 Series alternadas

Vamos a estudiar un caso particular de series, donde se puede analizar directamente la convergencia, sin pasar por la convergencia absoluta.

Definición 6.5.1 *Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es alternada si $a_n = (-1)^{n-1}u_n$, donde $(u_n)_n$ es una sucesión de términos positivos.*

Teorema 6.5.1 Teorema de Leibniz *Si la sucesión $(a_n)_n \downarrow$ y si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ converge. Si $S = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ y $S_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k$, se tienen las desigualdades $0 < (-1)^n(S-S_n) < a_{n+1}$, $\forall n \geq 1$.*

Demostración Las sumas parciales $S_{2n+2}-S_{2n} = a_{2n+1}-a_{2n+2}>0$, $S_{2n+1}-S_{2n-1} = a_{2n+1}-a_{2n}<0$ y $S_{2n}-S_{2n-1} = -a_{2n}<0$. Así, $S_2<S_4<\cdots<S_{2n}<S_{2n-1}<\cdots<S_5<S_3<S_1$, por lo tanto $S_{2n} \longrightarrow S'$ y $S_{2n+1} \longrightarrow S''$, pues son sucesiones monótonas y acotadas. Pero $S_{2n} - S_{2n-1} = -a_{2n} \longrightarrow 0$ y $S = S' = S''$.

Ahora, $S_{2n} < S_{2n+2} < S < S_{2n+1} < S_{2n-1}$ lo que implica $0 < S - S_{2n} \leq S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1}$ y $0 < S_{2n+1} - S \leq S_{2n-1} - S_{2n} = a_{2n}$.

Ejemplo

a) La serie armónica alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$ converge, pero no es absolutamente convergente, pues $|a_n| = \dfrac{1}{n}$ y la serie armónica diverge.

b) En general la serie de Riemann alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n^\alpha}$ converge. Si $\alpha > 1$ la serie es absolutamente convergente.

c) Es importante destacar que los criterios de comparación de series no se pueden extender al caso general en que los términos no son positivos. Puede suceder que dos series tengan términos generales equivalentes y una converja y la otra diverja. En efecto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$ converge y la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\big((-1)^n\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n}\big)$ diverge teniéndose que $(-1)^n\dfrac{1}{n} \sim (-1)^n\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n}$.

6.6 Ejercicios

1. Calcule, en caso de convergencia, el valor de la suma de la serie. Aquí $\beta > 0$ es un número real.

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^2-1}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n + 2^{3n-1}}{3^{4n}}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{7^n}$

d) $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\Big(1-\dfrac{1}{n^2}\Big)$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{(n+1)!}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\Big(\dfrac{1}{n^2+n+1}\Big)$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{-2^{n-1}}{(1+2^n)(1+2^{n-1})}$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+\beta)(n+\beta+1)}$

k) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, 3^{-n}$

l) $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\Big(\dfrac{2}{n^2}\Big)$

m) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\Big(\dfrac{n^2+3n+2}{n^2+3n}\Big)$

n) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{6^n}{(3^{n+1}-2^{n+1})\,(3^n-2^n)}$

o) $\sum_{n=0}^{\infty} \arctan \dfrac{1}{n^2+3n+3}$

p) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{2n^3-3n^2+1}{(n+3)!}$

r) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\dfrac{2}{n(n+3)}\right)$

s) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)(n+3)}$

t) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n} \tan \dfrac{1}{2^n}$

Solución

a) $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^2-1}$

Se tiene que $\sum_{n=2}^{m} \dfrac{1}{n^2-1} = \dfrac{1}{2}\sum_{n=2}^{m} \big(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1}\big) = \dfrac{1}{2}\Big[\sum_{n=2}^{m}\big(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}\big)+\sum_{n=2}^{m}\big(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\big)\Big] = \dfrac{1}{2}\Big[1-\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{m+1}\Big] \longrightarrow \dfrac{3}{4}$.

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n + 2^{3n-1}}{3^{4n}}$

La expresión se escribe $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\dfrac{1}{3^4}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2^3}{3^4}\right)^n = \dfrac{1}{1+1/3^4}+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1-2^3/2^4}$
$= \dfrac{81}{82}+\dfrac{1}{2}\dfrac{2^4}{2^3} = \dfrac{163}{82}$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{7^n}$

En este caso $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)\left(-\dfrac{1}{7}\right)^n = \dfrac{1}{7}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\dfrac{1}{7}\right)^n = \dfrac{1}{7}\dfrac{1}{1+1/7} = \dfrac{1}{8}$.

d) $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\Big(1-\dfrac{1}{n^2}\Big)$

Puesto que $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\dfrac{n^2-1}{n^2} = \sum_{n=2}^{\infty}(\ln(n^2-1)-\ln n^2) = \lim_{m\to\infty}\Big(\sum_{n=2}^{m}(\ln(n^2-1)-\ln n^2) = \sum_{n=2}^{m}(\ln(n+1)-\ln n)-\sum_{n=2}^{m}(\ln n-\ln(n-1)) = \ln(m+1)-\ln 2-\ln m = \ln(1+\dfrac{1}{m})-\ln 2\Big) = -\ln 2$.

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{(n+1)!}$

Recordemos que $\dfrac{e^x-1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{(n+1)!}$ y derivando $\dfrac{xe^x - e^x + 1}{x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx^{n-1}}{(n+1)!}$ y si $x = 1$, $1 = \dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} + \cdots + \dfrac{n}{(n+1)!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{(n+1)!}$.

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\Big(\dfrac{1}{n^2+n+1}\Big)$

Tomemos $\alpha = n+1$, $\beta = n$, entonces $\tan(\arctan\alpha - \arctan\beta) = \dfrac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta} = \dfrac{1}{n^2+n+1}$. Así $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\Big(\dfrac{1}{n^2+n+1}\Big) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m}(\arctan(n+1) - \arctan n) = \lim_{m\to\infty} \arctan(m+1) - \arctan 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$.

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{-2^{n-1}}{(1+2^n)(1+2^{n-1})}$

Se deduce que $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{-2^{n-1}}{(1+2^n)(1+2^{n-1})} = \lim_{m\to\infty} \Big(\sum_{n=1}^{m} (\frac{1}{1+2^n} - \frac{1}{1+2^{n-1}}) = \frac{1}{1+2^m} - \frac{1}{2}\Big) = -\frac{1}{2}$.

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$

Escribamos la expresión $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}] = \frac{1}{2}\Big[\sum_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}] - \sum_{n=1}^{\infty} [\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}]\Big] = \frac{1}{2} \lim_{m\to\infty} \Big[\sum_{n=1}^{m} [\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}] - \sum_{n=1}^{m} [\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}] = 1 - \dfrac{1}{m+1} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{m+2}\Big] = \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$

Se verifica que $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\dfrac{-\frac{1}{2}}{n+1} + \dfrac{2}{n+2} + \dfrac{-\frac{3}{2}}{n+3}\Big) = \lim_{m\to\infty} \Big(\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{m} (-\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2}) + \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{m} (\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}) = \frac{1}{2}(-\frac{1}{2} + \frac{1}{m+2}) + \frac{3}{2}(\frac{1}{3} - \frac{1}{m+3})\Big) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+\beta)(n+\beta+1)}$

Se obtiene que $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+\beta)(n+\beta+1)} = \lim_{m\to\infty} \Big[\sum_{n=1}^{m} (\frac{1}{n+\beta} - \frac{1}{n+\beta+1}) = \dfrac{1}{1+\beta} - \dfrac{1}{m+\beta+1}\Big] = \dfrac{1}{\beta}$.

k) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, 3^{-n}$

Se sabe que $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ y que $\dfrac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$, si $|x| < 1$ con lo cual tenemos $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(\frac{1}{3})^n = \dfrac{1}{(1-x)^2}\Big|_{x=\frac{1}{3}} = \dfrac{9}{4}$.

l) $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\Big(\dfrac{2}{n^2}\Big)$

Sabemos que $\tan(\arctan\alpha - \arctan\beta) = \dfrac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta}$. Así, si tomamos $\alpha = \dfrac{1}{n-1}$, $\beta = \dfrac{1}{n+1}$, se tiene $\tan(\arctan\alpha - \arctan\beta) = \dfrac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta} = \dfrac{2}{n^2}$, lo que conduce a $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\Big(\dfrac{2}{n^2}\Big) = \lim_{m\to\infty}\Big[\sum_{n=2}^{m}\big(\arctan\dfrac{1}{n-1} - \arctan\dfrac{1}{n}\big) + \sum_{n=2}^{m}\big(\arctan\dfrac{1}{n} - \arctan\dfrac{1}{n+1}\big) + \arctan 2 = \arctan 1 + \arctan\dfrac{1}{2} - \arctan\dfrac{1}{m} - \arctan\dfrac{1}{m+1} + \arctan 2\Big] = \arctan 2 + \arctan\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\pi$.

m) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\Big(\dfrac{n^2+3n+2}{n^2+3n}\Big)$

Factorizando se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\dfrac{(n+2)(n+1)}{n(n+3)} = \lim_{m\to\infty}\Big[\sum_{n=1}^{m}\big(\ln(n+2) - \ln(n+3) + \ln(n+1) - \ln n\big) = -\ln(m+3) + \ln 3 + \ln(m+1) = \ln 3 + \ln\dfrac{m+1}{m+3}\Big] = \ln 3$.

n) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{6^n}{(3^{n+1}-2^{n+1})(3^n-2^n)}$

Reescribiendo la expresión se tiene $\dfrac{6^n}{(3^{n+1}-2^{n+1})(3^n-2^n)} = \dfrac{-3}{3-2(\frac{2}{3})^n} + \dfrac{1}{1-(\frac{2}{3})^n} = -\dfrac{1}{1-(\frac{2}{3})^{n+1}} + \dfrac{1}{1-(\frac{2}{3})^n}$, lo que conduce al resultado $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{6^n}{(3^{n+1}-2^{n+1})(3^n-2^n)} = \dfrac{1}{1-\frac{2}{3}} - 1 = 2$.

o) $\sum_{n=0}^{\infty} \arctan\dfrac{1}{n^2+3n+3}$

Notemos que $\arctan\dfrac{1}{n^2+3n+3} = \arctan\dfrac{(n+2)-(n+1)}{1+(n+1)(n+2)} = \arctan(n+2) - \arctan(n+1)$ y se tiene $\sum_{n=0}^{\infty} \arctan\dfrac{1}{n^2+3n+3} = \lim_{m\to\infty}\Big[\sum_{n=0}^{m} \arctan(n+2) - \arctan(n+1) = \arctan(m+2) - \arctan 1\Big] = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4}$.

p) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{2n^3-3n^2+1}{(n+3)!}$

Veamos que $2n^3-3n^2+1 = 2(n+1)(n+2)(n+3) - 15n^2 - 22n - 11 = 2(n+1)(n+2)(n+3) - 15(n+2)(n+3) + 53(n+3) - 80$, por lo que $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{2n^3-3n^2+1}{(n+3)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\dfrac{2}{n!} - \dfrac{15}{(n+1)!} + \dfrac{53}{(n+2)!} - \dfrac{80}{(n+3)!}\Big) = 2e - 15(e-1) + 53(e-2) - 80(e-\frac{5}{2}) = 109 - 40e$, pues $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!} = e$.

r) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\big(1 + \dfrac{2}{n(n+3)}\big)$

Reescribamos el término general $a_n = \ln\dfrac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)} = \ln(n+1) + \ln(n+2) - \ln n - \ln(n+3)$ y así se tiene $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\big(1 + \dfrac{2}{n(n+3)}\big) = \lim_{m\to\infty}\Big[\sum_{n=1}^{m}\big(\ln(n+1) + \ln(n+2) - \ln n - \ln(n+3)\big) = \ln 3 + \ln\dfrac{n+1}{n+3}\Big] = \ln 3$.

s) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)(n+3)}$

Puesto que $\dfrac{1}{n(n+1)(n+3)} = \dfrac{1}{3n} - \dfrac{1}{2(n+1)} + \dfrac{1}{6(n+3)} = \dfrac{1}{3n} - \dfrac{1}{3(n+1)} - \dfrac{1}{6(n+1)} + \dfrac{1}{6(n+2)} - \dfrac{1}{6(n+2)} + \dfrac{1}{6(n+3)}$ se tiene que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)(n+3)} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{12} - \dfrac{1}{18} = \dfrac{7}{36}$.

t) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \tan \frac{1}{2^n}$

Dado que $\operatorname{cotg} x - 2\operatorname{cotg} 2x = \tan x$ tenemos $\frac{1}{2^n} \tan \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n} \operatorname{cotg} \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}} \operatorname{cotg} \frac{1}{2^{n-1}}$ y $\lim_{m\to\infty} \left[\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n} \tan \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^m} \operatorname{cotg} \frac{1}{2^m} - \operatorname{cotg} 1 \right] = 1 - \operatorname{cotg} 1$, puesto que $\frac{1}{2^m} \operatorname{cotg} \frac{1}{2^m} \sim \frac{1}{2^m} \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{1}{2^m}} \longrightarrow 1$.

2. Analice el comportamiento de la serie $\sum_n a_n$ cuyo término general a_n se indica. Compruebe que se cumplen las hipótesis de los criterios que emplee.

a) $a_n = (\tan(a + b/n))^n$, $a \in \,]\, 0, \frac{1}{2}\pi\, [$, $b \in \mathbb{R}$

b) $a_n = (1 - \frac{1}{n})^{n^\beta}$, $\beta > 0$

c) $a_n = \ln \dfrac{\cosh 1/n}{\cos 1/n}$

d) $a_n = (-1)^n/\sqrt{n}$

e) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$, $n \geq 2$

f) $a_n = \dfrac{n+2}{n^3+1}$

g) $a_n = \dfrac{n^2}{n!}$

h) $a_n = \dfrac{1}{5+n}$

i) $a_n = \tan \pi/\sqrt{n}$

j) $a_n = \dfrac{n}{2^n}$

k) $a_n = \operatorname{sen}(n + a/n)\pi$

l) $a_n = \dfrac{n}{1 + a^n}$

m) $a_n = \dfrac{1+n^2}{n!}$

n) $a_n = \dfrac{1}{n} \operatorname{sen} \pi/\sqrt{n}$

o) $a_n = \dfrac{1}{x^n + 1/x^n}$, $x \in \mathbb{R}$

p) $a_n = \mathrm{e}^{-(n^2+1)/(n+1)}$

q) $a_n = \dfrac{n}{1{\cdot}2{\cdot}3 \cdots (2n-1)}$

r) $a_n = \ln\big(1 + \frac{1}{n^2}\big)$

s) $a_n = \dfrac{n^3}{(n+1)!}$

t) $a_n = \dfrac{n(n+1)}{(n+2)^3}$

u) $a_n = \operatorname{sen}^n(a + b/n)$

v) $a_n = \dfrac{\ln n!}{n!}$

w) $a_n = \dfrac{1! + 2! + \cdots + n!}{(n+2)!}$

x) $a_n = \big(1 + \frac{1}{n}\big)^{n+1/n} - \mathrm{e}$

y) $a_n = \big(1 + 1/n^2\big)^n - 1$

z) $a_n = \big(n \operatorname{sen} 1/n\big)^{n^2} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}$

a′) $a_n = (-1)^n \ln \dfrac{n(n+2)}{n^2 - n + 1}$

b′) $a_n = \operatorname{sen} \pi\sqrt{n^2+1}$

c′) $a_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$

d′) $a_n = \dfrac{\cos n\pi}{\sqrt{n} + (-1)^n}$

e′) $a_n = \dfrac{x(x+1)\cdots(x+n+1)}{n^n}$

f′) $a_n = \ln(\tanh n)$

g′) $a_n = (\ln \cos 1/n)(\ln \operatorname{sen} 1/n)$

h′) $a_n = (\cos 1/n)^{n^\alpha}$, $\alpha > 0$

Solución

a) $a_n = (\tan(a + b/n))^n$, $a \in \,]\, 0, \frac{1}{2}\pi\, [$, $b \in \mathbb{R}$

Es claro que $\sqrt[n]{a_n} = \tan(a + b/n) \longrightarrow \tan a$.

Si $\tan a < 1$, es decir $a \in \,]\,0, \frac{1}{4}\,\pi\,[$, la serie es convergente.

Si $\tan a > 1$, es decir $a \in \,]\,\frac{1}{4}\,\pi, \frac{1}{2}\pi\,[$, la serie es divergente.

Si $\tan a = 1$, debe hacerse un estudio directo. Así, $n \ln \tan(\frac{1}{4}\,\pi + b/n) = n \ln \dfrac{1 + \tan b/n}{1 - \tan b/n} = n\big(\ln(1 + \tan(b/n)) - \ln(1 - \tan(b/n))\big) = n\big(b/n + b/n + o(b/n)\big) = 2b + o(1)$ y $a_n \sim \mathrm{e}^{2b}$ y la serie no converge.

b) $a_n = (1 - \dfrac{1}{n})^{n^\beta}$, $\beta > 0$

Tomemos $\ln \sqrt[n]{a_n} = n^{\beta-1} \ln(1 - \dfrac{1}{n}) \sim -n^{\beta-2}$. Así cuando $\beta > 2$, $\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow 0$ y la serie converge, por el criterio de la raíz. Si $\beta \leq 2$, $\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \mathrm{e}^0 = 1$ y el criterio no permite concluir la convergencia o divergencia de la serie.

Si $\beta \in [\,0, 1\,[$, $a_n = \mathrm{e}^{n^\beta \ln(1-\frac{1}{n})} \sim \mathrm{e}^{-n^{\beta-1}} \longrightarrow 1$ y la serie claramente diverge.

Si $\beta = 1$, $a_n \longrightarrow 1/\mathrm{e}$ y la serie diverge, lo que permite concluir la divergencia de la serie para $\beta \in [\,0, 1\,]$.

Si $1 < \beta \leq 2$, $a_n = \mathrm{e}^{n^\beta \ln(1-\frac{1}{n})} \sim \mathrm{e}^{-n^{\beta-1}}$, pero $n^2\mathrm{e}^{-n^{\beta-1}} = \mathrm{e}^{-n^{\beta-1}+2\ln n} \longrightarrow 0$, por lo que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ implica $n^2\mathrm{e}^{-n^{\beta-1}} \leq 1$, es decir $\sum_{n=N}^{\infty} \mathrm{e}^{-n^{\beta-1}} \leq \sum_{n=N}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ y la serie converge.

Finalmente, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \big(1 - \dfrac{1}{n}\big)^{n^\beta}$ converge si $\beta > 1$.

c) $a_n = \ln \dfrac{\cosh 1/n}{\cos 1/n}$

Usando la regla de Riemann tenemos que $n^2 a_n = n^2 \ln \dfrac{\cosh \frac{1}{n}}{\cos \frac{1}{n}} = n^2 \ln \dfrac{1 + \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})}{1 - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})} =$
$n^2 \ln \big((1 + \dfrac{1}{2n^2})(1 + \dfrac{1}{2n^2}) + o(\dfrac{1}{n^2})\big) = n^2 \ln \big(1 + \dfrac{1}{n^2} + o(\dfrac{1}{n^2})\big) = n^2(\dfrac{1}{n^2} + o(\dfrac{1}{n^2})) = 1 + o(1) \longrightarrow 1$ y como $\alpha = 2 > 1$, la serie converge.

d) $a_n = (-1)^n/\sqrt{n}$

Por el teorema de las series alternadas la serie converge, pues $u_n = 1/\sqrt{n}$ es decreciente.

e) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$, $n \geq 2$

Observemos que $a_n \sim (-1)^n/n$ y sin embargo no se puede concluir la convergencia de la serie $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$, pues este resultado sólo es válido para series de términos positivos. Consideremos precisamente la diferencia, es decir $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n + (-1)^n} - \dfrac{(-1)^n}{n} = \dfrac{1}{n^2(1 - (-1)^n\frac{1}{n})}$. Esta serie es de términos positivos y es equivalente a $\dfrac{1}{n^2}$ y por lo tanto converge. Ahora, la serie $\sum_{n=2}^{\infty} u_n$ converge, lo mismo que la serie $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{n}$, por lo que converge también la suma que es precisamente la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$.

f) $a_n = \dfrac{n + 2}{n^3 + 1}$

El término general $a_n \sim \dfrac{1}{n^2}$ y la serie converge.

g) $a_n = \dfrac{n^2}{n!}$

El criterio de d'Alembert nos dice $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)^2}{n^2}\dfrac{n!}{(n+1)!} = \dfrac{n+1}{n^2} \longrightarrow 0$ y la serie converge.

h) $a_n = \dfrac{1}{5+n}$

El término general $a_n \sim \dfrac{1}{n}$ y la serie diverge.

i) $a_n = \tan \pi/\sqrt{n}$

El término general $a_n \sim \dfrac{\pi}{\sqrt{n}}$ y la serie diverge.

j) $a_n = \dfrac{n}{2^n}$

El criterio de d'Alembert establece que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)}{n}\dfrac{2^n}{2^{n+1}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{n+1}{n} \longrightarrow \dfrac{1}{2}$ y la serie converge.

k) $a_n = \operatorname{sen}(n + a/n)\pi$

Usando la fórmula de de la suma de ángulos para el seno tenemos $a_n = \cos(n\pi)\operatorname{sen}(a\pi/n) = (-1)^n \operatorname{sen}(a\pi/n)$ y la serie es alternada para $n \geq 2a$. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}(n + a/n)\pi$ converge.

l) $a_n = \dfrac{n}{1+a^n}$

Si $|a| \leq 1$, el término general de la serie $a_n \not\longrightarrow 0$ y la serie diverge.

Si $|a| > 1$, el término general de la serie $a_n \sim \dfrac{n}{a^n} = u_n$. Ahora, la serie de término general u_n es absolutamente convergente lo que comprueba la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. En efecto, por el criterio de la raíz $\sqrt[n]{|u_n|} = \dfrac{\sqrt[n]{n}}{|a|} \longrightarrow \dfrac{1}{|a|} < 1$.

m) $a_n = \dfrac{1+n^2}{n!}$

Usando el criterio de d'Alembert $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \sim \dfrac{(n+1)^2}{n^2}\dfrac{n!}{(n+1)!} = \dfrac{(n+1)^2}{n^2}\dfrac{1}{n+1} \longrightarrow 0$. La serie converge.

n) $a_n = \dfrac{1}{n}\operatorname{sen}\pi/\sqrt{n}$

El término general de la serie $a_n \sim \pi/n^{3/2}$ y la serie converge.

o) $a_n = \dfrac{1}{x^n + 1/x^n}$, $x \in \mathbb{R}$

Si $|x| < 1$, el término general de la serie $a_n \sim x^n$, pues $x^n \to 0$. Dado que la serie geométrica converge, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{x^n + 1/x^n}$ converge.

Si $|x| > 1$, la conlusión es la misma pues x y $\dfrac{1}{x}$ juegan papeles simétricos.

Si $|x| = 1$, $a_n = \frac{1}{2}$ y diverge pues $a_n \not\longrightarrow 0$.

p) $a_n = \mathrm{e}^{-(n^2+1)/(n+1)}$

Se tiene que $a_n \sim \mathrm{e}^{-n}$, pero la serie es geométrica de razón $\mathrm{e}^{-1} < 1$ y converge, implicando la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-(n^2+1)/(n+1)}$.

q) $a_n = \dfrac{n}{1{\cdot}2{\cdot}3\cdots(2n-1)}$

El criterio de d'Alembert establece que el cociente:

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1{\cdot}2{\cdot}3\cdots(2n-1)}{1{\cdot}2{\cdot}3\cdots(2n+1)}\dfrac{n+1}{n} = \dfrac{n+1}{2n^2(2n+1)} \longrightarrow 0$. La serie converge.

r) $a_n = \ln\big(1+\dfrac{1}{n^2}\big)$

El término general $a_n \sim \dfrac{1}{n^2}$ y converge la serie.

s) $a_n = \dfrac{n^3}{(n+1)!}$

Aplicando el criterio de d'Alembert, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(n+1)^3}{n^3}\dfrac{1}{n+2} \longrightarrow 0$. La serie converge.

t) $a_n = \dfrac{n(n+1)}{(n+2)^3}$

Notemos que $a_n = \dfrac{n(n+1)}{(n+2)^3} \sim \dfrac{1}{n}$ y diverge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n(n+1)}{(n+2)^3}$.

u) $a_n = \operatorname{sen}^n(a+b/n)$

Usando el criterio de la raíz en la serie de término general $|a_n|$, tenemos $\sqrt[n]{|a_n|} = |\operatorname{sen}(a+b/n)| \longrightarrow |\operatorname{sen} a|$. La serie converge absolutamente si $a \neq (2k+1)\pi/2$, o sea si $|\operatorname{sen} a| < 1$.

Si $a = (2k+1)\pi/2$, $a_n = \pm\cos(b/n) \not\longrightarrow 0$ y la serie diverge.

v) $a_n = \dfrac{\ln n!}{n!}$

Notemos que $a_n = \dfrac{\ln n!}{n!} \leq \dfrac{n \ln n}{n!}$, pero esta última serie es convergente debido al criterio de d'Alembert.

En efecto, $\dfrac{(n+1)\ln(n+1)}{n \ln n}\dfrac{n!}{(n+1)!} = \dfrac{(n+1)\ln(n+1)}{n \ln n}\dfrac{1}{n+1} \longrightarrow 0$.

w) $a_n = \dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+2)!}$

Observemos que $a_n = \dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+2)!} = \dfrac{n!}{(n+2)!} + \dfrac{1!+2!+\cdots+(n-1)!}{(n+2)!}$

$\leq \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} + \dfrac{(n-1)(n-1)!}{(n+2)!} = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} + \dfrac{(n-1)}{n(n+1)(n+2)} \leq \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{2}{n^2}$ y la serie converge.

x) $a_n = \big(1+\dfrac{1}{n}\big)^{n+\frac{1}{n}} - \mathrm{e}$

Consideremos $a_n = \big(1+\dfrac{1}{n}\big)^{n+1/n} - \mathrm{e} = \mathrm{e}^{(n+\frac{1}{n})\ln(1+\frac{1}{n})} - \mathrm{e} = \mathrm{e}^{(n+\frac{1}{n})(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2}))} - \mathrm{e} = \mathrm{e}^{1-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})} - \mathrm{e} = \mathrm{e}(1-\dfrac{1}{2n}-1+o(\dfrac{1}{n})) \sim \dfrac{\mathrm{e}}{2n}$. La serie diverge.

y) $a_n = \big(1+\dfrac{1}{n^2}\big)^n - 1$

Podemos escribir $a_n = \mathrm{e}^{n\ln(1+\frac{1}{n^2})} - 1 = \mathrm{e}^{n(\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2}))} - 1 = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})} - 1 \sim \dfrac{1}{n}$ y la serie diverge.

z) $a_n = \big(n \operatorname{sen} 1/n\big)^{n^2} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}$

Consideremos la expresión $a_n = \big(n \operatorname{sen}\frac{1}{n}\big)^{n^2} - e^{-\frac{1}{6}} = e^{n^2 \ln(n \operatorname{sen}\frac{1}{n})} - e^{-\frac{1}{6}} =$ $e^{n^2 \ln(n(\frac{1}{n}-\frac{1}{6n^3}+\frac{1}{5!n^5}+o(\frac{1}{n^5}))} - e^{-\frac{1}{6}} = e^{n^2 \ln(1-\frac{1}{6n^2}+\frac{1}{5!n^4}+o(\frac{1}{n^4}))} - e^{-\frac{1}{6}} = e^{-\frac{1}{6}}(1-\dfrac{1}{180n^2}+o(\dfrac{1}{n^2}))-$ $e^{-\frac{1}{6}} \sim -\dfrac{e^{-\frac{1}{6}}}{180n^2}$. La serie converge.

a′) $a_n = (-1)^n \ln \dfrac{n(n+2)}{n^2-n+1}$

Recordemos que $\ln \dfrac{n(n+2)}{n^2-n+1} = \ln(1+\dfrac{2}{n}) - \ln(1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}) = \dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n}-\dfrac{5}{2n^2}+o(\dfrac{1}{n^2}) \sim \dfrac{3}{n}$, entonces $a_n \sim (-1)^n\dfrac{3}{n} = b_n$. La serie de término general b_n es convergente. Es necesario estudiar la serie de término general $u_n = a_n - b_n = (-1)^n\left[\ln \dfrac{n(n+2)}{n^2-n+1} - \dfrac{3}{n}\right] \sim -\dfrac{5}{2n^2}$, la cual es absolutamente convergente. De esta manera la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, pues es la suma de dos series convergentes, una condicionalmente convergente y la otra absolutamente convergente.

b′) $a_n = \operatorname{sen}\pi\sqrt{n^2+1}$

Sabemos que $\operatorname{sen}\pi(\sqrt{n^2+1}-n) = (-1)^n \operatorname{sen}\pi\sqrt{n^2+1}$, entonces el término general $a_n = \operatorname{sen}\pi\sqrt{n^2+1} =$ $(-1)^n \operatorname{sen}\pi(\sqrt{n^2+1}-n)$. Además, $\pi(\sqrt{n^2+1}-n) = \pi\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$ es claramente decreciente lo que implica la convergencia alternada de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\pi\sqrt{n^2+1}$.

c′) $a_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$

Vemos que $a_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1} = \dfrac{2n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}} \sim 1$ y la serie no converge.

d′) $a_n = \dfrac{\cos n\pi}{\sqrt{n}+(-1)^n}$

Sabemos que el término general $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} \sim \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = b_n$, entonces $a_n - b_n = (-1)^n\left[\dfrac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right] = -\dfrac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}} \sim -\dfrac{1}{n}$. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente pues, es la suma de una serie alternada que converge y una serie divergente.

e′) $a_n = \dfrac{x(x+1)\cdots(x+n-1)}{n^n}$

Aplicando el criterio de d'Alembert, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{x(x+1)\cdots(x+n)}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}} =$ $\dfrac{x+n}{n+1}\dfrac{1}{\big(1+1/n\big)^n} \longrightarrow \dfrac{1}{e} < 1$ y la serie converge.

f′) $a_n = \ln(\tanh n)$

Es claro que $a_n = \ln(\tanh n) = \ln\dfrac{1-e^{-2n}}{1+e^{-2n}} = \ln(1-e^{-2n}) - \ln(1+e^{-2n}) = -2e^{-2n} + o(e^{-2n}) \sim$ $-2e^{-2n}$. La serie de término general $-2e^{-2n}$ es convergente pues, es una serie geométrica de razón $e^{-2} < 1$.

g′) $a_n = (\ln\cos 1/n)(\ln\operatorname{sen} 1/n)$

Un desarrollo de orden 2 establece $\cos\dfrac{1}{n} = 1 - \dfrac{1}{2n^2} + o(\dfrac{1}{n^2})$ y $\operatorname{sen}\dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n} + o(\dfrac{1}{n^2})$, por lo que

$a_n = \big(\ln\cos\frac{1}{n}\big)\big(\ln\operatorname{sen}\frac{1}{n}\big) \sim \big(-\dfrac{1}{2n^2}\big)\big(-\ln n\big) = \dfrac{\ln n}{2n^2}$ y la serie de término general $\dfrac{\ln n}{2n^2}$ es convergente.

h′) $a_n = (\cos 1/n)^{n^\alpha}$, $\alpha > 0$

Usando el logaritmo se tiene $\ln a_n = n^\alpha \ln(1 - \dfrac{1}{2n^2} + o(\dfrac{1}{n^2})) \sim -\frac{1}{2}\, n^{\alpha-2}$ y la serie diverge para $\alpha \leq 2$, pues $a_n \longrightarrow 1$. Además, $a_n \sim \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}n^{\alpha-2}}$, usando el criterio de la raíz nos queda $\sqrt[n]{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}n^{\alpha-2}}} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}n^{\alpha-3}}$ y concluimos la convergencia para $\alpha > 3$. Si $\alpha = 3$, $\sqrt[n]{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}n^{\alpha-2}}} \longrightarrow \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} < 1$ y también converge. Si $2 < \alpha < 3$, $\sqrt[n]{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}n^{\alpha-2}}} \longrightarrow 1$ y el criterio de la raíz no aporta luz al problema. Si se emplea el criterio de Riemann observamos que $n^2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}n^{\alpha-2}} = \mathrm{e}^{2\ln n - \frac{1}{2}n^{\alpha-2}} \longrightarrow 0$ y la serie converge también para $\alpha > 2$. En resumen hay convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (\cos 1/n)^{n^\alpha}$, para $\alpha > 2$.

3. Analice el comportamiento de la serie $\sum_n a_n$ cuyo término general a_n se indica. Compruebe que se cumplen las hipótesis de los criterios que emplee. La letra a indica una constante real positiva. Las letras α y β indican constantes real arbitrarias.

a) $a_n = \dfrac{1}{\ln n}$

b) $a_n = \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

c) $a_n = \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$

d) $a_n = \dfrac{1}{n\,(\ln n)^\beta}$

e) $a_n = \dfrac{1}{n\,(\ln n)\,(\ln\ln n)^\beta}$

f) $a_n = \dfrac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}$

g) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

h) $a_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$

i) $a_n = \sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1}$

j) $a_n = \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$

k) $a_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^{\sqrt{n}}$

l) $a_n = (\sqrt[n]{a} - 1)$

m) $a_n = \left(\sqrt[n]{a} - 1 - \frac{1}{n}\right)$

n) $a_n = \dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$

ñ) $a_n = a^{\sqrt{n}}$

o) $a_n = a^{\ln n}$

p) $a_n = a^{\ln\ln n}$

q) $a_n = (\sqrt[n]{n} - 1)^\beta$

r) $a_n = (\sqrt[n]{n} - 1)^n$

s) $a_n = \left(1 - \dfrac{\ln n}{n}\right)^n$

t) $a_n = n^{-1-1/n}$

u) $a_n = \dfrac{n^\beta}{n!}$

v) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$

w) $a_n = \dfrac{n + \sqrt{n}}{n^2 - n}$

x) $a_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$

Solución

a) $a_n = \dfrac{1}{\ln n}$

Dado que $a_n = \dfrac{1}{\ln n} > \dfrac{1}{n}$, para $n \geq 2$, la serie diverge.

b) $a_n = \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

Se sabe que $a_n = \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}} = \dfrac{1}{e^{\ln n \ln(\ln n)}} = \dfrac{1}{\left(e^{\ln n}\right)^{\ln(\ln n)}} = \dfrac{1}{n^{\ln(\ln n)}} \leq \dfrac{1}{n^2}$, para $n \geq \left[\!\left[e^{e^2} \right]\!\right] + 1$ y la serie converge.

c) $a_n = \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}}$

Usando el criterio de condensación de Cauchy, se tiene:

$2^n a_{2^n} = 2^n \dfrac{1}{(\ln 2^n)^{\ln \ln 2^n}} = 2^n \dfrac{1}{n^{\ln(n \ln 2)} (\ln 2)^{\ln(n \ln 2)}}$. El criterio de la raíz no dice que $\sqrt[n]{2^n a_{2^n}} = 2 \dfrac{1}{n^{\frac{1}{n} \ln(n \ln 2)} (\ln 2)^{\frac{1}{n} \ln(n \ln 2)}} \sim 2 \dfrac{1}{n^{\frac{1}{n} (\ln n + \ln(\ln 2))}} \sim 2 \dfrac{1}{n^{\frac{1}{n} \ln n}} \longrightarrow 2$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ diverge, lo mismo que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

d) $a_n = \dfrac{1}{n (\ln n)^{\beta}}$

Usando el criterio de la integral, $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{dx}{x (\ln x)^{\beta}} = \int_1^{\infty} \frac{du}{u^{\beta}}$ converge sii $\beta > 1$.

e) $a_n = \dfrac{1}{n (\ln n) (\ln \ln n)^{\beta}}$

Usando el criterio de la integral, $\displaystyle\int_{e^e}^{\infty} \frac{1}{(\ln \ln x)^{\beta}} \frac{dx}{x \ln x} = \int_1^{\infty} \frac{du}{u^{\beta}}$ converge sii $\beta > 1$.

f) $a_n = \dfrac{1}{(\ln \ln n)^{\ln n}}$

Usando el criterio de condensación de Cauchy, se tiene:

$2^n a_{2^n} = \dfrac{2^n}{(\ln(n \ln 2))^{n \ln 2}} = \dfrac{2^n}{(\ln n + \ln \ln 2)^{n \ln 2}}$. El criterio de la raíz nos dice que $\sqrt[n]{2^n a_{2^n}} = \dfrac{2}{\left(\ln n + \ln(\ln 2)\right)^{\ln 2}} \longrightarrow 0$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ converge, al igual que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

g) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

Al considerar $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \sim \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ se obtiene la divergencia de la serie, pues $\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ para $n > 1$.

h) $a_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$

Desarrolando la expresión $a_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} = \sqrt[3]{n}(1 + \dfrac{1}{3n} - 1 + o(\sqrt[3]{n})) \sim \dfrac{1}{3n^{2/3}}$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} \right)$ diverge.

i) $a_n = \sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1}$

Desarrolando la expresión $a_n = \sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1} = n(1 + \dfrac{1}{3n^3} - 1 - \dfrac{1}{2n^2} + o(\dfrac{1}{n^3})) \sim -\dfrac{1}{2n}$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1} \right)$ diverge.

j) $a_n = \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$

Se constata que $a_n = \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{n}(\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}} - 1) = \sqrt[n]{n}(1 + \frac{1}{n}\frac{1}{n} - 1 + o(\frac{1}{n^2})) = \frac{1}{n^{2-1/n}} + o(\frac{1}{n^{2-1/n}}) \sim \frac{1}{n^{2-1/n}}$. Así la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}\right)$ es convergente.

k) $a_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^{\sqrt{n}}$

Es claro que $a_n = \dfrac{1}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)^{\sqrt{n}}} \sim \left(\dfrac{1}{2\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}} \leq \left(\dfrac{1}{2\sqrt{n}}\right)^4 = \dfrac{1}{16n^2}$, para $n \geq 16$ y la serie converge.

l) $u_n = (\sqrt[n]{a} - 1)$

Si $a = 1$, $u_n = 0$ y la serie converge. Si $a \neq 1$, $a > 0$ se tiene $u_n = \sqrt[n]{a} - 1 = 1 + \frac{1}{n}\ln a + o(\frac{1}{n}) - 1 \sim \frac{1}{n}\ln a$ y la serie diverge.

m) $u_n = \left(\sqrt[n]{a} - 1 - \frac{1}{n}\right)$

Desarrolando el término general se tiene $u_n = \sqrt[n]{a} - 1 - \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n}\ln a + \frac{1}{n^2}\ln^2 a + o(\frac{1}{n^2}) - 1 - \frac{1}{n} \sim \frac{\ln a - 1}{n} + \frac{\ln^2 a}{n^2}$. La serie converge sii $a = \mathrm{e}$.

n) $a_n = \dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$

Se observa que $a_n = \dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n} = \dfrac{1}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \leq \dfrac{1}{2n^{3/2}}$ y la serie que nos ocupa: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}\right)$ converge.

ñ) $u_n = a^{\sqrt{n}}$

El término $2^n u_{2^n} = 2^n a^{2^{\frac{1}{2}n}}$, entonces el criterio de la raíz establece $\sqrt[n]{2^n u_{2^n}} = 2a^{\frac{1}{n}a^{2^{n/2}}} \longrightarrow 0$, cuando $0 < a < 1$, es decir la serie converge.

Si $a = 1$, $u_n = 1$ y la serie diverge. Si $a > 1$, $u_n \longrightarrow \infty$ y la serie también diverge.

o) $u_n = a^{\ln n}$

Se sabe que la serie de término general $u_n = a^{\ln n}$ converge sii la serie de término general $2^n u_{2^n} = 2^n a^{n \ln 2} = (2a^{\ln 2})^n$ converge. En este caso tenemos una serie geométrica y converge si $2a^{\ln 2} < 1$, es decir si $0 < a < \frac{1}{\mathrm{e}}$.

Si $a \geq \frac{1}{\mathrm{e}}$, $u_n > \frac{1}{n}$ y la serie diverge.

p) $u_n = a^{\ln \ln n}$

Por el criterio de condensación de Cauchy, $2^n u_{2^n} = 2^n a^{\ln n + \ln(\ln 2)}$ y el criterio de la raíz, $\sqrt[n]{2^n u_{2^n}} = 2a^{\frac{1}{n}\ln n + \frac{1}{n}\ln(\ln 2)} \sim 2$. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a^{\ln \ln n}$ diverge.

q) $a_n = (\sqrt[n]{n} - 1)^{\beta}$

Tomando en cuenta que $a_n = (\sqrt[n]{n} - 1)^{\beta} = (\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln n} - 1)^{\beta} = (\frac{1}{n}\ln n + o(\frac{1}{n}\ln n))^{\beta} \sim \frac{1}{n^{\beta}}\ln^{\beta} n$, la serie converge si $\beta > 1$ por el crtiterio de la integral, ya que la integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln^\beta x}{x^\beta} dx$ converge sii $\beta > 1$.

r) $a_n = (\sqrt[n]{n} - 1)^n$

El criterio de la raíz establece que $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{n} - 1 = \frac{1}{n}\ln n + o(\frac{1}{n}\ln n) \sim \frac{1}{n}\ln n \longrightarrow 0$ y la serie $\sum_{n=1}^\infty (\sqrt[n]{n} - 1)^n$ converge.

s) $a_n = \big(1 - \frac{\ln n}{n}\big)^n$

Con el criterio de la raíz tenemos que $\sqrt[n]{a_n} = 1 - \dfrac{\ln n}{n} \longrightarrow 1$ y no aporta luz al problema. Así, mejor desarrollamos el término general $a_n = e^{n\ln\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)} = e^{-n\left(\frac{\ln n}{n} - \frac{1}{2}\frac{\ln^2 n}{n^2} + o(\frac{\ln^2 n}{n^2})\right)} = e^{-\ln n + \frac{1}{2}\frac{\ln^2 n}{n} + o(\frac{\ln^2 n}{n})} \sim \dfrac{1}{n}$. La serie diverge.

t) $a_n = n^{-1-1/n}$

Analizando el término general $a_n = e^{-\ln n - \frac{\ln n}{n}} \sim e^{-\ln n} = \dfrac{1}{n}$ y la serie diverge.

u) $a_n = \dfrac{n^\beta}{n!}$

El criterio de d'Alembert nos conduce a $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(n+1)^\beta}{n^\beta}\dfrac{n!}{(n+1)!} = \dfrac{1}{n+1}(1+\frac{1}{n})^\beta \longrightarrow 0$ y se tiene que la serie converge.

v) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$

Aplicando la fórmula de Stirling, a saber $n! \approx n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}\sqrt{2\pi}$ se tiene que el término general $a_n \sim \dfrac{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}\sqrt{2\pi}}{n^n} = \sqrt{n}e^{-n}\sqrt{2\pi} \leq \dfrac{1}{n^2}$ a partir de algún $N \in \mathbb{N}$, pues $n^{2+\frac{1}{2}} e^{-n}\sqrt{2\pi} \longrightarrow 0$, cuando $n \to \infty$. La serie converge.

w) $a_n = \dfrac{n + \sqrt{n}}{n^2 - n}$

Desarrollando el término general se tiene: $a_n = \dfrac{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}}{n-1} \sim \dfrac{1}{n}$ y la serie $\sum_{n=1}^\infty \big(\dfrac{n+\sqrt{n}}{n^2-n}\big)$ diverge.

x) $a_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$

Usando Stirling se tiene $a_n \sim \dfrac{\left(n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}\sqrt{2\pi}\right)^2}{(2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n}\sqrt{2\pi}} = \dfrac{n^{2n+1}e^{-2n}\sqrt{2\pi}}{(2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n}} = \dfrac{\sqrt{n\pi}}{2^{2n}}$ y claramente la serie $\sum_{n=1}^\infty \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$ converge.

