Contenidos

1 Ejercicios de límites y continuidad Prof. Pedro Rodríguez 1

2 Ejercicios de derivación Prof. Pedro Rodríguez 17

3 Ejercicios de Razones de Cambio Relacionadas, Teoremas de Rolle y Valor Medio Prof. Pedro Rodríguez 29

4 Ejercicios de Aplicaciones de la derivada y Trazado de curvas y Optimización Prof. Pedro Rodríguez 43

5 Ejercicios de antiderivadas Prof. Pedro Rodríguez 63

6 Ejercicios de Funciones Exponenciales, Logarítmicas y Trigonométricas Inversas Prof. Pedro Rodríguez 75

7 Ejercicios de cálculo de áreas y volúmenes Prof. Jorge Poltronieri 87

8 Ejercicios de Integrales: I Parte Prof. Jorge Poltronieri 107

Tema No. 1

Ejercicios de límites y continuidad Prof. Pedro Rodríguez

Calcular los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{t\to -1} \dfrac{t+1}{t^3-t}$. R/$\frac{1}{2}$.

2. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(1+h)^2-1}{h}$. R/2.

3. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-x-2}{x^2+3x+2}$. R/−3.

4. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^4-3x^2-4}{3x^3-10x-4}$. R/$\frac{10}{13}$.

5. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{3x^5-7x^2-5x+5}{2x^4+3x+1}$. R/$-\frac{24}{5}$.

6. $\lim\limits_{x\to -8} \dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{8}}{\sqrt[3]{x}+2}$. R/$-\frac{3}{16}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+cx}-1}{x}$. R/$\frac{c}{3}$.
   (Aplique la fórmula de diferencia de cubos o use la sustitución $t = \sqrt[3]{1+cx}$).

8. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$. R/$\frac{2}{3}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|2x-1|-|2x+1|}{x}$. R/−4.

10. Determine los valores de a y b para que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{ax+b}-2}{x} = 1$. R/$a = b = 4$.

11. Si $2x-1 \le f(x) \le x^3$ para $0 \le x \le 3$, calcule $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$. R/1.

12. $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \cos \dfrac{1}{x^2}$. R/0.

13. $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x-3}{x^2-4}$. R/$-\infty$.

14. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2-x}{(x-2)^3}$. R/$-\infty$.

15. $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\sqrt{2x}(x-1)}{|x-1|}$. R/$-\sqrt{2}$.

16. Si $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 4x}$. Calcule:

a) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$. R/$\frac{1}{8}$.

b) $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$. R/$+\infty$.

c) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$. R/$+\infty$.

d) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$. R/0.

e) ¿Qué puede afirmarse de $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$? R/ No existe.

17. $\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{(x+3)|x+2|}{x+2}$. R/$-1$.

18. Si $f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si } x < 2 \\ 2 & \text{si } x = 2 \\ \frac{1}{2}x & \text{si } x > 2. \end{cases}$

a) Grafique la función f.

b) Calcule $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ y $f(2)$. R/1 , 2.

c)$\lim\limits_{x \to 1} f(x)$. R/2.

19. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} kx}{x}$, k pertenece a $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. R/$k$.

20. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 5x}$. R/$\frac{2}{5}$.

21. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{\tan 3x}$. R/$\frac{2}{3}$

22. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} h)}{\operatorname{sen} h}$. R/1.

23. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - x + \operatorname{sen} x}{2x}$. R/0.

24. $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(1 - \cos t)}{1 - \cos t}$. R/1.

25. $\lim\limits_{\alpha \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{sen} 2\alpha}{2\alpha - \pi}$. R/$-1$.

26. $\lim\limits_{\alpha \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{\cos(2\alpha + \frac{\pi}{6})}{\operatorname{sen}(6\alpha)}$. R/$\frac{1}{3}$.

27. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x^3 - 2x + 3}{3x^3 + 3x^2 - 5x}$. R/$-\frac{2}{3}$.

28. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^4}{x^3 + 1}$. R/$-\infty$.

29. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^{5/3} - x^{1/3} + 7}{x^{8/3} + 3x + \sqrt{x}}$. R/0.

30. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{x^2 - x}$. R/$+\infty$.

31. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x-1} - \sqrt{x^2-x}$. R/1.

32. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x}$. R/0.

33. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}}$. R/1.

34. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{-1} + x^{-4}}{x^{-2} - x^{-3}}$. R/$+\infty$.

35. Hallar los valores de a tales que la función definida a continuación sea continua en los reales: $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \le a \\ x^2 & \text{si } x > a. \end{cases}$ R/$a = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

36. ¿Existe $c \in \mathbb{R}$ tale que la función definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}^2(3x)}{x^2} & \text{si } x \ne 0 \\ c & \text{si } x = 0, \end{cases}$

sea continua en $\mathbb{R}$? R/$c = 9$.

37. ¿Existe $b \in \mathbb{R}$ tal que la función definida por $f(x) = \begin{cases} x+b & \text{si } x < 0 \\ \cos x & \text{si } x \ge 0, \end{cases}$

sea continua en $x = 0$? R/$b = 1$.

38. Determine los valores de a, b, c de tal modo que la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ 2x + c & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

sea continua en $\mathbb{R}$? R/$a \in \mathbb{R}$, $b = c = 1$.

39. Demuestre que la ecuación $2x^3 + x^2 + 2 = 0$ tiene una solución en $[-2, -1]$.

40. Un *punto fijo* de una función f es un número c tal que $f(c) = c$.

a) Dibuje una función f continua cuyo dominio y ámbito es $[0, 1]$. Localice un punto fijo de f.

b) Intente graficar una función continua con dominio y ámbito $[0, 1]$, que no tenga un punto fijo. ¿Cuál es el obstáculo?

c) Aplique el teorema del valor intermedio para probar que cualquier función continua con dominio y rango $[0, 1]$ debe tener un punto fijo.

41. Calcule los siguientes límites

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{25x^3 + 2}{75x^7 - 2}$

b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2-3x+1}{x-1}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-a^2}{x^2+2ax+a^2}$, $a\neq 0$

e) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2-a^2}{x^2+2ax+a^2}$, $a\neq 0$

f) $\lim\limits_{a\to 0} \dfrac{x^2-a^2}{x^2+2ax+a^2}$, $x\neq 0$

g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-1}{x-1}$

h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x+1)^2-1}{x}$

i) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|x|}{x}$

j) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x|}{x}$

k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$

l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x^2}$

m) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

n) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+8}{x^2-4}$.

42. Encuentre $a\in\mathbb{R}$ para que cada una de las siguientes funciones sean continuas.

a) $f(x)=\begin{cases} \operatorname{sen} x & x\leq 1 \\ ax+1 & x>1. \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} 2\cos x & x\leq -2 \\ ax^2+1 & x>-2. \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & x\leq 3 \\ x^2+a & x>3. \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} x^3-a^2x+2a & x\leq -1 \\ x-1 & x>-1. \end{cases}$

e) $f(x)=\begin{cases} -1 & |x|\geq 1 \\ -ax^2 & |x|<1. \end{cases}$

f) $f(x)=\begin{cases} |x| & x\leq 1. \\ \dfrac{x^2}{2}+a & x>1. \end{cases}$

43. Calcule los siguientes límites

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 2x}{\operatorname{sen} 2x}$.

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} x}$.

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5x-\operatorname{sen} 3x}{x}$.

e) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} a}{x-a}$.

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

g) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x}$.

h) $\lim\limits_{x\to 0} x\csc^2 x$.

i) $\lim\limits_{x\to 0} x^2\csc^2 x$.

j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 3x}{x}$.

k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2+4x}$.

l) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2-9)}{x-3}$.