4. Analice el comportamiento de la serie $\sum_n a_n$ cuyo término general a_n se indica. Compruebe que se cumplen las hipótesis de los criterios que emplee. La letra a indica una constante real positiva. Las letras α y β indican constantes reales arbitrarias.

a) $a_n = \dfrac{2^n\, n!}{n^n}$

b) $a_n = \dfrac{3^n\, n!}{n^n}$

c) $a_n = \dfrac{a^n\, n!}{n^n}$

d) $a_n = \dfrac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$

e) $a_n = (-1)^n \dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$

f) $a_n = (-1)^n \dfrac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$

g) $a_n = (\ln n)^{-n}$

h) $a_n = 2^{-1/n}$

i) $a_n = (\ln n)\, \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$

j) $a_n = \dfrac{3^n + n^\beta}{3^n + \ln n}$

k) $a_n = a^n\, n^\beta$

l) $a_n = \arccos(1 - 1/n)$

m) $a_n = (-1)^n \dfrac{(\ln n)^\alpha}{n^\beta}$

n) $a_n = \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$

ñ) $a_n = \tan(1/n) - \operatorname{sen}(1/n)$

o) $a_n = \dfrac{\operatorname{sen}(1/n)}{n}$

p) $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha - n^\beta}$

q) $a_n = n!\, \mathrm{e}^{-n^\beta}$

r) $a_n = (-1)^n\, (1 - \cos(1/n))$

s) $a_n = \dfrac{2{\cdot}4 \cdots (2n)}{3{\cdot}5 \cdots (2n+1)}$

t) $a_n = \dfrac{2{\cdot}4 \cdots (2n)}{5{\cdot}7 \cdots (2n+3)}$

u) $a_n = \left(\dfrac{1{\cdot}3 \cdots (2n-1)}{2{\cdot}4 \cdots (2n)}\right)^\beta$

v) $a_n = n^\beta \left(\dfrac{1}{\sqrt{n-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$

w) $a_n = \dfrac{\operatorname{sen} n\beta}{n}$

x) $a_n = n^\beta\, (\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} + \sqrt{n-1})$

y) $a_n = [\, n \operatorname{sen}(1/n)\,]^{n^\beta}$

z) $a_n = \arctan(n + a) - \arctan(n)$

a′) $a_n = \dfrac{1}{\ln(n!)}$

b′) $a_n = \ln n + \alpha \ln(n+1) + \beta \ln(n+2)$

c′) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$

d′) $a_n = \dfrac{\cos n}{\sqrt{n} + \cos n}$

e′) $a_n = \dfrac{\operatorname{sen} n}{\sqrt{n} + \cos n}$

Solución

a) $a_n = \dfrac{2^n\, n!}{n^n}$

El criterio de d'Alembert conduce a:
$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2^{n+1}(n+1)!}{2^n n!} \dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \dfrac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \longrightarrow \dfrac{2}{\mathrm{e}} < 1$ y claramente la serie $\sum_{n=1}^\infty \dfrac{2^n\, n!}{n^n}$ converge.

b) $a_n = \dfrac{3^n\, n!}{n^n}$

El criterio de d'Alembert establece:
$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{3^{n+1}(n+1)!}{3^n n!} \dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \dfrac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \longrightarrow \dfrac{3}{\mathrm{e}} > 1$ y evidentemente la serie $\sum_{n=1}^\infty \dfrac{3^n\, n!}{n^n}$ diverge.

c) $u_n = \dfrac{a^n\, n!}{n^n}$

El criterio de d'Alembert se aplica aquí:
$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{a^{n+1}(n+1)!}{a^n n!} \dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \dfrac{a}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \longrightarrow \dfrac{a}{\mathrm{e}}$ y la serie $\sum_{n=1}^\infty \dfrac{a^n\, n!}{n^n}$ converge, si $a < \mathrm{e}$ y

diverge si $a > \mathrm{e}$. Si $a = \mathrm{e}$, $u_n \sim \dfrac{\mathrm{e}^n n^{n+\frac{1}{2}}\, \mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi}}{n^n} = \sqrt{2\pi n}$ y la serie también diverge.

d) $a_n = \dfrac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$

Puesto que $a_n = \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \sim \frac{1}{n}\mathrm{e}$, la serie diverge.

e) $a_n = (-1)^n \dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$

Basta con verificar que $u_n = \dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \downarrow 0$, para probar la convergencia de la serie alternada. En efecto, $\dfrac{n+2}{n+1} > \dfrac{n+1}{n} > 1 \implies \left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} > \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n \implies (n+1)^{2n+2} < n^n(n+2)^{n+2} \implies$ $\dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+2)^{n+2}} < \dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$ y $u_n = \dfrac{1}{(1+\frac{1}{n})^n(n+1)} \longrightarrow \dfrac{1}{\mathrm{e}}\cdot 0 = 0$.

f) $a_n = (-1)^n \dfrac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$

En este problema basta también con verificar que $u_n = \dfrac{(n+1)^n}{n^{n+1}} \downarrow 0$, para probar la convergencia de la serie alternada. En efecto, $(n+2)n < (n+1)^2 \implies 1 < \left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} < \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n+1} \implies$ $\dfrac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+2}} < \dfrac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$ y $u_n = \dfrac{(1+\frac{1}{n})^n}{n} \longrightarrow \mathrm{e}\cdot 0 = 0$.

g) $a_n = (\ln n)^{-n}$

Se constata que $a_n = \dfrac{1}{(\ln n)^n} \leq \dfrac{1}{2^n}$, para $n \geq 9$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln n)^{-n}$ converge, pues es minorada por la serie geométrica de razón $\frac{1}{2}$.

h) $a_n = 2^{-1/n}$

Notemos que $a_n = 2^{-1/n} \longrightarrow 1$, por lo que la serie diverge.

i) $a_n = (\ln n)\, \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$

Es claro que $a_n = \dfrac{\ln n}{\mathrm{e}^{\sqrt{n}}} \leq \dfrac{n}{\mathrm{e}^{\sqrt{n}}} \leq \dfrac{1}{n^2}$, a partir de algún $N \in \mathbb{N}$, pues el cociente $\dfrac{n^3}{\mathrm{e}^{\sqrt{n}}} \longrightarrow 0$, cuando $n \to \infty$. Así, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{\mathrm{e}^{\sqrt{n}}}$ converge.

j) $a_n = \dfrac{3^n + n^\beta}{3^n + \ln n}$

El término general de la serie $a_n = \dfrac{3^n + n^\beta}{3^n + \ln n} = \dfrac{1 + (\frac{1}{3})^n n^\beta}{1 + (\frac{1}{3})^n \ln n} \longrightarrow 1$, por lo que la serie es divergente.

k) $u_n = a^n\, n^\beta$

El criterio de d'Alembert establece: $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{a^{n+1}\,(n+1)^\beta}{a^n\, n^\beta} = a\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^\beta \longrightarrow a$, por lo tanto la serie converge si $0 < a < 1$ y diverge si $a > 1$.

En el caso en que $a = 1$, $u_n = n^\beta$ y la serie converge si $\beta < -1$.

l) $a_n = \arccos(1 - 1/n)$

Sea $f(x) = \arccos(1-x)$, entonces $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x}}(1-\frac{x}{2})^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{4}\sqrt{x} + o(x^{1/2})) \implies f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{1}{4}\sqrt{t} + o(t^{1/2}))dt = \frac{1}{\sqrt{2}}(2\sqrt{x} + \frac{1}{6}x^{3/2} + o(x^{3/2}))$. Así, el término general de la serie está dado por $a_n = \arccos(1-1/n) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(2\dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{6n^{3/2}} + o(\dfrac{1}{n^{3/2}})) \sim \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$ y la serie diverge.

m) $a_n = (-1)^n \dfrac{(\ln n)^\alpha}{n^\beta}$

Si $\beta > 0$, se tiene que $\dfrac{(\ln n)^\alpha}{n^\beta} \longrightarrow 0$ en forma decreciente $\forall \alpha$ y la serie alternada converge.

Si $\beta = 0$, $(\ln n)^\alpha \downarrow 0$, si $\alpha < 0$ y la serie alternada también converge.

Si $\beta < 0$, $\dfrac{(\ln n)^\alpha}{n^\beta} \longrightarrow \infty$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ y la serie diverge.

n) $a_n = \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$

Dado que el término general de la serie $a_n = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\sqrt{n}}} \leq \dfrac{1}{n^2}$, a partir de algún N, la serie $\sum_{n=1}^\infty \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\sqrt{n}}}$ converge, pues $\dfrac{n^2}{\mathrm{e}^{\sqrt{n}}} \longrightarrow 0$ y existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ se tiene $\dfrac{n^2}{\mathrm{e}^{\sqrt{n}}} < 1$.

ñ) $a_n = \tan(1/n) - \operatorname{sen}(1/n)$

El término general $a_n = \tan\dfrac{1}{n} - \operatorname{sen}\dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{3n^3} - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{6n^3} + o(\dfrac{1}{n^3}) \sim \dfrac{1}{2n^3}$ y la serie $\sum_{n=1}^\infty \left(\tan\dfrac{1}{n} - \operatorname{sen}\dfrac{1}{n}\right)$ converge.

o) $a_n = \dfrac{\operatorname{sen}(1/n)}{n}$

Es claro que $a_n = \dfrac{\operatorname{sen}(1/n)}{n} \sim \dfrac{1}{n^2}$ y la serie converge.

p) $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha - n^\beta}$

Si $\alpha < \beta$, $a_n = \dfrac{1}{n^\beta(n^{\alpha-\beta} - 1)} \sim -\dfrac{1}{n^\beta}$ y la serie converge sii $\beta > 1$.

Si $\alpha > \beta$, $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha(1 - n^{\beta-\alpha})} \sim \dfrac{1}{n^\alpha}$ y la serie converge sii $\alpha > 1$.

Si $\alpha = \beta$, el término general de la serie se indefine.

q) $a_n = n!\,\mathrm{e}^{-n^\beta}$

El criterio de d'Alembert dice $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = (n+1)\mathrm{e}^{-(n+1)^\beta + n^\beta} = (n+1)\mathrm{e}^{-n^\beta\left(1-\frac{1}{n}\right)^\beta + n^\beta} = (n+1)\mathrm{e}^{-\beta n^{\beta-1} + o\left(\frac{1}{n^{1-\beta}}\right)} \sim (n+1)\mathrm{e}^{-\beta n^{\beta-1}} \longrightarrow 0$, sii $\beta > 1$, pues si $\beta \leq 1$ el cociente tiende a ∞. Finalmente, la serie $\sum_{n=1}^\infty \dfrac{n!}{\mathrm{e}^{n^\beta}}$ converge si y sólo si $\beta > 1$.

Otra manera más sencilla de resolverlo es usando el criterio de la raíz y Stirling ya que, $\sqrt[n]{a_n} = (2\pi)^{\frac{1}{2n}} n^{1+\frac{1}{2n}} \mathrm{e}^{-1-n^{\beta-1}} \sim \dfrac{n}{\mathrm{e}} \mathrm{e}^{-n^{\beta-1}} \longrightarrow 0$, sii $\beta > 1$.

r) $a_n = (-1)^n \left(1 - \cos(1/n)\right)$

La serie converge absolutamente pues, $|a_n| = 1 - \cos\dfrac{1}{n} = -\dfrac{1}{2n^2} + o(\dfrac{1}{n^2}) \sim -\dfrac{1}{2n^2}$, es decir la serie

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente.

s) $a_n = \dfrac{2{\cdot}4\cdots(2n)}{3{\cdot}5\cdots(2n+1)}$

Reacomodando el término general de la serie y usando Stirling, se tiene $a_n = \dfrac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} \sim \dfrac{2^{2n} n^{2n+1}\sqrt{2\pi}}{2^{2n+\frac{3}{2}}(n+\frac{1}{2})^{2n+1}(n+1)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-1}} =$
$\dfrac{\sqrt{2\pi}}{2^{\frac{3}{2}}(1+\dfrac{1}{2n})^{2n+1}\sqrt{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-1}} \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$ y la serie que se estudia $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2{\cdot}4\cdots(2n)}{3{\cdot}5\cdots(2n+1)}$ diverge.

t) $a_n = \dfrac{2{\cdot}4\cdots(2n)}{5{\cdot}7\cdots(2n+3)}$

Reacomodando factores en el término general y usando Stirling, se tiene que:
$a_n = 3\dfrac{\left[2{\cdot}4\cdots(2n)\right]^2(2n+2)}{(2n+3)!} = 3\dfrac{2^{2n+1}(n!)^2(n+1)}{(2n+3)!} \sim \dfrac{3{\cdot}2^{2n+1}n^{2n+1}\mathrm{e}^{-2n}\sqrt{2\pi}(n+1)}{2^{2n+1}2^{\frac{5}{2}}(n+\frac{3}{2})^{2n+1}\mathrm{e}^{-2n-3}(n+\frac{3}{2})^{\frac{5}{2}}} =$
$\dfrac{3\mathrm{e}^3\sqrt{2\pi}(n+1)}{2^{\frac{5}{2}}(1+\frac{3}{2n})^{2n}(1+\frac{3}{2n})(n+\frac{3}{2})^{\frac{5}{2}}} \sim \dfrac{3\mathrm{e}^3\sqrt{2\pi}}{2^{\frac{5}{2}}\left[(1+\frac{3}{2n})^{\frac{2}{3}n}\right]^3(n+\frac{3}{2})^{\frac{3}{2}}} \sim \dfrac{3\sqrt{2\pi}}{2^{\frac{5}{2}}(n+\frac{3}{2})^{\frac{3}{2}}} \sim \dfrac{3\sqrt{2\pi}}{2^{\frac{5}{2}}n^{\frac{3}{2}}}.$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2{\cdot}4\cdots(2n)}{5{\cdot}7\cdots(2n+3)}$ converge.

u) $a_n = \left(\dfrac{1{\cdot}3\cdots(2n-1)}{2{\cdot}4\cdots(2n)}\right)^{\beta}$

Reacomodando factores en el término general y usando Stirling, se tiene
$a_n = \left(\dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\right)^{\beta} \sim \left[\dfrac{2^{2n+\frac{1}{2}}n^{2n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-2n}}{2^{2n}n^{2n+1}\mathrm{e}^{-2n}\sqrt{2\pi}}\right]^{\beta} = \dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}\beta}\pi^{\frac{1}{2}\beta}}$. La serie converge si y sólo si $\beta > 2$.

v) $a_n = n^{\beta}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$

El término general de la serie $a_n = n^{\beta-\frac{1}{2}}\big((1-\dfrac{1}{n})^{-\frac{1}{2}} - 1\big) = n^{\beta-\frac{1}{2}}\big(\dfrac{1}{2n} + o(\dfrac{1}{n})\big) \sim \frac{1}{2}n^{\beta-\frac{3}{2}}$ y la serie $\sum_{n=2}^{\infty} n^{\beta}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ converge sii $\beta < \frac{1}{2}$.

w) $a_n = \dfrac{\operatorname{sen} n\beta}{n}$

Consideremos el término complejo $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} = \cos\beta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\beta$, entonces:
$\sum_{k=0}^{n}\cos k\beta + \mathrm{i}\sum_{k=0}^{n}\operatorname{sen} k\beta = \sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\beta} = \dfrac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\beta}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}} =$
$\dfrac{(1-\cos\beta)(1-\cos(n+1)\beta) + \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}(n+1)\beta}{(1-\cos\beta)^2 + \operatorname{sen}^2\beta} +$
$\mathrm{i}\dfrac{\operatorname{sen}\beta(1-\cos(n+1)\beta) + (1-\cos\beta)\operatorname{sen}(n+1)\beta}{(1-\cos\beta)^2 + \operatorname{sen}^2\beta}.$

Por otro lado, $\left|\sum_{k=0}^{n}\operatorname{sen} k\beta\right| \le |\operatorname{sen}\beta||1-\cos(n+1)\beta| + |1-\cos\beta||\operatorname{sen}(n+1)\beta| \le 2+2 = 4$, es decir la sumatoria permanece acotada y como la sucesión $\big(\dfrac{1}{n}\big)\downarrow 0$, por el criterio de Dirichlet la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{sen} n\beta}{n}$ converge.

x) $a_n = n^{\beta}(\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} + \sqrt{n-1})$

Se sabe que $a_n = n^{\beta+\frac{1}{2}}\big(1+\dfrac{1}{2n}-\dfrac{1}{8n^2}-2+1-\dfrac{1}{2n}-\dfrac{1}{8n^2}+o(\dfrac{1}{n^2})\big) \sim \dfrac{1}{4n^{\frac{3}{2}-\beta}}$ y la serie converge sii $\beta < \frac{1}{2}$.

y) $a_n = [\ n\ \mathrm{sen}(1/n)\ ]^{n^\beta}$

Desarrollando el término general de la serie:
$a_n = \big[n\big(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{6n^3}+o(\dfrac{1}{n^3})\big)\big]^{n^\beta} = \mathrm{e}^{n^\beta \ln(1-\frac{1}{6n^2}+o(\frac{1}{n^2}))} = \mathrm{e}^{n^\beta(-\frac{1}{6n^2}+o(\frac{1}{n^2}))} \sim \mathrm{e}^{-\frac{1}{6n^{2-\beta}}}$.
Observemos que $n^2\mathrm{e}^{-\frac{1}{6n^{2-\beta}}} \longrightarrow 0$ si $\beta > 2$, lo que implica la convergencia de la serie, por la regla de Riemann. La serie diverge para $\beta \leq 2$ pues, si $\beta = 2$, $a_n \longrightarrow \mathrm{e}^{-\frac{1}{6}} \neq 0$ y si $\beta < 2$, $a_n \longrightarrow \mathrm{e}^0 = 1 \neq 0$.

z) $a_n = \arctan(n+a) - \arctan(n)$

Si consideramos $\tan a_n = \dfrac{a}{1+n(n+a)} \sim \dfrac{a}{n^2}$ y tenemos que $a_n \sim \arctan\dfrac{a}{n^2} \sim \dfrac{a}{n^2}$ y la serie $\sum_{n=1}^\infty \big(\arctan(n+a)-\arctan(n)\big)$ converge.

a′) $a_n = \dfrac{1}{\ln(n!)}$

Usando Stirling, $a_n \sim \dfrac{1}{(n+\frac{1}{2})\ln n - n + \frac{1}{2}\ln(2\pi)} \sim \dfrac{1}{n\ln n}$ y la serie $\sum_{n=2}^\infty \dfrac{1}{\ln(n!)}$ diverge pues, por la integral $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^b \frac{dx}{x\ln x} = \ln(\ln b) \longrightarrow \infty$, cuando $b \to \infty$.

b′) $a_n = \ln n + \alpha\ln(n+1) + \beta\ln(n+2)$

Se tiene que $a_n = \ln n + \alpha\ln n + \alpha\ln(1+\dfrac{1}{n}) + \beta\ln n + \beta\ln(1+\dfrac{2}{n}) = (\alpha+\beta+1)\ln n + \alpha(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2}) + \beta(\dfrac{2}{n}-\dfrac{4}{2n^2}) + o(\dfrac{1}{n^2}) = (\alpha+\beta+1)\ln n + (\alpha+2\beta)\dfrac{1}{n} - (\alpha+4\beta)(\dfrac{1}{2n^2}) + +o(\dfrac{1}{n^2})$ y la serie converge si y sólo si $\alpha+\beta+1 = 0$ y $\alpha+2\beta = 0$, es decir si $\alpha = -2$ y $\beta = 1$.

c′) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$

Notemos que $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{n} + \dfrac{(-1)^n}{n^{3/2}} + o(\dfrac{1}{n^{3/2}})$ y la serie $\sum_{n=1}^\infty \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ diverge.

d′) $a_n = \dfrac{\cos n}{\sqrt{n}+\cos n}$

El término general se puede escribir como $a_n = \dfrac{\cos n}{\sqrt{n}}\dfrac{1}{1+\frac{\cos n}{\sqrt{n}}} = \dfrac{\cos n}{\sqrt{n}}\big(1 - \dfrac{\cos n}{\sqrt{n}} + \dfrac{\cos^2 n}{n} + o(\dfrac{1}{n})\big) = \dfrac{\cos n}{\sqrt{n}} - \dfrac{\cos^2 n}{n} + \dfrac{\cos^3 n}{n^{3/2}} + o(\dfrac{1}{n^{3/2}}) \sim \dfrac{\cos n}{\sqrt{n}} - \dfrac{\cos^2 n}{n}$. La serie $\sum_{n=1}^\infty \dfrac{\cos n}{\sqrt{n}}$ converge por Dirichlet, pues $|\sum_{k=1}^n \cos k|$ permanece acotado (ver problema w)) y $\big(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\big) \downarrow 0$. Pero la serie $\sum_{n=1}^\infty \dfrac{\cos^2 n}{n}$ diverge pues, $\dfrac{\cos^2 n}{n} = \dfrac{1}{2n} - \dfrac{\cos 2n}{2n}$ y la serie de término general $\dfrac{1}{2n}$ diverge.
Finalmente podemos afirmar que la serie $\sum_{n=1}^\infty \dfrac{\cos n}{\sqrt{n}+\cos n}$ es divergente.

e′) $a_n = \dfrac{\mathrm{sen}\, n}{\sqrt{n}+\cos n}$

En este caso $a_n = \dfrac{\operatorname{sen} n}{\sqrt{n}}\big(1 - \dfrac{\cos n}{\sqrt{n}} + \dfrac{\cos^2 n}{n} + o(\dfrac{\cos^2 n}{n})\big) = \dfrac{\operatorname{sen} n}{\sqrt{n}} - \dfrac{\operatorname{sen} 2n}{2n} + \dfrac{\cos^2 n \operatorname{sen} n}{2n^{3/2}} + o(\dfrac{\cos^2 n \operatorname{sen} n}{2n^{3/2}})$ y la serie converge, pues la suma de series convergentes es convergente.

5. Sea $(u_n)\downarrow 0$, $u_n > 0$, entonces $S = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \operatorname{sen} k\theta$ converge, si $\operatorname{sen}(\frac{1}{2}\theta) \neq 0$, $\theta \neq 2k\pi$.

   Solución Sea $2S_n \operatorname{sen}(\frac{1}{2}\theta) = 2\sum_{k=1}^{n} u_k \operatorname{sen} k\theta \operatorname{sen}(\frac{1}{2}\theta) = u_1(\cos(\frac{1}{2}\theta) - \cos(\frac{3}{2}\,\theta)) + u_2(\cos(\frac{3}{2}\,\theta) - \cos(\frac{5}{2}\,\theta)) + \cdots + u_n(\cos(\frac{2n-1}{2}\,\theta) - \cos(\frac{2n+1}{2}\,\theta)) = u_1\cos(\frac{1}{2}\theta) - (u_1 - u_2)\cos(\frac{3}{2}\,\theta) - \cdots - (u_{n-1} - u_n)\cos(\frac{2n-1}{2}\,\theta) - u_n\cos(\frac{2n+1}{2}\,\theta)$. Observemos que:
   $|2S_n \operatorname{sen}(\frac{1}{2}\theta)| \leq \sum_{k=2}^{n}(u_{k-1} - u_k)|\cos\frac{2k-1}{2}\,\theta| + u_1|\cos(\frac{1}{2}\theta)| + u_n|\cos\frac{2n-1}{2}\,\theta| \leq 2u_1 - u_n + u_n = 2u_1$.

   Si $\theta = 2k\pi$, $S = 0$. Observemos que este resultado nos garantiza la convergencia de las series $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{sen} n\theta}{n}$ y $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{sen} n\theta}{\ln n}$ sin ser absolutamente convergentes y sin ser alternadas. Sin embargo la convergencia es debida a la alternancia del signo de $\operatorname{sen} n\theta$.

6. Demostrar que $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 2^2} + \frac{1}{3\cdot 2^3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot 2^n} + \cdots = \ln 2$.

   Solución Sabemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}$ converge, entonces:
   $\Big(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n}\Big)' = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \dfrac{1}{1+x}$, por lo que $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n} = \ln(1+x)$, es decir $\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$.
   Por otro lado, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}x^n$ y $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1} = \dfrac{1}{1-x}$, con lo cual $f(x) = -\ln(1-x)$, o sea $f(\frac{1}{2}) = -\ln(1 - \frac{1}{2}) = \ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n2^n}$.

7. Analizar el comportamiento de las sumas parciales S_n en las siguientes series:

   a) $1 - 2 + 3 - 4 + 5\cdots$

   b) $1 + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{4} - 1 + \frac{1}{8} - 1 + \cdots$

   c) $(1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \cdots$

   d) $1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} - \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{n}} + \cdots$

   e) $(\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \cdots$

   f) $1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{5}} + \dfrac{1}{\sqrt{7}} - \dfrac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$

   Solución

a) $1 - 2 + 3 - 4 + 5\cdots$

   La serie diverge pues el término general no tiende a 0. Es interesante notar que dependiendo de cómo se sumen los términos se obtienen distintos límites. Por ejemplo si se suman $S_n = (1-2) + (3-4) + (5-6) + \cdots + (n-1-n) \longrightarrow -\infty$ y si se suman $S_n = 1 + (-2+3) + (-4+5) + \cdots + (-n+1+n) \longrightarrow +\infty$.

b) $1 + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{4} - 1 + \frac{1}{8} - 1 + \cdots$

   La serie diverge pues el término general no tiende a 0.

c) $(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots$

Observemos que en esta serie $a_1 = 1-\frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{2}-\frac{1}{3}$,... y la serie converge, pues la suma parcial $S_n = 1-\dfrac{1}{n+1} \longrightarrow 1$. La serie no es una serie alternada cuyo término general tiende a 0, como se podría pensar. En realidad, es una serie telescópica.

d) $1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{4}}-\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\cdots$

La serie converge pues es una serie alternada cuyo término general tiende a 0.

e) $(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots$

Observe que el término general de la serie es $\sqrt{n}-\sqrt{n-1} = \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} \sim \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ y diverge.

f) $1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{7}}-\dfrac{1}{\sqrt{4}}++-\cdots$

La serie es una serie reordenada del ejercicio d) en la cual se suman dos términos positivos y uno negativo.

Llamemos s_n las sumas parciales de la serie d) y S_n las sumas parciales de la serie reordenada, entonces $S_{3n}-s_{2n} = (1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{4n-1}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{4}}-\cdots-\dfrac{1}{\sqrt{2n}})-(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots-\dfrac{1}{\sqrt{2n}}) = \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2n+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{4n-1}} > \dfrac{n}{\sqrt{4n-1}}$, es decir $S_{3n} > s_{2n}+\dfrac{n}{\sqrt{4n-1}}$, pero como s_{2n} converge, $S_{3n} \longrightarrow +\infty$ y $S_n \longrightarrow +\infty$.

En efecto, si $n=3k$, $S_n = S_{3k} \longrightarrow +\infty$, pues si $n\to+\infty$, $k\to+\infty$.

Si $n=3k+1$, $S_n = S_{3k}+\dfrac{1}{\sqrt{4k+1}} > S_{3k} \longrightarrow +\infty$, pues si $n\to+\infty$, $k\to+\infty$.

Si $n=3k+2$, $S_n = S_{3k}+\dfrac{1}{\sqrt{4k+3}}+\dfrac{1}{\sqrt{4k+1}} > S_{3k} \longrightarrow +\infty$, pues si $n\to+\infty$, $k\to+\infty$.

Si $n=3k+3$, $S_n = S_{3k}+\dfrac{1}{\sqrt{4k+3}}+\dfrac{1}{\sqrt{4k+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{2k}} > S_{3k} \longrightarrow +\infty$, pues si $n\to+\infty$, $k\to+\infty$.

Observe que $\dfrac{1}{\sqrt{4k+3}}+\dfrac{1}{\sqrt{4k+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{2k}} > 0$.

8. Demostrar que si $|x|<1$:

$A = x\cos\theta+\cdots+x^n\cos n\theta+\cdots = \dfrac{x\cos\theta-x^2}{1-2x\cos\theta+x^2}$.

$B = x\operatorname{sen}\theta+\cdots+x^n\operatorname{sen} n\theta+\cdots = \dfrac{x\operatorname{sen}\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}$.

$C = x\cos\theta+\cdots+\dfrac{x^n\cos n\theta}{n}+\cdots = -\frac{1}{2}\ln(1-2x\cos\theta+x^2)$.

$D = x\operatorname{sen}\theta+\cdots+\dfrac{x^n\operatorname{sen} n\theta}{n}+\cdots = \arctan\dfrac{x\operatorname{sen}\theta}{1-x\cos\theta}$.

a) Utilizar la serie C para calcular la integral $\displaystyle\int_0^\pi \log(1-2x\cos\theta+x^2)d\theta$, cuando $|x|<1$.

b) Probar que las series C y D se pueden utilizar si $x=1$ y deducir que si $0<\theta<\pi$:

$\cos\theta+\cdots+\dfrac{\cos n\theta}{n}+\cdots = -\ln\left[\,2\operatorname{sen}(\frac{1}{2}\theta)\,\right]$ y $\operatorname{sen}\theta+\cdots+\dfrac{\operatorname{sen} n\theta}{n}+\cdots = \frac{1}{2}(\pi-\theta)$.

Solución Consideremos la serie $\sum_{n=0}^\infty (xe^{i\theta})^n = \sum_{n=0}^\infty x^n\cos n\theta + i\sum_{n=0}^\infty x^n\operatorname{sen} n\theta = \dfrac{1}{1-xe^{i\theta}}$ si $|xe^{i\theta}| = |x| < 1$.

Por otro lado, $\dfrac{1}{1-x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \dfrac{1}{1-x\cos\theta-\mathrm{i}x\operatorname{sen}\theta} = \dfrac{1-x\cos\theta+\mathrm{i}x\operatorname{sen}\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}$, o sea $A=\sum_{n=1}^{\infty}x^n\cos n\theta = \dfrac{1-x\cos\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}-1=\dfrac{x\cos\theta-x^2}{1-2x\cos\theta+x^2}$ y $B=\sum_{n=1}^{\infty}x^n\operatorname{sen} n\theta=\dfrac{x\operatorname{sen}\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}$.

Dividiendo por x la expresión A se tiene $\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}\cos n\theta=-\frac{1}{2}\dfrac{2(x-\cos\theta)}{x^2-2x\cos\theta+1}$ e integrando de 0 a x: $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n\cos n\theta}{n}=-\frac{1}{2}\ln(x^2-2x\cos\theta+1)$.

Dividiendo por x la expresión B se tiene $\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}\operatorname{sen} n\theta=\dfrac{\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}}{\left(\frac{x-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right)^2+1}$ e integrando de 0 a x: $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n\operatorname{sen} n\theta}{n}=\arctan\dfrac{t-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\Big|_0^x=\arctan\dfrac{x-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}+\arctan\dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}=y$. Así, $\tan y = \dfrac{\frac{x-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}+\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}}{1-\frac{x-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}}=\dfrac{\frac{x}{\operatorname{sen}\theta}}{\frac{\operatorname{sen}^2\theta-x\cos\theta+\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}}=\dfrac{x\operatorname{sen}\theta}{1-x\cos\theta}$, y obtenemos $y=\arctan\dfrac{x\operatorname{sen}\theta}{1-x\cos\theta}$.

a) Notemos que $\displaystyle\int_0^{\pi}-\frac{1}{2}\log(1-2x\cos\theta+x^2)d\theta=x\int_0^{\pi}\cos\theta d\theta+\frac{x^2}{2}\int_0^{\pi}\cos 2\theta d\theta+\cdots+\frac{x^n}{n}\int_0^{\pi}\cos n\theta d\theta+\cdots=x\operatorname{sen}\theta\Big|_0^{\pi}+\frac{x^2}{2}\operatorname{sen}2\theta\Big|_0^{\pi}+\cdots+\frac{x^n}{n}\operatorname{sen} n\theta\Big|_0^{\pi}+\cdots=0$. Se concluye que $\displaystyle I(x)=\int_0^{\pi}-\frac{1}{2}\log(1-2x\cos\theta+x^2)d\theta=0$, si $|x|<1$. Se puede verificar que el resultado es válido si $|x|>1$.

b) La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos n\theta}{n}$ es convergente, entonces $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^n\dfrac{\cos n\theta}{n}\longrightarrow f(1)$ cuando $x\to 1$ y $\cos\theta+\cdots+\dfrac{\cos n\theta}{n}+\cdots=-\frac{1}{2}\ln\left[2-2\cos\theta\right]=-\ln\left[4\operatorname{sen}^2(\frac{1}{2}\theta)\right]^{1/2}=-\ln\left[2\operatorname{sen}(\frac{1}{2}\theta)\right]$ si $0<x<\pi$.

De la misma manera $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{sen} n\theta}{n}$ converge y es igual a $\arctan\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1-\cos\theta}$. Recordemos que $\arctan\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1-\cos\theta}=\arctan\dfrac{1-\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}+\arctan\dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$, y dado que $\arctan z+\arctan\frac{1}{z}=\frac{1}{2}\pi$ se tiene $\arctan\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1-\cos\theta}=\frac{1}{2}\pi-\arctan\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1-\cos\theta}+\frac{1}{2}\pi-\arctan(\tan\theta)$, o sea $2\arctan\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1-\cos\theta}=\pi-\theta$ i.e. $\arctan\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1-\cos\theta}=\frac{1}{2}(\pi-\theta)$.

9. Comprobar que $\dfrac{1-x^2}{1-2x\cos\theta+x^2}=1+2x\cos\theta+\cdots+2x^n\cos n\theta+\cdots$ si $|x|<1$ y deducir de este resultado el valor de la integral $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos(n\theta)}{1-2x\cos\theta+x^2}d\theta$.

Solución Sabemos que $x\cos\theta+\cdots+x^n\cos n\theta+\cdots=\dfrac{x\cos\theta-x^2}{1-2x\cos\theta+x^2}$ y por lo tanto, $1+2x\cos\theta+\cdots+2x^n\cos n\theta+\cdots=\dfrac{2x\cos\theta-2x^2}{1-2x\cos\theta+x^2}+1=\dfrac{1-x^2}{1-2x\cos\theta+x^2}$.

Recordemos que $\cos x\cos y=\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]$, entonces $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos n\theta d\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}=\frac{1}{1-x^2}\left[\int_0^{2\pi}\frac{\cos n\theta}{n}nd\theta+2x\int_0^{2\pi}\cos\theta\cos n\theta d\theta+\cdots+2x^{n-1}\int_0^{2\pi}\cos n\theta\cos(n-1)\theta d\theta+2x^n\int_0^{2\pi}\cos n\theta\cos n\theta d\theta+2x^{n+1}\int_0^{2\pi}\cos n\theta\cos(n+1)\theta d\theta+\cdots\right]=$

$\frac{1}{1-x^2}\left[\frac{\operatorname{sen} n\theta}{n}\Big|_0^{2\pi}+x\left[\frac{\operatorname{sen}(n+1)\theta}{n+1}\Big|_0^{2\pi}+\frac{\operatorname{sen}(n-1)\theta}{n-1}\Big|_0^{2\pi}\right]+\cdots+x^{n-1}\left[\frac{\operatorname{sen}(2n-1)\theta}{2n-1}\Big|_0^{2\pi}+\cos\theta\Big|_0^{2\pi}\right]+\right.$
$\left.x^n\left[\frac{\operatorname{sen} 2n\theta}{2n}\Big|_0^{2\pi}+\theta\Big|_0^{2\pi}\right]+x^{n+1}\left[\frac{\operatorname{sen}(2n+1)\theta}{2n+1}\Big|_0^{2\pi}+\cos\theta\Big|_0^{2\pi}\right]+\cdots+\right]=\frac{2\pi}{1-x^2}x^n.$

10. **Fenómeno de Gibbs**

a) Demostrar que si $0<x<\pi$, $\frac{\pi}{4}=\operatorname{sen} x+\frac{\operatorname{sen} 3x}{3}+\cdots+\frac{\operatorname{sen}(2n+1)x}{2n+1}+\cdots\ (*)$.

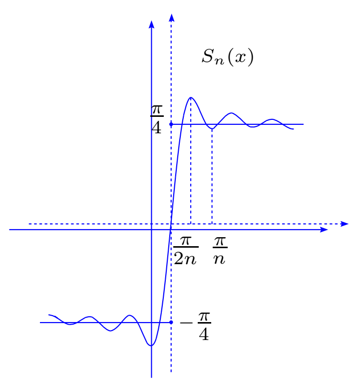
b) Sea $f(x)$ la suma de la serie $(*)$, se define $S_n(x)=\operatorname{sen} x+\frac{\operatorname{sen} 3x}{3}+\cdots+\frac{\operatorname{sen}(2n-1)x}{2n-1}$, entonces $f(x)$ es discontinua en $x=0$, aunque $S_n(x)$ es continua. Estudie la manera que $S_n(x)$ tiende hacia $f(x)$ cuando $n\to\infty$. Probar que $S_n(x)$ experimenta oscilaciones alrededor de $\frac{\pi}{4}$ y que cuando $n\to\infty$, la ordenada del primer máximo no tiende a $\frac{\pi}{4}$, sino hacia $M=\frac{1}{2}\int_0^\pi\frac{\operatorname{sen} t}{t}dt$ tendiendo la abscisa de este máximo a 0.

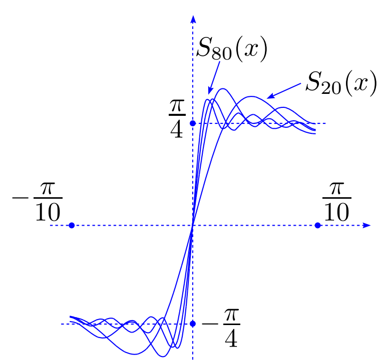
Nota $S_n(x)=\int_0^x S_n'(t)dt$, con $S_n'(x)=\frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen} 2nx}{\operatorname{sen} x}$. Se buscará el máximo de $S_n(x)$ anulando $S_n'(x)$.

c) Compruebe que $M\neq\frac{\pi}{4}$.

Solución

a) Por el problema 8b), se tiene $\sum_{n=1}^\infty\frac{\operatorname{sen} n\theta}{n}=\frac{\pi-\theta}{2}$, o sea $\sum_{n=1}^\infty\frac{\operatorname{sen} 2n\theta}{n}=2\sum_{n=1}^\infty\frac{\operatorname{sen} 2n\theta}{2n}=\pi-2\theta$, es decir $\sum_{n=1}^\infty\frac{\operatorname{sen} 2n\theta}{2n}=\frac{\pi-2\theta}{2}$. Así tenemos $\sum_{n=1}^\infty\frac{\operatorname{sen} n\theta}{n}-\sum_{n=1}^\infty\frac{\operatorname{sen} 2n\theta}{2n}=\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}\theta-\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}\theta=\frac{1}{4}\pi=\operatorname{sen} x+\frac{\operatorname{sen} 3x}{3}+\cdots+\frac{\operatorname{sen}(2n-1)x}{2n-1}+\cdots$ y la fórmula es válida $\forall\theta$, $0<\theta<\pi$.





b) Se sabe que $S_n'(x)=\frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen} 2nx}{\operatorname{sen} x}$ (verifíquelo) y se anula en $\zeta_n=\frac{\pi}{2n}$. Así, $S_n(\zeta_n)=\frac{1}{2}\int_0^{\zeta_n}\frac{\operatorname{sen} 2nt}{\operatorname{sen} t}dt=\frac{1}{2}\int_0^\pi\frac{\operatorname{sen} u}{\operatorname{sen}\frac{u}{2n}}\frac{1}{2n}du\sim\frac{1}{2}\int_0^\pi\frac{\operatorname{sen} u}{u}du$ y $S_n(\zeta_n)\longrightarrow\frac{1}{2}\int_0^\pi\frac{\operatorname{sen} u}{u}du\neq\frac{\pi}{4}$, ya que $\int_0^\pi\frac{\operatorname{sen} u}{u}du>\frac{\pi}{2}=\int_0^\infty\frac{\operatorname{sen} u}{u}du$ (i.e. $M>\frac{\pi}{4}$).

Recordemos que $\int_0^\infty\frac{\operatorname{sen} u}{u}du=\sum_{n=1}^\infty\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\frac{\operatorname{sen} u}{u}du=\sum_{n=1}^\infty(-1)^{n-1}\int_0^\pi\frac{\operatorname{sen} u}{(n-1)\pi+u}du$ y

$$S_2(\zeta_n) < S_4(\zeta_n) < \cdots < S_{2n}(\zeta_n) < S_{2n-1}(\zeta_n) < \cdots < S_3(\zeta_n) < S_1(\zeta_n) = \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} u}{u} du.$$

11. Analice la naturaleza de la serie $\sum_n u_n$ cuyo término general u_n se indica. Compruebe que se cumplen las hipótesis de los criterios que emplee.

a) $u_n = (\operatorname{ch} \sqrt{\ln n})^{-2}$

b) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n + (-1)^n \sqrt{n}}}$

c) $u_n = \operatorname{arcch} \dfrac{n+1}{n}$

d) $u_n = \dfrac{\operatorname{arcch} n}{\sqrt{n^4 + n^2 + 1}}$

e) $u_n = n^{-\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right)}$

f) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$

g) $u_n = \dfrac{\ln n}{\ln \mathrm{e}^n - 1}$

h) $u_n = \left(\dfrac{1}{n} + \ln \dfrac{n-1}{n}\right)$

i) $u_n = |\operatorname{sen}(\pi\sqrt{n^4+1})|^{2/3}$

j) $u_n = \left(\cosh \dfrac{1}{n}\right)^{-n^{5/2}}$

k) $u_n = \ln \dfrac{n^2 + \sqrt{n}}{n^2 + n} \tan \dfrac{1}{n^2}$

l) $u_n = (1 + \sqrt{n})^{-n}$

m) $u_n = \mathrm{e}^{-\sqrt{n^2-1}}$

n) $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)^{-\sqrt{n}}$

ñ) $u_n = n^{\ln n} \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$

o) $u_n = \dfrac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$

p) $u_n = (\ln(\ln n))^{-\ln(\ln n)}$

q) $u_n = \dfrac{3}{\sqrt{n} + 2^{(-1)^n}}$

r) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n} + 2^{(-1)^n} n}$

s) $u_n = \mathrm{e}^{\sqrt[3]{n} - \sqrt{n}}$

t) $u_n = \ln \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \ln \operatorname{sen} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

u) $u_n = \sqrt{\ln(n+1)} - \sqrt{\ln n}$

v) $u_n = \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{3}{5}} - \left(\arctan n\right)^{\frac{3}{5}}$

w) $u_n = \tan \dfrac{1}{n} - \ln \dfrac{n^2 + \sqrt{n}}{n^2 - n}$

x) $u_n = \tan \dfrac{\pi n}{4n+1} - \cos \dfrac{\pi}{n}$

y) $u_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$

z) $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)^{1/\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)} - e$

a′) $u_n = \left(\dfrac{n+1}{n-2}\right)^n - \mathrm{e}^3\left(1 + \dfrac{3}{2n}\right)$

b′) $u_n = \left(1 + n\mathrm{e}^{-n}\right)^{1+n^2} - 1$

c′) $u_n = \left(n \operatorname{sen} \dfrac{1}{n}\right)^{\operatorname{cotg}^2 \frac{1}{n}} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}$

d′) $u_n = \operatorname{arcsen} \dfrac{n^2}{n^2+1} - \operatorname{arcsen} \dfrac{n^2}{n^2+2}$

e′) $u_n = \mathrm{e}^{\arctan \frac{n-1}{n+1}} - \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}$

f′) $u_n = \arctan \sqrt{1 + \dfrac{1}{n}} - \arctan \sqrt{1 - \dfrac{1}{n}}$

g′) $u_n = \left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^n - 1$

h′) $u_n = \arccos \sqrt{\dfrac{\arctan n}{\pi}} - \operatorname{arcsen} \sqrt{\dfrac{\arctan n}{\pi}}$

i′) $u_n = \dfrac{\operatorname{arcch}(2n) - \operatorname{arcch} n}{n}$

j′) $u_n = \dfrac{(\ln n)^n}{n!}$

k′) $u_n = \dfrac{n^2}{2^n + n}$

l′) $u_n = \prod_{k=1}^n \dfrac{\ln k}{k}$

m′) $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{1+x^2}} dx$

n′) $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\operatorname{sen}^3 x}{1+x}dx$

ñ′) $u_n = \displaystyle\int_n^{n+\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}$

o′) $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+n^2\tan^2 x}$

p′) $u_n = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+n^2\operatorname{senh}^2 x}$

q′) $u_n = \displaystyle\int_n^{\infty} \frac{1}{x^3-x^2}dx$

r′) $u_n = \left(n\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right)^{-1}$

s′) $u_n = \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}\right) - 1$

t′) $u_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

u′) $u_n = \operatorname{sen}(\pi(2-\sqrt{3})^n)$, $v_n = \operatorname{sen}(\pi(2+\sqrt{3})^n)$

v′) $u_n = \dfrac{1}{(n+1)!}\sum_{k=1}^n k!$

w′) $u_{2n} = \dfrac{1}{\sqrt{2+n}-1}$, $u_{2n+1} = -\dfrac{1}{\sqrt{2+n}+1}$

x′) $u_1 \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-u_n}$

y′) $u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} \text{ si } \exists p \in \mathbb{N} \text{ tal que } n = p^2 \\ \dfrac{1}{n^2} \text{ si no.} \end{cases}$

z′) $u_n = \dfrac{1}{n\cos^2 n}$

a″) $u_n = \operatorname{sen} n$

b″) $u_n = \dfrac{\operatorname{sen}^2 n}{n}$

Solución

a) $u_n = (\operatorname{ch}\sqrt{\ln n})^{-2}$

$u_n = (\operatorname{ch}\sqrt{\ln n})^{-2} = \left(\dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{\ln n}}+\mathrm{e}^{-\sqrt{\ln n}}}{2}\right)^{-2} = \dfrac{4}{\mathrm{e}^{2\sqrt{\ln n}}+2+\mathrm{e}^{-2\sqrt{\ln n}}} \sim \dfrac{4}{\mathrm{e}^{2\sqrt{\ln n}}} > \dfrac{1}{n}$, si $n > \mathrm{e}^4$. En efecto, cuando $n > \mathrm{e}^4$ tenemos $2\sqrt{\ln n} - \ln 4 \le \ln n \Longrightarrow -\ln n \le \ln 4 - \ln \mathrm{e}^{2\sqrt{\ln n}} \Longrightarrow \dfrac{1}{n} \le \dfrac{4}{\mathrm{e}^{2\sqrt{\ln n}}}$.

Finalmente la serie diverge.

b) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+(-1)^n\sqrt{n}}}$

Veamos que $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+(-1)^n\sqrt{n}}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ y la serie diverge.

c) $u_n = \operatorname{arcch}\dfrac{n+1}{n}$

La función $\operatorname{arcch} x = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$ si $x > 1$, entonces $\operatorname{arcch}\dfrac{n+1}{n} = \ln\left(\dfrac{n+1}{n} + \sqrt{\dfrac{2n+1}{n^2}}\right) = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\left(1-\dfrac{1}{4n}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)\right) = \ln\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}+o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \sim \sqrt{\dfrac{2}{n}}$ y la serie diverge.

d) $u_n = \dfrac{\operatorname{arcch} n}{\sqrt{n^4+n^2+1}}$

Aplicando la fórmula equivalente a $\operatorname{arcch} x$ tenemos que $u_n = \dfrac{\ln(n+\sqrt{n^2-1})}{\sqrt{n^4+n^2+1}} =$

$\dfrac{\ln\left(n\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)\right)}{n^2\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}} \sim \dfrac{\ln n}{n^2}$ y la serie converge.

e) $u_n = n^{-\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)}$

Dado que $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)=\dfrac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{1}{n}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{1}{n}}=\dfrac{1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}{1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}=\left(1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=$ $1+\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$, por lo que $u_n=n^{-\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)}=\mathrm{e}^{-\left(1+\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\ln n}=\mathrm{e}^{-\ln n-\frac{2\ln n}{n}+o\left(\frac{\ln n}{n}\right)}\sim$ $\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-\frac{2\ln n}{n}+o\left(\frac{\ln n}{n}\right)}\sim\frac{1}{n}$ y la serie diverge.

f) $u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Sabemos que $u_n\sim\dfrac{1}{\sqrt{n}}\dfrac{1}{\sqrt{n}}=\dfrac{1}{n}$ y diverge la serie.

g) $u_n=\dfrac{\ln n}{\ln \mathrm{e}^n-1}$

Es claro que $u_n=\dfrac{\ln n}{\ln \mathrm{e}^n-1}\sim\dfrac{\ln n}{n}$ y hay divergencia.

h) $u_n=\left(\dfrac{1}{n}+\ln\dfrac{n-1}{n}\right)$

Como $u_n=\left(\frac{1}{n}+\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\sim-\frac{1}{2n^2}$ y converge la serie.

i) $u_n=|\operatorname{sen}\left(\pi\sqrt{n^4+1}\right)|^{2/3}$

Se verifica que $\pi\sqrt{n^4+1}=n^2\pi\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}=n^2\pi\left(1+\frac{1}{2n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)=n^2\pi+\frac{\pi}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Así se establece $\operatorname{sen}\left(\pi\sqrt{n^4+1}\right)=\operatorname{sen}\left(n^2\pi\right)\cos\left(\frac{\pi}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)+\cos\left(n^2\pi\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=$ $\pm\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\sim\pm\frac{\pi}{2n^2}$, lo que conduce a $|\operatorname{sen}\left(\pi\sqrt{n^4+1}\right)|^{2/3}=\left|\frac{\pi}{2n^2}\right|^{2/3}=\frac{\pi^{2/3}}{2^{2/3}n^{4/3}}$ y la serie converge.

j) $u_n=\left(\cosh\dfrac{1}{n}\right)^{-n^{5/2}}$

Notemos que $\ln\left(\cosh\frac{1}{n}\right)^{-n^{5/2}}=-n^{5/2}\ln\left(\cosh\frac{1}{n}\right)=-n^{5/2}\ln\left(1+\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{2n^2}\right)\right)\sim-n^{5/2}\frac{1}{2n^2}$ $=-\frac{\sqrt{n}}{2}$ por lo que $\left(\cosh\frac{1}{n}\right)^{-n^{5/2}}\sim\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{n}}{2}}<\frac{1}{n^2}$ y hay convergencia de la serie. En efecto, existe n_0 tal que si $n>n_0$ se tiene $\sqrt{n}>4\ln n\Longrightarrow-\frac{\sqrt{n}}{2}<-\ln n^2$.

k) $u_n=\ln\dfrac{n^2+\sqrt{n}}{n^2+n}\tan\dfrac{1}{n^2}$

Consideremos $\ln\dfrac{1+\frac{1}{n^{3/2}}}{1+\frac{1}{n}}=\ln\left(\left(1+\frac{1}{n^{3/2}}\right)\left(1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)=\ln\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^{3/2}}+o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right)=$ $-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$ y $\tan\frac{1}{n^2}\sim\frac{1}{n^2}$, entonces $u_n=\ln\dfrac{n^2+\sqrt{n}}{n^2+n}\tan\dfrac{1}{n^2}\sim-\dfrac{1}{n^3}$ y la serie converge.

l) $u_n=(1+\sqrt{n})^{-n}$

Puesto que $u_n=(1+\sqrt{n})^{-n}\sim\dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}n}}$ y $\dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}n}}<\dfrac{1}{n^2}$, si $n>4$ se tiene la convergencia de la serie. Observe que si $n>4$, $\frac{1}{2}n>2\Longrightarrow n^{\frac{1}{2}n}>n^2$.

m) $u_n=\mathrm{e}^{-\sqrt{n^2-1}}$

Notemos que $u_n = \mathrm{e}^{-\sqrt{n^2-1}} \sim \mathrm{e}^{-n} < \dfrac{1}{n^2}$ y la serie converge.

n) $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)^{-\sqrt{n}}$

Es claro que $u_n = \mathrm{e}^{-\sqrt{n}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)} \sim \mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n}}} = \mathrm{e}^{-\sqrt[6]{n}} < \dfrac{1}{n^2}$. Recordemos que $\frac{1}{2}\sqrt{x} > \ln x$ ya que la derivada $\dfrac{1}{4\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{\sqrt{x}-4}{4x} > 0$ si $x > 16$ y $\frac{1}{2}\sqrt{16} = 2 > \ln 2$.

ñ) $u_n = n^{\ln n}\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$

$u_n = n^{\ln n}\mathrm{e}^{-\sqrt{n}} = \mathrm{e}^{\ln n^{\ln n} - \sqrt{n}} = \mathrm{e}^{(\ln n)^2 - \sqrt{n}} < \mathrm{e}^{-\ln n^2} = \dfrac{1}{n^2}$. En efecto, $n > 1 \Longleftrightarrow (\ln n + 1)^2 < 1 + \sqrt{n} \Longleftrightarrow (\ln n)^2 - \sqrt{n} < -2\ln n \Longleftrightarrow (\ln n)^2 - \sqrt{n} < -\ln n^2$. La serie converge.

o) $u_n = \dfrac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$

Observemos que $n^2\dfrac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n} = \mathrm{e}^{2\ln n - n\ln(\ln n) + (\ln n)^2} = \mathrm{e}^{(\ln n+1)^2 - n\ln(\ln n) - 1} \longrightarrow 0$, pues $(\ln n + 1)^2 - n\ln(\ln n) \longrightarrow -\infty$. Así, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n^2\dfrac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n} < 1$ si $n \geq n_0$ y la serie converge.

p) $u_n = (\ln(\ln n))^{-\ln(\ln n)}$

Dado que $n(\ln(\ln n))^{-\ln(\ln n)} = \mathrm{e}^{-\ln(\ln n)\ln(\ln(\ln n)) + \ln n} \longrightarrow +\infty$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, $n(\ln(\ln n))^{-\ln(\ln n)} > 1$, o sea $u_n > \dfrac{1}{n}$ y la serie diverge.

q) $u_n = \dfrac{3}{\sqrt{n} + 2^{(-1)^n}}$

En general $u_n = \dfrac{3}{\sqrt{n}+2}$ o $u_n = \dfrac{3}{\sqrt{n}+\frac{1}{2}}$, por lo tanto $u_n \sim \dfrac{3}{\sqrt{n}}$ y la serie diverge.

r) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n} + 2^{(-1)^n}n}$

Se sabe que $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n} + 2^{(-1)^n}n} \geq \dfrac{1}{\sqrt{n}+2n}$ y diverge.

s) $u_n = \mathrm{e}^{\sqrt[3]{n} - \sqrt{n}}$

Usemos la expresión $n^2u_n = \mathrm{e}^{2\ln n + n^{1/3} - n^{1/2}} = \mathrm{e}^{2\ln n - \sqrt{n}(1 - \frac{1}{n^{1/6}})} \longrightarrow 0$, entonces $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, $n^2u_n < 1$ o sea $u_n < \dfrac{1}{n^2}$ y la serie converge.

t) $u_n = \ln\dfrac{1}{\sqrt{n}} - \ln\operatorname{sen}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Usando $u_n = \ln\dfrac{1}{\sqrt{n}} - \ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{3!n^{3/2}} + o\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)\right) = \ln\dfrac{1}{\sqrt{n}} - \ln\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(1 - \dfrac{1}{6n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = -\ln\left(1 - \dfrac{1}{6n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) \sim \dfrac{1}{6n}$ y la serie diverge.

u) $u_n = \sqrt{\ln(n+1)} - \sqrt{\ln n}$

Se tiene que $u_n = \sqrt{\ln n}\left[\left(1 + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right] = \sqrt{\ln n}\left[\left(1 + \dfrac{1}{2n\ln n} + o\left(\dfrac{1}{n\ln n}\right) - 1\right]\right. \sim$

$\dfrac{1}{2n\sqrt{\ln n}}$ y la serie diverge.

Otra forma de determinar la divergencia es ver que la serie es telescópica y $\sum_{k=1}^{N}(\sqrt{\ln(n+1)} - \sqrt{\ln n}) = \sqrt{\ln(N+1)} \longrightarrow +\infty$.

v) $u_n = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{3}{5}} - \left(\arctan n\right)^{\frac{3}{5}}$

Sabemos que $\arctan n + \arctan \dfrac{1}{n} = \dfrac{\pi}{2}$, entonces $u_n = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{3}{5}} - \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{3}{5}}\left(1 - \frac{2}{\pi}\arctan \frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{5}} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{3}{5}} - \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{3}{5}}\left(1 - \frac{2}{\pi}\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{3}{5}} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{3}{5}} - \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{3}{5}}\left(1 - \frac{6}{5n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{3}{5}}\frac{6}{5n\pi}$ y la serie diverge.

w) $u_n = \tan \dfrac{1}{n} - \ln \dfrac{n^2+\sqrt{n}}{n^2-n}$

Se tiene $\dfrac{n^2+\sqrt{n}}{n^2-n} = \dfrac{1+n^{-3/2}}{1-\frac{1}{n}} = \left(1+n^{-3/2}\right)\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^{3/2}}+o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$

y $\tan \dfrac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^{3/2}}+o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \sim \frac{1}{n^{3/2}}$ y la serie converge.

x) $u_n = \tan \dfrac{\pi n}{4n+1} - \cos \dfrac{\pi}{n}$

Notemos que $\dfrac{\pi n}{4n+1} = \dfrac{\pi}{4\left(1+\frac{1}{4n}\right)} = \frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{4n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$, por lo que $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{16n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$

$\dfrac{1-\tan\left(\frac{\pi}{16n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{1+\tan\left(\frac{\pi}{16n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = \dfrac{1-\frac{\pi}{16n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}{1+\frac{\pi}{16n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} = \left(1-\frac{\pi}{16n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1-\frac{\pi}{16n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 1-\frac{\pi}{8n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$

y $\cos \dfrac{\pi}{n} = 1 - \dfrac{\pi^2}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Finalmente, $\tan \dfrac{\pi n}{4n+1} - \cos \dfrac{\pi}{n} \sim -\dfrac{\pi}{8n}$ y hay divergencia.

y) $u_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$

Tenemos que $u_n = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln n} - 1 \sim \dfrac{1}{n}\ln n$ y diverge la serie.

z) $u_n = \left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{1/\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)} - \mathrm{e}$

Recordemos que $\operatorname{sen}\dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{6n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$, $\ln\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, entonces

$\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\operatorname{sen}\frac{1}{n}} = \dfrac{\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = \left(1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1+\frac{1}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$

y se tiene $u_n = \mathrm{e}^{1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} - \mathrm{e} = \mathrm{e}\left(\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim \dfrac{\mathrm{e}}{2n}$ y hay divergencia.

a′) $u_n = \left(\dfrac{n+1}{n-2}\right)^n - \mathrm{e}^3\left(1+\dfrac{3}{2n}\right)$

Se tiene que $\dfrac{n+1}{n-2} = \dfrac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{2}{n}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}+\frac{8}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = 1+\frac{3}{n}+\frac{6}{n^2}+\frac{12}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ y

$\left(\dfrac{n+1}{n-2}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{3}{n}+\frac{6}{n^2}+\frac{12}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)} = \mathrm{e}^{3+\frac{3}{2n}+\frac{3}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$, con lo cual $\left(\dfrac{n+1}{n-2}\right)^n - \mathrm{e}^3\left(1+\frac{3}{2n}\right) =$

$\mathrm{e}^3\left(1+\frac{3}{2n}+\frac{33}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \mathrm{e}^3\left(1+\frac{3}{2n}\right) \sim \dfrac{33\mathrm{e}^3}{8n^2}$ y converge la serie.

b′) $u_n = \left(1+n\mathrm{e}^{-n}\right)^{1+n^2} - 1$

Sea $u_n = \mathrm{e}^{(1+n^2)\ln(1+n\mathrm{e}^{-n})} - 1 = \mathrm{e}^{(1+n^2)\left(n\mathrm{e}^{-n}-\frac{1}{2}n^2\mathrm{e}^{-2n}+o(n^2\mathrm{e}^{-2n})\right)} - 1 = \mathrm{e}^{n\mathrm{e}^{-n}-\frac{n^2}{2\mathrm{e}^{2n}}+n^3\mathrm{e}^{-n}-\frac{n^4}{2\mathrm{e}^{2n}}+o(n^4\mathrm{e}^{-2n})} - 1 \sim n^3\mathrm{e}^{-n}$ y existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ se cumple $\dfrac{n^5}{\mathrm{e}^n} < 1$, es decir $\dfrac{n^3}{\mathrm{e}^n} < \dfrac{1}{n^2}$ y la serie converge.

c′) $u_n = \left(n \operatorname{sen} \frac{1}{n}\right)^{\operatorname{cotg}^2 \frac{1}{n}} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}$

Se tiene que $\operatorname{cotg} x = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{3} - \dfrac{x^3}{45} + o(x^3)$, si $x \to 0$, por lo que $\operatorname{cotg}^2 x = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{15}x^2 + o(x^2)$. También, $n \operatorname{sen} \dfrac{1}{n} = n\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{6n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\right) = 1 - \dfrac{1}{6n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ con lo cual tenemos $u_n = \mathrm{e}^{\operatorname{cotg}^2 \frac{1}{n} \ln\left(1-\frac{1}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{6}} = \mathrm{e}^{\left(n^2-\frac{2}{3}+\frac{1}{15n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(-\frac{1}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{6}} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{6}+\frac{19}{180n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{6}} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}\left(1 + \dfrac{19}{180n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right) - 1\right) \sim \dfrac{19\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}}{180n^2}$ y hay convergencia de la serie.

d′) $u_n = \operatorname{arcsen} \dfrac{n^2}{n^2+1} - \operatorname{arcsen} \dfrac{n^2}{n^2+2}$

Recordemos que $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$, entonces:
$\operatorname{sen} u_n = \dfrac{n^2}{n^2+1}\sqrt{1-\dfrac{n^4}{(n^2+2)^2}} - \dfrac{n^2}{n^2+2}\sqrt{1-\dfrac{n^4}{(n^2+1)^2}} = \dfrac{n^2\sqrt{4n^2+4}}{(n^2+1)(n^2+2)} - \dfrac{n^2\sqrt{2n^2+1}}{(n^2+1)(n^2+2)}$
$= \dfrac{n^3}{(n^2+1)(n^2+2)}\left(2\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{2}\left(1+\dfrac{1}{2n^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{n^3}{(n^2+1)(n^2+2)}\left(2\left(1+\dfrac{1}{2n^2}\right) - \sqrt{2}\left(1+\dfrac{1}{4n^2}\right) + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) = \dfrac{n^3}{(n^2+1)(n^2+2)}\left((2-\sqrt{2}) + o(1)\right) \sim \dfrac{2-\sqrt{2}}{n}$ i.e. $u_n \sim \operatorname{arcsen} \dfrac{2-\sqrt{2}}{n} \sim \dfrac{2-\sqrt{2}}{n}$ y la serie diverge.

e′) $u_n = \mathrm{e}^{\arctan \frac{n-1}{n+1}} - \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}$

Sea $u_n = \mathrm{e}^{\arctan \frac{n-1}{n+1}} - \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}} = \mathrm{e}^{\arctan \frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}} - \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}} = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{1}{n}} - \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}} = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} - \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}} = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}\left[1 - \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1\right] \sim -\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}}{n}$ y la serie diverge.

f′) $u_n = \arctan\sqrt{1+\dfrac{1}{n}} - \arctan\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}$

Sabemos que $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$, entonces: $\tan u_n = \dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt{1-\frac{1}{n}}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}} =$

$$\dfrac{1+\frac{1}{2n} - \left(1-\frac{1}{2n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right)}{1+\left(1-\frac{1}{2n^2}\right)+o\left(\frac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}{2-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)} \sim \dfrac{1}{2n}$$ y diverge.

g′) $u_n = \left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^n - 1$

Puesto que $\dfrac{\ln n(1+\frac{1}{n})}{\ln n} = \dfrac{\ln n + \ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n} = 1 + \dfrac{1}{\ln n}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$ por lo que $\left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^n - 1 = \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right)} - 1 = \mathrm{e}^{n\left(\frac{1}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right)} - 1 = \mathrm{e}^{\frac{1}{\ln n}+o\left(\frac{1}{\ln n}\right)} - 1 = 1 + \dfrac{1}{\ln n} + o\left(\dfrac{1}{\ln n}\right) - 1 \sim \dfrac{1}{\ln n}$ y la serie es divergente.

h′) $u_n = \arccos\sqrt{\dfrac{\arctan n}{\pi}} - \operatorname{arcsen}\sqrt{\dfrac{\arctan n}{\pi}}$

Notemos que $u_n \longrightarrow 0$ cuando $n \to \infty$, por lo tanto $\operatorname{sen} u_n = \sqrt{1 - \dfrac{\arctan n}{\pi}}\sqrt{1 - \dfrac{\arctan n}{\pi}} - \sqrt{\dfrac{\arctan n}{\pi}}\sqrt{\dfrac{\arctan n}{\pi}} = 1 - 2\dfrac{\arctan n}{\pi} = 1 - \dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{\pi}{2} - \arctan\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{2}{\pi n}$ y la serie diverge.

i′) $u_n = \dfrac{\operatorname{arcch}(2n) - \operatorname{arcch} n}{n}$

Recordemos que $\operatorname{arcch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$, si $x>1$, entonces $\dfrac{1}{n}\ln\dfrac{2n+\sqrt{4n^2-1}}{n+\sqrt{n^2-1}} = \dfrac{1}{n}\ln\dfrac{2+2\sqrt{1-\dfrac{1}{4n^2}}}{1+\sqrt{1-\dfrac{1}{n^2}}} =$

$\dfrac{1}{n}\ln\dfrac{2+2\left(1-\dfrac{1}{8n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)}{1+\left(1-\dfrac{1}{2n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)} = \dfrac{1}{n}\ln\dfrac{4+o(1)}{2+o(1)} \sim \dfrac{1}{n}\ln 2$ y diverge.

j′) $u_n = \dfrac{(\ln n)^n}{n!}$

Usando el criterio de d'Alembert se tiene: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^n \dfrac{\ln(n+1)}{n+1} =$
$\left(\dfrac{\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right)^n \dfrac{\ln(n+1)}{n+1} = \dfrac{\ln(n+1)}{n+1}\left[1 + \left(\dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)\dfrac{1}{\ln n}\right]^n =$
$\dfrac{\ln(n+1)}{n+1}\left[1 + \dfrac{1}{n\ln n} + o\left(\dfrac{1}{n\ln n}\right)\right]^n = \dfrac{\ln(n+1)}{n+1}e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right)} =$
$\dfrac{\ln(n+1)}{n+1}e^{n\left(\frac{1}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right)} = \dfrac{\ln(n+1)}{n+1}e^{\frac{1}{\ln n}+o\left(\frac{1}{\ln n}\right)} =$
$\dfrac{\ln(n+1)}{n+1}\left(1 + \dfrac{1}{\ln n} + o\left(\dfrac{1}{\ln n}\right)\right) \sim \dfrac{\ln(n+1)}{n+1} \longrightarrow 0$ y la serie converge.

k′) $u_n = \dfrac{n^2}{2^n + n}$

Por el criterio de d'Alembert se tiene: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2 \dfrac{2^n\left(1+\dfrac{n}{2^n}\right)}{2^{n+1}\left(1+\dfrac{n+1}{2^{n+1}}\right)} \longrightarrow \dfrac{1}{2}$ y hay convergencia de la serie.

l′) $u_n = \prod_{k=1}^{n} \dfrac{\ln k}{k}$

Por el criterio de d'Alembert se tiene: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\ln(n+1)}{n+1} \longrightarrow 0$ y la serie converge.

m′) $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{1+x^2}}dx$

Se tiene que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{1+x^2}}dx \leq \int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{x}dx = \dfrac{2}{3}\dfrac{1}{n^{3/2}}$ y converge.

n′) $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} \dfrac{\operatorname{sen}^3 x}{1+x}dx$

Observemos que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} \dfrac{\operatorname{sen}^3 x}{1+x}dx \leq \int_0^{\frac{1}{n}} x^3 dx = \dfrac{1}{4n^4}$ lo que evidencia la convergencia de la serie.

ñ′) $u_n = \displaystyle\int_n^{n+\frac{1}{2}} \dfrac{dx}{\sqrt{x^4+1}}$

Tomando en cuenta que $u_n = \int_n^{n+\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}} \leq \int_n^{n+\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{1+\frac{1}{2n}}\right) = \frac{1}{n}\left(1-\left(1-\frac{1}{2n}\right)+o\left(\frac{1}{2n}\right)\right) \sim \frac{1}{2n^2}$ y la serie converge.

o′) $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+n^2\tan^2 x}$

Sea $y = \tan x$, $x = \arctan y$, $dx = \frac{dy}{1+y^2}$, entonces $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+n^2\tan^2 x} = \int_0^{+\infty} \frac{dy}{(1+n^2y^2)(1+y^2)} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1-n^2}\left(\frac{1}{1+y^2} - \frac{n^2}{1+n^2y^2}\right)dy = \frac{1}{1-n^2}\left(\frac{\pi}{2} - n\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{n+1}$.
La serie diverge.

p′) $u_n = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+n^2 \operatorname{senh}^2 x}$

Observemos que $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+n^2\operatorname{senh}^2 x} \geq \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{dx}{1+n^2\operatorname{senh}^2 x} \geq \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{dx}{1+n^2\operatorname{senh}^2 \frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\frac{1}{1+n^2\operatorname{senh}^2\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\frac{1}{1+n^2\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2} \sim \frac{1}{2n}$ y la serie diverge.

q′) $u_n = \int_n^{\infty} \frac{1}{x^3-x^2}dx$

Usando fracciones parciales tenemos que $\int \frac{1}{x^3-x^2}dx = \frac{1}{x} + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) + C$, por lo que $\int_n^{\infty} \frac{1}{x^3-x^2}dx = -\frac{1}{n} - \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n} - \left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \sim \frac{1}{2n^2}$ y la serie converge.

r′) $u_n = \left(n\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right)^{-1}$

Sabemos que $u_n = \frac{1}{n\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}} \geq \frac{1}{n(\ln n+1)} \sim \frac{1}{n\ln n}$ y la serie diverge. Recordemos que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1+\ln n$.

s′) $u_n = \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}\right) - 1$

Es claro que $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \mathrm{e} - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \mathrm{e} - \frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\cdots\right) \leq \mathrm{e} - \frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\right) = \mathrm{e} - \frac{2}{(n+1)!} = \mathrm{e} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Por otro lado, $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{\mathrm{e}} - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$ y $\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, por lo que $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{\mathrm{e}} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ y finalmente $u_n = \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}\right) - 1 = 1 + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1 = \frac{1}{n^2}o(1)$, o sea la serie converge.

t′) $u_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

Es evidente que $u_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \geq \int_{n+1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{n+1}$ y la serie diverge.

u′) $u_n = \operatorname{sen}(\pi(2-\sqrt{3})^n)$, $v_n = \operatorname{sen}(\pi(2+\sqrt{3})^n)$

Como $0 < 2-\sqrt{3} < 1$, $(2-\sqrt{3})^n \longrightarrow 0$, entonces $u_n = \operatorname{sen}(\pi(2-\sqrt{3})^n) \sim \pi(2-\sqrt{3})^n$, y la serie converge. Sea $v_n = \operatorname{sen}(\pi(2+\sqrt{3})^n)$ y dado que $\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$, entonces $u_n + v_n = 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}((2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n)\cos\frac{\pi}{2}((2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n)$. Probemos que $\frac{\pi}{2}\left[(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n\right] \in \pi\mathbb{Z}$. En efecto:
$(2+\sqrt{3})^n = 2^n + \binom{n}{1}2^{n-1}\sqrt{3} + \binom{n}{2}2^{n-2}(\sqrt{3})^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}2(\sqrt{3})^{n-1} + (\sqrt{3})^n$, $(2-\sqrt{3})^n = 2^n - \binom{n}{1}2^{n-1}\sqrt{3} + \binom{n}{2}2^{n-2}(\sqrt{3})^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}2(\sqrt{3})^{n-1} + (-1)^n(\sqrt{3})^n$, por consiguiente la suma es $2\cdot 2^n + 2^{n-2}(\sqrt{3})^2\binom{n}{2} + 2^{n-4}(\sqrt{3})^4\binom{n}{4} + \cdots \in \mathbb{Z}$, ya que cada sumando es un entero. Finalmente $u_n + v_n = 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, o sea $u_n = \operatorname{sen}(\pi(2-\sqrt{3})^n) = -v_n = -\operatorname{sen}(\pi(2+\sqrt{3})^n)$ y ambas series convergen.

v′) $u_n = \dfrac{1}{(n+1)!}\sum_{k=1}^{n} k!$

Notemos que $u_n = \dfrac{1}{(n+1)!}\big(1! + 2! + 3! + \cdots + n!\big) \geq \dfrac{1}{(n+1)!}n! = \dfrac{1}{n+1}$ y la serie diverge.

w′) $u_{2n} = \dfrac{1}{\sqrt{2+n}-1}$, $u_{2n+1} = -\dfrac{1}{\sqrt{2+n}+1}$

La suma $u_{2n} + u_{2n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{2+n}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{2+n}+1} = \dfrac{\sqrt{2+n}+1-\sqrt{2+n}+1}{(2+n)-1} = \dfrac{2}{n+1}$ y $\sum_{k=0}^{2n+1} u_k = \sum_{k=0}^{n}\dfrac{2}{n+1}$, o sea la serie diverge.

x′) $u_1 \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{n}e^{-u_n}$

Observemos que $u_n > 0$, $\forall\, n \geq 2$. En efecto, $u_2 = \frac{1}{2}e^{-u_1} > 0$ y si $u_n > 0 \Longrightarrow u_{n+1} = \frac{1}{2}e^{-u_n} > 0$. Además como $u_n > 0 \Longrightarrow e^{-u_n} < 1 \Longrightarrow u_{n+1} < \dfrac{1}{n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, es decir $u_n \longrightarrow 0$, cuando $n \to \infty$, por lo que se tiene $u_{n+1} = \dfrac{1}{n}e^{-u_n} = \dfrac{1}{n}(1 - u_n + o(u_n)) \sim \dfrac{1}{n}$ y la serie diverge.

y′) $u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} \text{ si } \exists p \in \mathbb{N} \text{ tal que } n = p^2 \\ \dfrac{1}{n^2} \text{ si no.} \end{cases}$

La serie, al ser de términos positivos es la suma de dos series: $\sum_{\substack{n\neq p^2\\ p\in\mathbb{N}}} u_n = \sum_{n\neq p^2}\dfrac{1}{n^2}$ la primera que es claramente convergente pues está mayorada por $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$. La segunda $\sum_{\substack{n=p^2\\ p\in\mathbb{N}}} u_n = \sum_{p\in\mathbb{N}}\dfrac{1}{p^2}$ que es también convergente. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ es convergente.

z′) $u_n = \dfrac{1}{n\cos^2 n}$

Es claro que $u_n = \dfrac{1}{n\cos^2 n} \geq \dfrac{1}{n}$ y la serie diverge.

a″) $u_n = \operatorname{sen} n$

La serie diverge pues $u_n = \operatorname{sen} n \not\longrightarrow 0$, cuando $n \to \infty$.

b$''$) $u_n = \dfrac{\operatorname{sen}^2 n}{n}$

El término general $u_n = \dfrac{\operatorname{sen}^2 n}{n} = \dfrac{1}{2n} - \dfrac{\cos 2n}{2n}$, pero la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\cos 2n}{2n}$ converge por el criterio de Dirichlet, pero la serie es divergente ya que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n}$ es divergente.

12. Analice la naturaleza de la serie $\sum_n u_n$ cuyo término general u_n se indica. Compruebe que se cumplen las hipótesis de los criterios que emplee.

a) $u_n = \big(n^a\big)^{n^b}$, $a, b \in \mathbb{R}$

b) $u_n = \dfrac{a^{\sqrt{n}}}{n^\alpha}$, $a > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$

c) $u_n = n^\alpha \tan\big(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\big)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

d) $u_n = \dfrac{a^n}{n + b^n}$, $a > 0$, $b > 0$

e) $u_n = \cos^n\big(\frac{1}{n^\alpha}\big)$, $\alpha > 0$

f) $u_n = \cos\big(\frac{\pi}{2} \cdot \dfrac{n^2}{n^2 + an + b}\big)$, $a, b \in \mathbb{R}$

g) $u_n = \sqrt{n^4 + 2n + 1} - \sqrt{n^4 + an}$, $a \in \mathbb{R}$

h) $u_n = \sqrt[3]{n^3 + n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 + 1} + a + \frac{b}{n}$, $a, b \in \mathbb{R}$

i) $u_n = \sqrt[3]{n^3 - 4n^2 + 5n} - \sqrt{n^2 + an + b}$, $a, b \in \mathbb{R}$

j) $u_n = \big(\cos\frac{a}{n} + b \operatorname{sen}\frac{a}{n}\big)^n - \mathrm{e}^{ab}\big(1 + \frac{c}{n}\big)$, $a, b, c \in \mathbb{R}$

k) $u_n = \operatorname{arcsen}\sqrt{\dfrac{a + \sqrt{n}}{n}} - \arctan\sqrt{\dfrac{b + \sqrt{n}}{n}}$, $a, b \in \mathbb{R}$

l) $u_n = \arccos\big(\big(1 - \frac{1}{n^a}\big)^b\big)$, $a, b > 0$

m) $u_n = n^\alpha\big[\big(n+1\big)^{(n+1)/n} - \big(n+1\big)^{(n-1)/n}\big)\big]$, $\alpha \in \mathbb{R}$

n) $u_n = \big(\dfrac{n^2 + 1}{n^2 + n + 1}\big)^n + a\big(\dfrac{n^2 - 1}{n^2 - n + 1}\big)^n + b$, $a, b \in \mathbb{R}$

ñ) $u_n = \big(n^2\big(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} - \sqrt{an + b}\big)\big)^{-1}$, $a, b \in \mathbb{R}$

o) $u_n = n^a\big[(\ln(2n+1))^b - (\ln 2n)^b\big]$, $a, b \in \mathbb{R}$

p) $u_n = \ln\dfrac{1}{n^a} - \ln\operatorname{sen}\dfrac{1}{n^a}$, $a > 0$

q) $u_n = \left(\dfrac{\ln(n^2+1)}{\ln(n^2-1)} - 1\right)^a$, $a \in \mathbb{R}$

r) $u_n = n^a \sum_{k=1}^n \sqrt{k}$, $a \in \mathbb{R}$

s) $u_n = \dfrac{\ln n!}{n^a}$, $a \in \mathbb{R}$

t) $u_n = n^a \sum_{k=1}^n (\ln k)^2$, $a \in \mathbb{R}$

u) $u_n = \left(\dfrac{n \cosh n}{\sum_{k=1}^n \cosh k}\right)^a$, $a \in \mathbb{R}$

v) $u_n = a^{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}$, $a > 0$

w) $u_n = \big(\lambda\sqrt{\lambda}\sqrt[3]{\lambda}\cdots\sqrt[n]{\lambda}\big)^{-1}$, $\lambda > 0$

x) $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} (\operatorname{arcsen} x)^a\,dx$, $a \in \mathbb{R}$

y) $u_n = \mathrm{e}^{-na}\displaystyle\int_1^n \mathrm{e}^{ax}\,dx$, $a \in \mathbb{R}$

z) $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{n}} (\operatorname{sen} x)^a\,dx$, $a > 0$

a$'$) $u_n = |\operatorname{sen} n|^a$, $a > 0$.

Solución

a) $u_n = \big(n^a\big)^{n^b}$, $a, b \in \mathbb{R}$

El término general $u_n = \mathrm{e}^{an^b \ln n} \longrightarrow 0 \iff a < 0,\, b > 0$, pues $an^b \ln n \longrightarrow -\infty$. Así, cuando $a < 0$, $b > 0$, se tiene $\left(n^a\right)^{n^b} = \dfrac{1}{n^{-an^b}} < \dfrac{1}{n^2} \iff -an^b > 2 \iff n^b > -2/a \iff n > \sqrt[b]{-2/a}$ y la serie converge.

Si $b = 0$, $u_n = (n^a)^{n^0} = n^a$ y la serie converge si $a < -1$.

b) $u_n = \dfrac{a^{\sqrt{n}}}{n^\alpha}$, $a > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Observemos que $u_n = \mathrm{e}^{\sqrt{n}\ln a - \alpha \ln n} \longrightarrow 0 \iff \ln a < 0$, cuando $a \neq 1$, o sea $a < 1$. Si $a = 1$, $u_n \longrightarrow 0$, para $\alpha > 0$.

Si $a < 1$, $\dfrac{a^{\sqrt{n}}}{n^\alpha} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{-\sqrt{n}\ln a + \alpha \ln n}} \sim a^{\sqrt{n}}$, cuando $n \to \infty$ y la serie converge pues $a^{\sqrt{n}} < \dfrac{1}{n^2} \iff 2\ln n < \sqrt{n} \ln \dfrac{1}{a}$, lo que sucede a partir de algún $n_0 \in \mathbb{N}$ pues $\dfrac{2\ln n}{\sqrt{n}(-\ln a)} \longrightarrow 0$, cuando $n \to \infty$.

Si $a = 1$, $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ y converge la serie para $\alpha > 1$.

c) $u_n = n^\alpha \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Puesto que $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right) = \dfrac{1 + \tan\frac{1}{n}}{1 - \tan\frac{1}{n}} \sim \dfrac{1 + \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n}} \longrightarrow 1$, entonces se tiene que $u_n = n^\alpha \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right) \sim n^\alpha$ que converge si $\alpha < -1$.

d) $u_n = \dfrac{a^n}{n + b^n}$, $a > 0$, $b > 0$

Si $0 < a < 1$ y $0 < b \le 1$, $\dfrac{a^n}{n + b^n} \sim \dfrac{a^n}{n} < a^n$ y la serie converge.

Si $b > 1$, $\dfrac{a^n}{n + b^n} \sim \left(\frac{a}{b}\right)^n$ y la serie converge si $a < b$ y diverge si $b > a$.

Si $b = 1$, $u_n \sim \dfrac{1}{n}$ y la serie diverge.

Si $a > 1$ y $0 < b \le 1$, $u_n \sim a^n$ y la serie diverge.

Si $a = 1$ y $0 < b \le 1$, $u_n \sim \dfrac{1}{n}$ y la serie diverge.

Si $a = b > 1$, $u_n \sim \dfrac{1}{1 + \frac{n}{a^n}} \longrightarrow 1$ y la serie diverge.

e) $u_n = \cos^n\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, $\alpha > 0$

Si $\alpha > 0$, $\dfrac{1}{n^\alpha} \longrightarrow 0$ y $u_n = \mathrm{e}^{n \ln \cos \frac{1}{n^\alpha}} = \mathrm{e}^{n \ln(1 - \frac{1}{2n^{2\alpha}} + o(\frac{1}{2n^{2\alpha}}))} \sim \mathrm{e}^{-n\frac{1}{2n^{2\alpha}}} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2n^{2\alpha-1}}} \longrightarrow 0$, si $2\alpha - 1 < 0$, es decir si $\alpha < \frac{1}{2}$. Por otro lado $n^2 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2n^{2\alpha-1}}} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2n^{2\alpha-1}} + 2\ln n} \longrightarrow 0$, por lo que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \ge n_0$, $n^2 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2n^{2\alpha-1}}} < 1$, es decir $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2n^{2\alpha-1}}} < \dfrac{1}{n^2}$ y la serie converge.

f) $u_n = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \dfrac{n^2}{n^2 + an + b}\right)$, $a, b \in \mathbb{R}$

Dado que $\dfrac{n^2}{n^2 + an + b} = \dfrac{1}{1 + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2}} = 1 - \dfrac{a}{n} - \dfrac{b}{n^2} + \left(\frac{a}{n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, se tiene $u_n = \cos\Big(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\left(-\frac{a}{n} + \frac{a^2 - b}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\Big) = -\operatorname{sen}\Big(\frac{\pi}{2}\left(-\frac{a}{n} + \frac{a^2 - b}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\Big) = \frac{\pi}{2}\left(-\frac{a}{n} + \frac{a^2 - b}{n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ y la serie converge si y sólo si $a = 0$.

g) $u_n = \sqrt{n^4 + 2n + 1} - \sqrt{n^4 + an}$, $a \in \mathbb{R}$

Racionalizando $\sqrt{n^4+2n+1}-\sqrt{n^4+an} = \dfrac{n^4+2n+1-n^4-an}{\sqrt{n^4+2n+1}+\sqrt{n^4+an}} =$
$\dfrac{(2-a)n+1}{n^2\Big[\sqrt{1+\frac{2}{n^3}+\frac{1}{n^4}}+\sqrt{1+\frac{a}{n^3}}\Big]} \sim \dfrac{(2-a)n+1}{2n^2}$ y la serie converge sii $a=2$.

h) $u_n = \sqrt[3]{n^3+n^2+n+1}-\sqrt{n^2+1}+a+\dfrac{b}{n}$, $a,b\in\mathbb{R}$

Se tiene que $u_n = n\big(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}\big)^{1/3} - n\big(1+\frac{1}{n^2}\big)^{1/2}+a+\frac{b}{n} = n\big(1+\frac{1}{3n}-\frac{2}{9n^2}+\frac{14}{81n^3}+o\big(\frac{1}{n^3}\big)\big)-n\big(1+\frac{1}{2n^2}+o\big(\frac{1}{n^3}\big)\big)+a+\frac{b}{n} = \big(\frac{1}{3}+a\big)+\big(b-\frac{5}{18}\big)\frac{1}{n}+\frac{14}{81n^2}+o\big(\frac{1}{n^2}\big)$ y la serie converge si y sólo si $a=-\frac{1}{3}$ y $b=\frac{5}{18}$.

i) $u_n = \sqrt[3]{n^3-4n^2+5n}-\sqrt{n^2+an+b}$, $a,b\in\mathbb{R}$

Desarrollando la expresión $u_n = n\big(1-\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2}\big)^{1/3} - n\big(1+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}\big)^{1/2} = n\big(1-\frac{4}{3n}-\frac{1}{9n^2}+\frac{40}{81n^3}+o\big(\frac{1}{n^3}\big)\big)-n\big(1+\frac{a}{2n}+\big(\frac{1}{2}b-\frac{1}{8}a^2\big)\frac{1}{n^2}+\big(\frac{1}{4}ab-\frac{1}{16}a^3\big)\frac{1}{n^3}+o\big(\frac{1}{n^3}\big)\big) = \big(-\frac{1}{2}a-\frac{4}{3}\big)+\big(-\frac{1}{2}b+\frac{1}{8}a^2-\frac{1}{9}\big)\frac{1}{n}+\big(-\frac{1}{4}ab+\frac{1}{16}a^3+\frac{40}{81}\big)\frac{1}{n^2}+o\big(\frac{1}{n^2}\big)$. La serie converge si y sólo si $\frac{1}{2}a=-\frac{4}{3}$ y $-\frac{1}{2}b+\frac{1}{8}a^2-\frac{1}{9}=0$, es decir $a=-\frac{8}{3}$ y $b=\frac{14}{9}$.

j) $u_n = \big(\cos\frac{a}{n}+b\,\mathrm{sen}\,\frac{a}{n}\big)^n - \mathrm{e}^{ab}\big(1+\frac{c}{n}\big)$, $a,b,c\in\mathbb{R}$

Desarrollando $\cos\frac{a}{n}+b\,\mathrm{sen}\,\frac{a}{n} = 1+\frac{ab}{n}-\frac{a^2}{2n^2}-\frac{a^3b}{6n^3}+o\big(\frac{1}{n^3}\big)$, se tiene $\big(\cos\frac{a}{n}+b\,\mathrm{sen}\,\frac{a}{n}\big)^n = \mathrm{e}^{ab-a^2(1+b^2)\frac{1}{2n}+a^3b\frac{1}{3n^2}+o(\frac{1}{n^2})}$.

Así, $u_n = \mathrm{e}^{ab}\big(\big(-\frac{1}{2}a^2(b^2+1)-c\big)\frac{1}{n}+\big(\frac{1}{3}a^3b+\frac{1}{3}a^3b^3+\frac{1}{8}a^4+\frac{1}{4}a^4b^2+\frac{1}{8}a^4b^4\big)\frac{1}{n^2}+o\big(\frac{1}{n^2}\big)\big)$ y la serie converge si y sólo si $a^2(b^2+1)+2c=0$.

k) $u_n = \mathrm{arcsen}\,\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{n}}{n}}-\arctan\sqrt{\dfrac{b+\sqrt{n}}{n}}$, $a,b\in\mathbb{R}$

Es claro que $\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{n}}{n}} = \sqrt{\dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big(\dfrac{a}{\sqrt{n}}+1\Big)} = n^{-1/4}\big(1+\frac{a}{\sqrt{n}}\big)^{1/2} = n^{-1/4}\big(1+\frac{a}{2\sqrt{n}}-\frac{a^2}{8n}+o\big(\frac{1}{n}\big)\big) = n^{-1/4}+\frac{a}{2n^{3/4}}-\frac{a^2}{8n^{5/4}}+o\big(\frac{1}{n^{5/4}}\big)$, por lo tanto $\mathrm{arcsen}\,\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{n}}{n}}-\arctan\sqrt{\dfrac{b+\sqrt{n}}{n}} = n^{-1/4}+\frac{a}{2n^{3/4}}+\frac{1}{6n^{3/4}}-\frac{a^2}{8n^{5/4}}-n^{-1/4}-\frac{b}{2n^{3/4}}+\frac{1}{3n^{3/4}}+\frac{b^2}{8n^{5/4}}+o\big(\frac{1}{n^{5/4}}\big) = \frac{a-b+1}{2n^{3/4}}+\frac{b^2-a^2}{8n^{5/4}}+o\big(\frac{1}{n^{5/4}}\big)$ y la serie converge si y sólo si $a-b+1=0$.

l) $u_n = \arccos\big(\big(1-\frac{1}{n^a}\big)^b\big)$, $a,b>0$

Dado que $\arccos x\sim\sqrt{1-x^2}$, cuando $x\to 1$ se tiene: $u_n = \arccos\big(\big(1-\frac{1}{n^a}\big)^b\big) = \sqrt{1-\big(1-\frac{b}{n^a}+o\big(\frac{1}{n^a}\big)\big)} = \sqrt{b}\frac{1}{n^{a/2}}+o\big(\frac{1}{n^{a/2}}\big)$ y la serie converge si y sólo si $a/2>1$, es decir $a>2$.

m) $u_n = n^\alpha\big[\big(n+1\big)^{(n+1)/n}-\big(n+1\big)^{(n-1)/n}\big]$, $\alpha\in\mathbb{R}$

Veamos que $\mathrm{e}^{\frac{n+1}{n}\ln(1+n)} = \mathrm{e}^{(1+\frac{1}{n})\ln n(1+\frac{1}{n})} = \mathrm{e}^{(1+\frac{1}{n})(\ln n+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2}))} =$

$e^{\ln n+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\ln n+\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})} = n\big(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{n}\ln n+o(\frac{1}{n^2})\big) = n+1+\frac{1}{2n}+\ln n+o(\frac{1}{n})$.