44. Calcule los siguientes límites

a) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{2-x}$.

b) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{2-x}$.

c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{(2-x)^2}$.

d) $\lim\limits_{x\to 5^+} \dfrac{x+3}{x^2-25}$.

e) $\lim\limits_{x\to 2} \left|\dfrac{x^2+4}{x-2}\right|$.

f) $\lim\limits_{x\to 0^-} \left(\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{x}\right)$.

g) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x+1}{x}$.

h) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^4}-\dfrac{1}{x}\right)$.

i) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^3}\right)$.

j) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x^3-2x}{2x^3+3}$.

k) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{|x|}{x}$.

l) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^3+2x}{x^2-3}$.

m) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2-x+1}{x^3+3x-2}$.

n) $\lim\limits_{x\to -\infty} (x^2+3x)$.

o) $\lim\limits_{x\to -\infty} (x^3+3x^2)$.

p) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(x^{1/2}-x^{1/3}\right)$.

q) $\lim\limits_{x\to -\infty} (x^{1/5}-x^{1/3})$.

r) $\lim\limits_{x\to \infty} (x-\sqrt{x^2+1})$.

45. Calcular cada uno de los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$.

b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+4x-12}{x^4-16}$.

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^3-x^2-1}{x^2+x-2}$.

d) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x(x-3)}{x-1-\sqrt{x+1}}$.

e) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x+5}-3}$.

f) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x+1+\sqrt{x+1}}$.

46. En cada caso, calcular los límites laterales $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ (si existen).

a) $a = 3, \quad f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x < 3 \\ 2x-1 & \text{si } x > 3. \end{cases}$

b) $a = 1, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 4 & \text{si } x = 1. \end{cases}$

c) $a = 2$, k es una constante, $\quad f(x) = \begin{cases} x^2+x & \text{si } x \leq 2 \\ k+x & \text{si } x > 2. \end{cases}$

Determinar el valor de k para que $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ exista.

47. Calcular:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{|x-2|}$.

b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(2-x)^2}{|2-x|}$.

48. Calcular cada uno de los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$, donde $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

b) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}$, donde $f(x) = |x-3|$.

Soluciones de ejercicios del Tema No.1: Límites y continuidad Prof. Pedro Rodríguez

Calcule los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{t\to -1}\dfrac{t+1}{t^3-t}=\lim\limits_{t\to -1}\dfrac{t+1}{t(t-1)(t+1)}=\lim\limits_{t\to -1}\dfrac{1}{t(t-1)}=\dfrac{1}{2}.$

2. Vea que $\dfrac{(1+h)^2-1}{h}=\dfrac{2h+h^2}{h}=2+h\Longrightarrow \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(1+h)^2-1}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(2+h)=2.$

3. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^2+3x+2}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x+2)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x-2}{x+2}=-3.$

4. Como $\dfrac{x^4-3x^2-4}{3x^3-10x-4}=\dfrac{(x-2)(x+2)(x^2+1)}{(x-2)(3x^2+6x+2)}=\dfrac{(x+2)(x^2+1)}{3x^2+6x+2}\Longrightarrow \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-3x^2-4}{3x^3-10x-4}=$
$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+2)(x^2+1)}{3x^2+6x+2}=\dfrac{4\cdot 5}{26}=\dfrac{10}{13}.$

5. Al dividir el numerador y el denominador mediante división sintética por $x+1$ se obtiene:
$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^5-7x^2-5x+5}{2x^4+3x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(3x^4-3x^3+3x^2-10x+5)}{(x+1)(2x^3-2x^2+2x+1)}=$
$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^4-3x^3+3x^2-10x+5}{2x^3-2x^2+2x+1}=-\dfrac{24}{5}.$

6. $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\frac{8+x}{8x}}{\sqrt[3]{x}+2}=\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{(x+8)(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4)}{8x(\sqrt[3]{x}+2)(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4)}=\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{(x+8)(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4)}{8x(x+8)}=$
$\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+4}{8x}=-\dfrac{12}{64}=-\dfrac{3}{16}.$

7. Sea $t=\sqrt[3]{1+cx}$, entonces $t^3=1+cx\Longrightarrow x=\dfrac{t^3-1}{c}$, si $c\neq 0$.
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+cx}-1}{x}=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t-1}{\frac{t^3-1}{c}}=c\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{1}{t^2+t+1}=\dfrac{c}{3}$. Note que si $c=0$, el límite da 0.