También $e^{\frac{n-1}{n}\ln(1+n)} = n+1-\frac{3}{2n}-\ln n+o(\frac{1}{n})$, por lo que $u_n = n^\alpha\big[2\ln n-\frac{2}{n}+o(\frac{1}{n})\big] \sim 2n^\alpha \ln n$ y la serie converge si y sólo si $\alpha < -1$.

n) $u_n = \big(\frac{n^2+1}{n^2+n+1}\big)^n + a\big(\frac{n^2-1}{n^2-n+1}\big)^n + b$, $a, b \in \mathbb{R}$

Puesto que $\frac{n^2+1}{n^2+n+1} = \frac{n^2+1}{n^2}\frac{1}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = \big(1+\frac{1}{n^2}\big)\big(1-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^3}+o(\frac{1}{n^3})\big) = 1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^3})$, tenemos $e^{n\ln\frac{n^2+1}{n^2+n+1}} = e^{n(-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+\frac{2}{3n^3}+o(\frac{1}{n^3}))} = e^{-1}\big(1+\frac{1}{2n}+\frac{19}{24n^2}+o(\frac{1}{n^2})\big)$.

Similarmente $\frac{n^2-1}{n^2-n+1} = \big(1-\frac{1}{n^2}\big)\big(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}+o(\frac{1}{n^3})\big) = 1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n^3}+o(\frac{1}{n^3})$, con lo cual $a\big(\frac{n^2-1}{n^2-n+1}\big)^n = ae\big(1-\frac{3}{2n}+\frac{11}{24n^2}+o(\frac{1}{n^2})\big)$ y se tiene $u_n = e^{-1}\big(1+\frac{1}{2n}+\frac{19}{24n^2}\big) + ae\big(1-\frac{3}{2n}+\frac{11}{24n^2}\big)+o(\frac{1}{n^2}) = (e^{-1}+ae+b)+\frac{1}{2}\big(e^{-1}-3ae\big)\frac{1}{n}+\big(\frac{19}{24}e^{-1}-\frac{11}{24}ae\big)\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})$.

La serie converge si y sólo si $e^{-1}+ae+b=0$ y $e^{-1}-3ae=0$, es decir $a=\frac{1}{3e^2}$, $b=-\frac{4}{3e}$.

ñ) $u_n = \big(n^2\big(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}-\sqrt{an+b}\big)\big)^{-1}$, $a, b \in \mathbb{R}$

Haciendo un desarrollo limitado hasta el orden 3 de $\frac{1}{n}$ tenemos:

$u_n = \big(n^{5/2}\big(\big(1+\frac{1}{n}\big)^{1/2}+\big(1+\frac{2}{n}\big)^{1/2}-\sqrt{a}\big(1+\frac{b}{an}\big)^{1/2}\big)\big)^{-1} = \big(n^{5/2}\big(1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}+\frac{1}{16n^3}+1+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{2n^3}-\sqrt{a}\big(1+\frac{b}{2an}-\frac{b^2}{8a^2n^2}+\frac{b^3}{16a^3n^3}\big)+o(\frac{1}{n^3})\big)\big)^{-1} = \big(n^{5/2}\big(2-\sqrt{a}+\big(\frac{3}{2}-\frac{b}{2\sqrt{a}}\big)\frac{1}{n}+\big(\frac{b^2}{8a^{3/2}}-\frac{5}{8}\big)\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})\big)\big)^{-1}$.

Si $a \neq 4$, $u_n \sim \big(n^{5/2}(2-\sqrt{a})\big)^{-1} = \frac{1}{(2-\sqrt{a})n^{5/2}}$ y la serie converge.

Si $a=4$ y $b \neq 6$, $u_n \sim \big(n^{5/2}\big(\frac{3}{2}-\frac{b}{4}\big)\frac{1}{n}\big)^{-1} = \frac{1}{\big(\frac{3}{2}-\frac{b}{4}\big)n^{3/2}}$ y la serie converge.

Si $a=4$ y $b=6$, $u_n \sim \big(n^{5/2}\big(\frac{b^2}{8a^{3/2}}-\frac{5}{8}\big)\frac{1}{n^2}\big)^{-1} = -\frac{16}{n^{1/2}}$ y la serie diverge.

o) $u_n = n^a\big[(\ln(2n+1))^b-(\ln 2n)^b\big]$, $a, b \in \mathbb{R}$

Desarrollando $(\ln(2n+1))^b = \big[\ln 2n+\ln\big(1+\frac{1}{2n}\big)\big]^b = \big[\ln 2n+\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})\big]^b = \ln^b 2n\big[1+\frac{1}{2n\ln 2n}+o(\frac{1}{n\ln 2n})\big]^b = \ln^b 2n\big[1+\frac{b}{2n\ln 2n}+\frac{b(b+1)}{8n^2\ln^2 2n}+o(\frac{1}{n^2\ln^2 2n})\big] = (\ln 2n)^b+\frac{b}{2n\ln^{1-b}2n}+\frac{b(b+1)}{8n^2\ln^{2-b}2n}+o(\frac{1}{n^2\ln^{2-b}2n})$, lo que conduce a:

$u_n = n^a\big[(\ln(2n+1))^b-(\ln 2n)^b\big] = \frac{b}{2n^{1-a}\ln^{1-b}2n}+\frac{b(b+1)}{8n^{2-a}\ln^{2-b}2n}+o\big(\frac{1}{n^{2-a}\ln^{2-b}2n}\big) = \frac{b}{2}n^{a-1}\ln^{b-1}2n+\frac{b(b+1)}{8}n^{a-2}\ln^{b-2}2n+o(n^{a-2}\ln^{b-2}2n)$.

La serie de término general u_n converge si $a-1<-1$, o sea $a<0$.

Si $a=0$ tenemos que $u_n \sim \frac{b}{2n}\ln^{b-1}2n$ y converge si $b<0$, por el criterio de la integral.

p) $u_n = \ln\frac{1}{n^a}-\ln\operatorname{sen}\frac{1}{n^a}$, $a>0$

En este caso $a>0$ y $\dfrac{1}{n^a}\longrightarrow 0$, cuando $n\to\infty$, entonces $\operatorname{sen}\dfrac{1}{n^a}=\dfrac{1}{n^a}-\dfrac{1}{6n^{3a}}+o\big(\dfrac{1}{n^{3a}}\big)=\dfrac{1}{n^a}\big(1-\dfrac{1}{6n^{2a}}+o\big(\dfrac{1}{n^{2a}}\big)\big)$ y nos queda $u_n=\ln\dfrac{1}{n^a}-\ln\operatorname{sen}\dfrac{1}{n^a}=\ln\dfrac{1}{n^a}-\ln\dfrac{1}{n^a}-\ln\big(1-\dfrac{1}{6n^{2a}}+o\big(\dfrac{1}{n^{2a}}\big)\big)=\dfrac{1}{6n^{2a}}+o\big(\dfrac{1}{n^{2a}}\big)\sim\dfrac{1}{6n^{2a}}$ y la serie converge si y sólo si $2a>1$, es decir $a>\frac{1}{2}$.

q) $u_n=\left(\dfrac{\ln(n^2+1)}{\ln(n^2-1)}-1\right)^a$, $a\in\mathbb{R}$

Desarrollando $\dfrac{\ln n^2\big(1+\dfrac{1}{n^2}\big)}{\ln n^2\big(1-\dfrac{1}{n^2}\big)}=\dfrac{2\ln n+\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{2n^4}+o\big(\dfrac{1}{n^4}\big)}{2\ln n-\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{2n^4}+o\big(\dfrac{1}{n^4}\big)}=$

$\dfrac{1+\dfrac{1}{2n^2\ln n}-\dfrac{1}{4n^4\ln n}+o\big(\dfrac{1}{n^4\ln n}\big)}{1-\dfrac{1}{2n^2\ln n}-\dfrac{1}{4n^4\ln n}+o\big(\dfrac{1}{n^4\ln n}\big)}=\big(1+\dfrac{1}{2n^2\ln n}-\dfrac{1}{4n^4\ln n}+o\big(\dfrac{1}{n^4\ln n}\big)\big)\times$
$\big(1+\dfrac{1}{2n^2\ln n}+\dfrac{1}{4n^4\ln n}+\dfrac{1}{4n^4\ln^2 n}+o\big(\dfrac{1}{n^4\ln^2 n}\big)\big)=1+\dfrac{1}{n^2\ln n}+o\big(\dfrac{1}{n^2\ln n}\big)$, de donde $u_n\sim\big(\dfrac{1}{n^2\ln n}\big)^a=\dfrac{1}{n^{2a}\ln^a n}$ y la serie converge si y sólo si $2a>1$ i.e. $a>\frac{1}{2}$.

r) $u_n=n^a\sum_{k=1}^n\sqrt{k}$, $a\in\mathbb{R}$

En virtud que $u_n=n^{a+3/2}\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^n\sqrt{\dfrac{k}{n}}\sim n^{a+3/2}\displaystyle\int_0^1\sqrt{x}dx=\dfrac{2}{3}n^{a+3/2}$ y hay convergencia de la serie si y sólo si $a+\frac{3}{2}<-1\iff a<-\frac{5}{2}$.

s) $u_n=\dfrac{\ln n!}{n^a}$, $a\in\mathbb{R}$

Usando la aproximación de Stirling para $n!$ tenemos $u_n=\dfrac{\ln(n^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi})}{n^a}=$
$\dfrac{(n+\frac{1}{2})\ln n-n+\ln\sqrt{2\pi}}{n^a}\sim\dfrac{n\ln n}{n^a}=\dfrac{\ln n}{n^{a-1}}$ y hay convergencia si y sólo si $a-1>1$ i.e. $a>2$.

t) $u_n=n^a\sum_{k=1}^n(\ln k)^2$, $a\in\mathbb{R}$

Se tiene que $\sum_{k=1}^n\ln^2 k=\sum_{k=1}^n\left(\ln\dfrac{k}{n}\right)^2+2\sum_{k=1}^n\ln k\ln n-n\ln^2 n$ y por lo tanto $u_n=n^a\sum_{k=1}^n\ln^2 k=n^a\sum_{k=1}^n\left(\ln\dfrac{k}{n}\right)^2+2n^a\ln n\sum_{k=1}^n\ln k-n^{a+1}\ln^2 n=n^{a-1}\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^n\left(\ln\dfrac{k}{n}\right)^2+2n^{a-1}\ln n\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^n\ln\dfrac{k}{n}-n^{a+1}\ln^2 n\sim n^{a-1}\displaystyle\int_0^1\ln^2 x\,dx+2n^{a-1}\ln n\int_0^1\ln x dx-n^{a+1}\ln^2 n\sim n^{a+1}\ln^2 n$ y converge si y sólo si $a+1<-1$, es decir $a<-2$.

u) $u_n=\left(\dfrac{n\cosh n}{\sum_{k=1}^n\cosh k}\right)^a$, $a\in\mathbb{R}$

Dado que $\cosh x=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$, la suma $\sum_{k=1}^n\cosh k=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}\left(\dfrac{1-\mathrm{e}^n}{1-\mathrm{e}}+\dfrac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-n+1}}{\mathrm{e}-1}\right)=$
$\dfrac{\mathrm{e}}{2(\mathrm{e}-1)}\big(\mathrm{e}^n-1+\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-n+1}\big)$ y tenemos $u_n=\left(\dfrac{\dfrac{n}{2}(\mathrm{e}^n+\mathrm{e}^{-n})}{\dfrac{\mathrm{e}}{2(\mathrm{e}-1)}\big(\mathrm{e}^n-1+\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-n+1}\big)}\right)^a=$
$\left(\dfrac{n(1+\mathrm{e}^{-2n})(\mathrm{e}-1)}{\mathrm{e}\big(1-\mathrm{e}^{-n}+\mathrm{e}^{-n+1}-\mathrm{e}^{-2n+1}\big)}\right)^a\sim\left(\dfrac{n(\mathrm{e}-1)}{\mathrm{e}}\right)^a$. De este modo la serie converge si y sólo si $a<-1$.

v) $u_n = a^{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$, $a > 0$

Sabemos que $\sum_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k} \leq \ln n \leq \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$, por lo tanto:
si $a \geq 1$, $u_n \sim a^{\ln n} \not\to 0$ y la serie diverge
si $a < 1$, $u_n \sim a^{\ln n} = \mathrm{e}^{(\ln n)(\ln a)} = n^{\ln a}$ y converge la serie si y sólo si $\ln a < -1 \Longleftrightarrow 0 < a < \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

w) $u_n = \left(\lambda\sqrt{\lambda}\sqrt[3]{\lambda}\cdots\sqrt[n]{\lambda}\right)^{-1}$, $\lambda > 0$

El término general $u_n = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln(\lambda\sqrt{\lambda}\sqrt[3]{\lambda}\cdots\sqrt[n]{\lambda})}} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln\lambda\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}} \sim \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\alpha\ln n}} = \dfrac{1}{n^{\alpha}}$, con $\alpha = \ln\lambda$. Así, la serie converge si y sólo si $\alpha > 1$, o sea $\lambda > \mathrm{e}$.

x) $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} (\operatorname{arcsen} x)^a dx$, $a \in \mathbb{R}$

Sabemos que $(\operatorname{arcsen} x)^a \sim x^a$, por lo que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} (\operatorname{arcsen} x)^a dx \sim \int_0^{\frac{1}{n}} x^a dx = \frac{1}{a+1}\frac{1}{n^{a+1}}$ y la serie de término general u_n converge si y sólo si $a + 1 > 1 \Longleftrightarrow a > 0$.

y) $u_n = \mathrm{e}^{-an}\displaystyle\int_1^n \mathrm{e}^{ax} dx$, $a \in \mathbb{R}$

Integrando $\mathrm{e}^{-an}\displaystyle\int_1^n \mathrm{e}^{ax} dx = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{-na}\mathrm{e}^{ax}\Big|_1^n = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{-an}(\mathrm{e}^{an} - \mathrm{e}^{a}) = \frac{1}{a}(1 - \mathrm{e}^{-a(n-1)}) \longrightarrow \frac{1}{a}$, si $a \neq 0$ y la serie diverge $\forall a \neq 0$. Si $a = 0$, $u_n = \displaystyle\int_1^n dx = n - 1$ y también la serie diverge. Finalmente la serie diverge $\forall a \in \mathbb{R}$.

z) $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{n}} (\operatorname{sen} x)^a dx$, $a > 0$

Dado que $\operatorname{sen} x \sim x$ si $x \to 0$, también $(\operatorname{sen} x)^a \sim x^a$ y se tiene que $u_n \sim \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{n}} x^a\, dx = \frac{1}{a+1}\frac{\pi^{a+1}}{n^{a+1}}$.
Así, la serie converge si $a > 0$.

a′) $u_n = |\operatorname{sen} n|^a$, $a > 0$

La serie diverge pues $\operatorname{sen} n \not\to 0$, cuando $n \to \infty$.

13. Analice la naturaleza de la serie $\sum_n u_n$ cuyo término general u_n se indica. Compruebe que se cumplen las hipótesis de los criterios que emplee.

a) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n + (-1)^{n+1}}$

b) $u_n = \dfrac{(-1)^n n + 2}{n^2 + 1}$

c) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^{n+1}}$

d) $u_n = \sqrt{n + (-1)^n} - \sqrt{n}$

e) $u_n = \sqrt{1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$

f) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n + (-1)^n}}$

g) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n \ln n}$

h) $u_n = (-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$

i) $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$

j) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln n + (-1)^n}$

k) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n \dfrac{n}{\ln n}}$

l) $u_n = \ln\big(\dfrac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n-4}}\big)$

m) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln(n+(-1)^n)}$

n) $u_n = \ln n \cdot \ln\big(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\big)$

ñ) $u_n = \ln\big(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\big)$

o) $u_n = \operatorname{sen} \pi\sqrt{n^2+2n+2}$

p) $u_n = \operatorname{sen} \dfrac{\pi n^2}{n+1}$

q) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$

r) $u_n = \cos \pi\sqrt{n^2+n+1}$

s) $u_n = \mathrm{e}^{(-1)^n \frac{\ln n}{n}} - 1$

t) $u_n = \mathrm{e}^{(-1)^n/\sqrt{n}} - 1$

u) $u_n = (-1)^n n^{-\operatorname{tgh} n}$

v) $u_n = (-1)^n\big((1+\frac{1}{n})^{-n} - \frac{1}{\mathrm{e}}\big)$

w) $u_n = \dfrac{(-1)^n\sqrt{n}\operatorname{sen}\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}+(-1)^n}$

x) $u_n = n^{(-1)^n/\sqrt{n}} - 1$

y) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n-\ln n}$

z) $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \mathrm{e}^{-\sqrt{\ln x}} \operatorname{sen} x\, dx$

a′) $u_n = \cos\big(\pi n^2 \ln \dfrac{n}{n-1}\big)$

b′) $u_n = (-1)^n\sqrt{n}\tan\dfrac{1}{n}$

c′) $u_n = \dfrac{1}{(n+1)!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k!$

d′) $u_n = \displaystyle\int_0^1 \cos(nx^2)dx$

e′) $u_n = \dfrac{(-1)^{[\![\sqrt{n}]\!]}}{n}$

f′) $u_n = (-1)^n\dfrac{P(n)}{Q(n)}$, $P, Q \neq 0$ polinomios

g′) $u_n = \dfrac{a+(-1)^n\sqrt{n}}{a+(-1)^{n-1}\sqrt{n}+n}$

h′) $u_n = (-1)^n(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2+an-1}+b)$, $a, b \in \mathbb{R}$

i′) $u_n = \ln\big(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{a}{n}\big)$, $a \in \mathbb{R}$

j′) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{(-1)^n+n^a}$, $a \in \mathbb{R}^*$.

k′) $u_n = (\operatorname{sen}(\pi n!\mathrm{e}))^p$, $p \in \mathbb{N}$

l′) $u_n = \dfrac{(-1)^n\cos n}{\sqrt{n}}$

m′) $u_n = \dfrac{\cos na\cos nb\cos nc}{\sqrt{n}}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Solución

a) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^{n+1}}$

Factorizando $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}\dfrac{1}{1+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}} = \dfrac{(-1)^n}{n}\big(1 - \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} + o\big(\dfrac{1}{n}\big)\big) = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1}{n^2} + o\big(\dfrac{1}{n^2}\big)$, entonces la serie converge pues es equivalente a la suma de una serie alternada convergente y una serie absolutamente convergente.

b) $u_n = \dfrac{(-1)^n n+2}{n^2+1}$

Observemos que $u_n = \dfrac{(-1)^n n}{n^2}\dfrac{1+\dfrac{2(-1)^n}{n}}{1+\dfrac{1}{n^2}} = \dfrac{(-1)^n}{n}\big(1+(-1)^n\dfrac{2}{n}\big)\big(1-\dfrac{1}{n^2}+o\big(\dfrac{1}{n^2}\big)\big) = \dfrac{(-1)^n}{n}\big(1+$

$(-1)^n\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})\big) = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{2}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$. La serie converge pues es la suma de una serie alternada convergente y una serie absolutamente convergente.

c) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^{n+1}}$

El término general $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \dfrac{1}{1 - \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\big(1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})\big) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + \dfrac{(-1)^n}{n^{3/2}} + o(\dfrac{1}{n^{3/2}})$ y la serie diverge.

d) $u_n = \sqrt{n + (-1)^n} - \sqrt{n}$

Considerando que $u_n = \sqrt{n + (-1)^n} - \sqrt{n} = \sqrt{n}\big(1 + \frac{(-1)^n}{n}\big)^{1/2} - \sqrt{n} = \sqrt{n}\big(1 + \frac{(-1)^n}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o(\frac{1}{n^2})\big) - \sqrt{n} = \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{8n^{3/2}} + o(\frac{1}{n^{3/2}})$, tenemos la convergencia de la serie.

e) $u_n = \sqrt{1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$

Siendo $u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{8n} + o(\frac{1}{n}) - 1 = \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{8n} + o(\frac{1}{n})$, la serie diverge.

f) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n + (-1)^n}}$

$u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \dfrac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{(-1)^n}{n}}} = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\big(1 - \frac{(-1)^n}{2n} + \frac{3}{8}\frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})\big) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n^{3/2}} + o(\frac{1}{n^{3/2}})$ y la serie converge.

g) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n \ln n}$

Dado que $(\frac{1}{n \ln n})_n \downarrow$ la serie converge, pues es una serie alternada cuyo término general tiende a 0.

h) $u_n = (-1)^n \frac{\ln n}{n}$

Sea $f(x) = \frac{1}{x}\ln x$, la derivada es $f'(x) = -\frac{1}{x^2}\ln x + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}(1 - \ln x) < 0$ si $x > \mathrm{e}$, entonces $(\frac{\ln n}{n}) \downarrow 0$ para $n \geq 3$ y la serie es convergente.

i) $u_n = \ln\big(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\big)$

Puesto que $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$ la serie diverge.

j) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln n + (-1)^n}$

Factorizando $u_n = \frac{(-1)^n}{\ln n}\big(1 - \frac{(-1)^n}{\ln n} + o(\frac{1}{\ln n})\big) = \frac{(-1)^n}{\ln n} - \frac{1}{\ln^2 n} + o(\frac{1}{\ln^2 n})$ y la serie diverge pues $\sum_{n=2}^{\infty}\big(\frac{1}{\ln^2 n} + o(\frac{1}{\ln^2 n})\big)$ diverge. En efecto, como $\frac{1}{\ln^2 n} + o(\frac{1}{\ln^2 n}) \sim \frac{1}{\ln^2 n}$ y $\frac{\ln n}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ se tiene $\frac{\ln n}{\sqrt{n}} < 1$ y $\frac{1}{n} < \frac{1}{\ln^2 n}$, es decir la serie $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^2 n}$ diverge.

k) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n + (-1)^n \dfrac{n}{\ln n}}$

Se sabe que $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n} \dfrac{1}{1 + \dfrac{(-1)^n}{\ln n}} = \dfrac{(-1)^n}{n}\big(1 - \dfrac{(-1)^n}{\ln n} + o\big(\dfrac{1}{\ln n}\big)\big) = \dfrac{(-1)^n}{n} - \dfrac{1}{n\ln n} + o\big(\dfrac{1}{n\ln n}\big)$

y la serie diverge pues la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln n}$ diverge. En efecto, por el criterio de la integral $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{n} \frac{dx}{x\ln x} =$ $\ln\ln n \longrightarrow \infty$.

l) $u_n = \ln\big(\dfrac{\sqrt{n} + (-1)^n}{\sqrt{n-4}}\big)$

La expresión $\dfrac{\sqrt{n} + (-1)^n}{\sqrt{n-4}} = \dfrac{\sqrt{n}\big(1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\big)}{\sqrt{n}\big(1 - \frac{4}{n}\big)^{1/2}} = \big(1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\big)\big(1 + \frac{2}{n} + o\big(\frac{1}{n}\big)\big) = 1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + o\big(\frac{1}{n}\big)$,

por lo que $u_n = \ln\big(1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + o\big(\frac{1}{n}\big)\big) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{2n} + o\big(\frac{1}{n}\big)$ y la serie diverge.

m) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln(n + (-1)^n)}$

El término general $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln n + \ln\big(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\big)} = \dfrac{(-1)^n}{\ln n + \dfrac{(-1)^n}{n} + o\big(\frac{1}{n}\big)} =$

$\dfrac{(-1)^n}{\ln n} \dfrac{1}{1 + \dfrac{(-1)^n}{n\ln n} + o\big(\dfrac{1}{n\ln n}\big)} = \dfrac{(-1)^n}{\ln n}\big(1 - \dfrac{(-1)^n}{n\ln n} + o\big(\dfrac{1}{n\ln n}\big)\big) = \dfrac{(-1)^n}{\ln n} - \dfrac{1}{n\ln^2 n} + o\big(\dfrac{1}{n\ln^2 n}\big)$

y la serie converge, pues es la suma de una serie alternada convergente y de la serie convergente $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln^2 n} + o\big(\dfrac{1}{n\ln^2 n}\big)$.

En efecto, $\dfrac{1}{n\ln^2 n} + o\big(\dfrac{1}{n\ln^2 n}\big) \sim \dfrac{1}{n\ln^2 n}$ y por el criterio de la integral $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x} = \frac{1}{\ln x}\Big|_2^{\infty} =$ $-\ln 2$.

n) $u_n = \ln n \cdot \ln\big(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\big)$

Desarrollando el término general $u_n = \ln n\big(\dfrac{(-1)^n}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + o\big(\dfrac{1}{n^2}\big)\big) = (-1)^n \dfrac{\ln n}{n} - \dfrac{\ln n}{2n^2} + o\big(\dfrac{\ln n}{n^2}\big)$

y la serie converge pues $(\dfrac{\ln n}{n})_n \downarrow 0$ y $\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}2n^{3/2}} \leq \dfrac{1}{2n^{3/2}}$ a partir de algún $n_0 \in \mathbb{N}$, ya que $\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0$.

ñ) $u_n = \ln\big(1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\big)$

Observemos que $\dfrac{(-1)^n}{n\big(1 + \frac{1}{n}\big)^{1/2}} = \dfrac{(-1)^n}{n}\big(1 - \dfrac{1}{2n} + o\big(\frac{1}{n}\big)\big) = \dfrac{(-1)^n}{n} - \dfrac{(-1)^n}{2n^2} + o\big(\dfrac{1}{n^2}\big)$, entonces $u_n = \ln\big(1 + \dfrac{(-1)^n}{n} - \dfrac{(-1)^n}{2n^2} + o\big(\dfrac{1}{n^2}\big)\big) = \dfrac{(-1)^n}{n} - \dfrac{(-1)^n}{2n^2} - \dfrac{1}{2n^2} + o\big(\dfrac{1}{n^2}\big)$ converge, pues es la suma de una serie alternada convergente y de dos series absolutamente convergentes.

o) $u_n = \operatorname{sen} \pi\sqrt{n^2 + 2n + 2}$

Es claro que $\pi n\sqrt{1 + \dfrac{2}{n} + \dfrac{2}{n^2}} = \pi n\big(1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{2n^2} - \dfrac{1}{2n^3} + o\big(\dfrac{1}{n^3}\big)\big) = \pi(n+1) + \dfrac{\pi}{n} - \dfrac{\pi}{2n^2} + o\big(\dfrac{1}{n^2}\big)$, por lo tanto $u_n = \operatorname{sen}\big(\pi(n+1) + \frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{2n^2} + o\big(\frac{1}{n^2}\big)\big) = \cos\big(\pi(n+1)\big)\operatorname{sen}\big(\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{2n^2} + o\big(\frac{1}{n^2}\big)\big) = (-1)^{n+1}\operatorname{sen}\big(\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{2n^2} + o\big(\frac{1}{n^2}\big)\big) = (-1)^{n+1}\big(\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{2n^2} + o\big(\frac{1}{n^2}\big)\big)$ y la serie converge, pues es la suma de una serie alternada y una serie convergente.

p) $u_n = \operatorname{sen}\dfrac{\pi n^2}{n+1}$

La expresión $\dfrac{\pi n}{1+\frac{1}{n}} = \pi n\big(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} + o\big(\frac{1}{n^3}\big)\big) = \pi(n-1) + \frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n^2} + o\big(\frac{1}{n^2}\big)$ y en consecuencia $u_n = \operatorname{sen}\dfrac{\pi n^2}{n+1} = \cos\pi(n-1)\operatorname{sen}\big(\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n^2} + o\big(\frac{1}{n^2}\big)\big) = (-1)^{n-1}\big(\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n^2} + o\big(\frac{1}{n^2}\big)\big)$.

La serie es convergente, pues es la suma de una serie alternada y una serie convergente.

q) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$

Observemos que $\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = e^{-\ln\sqrt[n]{n!}} = e^{-\frac{1}{n}\ln n!} = e^{-\frac{1}{n}(\sum_{k=1}^n \ln\frac{k}{n} + n\ln n)} = e^{-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \ln\frac{k}{n} - \ln n} = \dfrac{1}{n}e^{-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \ln\frac{k}{n}} \sim \dfrac{1}{n}e^{-\int_0^1 \ln x\,dx} \longrightarrow 0$. Verifiquemos que $\big(\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\big)_n \downarrow 0$.

En efecto, $\dfrac{1}{n+1}\log(n+1)! - \dfrac{1}{n}\ln n! = \dfrac{n\ln(n+1)! - (n+1)\ln n!}{n(n+1)} = \dfrac{n\ln(n+1) - \ln n - \ln(n-1) - \cdots - \ln 2}{n(n+1)} = \dfrac{\ln(n+1)^n - \ln n!}{n(n+1)} > 0$, lo que implica que tenemos $-\dfrac{1}{n+1}\log(n+1)! < -\dfrac{1}{n}\ln n! \Longrightarrow u_{n+1} < u_n$. Finalmente, la serie converge pues es una serie alternada cuyo término general tiende a 0.

r) $u_n = \cos\pi\sqrt{n^2+n+1}$

Si consideramos $\pi n\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = \pi n\big(1 + \frac{1}{2n} + \frac{3}{8n^2} - \frac{3}{16n^3} + o\big(\frac{1}{n^3}\big)\big) = \pi n + \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8n} - \frac{3\pi}{16n^2} + o\big(\frac{1}{n^2}\big)$ y $\cos\pi\sqrt{n^2+n+1} = -\operatorname{sen}\big(\pi n + \frac{3\pi}{8n} - \frac{3\pi}{16n^2} + o\big(\frac{1}{n^2}\big)\big) = (-1)^{n+1}\operatorname{sen}\big(\frac{3\pi}{8n} - \frac{3\pi}{16n^2} + o\big(\frac{1}{n^2}\big)\big) = (-1)^{n+1}\frac{3\pi}{8n} - \frac{3\pi(-1)^n}{16n^2} + o\big(\frac{1}{n^2}\big)$ y la serie converge al ser la suma de una serie alternada convergente y una serie convergente.

s) $u_n = e^{(-1)^n\frac{\ln n}{n}} - 1$

Se tiene que $u_n = e^{(-1)^n\frac{\ln n}{n}} - 1 = 1 + (-1)^n\frac{\ln n}{n} + \frac{\ln^2 n}{2n^2} + o\big(\frac{\ln^2 n}{2n^2}\big) - 1 = (-1)^n\frac{\ln n}{n} + \frac{\ln^2 n}{2n^2} + o\big(\frac{\ln^2 n}{2n^2}\big)$ converge pues en la serie alternada el término general $\big(\frac{\ln n}{n}\big)_n \downarrow 0$ y la serie de término general $\frac{\ln^2 n}{2n^2} + o\big(\frac{\ln^2 n}{2n^2}\big)$ converge.

t) $u_n = e^{(-1)^n/\sqrt{n}} - 1$

Desarrollando $u_n = e^{(-1)^n/\sqrt{n}} - 1 = 1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{2n} + \o\dfrac{1}{n} - 1$ y la serie diverge, pues $\sum_{n=1}^\infty \dfrac{1}{2n} + \o\dfrac{1}{n}$ diverge y la serie $\sum_{n=1}^\infty \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.

u) $u_n = (-1)^n n^{-\operatorname{tgh} n}$

El término $\operatorname{tgh} n = \dfrac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}} = \dfrac{1-e^{-2n}}{1+e^{-2n}} = (1-e^{-2n})(1-e^{-2n}+o(e^{-2n})) = 1-2e^{-2n}+o(e^{-2n})$, por lo que $u_n = (-1)^n n^{-\tanh n} = (-1)^n e^{-\ln n + 2\ln n e^{-2n} + o(\ln n e^{-2n})} =$ $(-1)^n \dfrac{1}{n} e^{2\ln n e^{-2n} + o(\ln n e^{-2n})} = \dfrac{(-1)^n}{n}\big(1 + \dfrac{2\ln n}{e^{2n}} + \o\dfrac{\ln n}{e^{2n}}\big) = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{(-1)^n 2\ln n}{ne^{2n}} + \o\dfrac{\ln n}{ne^{2n}}$. La serie es convergente.

v) $u_n = (-1)^n\big((1+\frac{1}{n})^{-n} - \frac{1}{e}\big)$

Observemos que $\big(1+\dfrac{1}{n}\big)^{-n} = e^{-n\ln(1+\frac{1}{n})} = e^{-n(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o(\frac{1}{n^3}))} = e^{-1} e^{\frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2} + o(\frac{1}{n^2})} =$ $e^{-1}\big(1 + \dfrac{1}{2n} - \dfrac{5}{24n^2} + \o\dfrac{1}{n^2}\big)$ y se tiene $u_n = (-1)^n \dfrac{1}{e}\big(\dfrac{1}{2n} - \dfrac{5}{24n^2} + \o\dfrac{1}{n^2}\big)$ y la serie converge pues es la suma de una serie alternada convergente y una serie absolutamente convergente.

w) $u_n = \dfrac{(-1)^n\sqrt{n}\operatorname{sen}\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n} + (-1)^n}$

Puesto que $u_n = \dfrac{(-1)^n \operatorname{sen}\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = (-1)^n\big(\dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{6\sqrt{n^3}} + \o\dfrac{1}{\sqrt{n^3}}\big)\big(1 - \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n} - (-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n^3}} +$ $\o\dfrac{1}{\sqrt{n^3}}\big) = (-1)^n\big(\dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{5}{6\sqrt{n^3}} + \o\dfrac{1}{\sqrt{n^3}}\big) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{n} + \o\dfrac{1}{n}$, la serie diverge pues es la suma de una serie alternada convergente y una serie divergente.

x) $u_n = n^{(-1)^n/\sqrt{n}} - 1$

Se verifica que $u_n = e^{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\ln n} - 1 = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\ln n + \dfrac{\ln^2 n}{2n} + \o\dfrac{\ln n}{n}$ y la serie diverge pues es la suma de una serie alternada convergente y una serie divergente. En efecto, $\dfrac{\ln^2 n}{2n} \geq \dfrac{1}{2n}$, para $n \geq 3$.

y) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n - \ln n}$

Tomando en cuenta que $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}\dfrac{1}{1 - \dfrac{\ln n}{n}} = \dfrac{(-1)^n}{n}\big(1 + \dfrac{\ln n}{n} + \o\dfrac{\ln n}{n}\big) = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{(-1)^n \ln n}{n^2} +$ $\o\dfrac{\ln n}{n^2}$ y la serie claramente converge.

z) $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-\sqrt{\ln x}} \operatorname{sen} x\, dx$

Sea $y = x - n\pi \Longrightarrow x = n\pi + y$, $\operatorname{sen}(n\pi + y) = (-1)^n \operatorname{sen} y$, entonces se tiene:
$u_n = \displaystyle\int_0^\pi e^{-\sqrt{\ln(n\pi+y)}} \operatorname{sen}(n\pi+y)\, dy = (-1)^n \int_0^\pi e^{-\sqrt{\ln(n\pi+y)}} \operatorname{sen}(y)\, dy = (-1)^n v_n$,
donde $v_n = \displaystyle\int_0^\pi e^{-\sqrt{\ln(n\pi+y)}} \operatorname{sen}(y)\, dy \leq \pi e^{-\sqrt{\ln n\pi}} \longrightarrow 0$, cuando $n \to \infty$.
Verifiquemos que $(v_n)_n \downarrow$. En efecto, $\sqrt{\ln((n+1)\pi + y)} \geq \sqrt{\ln(n\pi + y)} \Longleftrightarrow e^{-\sqrt{\ln((n+1)\pi+y)}}$ $\leq e^{-\sqrt{\ln(n\pi+y)}} \Longleftrightarrow e^{-\sqrt{\ln((n+1)\pi+y)}} \operatorname{sen} y \leq e^{-\sqrt{\ln(n\pi+y)}} \operatorname{sen} y$, si $0 \leq y \leq \pi$, lo que implica: $\displaystyle\int_0^\pi e^{-\sqrt{\ln((n+1)\pi+y)}} \operatorname{sen} y dy = v_{n+1} \leq \int_0^\pi e^{-\sqrt{\ln(n\pi+y)}} \operatorname{sen} y dy = v_n$. La serie converge pues es una serie alternada de término general decreciente, convergiendo a 0.

a′) $u_n = \cos\big(\pi n^2 \ln \dfrac{n}{n-1}\big)$

Notemos que $\pi n^2 \ln \dfrac{1}{1-\frac{1}{n}} = \pi n^2\big(\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+\frac{1}{4n^4}+o\big(\frac{1}{n^4}\big)\big) = \pi n+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3n}+\frac{\pi}{4n^2}+o\big(\frac{1}{n^2}\big)$.

Así, $u_n = -\operatorname{sen}\big(\pi n+\frac{\pi}{3n}+\frac{\pi}{4n^2}+o\big(\frac{1}{n^2}\big)\big) = (-1)^{n+1}\operatorname{sen}\big(\frac{\pi}{3n}+\frac{\pi}{4n^2}+o\big(\frac{1}{n^2}\big)\big) = (-1)^{n+1}\big(\frac{\pi}{3n}+\frac{\pi}{4n^2}+o\big(\frac{1}{n^2}\big)\big)$ y la serie converge: es la suma de una serie alternada convergente y una serie absolutamente convergente.

b′) $u_n = (-1)^n\sqrt{n}\tan\frac{1}{n}$

En este caso $u_n = (-1)^n\sqrt{n}\big(\frac{1}{n}+\frac{1}{3n^3}+o\big(\frac{1}{n^3}\big)\big) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\dfrac{(-1)^n}{3n^{5/2}}+o\big(\frac{1}{n^{5/2}}\big)$ y la serie converge.

c′) $u_n = \dfrac{1}{(n+1)!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^n k!$

Escribamos $u_n = (-1)^{n-1}\dfrac{n!}{(n+1)!}+(-1)^{n-2}\dfrac{(n-1)!}{(n+1)!}+v_n = (-1)^{n-1}\dfrac{1}{n+1}+(-1)^{n-2}\dfrac{1}{(n+1)n}$ $+v_n$ y observemos que $|v_n| \leq \dfrac{1}{(n+1)!}\sum_{k=1}^{n-2}|(-1)^{k-1}k!| \leq \dfrac{(n-2)(n-2)!}{(n+1)!} = \dfrac{n-2}{(n+1)n(n-1)} \sim \dfrac{1}{n^2}$. Finalmente la serie converge pues es la suma de tres series convergentes.

d′) $u_n = \displaystyle\int_0^1 \cos(nx^2)dx$

Sea $y = nx^2$, $dy = 2nxdx$, $dx = \dfrac{dy}{2nx} = \dfrac{dy}{2\sqrt{ny}}$ y $u_n = \displaystyle\int_0^n \frac{\cos y dy}{2\sqrt{n}\sqrt{y}} = \frac{1}{2\sqrt{n}}\int_0^n \frac{\cos y}{\sqrt{y}}dy \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}\int_0^\infty \frac{\cos y}{\sqrt{y}}dy = \frac{\alpha}{2\sqrt{n}}$ y la serie diverge.

e′) $u_n = \dfrac{(-1)^{[\![\sqrt{n}]\!]}}{n}$

Observemos que entre p^2 y $(p+1)^2-1$ están todos los términos que son del mismo signo en la serie. Así, para $p^2 \leq n \leq (p+1)^2-1 = p^2+2p$ se tiene $\dfrac{(-1)^p}{p^2}+\dfrac{(-1)^p}{p^2+1}+\cdots+\dfrac{(-1)^p}{p^2+p}$, por lo tanto si $v_p = \sum_{k=0}^{2p}\dfrac{1}{p^2+k}$ es tal que $\sum_{n=1}^\infty u_n$ y $\sum_{p=1}^\infty (-1)^p v_p$ son iguales y dado que $(v_p)_p \downarrow 0$ se tiene la convergencia de la serie.

En efecto, $v_{p+1}-v_p = \sum_{k=0}^{2(p+1)}\dfrac{1}{(p+1)^2+k}-\sum_{k=0}^{2p}\dfrac{1}{p^2+k} = \sum_{k=0}^{2p}\big(\dfrac{1}{(p+1)^2+k}-\dfrac{1}{p^2+k}\big)+\dfrac{1}{(p+1)^2+2p+1}+\dfrac{1}{(p+1)^2+2p+2} = -\sum_{k=0}^{2p}\dfrac{2p+1}{((p+1)^2+k)(p^2+k)}+\dfrac{1}{p^2+4p+2}+\dfrac{1}{p^2+4p+3}$ $\leq -\sum_{k=0}^{2p}\dfrac{2p+1}{(p^2+4p+1)(p^2+2p)}+\dfrac{2p^2+8p+5}{(p^2+4p+2)(p^2+4p+3)} = \dfrac{-(2p+1)^2}{(p^2+4p+1)(p^2+2p)}+\dfrac{2p^2+8p+5}{(p^2+4p+2)(p^2+4p+3)} \leq \dfrac{-4p^2-4p-1}{(p^2+4p+1)(p^2+2p)}+\dfrac{2p^2+8p+5}{(p^2+4p+1)(p^2+2p)} = \dfrac{-2p^2+4p+4}{(p^2+4p+1)(p^2+2p)} < 0 \iff p > 3$.

Falta probar que $v_p \longrightarrow 0$. Al considerar $v_p = \sum_{k=0}^{2p}\dfrac{1}{p^2+k} \leq \dfrac{2p+1}{p^2} \sim \dfrac{2}{p} \longrightarrow 0$, cuando $n \to \infty$.

f′) $u_n = (-1)^n\dfrac{P(n)}{Q(n)}$, $P, Q \neq 0$ polinomios

Si grad $P \geq$ grad Q, entonces $\dfrac{P(n)}{Q(n)} \sim \dfrac{a_p}{b_q} n^{p-q} \not\longrightarrow 0$ y diverge.

Si grad $P <$ grad Q, entonces $(-1)^n \dfrac{P(n)}{Q(n)} = (-1)^n \dfrac{a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \cdots + a_0}{b_q n^q + b_{q-1} n^{q-1} + \cdots + b_0} =$ $(-1)^n \dfrac{a_p}{b_q n^{q-p}} \big(1 + \dfrac{a_{p-1}}{a_p} \dfrac{1}{n} + \o \dfrac{1}{n}\big)\big(1 - \dfrac{b_{q-1}}{b_q} \dfrac{1}{n} + \o \dfrac{1}{n}\big) = (-1)^n \dfrac{a_p}{b_q n^{q-p}} \big(1 + \big(\dfrac{a_{p-1}}{a_p} - \dfrac{b_{q-1}}{b_q}\big) \dfrac{1}{n} + \o \dfrac{1}{n}\big) =$ $(-1)^n \dfrac{a_p}{b_q n^{q-p}} + (-1)^n \big(\dfrac{a_{p-1}}{b_q} - \dfrac{a_p b_{q-1}}{b_q^2}\big) \dfrac{1}{n^{q-p+1}} + \o \dfrac{1}{n^{q-p+1}}$.

La serie es convergente si grad $P <$ grad Q.

g′) $u_n = \dfrac{a + (-1)^n \sqrt{n}}{a + (-1)^{n-1} \sqrt{n} + n}$

Dado que $u_n = \dfrac{(-1)^n \sqrt{n} \big(1 + \dfrac{(-1)^n a}{\sqrt{n}}\big)}{n \big(1 + \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} - \dfrac{a}{n}\big)} = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \big(1 + \dfrac{(-1)^n a}{\sqrt{n}}\big)\big(1 - \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} - \dfrac{a}{n} + \dfrac{1}{n} + \o \dfrac{1}{n}\big) =$ $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + (a+1) \dfrac{1}{n} + \o \dfrac{1}{n}$ y la serie diverge.

h′) $u_n = (-1)^n \big(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2 + an - 1} + b\big)$, $a, b \in \mathbb{R}$

La expresión $n\big(1 + \dfrac{1}{n^2}\big)^{1/2} - n\big(1 + \dfrac{a}{n} - \dfrac{1}{n^2}\big)^{1/2} + b = n\big(1 + \dfrac{1}{2n^2} - \dfrac{1}{8n^4} + \o \dfrac{1}{n^4}\big) - n\big(1 + \dfrac{a}{2n} -$ $\big(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{8} a^2\big) \dfrac{1}{n^2} + \big(\dfrac{1}{4} a + \dfrac{1}{16} a^3\big) \dfrac{1}{n^3} + \o \dfrac{1}{n^3}\big) + b = \big(b - \dfrac{1}{2} a\big) + \big(1 + \dfrac{1}{8} a^2\big) \dfrac{1}{n} - \big(\dfrac{1}{4} a + \dfrac{1}{16} a^3\big) \dfrac{1}{n^2} + \o \dfrac{1}{n^2}$ y $u_n = (-1)^n \big(b - \dfrac{1}{2} a\big) + (-1)^n \big(1 + \dfrac{1}{8} a^2\big) \dfrac{1}{n} - (-1)^n \big(\dfrac{1}{4} a + \dfrac{1}{16} a^3\big) \dfrac{1}{n^2} + \o \dfrac{1}{n^2}$ y la serie converge si y sólo si $b = \dfrac{1}{2} a$.

i′) $u_n = \ln\big(1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{a}{n}\big)$, $a \in \mathbb{R}$

Desarrollando la expresión $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{a}{n} - \dfrac{1}{2}\big(\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{a}{n}\big)^2 + \o \dfrac{1}{n^{3/2}} = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{a}{n} - \dfrac{1}{2n} -$ $\dfrac{(-1)^n (1-3a)}{n^{3/2}} + \o \dfrac{1}{n^{3/2}} = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{2a-1}{2n} - \dfrac{(-1)^n (1-3a)}{n^{3/2}} + \o \dfrac{1}{n^{3/2}}$ y la serie converge si y sólo si $a = \dfrac{1}{2}$.

j′) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{(-1)^n + n^a}$, $a \in \mathbb{R}^*$

Si $a < 0$, $n^a \longrightarrow 0$ y $u_n \longrightarrow 1$ y la serie diverge.

Si $a = 0$, el término general se indefine si n es impar.

Si $a > 0$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^a} \dfrac{1}{1 + \dfrac{(-1)^n}{n^a}} = \dfrac{(-1)^n}{n^a}\big(1 - \dfrac{(-1)^n}{n^a} + \dfrac{1}{n^{2a}} + \o \dfrac{1}{n^{2a}}\big) = \dfrac{(-1)^n}{n^a} - \dfrac{1}{n^{2a}} + \dfrac{(-1)^n}{n^{3a}} +$ $\o \dfrac{1}{n^{3a}}$; la serie converge si y sólo si $2a > 1$, o sea $a > \dfrac{1}{2}$.

k′) $u_n = (\mathrm{sen}(\pi n! \mathrm{e}))^p$, $p \in \mathbb{N}$

Sabemos que e es el límite de dos sucesiones adyacentes: $a_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$, $b_n = a_n + \dfrac{1}{n n!}$, i.e. $a_n \leq$ $\mathrm{e} \leq b_n + \dfrac{1}{n n!}$, entonces $0 \leq \mathrm{e} - a_{n+1} \leq \dfrac{1}{(n+1)(n+1)!} \Longrightarrow 0 \leq \pi \mathrm{e} n! \leq \pi \sum_{k=0}^{n-2} \dfrac{n!}{k!} + n\pi + \pi +$

$\dfrac{\pi}{n+1}+\dfrac{\pi}{(n+1)^2}+o\big(\dfrac{1}{(n+1)^2}\big).$

Dado que $\sum_{k=0}^{n-2}\dfrac{n!}{k!}$ es un número par se tiene $\operatorname{sen}(\pi n!e)=(-1)^{n+1}\operatorname{sen}\big(\dfrac{\pi}{n+1}+\dfrac{\pi}{(n+1)^2}+o\big(\dfrac{1}{(n+1)^2}\big)\big)=$ $(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{n+1}+(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{(n+1)^2}+o\big(\dfrac{1}{(n+1)^2}\big)$ y la serie converge. Si $p\geq 2$, converge absolutamente y si $p=1$ converge condicionalmente.

l′) $u_n=\dfrac{(-1)^n\cos n}{\sqrt{n}}$

Se tiene que $u_n=\dfrac{(-1)^n\cos n}{\sqrt{n}}=\dfrac{\cos(n+1)\pi}{\sqrt{n}}$ y como $\sum_{k=1}^{m}\cos(n+1)\pi$ permanece acotada y $\big(\dfrac{1}{n}\big)_n\downarrow 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\cos n}{\sqrt{n}}$ es convergente, por el criterio de Dirichlet.

m′) $u_n=\dfrac{\cos na\cos nb\cos nc}{\sqrt{n}}$, $a,b,c\in\mathbb{R}$

Sabemos que $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$, entonces $\cos na\cos nb\cos nc=\frac{1}{2}(\cos n(a-b)\cos nc+\cos n(a+b)\cos nc)=\frac{1}{4}\,(\cos n(a-b-c)+\cos n(a-b+c)+\cos n(a+b-c)+\cos n(a+b+c))$ y $\dfrac{\cos na\cos nb\cos nc}{\sqrt{n}}=\frac{1}{4}\,\big(\dfrac{\cos n(a-b-c)}{\sqrt{n}}+\dfrac{\cos n(a-b+c)}{\sqrt{n}}+\dfrac{\cos n(a+b-c)}{\sqrt{n}}+\dfrac{\cos n(a+b+c)}{\sqrt{n}}\big)$. Pero la sucesión $\sum_{k=1}^{n}\cos k\alpha$ permanece acotada y $\big(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\big)_n\downarrow 0$, entonces por el criterio de Dirichlet la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos n\alpha}{\sqrt{n}}$ es convergente, si $\alpha\neq 0$. Finalmente, la serie converge si y sólo si $a+b+c\neq 0$, $a+b-c\neq 0$, $a-b+c\neq 0$ y $a-b-c\neq 0$.

Sumas de series

14. Demuestre la convergencia y calcule la suma de las siguientes series:

a)$\sum_{n=0}^{\infty}n\big(n\big(\frac{1}{3}\big)^n-(-1)^n\big(\frac{1}{3}\big)^n\big)$

Se sabe que $\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}=\dfrac{1}{(1-x)^2}$ $\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}n\big(\big(\frac{1}{3}\big)^{n-1}=\frac{1}{3}\,\frac{9}{4}=\frac{3}{4}$ y que $\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}n\big(n\big(-\frac{1}{3}\big)^n.$

Capítulo 7

Series de Potencias

7.1 Convergencia simple y uniforme

Hasta ahora hemos considerado series numéricas, es decir series en donde (u_n) son números reales. Vamos a estudiar el caso en que los u_n son funciones de variable real. En especial se considerarán funciones de la forma $u_n(x) = a_n x^n$. La suma de orden n de la series de funciones de término general u_n es la función S_n definida por la fórmula $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x) = u_0(x) + u_1(x) + \cdots + u_n(x)$. Así, la suma de orden n de una serie de potencias es una función polinomial de grado inferior o igual n: $S_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$. El primer problema que se presenta en el estudio de las series de potencias, es la convergencia de la serie de término general $u_n(x)$, para un valor dado de x. Este problema ya se ha tratado con el desarrollo de los criterios de convergencia. Para precisar, consideremos un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, tal que $\forall x \in I$, la serie de término general $u_n(x)$ es convergente. La suma en cada valor $x \in I$, define una función $S(x)$ dada por la fórmula $S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$.

Definición 7.1.1 *Se dice que la serie de funciones de término general u_n converge simplemente sobre $I \subset \mathbb{R}$ a una función $S(x)$, si $S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ y lo denotamos $S_n \xrightarrow{\text{c.s.}} S$.*

El objetivo de la exposición nos obliga de tratar series de funciones de término general $(u_n)_n$, sin embargo la definición se usa también para sucesiones de funciones $(f_n)_n$ definidas en $I \subset \mathbb{R}$ y se dirá que la sucesión $(f_n)_n$ converge a una función f definida sobre I si $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ y lo denotamos $f_n \xrightarrow{\text{c.s.}} f$. Un ejemplo de esta situación se tiene cuando definimos $f_n(x) = x^n$ en $[\,0, 1\,]$. Aquí $f(x) = 0$, si $0 \leq x < 1$ y $f(1) = 1$ pues $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$
La definición establece que dado $x \in I$ y $\epsilon > 0$, existe $N_{x,\epsilon}$ que depende de x y de ϵ de modo que si $n \geq N_{x,\epsilon}$ se cumple que $|S_n(x) - S(x)| < \epsilon$. Si x cambia el $N_{x,\epsilon}$ cambia. A veces se utiliza una terminología más sugestiva, y se dirá que S_n converge puntualmente a S en I. Cabe preguntarse,

¿si las funciones S_n son continuas, sucederá lo mismo para S, o bien si son integrables o derivables sucederá lo mismo con S? Un ejemplo ayuda en este problema. Consideremos la sucesión de funciones $u_n(x) = \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$ y sea $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$. Así, cuando $x = 0$, $u_n(0) = 0$ y $S(0) = 0$. Si $x \neq 0$, la serie es una serie geométrica de suma $1 + x^2$ y la función $S(x)$ es discontinua, a pesar de que las $u_n(x)$ son continuas. Para esclarecer esta interrogante necesitamos introducir una noción de convergencia más fuerte, la convergencia uniforme.

Definición 7.1.2 *Se dice que la serie de funciones de término general u_n converge uniformemente sobre $I \subset \mathbb{R}$ a una función $S(x)$, si $\forall \epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ se tiene $|S(x) - S_n(x)| < \epsilon$, $\forall x \in I$ y escribimos $S_n \xrightarrow{\text{c.u.}} S$.*

La definición también se aplica a sucesiones de funciones $(f_n)_n$ y se dirá que $(f_n)_n$ converge uniformemente sobre $I \subset \mathbb{R}$ a una función $f(x)$, si $\forall \epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ se tiene $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$, $\forall x \in I$ y escribimos $f_n \xrightarrow{\text{c.u.}} f$. Al contrario de la convergencia simple, donde N depende de x, el N vale para todo $x \in I$ y depende únicamente de ϵ. Esta es la diferencia entre el concepto de c.s. y c.u. Se observa que la convergencia uniforme implica la convergencia simple, pero el recíproco es falso. El criterio de Cauchy se hace presente en estos conceptos, de la siguiente manera.

Teorema 7.1.1 *La serie de funciones de término general u_n converge uniformemente sobre $I \subset \mathbb{R}$, si y sólo si $\forall \epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ y $m \geq N$ se tiene $|S_m(x) - S_n(x)| < \epsilon$, $\forall x \in I$.*

Demostración Sea S el límite de la serie de término general u_n, entonces dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ se tiene $|S(x) - S_n(x)| < \frac{1}{2}\epsilon$, $\forall x \in I$. Así, si $m \geq N$ tenemos $|S_m(x) - S_n(x)| \leq |S_m(x) - S(x)| + |S(x) - S_n(x)| \leq \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon$, $\forall x \in I$.
Inversamente, supongamos que la condición de Cauchy se satisface y probemos que existe una función $S(x)$ tal que $S_n \xrightarrow{\text{c.u.}} S$. Notemos que para cada x, la sucesión $(S_n(x))_n$ satisface la condición de Cauchy para sucesiones, por lo que existe un $S(x) \in \mathbb{R}$ único, que depende de x tal que $S_n(x) \longrightarrow S(x)$. Esto define la función S que necesitamos.
Sea $\epsilon > 0$ y sea $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N$ implica que $|S_n(x) - S_m(x)| < \epsilon$, $\forall x \in I$. Si $m \to \infty$ se tiene $S_m(x) \longrightarrow S(x)$ y $|S_n(x) - S(x)| < \epsilon$, $\forall x \in I$.

Definición 7.1.3 *Una serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ se dice mayorada en I, si existe una serie numérica convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de términos positivos de modo que:*
$|\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *y* $|u_n(x)| \leq a_n$, $\forall x \in I$.

Teorema 7.1.2 Condición de Weierstrass *Para que la serie de funciones de término general u_n con-*

verja uniformemente sobre I, es suficiente que exista una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente de términos positivos tal que $\forall x \in I$, $|u_n(x)| \leq a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Demostración Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N$ se tiene $|\sum_{k=n}^{m} u_k(x)| \leq \sum_{k=n}^{m} a_k < \epsilon$ y por le Teorema 7.1.1 se tiene la convergencia uniforme.

Teorema 7.1.3 *Si la serie de funciones de término general u_n converge uniformemente sobre I a una función $S(x)$ y si las sumas parciales $S_n(x)$ son continuas en I, entonces $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ es continua en I.*

Demostración Sea $x_0 \in I$ y sea $\epsilon > 0$, sabemos que $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ se cumple $|S_n(x) - S(x)| < \frac{1}{3}\epsilon$, $\forall x \in I$. Notemos que en particular $|S_n(x_0) - S(x_0)| < \frac{1}{3}\epsilon$. Como S_n es continua en x_0, existe $\eta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \eta$, $x \in I$ implica $|S_n(x) - S_n(x_0)| < \frac{1}{3}\epsilon$, por lo tanto $|S(x) - S(x_0)| < |S(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - S_n(x_0)| + |S_n(x_0) - S(x_0)| < \epsilon$.

Observación Este teorema es una condición suficiente para la continuidad del límite de una sucesión de funciones. Permite afirmar que si $S_n(x)$ es continua en I, $\forall n \in \mathbb{N}$ y la función límite $S(x)$ no es continua en I, $S_n(x)$ no converge uniformemente en I, tal como sucedió con el ejemplo introductorio con $u_n(x) = \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$, en donde la convergencia no es uniforme en ningún intervalo que contenga a 0.

Ejemplo Consideremos $u_n(x) = nx(1-x^2)^n$, para $x \in [\,0,1\,]$, $n \in \mathbb{N}$, entonces para $0 < x \leq 1$ se tiene $S(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$ y $S_n(0) \longrightarrow 0 \neq \lim_{x\to 0} S(x) = -\infty$. La convergencia no es uniforme en $[\,0,1\,]$.

Se observa que si hay convergencia uniforme y las funciones $S_n(x)$ son continuas:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x_0) = S(x_0) = \lim_{x\to x_0} S(x) = \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} S_n(x).}$$

Teorema 7.1.4 *Si la serie de funciones de término general u_n converge uniformemente sobre $I = [\,a,b\,]$, a una función $S(x)$ y si las sumas parciales $S_n(x)$ son continuas en I, entonces $S(x)$ es integrable en $[\,a,b\,]$ y $\lim_{n\to\infty} \displaystyle\int_a^b \sum_{k=1}^{n} u_k(x)dx = \int_a^b S(x)dx$.*

Demostración Por le Teorema 7.1.3, la función $S(x)$ es continua en $[\,a,b\,]$ y por tanto integrable en $[\,a,b\,]$. Además, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, se cumple $|S(x) - S_n(x)| < \epsilon/(b-a)$, $\forall x \in I$ y entonces

$$\left|\int_a^b \big[S(x) - S_n(x)\big]dx\right| = \left|\int_a^b S(x)dx - \int_a^b \sum_{k=1}^{n} u_k(x)dx\right| \leq \int_a^b \big|S(x) - S_n(x)\big|dx < \epsilon,$$

es decir $\int_a^b \sum_{k=1}^n u_k(x)dx \longrightarrow \int_a^b S(x)dx.$

Observación Otra manera de expresar este teorema es: Si la serie de funciones convergen uniformemente a $S(x)$ y las funciones $u_n(x)$ son continuas en $[\,a,b\,]$, entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \int_a^b u_k(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \sum_{k=1}^n u(x)dx =$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b S_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} S_n(x)dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx = \int_a^b S(x)dx,$$

o sea se puede intercambiar la sumatoria y la integral o bien se puede "meter" el límite de la sumatoria dentro de la integral.

Teorema 7.1.5 *Consideremos la serie de funciones de término general $u_n(x)$ sobre $I = [\,a,b\,]$, de modo que las sumas parciales $S_n(x)$ admiten derivadas $S_n'(x)$ continuas en I, donde $S_n'(x)$ converge uniformemente a una función $S_1(x)$ en $[\,a,b\,]$ y si existe un punto $x_0 \in [\,a,b\,]$ donde $S_n(x_0)$ sea convergente, entonces la sucesión $S_n(x)$ converge uniformemente hacia su límite $S(x)$ que es una función derivable en $[\,a,b\,]$ y la derivada $S'(x) = S_1(x)$ en $[\,a,b\,]$.*

Demostración Por el Teorema 7.1.4, la sucesión S_n' puede ser integrada en $[\,a,b\,]$. En particular, se tiene $\lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^x S_n'(t)dt = \lim_{n\to\infty} \big[S_n(x) - S_n(x_0)\big] = \int_{x_0}^x S_1(t)dt$ y como por hipótesis, $S_n(x_0)$ tiende a un límite cuando $n \to \infty$, se tiene $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x_0) + \int_{x_0}^x S_1(t)dt$ que siempre existe $\forall x \in [\,a,b\,]$. Este límite se denota $S(x)$ y se observa claramente que $S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x_0) + \int_{x_0}^x S_1(t)dt$ es derivable, de modo que $S'(x) = S_1(x)$ por el Teorema Fundamental del Cálculo.
Queda por probar que la sucesión $S_n(x)$ converge uniformemente a $S(x)$. En efecto, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ implica que $|S_n'(x) - S'(x)| < \frac{1}{2}\epsilon/(b-a)$, $\forall x \in [\,a,b\,]$ e implica también que $|S_n'(x_0) - S'(x_0)| < \frac{1}{2}\epsilon$. Así $|S_n(x) - S(x)| \leq |S_n(x) - S_n(x_0)| + |S_n(x_0) - S(x)| < \int_{x_0}^x |S_n'(t) - S'(t)|dt + \frac{1}{2}\epsilon < \epsilon$, $\forall x \in [\,a,b\,]$.

Corolario 7.1.1 *Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ de funciones u_n con derivadas continuas en I, converge a $S(x)$ sobre $I = [\,a,b\,]$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ está mayorada en $[\,a,b\,]$, entonces $S_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$.*

Ejemplo 1 La serie $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sen} n^4 x}{n^2}$ converge uniformemente en $[\,0,1\,]$, pues es mayorada por una serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$, pero $S'(x)$ no converge si $x \neq 0$.

Ejemplo 2 Estudiemos la serie $S(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n} + \cdots$. El valor absoluto $|u_n(x)| \leq \left|\dfrac{x^n}{n}\right| \leq |x^n|$ y la serie es absolutamente convergente si $|x| < 1$ y es uniformemente convergente si $|x| \leq a < 1$, pues $|x^n| \leq a^n$, es decir es mayorada por una serie absolutamente convergente

$\sum_{n=1}^{\infty} a^n$. Así, $S(x)$ es continua en cualquier punto de modo que $|x| < 1$.

¿Qué sucede cuando $x \to 1^-$? Lo primero que debemos observar es que los resultados obtenidos no son válidos para $x = 1$ pues la serie $1 - \dfrac{1}{2} + \cdots + (-1)^{n+1}\dfrac{1}{n} + \cdots$ es convergente, pero no absolutamente. Pero para $x \in [\,0, 1\,]$, la serie se puede ver como una serie alternada. En efecto, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ se tiene $0 \leq (-1)^n(S(x) - S_n(x)) < \dfrac{1}{n+1} < \epsilon$, el resultado vale para todo $x \in [\,0, 1\,]$, es decir hay convergencia uniforme. Así, la función $S(x)$ es continua en 1, y se puede escribir $S(1) = 1 - \dfrac{1}{2} + \cdots + (-1)^{n+1}\dfrac{1}{n} + \cdots$.

Por otro lado sabemos que $S(x) = \ln(1 + x)$, en $]\,0, 1\,[$ y que $S(x)$ es continua en $[\,0, 1\,]$ e igual a $\ln(1+x)$ en $]\,0, 1\,]$, pero como $\ln(1+x)$ también es continua en 1, $S(x) = \ln(1+x)$ en $[\,0, 1\,]$ y tenemos $\ln 2 = 1 - \dfrac{1}{2} + \cdots + (-1)^{n+1}\dfrac{1}{n} + \cdots$.

Un razonamiento análogo demuestra que $\dfrac{1}{4}\pi = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \cdots$ reemplazando la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$ por la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

Observación 1 La convergencia uniforme es de fundamental importancia para el estudio de la convergencia de series de funciones, pues si no se satisfacen las condiciones requeridas, pueden suceder fenómenos extraordinarios, tal es el caso del Fenómeno de Gibbs, estudiado en series como ejercicio. Es decir, la existencia de una función que es constante en $]\,0, \pi\,[$ y discontinua en 0, dada por por la fórmula $S(x) = \operatorname{sen} x + \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \cdots + \dfrac{\operatorname{sen}(2n-1)x}{2n-1} + \cdots = \dfrac{1}{4}\pi, \forall x \in]\,0, \pi\,[$.

Observación 2 Función continua no derivable en ningún punto

Otro ejemplo de gran importancia, es la existencia de una función continua en la recta real que no es derivable en ningún punto.

Definamos $\Phi(x) = x$ en $[\,0, 1\,]$ y $\Phi(x) = (2 - x)$ en $[\,1, 2\,]$ y la ampliamos a todo $\mathbb{R}$ definiendo que $\Phi(x + 2) = \Phi(x)$, lo que la hace periódica de período 2. Nos centraremos en el intervalo $[\,0, 2\,]$, afín de poder analizar la convergencia de la suma parcial $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^k \Phi(4^k x)$ a su límite $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k \Phi(4^k x)$. En efecto, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k \Phi(4^k x)$ está mayorada por una serie absolutamente convergente $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k$, lo que permite afirmar que la serie converge uniformemente a la función $S(x)$ y como las funciones $S_n(x)$ son continuas, el límite $S(x)$ también es continua.

La función $S_0(x) = \Phi(x)$, en $[\,0, 2\,]$. La función $S_1(x) = \Phi(x) + \frac{3}{4}\,\Phi(4x)$, merece un análisis más fino en $[\,0, 2\,]$.

Si $0 \leq x \leq \frac{1}{4}$, se tiene $0 \leq 4x \leq 1$ y $S_1(x) = \Phi(x) + \frac{3}{4}\,\Phi(4x) = x + \frac{3}{4}\,4x = 4x$.

Si $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}$, se tiene $1 \leq 4x \leq 2$ y $S_1(x) = x + \frac{3}{4}\,(2 - 4x) = \frac{3}{2} - 2x$.

Si $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4}$, se tiene $2 \leq 4x \leq 3$ y $S_1(x) = x + \frac{3}{4}\,(4x - 2) = 4x - \frac{3}{2}$. Observe que la función $\Phi(4x)$ en este intervalo no vale $4x$ como erróneamente se estaría tentado en pensar. El valor $4x$ se sale del intervalo $[0,2]$, es decir $2 \leq 4x \leq 3$ por lo que para normalizarlo y poder aplicar la fórmula que está definida en el intervalo $[0,2]$, debe restarse 2 y tenemos $0 \leq 4x-2 \leq 1$. Así, una vez normalizado nos queda $\Phi(4x) = \Phi(4x-2) = 4x-2$ ya que el argumento $4x-2$ está entre 0 y 1 y vale la fórmula, es decir $\Phi(\zeta) = \zeta$ siempre que $\zeta \in [0,1]$.

Si $\frac{3}{4} \leq x \leq 1$, se tiene $3 \leq 4x \leq 4$, o bien $1 \leq 4x-2 \leq 2$ y $\Phi(4x) = \Phi(4x-2) = 2-(4x-2) = 4-4x$ y $S_1(x) = 4-3x$.

Siguiendo con este argumento de análisis se llega a las formas que las funciones van tomando, en los distintos intervalos de longitud $\frac{1}{4}$.

La función $S_2(x) = \Phi(x) + \frac{3}{4}\,\Phi(4x) + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \Phi(16x)$, también debe descomponerese en intervalos de longitud $\frac{1}{16}$. Analizaremos solamente los dos primeros.

Si $0 \leq x \leq \frac{1}{16}$, se tiene $0 \leq 4x \leq \frac{1}{4}$ y $0 \leq 16x \leq 1$, con lo cual $S_2(x) = x + \frac{3}{4}\,\Phi(4x) + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \Phi(16x) = x + 3x + 9x = 13x$.

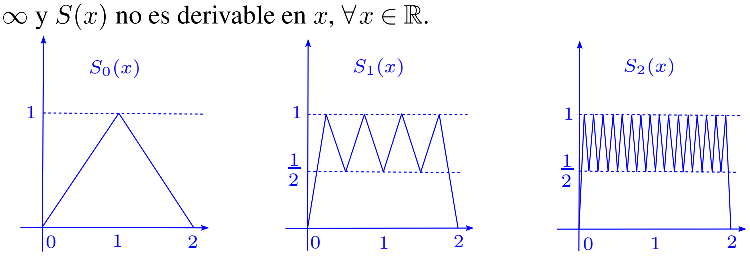
Si $\frac{1}{16} \leq x \leq \frac{1}{8}$, se tiene $\frac{1}{4} \leq 4x \leq \frac{1}{2}$ y $1 \leq 16x \leq 2$, con lo cual $S_2(x) = x + \frac{3}{4}\,x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 (2-16x) = -5x + \frac{9}{8}$.

$\vdots$

Fijemos un número real x y un entero m positivo, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \leq 4^m x \leq k+1$ y tomemos $a_m = 4^{-m}k$ y $b_m = 4^{-m}(k+1)$.

Si $n \leq m$, la diferencia $4^n b_m - 4^n a_m = 4^{n-m} \leq 1$ y se tiene $|\Phi(4^n b_m) - \Phi(4^n a_m)| = 4^n b_m - 4^n a_m = 4^{n-m}$.

Si $n > m$, tenemos $4^n b_m - 4^n a_m = 4^{n-m} = 2{\cdot}2{\cdot}4^{n-m-1}$, o sea la diferencia entre estos números es un múltiplo de 2 por lo que $|\Phi(4^n b_m) - \Phi(4^n a_m)| = 0$. Así, $S(b_m) - S(a_m) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \left[\Phi(4^n b_m) - \Phi(4^n a_m)\right] = \sum_{k=0}^{m} \left(\frac{3}{4}\right)^k \left[\Phi(4^k b_m) - \Phi(4^k a_m)\right]$, entonces $|S(b_m) - S(a_m)| \geq \left(\frac{3}{4}\right)^m - \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{3}{4}\right)^k \left[\Phi(4^k b_m) - \Phi(4^k a_m)\right] \geq \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^m$ y $\left|\dfrac{S(b_m) - S(a_m)}{b_m - a_m}\right| > \frac{1}{2}{\cdot}3^m$. Finalmente, cuando $m \to \infty$, $a_m \leq x \leq b_m$, $b_m - a_m \longrightarrow 0$ y $S'(x) \longrightarrow \infty$ y $S(x)$ no es derivable en x, $\forall x \in \mathbb{R}$.



7.2 Intervalo de convergencia

Es natural que en el estudio de la convergencia de series, nos preguntemos por la región en que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es convergente, o de manera más general donde la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ es convergente.

Teorema 7.2.1 Abel *Supongamos que la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *converge para un cierto valor* $x_0 \neq 0$ *y* *sea* $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$*, entonces la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *converge uniformemente para todo* x*, de modo que* $|x| < |x_0|$.

Si la serie diverge para un cierto valor x_0'*, entonces diverge para todo valor* x*, de modo que* $|x| > |x_0'|$.

Demostración Dado que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge para un cierto valor x_0, entonces existe $M > 0$, tal que $|a_n x_0^n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$.

La serie puede escribirse de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$, entonces cuando $|x| < |x_0|$ la última serie, es una serie geométrica de razón $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$ por lo que es convergente. Pero esto significa que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ es absolutamente convergente.

Para probar la otra propiedad, lo haremos por contradicción. Supongamos que $\exists x$ tal que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge de modo que $|x_0'| < |x|$, entonces se debe tener que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x_0')^n$ converge uniformemente, ya que converge en x, lo que contradice las hipótesis de teorema. Luego la suposición es falsa y para ningún x tal que $|x_0'| < |x|$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ puede ser converge. Así, la serie es divergente para todo x tal que $|x| > |x_0'|$.

Corolario 7.2.1 *Con las hipótesis anteriores, existe un* R *tal que para* $|x| < R$*, la serie converge absolutamente y para* $|x| > R$*, la serie diverge, es decir que el dominio de convergencia de la serie de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *es un intervalo con centro en el origen de las coordenadas. Este intervalo se llama intervalo de convergencia de la serie de potencias y* R *se llama radio de convergencia de la serie de potencias.*

Demostración Observemos que si existe $\lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = L|x|$ se tiene que la serie converge si $L|x| < 1$ (es decir si $|x| < 1/L$) y diverge si $|x| > 1/L$, por lo que el intervalo de convergencia es $]-1/L, 1/L[$. Se observa que para determinar el intervalo de convergencia, se puede aplicar el criterio de Cauchy: $R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. El problema que se presenta es que este límite no siempre existe. Sin embargo tenemos el siguiente corolario.

Corolario 7.2.2 *La serie de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *tiene radio de convergencia* R*, dado por* $\dfrac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sup |a_n|^{\frac{1}{n}}$.

Demostración Considerando $\lim_{n\to\infty} \sup |u_n|^{\frac{1}{n}} = |x| \lim_{n\to\infty} \sup |u_n|^{\frac{1}{n}} = |x|/R$, donde $\dfrac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sup |a_n|^{\frac{1}{n}}$ y este límite siempre existe.

Corolario 7.2.3 *Si la serie de potencias* $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *tiene un intervalo de convergencia* $]-R, R[$*, entonces la serie* $\Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n x^{n+1}}{n+1}$ *obtenida por la integrando término a término de la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *tiene el mismo intervalo de convergencia* $]-R, R[$*, y se tiene que* $\Phi(x) = \displaystyle\int_0^x S(t)dt$ *en* $]-R, R[$.

Demostración La prueba es inmediata por el Teorema 7.1.4. Queda por probar que el intervalo de convergencia es el mismo, pero es inmediato por el criterio de d'Alembert.

Corolario 7.2.4 *Si la serie de potencias $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ tiene un intervalo de convergencia $]-R, R[$, entonces la serie $\Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ obtenida por la derivación término a término de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ tiene el mismo intervalo de convergencia $]-R, R[$, y se tiene que $\Phi(x) = S'(x)$ en $]-R, R[$.*

Demostración La prueba es inmediata por el Teorema 7.1.5. Queda por probar que el intervalo de convergencia es el mismo, pero es inmediato por el criterio de d'Alembert.

Observación Es importante decir que en algunas series R se reduce a $R = 0$ y en otras $R = \infty$. En el primer caso, la serie diverge para $x \neq 0$ y en el segundo caso la serie converge en todo $\mathbb{R}$.

Corolario 7.2.5 *Supongamos que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ tiene un intervalo de convergencia $]-R, R[$, si $-R < a < R$, f puede ser desarrollada en series de potencias alrededor del punto a, la cual converge en $|x-a| < R - |a|$ y $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$. La función f tiene derivadas de todos los órdens en $]-R, R[$ y en particular $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.*

Corolario 7.2.6 *Supongamos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge y sea $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ con intervalo de convergencia $]-1, 1[$, entonces $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.*

Corolario 7.2.7 *Si las series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ convergen a los valores a y b, la serie producto $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ converge y su suma $c = a \cdot b$.*

Demostración Basta definir $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ y $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, en $[0, 1]$. Para $x < 1$ las series son absolutamente convergentes y se tiene que $\forall\, x \in [0, 1[$, $f(x) \cdot g(x) = h(x)$, entonces por el corolario anterior $\lim_{x\to 1^-} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to 1^-} f(x) \cdot \lim_{x\to 1^-} g(x) = a \cdot b = \lim_{x\to 1^-} h(x) = c$.

Ejemplo

1) Determinemos el intervalo de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2x)^n}{n}$.
Usando el criterio de d'Alembert se tiene $\lim_{n\to\infty} \left| \dfrac{(2x)^{n+1}}{(2x)^n} \dfrac{n}{n+1} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \dfrac{n}{n+1} \right| |2x| = |2x|$.
La serie converge si $|x| < \frac{1}{2}$ y diverge si $|x| > \frac{1}{2}$. Además, cuando $x = -\frac{1}{2}$ la serie converge y cuando $x = \frac{1}{2}$ la serie diverge.

2) Determinemos el intervalo de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$.
Aplicando el criterio de d'Alembert, tenemos $\lim_{n\to\infty} \left| \dfrac{x^{n+1} n!}{x^n (n+1)!} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \dfrac{x}{n+1} \right| = 0$, y como

el límite es menor que 1 y no depende de x, la serie converge para todo los valores de $x \in \mathbb{R}$.

3) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (nx)^n$ diverge para todo $x \neq 0$, puesto que $|nx|^n \longrightarrow \infty$, para todo $x \neq 0$.

4) Cuando se considera una serie de potencias de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, se procede como una serie de potencias en $y = x - x_0$, es decir una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ y por el criterio de d'Alembert el intervalo de convergencia tiene la forma $]\, x_0 - R, x_0 + R\, [$. Todas la propiedades enunciadas anteriormente valen para este tipo de serie de potencias. Por ejemplo la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (x-1)^n$ converge para $-1 < x - 1 < 1$, es decir converge para $0 < x < 2$.

7.3 Resolución de ecuaciones diferenciales por series de potencias

Definición 7.3.1 *Se dice que una función f es analítica en un intervalo $]\, a - R, a + R\, [$, si f tiene un desarrollo en series de potencias en ese intervalo, $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, convergente para $|x - a| < R$.*

Si las funciones coeficientes de una ecuación diferencial homogénea $y^{(n)} + g_1(x)y^{(n-1)}$
$+ g_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + g_n(x)y = 0$ son analíticas en el intervalo $]\, a - R, a + R\, [$, se puede demostrar que existen n soluciones linealmente independientes, cada una de las cuales es analítica en el intervalo $]\, a - R, a + R\, [$.

Teorema 7.3.1 *Si las funciones g_1, g_2 y h son analíticas en un intervalo $]\, a - R, a + R\, [$, entonces las soluciones de $y'' + g_1(x)y' + g_2(x)y = h(x)$ son analíticas en a, es decir se representan mediante series de potencias en $(x - a)$, con radio de convergencia $R > 0$.*

Ejemplo 1 Resolver $y' - y = 0$.

Solución Sea $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, $y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$, entonces $y' - y = (c_1 - c_0) + (2c_2 - c_1)x + (2c_3 - c_2)x^2 + \cdots = 0$, por lo tanto $c_1 = c_0$, $2c_2 = c_1$, $3c_3 = c_2, \ldots, nc_n = c_{n-1} \Longrightarrow c_1 = c_0$, $c_2 = \dfrac{c_1}{2} = \dfrac{c_0}{2!}$, $c_3 = \dfrac{c_2}{3} = \dfrac{c_0}{3!}, \ldots, c_n = \dfrac{c_0}{n!}$, o sea $y = c_0 + c_0 x + c_0 \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + c_0 \dfrac{x^n}{n!} + \cdots = c_0 \mathrm{e}^x$.

Ejemplo 2 Resolver $y' = 2xy$.

Solución Sea $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, $y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$, entonces $y' = 2xy = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \cdots = 2x(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots)$, es decir $c_1 = 0$, $c_0 = c_2$, $3c_3 = 2c_1 = 0$, $c_4 = \dfrac{c_2}{2} = \dfrac{c_0}{2}$ $c_5 = 0$ $c_6 = \dfrac{c_4}{3} = \dfrac{c_0}{3!}, \ldots$, y $y = c_0\big(1 + x^2 + \dfrac{x^4}{2!} + \dfrac{x^6}{3!} + \cdots\big) = c_0 \mathrm{e}^{x^2}$.

Ejemplo 3 Resolver $y'' + y = 0$.

Solución Sea $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, $y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$, entonces $y'' + y = (2c_2 + 2{\cdot}3c_3 x + 3{\cdot}4c_5 x^2 + \cdots) + (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots) = 0$, o sea $2c_2 + c_0 = 0$, $2{\cdot}3c_3 + c_1 = 0$, $3{\cdot}4c_4 + c_2 = 0, \ldots$, $c_2 = -\dfrac{c_0}{2!}$, $c_3 = -\dfrac{c_1}{3!}$, $c_4 = -\dfrac{c_2}{3{\cdot}4} = \dfrac{c_0}{4!}$, $c_5 = -\dfrac{c_3}{4{\cdot}5} = \dfrac{c_1}{5!}, \ldots$. Así, $y = c_0(1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots) +$

$c_1(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots) = c_0 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x.$

Un resultado importante de uso frecuente en la solución de problemas es:

$$\boxed{\boxed{\sum_{m=1}^{\infty} m c_m x^{m-1} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) c_{m+1} x^m}}$$

$$\boxed{\boxed{\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) c_m x^{m-2} = \sum_{m=1}^{\infty} (m+1) m c_{m+1} x^{m-1} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1) c_{m+2} x^m.}}$$

7.4 Ejercicios

1. Determine el radio y el dominio de convergencia de las series de potencias

a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{4^n}$ c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ e) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{3^n} x^n$ f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{k^n} x^{2n}$, $k > 0$

g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^n} (x-5)^n$ h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3} x^n$ i) $\sum_{n=0}^{\infty} n^{2n} x^n$

j) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} |x-1|^{2n}$ k) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n n^2} (x+1)^n$ l) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x-2)^{2n}$

Solución

a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$

Si tomamos $\sqrt[n]{|(-1)^n x^{2n}|} = |x|^2 < 1 \iff |x| < 1$. En $x = \pm 1$ la serie diverge pues el término general no tiende a 0. El radio de convergencia $R = 1$ y el intervalo de convergencia es $]-1, 1[$.

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{4^n}$

Considerando $\sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{4^n}\right|} < 1 \iff |x| < 4$. En $x = \pm 4$ la serie diverge pues el término general no tiende a 0. El radio de convergencia $R = 4$ y el intervalo de convergencia es $]-4, 4[$.

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

Puesto que $\sqrt[n]{\left|\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right|} \sim \frac{|x|^2}{\sqrt[n]{\sqrt{2\pi}(2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n}}} = \frac{|x|^2}{\frac{1}{2}\sqrt[n]{2\pi}(2n)^{2+\frac{1}{2n}} e^{-2}} \longrightarrow 0$, la serie de potencias converge en todo $\mathbb{R}$.

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Siendo $\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right|} \sim \sqrt[n]{\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)^{2n+\frac{3}{2}} e^{-2n-1}\sqrt{2\pi}}} = \frac{|x|^{2+\frac{1}{n}}}{(2n+1)^{2+\frac{3}{2n}} e^{-2-\frac{1}{n}} \sqrt[n]{2\pi}} \longrightarrow 0$, la serie de potencias converge en todo $\mathbb{R}$.

e) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{3^n} x^n$

Se sabe que $\sqrt[n]{\left|\dfrac{n(n-1)}{3^n}x^n\right|} \longrightarrow \left|\dfrac{x}{3}\right| < 1 \iff |x| < 3$. En $x = \pm 3$ la serie diverge pues el término general no tiende a 0. El radio de convergencia $R = 3$ y el intervalo de convergencia es $]-3, 3[$.

f) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{k^n}x^{2n}$, $k > 0$

Tomando $\sqrt[n]{\left|\dfrac{(-1)^n}{k^n}x^{2n}\right|} = \sqrt[n]{\dfrac{|x|^{2n}}{k^n}} = \dfrac{|x|^2}{k} < 1 \iff |x| < \sqrt{k}$. En $x = \pm\sqrt{k}$ la serie diverge pues el término general no tiende a 0. El radio de convergencia $R = \sqrt{k}$ y el intervalo de convergencia es $]-\sqrt{k}, \sqrt{k}\,[$.

g) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{5^n}(x-5)^n$

Observemos que $\sqrt[n]{\left|\dfrac{(-1)^n}{5^n}(x-5)^n\right|} = \sqrt[n]{\dfrac{|x-5|^n}{5^n}} = \dfrac{|x-5|}{5} < 1 \iff 0 < x < 10$. En $x = 0$ o en $x = 10$ la serie diverge pues el término general no tiende a 0. El radio de convergencia $R = 5$ y el intervalo de convergencia es $]\,0, 10\,[$.

h) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(3n)!}{(n!)^3}x^n$

Dado que $\sqrt[n]{\left|\dfrac{(3n)!}{(n!)^3}x^n\right|} \sim \sqrt[n]{\dfrac{(3n)^{3n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-3n}\sqrt{2\pi}|x|^n}{n^{3n+\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-3n}(2\pi)^{\frac{3}{2}}}} = \dfrac{3^{3+\frac{1}{2n}}|x|}{n^{\frac{1}{n}}\sqrt[n]{2\pi}} \longrightarrow |3^3 x| < 1 \iff |x| < \frac{1}{27}$.

En $x = \frac{1}{27}$ la serie diverge puesto que $\dfrac{(3n)!}{(n!)^3 3^{3n}} \sim \dfrac{\sqrt{3}}{2\pi\sqrt{n}}$, pero en $x = -\frac{1}{27}$ la serie converge pues $\dfrac{(3n)!}{(n!)^3(-3)^{3n}} = (-1)^n \dfrac{\sqrt{3}}{2\pi\sqrt{n}} \dfrac{\left(1 + \dfrac{1}{36n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\left(1 + \dfrac{1}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = (-1)^n \dfrac{\sqrt{3}}{2\pi\sqrt{n}}\left(1 + \dfrac{5}{18n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$, es decir es la suma de una serie alternada convergente y una serie absolutamente convergente. El radio de convergencia $R = \frac{1}{27}$ y el intervalo de convergencia es $[-\frac{1}{27}, \frac{1}{27}\,[$.

i) $\sum_{n=0}^{\infty} n^{2n}x^n$

Tomando $\sqrt[n]{|n^{2n}x^n|} = n^2|x| \longrightarrow +\infty$. El radio de convergencia $R = 0$ y la serie diverge si $x \neq 0$.

j) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}|x-1|^{2n}$

Se constata que $\sqrt[n]{\dfrac{|x-1|^{2n}}{2^n}} = \dfrac{|x-1|^2}{2} < 1 \iff 1-\sqrt{2} < x < 1+\sqrt{2}$. En $x = 1-\sqrt{2}$ o en $x = 1+\sqrt{2}$ la serie diverge pues el término general no tiende a 0. El radio de convergencia $R = \sqrt{2}$ y el intervalo de convergencia es $]\,1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\,[$.

k) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{3^n n^2}(x+1)^n$

Sabemos que $\sqrt[n]{\dfrac{|x+1|^n}{3^n n^2}} = \dfrac{|x+1|}{3n^{2/n}} \longrightarrow \dfrac{|x+1|}{3} < 1 \iff -4 < x < 2$. En $x = -4$ o en $x = 2$ la serie converge pues el término general es $\dfrac{(-3)^n}{3^n n^2} = (-1)^n\dfrac{1}{n^2}$ y $\dfrac{(3)^n}{3^n n^2} = \dfrac{1}{n^2}$ respectivamente. El radio de convergencia $R = 3$ y el intervalo de convergencia es $[\,-4, 2\,]$.

l) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!}(x-2)^{2n}$

Puesto que $\sqrt[n]{\dfrac{|x-2|^{2n}}{n!}} \sim \sqrt[n]{\dfrac{|x-2|^{2n}}{n^{n+\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi}}} = \dfrac{|x-2|^2}{n^{1+\frac{1}{2n}}\,\mathrm{e}^{-1}(2\pi)^{\frac{1}{2n}}} \longrightarrow 0$ y la serie converge en todo $\mathbb{R}$.