8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}=\dfrac{2}{3}.$

9. $|2x-1|=\begin{cases}2x-1 & \text{si } x\geq \frac{1}{2}\\ -(2x-1) & \text{si } x<\frac{1}{2}\end{cases}$ y $|2x+1|=\begin{cases}2x+1 & \text{si } x\geq -\frac{1}{2}\\ -(2x+1) & \text{si } x<-\frac{1}{2}.\end{cases}$
Para efectos de calcular el límite se toma $x\in I$ tal que $I\subset]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$, así:
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|2x-1|-|2x+1|}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-(2x-1)-(2x+1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-4x}{x}=-4.$

10. $\dfrac{\sqrt{ax+b}-2}{x}=\dfrac{ax+b-4}{x(\sqrt{ax+b}+2)}=\dfrac{a}{\sqrt{ax+b}+2}+\dfrac{b-4}{x(\sqrt{ax+b}+2)}$ y vea que
$\sqrt{ax+b}+2\geq 2>0$ y $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{ax+b}+2=\sqrt{b}+2$, de manera que si $b\neq 4$,
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{b-4}{x(\sqrt{ax+b}+2)}=\pm\infty\Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{ax+b}-2}{x}=\pm\infty.$
Por lo tanto, $b=4$ y así: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{ax+b}-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{ax+4}-2}{x}=$
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a}{\sqrt{ax+4}+2}=\dfrac{a}{\sqrt{4}+2}=\dfrac{a}{4}$, con lo que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{ax+b}-2}{x}=1$, sólo si $a=4=b$.

11. Aplicando el principio de intercalación se concluye que:

$\lim_{x\to 1} f(x) = 1$, pues $\lim_{x\to 1} 2x - 1 = 1$ y $\lim_{x\to 1} x^3 = 1$.

12. Como $\left|\cos \frac{1}{x^2}\right| \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$: $0 \leq x^2 \left|\cos \frac{1}{x^2}\right| = \left|x^2 \cos \frac{1}{x^2}\right| \leq x^2$, ya que $x^2 = |x^2|$ y que $|ab| = |a| \cdot |b| \Longrightarrow \lim_{x\to 0} 0 = 0 \leq \lim_{x\to 0} \left|x^2 \cos \frac{1}{x^2}\right| = \left|\lim_{x\to 0} x^2 \cos \frac{1}{x^2}\right| \leq \lim_{x\to 0} x^2 = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to 0} x^2 \cos \frac{1}{x^2} = 0$.

13. $\lim_{x\to 2^+} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)} = -\infty$, pues cuando $x \to 2^+$, $x - 3 \to -1$, $x + 2 \to 4$ y $x - 2 \to 0^+$.

14. $\frac{2-x}{(x-2)^3} = -\frac{1}{(x-2)^2} \Longrightarrow \lim_{x\to 2} \frac{2-x}{(x-2)^3} = -\infty$.

15. $\lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{2x}(x-1)}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{2x}(x-1)}{-(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} -\sqrt{2x} = -\sqrt{2}$.

16. $\frac{x^2-3x+2}{x^3-4x} = \frac{(x-2)(x-1)}{x(x-2)(x+2)} = \frac{x-1}{x(x+2)}$.

a) $\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-3x+2}{x^3-4x} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x-1}{x(x+2)} = \frac{1}{2\cdot 4} = \frac{1}{8}$.

b) $\lim_{x\to -2^+} \frac{x^2-3x+2}{x^3-4x} = \lim_{x\to -2^+} \frac{x-1}{x(x+2)} = +\infty$.