2. Determine el radio y el dominio de convergencia de las series de potencias. Aquí β es un parámetro real.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(n+1)!}x^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+1)^{\beta}}{n!}x^n$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\operatorname{sen}\frac{1}{n}\right)x^n$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \displaystyle\int_n^{n+\frac{1}{2}} \frac{dt}{1+t^9}x^n$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{t^8\,dt}{2+t^8}x^n$

g) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^n}{n+1}x^{2n+1}$ h) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{3n+2}}{8^{n+1}}$ i) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n}\left(\dfrac{1-x}{x+1}\right)^n$

j) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{1{\cdot}3{\cdot}5\cdots(2n+1)}{2{\cdot}4{\cdot}6\cdots(2n)}\right)^{\beta} x^n$

Solución

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$

Si tomamos $\sqrt[n]{\dfrac{1}{\sqrt{n}}} = \dfrac{1}{n^{1/(2n)}} \longrightarrow 1/R = 1$ y la serie converge si $-1 < x < 1$. Si $x = -1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge condicionalmente.

Si $x = 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

En resumen, la serie converge en $[\,-1, 1\,[$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(n+1)!}x^n$

Tomando la raíz $\sqrt[n]{\dfrac{1}{(n+1)!}} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{n}\ln(n+1)!} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{n}\,[(n+\frac{1}{2})\ln n - n + \ln\sqrt{2\pi}\,]} =$
$\mathrm{e}^{-\ln n - \frac{1}{2n}\ln n + 1 - \frac{1}{n}\ln\sqrt{2\pi}} \longrightarrow 0$, por lo tanto $R = \infty$ y la serie converge $\forall x \in \mathbb{R}$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+1)^{\beta}}{n!}x^n$

Calculando $\sqrt[n]{\dfrac{(n+1)^{\beta}}{n!}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\left[\ln(n+1)^{\beta} - \ln n^{n+\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi}\right]} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln(n+1)^{\beta} - \frac{1}{n}(n+\frac{1}{2})\ln n + 1 + \frac{1}{n}\ln\sqrt{2\pi}} =$
$\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln(n+1)^{\beta} - \ln n - \frac{1}{2n}\ln n + 1 + \frac{1}{n}\ln\sqrt{2\pi}} \longrightarrow 0$ y $R = \infty$ y la serie converge $\forall x \in \mathbb{R}$.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\operatorname{sen}\frac{1}{n}\right)x^n$

Usando $\sqrt[n]{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{6n^3}+o(\dfrac{1}{n^3})\right)} = \sqrt[n]{\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{2n^2}-\dfrac{1}{6n^3}+o(\dfrac{1}{n^3})} =$
$\sqrt[n]{\dfrac{1}{n}}\sqrt[n]{1-\dfrac{1}{2n}-\dfrac{1}{6n^2}+o(\dfrac{1}{n^2})} = \sqrt[n]{\dfrac{1}{n}}\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln\left(1-\frac{1}{2n}-\frac{1}{6n^2}+o(\frac{1}{n^2})\right)} =$
$\sqrt[n]{\dfrac{1}{n}}\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\left(-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})\right)} \sim \mathrm{e}^{-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})} \longrightarrow 1$, $R = 1$ y la serie converge si $|x| < 1$.

Si $x=1$, $\ln(1+\operatorname{sen}\frac{1}{n}) \sim \dfrac{1}{n}$ y diverge.

Si $x=-1$, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln\left(1+\operatorname{sen}\frac{1}{n}\right)$ converge pues la serie es alternada y $\left(\ln\left(1+\operatorname{sen}\frac{1}{n}\right)\right)\downarrow 0$. El intervalo de convergencia es $[-1,1[$.

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \displaystyle\int_n^{n+\frac{1}{2}} \frac{dt}{1+t^9} x^n$

Dado que $\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+(n+\frac{1}{2})^9} \leq \displaystyle\int_n^{n+\frac{1}{2}} \frac{dt}{1+t^9} \leq \frac{1}{2(1+n^9)}$, tenemos $\sqrt[n]{\dfrac{1}{2(1+n^9)}} \sim \sqrt[n]{\dfrac{1}{n^9}} = \mathrm{e}^{-\frac{9}{n}\ln n} \longrightarrow$ $\mathrm{e}^0 = 1$, por lo que converge si $-1<x<1$. Además, $\displaystyle\int_n^{n+\frac{1}{2}} \frac{dt}{1+t^9} = a_n \downarrow 0$ y converge si $x=-1$ pues es alternada con término decreciente.

En $x=1$, $a_n \sim \dfrac{1}{n^9}$ y converge. En resumen, converge si $|x| \leq 1$.

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{t^8\,dt}{2+t^8} x^n$

La función $f(t) = \dfrac{t^8}{2+t^8}$ es creciente y $\dfrac{n^8}{2+n^8} \leq \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{t^8\,dt}{2+t^8} \leq \frac{(n+1)^8}{2+(n+1)^8}$, por lo tanto $\sqrt[n]{a_n} \sim \sqrt[n]{\dfrac{n^8}{2+n^8}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln\frac{n^8}{2+n^8}} \longrightarrow 1$ y la serie converge para $-1<x<1$.

Si $x=\pm 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(\pm 1)^n a_n$ diverge pues $a_n \longrightarrow 1$. El intervalo de convergencia es $]-1,1[$.

g) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^n}{n+1} x^{2n+1}$

Usando $\sqrt[n]{\dfrac{2^n}{n+1}x^{2n+1}} \longrightarrow 2x^2$ y la serie converge si $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$. En $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ la serie diverge y en $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ converge por ser alternada, de término general decreciendo a 0. El intervalo de convergencia es $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}[$.

h) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{3n+2}}{8^{n+1}}$

Puesto que $\sqrt[n]{\dfrac{|x|^{3n+2}}{8^{n+1}}} = \dfrac{|x|^{1+2/n}}{8^{1+1/n}} \longrightarrow \left|\dfrac{x}{2}\right|^3 < 1 \Longleftrightarrow -2<x<2$.

En $x=2$, $\dfrac{8^{n+\frac{2}{3}}}{8^{n+1}} \longrightarrow 1$ y en $x=-2$, $a_n \longrightarrow \pm\frac{1}{2}$ y no converge. El intervalo de convergencia es $]-2,2[$.

i) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n}\left(\dfrac{1-x}{x+1}\right)^n$

Notemos que $\sqrt[n]{\dfrac{n!}{n^n}\left(\dfrac{1-x}{x+1}\right)^n} \longrightarrow \dfrac{1}{\mathrm{e}}\left|\dfrac{1-x}{x+1}\right| < 1 \Longleftrightarrow |1-x| < \mathrm{e}|1+x|$. Analicemos lo tres casos.

α) Si $-1<x<1$, $-1<x<\dfrac{1-\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}}$.

β) Si $x \geq 1$, $x > -\dfrac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}-1}$, o sea $x \geq 1$.

γ) Si $x<-1$, $x < -\dfrac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}-1}$.

En $x = \dfrac{1-\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}}$, $\dfrac{1-x}{1+x} = \mathrm{e}$ y $\dfrac{n!\mathrm{e}^n}{n^n} \sim \sqrt{2\pi n} \longrightarrow \infty$.

En $x=-\dfrac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}-1}$, $\dfrac{1-x}{1+x}=-\mathrm{e}$ y $\dfrac{n!\mathrm{e}^n(-1)^n}{n^n}\sim(-1)^n\sqrt{2\pi n}\longrightarrow\pm\infty$ y diverge.

La región de convergencia es $\left]-\infty,-\dfrac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}-1}\right[\cup\left]-1,\dfrac{1-\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}}\right[\cup\left[1,\infty\right[$.

j) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1{\cdot}3{\cdot}5\cdots(2n+1)}{2{\cdot}4{\cdot}6\cdots(2n)}\right)^{\beta}x^n$

Si se considera $\sqrt[n]{\left(\dfrac{(2n+1)!}{(2^n n!)^2}\right)^{\beta}}=\sqrt[n]{\left(\dfrac{(2n+1)^{2n+\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-2n-1}\sqrt{2\pi}}{2^{2n}n^{2n+1}\mathrm{e}^{-2n}2\pi}\right)^{\beta}}=$ $\sqrt[n]{\left(2^{\frac{3}{2}}\dfrac{(n+\frac{1}{2})^{2n+1}}{n^{2n+1}}\dfrac{(n+\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{e}\sqrt{2\pi}}\right)^{\beta}}=\left(\sqrt[n]{\dfrac{2}{\mathrm{e}\sqrt{\pi}}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{2n+1}(n+\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}}\right)^{\beta}\longrightarrow 1$ y la serie converge para $|x|<1$. Si $x=\pm1$ diverge, pues $a_n\not\longrightarrow 0$, cuando n$\to\infty$.

3. Determine el radio y el dominio de convergencia de las series de potencias. Calcule además la suma de la serie.

a) $\sum_{n=0}^{\infty}n^{(-1)^n}x^n$

b) $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{n}{n+1}x^n$

c) $\sum_{n=0}^{\infty}n^2x^n$

d) $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!\,(n+2)}$

e) $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,x^n$, donde $a_n=\dfrac{7n-26}{2n-7}$, si $n\leq3$, $a_n=n$, si $n\geq4$.

Solución

a) $\sum_{n=0}^{\infty}n^{(-1)^n}x^n$

Puesto que $\sqrt[n]{|n^{(-1)^n}|}=\mathrm{e}^{(-1)^n\frac{1}{n}\ln n}\longrightarrow\mathrm{e}^0=1$, la serie converge para $|x|<1$ y diverge para $|x|\geq1$, pues $a_n\not\longrightarrow 0$, cuando $n\to\infty$.

La serie $\sum_{n=0}^{\infty}n^{(-1)^n}x^n=0+2x^2+\frac{1}{3}\,x^3+4x^4+\frac{1}{5}\,x^5+\cdots=(2x^2+4x^4+6x^6+\cdots)+(\frac{1}{3}\,x^3+\frac{1}{5}\,x^5+\frac{1}{7}\,x^7+\cdots)$. Sea $A(x)=\frac{1}{3}\,x^3+\frac{1}{5}\,x^5+\frac{1}{7}\,x^7+\cdots$, derivando tenemos $A'(x)=x^2+x^4+x^6+\cdots=x^2(1+x^2+x^4+\cdots)=\dfrac{x^2}{1-x^2}$ y $A(x)=\displaystyle\int_0^x\dfrac{t^2dt}{1-t^2}=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|-x$.

Sea $B(x)=x(2x+4x^3+6x^5+\cdots)=xC(x)$, entonces $\displaystyle\int_0^x C(t)dt=x^2+x^4+x^6+\cdots=\dfrac{x^2}{1-x^2}$ y derivando la integral nos queda $C(x)=\dfrac{2x(1-x^2)+2x^3}{(1-x^2)^2}=\dfrac{2x}{(1-x^2)^2}$; así, $B(x)=\dfrac{2x^2}{(1-x^2)^2}$. En conclusión, $\sum_{n=0}^{\infty}n^{(-1)^n}x^n=\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|-x+\dfrac{2x^2}{(1-x^2)^2}$.

b) $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{n}{n+1}x^n$

Dado que $\sqrt[n]{\dfrac{n}{n+1}}\longrightarrow1$, la serie converge si $|x|<1$, y diverge para $|x|\geq1$, pues $a_nx^n\not\longrightarrow0$, cuando $n\to\infty$.

La serie $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{n}{n+1}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}x^n=\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}=\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{x}\ln(1-x)$.

c) $\sum_{n=0}^{\infty}n^2x^n$

Tomando $\sqrt[n]{n^2} = \mathrm{e}^{\frac{2}{n}\ln n} \longrightarrow 1$, por lo tanto la serie converge para $|x| < 1$ y diverge para $x = \pm 1$, así como para $|x| > 1$, pues $n^2 x^n \not\longrightarrow 0$ cuando $n \to \infty$.

Sabemos que $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$; si derivamos $\dfrac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1}$ y si volvemos a derivar $\dfrac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}$. Es importante destacar que los índices se dejan desde 0 pues necesitamos la notación, pero esto acarrea problemas de indefinición de la serie para $x = 0$. Bien entendido que si se tiene presente este hecho, sabemos en todo momento dónde estamos parados y la notación no se presta a confusión.

Reescribiendo la serie $\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-2} = \dfrac{1}{x^2}\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n - \dfrac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1}$, lo que implica $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = \dfrac{x}{(1-x)^2} + \dfrac{2x^2}{(1-x)^3} = \dfrac{x(1+x)}{(1-x)^3}$.

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!\,(n+2)}$

Es claro que $\sqrt[n]{\dfrac{1}{(n+2)n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi}}} = \sqrt[n]{\dfrac{1}{(n+2)\sqrt{2\pi}}}\,\dfrac{\mathrm{e}}{n} \longrightarrow 0$ y la serie converge para todo $x \in \mathbb{R}$.

Observemos que $x\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{n+1}}{n!}$ con lo cual se tiene $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!\,(n+2)} = \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x t\mathrm{e}^t\,dt = \dfrac{1}{x^2}(x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + 1)$.

e) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, donde $a_n = \dfrac{7n-26}{2n-7}$, si $n \leq 3$, $a_n = n$, si $n \geq 4$.

Notemos que $\sqrt[n]{n} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln n} \longrightarrow 1$ y la serie converge si $|x| < 1$, y diverge si $|x| > 1$. Si $x = \pm 1$, $n(-1)^n \not\longrightarrow 0$ y diverge.

Por otro lado, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n - 1 - x - 2x^2 - 3x^3 + a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$, pero como $x\sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = \dfrac{x}{(1-x)^2}$, se tiene $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \dfrac{x}{(1-x)^2} + 2x^3 + 2x^2 + \frac{14}{5}x + \frac{19}{7}$.

4. Determine el desarrollo en series de potencias de las funciones siguientes. Indique en cada caso el dominio donde es válido el desarrollo. Aquí $a > 0$.

a) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1-x}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{1+2x}$

c) $f(x) = (4+x^2)^{-3/2}$

d) $f(x) = \ln\sqrt{1 - 2x\cosh a + x^2}$

e) $f(x) = \dfrac{5}{x^4 - 13x^2 + 36}$

f) $f(x) = \dfrac{1-x}{(1+x)^3}$

En d) use que $1 - 2x\cosh a + x^2 = (x - \mathrm{e}^a)(x - \mathrm{e}^{-a})$.

Solución

a) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1-x}$

Utilizando los desarrollos de las funciones e^x y $\dfrac{1}{1-x}$ se tiene: $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ $= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, donde $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{n=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$. Así, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}\Big)x^n$, si $|x| < 1$, pues $\sqrt[n]{\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}} = e^{\frac{1}{n}\ln\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)} \longrightarrow e^{0\cdot \ln e} = 1.$

b) $f(x) = \dfrac{1}{1+2x}$

Sabemos que $f(x) = \dfrac{1}{1+2x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^n$, si $|x| < \frac{1}{2}$. En general, $f^{(n)}(a) = (-2)^n n!(1+2a)^{-n-1}$, por lo que $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{(2)^n(1+2a)^{-n-1}} \longrightarrow \dfrac{2}{|1+2a|}$, es decir $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-2)^n}{(1+2a)^{n+1}}(x-a)^n$, si $|x-a| < \frac{1}{2}|1+2a|$, o sea $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}+2a$ si $a > -\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{2}+2a < x < -\frac{1}{2}$ si $a < -\frac{1}{2}$.

c) $f(x) = (4+x^2)^{-\frac{3}{2}}$

Desarrollando $f(x) = (4+x^2)^{-\frac{3}{2}} = 4^{-\frac{3}{2}}(1+(\frac{1}{2}x)^2)^{-\frac{3}{2}} = 4^{-\frac{3}{2}}\,[\,1+(-\frac{3}{2})(\frac{1}{2}x)^2+\frac{1}{2}\,(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})(\frac{1}{2}x)^4$ $+\frac{1}{3!}\,(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})(-\frac{7}{2})(\frac{1}{2}x)^6+\frac{1}{4!}\,(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})(-\frac{7}{2})(-\frac{9}{2})(\frac{1}{2}x)^8+\cdots+\frac{1}{n!}\,(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})(-\frac{7}{2})\cdots(-\frac{2n+1}{2})(\frac{1}{2}x)^{2n}$ $+\cdots\,]$.

Así $8f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n!}\dfrac{3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2^{3n}}x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(2n+1)!}{2^{4n}(n!)^2}x^{2n}$, i.e.

$\sqrt[n]{\dfrac{(2n+1)!}{2^{4n}(n!)^2}|x|^{2n}} \sim \sqrt[n]{\dfrac{(2n+1)^{2n+1}e^{-2n-1}\sqrt{2\pi}|x|^{2n}}{2^{4n}n^{2n}e^{-2n}2\pi}} = \sqrt[n]{\dfrac{2n(1+\dfrac{1}{2n})^{2n+1}|x|^{2n}}{2^{2n}e\sqrt{2\pi}}} \longrightarrow \frac{1}{2^2}\,|x|^2 < 1 \Longleftrightarrow |x| < 2.$

En $|x| = 2$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2}$ diverge pues al desarrollar el término general $\dfrac{(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2} \sim \dfrac{2n(1+\dfrac{1}{2n})^{2n+1}}{e\sqrt{2\pi}} \longrightarrow \infty.$

d) $f(x) = \ln\sqrt{1-2x\cosh a+x^2}$

Se sabe que $f(x) = \ln\sqrt{1-2x\cosh a+x^2} = \frac{1}{2}\ln(x-e^a)(x-e^{-a})$, si $x > e^a$ o $x < e^{-a}$, entonces $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{1}{2}n!\big[(x-e^a)^{-n}+(x-e^{-a})^{-n}\big]$, por lo que $c_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = (-1)^{n-1}\frac{1}{2}\big[(x-e^a)^{-n}+(x-e^{-a})^{-n}\big]_{x=0} = (-1)^{n-1}\frac{1}{2}\big[(-1)^n e^{an}+(-1)^n e^{-an}\big] = -\cosh an$ y $\sqrt[n]{|c_n|} = 2^{-\frac{1}{n}}e^a\big[1+\big(\dfrac{1}{e^{2a}}\big)^n\big]^{\frac{1}{n}} \longrightarrow e^{-a}$, por lo que $f(x) = -\sum_{n=0}^{\infty}\cosh na\,x^n$, si $|x| < e^{-a}$.

e) $f(x) = \dfrac{5}{x^4-13x^2+36}$

Factorizando el denominador de la función $f(x) = \dfrac{5}{(x-3)(x+3)(x-2)(x+2)} = \dfrac{1}{6}\dfrac{1}{(x-3)}-\dfrac{1}{6}\dfrac{1}{(x+3)}-\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{(x-2)}+\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{(x+2)}$, entonces $\dfrac{f^{(n)}(x)}{n!} = (-1)^n\big[\,\frac{1}{6}\,(x-3)^{-n-1}-\frac{1}{6}\,(x+3)^{-n-1}-\frac{1}{4}\,(x-2)^{-n-1}+\frac{1}{4}\,(x+2)^{-n-1}\big]$. Así $c_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = 0$ si n es impar y $c_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = -\dfrac{1}{3^{n+2}}+\dfrac{1}{2^{n+2}}$ si n es par.

Además, $\sqrt[n]{\left(\dfrac{1}{2^{n+2}}-\dfrac{1}{3^{n+2}}\right)|x|^n} = |x|\dfrac{1}{2^{1+\frac{2}{n}}}\sqrt[n]{1-(\frac{2}{3})^{n+2}} \longrightarrow \dfrac{|x|}{2} < 1$, por lo tanto $f(x) = c_0+c_2x^2+c_4x^4+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}c_{2n}x^{2n}$, si $|x| < 2$. En $|x| = 2$ la serie diverge pues $c_n \not\longrightarrow 0$.

f) $f(x) = \dfrac{1-x}{(1+x)^3}$

Para descomponer la función en suma de fracciones parciales consideramos, $\dfrac{1-x}{(1+x)^3} = \dfrac{A}{1+x} + \dfrac{B}{(1+x)^2} + \dfrac{C}{(1+x)^3}$ por lo que conduce a $1-x = A(1+x)^2 + B(1+x) + C$, es decir $A=0$, $B=-1$, $C=2$. Así $f(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3} - \dfrac{1}{(1+x)^2}$, pero $\dfrac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$, $-\dfrac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n x^{n-1}$, $\dfrac{2}{(1+x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n (n-1) n x^{n-2}$ y en consecuencia:

$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n (n-1) n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+1) n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n((n+1)(-1)+1)x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} n^2 x^{n-1}$.

Además, $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n^2} \longrightarrow 1$, lo que permite escribir $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} n^2 x^{n-1}$, si $|x|<1$, o bien $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (n+1)^2 x^n$, si $|x|<1$.

5. Deduzca los siguientes valores de convergencia de series numéricas.

a) $\ln 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+1}$

b) $\frac{1}{4}\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$

Solución

a) $\ln 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+1}$

Sabemos que $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n} + \cdots$, si $|x|<1$, pero como $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ es convergente $\lim_{x\to 1^-} \ln(1+x) = \ln 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

b) $\frac{1}{4}\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$

Recordemos que $\arctan x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} \cdots$, si $|x|<1$ y como $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ converge por ser una serie alternada con término general decreciendo a 0, $\lim_{x\to 1^-} \arctan x = \arctan 1 = \dfrac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.

6. Calcule los valores de convergencia de las siguientes series numéricas.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(n+1)\,(n+2)}{2^{n+1}}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2\, 2^n}{(n+1)\, 3^{n+1}}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)\, 2^{2n+1}}$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{3n+1}$

Solución

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(n+1)\,(n+2)}{2^{n+1}}$

Se sabe que $\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{2^n} x^n$; derivando la expresión se tiene $\dfrac{1}{2}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{n}{2^n} x^{n-1}$ y derivando de nuevo,

$\dfrac{1}{2}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-3} = \sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{n(n-1)}{2^n} x^{n-2} = \dfrac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{n(n-1)}{2^{n-1}} x^{n-2} = \dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(n+2)(n+1)}{2^{n+1}} x^n$.

Así tenemos que $\dfrac{1}{\left(1-\frac{x}{2}\right)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(n+2)(n+1)}{2^{n+1}} x^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(n+2)(n+1)}{2^{n+1}} = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = 8$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2\, 2^n}{(n+1)\, 3^{n+1}}$

Por el ejercicio 3b) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{n}{n+1} x^n = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x}\ln(1-x)$, entonces derivando $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{n+1} x^{n-1} = \dfrac{1}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{x^2}\ln(1-x) - \dfrac{1}{x(1-x)}$ y multiplicando por x^2 esta expresión $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{n+1} x^{n+1} = \dfrac{x^2}{(x-1)^2} - \ln(1-x) - \dfrac{x}{1-x}$ y $\dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{n+1} (\frac{2}{3})^{n+1} = 3 - \frac{1}{2}\ln 3$.

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)\, 2^{2n+1}}$

Usando la identidad $\dfrac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} + \cdots$ e integrando, $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ y $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{2n+1}(\frac{1}{2})^{2n+1} = \frac{1}{2}\ln 3$.

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{3n+1}$

Tenemos que $\dfrac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$, por lo que $\dfrac{1}{1+x^3} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n}$. Integrando se tiene $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^3} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{3n+1}}{3n+1}$, por lo que $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^3} = \int_0^x \Big(\frac{1}{3}\frac{1}{1+t} + \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}}{t^2-t+1}\Big)dt = \frac{1}{6}\ln\frac{(1+x)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}(2x-1)) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}$ y nos queda $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{3n+1} = \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{1}{3\sqrt{3}}\pi$, ya que $\tan\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

7. Estudie el dominio y el valor de convergencia de las siguientes series. ¿Es la función en estudio continua a la izquierda de $x = 1$?

a) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\dfrac{x^n}{2n} - \dfrac{x^{2n+2}}{2n+2}\Big)$ b) $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\dfrac{x^{2n+1}}{2n} - \dfrac{x^{2n}}{2n+1}\Big)$.

Solución

a) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\dfrac{x^n}{2n} - \dfrac{x^{2n+2}}{2n+2}\Big)$

Dado que $\sqrt[n]{\dfrac{|x|^n}{2n}} = |x|\sqrt[n]{\dfrac{1}{2n}} \longrightarrow |x|$ y $\sqrt[n]{\dfrac{|x|^{2n+2}}{2n+2}} = |x|^2\sqrt[n]{\dfrac{4}{2n+2}} \longrightarrow |x|^2$, las series convergen si $|x| < 1$. Por otro lado, $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{2n+2}}{2n+2}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n+1} = x\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} = x\Big(\dfrac{1}{1-x^2} - 1\Big)$, $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \dfrac{1}{1-x}$, $\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$, es decir $f(x) = -\frac{1}{2}\ln(1-x) + \frac{1}{2}\ln(1-x^2) + \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}\ln(1+x) + \frac{1}{2}x^2$. Notemos que $f(x) = \Big(\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{2{\cdot}2} + \dfrac{x^3}{2{\cdot}3} + \dfrac{x^4}{2{\cdot}4} + \dfrac{x^5}{2{\cdot}5} + \cdots\Big) + \Big(-\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^6}{6} + \dfrac{x^8}{8} + \cdots\Big) + \dfrac{x^2}{2} = \Big(\dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{2{\cdot}2} + \dfrac{x^3}{2{\cdot}3} - \dfrac{x^4}{2{\cdot}4} - \dfrac{x^5}{2{\cdot}5} + \cdots\Big) + \dfrac{x^2}{2} = \dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}x^n + \dfrac{x^2}{2} = \dfrac{1}{2}\ln(1+x) + \dfrac{x^2}{2}$. Así, $c_n = (-1)^n\dfrac{1}{n}$ y como $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge, $f(x) \longrightarrow \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}$, cuando $x \to 1^-$.

b) $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\dfrac{x^{2n+1}}{2n} - \dfrac{x^{2n}}{2n+1}\Big)$

Como $\sqrt[n]{\dfrac{|x|^{2n+1}}{2n}} \longrightarrow |x|^2$ y $\sqrt[n]{\dfrac{|x|^{2n}}{2n+1}} \longrightarrow |x|^2$, las series convergen si $|x|<1$ y $g(x) = x\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{2n} -$

$\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Además, $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-1} = \frac{x}{1-x^2}$, es decir $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n} = -\frac{1}{2}\ln(1-x^2)$ y $\left(x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}-x\right)' = 1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n}+\cdots-1 = \frac{1}{1-x^2}-1$, o sea $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = -\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}-x$. Finalmente $g(x) = -\frac{1}{2}x\ln(1-x^2)-\frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}+1 = -\frac{1}{2}\frac{x^2+1}{x}\ln(1+x)-\frac{1}{2}\frac{x^2-1}{x}\ln(1-x)+1$.

Ahora, $g(x) = (\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{4}+\cdots)-(\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}+\cdots) = \sum_{n=2}^{\infty}c_nx^n$, donde $c_n = \frac{1}{n-1}$ si n es impar y $c_n = -\frac{1}{n+1}$ si n es par. Así, la serie $\sum_{n=2}^{\infty}c_n$ converge, por lo que $\sum_{n=2}^{\infty}c_n = \lim_{x\to 1^-}g(x) = g(1) = 1-\ln 2$.

8. Muestre que si $|x|<1$ y $x\neq 0$ es válida la fórmula $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{3x-2}{4x^2}+\frac{(1-x)^2}{2x^3}\ln(1-x)$.

   Solución Descomponiendo la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+3} = \frac{1}{2x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}-\frac{1}{x^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n+2}+\frac{1}{2x^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+3}}{n+3} = \frac{1}{2x}\ln(1-x)-\frac{1}{x^2}\big(-\ln(1-x)-x\big)+\frac{1}{2x^3}\big(\ln(1-x)-x-\frac{x^2}{2}\big) = \frac{(x-1)^2}{2x^3}\ln(1-x)+\frac{3x-2}{4x^2}$.

9. Suponga que los coeficientes de la serie $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,x^n$ están relacionados por la ecuación $a_n+A\,a_{n-1}+B\,a_{n-2}=0$, para todo $n\geq 2$, donde A y B son constantes. Demuestre que para cualquier x en el campo de convergencia de la serie de potencias se tiene que $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,x^n = \frac{a_0+(a_1+A\,a_0)\,x}{1+Ax+Bx^2}$.
   Utilice lo anterior para calcular el valor de convergencia de la serie de funciones siguientes. Aquí $(f_n)_n$ es la sucesión de Fibonacci: $f_0=f_1=1$; $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$, para $n\geq 0$.

   a) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,(2n+1)\,x^n$ b) $\sum_{n=0}^{\infty}f_n\,x^n$

   Solución Por hipótesis, $a_n+Aa_{n-1}+Ba_{n-2}=0, \forall n\geq 2$, entonces:
   $\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n+Ax\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-1}x^{n-1}+Bx^2\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n-2}=0$, es decir
   $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n+Ax\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n+Bx^2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n = \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n(1+Ax+Bx^2) = a_0+a_1x+Axa_0$.

   a) Notemos que $a_n = (-1)^n(2n+1)$, entonces $a_n+Aa_{n-1}+Ba_{n-2} = 0 = (-1)^n(2n+1)+A(-1)^{n-1}(2n-1)+B(-1)^{n-2}(2n-3) = 2n(B-A+1)+(A-3B+1)$, o sea $A=2$ y $B=1$. Así, $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,(2n+1)\,x^n = \frac{1+(-3+2)x}{1+2x+x^2} = \frac{1-x}{(1+x)^2}$.

   b) Sabemos que $f_{n+2}-f_{n+1}-f_n=0 \iff f_n-f_{n-1}-f_{n-2}=0$, para $n\geq 2$, por lo tanto $A=-1$, $B=-1$, $f_0=f_1=1$ y $\sum_{n=0}^{\infty}f_n\,x^n = \frac{1+(1-1)x}{1-x-x^2} = \frac{1}{1-x-x^2}$.

10. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales usando series de potencias alrededor de 0.

    a) $y'=2y$ b) $y'+y=0$ c) $y'=ky$

d) $(1-x)y' = y$ e) $(x+1)y' = 3y$ f) $(1+x)y' + y = 0$

h) $y' + 2xy = 0$ i) $y' = 3x^2y$ j) $y'' - y = 0$

k) $y'' + 4y = 0$ l) $y'' - y' = 0$ m) $y'' - 9y = 0$.

Solución

a) $y' = 2y$

En este caso $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n x^n$, o sea $c_{n+1} = 2\dfrac{c_n}{n+1}$. Así, se tiene $c_1 = 2c_0$, $c_2 = 2^2\dfrac{c_0}{2!}$, $c_3 = 2^2\dfrac{c_0}{3!}$,..., $c_n = 2^n\dfrac{c_0}{n!}$, y $y = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n\dfrac{c_0}{n!}x^n = c_0\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2x)^n}{n!} = c_0\mathrm{e}^{2x}$.

b) $y' + y = 0$

Se sabe que $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n = -\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, o sea $c_{n+1} = \dfrac{c_n}{n+1}$. Así, $c_1 = -c_0$, $c_2 = -\dfrac{c_1}{2} = \dfrac{c_0}{2!}$, $c_3 = -\dfrac{c_2}{3} = \dfrac{c_0}{3!}$,..., $c_n = (-1)^n\dfrac{c_0}{n!}$, y $y = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{c_0}{n!}x^n = c_0\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-x)^n}{n!} = c_0\mathrm{e}^{-x}$.

c) $y' = ky$

Se verifica que $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} kc_n x^n$, es decir $c_{n+1} = \dfrac{k}{n+1}c_n$. Así, $c_1 = kc_0$, $c_2 = \dfrac{k}{2}c_1 = \dfrac{k^2c_0}{2!}$, $c_3 = \dfrac{kc_2}{3} = \dfrac{k^3c_0}{3!}$,..., $c_n = \dfrac{k^nc_0}{n!}$, y $y = c_0\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(kx)^n}{n!} = c_0\mathrm{e}^{kx}$.

d) $(1-x)y' = y$

Se ve que $(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\big[(n+1)c_{n+1} - nc_n\big]x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, es decir $(n+1)c_{n+1} = (n+1)c_n$. Así, $c_{n+1} = c_n = c_0$ y $y = c_0\sum_{n=0}^{\infty} x^n = c_0\dfrac{1}{1-x}$.

e) $(x+1)y' = 3y$

Puesto que $(x+1)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\big[(n+1)c_{n+1} + nc_n\big]x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 3c_n x^n$, es decir $(n+1)c_{n+1} + nc_n = 3c_n$. Así, $c_{n+1} = \dfrac{3-n}{n+1}c_n$, $c_1 = 3c_0$, $c_2 = c_1 = 3c_0$, $c_3 = \dfrac{1}{3}c_2 = c_0$, $c_4 = 0$, $c_5 = -\dfrac{2}{5}c_4 = 0$,..., $c_n = 0$, y $y = c_0 + 3c_0x + 3c_0x^2 + c_0x^3 = c_0(1+x)^3$.

f) $(1+x)y' + y = 0$

Se tiene $(1+x)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} nc_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$, entonces $(n+1)c_{n+1} + (n+1)c_n = 0$, o sea $c_{n+1} = -c_n$, $c_1 = -c_0$, $c_2 = -c_1 = c_0$, $c_3 = -c_0$, $c_4 = c_0$,... y $y = c_0\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = c_0\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = c_0\dfrac{1}{1-x}$.

h) $y' + 2xy = 0$

Sabemos que $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 2c_{n-1}x^n = 0$, entonces $c_1 = 0$, $c_2 = -c_0$, $c_3 = -\frac{2}{3}c_1 = 0 = c_{2k+1}$, $c_4 = \frac{1}{2}c_0 = -\frac{2}{4}c_2$, $c_6 = -\frac{2}{6}c_4 = -\frac{1}{3!}c_0$,... $c_{2k} = (-1)^k\frac{1}{k!}c_0$, y $y = c_0\mathrm{e}^{-x^2}$.

i) $y' = 3x^2y$

Como $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n = \sum_{n=2}^{\infty} 3c_{n-2}x^n$, entonces $c_1 = c_2 = 0$, $c_{n+1} = \dfrac{3}{n+1}c_{n-2}$, o sea

$c_3 = c_0$, $c_4 = c_5 = 0$, $c_6 = \dfrac{1}{2}c_0$, $c_7 = c_8 = 0$, $c_9 = \dfrac{1}{6}c_0$, $c_{10} = c_{11} = 0$, $c_{12} = \dfrac{1}{4}c_9 = \dfrac{1}{4!}c_0, \ldots,$ $c_{3n} = \dfrac{1}{n!}c_0$, es decir $y = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!}x^{3n} = c_0 \mathrm{e}^{x^3}$.

j) $y'' - y = 0$

Se tiene $\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$, entonces $c_{n+2} = \dfrac{c_n}{(n+2)(n+1)}$, c_0, c_1, $c_2 = \dfrac{1}{2}c_0$, $c_3 = \dfrac{1}{2{\cdot}3}c_1$, $c_4 = \dfrac{1}{3{\cdot}4}c_2 = \dfrac{1}{4!}c_0$, $\ldots$, $c_{2n} = \dfrac{1}{(2n)!}c_0$, $c_{2n+1} = \dfrac{1}{(2n+1)!}c_1$, es decir $y = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = c_0 \cosh x + c_1 \operatorname{senh} x$.

k) $y'' + 4y = 0$

Sabemos que $\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 4c_n x^n = 0$, entonces $c_{n+2} = -\dfrac{4}{(n+2)(n+1)}c_n$ y $c_{2n} = \dfrac{(-4)^n}{(2n)!}c_0$, $c_{2n+1} = \dfrac{(-4)^n}{(2n+1)!}c_1$, es decir:

$y = c_0 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!} + \dfrac{c_1}{2} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{2^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \alpha \cos 2x + \beta \operatorname{sen} 2x$.

l) $y'' - y' = 0$

Dado que $\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n = 0$, entonces $c_{n+2} = \dfrac{1}{n+2}c_{n+1}$, c_0, c_1, $c_2 = \dfrac{1}{2}c_1$, $c_3 = \dfrac{1}{3}c_2 = \dfrac{1}{3!}c_1$, $c_4 = \dfrac{1}{4!}c_1$, $\ldots$, $c_n = \dfrac{1}{n!}c_1$, es decir $y = c_0 + c_1 \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} = c_0 - c_1 + c_1 \mathrm{e}^x$.

m) $y'' - 9y = 0$

De la misma manera que en el problema 10j), $\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 9c_n x^n = 0$, entonces $c_{n+2} = \dfrac{9c_n}{(n+2)(n+1)}$, c_0, c_1, $c_2 = \dfrac{9}{2}c_0$, $c_3 = \dfrac{9}{2{\cdot}3}c_1$, $c_4 = \dfrac{9}{3{\cdot}4}c_2 = \dfrac{9^2}{4!}c_0$, $\ldots$, $c_{2n} = \dfrac{9^n}{(2n)!}c_0$, $c_{2n+1} = \dfrac{9^n}{(2n+1)!}c_1$, es decir $y = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(3x)^{2n}}{(2n)!} + \dfrac{1}{3}c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = c_0 \cosh 3x + \dfrac{1}{3}c_1 \operatorname{senh} 3x$.

11. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales usando series de potencias.

a) $xy' = 3y + 3$

b) $(1 - x^2)y' = 2xy$

c) $(x + 1)y' = (2x + 3)y$

d) $xy' = (x + 1)y$

e) $y'' - 3y' + 2y = 0$

f) $(x - 3)y' - xy = 0$

g) $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$

h) $y'' + y = 2x^2 + x$

Solución

a) $xy' = 3y + 3$

Se tiene $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n = 3 + 3c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 3c_n x^n$, entonces $c_0 = -1$, c_3, $nc_n = 3c_n$, para $n \notin \{0, 3\}$, o sea $y = -1 + c_3 x^3$.

b) $(1 - x^2)y' = 2xy$

Se sabe que $(1-x^2)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n = 2x\sum_{n=0}^{\infty} nc_nx^n \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n - \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)c_{n-1}x^n = \sum_{n=1}^{\infty} 2c_{n-1}x^n \Longrightarrow c_1+2c_2x+\sum_{n=2}^{\infty}\big[(n+1)c_{n+1}-(n-1)c_{n-1}\big]x^n = 2c_0x+\sum_{n=2}^{\infty} 2c_{n-1}x^n$, es decir $c_1 = 0$, $c_2 = c_0$, $(n+1)c_{n+1} = (n-1)c_{n-1}+2c_{n-1} = (n+1)c_{n-1}$, o bien $c_{n+1} = c_{n-1}$, $c_0 = c_2 = c_4 = \cdots$, $c_1 = c_3 = c_5 = \cdots = 0$ y $y = c_0\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = c_0\dfrac{1}{1-x^2}$.

c) $(x+1)y' = (2x+3)y$

Como $(x+1)\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1} = (2x+3)\sum_{n=2}^{\infty}c_nx^n \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}(-2c_{n-1})x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-3c_n)x^n = 0$, o sea $c_1 = 3c_0$, $(n+1)c_{n+1} = -(n-3)c_n+2c_{n-1}$.

Si $n = 1$, $c_2 = 4c_0$, si $n = 2$, $c_3 = \frac{10}{3}\,c_0$, si $n = 3$, $c_4 = 2c_0$, si $n = 4$, $c_5 = \frac{14}{15}\,c_0$. De este modo $y = c_0(1+3x+4x^2+\frac{10}{3}\,x^3+2x^4+\cdots)$. Sin embargo, es importante notar que la solución $y = c_0(1+3x+4x^2+\frac{10}{3}\,x^3+2x^4+\cdots) = c_0(1+(1+2)x+(2+2)x^2+(\frac{8}{3!}+\frac{4}{2!})x^3+(\frac{16}{4!}+\frac{8}{3!})x^4+(\frac{32}{5!}+\frac{16}{4!})x^5+\cdots) = c_0(1+x)(1+2x+\frac{4}{2!}\,x^2+\frac{8}{3!}\,x^3+\frac{16}{4!}\,x^4+\cdots) = c_0(1-x)\mathrm{e}^{2x}$. Si embargo esta solución es artificiosa y se estableció ya que se conocía la solución de la ecuación diferencial.

d) $xy' = (x+1)y$

Es claro que $\sum_{n=1}^{\infty} nc_nx^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_nx^n + c_0$, por lo que $c_0 = 0$, $nc_n = c_{n-1}+c_n$ i.e. $c_n = \dfrac{c_{n-1}}{n-1}$ y $c_2 = c_1$, $c_3 = \frac{1}{2}\,c_2 = \frac{1}{2}\,c_1$, $c_4 = \frac{1}{3}\,c_3 = \frac{1}{3!}\,c_1$, $\ldots$, $c_n = \dfrac{1}{(n-1)!}c_1$,$\ldots$ Así, $y = c_1\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n-1)!}x^n = c_1x\mathrm{e}^x$.

e) $y''-3y'+2y = 0$

Notemos que $\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 3(n+1)c_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 2c_nx^n = 0$, entonces $(n+2)(n+1)c_{n+2} - 3(n+2)c_{n+1} + 2c_n = 0$, por lo que c_0, c_1, $c_{n+2} = \dfrac{-2c_n+3(n+1)c_{n+1}}{(n+2)(n+1)}$, o bien $c_n = \dfrac{3c_{n-1}}{n} - \dfrac{2c_{n-2}}{n(n-1)}$ y se tiene $c_2 = \frac{3}{2}\,c_1 - \frac{2}{2\cdot 1}\,c_0 = \frac{3}{2}\,c_1 - c_0$, $c_3 = \frac{3}{3}\,c_2 - \frac{2}{3\cdot 2}\,c_1 = \frac{7}{6}\,c_1 - c_0$, $c_4 = \frac{3}{4}\,c_3 - \frac{2}{4\cdot 3}\,c_2 = \frac{5}{8}\,c_1 - \frac{7}{12}\,c_0 = \frac{1}{4!}\,((2^3-1)c_1-(2^3-2)c_0)$. Así, cuando $c_0 = A+B$ y $c_1 = A+2B$ se tiene $y = A\mathrm{e}^x + B\mathrm{e}^{2x}$. También esta solución es artificiosa y se da ya que se conocía la solución de la ecuación diferencial.

f) $(x-3)y' - xy = 0$

Se tiene que $x\sum_{n=1}^{\infty} nc_nx^{n-1} - 3\sum_{n=1}^{\infty} nc_nx^{n-1} + x\sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n = 0 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} nc_nx^n - 3\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1}x^n = 0$, por lo tanto $c_1 = 0$, $nc_n - 3(n+1)c_{n+1} + c_{n-1} = 0$ o sea $c_n = \dfrac{c_{n-2}+(n-1)c_{n-1}}{3n}$. La solución es $y = A\mathrm{e}^x(x-3)^3$.

g) $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$

Se sabe que $(1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_nx^{n-2} - 2x\sum_{n=1}^{\infty} nc_nx^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n = 0 \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_nx^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} nc_nx^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n = 0 \Longrightarrow 2c_2+2c_0 = 0$, $3\cdot 2c_3 - 2c_1 + 2c_1 = 0$, $c_{n+2} = \dfrac{n(n-1)c_n + 2nc_n - 2c_n}{(n+2)(n+1)} = \dfrac{n-1}{n+1}c_n$, o sea $c_n = \dfrac{n-3}{n-1}c_{n-2}$, por lo que se tiene c_0, c_1, $c_2 = -c_0$, $c_3 = 0$, $c_4 = \frac{1}{3}c_2 = -\frac{1}{3}c_0$, $c_5 = 0$, $c_6 = -\frac{1}{5}c_0, \ldots$, es decir $y = c_1x + c_0(1 - x^2 - \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{5}x^6 - \frac{1}{7}x^8 - \cdots)$.

h) $y'' + y = 2x^2 + x$

Observemos que $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_nx^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n = 0 + 1{\cdot}x + 2{\cdot}x^2 \implies 2c_2 + c_0 = 0, 3{\cdot}2c_3 + c_1 = 1, 4{\cdot}3c_4 + c_2 = 2, (n+2)(n+1)c_{n+2} + c_n = 0$, $n \geq 3$, es decir se tiene c_0, c_1, $c_2 = -\frac{1}{2}c_0, c_3 = (1 - c_1)\frac{1}{3!}$, $c_4 = (2 - c_2)\frac{1}{4!} = (4 + c_0)\frac{1}{4!}$, $c_5 = (1 - c_1)\frac{1}{5!}$, $c_6 = -(4 + c_0)\frac{1}{6!}$, $c_7 = (1 - c_1)\frac{1}{7!}$, $c_8 = (4 + c_0)\frac{1}{8!}, \ldots$ por lo que $y = 2x^2 + x + 4 + (c_0 + 4)\cos x - (1 - c_1)\operatorname{sen} x$.

12. Demuestre que la ecuación $y' = \dfrac{y}{x} + 1$ no es posible desarrollarla como series de potencias en x y que la ecuación $xy'' + y' + xy = 0$ no satisface el teorema, pero tiene una solución en series de potencias de x.

Solución

Si la ecuación $y' = \dfrac{y}{x} + 1$ se puede desarrollar en series de potencias se tiene que $xy' = y + x$, por lo que $\sum_{n=1}^{\infty} nc_nx^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n + x \implies c_0 = 0$, $c_1 + 1 = c_1$ y $nc_n = c_n$ para $n \geq 2$ que no es posible.

Si se considera $t = 1 - x$, entonces $(t+1)\sum_{n=1}^{\infty} nc_nt^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_nt^n + t + 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} nc_nt^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}t^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_nt^n + t + 1 \implies c_1 = c_0 + 1$, $c_2 = \frac{1}{2}$, $c_3 = -\frac{1}{3\cdot 2}$, $c_4 = \frac{1}{4\cdot 3}$, $c_5 = -\frac{1}{5\cdot 4}, \ldots, c_n = (-1)^n\frac{1}{n\cdot(n-1)}$, por lo que se tiene $y = c_0(1 - t) + (1 + t)(t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{5}t^5 + \cdots) = c_0x + x\ln x$.

La ecuación $xy'' + y' + xy = 0$ no satisface el teorema, ya que $y'' + \dfrac{1}{x}y' + y = 0$ y $\dfrac{1}{x}$ no es analítica en 0. Sin embargo, $x\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_nx^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} nc_nx^{n-1} + x\sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n = \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)nc_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1}x^n \implies c_1 = 0$, $n(n+1)c_{n+1} + (n+1)c_{n+1} + c_{n-1} = 0 \implies c_n = -\dfrac{1}{n^2}c_{n-2}$, o sea tenemos c_0, $c_1 = 0$, $c_2 = -\dfrac{c_0}{2^2}$, $c_3 = 0$, $c_4 = -\dfrac{c_0}{2^2 4^2}$, $c_5 = 0$, $c_6 = -\dfrac{c_0}{2^2 4^2 6^2}$, $\ldots$ y finalmente $y = c_0\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2^n n!)^2}x^{2n}$.

Capítulo 8

Números complejos

8.1 Introducción

Hasta el momento, se ha trabajado sobre el campo de los números reales, pero existe la necesidad de una nueva noción, la de número complejo, indispensable para resolver cierto tipo de ecuaciones.

En efecto, nos hemos confrontado a las ecuaciones del tipo $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$, con $a_i \in \mathbb{R}$, lo que nos lleva a la mención del teorema de d'Alembert–Gauss: *Todo polinomio de grado n, tiene n raíces (no necesariamente distintas) reales o complejas.*

No se insistirá en este capítulo sobre la manera de construir teóricamente el campo de los números complejos, que como toda construcción de este tipo es delicada, sino que nos contentaremos con el estudio de sus principales propiedades.

La manipulación de los números complejos no presenta dificultades mayores y nos familiarizaremos con dos representaciones posibles, para tales números.

A partir del conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, se puede definir el conjunto $\mathbb{Z}$ de enteros positivos o negativos; después se puede construir el conjunto $\mathbb{Q}$ de números racionales. Confrontado a ciertos problemas, en particular de origen geométrico, se ha debido desarrollar la noción de número real, que permite resolver ecuaciones del tipo $x^2 = 2$, $x^3 = \frac{2}{3}$, ecuaciones que no tienen solución en $\mathbb{Q}$.

Sin embargo, el campo de los números reales se muestra insuficiente para resolver ciertas ecuaciones. Por ejemplo, la ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tienen solución en $\mathbb{R}$, es decir no existe un número real que elevado al cuadrado valga -1.

La introducción del símbolo $\sqrt{-1} = \mathrm{i}$, que no es un número real, para el cual se admite que $(\sqrt{-1})^2 = -1$, permite expresar, no solamente las raíces de $x^2 + 1 = 0$ (que son entonces $\sqrt{-1}$ y $-\sqrt{-1}$), sino que también todas las raíces de cualquier polinomio.

Girolamo Cardano, matemático italiano del renacimiento (1501–1576), fue el primero en introducir los números imaginarios, como raíces cuadradas de números negativos.

El nombre Cardano figura en la historia de la matemática por ser el primero en publicar la fórmula para resolver la ecuación cúbica $x^3 - px - q = 0$. Sin embargo, la solución de la ecuación cúbica $x^3 - px - q = 0$[1] fue obtenida primeramente por Scipione del Ferro (1522–1565), matemático italiano, quien nunca las publicó. La solución está dada por:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Pero la sencillez de la fórmula de Cardano es aparente, pues si la ecuación $x^3 - 3x = 0$ tiene raíces $x = 0$, $x = \pm\sqrt{3}$, la solución de Cardano da $x = \sqrt[3]{\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{-\sqrt{-1}} = \sqrt[3]{\mathrm{i}} + \sqrt[3]{-\mathrm{i}}$.

El procedimiento de extracción de raíces cuadradas y cúbicas fue desarrollado por Raffael Bombelli (1530–1572) seguidor de Cardano.

Fran‡ois ViŠte (1540-1603), gran algebrista francés, demostró que en el caso de la fórmula $\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$, es decir el caso de extracción de raíces cúbicas en la fórmula de Cardano, la expresión se reduce a una combinación sencilla de funciones trigonométricas.

8.2 El campo de los números complejos, generalidades

Por convención, se escribirán los elementos del conjunto de los números complejos, que denotamos $\mathbb{C}$, bajo la forma $z = a + \mathrm{i}b$, con $a, b \in \mathbb{R}$ y el símbolo $\mathrm{i} \notin \mathbb{R}$ será por definición tal que $\mathrm{i}^2 = -1$, o bien $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$.

El término a se llama parte real de z y se denota $\mathfrak{Re}(z)$. El número b se llama parte imaginaria de z y se denota $\mathfrak{Im}(z)$.

Ejemplos

[1]En este apartado se indicará las solución de la ecuación cúbica de la forma $x^3 - px - q = 0$. La solución no aparece en los libros de cálculo, a pesar de su sencillez e ingenio involucrado en su desarrollo.

Consideremos la ecuación $x^3 - px - q = 0$ y supongamos que la solución x de la ecuación se expresa de la forma $x = u + v$. Así, $x^3 - px = (u+v)^3 - p(u+v) = u^3 + v^3 + (3uv - p)(u+v) = q$, entonces si $p = 3uv \Longrightarrow u^3 + v^3 = q$ y tenemos el sistema $uv = p/3$, $u^3 + v^3 = q$ o bien $u^3v^3 = p^3/27$, $u^3 + v^3 = q$. Pero sabemos que u^3 y v^3 son las soluciones de la ecuación cuadrática $x^2 - qx + p^3/27 = 0$, es decir $u^3 = \frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}$, $v^3 = \frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}$. Se concluye que la solución de la ecuación cúbica $x^3 - px - q = 0$ es:

$$x = u + v = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}.$$

a) $\underbrace{3}_{\substack{\text{parte}\\\text{real}}} + \underbrace{2\mathrm{i}}_{\substack{\text{parte}\\\text{imaginaria}}}$.

b) $\frac{1}{2} - \sqrt{2}\mathrm{i} \Longrightarrow (a = \frac{1}{2}; b = -\sqrt{2})$.

c) $5 = 5 + 0\mathrm{i}$; $(a = 5, b = 0)$; en este caso el número es real.

d) $-3\mathrm{i} = 0 + (-3)\mathrm{i}$; $(a = 0, b = -3)$; en este caso el número es imaginario puro.

e) La raíz cuadrada de números negativos (imaginarios):

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4(-1)} = \sqrt{4}\sqrt{-1} = 2\mathrm{i}; \quad \sqrt{-5} = \sqrt{5}\sqrt{-1} = \sqrt{5}\mathrm{i}.$$

8.2.1 La suma en $\mathbb{C}$

El conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos, se provee de una operación (ley de composición interna) suma $+$, definida de la siguiente manera: $(a + \mathrm{i}b) + (c + \mathrm{i}d) = (a + c) + \mathrm{i}(b + d)$.

Se verifica de inmediato que esta suma, gracias a las propiedades de la suma de los números reales, es cerrada, asociativa, conmutativa, tiene un elemento neutro único $0 = 0 + \mathrm{i}0$ y que todo elemento $a + \mathrm{i}b$ en $\mathbb{C}$ tiene un inverso aditivo en $\mathbb{C}$, $-a - \mathrm{i}b$, tal que $(a + \mathrm{i}b) + (-a - \mathrm{i}b) = 0$.

8.2.2 Multiplicación por escalar

Se define también en $\mathbb{C}$ una ley de composición externa, llamada multiplicación por escalar, de la siguiente forma: $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$, $(\forall\, z \in \mathbb{C})$, se tiene que $\lambda z = \lambda(a + \mathrm{i}b) = \lambda a + \mathrm{i}\lambda b$, que gracias a las propiedades de los números reales, es distributiva con respecto a la suma de números complejos, o sea $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall\, z_1$, $z_2 \in \mathbb{C}$, $\lambda(z_1 + z_2) = \lambda z_1 + \lambda z_2$.

8.2.3 El producto en $\mathbb{C}$

Al conjunto $\mathbb{C}$ se provee de una ley de composición interna (el producto), definida así:

$$(a + \mathrm{i}b)\cdot(c + \mathrm{i}d) = ac + \mathrm{i}^2 bd + \mathrm{i}(ad + bc) = \underbrace{ac - bd}_{\substack{\text{parte}\\\text{real}}} + \underbrace{(ad + bc)}_{\substack{\text{parte}\\\text{imaginaria}}}\mathrm{i}.$$

Se verifica sin dificultad que el "producto" de números complejos es cerrado, asociativo, conmutativo, admite un elemento neutro $1 = 1 + \mathrm{i}0$ y para todo elemento z en $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, existe un inverso multiplicativo único tal que al multiplicarlo por z, el producto es 1.

En efecto, si $z = a + \mathrm{i}b$, con $z \neq 0$, determinemos un número complejo $c + \mathrm{i}d$ tal que el producto $(a + \mathrm{i}b)(c + \mathrm{i}d) = 1$, es decir $ac - bd + \mathrm{i}(ad + bc) = 1$, por lo que $ac - bd = 1$, $ad + bc = 0 \Longrightarrow c = \dfrac{a}{a^2 + b^2}$, $d = \dfrac{-b}{a^2 + b^2}$. La solución es claramente única.

De esta manera el conjunto $\mathbb{C}$ se ha provisto de una suma y un producto (el producto tiene la propiedad distributiva con respecto a la suma, es decir $\forall\, z,\, z_1,\, z_2 \in \mathbb{C}$, se tiene que $z(z_1 + z_2) = zz_1 + zz_2)$. que lo hacen un campo conmutativo.

Ejemplos Multiplicar las siguientes expresiones:

$$(2 - 3\mathrm{i})\cdot(3 + 5\mathrm{i}) = 6 + 10\mathrm{i} - 9\mathrm{i} - 15\mathrm{i}^2 = 21 + \mathrm{i}.$$

$$(4 + \mathrm{i})\cdot 2\mathrm{i} = 8\mathrm{i} + 2\mathrm{i}^2 = -2 + 8\mathrm{i}.$$

Observación Es necesario tener en cuenta que:

$$\mathrm{i}^2 = -1,\;\; \mathrm{i}^3 = (-1)\mathrm{i} = -\mathrm{i},\;\; \mathrm{i}^4 = (-\mathrm{i})\mathrm{i} = -\mathrm{i}^2 = 1,\;\; \mathrm{i}^5 = \mathrm{i}, \ldots$$

y en general para k entero:

$$\mathrm{i}^{4k} = 1,\;\; \mathrm{i}^{4k+1} = \mathrm{i},\;\; \mathrm{i}^{4k+2} = -1,\;\; \mathrm{i}^{4k+3} = -\mathrm{i}.$$

8.2.4 Número complejo conjugado

Definición 8.2.1 *Se llama número complejo conjugado de $z = a + \mathrm{i}b$, o simplemente conjugado de z, al número complejo denotado $\bar{z} = a - \mathrm{i}b$.*

Se verifica fácilmente que:

1) z es el conjugado de $\bar{z}$, pues $\bar{\bar{z}} = a \bar{-} \mathrm{i}b = a - (-\mathrm{i}b) = a + \mathrm{i}b = z$.

2) $z + \bar{z} = (a + \mathrm{i}b) + (a - \mathrm{i}b) = 2a$, es decir la suma de z y $\bar{z}$ es un número real.

3) $z\cdot\bar{z} = (a + \mathrm{i}b)(a - \mathrm{i}b) = a^2 + b^2 = |z|^2$.

Esta propiedad es particularmente importante cuando se efectúan divisiones de números complejos. En particular:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + \mathrm{i}b} = \frac{\bar{z}}{z\cdot\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a - \mathrm{i}b}{a^2 + b^2}\,.$$

De esta forma, $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a_1 + \mathrm{i}b_1}{a_2 + \mathrm{i}b_2} = \dfrac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \dfrac{a_1a_2 - b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \mathrm{i}\dfrac{a_1b_2 + a_2b_1}{a_2^2 + b_2^2}$.

4) $z_1 \bar{+} z_2 = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.

5) $z_1 \bar{\cdot} z_2 = \bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$.

Ejemplo Los siguientes números son conjugados:

$$\sqrt{2} + \sqrt{\tfrac{3}{2}}\mathrm{i} \quad \sqrt{2} - \sqrt{\tfrac{3}{2}}\mathrm{i}; \qquad -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\,\mathrm{i};\; -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\,\mathrm{i}.$$

División

La división de dos números complejos es la operación inversa a su multiplicación. Si:

$$\frac{a+b\mathrm{i}}{a_1+b_1\mathrm{i}} = x + y\mathrm{i},$$

tenemos:

$$(a+b\mathrm{i}) = (a_1+b_1\mathrm{i})(x+y\mathrm{i}) \Longrightarrow a+b\mathrm{i} = a_1x - b_1y + (b_1x + a_1y)\mathrm{i}.$$

De la condición de igualdad de dos números complejos, obtenemos: $a_1x - b_1y = a$, $b_1x + a_1y = b \Longrightarrow x = \dfrac{aa_1 - bb_1}{a_1^2+b_1^2}$, $y = \dfrac{a_1b + ab_1}{a_1^2+b_1^2}$, entonces:

$$\frac{a+b\mathrm{i}}{a_1+b_1\mathrm{i}} = \frac{aa_1 - bb_1}{a_1^2+b_1^2} + \frac{a_1b + ab_1}{a_1^2+b_1^2}\,\mathrm{i}.$$

En la práctica este resultado se puede obtener de una manera más simple, multiplicando el dividendo y el divisor por el conjugado de este último.

Ejemplos Calcular las siguiente divisiones: $\dfrac{2+3\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}, \dfrac{3-4\mathrm{i}}{4+3\mathrm{i}}$.

Solución $\dfrac{2+3\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}} = \dfrac{2+3\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}\dfrac{2-\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}} = \dfrac{4-2\mathrm{i}+6\mathrm{i}-3\mathrm{i}^2}{4-\mathrm{i}^2} = \dfrac{7}{5}+\dfrac{4}{5}\mathrm{i},$

$\dfrac{3-4\mathrm{i}}{4+3\mathrm{i}} = \dfrac{3-4\mathrm{i}}{4+3\mathrm{i}}\dfrac{4-3\mathrm{i}}{4-3\mathrm{i}} = \dfrac{12-9\mathrm{i}-16\mathrm{i}+12\mathrm{i}^2}{16-9\mathrm{i}^2} = -\dfrac{25}{25}\mathrm{i} = -\mathrm{i}.$

8.2.5 $\mathbb{C}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$

El conjunto $\mathbb{C}$ provisto de dos leyes de composición (la suma y la multiplicación por escalar), posee la estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Todos los elementos de $\mathbb{C}$, se obtienen como una combinación lineal de coeficientes a y b de los números 1 e i. De esta manera, el conjunto $\{1, \mathrm{i}\}$ es una base de $\mathbb{C}$ y genera todo el conjunto $\mathbb{C}$, ya que 1 e i son linealmente independientes. De este hecho se concluye que la dimensión de $\mathbb{C}$ es 2 y que $\mathbb{C}$ es isomorfo a $\mathbb{R}^2$, es decir que podemos identificar a $\mathbb{C}$ con el plano $\mathbb{R}^2$.

Para verificar que 1 e i son linealmente independientes, hay que probar que $a\cdot 1 + b\cdot\mathrm{i} = 0 \Longrightarrow a = b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$.

En efecto, si $b = 0 \Longrightarrow a\cdot 1 = 0$, es decir $a = 0$. Si $b \neq 0$, tenemos que $b\mathrm{i} = -a \Longrightarrow \mathrm{i} = -\frac{a}{b} \in \mathbb{R}$, que es imposible.

Observación En realidad se ha probado la siguiente propiedad:

Dos números complejos son iguales si y sólo si sus partes reales son iguales y sus partes imaginarias son iguales:

$$a_1 + \mathrm{i}b_1 = a_2 + \mathrm{i}b_2 \Longleftrightarrow a_1 - a_2 + \mathrm{i}(b_1 - b_2) = 0 \Longleftrightarrow a_1 - a_2 = 0 \text{ y } b_1 - b_2 = 0 \Longleftrightarrow a_1 = a_2,\ b_1 = b_2.$$

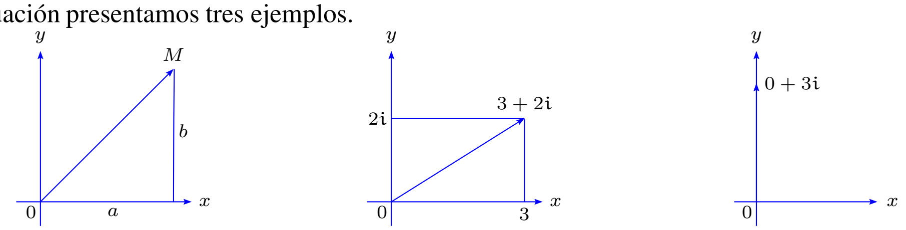
Ejemplo Determinar las soluciones de la ecuación $2z^3 - 3z + 5\mathrm{i} = 0$.

Solución Observemos que $z = \mathrm{i}$ es una solución de la ecuación, por lo que realizando la división $\dfrac{2z^3 - 3z + 5\mathrm{i}}{z - \mathrm{i}} = 2z^2 + 2\mathrm{i}z - 5$, o sea $2z^3 - 3z + 5\mathrm{i} = (z - \mathrm{i})(2z^2 + 2\mathrm{i}z - 5)$. Es importante destacar que la fórmula general para obtener las raíces de una ecuación de segundo grado, sigue siendo válida en $\mathbb{C}$. De esta manera, la ecuación de segundo grado $2z^2 + 2\mathrm{i}z - 5 = 0$, tiene por raíces $z = \frac{1}{2}(3 - \mathrm{i})$, $z = \frac{1}{2}(-3 - \mathrm{i})$ y concluimos que las soluciones de la ecuación $2z^3 - 3z + 5\mathrm{i} = 0$ son $\{\mathrm{i}, \frac{1}{2}(3 - \mathrm{i}), \frac{1}{2}(-3 - \mathrm{i})\}$.

8.3 Representación geométrica de los números complejos

Dada la identificación de $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$, todo número complejo $a + b\mathrm{i}$ puede ser representado sobre el plano Oxy mediante un punto $M(a, b)$, de coordenadas a y b. Recíprocamente, todo punto $M(a, b)$ del plano Oxy puede considerarse como la imagen geométrica del número complejo $a + b\mathrm{i}$. Se puede considerar que a todo punto del eje Ox, le corresponde un número real y que todo punto del eje Oy representa un número puramente imaginario. Por eso, representando los números complejos sobre un plano, el eje Oy se llama eje imaginario y el Ox, eje real.

Uniendo el punto $M(a, b)$ con el origen de coordenadas, obtenemos el vector $\vec{OM}$. En algunos casos es muy conveniente considerar el vector como la representación geométrica del número complejo $a + b\mathrm{i}$. A continuación presentamos tres ejemplos.



En la Figura 1, se representa un par de números complejos conjugados, representados por los puntos M y M_1, los cuales son simétricos.

Ambos métodos de representación geométrica de los números complejos son equivalentes, puesto que a todo punto M del plano, le corresponde un vector determinado e inversamente, a todo vector $\vec{OM}$, cuyo punto inicial coincide con el origen Oxy, le corresponde un punto determinado M, que es el punto final del vector $\vec{OM}$.

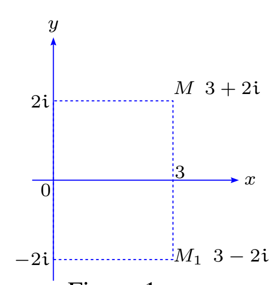


Figura 1

Definición 8.3.1 *Se llama módulo del número complejo $z = a + b\mathrm{i}$, al número real:*

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Geométricamente el módulo o valor absoluto, es la longitud del radio vector $\vec{OM}$, r es positivo y se anula sólo cuando $a = 0$ y $b = 0$. Este resultado se justifica por el Teorema de Pitágoras.

Ejemplos Calcular el módulo de los siguientes números complejos: $z = 3 + 4\mathrm{i}$, $z = -2 - \mathrm{i}$.

Solución $|3 + 4\mathrm{i}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, $|-2 - \mathrm{i}| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$.

8.3.1 Representación geométrica de las operaciones con números complejos

Recordemos que la suma de dos números complejos, $z_1 = a_1 + b_1\mathrm{i}$ y $z_2 = a_2 + b_2\mathrm{i}$, es un número complejo definido de la siguiente forma:

$$(a_1 + b_1\mathrm{i}) + (a_2 + b_2\mathrm{i}) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\mathrm{i}. \tag{1}$$

De la fórmula (1) se deduce que la adición de los números complejos representados en forma de vectores, se lleva a cabo de acuerdo con las reglas de adición de vectores, como veremos a continuación: (Figura 2).

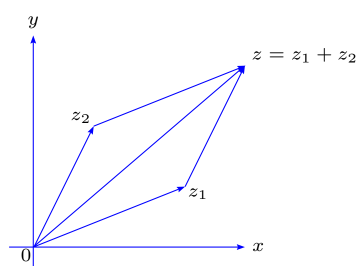


Figura 2

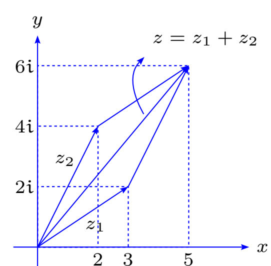


Figura 3

Ejemplo Sumar $z_1 = 3 + 2\mathrm{i}$ y $z_2 = 2 + 4\mathrm{i}$. (Ver Figura 3).

Solución $z = z_1 + z_2 = (3 + 2\mathrm{i}) + (2 + 4\mathrm{i}) = (3 + 2) + (2 + 4)\mathrm{i} = 5 + 6\mathrm{i}$.

Resta

La diferencia de dos números complejos $a_2 + b_2\mathrm{i}$ y $a_1 + b_1\mathrm{i}$, es un número complejo que sumado a $a_1 + b_1\mathrm{i}$, da $a_2 + b_2\mathrm{i}$.

Es fácil ver que:

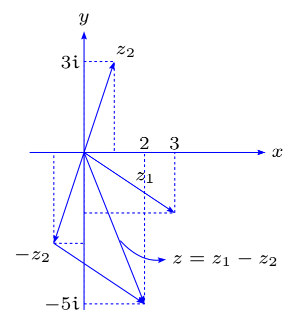
$$(a_2 + b_2\mathrm{i}) - (a_1 + b_1\mathrm{i}) = (a_2 - a_1) + (b_2 - b_1)\mathrm{i}. \tag{2}$$

Ejemplo Calcule el valor de $z_1 - z_2$, si $z_1 = 3 - 2\mathrm{i}$ y $z_2 = 1 + 3\mathrm{i}$.

Solución $z = z_1 - z_2 = 3 - 2\mathrm{i} - (1 + 3\mathrm{i}) = (3 - 1) + (-2 - 3)\mathrm{i} = 2 - 5\mathrm{i}$.

Geométricamente, la resta de números complejos significa la resta de sus correspondientes vectores. En la figura siguiente se ilustra la resta del ejemplo anterior.

Observemos que el módulo de la diferencia de dos números complejos $a_1 + b_1\mathrm{i}$ y $a_2 + b_2\mathrm{i}$, es igual a la distancia entre los puntos que representan estos números en el plano complejo, es decir: $\sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$.



8.4 Potenciación

La elevación de un número complejo a una potencia entera positiva, se realiza por la regla de potenciación de un binomio, puesto que es un caso particular del producto de factores complejos iguales.

Ejemplos $(a + b\mathrm{i})^2 = a^2 + 2ab\mathrm{i} + b^2\mathrm{i}^2 = a^2 - b^2 + 2ab\mathrm{i}$,

$$(a + b\mathrm{i})^3 = a^3 + 3a^2b\mathrm{i} + 3ab^2\mathrm{i}^2 + b^3\mathrm{i}^3 = (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)\mathrm{i}.$$

8.4.1 Extracción de la raíz cuadrada

Supongamos que se quiere extraer la raíz cuadrada del número $a + b\mathrm{i}$. Quiere decir que debemos hallar un número complejo $x + y\mathrm{i}$ tal que su cuadrado sea igual a $a + b\mathrm{i}$.

Así tenemos que $\sqrt{a + b\mathrm{i}} = \pm(x+y\mathrm{i})$, donde x y y son números reales. En tal caso, $a+b\mathrm{i} = (x+y\mathrm{i})^2 = x^2 - y^2 + 2xy\mathrm{i}$.

Utilizando la condición de igualdad de dos números complejos obtenemos: $a = x^2 - y^2$, $b = 2xy$, de donde $y = \dfrac{b}{2x}$, por lo que $a = x^2 - \dfrac{b^2}{4x^2} \Longrightarrow 4x^2a = 4x^4 - b^2$.

Reordenando la última ecuación, tenemos:

$$4x^4 - 4ax^2 - b^2 = 0 \Longrightarrow x^2 = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 + 4b^2}}{4} \Longrightarrow x^2 = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$

Como, $\sqrt{a^2 + b^2} \geq a$, es necesario tomar el signo "+" delante del radical, para que x^2 sea positivo o cero, por lo tanto:

$$x^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}. \tag{3}$$

Sustituyendo el valor anterior y simplificando obtenemos:

$$y^2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}. \tag{4}$$

o sea, los valores de x y y son:

$$x = \pm\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}.$$

La ecuación $2xy = b$ demuestra que el producto xy tiene el mismo signo que el número b. Por lo tanto, si $b > 0$, x y y tienen signos iguales; si $b < 0$, x y y tienen diferentes signos. Por eso, para $b > 0$ tenemos:

$$\sqrt{a+b\mathrm{i}} = \pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right),$$

y para $b < 0$ tenemos:

$$\sqrt{a+b\mathrm{i}} = \pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} - \mathrm{i}\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\right).$$

Ejemplo Calcular $\sqrt{1+2\mathrm{i}}$.

Solución Se tiene $1+2\mathrm{i} = x^2 - y^2 + 2xy\mathrm{i}$, $x^2 - y^2 = 1$, $xy = 1$, $y = \frac{1}{x}$, entonces $x^2 - \frac{1}{x^2} = 1 \Longrightarrow x^4 - 1 = x^2 \Longrightarrow x^4 - x^2 - 1 = 0$.

Así, $x^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Longrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$, luego $\frac{1+\sqrt{5}}{2} - y^2 = 1 \Longrightarrow y^2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Longrightarrow y = \pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$.

Finalmente:

$$\sqrt{1+2\mathrm{i}} = \pm\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right).$$

8.5 Forma trigonométrica o polar de un número complejo

El número complejo $a + b\mathrm{i}$ distinto de cero, se representa por el radio vector $\vec{OM}$ y la magnitud de este vector es el módulo del número complejo. De acuerdo con la Figura 4, tenemos las siguientes expresiones:

$$a = r\cos\phi, \quad b = r\,\mathrm{sen}\,\phi, \quad \phi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + n\pi. \qquad (5)$$

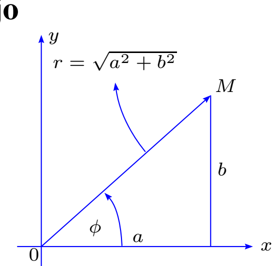


Figura 4

El ángulo ϕ entre el semi-eje positivo del eje Ox y el vector $\vec{OM}$, se llama argumento $\arg(z)$ del número complejo $a + b\mathrm{i}$, lo que está indicado en el dibujo por una arco-flecha. Si el número complejo es igual a cero, el vector $\vec{OM}$ se convierte en un punto (vector nulo) y no hay necesidad de hablar de su dirección. Por eso, se considera que el vector nulo no tiene argumento.

Aquí, los ángulos se miden en radianes y se consideran positivos si se orientan en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj.

Se observa que para $z \neq 0$, se puede determinar $\arg(z)$ por $\arg(z) = \phi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + n\pi$, tomando en cuenta el cuadrante donde se encuentra z. Debe tomarse en cuenta el cuadrante, dado que $\tan\phi$ tiene período π, de modo que z y $-z$ tienen las mismas tangentes. Para evitar ambigüedades consideraremos que $0 \leq \phi < 2\pi$.

Es evidente que cada número complejo distinto de cero, tiene un conjunto infinito de valores del argumento; estos valores se diferencian entre sí en un número entero de vueltas completas, es decir en la magnitud $2k\pi$, donde k es un número entero cualquiera. Por ejemplo, los argumentos del número complejo $2+2\mathrm{i}$ son los ángulos del tipo:

$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots).$$

El valor del argumento, tomado de 0 a 2π se llama valor principal. Así por ejemplo, para el número complejo $2+2\mathrm{i}$, el valor principal del argumento es igual a $\frac{\pi}{4}$. Para el número $-2+2\mathrm{i}$, el valor principal del argumento es igual a $\frac{3\pi}{4}$. Para los números 3, -3, i, $-\mathrm{i}$, los valores principales son respectivamente 0, π, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$.

De acuerdo con (5), un número complejo puede ser representado en la forma siguiente:

$$a + b\mathrm{i} = r\cos\phi + \mathrm{i}r\operatorname{sen}\phi = r(\cos\phi + \mathrm{i}\operatorname{sen}\phi).$$

La expresión $r(\cos\phi + \mathrm{i}\operatorname{sen}\phi)$ se llama forma trigonométrica del número complejo, a diferencia de la forma $a + b\mathrm{i}$, que se llama algebraica.

Para determinar el argumento ϕ, utilizamos las fórmulas (5). En función del signo de las partes real e imaginaria, se toma el correspondiente cuadrante, en el que debe terminar el ángulo.

Ejemplo 1 Representar en forma trigonométrica el número $-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.

Solución $r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$, $\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) = -\frac{\pi}{3}$.

En este caso $a < 0$, $b > 0$ y $\phi < 0$, entonces el ángulo se encuentra en el segundo cuadrante, por lo que $\phi = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}$ y se tiene $-1 + \mathrm{i}\sqrt{3} = 2\big(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\big)$.

Ejemplo 2 Representar en forma trigonométrica el número $-1 - \mathrm{i}$.

Solución Tenemos que $r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, $\phi = \arctan\left(\frac{-1}{-1}\right) + \pi = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$, pues en este caso $a < 0$, $b < 0$ y $\phi > 0$, por lo que el ángulo ϕ está en el tercer cuadrante:

$$-1 - \mathrm{i} = \sqrt{2}\big(\cos\frac{5\pi}{4} + \mathrm{i}\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}\big).$$

Ejemplo 3 Representar en forma trigonométrica el número 1.

Solución En este caso $z = 1 + 0\mathrm{i}$, $r = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$, $\phi = \arctan\left(\frac{0}{1}\right) = 0$, entonces $1 + 0\mathrm{i} = \cos 0 + \mathrm{i}\operatorname{sen} 0 = 1$, o de otra forma $1 = \cos 2k\pi + \mathrm{i}\operatorname{sen} 2k\pi$.

8.5.1 Producto de números complejos dados en forma trigonométrica

Cuando multiplicamos los dos números complejos $z_1 = r_1(\cos\phi_1 + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\phi_1)$ y $z_2 = r_2(\cos\phi_2 + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\phi_2)$, obtenemos $z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos\phi_1\cos\phi_2 + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\phi_1\cos\phi_2 + \mathrm{i}\cos\phi_1\,\mathrm{sen}\,\phi_2 - \mathrm{sen}\,\phi_1\,\mathrm{sen}\,\phi_2)$, o sea

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\big[\cos(\phi_1+\phi_2) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\phi_1+\phi_2)\big].$$

El resultado nos muestra que el módulo del producto, es igual al producto de los módulos de los factores y el argumento del producto (no necesariamente el principal) es igual a la suma de los argumentos de los factores.

Ejemplo 4 $\big[2(\cos\phi + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\phi)\big]\big[5(\cos 2\phi + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,2\phi)\big] = 10(\cos 3\phi + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,3\phi)$.

La regla obtenida sirve para un número cualquiera de factores.

8.5.2 División de números complejos dados en forma trigonométrica

Hallemos el módulo y el argumento del siguiente cociente:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\phi_1 + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\phi_1)}{r_2(\cos\phi_2 + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\phi_2)}\,.$$

Multiplicando el numerador y el denominador del segundo miembro de la ecuación anterior, por el conjugado del denominador

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\phi_1 + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\phi_1)(\cos\phi_2 - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\phi_2)}{r_2(\cos\phi_2 + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\phi_2)(\cos\phi_2 - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\phi_2)}\,,$$

obtenemos:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\,\big[\cos(\phi_1-\phi_2) + \mathrm{i}(\mathrm{sen}\,\phi_1 - \phi_2)\big]. \tag{6}$$

Por lo tanto, el módulo del cociente es igual al cociente de los módulos del dividendo y del divisor y el argumento del cociente, es igual a la diferencia de los argumentos del dividendo y del divisor.

Utilizando esta regla se puede demostrar que:

$$(\cos\phi + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\phi)^{-1} = \frac{1}{\cos\phi + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\phi} = \frac{\cos 0 + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,0}{\cos\phi + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\phi} = \cos(-\phi) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(-\phi),$$

entonces (considerando que $(\cos(-\phi) = \cos\phi$, $\mathrm{sen}(-\phi) = -\,\mathrm{sen}\,\phi)$)

$$(\cos\phi + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\phi)^{-1} = \cos\phi - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\phi.$$

8.5.3 Potenciación de un número complejo dado en forma trigonométrica

Puesto que la n-ésima potencia (donde n es un número entero positivo), es el producto de n factores iguales, por la regla de la multiplicación de números complejos obtenemos:

$$\big[r(\cos\phi + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\phi)\big]^n = r^n(\cos n\phi + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,n\phi),$$

y después de simplificar r:

$$(\cos\phi + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\phi)^n = \cos n\phi + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,n\phi. \tag{7}$$

Esta fórmula se llama fórmula de De Moivre. Abraham De Moivre (1667–1754) matemático francés del siglo XVII, fue el primero en deducir la fórmula que lleva su nombre, pero la forma moderna de esta fórmula se debe a Leonardo Euler (1707–1783), matemático y físico suizo.

A Euler se debe la designación del símbolo i para el número $\sqrt{-1}$. Estaba seguro de la validez del Teorema Fundamental del µlgebra, que afirma que toda ecuación algebraica de grado n (con coeficientes reales o complejos) tiene n raíces (reales o complejas). Sin embargo, la comprensión completa del significado algebraico y geométrico de los números complejos, no se hizo hasta que Karl Frederich Gauss (1777–1855), astrónomo y matemático alemán, demostró que una ecuación de grado n, tiene exactamente n raíces (reales o complejas). También introdujo la noción moderna de plano complejo y la notación $z = x + \mathrm{i}y$, aunque ya el danés Casper Wessel (1745–1818), agrimensor y matemático aficionado y el suizo Jean Robert Argaud (1745–1822) habían introducido la noción geométrica de los números complejos, resultados desconocidos por Gauss.

En el caso $n = 2$: $(\cos\phi + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\phi)^2 = \cos 2\phi + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,2\phi$, o bien $\cos^2\phi - \mathrm{sen}^2\,\phi + 2\mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\phi = \cos 2\phi + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,2\phi$, donde vemos las conocidas identidades $\cos 2\phi = \cos^2\phi - \mathrm{sen}^2\,\phi$, $\mathrm{sen}\,2\phi = 2\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\phi$.

Cuando $n = 3$, tenemos que: $(\cos\phi + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\phi)^3 = \cos 3\phi + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,3\phi$.

En efecto, $\cos^3\phi - 3\cos\phi\,\mathrm{sen}^2\,\phi + \mathrm{i}(3\cos\phi^2\,\mathrm{sen}\,\phi - \mathrm{sen}^3\,\phi) = \cos 3\phi + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,3\phi$, donde $\cos 3\phi = \cos^3\phi - 3\cos\phi\,\mathrm{sen}^2\,\phi$, o bien $\cos 3\phi = 4\cos^3\phi - 3\cos\phi$, $\mathrm{sen}^3\,\phi = 3\cos^2\phi\,\mathrm{sen}\,\phi - \mathrm{sen}^3\,\phi$, o también $\mathrm{sen}^3\,\phi = 3\,\mathrm{sen}\,\phi - 4\,\mathrm{sen}^3\,\phi$.

Observación La fórmula (7), también se cumple para los exponentes enteros negativos:

$$(\cos\phi + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\phi)^{-n} = \cos(-n\phi) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(-n\phi) = \cos n\phi - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,n\phi.$$

8.5.4 Radicación de números complejos dados en forma trigonométrica

Supongamos que se quiere extraer la raíz n-ésima del número complejo $Z = r(\cos\phi + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\phi)$. Esto significa que se debe hallar un número complejo $z = \rho(\cos\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta)$, que elevado a la n-ésima potencia nos dé el número Z, es decir:

$$\big[\rho(\cos\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta)\big]^n = r(\cos\phi + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\phi) \Longrightarrow \rho^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,n\theta) = r(\cos\phi + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\phi).$$

Basándonos en la condición de igualdad de dos números complejos, deducimos que sus módulos deben ser iguales, y los argumentos se pueden diferenciar en un número múltiplo de 2π, es decir $r = \rho^n$,

$n\theta = \phi + 2k\pi$, donde k es un número entero. Así tenemos:

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \ \text{ y } \ \theta = \frac{\phi + 2k\pi}{n}\,.$$

De este modo, el resultado de la radicación se presenta de la siguiente forma:

$$z = \sqrt[n]{r}\Big(\cos\frac{\phi + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{\phi + 2k\pi}{n}\Big), \tag{8}$$

donde $\sqrt[n]{r}$ es el valor aritmético de la raíz (positivo).

Si en la fórmula (8), $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$, obtenemos los siguientes n valores de la raíz:

$$\begin{aligned}
k = 0 \Longrightarrow z_0 &= \sqrt[n]{r}\Big(\cos\frac{\phi}{n} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{\phi}{n}\Big)\\
k = 1 \Longrightarrow z_1 &= \sqrt[n]{r}\Big(\cos\frac{\phi + 2\pi}{n} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{\phi + 2\pi}{n}\Big)\\
k = 2 \Longrightarrow z_2 &= \sqrt[n]{r}\Big(\cos\frac{\phi + 4\pi}{n} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{\phi + 4\pi}{n}\Big)\\
&\vdots\\
k = n-1 \Longrightarrow z_{n-1} &= \sqrt[n]{r}\Big(\cos\frac{\phi + 2(n-1)\pi}{n} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{\phi + 2(n-1)\pi}{n}\Big).
\end{aligned}$$

Los argumentos de estos valores de la raíz, es decir, los siguientes ángulos:

$$\frac{\phi}{n}, \ \ \frac{\phi}{n} + \frac{2\pi}{n}, \ \ \frac{\phi}{n} + \frac{4\pi}{n}, \ldots, \frac{\phi}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}\,,$$

van en orden creciente; se comprueba fácilmente que cada uno de ellos es menor que 2π.

Para ello es suficiente demostrar que el mayor de ellos $\dfrac{\phi}{n} + \dfrac{2(n-1)\pi}{n} < 2\pi$. En realidad, el valor principal del argumento de un número complejo es menor que 2π, es decir $0 \leq \phi < 2\pi$ y por eso:

$$\frac{\phi}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n} < \frac{2\pi}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n} = 2\pi.$$

De la trigonometría se sabe que en una circunferencia, dos ángulos distintos no pueden tener simultáneamente valores iguales del seno y valores idénticos del coseno; por lo tanto, todos los n valores de la raíz serán distintos.

Con el aumento ulterior del número k, $(k = n, n+1, n+2, \ldots)$, ya no se obtienen nuevos valores de la raíz. Por ejemplo, para $k = n$ tenemos:

$$\begin{aligned}
z_n &= \sqrt[n]{r}\Big(\cos\frac{\phi + 2n\pi}{n} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{\phi + 2n\pi}{n}\Big) = \sqrt[n]{r}\Big(\cos\big(\frac{\phi}{n} + 2n\pi\big) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\big(\frac{\phi}{n} + 2\pi\big)\Big)\\
&= \sqrt[n]{r}\Big(\cos\frac{\phi}{n} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{\phi}{n}\Big) = z_0.
\end{aligned}$$

Hemos obtenido el mismo valor para $k = 0$. Si $k = n+1$ obtenemos z_1, para $k = n+2$ obtenemos z_2, etc.

Ejemplo 5 Calcular $\sqrt{\mathrm{i}}$.

Solución Representemos i en forma trigonométrica: $\mathrm{i} = \cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}$, $(r = 1)$, entonces

$$\sqrt{\mathrm{i}} = \sqrt{\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}} = 1\cdot\Big(\cos\Big(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2}\Big) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\Big(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2}\Big)\Big), \quad k = 0, 1.$$

Si $k = 0$, tenemos $\sqrt{\mathrm{i}} = \cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \mathrm{i})$.

Si $k = 1$, tenemos $\sqrt{\mathrm{i}} = \cos\frac{5\pi}{4} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 - \mathrm{i})$.

Notemos que la función $f(z) = \sqrt{z}$ no es una función común, es 2–valuada.

Ejemplo 6 Calcular $z = \sqrt[4]{-1}$.

Solución El módulo $r = 1$, luego $z = \sqrt[4]{\cos\pi + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\pi} = \cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi + 2k\pi}{4}$.

Si: $k = 0 \Longrightarrow z_0 = \cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \mathrm{i})$

$k = 1 \Longrightarrow z_1 = \cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + \mathrm{i})$

$k = 2 \Longrightarrow z_2 = \cos\frac{5\pi}{4} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{5\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 - \mathrm{i})$

$k = 3 \Longrightarrow z_3 = \cos\frac{7\pi}{4} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - \mathrm{i})$.

Ejemplo 7 Hallar todos los valores de la raíz cúbica de la unidad.

Solución Representemos la unidad en forma trigonométrica $1 = \cos 0 + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,0$. Según la fórmula (8), $\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{\cos 0 + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,0} = \cos\frac{0 + 2k\pi}{3} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{0 + 2k\pi}{3}$. Haciendo k igual a $0, 1, 2$ obtenemos tres valores de la raíz: $z_0 = \cos 0 + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,0$, $z_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3}$, $z_3 = \cos\frac{4\pi}{3} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{4\pi}{3}$.

Tomando en cuenta que $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, $\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, $\mathrm{sen}\,\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, resulta $z_0 = 1$; $z_1 = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$; $z_2 = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Es realmente instructivo verificar que efectivamente $\Big(-\frac{1}{2} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)^3 = 1$.

8.5.5 Resolución de la ecuación binómica

La ecuación $z^n = A$ se llama binomia. Hallemos las raíces de esta ecuación.

Si A es un número real positivo, tenemos:

$$z = \sqrt[n]{A}\big(\cos\frac{2k\pi}{n} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{2k\pi}{n}\big), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1.$$

La expresión encerrada entre paréntesis determina todos los valores de la raíz n-ésima de 1.

Si A es un número real negativo, entonces:

$$z = \sqrt[n]{|A|}\big(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi + 2k\pi}{n}\big), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1.$$

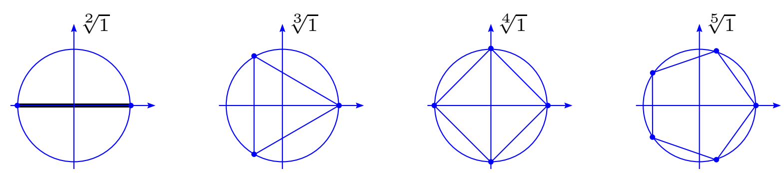
La expresión entre paréntesis da todos los valores de la raíz n-ésima de -1 (ver ejemplo 6).

Ejemplo 8 Resolver la ecuación $z^4 = 1$.

Solución Si en la fórmula $z = \sqrt[4]{\cos 2k\pi + \mathrm{i} \operatorname{sen} 2k\pi} = \cos \dfrac{2k\pi}{4} + \mathrm{i} \operatorname{sen} \dfrac{2k\pi}{4}$, $k = 0, 1, 2, 3$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
k = 0 &\Longrightarrow z_0 = \cos 0 + \mathrm{i} \operatorname{sen} 0 = 1 \\
k = 1 &\Longrightarrow z_1 = \cos \frac{2\pi}{4} + \mathrm{i} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{4} = \mathrm{i} \\
k = 2 &\Longrightarrow z_2 = \cos \frac{4\pi}{4} + \mathrm{i} \operatorname{sen} \frac{4\pi}{4} = -1 \\
k = 3 &\Longrightarrow z_3 = \cos \frac{6\pi}{4} + \mathrm{i} \operatorname{sen} \frac{6\pi}{4} = -\mathrm{i}
\end{aligned}$$

A manera de ejemplo, veamos cuáles son las raíces de la unidad ($z^n = 1$), cuando $n = 2$, 3, 4, 5. Salvo el caso $n = 2$, las raíces de la unidad van a ser los vértices de un polígono regular inscrito en un círculo de radio 1.



Ejemplo 9 Resolver en $\mathbb{C}$ la ecuación $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$.

Solución Se sabe que $z^5 + 1 = (z + 1)(z^4 - z^3 + z^2 - z + 1) = 0$, por lo que las raíces buscadas de la ecuación $z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$, son las raíces de $z^5 + 1 = 0$, con la excepción de $z = -1$. Las raíces son por lo tanto (ver gráfico anterior) $z = \cos \dfrac{(2k + 1)\pi}{5} + \mathrm{i} \operatorname{sen} \dfrac{(2k + 1)\pi}{5}$, $k = 0, 1, 3, 4$, pues $k = 2$ genera la solución $z = -1$.

Ejemplo 10 Calcular $z = \left(\dfrac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{1 + \mathrm{i}} \right)^{10}$.

Solución Se tiene que $1 + \mathrm{i}\sqrt{3} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$, $1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$, entonces $\dfrac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{1 + \mathrm{i}} = \dfrac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$, por lo que $z = 32\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5}{6}\pi} = 32\big(\cos \frac{5}{6}\pi + \mathrm{i} \operatorname{sen} \frac{5}{6}\pi\big)$ (forma algebraica).

Ejemplo 11 Sea $P(z)$ un polinomio con coeficientes reales de variable compleja, si $z_0 \in \mathbb{C}$ es una raíz de $P(z) = 0$, entonces $\bar{z}_0$ también es una raíz de $P(z) = 0$.

Solución Sea $P(z) = \sum_{i=1}^{n} a_i z^i$, entonces $P(z_0) = \sum_{i=1}^{n} a_i z_0^i = 0 \Longrightarrow 0 = \overline{P(z_0)} = \overline{\sum_{i=1}^{n} a_i z_0^i} = \sum_{i=1}^{n} \overline{a_i z_0^i} = \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i \bar{z}_0^i = \sum_{i=1}^{n} a_i \bar{z}_0^i = P(\bar{z}_0)$, entonces $P(\bar{z}_0) = 0$.

Razonando de la misma forma, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 8.5.1 *Si z_0 es una raíz múltiple de orden r del polinomio $P(z) = 0$, (es decir $P(z) =$*

$(z-z_0)^r Q(z)$, donde $Q(z)$ es el polinomio resultante de la división de $P(z)$ y $(z-z_0)^r$), entonces $\bar{z}_0$ es una raíz múltiple de orden r de $P(z)=0$.

8.6 Función exponencial con números complejos

En las diferentes partes de la matemática moderna, así como en sus aplicaciones (electrotecnia, radiotécnica, hidráulica, etc.) se utiliza la forma exponencial del número complejo, basada en la fórmula de Euler, que relaciona las funciones trigonométricas del argumento real con la función exponencial del argumento imaginario.

Definición 8.6.1 *Si a cada valor de una variable compleja z, perteneciente a cierto dominio del plano complejo, le corresponde un valor bien determinado $\omega \in \mathbb{C}$, se dice que ω es una función compleja de la variable compleja z: $\omega = f(z)$ ó $\omega = \omega(z)$.*

Mencionamos que en $\mathbb{C}$, existen las nociones de límite, de la derivada, de la integral, etc, de una función de variable compleja.

Estudiemos una función de la variable compleja, la función exponencial: $\omega = \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}$.

Por razones que aparecerán claramente más adelante, los valores complejos de la función ω se determinan del modo siguiente:

$$\omega = \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{\mathrm{i}y}, \tag{9}$$

donde $\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \cos y + \mathrm{i} \operatorname{sen} y$.

Es de suma importancia esta última representación de la función exponencial, pues evidencia una serie de resultados que se han venido demostrando, a la hora de multiplicar o elevar a potencia números complejos. De esta forma tenemos:

$$(\mathrm{e}^{\mathrm{i}y})^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}ny}, \quad (\mathrm{e}^{\mathrm{i}y})^{-n} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}ny}}, \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}(y_1+y_2)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}y_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y_2}, \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}(y_1-y_2)} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}y_1}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}y_2}}.$$

Ejemplo 12

a) $z = 1 + \frac{\pi}{4}\mathrm{i}$, $\mathrm{e}^{1+\frac{\pi}{4}\mathrm{i}} = \mathrm{e}\Big(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\Big) = \mathrm{e}\Big(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)$.

b) $z = 0 + \frac{\pi}{2}\mathrm{i}$, $\mathrm{e}^{0+\frac{\pi}{2}\mathrm{i}} = \mathrm{e}^0\Big(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\Big) = \mathrm{i}$.

c) $z = 1 + \mathrm{i}$, $\mathrm{e}^{1+\mathrm{i}} = \mathrm{e}(\cos 1 + \mathrm{i}\operatorname{sen} 1) \approx 0.54 + 0.83\mathrm{i}$.

d) $z = x$, $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}0} = \mathrm{e}^x(\cos 0 + \mathrm{i}\operatorname{sen} 0) = \mathrm{e}^x$ (función exponencial ordinaria)

8.6.1 Propiedades de la función exponencial

1) Si z_1 y z_2 son dos números complejos, entonces $\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2}$.

Demostración Sea $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$, $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$, entonces

$$\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{(x_1+\mathrm{i}y_1)+(x_2+\mathrm{i}y_2)} = \mathrm{e}^{(x_1+x_2)+\mathrm{i}(y_1+y_2)} = \mathrm{e}^{x_1}\mathrm{e}^{x_2}\big[\cos(y_1+y_2) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(y_1+y_2)\big].$$

Por otra parte, en virtud del teorema sobre el producto de dos números complejos expresados en forma trigonométrica, tenemos:

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2} &= \mathrm{e}^{x_1+\mathrm{i}y_1}\mathrm{e}^{x_2+\mathrm{i}y_2} = \mathrm{e}^{x_1}(\cos y_1 + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\, y_1)\mathrm{e}^{x_2}(\cos y_2 + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\, y_2)\\ &= \mathrm{e}^{x_1}\mathrm{e}^{x_2}\big[\cos(y_1+y_2) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(y_1+y_2)\big].\end{aligned}$$

lo que demuestra la igualdad $\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2}$.

2) De manera similar se demuestra que $\mathrm{e}^{z_1-z_2} = \dfrac{\mathrm{e}^{z_1}}{\mathrm{e}^{z_2}}$.

3) Si m es un número entero, tenemos $\left(\mathrm{e}^{z}\right)^{m} = \mathrm{e}^{mz}$, cuando $m > 0$.

La misma fórmula se obtiene si $m < 0$.

4) Demostremos la identidad $\mathrm{e}^{z+2\mathrm{i}\pi} = \mathrm{e}^{z}$.

En efecto, $\mathrm{e}^{z+2\mathrm{i}\pi} = \mathrm{e}^{z}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi} = \mathrm{e}^{z}(\cos 2\pi + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\, 2\pi) = \mathrm{e}^{z}$. De la igualdad anterior se deduce que la función exponencial $\omega = \mathrm{e}^{z}$ es una función periódica con período $2\pi\mathrm{i}$.

5) Estudiemos ahora la función compleja de argumento real $\omega = u(x) + \mathrm{i}v(x)$, donde $u(x)$ y $v(x)$ son funciones reales de la variable real x.

a) Supongamos que existen los límites $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = u(x_0)$, $\lim\limits_{x\to x_0} v(x) = v(x_0)$, entonces $u(x_0)+\mathrm{i}v(x_0) = \omega_0(x_0)$, es el límite de la variable compleja $\omega(x)$, cuando $x \to x_0$.

b) Si existen las derivadas $u'(x)$ y $v'(x)$, la expresión $\omega'_x = u'(x) + \mathrm{i}v'(x)$, es la derivada de una función compleja de variable real, con respecto al argumento real.

Estudiemos la función $\omega = \mathrm{e}^{\alpha x+\mathrm{i}\beta x} = \mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)x}$, donde α y β son constantes reales, y x es una variable real. La función ω es una función compleja de variable real, que puede escribirse así: $\omega = \mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\beta x)$.

Hallemos la derivada ω'_x. Sabemos que : $\omega'_x = (\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x)' + \mathrm{i}(\mathrm{e}^{\alpha x}\,\mathrm{sen}\,\beta x)' = \mathrm{e}^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x - \beta\,\mathrm{sen}\,\beta x) + \mathrm{i}\mathrm{e}^{\alpha x}(\alpha\,\mathrm{sen}\,\beta x + \beta\cos\beta x) = \alpha\big[\mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\beta x)\big] + \mathrm{i}\beta\big[\mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\beta x)\big] = (\alpha+\mathrm{i}\beta)\big[\mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\beta x)\big] = (\alpha+\mathrm{i}\beta)\mathrm{e}^{(\alpha x+\mathrm{i}\beta)x}$.

Así pues, si $\omega = \mathrm{e}^{\alpha+\mathrm{i}\beta x}$, entonces: $\omega' = (\alpha+\mathrm{i}\beta)\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)x}$, es decir $\left[\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)x}\right]' = (\alpha+\mathrm{i}\beta)\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)x}$.

Esto demuestra que si k es número complejo (y en particular real) y x es un número real:

$$\left[\mathrm{e}^{kx}\right]' = k\mathrm{e}^{kx}.$$

Además, $\left[\mathrm{e}^{kx}\right]'' = \left[\left(\mathrm{e}^{kx}\right)'\right]' = k\left(\mathrm{e}^{kx}\right)' = k^2\mathrm{e}^{kx}$, y para n arbitrario $\left[\mathrm{e}^{kx}\right]^{(n)} = k^n\mathrm{e}^{kx}$.

8.6.2 Fórmula de Euler

Si hacemos $x = 0$ en la fórmula (9), obtenemos $\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \cos y + \mathrm{i}\operatorname{sen} y$.

Esta es la fórmula de Euler y expresa la relación entre la función exponencial con exponente imaginario y las funciones trigonométricas. Sustituyendo y por $-y$ en la fórmula de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$ obtenemos $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y} = \cos y - \mathrm{i}\operatorname{sen} y$. De esta forma tenemos las fórmulas para el $\operatorname{sen} y$ y el $\cos y$:

$$\cos y = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y}}{2}, \qquad \operatorname{sen} y = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y}}{2\mathrm{i}}.$$

Estas fórmulas se usan en particular, para expresar las potencias de $\cos y$ y $\operatorname{sen} y$, así como sus productos, en función del seno y del coseno de arcos múltiples.

Ejemplos 13

a) $\cos^2 y = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}y} + 2 + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}y}) = \frac{1}{4}\left[(\cos 2y + \mathrm{i}\operatorname{sen} 2y) + 2 + (\cos 2y - \mathrm{i}\operatorname{sen} 2y)\right] = \frac{1}{4}(2\cos 2y + 2) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2y)$.

b) $\cos^2 y \operatorname{sen}^2 y = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y}}{2}\right)^2 \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y}}{2\mathrm{i}}\right)^2 = \frac{(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}y} - \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}y})^2}{4{\cdot}4\mathrm{i}^2} = \frac{1}{-16}(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}y} - 2 + \mathrm{e}^{-4\mathrm{i}y}) = -\frac{1}{16}(\cos 4y + \mathrm{i}\operatorname{sen} 4y - 2 + \cos(-4y) + \mathrm{i}\operatorname{sen}(-4y)) = -\frac{1}{16}(2\cos 4y - 2) = -\frac{1}{8}\cos 4y + \frac{1}{8}$.

8.6.3 Forma exponencial de un numero complejo

Escribamos un número complejo z en forma trigonométrica: $z = r(\cos\phi + \mathrm{i}\operatorname{sen}\phi)$, donde r es el módulo de z y ϕ es el argumento de este número complejo.

Según la fórmula de Euler $\cos\phi + \mathrm{i}\operatorname{sen}\phi = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$, por consiguiente, todo número complejo puede ser representado en la forma exponencial $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$.

Es importante mencionar que $|x|$ es el valor absoluto de $x \in \mathbb{R}$ y que $|\mathrm{i}y| = |y|$ es el valor absoluto de $y \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 14 Escribir los números 1, i, -2, $-\mathrm{i}$ en forma exponencial.

Solución

a) $1 = \cos 2k\pi + \mathrm{i}\operatorname{sen} 2k\pi = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2k\pi}$,

b) $\mathrm{i} = \cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$,

c) $-2 = 2(\cos\pi + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\pi) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$,

d) $-\mathrm{i} = \cos\Big(-\frac{\pi}{2}\Big) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\Big(-\frac{\pi}{2}\Big) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$.

8.6.4 Ejercicios resueltos

1) Efectuar las operaciones indicadas:

Solución

a) $(4-2\mathrm{i}) + (-6+5\mathrm{i}) = 4 - 2\mathrm{i} - 6 + 5\mathrm{i} = -2 + 3\mathrm{i}$.

b) $(-7+3\mathrm{i}) - (2-4\mathrm{i}) = -9 + 7\mathrm{i}$.

c) $(3-2\mathrm{i})(1+3\mathrm{i}) = 3(1+3\mathrm{i}) - 2\mathrm{i}(1+3\mathrm{i}) = 3 + 9\mathrm{i} - 2\mathrm{i} - 6\mathrm{i}^2 = 7\mathrm{i} + 3 - 6(-1) = 9 + 7\mathrm{i}$.

d) $\dfrac{-5+5\mathrm{i}}{4-3\mathrm{i}} = \dfrac{-5+5\mathrm{i}}{4-3\mathrm{i}} \cdot \dfrac{4+3\mathrm{i}}{4+3\mathrm{i}} = \dfrac{-20-15\mathrm{i}+20\mathrm{i}+15\mathrm{i}^2}{16-(3\mathrm{i})^2} = \dfrac{-35+5\mathrm{i}}{25} = -\dfrac{7}{5} + \dfrac{1}{5}\mathrm{i}$.

e) $\dfrac{\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3+\mathrm{i}^4+\mathrm{i}^5}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{\mathrm{i}-1-\mathrm{i}+1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\dfrac{1-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \dfrac{\mathrm{i}-\mathrm{i}^2}{1-\mathrm{i}^2} = \dfrac{\mathrm{i}+1}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$.

f) $|3-4\mathrm{i}||4+3\mathrm{i}| = \sqrt{3^2+(-4)^2} \cdot \sqrt{4^2+3^2} = 5 \cdot 5 = 25$.

g) $\left|\dfrac{1}{1+3\mathrm{i}} - \dfrac{1}{1-3\mathrm{i}}\right| = \left|\dfrac{1-3\mathrm{i}}{1-9\mathrm{i}^2} - \dfrac{1+3\mathrm{i}}{1-9\mathrm{i}^2}\right| = \left|\dfrac{-6\mathrm{i}}{10}\right| = \sqrt{\dfrac{36}{100}} = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$.

2) Si z_1 y z_2 son dos números complejos, demostrar que $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

Solución Sean $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$, $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$, entonces $|z_1 z_2| = |x_1 + \mathrm{i}y_1||x_2 + \mathrm{i}y_2| =$ $|x_1x_2 - y_1y_2 + \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1)| = \sqrt{(x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2} = \sqrt{x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2} =$ $\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)} = \sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2} = |x_1 + \mathrm{i}y_1||x_2 + \mathrm{i}y_2| = |z_1||z_2|$.

Otra forma más sencilla de establecer este resultado es la siguiente: $|z_1z_2|^2 = z_1z_2\bar{z_1}\bar{z}_2 = z_1\bar{z}_1\, z_2\bar{z}_2 =$ $|z_1|^2\,|z_2|^2 \Longrightarrow |z_1z_2| = |z_1||z_2|$.

3) Resolver $x^3 - 2x - 4 = 0$.

Solución Factorizando $x^3 - 2x - 4 = 0$ tenemos $(x-2)(x^2+2x+2) = 0$. Las soluciones de la ecuación de segundo grado son: $x_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4\mathrm{i}^2}}{2} = \dfrac{-2 \pm 2\mathrm{i}}{2} = -1 \pm \mathrm{i}$.

El conjunto de soluciones es $S = \{2, -1+\mathrm{i}, -1-\mathrm{i}\}$.

4) Expresar en forma polar a) $3 + 3\mathrm{i}$, b) $-1 + \sqrt{3}\mathrm{i}$, c) -1, d) $-2 - 2\sqrt{3}\mathrm{i}$.

Solución Recordar que $z = x + \mathrm{i}y = r(\cos\phi + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\phi)$, es la forma polar (forma trigonométrica) del número complejo, donde r y ϕ son las llamadas coordenadas polares.

a) $z = 3 + 3\mathrm{i}$. El argumento $\phi = \arctan\dfrac{3}{3} = \dfrac{\pi}{4}$, el módulo $r = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2}$, entonces $3 + 3\mathrm{i} = 3\sqrt{2}\big(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}\big) = 3\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ (esta última expresión por la fórmula de Euler).

b) $z = -1 + \sqrt{3}\mathrm{i}$. El argumento $\phi = \arctan\dfrac{\sqrt{3}}{-1} = \dfrac{2\pi}{3}$, el módulo $r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$, entonces $-1+\sqrt{3}\mathrm{i} = 2\big(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3}\big) = 2e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.

c) $z = -1$. El argumento $\phi = \pi$, el módulo $r = |-1| = 1$, entonces $-1 = 1\big(\cos\pi + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\pi\big) = e^{\mathrm{i}\pi}$.

d) $z = -2-2\sqrt{3}\mathrm{i}$. El argumento $\phi = \arctan\frac{-2\sqrt{3}}{-2} = \frac{4\pi}{3}$ y el módulo $r = \sqrt{(-2)^2+(-2\sqrt{3})^2} = 4$, entonces $-2-2\sqrt{3}\mathrm{i} = 4\big(\cos\frac{4\pi}{3} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{4\pi}{3}\big) = 4e^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}$.

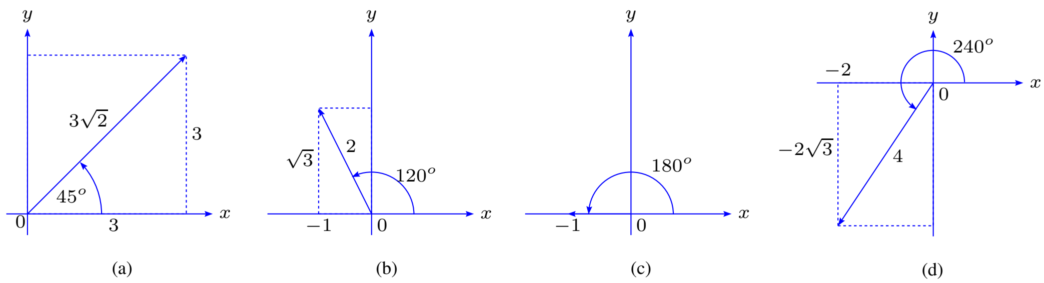


Figura 5

5) Calcular a) $(-1+\sqrt{3}\mathrm{i})^{10}$, b) $(-1+\mathrm{i})^{\frac{1}{3}}$.

Solución

a) Por el problema 4.b) y el teorema de De Moivre tenemos:

$(-1+\sqrt{3}\mathrm{i})^{10} = \Big[2\Big(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3}\Big)\Big]^{10} = 2^{10}\Big(\cos\frac{20\pi}{3} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{20\pi}{3}\Big) = 2^{10}\Big[\cos\big(\frac{2\pi}{3}+6\pi\big) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\big(\frac{2\pi}{3}+6\pi\big)\Big] = 2^{10}\Big[\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3}\Big] = 2^{10}\Big[-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\Big] = -512+512\sqrt{3}\mathrm{i}.$

b) $-1+\mathrm{i} = \sqrt{2}(\cos 135^o + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,135^o) = \sqrt{2}(\cos(135^o+360^ok) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(135^o+360^ok))$, entonces $(-1+\mathrm{i})^{\frac{1}{3}} = (\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}\Big[\cos\Big(\frac{135^o+360^ok}{3}\Big) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\Big(\frac{135^o+360^ok}{3}\Big)\Big]$.

Los resultados para $k = 0,1,2$ son:

$$\sqrt[6]{2}(\cos 45^o + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,45^o) = \sqrt[6]{2}(\tfrac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\,\tfrac{1}{\sqrt{2}})$$

$$\sqrt[6]{2}(\cos 165^o + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,165^o) = \sqrt[6]{2}(-\tfrac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2}) + \mathrm{i}\,\tfrac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2}))$$

$$\sqrt[6]{2}(\cos 285^o + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,285^o) = \sqrt[6]{2}(\tfrac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2}) - \mathrm{i}\,\tfrac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})).$$

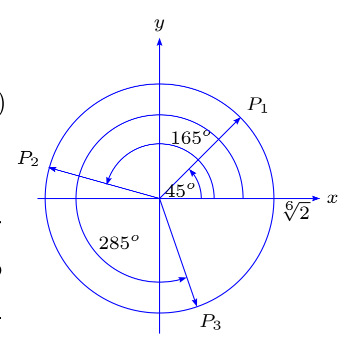
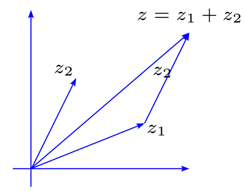


Figura 6

Los resultados para $k = 3,4,5,6,\ldots$ son repeticiones de los anteriores. Estas raíces complejas se representan geométricamente en el plano complejo por los puntos P_1, P_2, P_3 del círculo de la Figura 6. Los puntos $P_1P_2P_3$ forman un triángulo equilátero.

8.7 Desigualdad triangular – Regiones en el plano complejo

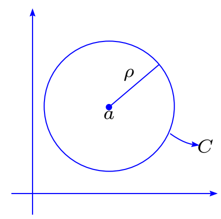


Sean z_1 y $z_2 \in \mathbb{C}$, entonces tenemos que $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

En efecto, $|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2) = |z_1|^2+2\mathfrak{Re}(z_1 z_2)+|z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$, usando que $|\mathfrak{Re}(z)| \leq |z|$.

De manera general se tiene que si $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, entonces $|z_1 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + \cdots + |z_n|$.

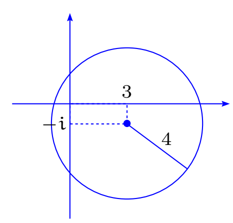
Es importante destacar que la distancia entre dos números complejos z y a se obtiene por $|z - a|$, lo que permite describir la circunferencia de centro a y radio ρ, por $|z - a| = \rho$, $z \in \mathbb{C}$.



En consecuencia, $|z - a| < \rho$ se cumple para todos los puntos del interior del círculo. Una región de este tipo se conoce como disco circular abierto, en contraste con el disco circular cerrado, formado por los puntos que satisfacen $|z - a| \leq \rho$ y que consta del interior y la circunferencia C.

De manera similar la desigualdad $|z - a| > \rho$ representa el exterior del círculo.

Ejemplo Determinar en el plano complejo, el conjunto de puntos que satisfacen la desigualdad $|z - 3 + \mathfrak{i}| \leq 4$.



Solución El conjunto es:

$$A = \{z \in \mathbb{C}/z = x + \mathfrak{i}y,\ \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} \leq 4\}.$$

Es un disco circular cerrado con centro $3 - \mathfrak{i}$ y radio 4.

8.8 Series en el campo de los números complejos

Consideremos la serie de números complejos $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1+z_2+\cdots+z_n+\cdots$, donde $z_n = x_n+\mathfrak{i}y_n$.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es convergente, si y sólo si son convergentes las series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots\ , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} y_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n + \cdots$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ se dice absolutamente convergente, si es convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| + \cdots$

Las series $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$, son series de términos reales y el problema de la convergencia de estas series se resuelve mediante los criterios conocidos de convergencia de las series en el conjunto de los números reales.

Observación 1 En la definición de la función exponencial, la función $\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}$ se determina por:

$$\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^{x}(\cos y + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\, y).$$

Cuando $x = 0$, obtenemos la fórmula de Euler $\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \cos y + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\, y$.

Si escribimos la función exponencial mediante la fórmula:

$$\mathrm{e}^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

obtenemos la misma igualdad de Euler.

En efecto, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = 1 + \mathrm{i}y + \frac{(\mathrm{i}y)^2}{2!} + \frac{(\mathrm{i}y)^3}{3!} + \cdots + \frac{(\mathrm{i}y)^n}{n!} + \cdots$. Tomando en consideración que $\mathrm{i}^2 = -1$, $\mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$, $\mathrm{i}^4 = 1$, $\mathrm{i}^5 = \mathrm{i}$, $\mathrm{i}^6 = -1$,... tenemos que:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = 1 + \mathrm{i}y - \frac{y^2}{2!} - \frac{\mathrm{i}y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + + \frac{\mathrm{i}y^5}{5!} - \cdots$$

y separando en esta serie las partes real e imaginaria, obtenemos:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \underbrace{\left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \cdots\right)}_{\cos y} + \mathrm{i}\underbrace{\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \cdots\right)}_{\mathrm{sen}\, y}$$

Se concluye entonces que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \cos y + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\, y$.

Ejemplo Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n}}{n^2}$.

Solución Se tiene que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}n} = \cos n + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\, n$, por lo tanto el problema de la convergencia de la serie se reduce al problema de la convergencia de las siguientes series de términos reales $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}\, n}{n^2}$. Cada una de estas series es absolutamente convergente, por lo que la serie es absolutamente convergente.

Ejemplo Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}}}{n}$.

Solución Dado que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}} = \cos\frac{\pi}{n} + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{n}$, se tiene que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n}$ es divergente, pues $\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n} \sim \frac{1}{n}$, en tanto que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}\frac{\pi}{n}}{n}$ es convergente, ya que $\frac{\mathrm{sen}\frac{\pi}{n}}{n} \sim \frac{\pi}{n^2}$. Así, la serie estudiada diverge.

8.8.1 Series de potencias

Una serie de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots$, donde c_0, c_1, c_2,..., son números complejos y z es la variable compleja, se llama serie de potencias en el conjunto de los números complejos.

Teorema 8.8.1 Teorema de Abel *Si una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ es convergente para $z = z_0$, entonces converge absolutamente, para todos los valores de z que cumplan la condición $|z| < |z_0|$. Si la serie es divergente para $|z| = |z_0|$, entonces también es divergente para cualquier valor de z, que cumpla la condición $|z| > |z_0|$.*

La región de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ es un círculo con centro en el origen de coordenadas. El radio de convergencia de la serie de potencias se determina por las fórmulas siguientes:

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}\,, \quad (c_n \neq 0) \quad \text{o} \quad R = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}\,.$$

Ejemplo Determinar el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \cos(\mathrm{i}n) z^n$.

Solución Se tiene que $c_n = \cos(\mathrm{i}n) = \dfrac{\mathrm{e}^{-n} + \mathrm{e}^{n}}{2} = \cosh n$, para hallar el radio de convergencia, aplicamos la fórmula $R = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{n} + \mathrm{e}^{-n}}{\mathrm{e}^{n+1} + \mathrm{e}^{n+1}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1 + \mathrm{e}^{-2n}}{\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-2n-1}} = \mathrm{e}^{-1}$. En conclusión: $R = \mathrm{e}^{-1}$.

Ejemplo Hallar el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} (1+\mathrm{i})^n z^n$.

Solución Hallamos el módulo del coeficiente c_n: $|c_n| = |(1+\mathrm{i})^n| = |1+\mathrm{i}|^n = (\sqrt{2})^n = 2^{\frac{n}{2}}$. Para determinar R, calculamos $R = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{2^{\frac{n}{2}}}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

8.9 Funciones trigonométricas

Gracias a la fórmula de Euler podemos escribir $\cos x = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}$, $\operatorname{sen} x = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}$. Estas fórmulas sugieren dar las definiciones siguientes para los valores complejos $z = x + \mathrm{i}y$:

$$\cos z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}\,, \quad \operatorname{sen} z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}\,. \tag{10}$$

Sustituyendo la definición de $\mathrm{e}^z = 1 + z + \dfrac{1}{2!}z^2 + \dfrac{1}{3!}z^3 + \cdots$ se tiene que:

$$\cos z = 1 - \frac{1}{2!}\,z^2 + \frac{1}{4!}\,z^4 - \cdots\,, \quad \operatorname{sen} z = z - \frac{1}{3!}\,z^3 + \frac{1}{5!}\,z^5 - \cdots$$

Cuando la variable $z = x$ es real obtenemos los conocidos desarrollos de Taylor del $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$.

Se observa que de (10), obtenemos que $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$.

De manera similar que en el caso real, de pueden definir las otras funciones trigonométricas de variable compleja por: $\tan z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}$, $\operatorname{cotan} z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}$, $\sec z = \frac{1}{\cos z}$, $\csc z = \frac{1}{\operatorname{sen} z}$.

Las funciones $\tan z$, $\csc z$, $\operatorname{cotan} z$ son impares, en tanto que las restantes son pares:

$\cos(-z) = \cos z$	$\operatorname{cotan}(-z) = -\operatorname{cotan} z$	$\sec(-z) = \sec z$
$\tan(-z) = -\tan z$	$\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z$	$\csc(-z) = -\csc z$

Dado que la función exponencial compleja es periódica, también son periódicas las funciones trigonométricas:

$\cos(z \pm 2n\pi) = \cos z$ $\quad$ $\operatorname{sen}(z \pm 2n\pi) = \operatorname{sen} z$ $\quad$ $\tan(z \pm n\pi) = \tan z$

$\operatorname{cotg}(z \pm n\pi) = \operatorname{cotg} z$ $\quad$ $n = 0, 1, 2, \ldots$

y $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2$, $\operatorname{sen}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{sen} z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \operatorname{sen} z_2$.

También la fórmula de Euler es válida para cualquier número complejo:

$$e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z.$$

8.9.1 Representación en términos de funciones reales

Es posible representar con facilidad $\cos z$ y $\operatorname{sen} z$ en términos de funciones reales.

En efecto, sabemos que:

$$\cos(x + iy) = \cos x \cos iy - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} iy,$$

$$\operatorname{sen}(x + iy) = \operatorname{sen} x \cos iy + \cos x \operatorname{sen} iy,$$

Ahora bien,

$$\cos iy = \frac{e^{i(iy)} + e^{-i(iy)}}{2} = \frac{e^{-y} + e^{y}}{2} = \cosh y,$$
$$\operatorname{sen} iy = \frac{e^{i(iy)} - e^{-i(iy)}}{2i} = \frac{e^{-y} - e^{y}}{2i} = i \operatorname{senh} y,$$

con lo cual tenemos:

$$\cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y,$$

$$\operatorname{sen}(x + iy) = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y,$$

fórmulas que resultan muy útiles para el cálculo de $\cos z$ y $\operatorname{sen} z$.

8.10 Funciones hiperbólicas

El seno y el coseno hiperbólicos de variable compleja z se definen mediante las siguientes fórmulas:

$$\cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{senh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}.$$

De esta forma tenemos que:

$$\cosh z = \cos iz, \quad \operatorname{senh} z = -i \operatorname{sen} iz.$$

Al igual que en el caso real, se definen:

$$\tanh z = \frac{\operatorname{senh} z}{\cosh z}, \qquad \operatorname{cotg} z = \frac{\cosh z}{\operatorname{senh} z}, \qquad \operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z}, \qquad \operatorname{csch} z = \frac{1}{\operatorname{senh} z}.$$

8.11 La función logaritmo

En el estudio de la función exponencial, es útil también estudiar la inversa. La función inversa de la función exponencial la llamamos función logaritmo.

El logaritmo de $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, denotada por $\ln z$ (o bien $\log z$), se define de la siguiente manera: $w = u + \mathrm{i}v = \ln z$, si w es *una* raíz de la ecuación $\mathrm{e}^w = z$.

Notemos que para los números reales, no siempre existe el logaritmo real. Así por ejemplo, los números negativos no tienen logaritmo. Si embargo, en lo referente a los números complejos distintos de 0, el logaritmo siempre existe.

Observemos que si $w = u + \mathrm{i}v \neq 0$, $\mathrm{e}^w = \mathrm{e}^u\mathrm{e}^{\mathrm{i}v} = z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ es equivalente a $\mathrm{e}^u = |z|$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}v} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, es decir $u = \ln|z|$ y $v = \theta = \arg(z)$.

Claramente la solución $u = \ln|z|$ es única; sin embargo $v = \theta = \arg(z)$ tiene una infinidad de soluciones que difieren por múltiplos de 2π. Si se restringe el ángulo θ al intervalo $0 \leq \theta < 2\pi$, tenemos que las soluciones u, v es únicas. $u + \mathrm{i}v$ la llamaremos valor principal del $\ln z$.

Así tenemos que,

$$\ln z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg(z) = \ln\sqrt{x^2+y^2} + \mathrm{i}\arg(x+\mathrm{i}y). \tag{11}$$

Puesto que el argumento de z está determinado salvo por múltiplos de 2π, el logaritmo tiene una infinidad de valores. La relación (11) debe considerarse como determinación del número $\ln z$, que aunque motivados por la equivalencia entre $\mathrm{e}^w = z$ y $\ln z = w$ en el caso real, no son equivalentes en el caso complejo, para los cuales la expresión $\ln z$ no ha tenido sentido anteriormente. La utilidad de esta determinación está relacionada con que para $\arg(z) = 0$, es decir en el caso en que z es un real positivo, la igualdad (11) conduce al concepto común de logaritmo, en el que se tiene $\mathrm{e}^{\ln z} = z$.

En conclusión, llegamos a un nuevo concepto de logaritmo que es más amplio que el concepto de logaritmo en el caso real. En particular, la fórmula que venimos de considerar para el logaritmo complejo, permite determinar el logaritmo de un número negativo, evaluación que era prohibida en $\mathbb{R}$.

En efecto, $-1 = \cos\pi + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\pi = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$, por lo que $\ln(-1) = \mathrm{i}\pi$, o de manera general si $z = -a$, $a > 0$, $\ln(-a) = \ln a + \mathrm{i}\pi$.

Finalmente, tenemos que en $\mathbb{C}$ son válidas las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \ln(z_1z_2) &= \ln z_1 + \ln z_2, & \ln\frac{z_1}{z_2} &= \ln z_1 - \ln z_2,\\ \arg(z_1z_2) &= \arg z_1 + \arg z_2, & \arg\frac{z_1}{z_2} &= \arg z_1 - \arg z_2, \end{aligned}$$

en el sentido en que ambos lados representan una infinidad de números complejos, es decir en donde las fórmulas que hacen intervenir el ángulo θ del número complejo, puede sustituirse por $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, lo que evidencia de forma más clara el por qué el logaritmo tiene una infinidad de valores y no sólo uno. De esta forma la manera correcta de expresar la respuesta, en el caso de logaritmos de números complejos es:

$$\ln(-1) = \mathrm{i}(2k+1)\pi, \quad \ln(-a) = \ln a + \mathrm{i}(2k+1)\pi,\ a > 0,\ k \in \mathbb{Z}.$$

8.12 La función potencia

Señalemos que la función logaritmo permite elevar cualquier número complejo distinto de 0, a potencia de cualquier número complejo. En efecto, la potencia compleja c de un número complejo z se define por medio de la fórmula:

$$z^c = \mathrm{e}^{c \ln z}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

Puesto que $\ln z$ tiene una infinidad de valores, en general z^c tendrá varios valores.

Si $n \in \mathbb{Z}^*$, tenemos que z^n tiene un sólo valor y es igual a la n-ésima potencia usual de z.

Si $c = \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{Z}^*$, tenemos que $z^c = \sqrt[n]{z} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln z}$, $z \neq 0$, el exponente está determinado por múltiplos de $2\pi\mathrm{i}/n$ y se obtienen n valores distintos de la raíz n-ésima.

Si $c = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, tenemos que z^c tiene un número finto de valores y si $c \in \mathbb{I}$, es decir es irracional real o c es un numero complejo no real, entonces z^c tiene una infinidad de valores.

Ejemplo Determinar i^{i}.

Solución Sabemos que $\mathrm{i}^{\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ln \mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}+2k\pi)\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)} \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$.

8.12.1 Ejercicios

1. Exprese en la forma $x + \mathrm{i}y$, con x, $y \in \mathbb{R}$:

   a) $(3-\mathrm{i}) - (4+2\mathrm{i})$ b) $(2+\mathrm{i})(3+\mathrm{i}\sqrt{2})$ c) $(1-\mathrm{i})^{-1}$ d) $\left(\dfrac{-1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)^3$

   e) $(2+\mathrm{i})/(3-\mathrm{i})$ f) $(1-\mathrm{i}\sqrt{2})(5\mathrm{i}\,\overline{\ }-3)$ g) $(4-3\mathrm{i})^{-3}$ h) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$.

2. Grafique en el plano complejo, el conjunto de puntos que satisfacen

   a) $|z+1| = 2$ b) $\mathfrak{Re} z \geq 2$ c) $\mathfrak{Im} z \leq 1$

   d) $|2z-1| \leq 1$ e) $|z-5| > 5$ f) $|z+1| + |z-1| = 5$.

3. Muestre que para todo $z \in \mathbb{C}$,

a) $z - \bar{z} = 2\mathrm{i}\mathfrak{Im} z$

b) $|\mathfrak{Im} z| \leq |z|$

c) $|\mathfrak{Re} z| \leq |z|$

d) $|z| \leq |\mathfrak{Re} z| + |\mathfrak{Im} z|$.

4. Determinar y trazar las gráficas de los lugares geométricos representados por:

a) $|z| \leq 1$

b) $\mathfrak{Re}(z) \geq -2$

c) $\arg(z) < \frac{\pi}{2}$

d) $|z-1| + |z+1| = 3$

e) $\left|\frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right| = 1$.

5. Halle todas las raíces de los siguientes polinomios:

a) $p(z) = z^4 - 1$

b) $p(z) = z^4 + 5z^2 + 4$

c) $p(z) = z^3 + 3\mathrm{i}z^2 - 3z - \mathrm{i}$

d) $p(z) = z^3 - 7z + 6$

e) $p(z) = z^3 + z^2 + z + 1$

f) $p(z) = \mathrm{i}z^2 - 2z + 1 + \mathrm{i}$

g) $p(z) = z^6 - 64$

h) $p(z) = z^5 + \mathrm{i}$

i) $p(z) = z^4 + 3z^2 + 4$.

6. Demuestre que para $z = x + \mathrm{i}y$, $|z| \leq |x| + |y| \leq 2|z|$.

7. Sean z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$, determinar el lugar geométrico de los puntos $\alpha z_1 + \beta z_2$, donde α, $\beta \in \mathbb{R}^+$, $\alpha + \beta = 1$.

8. Analizar la convergencia de las siguientes series:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\mathrm{i}n)}{2^n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,\mathrm{sen}(\mathrm{i}n)}{3^n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\mathrm{i}n^2)}{5n^2}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2n}}{n\sqrt{n}}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{p}{n}}}{\sqrt{n}}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+\mathrm{i})^n}{2^{\frac{2}{n}}\cos(\mathrm{i}n)}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{senh}\,(\mathrm{i}\sqrt{n})}{\mathrm{sen}(\mathrm{i}n)}$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\mathrm{senh}\,(\mathrm{i}n)}$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh(\mathrm{i}\frac{\pi}{n})}{n^{\ln n}}$

Respuestas a) Divergente b) Convergente c) Divergente d) Convergente e) Divergente f) Convergente g) Convergente h) Divergente i) Convergente.

9. Determinar los radios de convergencia de las siguientes series:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n} z^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}} z^n$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{1-\mathrm{i}}\right)^n$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{\mathrm{i}n}\right)^n$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \cosh\left(\frac{\mathrm{i}}{n}\right) z^n$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\ln(\mathrm{i}n)}$

g) $\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{i}^n z^n$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{sen}\left(\mathrm{i}\frac{\pi}{n}\right) z^n$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos^n\left(\mathrm{i}\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right) z^n$

j) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\mathrm{senh}^{\,n}(n+\mathrm{i})}$

k) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+\mathrm{i}) z^n$.

Respuestas a) $R=1$, b) $R=1$, c) $R=\sqrt{2}$, d) $R=\infty$, e) $R=1$, f) $R=1$, g) $R=1$, h) $R=1$, i) $R=1$, j) $R=\infty$, k) $R=1$.

10. Determinar:

a) $\cos(1+\mathrm{i})$ b) $\cos 10\mathrm{i}$ c) $\cosh \mathrm{i}$ d) $\operatorname{senh}\, \mathrm{i}$.

11. Determinar todas las soluciones de las ecuaciones siguientes:

a) $\cos z = 5$ b) $\operatorname{sen} z = \cosh 3$ c) $\operatorname{sen} z = \mathrm{i} \operatorname{senh}\, 1$

d) $\cosh z = \frac{1}{2}$ e) $\cosh z = 0$.

12. Determinar los valores de z para los cuales:

a) $\cos z$ es real b) $\operatorname{sen} z$ es real.

13. Demostrar que $\cos^4 \theta = \frac{1}{8}(\cos 4\theta + 4\cos 2\theta + 3)$.

14. Verificar que:

a) $\cosh z = \cosh x \cos y + \mathrm{i} \operatorname{senh}\, x \operatorname{sen} y$

b) $\operatorname{senh}\, z = \operatorname{senh}\, x \cos y + \mathrm{i} \cosh x \operatorname{sen} y$

c) $\tanh$ es periódica de período $\mathrm{i}\pi$

d) $\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1$

e) $|\cos z|^2 = \operatorname{senh}^2 y + \cos^2 x = \cosh^2 y - \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2y + \cos 2x)$

f) $|\operatorname{sen} z|^2 = \operatorname{senh}^2 y + \operatorname{sen}^2 x = \cosh^2 y - \cos^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2y - \cos 2x)$.

15. Determinar todos los valores de las expresiones dadas:

a) $\ln 1$ b) $\ln \mathrm{e}$ c) $\ln(-\mathrm{e}^2)$ d) $\ln \mathrm{e}^{-2}$

e) $\ln(\mathrm{i}\mathrm{e})$ f) $\ln(-\mathrm{i}\mathrm{e})$ g) $\ln(\mathrm{e}^{\mathrm{i}})$ h) $\ln(-\mathrm{e}^{\mathrm{i}})$.

16. Determinar $\ln z$, cuando z es igual a:

a) $1+\mathrm{i}$ b) $2-2\mathrm{i}$ c) -5 d) $-2-\mathrm{i}\sqrt{12}$.

17. Resolver las ecuaciones siguientes para $z \in \mathbb{C}$:

a) $\ln z = \frac{1}{2}\pi\mathrm{i}$ b) $\ln z = 2 + \frac{1}{4}\pi\mathrm{i}$ c) $\ln z = \frac{1}{2} + \pi\mathrm{i}$ d) $\ln z = (2 - \frac{1}{2}\mathrm{i})\pi$.

18. Demostrar que $\mathrm{e}^{\ln z} = z$, $\ln \mathrm{e}^z = z \pm 2n\mathrm{i}\pi$, $n \in \mathbb{N}$, para todo $z \in \mathbb{C}$.