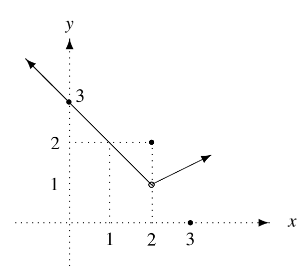
c) $\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2-3x+2}{x^3-4x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x-1}{x(x+2)} = +\infty$.

d) $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x(x+2)} = 0$.

e) Se tiene que $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe, pues $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$.

17. $\lim_{x\to -2^-} \frac{(x+3)|x+2|}{x+2} = \lim_{x\to -2^-} \frac{(x+3)(-1)(x+2)}{x+2} = \lim_{x\to -2^-} -(x+3) = -1$.

18. Sea $f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si } x < 2 \\ 2 & \text{si } x = 2 \\ \frac{1}{2}x & \text{si } x > 2. \end{cases}$



a) Considere la gráfica adjunta:

b) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (3 - x) = 1$ y $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (\frac{1}{2}x) = 1$, luego $\lim_{x\to 2} f(x) = 1$, pero $f(2) = 2$ y la función no es continua en 2.

c) $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} (3 - x) = 2$.

19. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} kx}{x} = \lim_{x\to 0} k \frac{\operatorname{sen} kx}{kx} = k$.

20. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 5x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{2\frac{\operatorname{sen} 2x}{2x}}{5\frac{\operatorname{sen} 5x}{5x}} \right) = \frac{2}{5} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen} 2x}{2x}}{\frac{\operatorname{sen} 5x}{5x}} = \frac{2}{5}$.

21. $\lim_{x\to 0} \frac{2x}{\tan 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x \cos 3x}{\operatorname{sen} 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{2(3x)\cos 3x}{3 \operatorname{sen} 3x} = \frac{2}{3}$.

22. Sea $y = \operatorname{sen} h$, luego si $h \to 0$ entonces $y \to 0$ y $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} h)}{\operatorname{sen} h} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} y}{y} = 1$.

23. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 - x + \operatorname{sen} x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 - x}{2x} + \dfrac{\operatorname{sen} x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x-1}{2} + \dfrac{1}{2} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \right) = 0$.

24. Sea $z = 1 - \cos t$, si $t \to 0$, entonces $z \to 0$ y $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(1 - \cos t)}{1 - \cos t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} z}{z} = 1$.

25. Sea $x = 2\alpha - \pi \Longrightarrow \alpha = \dfrac{x+\pi}{2}$, $\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2\alpha - \pi} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x+\pi)}{x} =$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x \cos\pi + \cos x \operatorname{sen}\pi}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\operatorname{sen} x}{x} = -1$.

26. Sea $\beta = \alpha - \dfrac{\pi}{6}$, entonces $\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{6}} \dfrac{\cos(2\alpha + \frac{\pi}{6})}{\operatorname{sen} 6\alpha} = \lim\limits_{\beta\to 0} \dfrac{\cos(2(\beta + \frac{\pi}{6}) + \frac{\pi}{6})}{\operatorname{sen} 6(\beta + \frac{\pi}{6})} = \lim\limits_{\beta\to 0} \dfrac{\cos(2\beta + \frac{\pi}{2})}{\operatorname{sen}(6\beta + \pi)} =$

$\lim\limits_{\beta\to 0} \dfrac{\cos 2\beta \cos\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} 2\beta \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}{\operatorname{sen} 6\beta \cos\pi + \cos 6\beta \operatorname{sen}\pi} = \lim\limits_{\beta\to 0} \dfrac{-\operatorname{sen} 2\beta}{-\operatorname{sen} 6\beta} = \lim\limits_{\beta\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2\beta}{\operatorname{sen} 6\beta} = \dfrac{1}{3}$ (ver ejercicio 20).

27. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2x^3 - 2x + 3}{3x^3 + 3x^2 - 5x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3\left(-2 - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}\right)}{x^3\left(3 + \frac{3}{x} - \frac{5}{x^2}\right)} = -\dfrac{2}{3}$.

28. $\dfrac{x^4}{x^3+1} = \dfrac{x^4}{x^3}\left(\dfrac{1}{1 + \frac{1}{x^3}}\right) = x\left(\dfrac{1}{1 + \frac{1}{x^3}}\right)$. Así $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^4}{x^3+1} = -\infty$.

29. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^{5/3} - x^{1/3} + 7}{x^{8/3} + 3x + \sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{5/3}\left(2 - \frac{1}{x^{4/3}} + \frac{7}{x^{5/3}}\right)}{x^{8/3}\left(1 + \frac{3}{x^{5/3}} + \frac{1}{x^{13/6}}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} \dfrac{2 - \frac{1}{x^{4/3}} + \frac{7}{x^{5/3}}}{1 + \frac{3}{x^{5/3}} + \frac{1}{x^{13/6}}} = 0$.

30. $\sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{x^2 - x} = |x|(\sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}) \Longrightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{x^2 - x} = +\infty$.

31. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{x^2 - x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 + x - 1 - (x^2 - x)}{\sqrt{x^2 + x - 1} + \sqrt{x^2 - x}} =$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x - 1}{x\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} = 1$.

32. $|\operatorname{sen} 2x| \le 1$, entonces $-1 \le \operatorname{sen} 2x \le 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, por lo que:

$$-\frac{1}{x} \le \frac{\operatorname{sen} 2x}{x} \le \frac{1}{x}, \text{ si } x > 0$$
$$-\frac{1}{x} \ge \frac{\operatorname{sen} 2x}{x} \ge \frac{1}{x}, \text{ si } x < 0,$$

y se tiene $0 \le \left|\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x}\right| \le \left|\dfrac{1}{x}\right|$, $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x} = 0$, ya que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left|\dfrac{1}{x}\right| = 0$.

33. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x}\left(1 - \frac{x^{1/5}}{x^{1/3}}\right)}{\sqrt[3]{x}\left(1 + \frac{x^{1/5}}{x^{1/3}}\right)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1 - \frac{1}{x^{2/15}}}{1 + \frac{1}{x^{2/15}}} = 1$.

34. $\dfrac{x^{-1}+x^{-4}}{x^{-2}-x^{-3}} = \dfrac{x^{-1}(1+x^{-3})}{x^{-2}(1-x^{-1})} = x\left(\dfrac{1+x^{-3}}{1-x^{-1}}\right) \Longrightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^{-1}+x^{-4}}{x^{-2}-x^{-3}} = \lim\limits_{x\to\infty} x\left(\dfrac{1+\dfrac{1}{x^3}}{1-\dfrac{1}{x^1}}\right) = +\infty.$

35. $f(a) = a^2$, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-}(x+1) = a+1$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} x^2 = a^2$,

f es continua en $x = a \Longleftrightarrow a^2 = a+1 \Longleftrightarrow a^2 - a - 1 = 0 \Longleftrightarrow a = \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

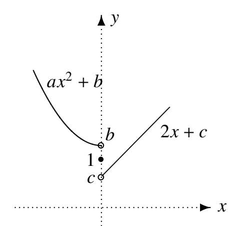
Como f es continua en $\mathbb{R}\setminus\{a\}$, la continuidad en $x = a$ trae consigo la continuidad de f en $\mathbb{R}$.

36. Vea que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} 9(\frac{\operatorname{sen} 3x}{3x})^2 = 9$. De forma que, para que f sea continua, lo único que debe ocurrir es que $f(0) = 9 = c$.

37. $f(0) = \cos 0 = 1$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x+b = b$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \cos x = 1$.

Por lo tanto f es continua en $x = 0 \Longleftrightarrow b = 1$.

38. Para que f sea continua, debe suceder que:



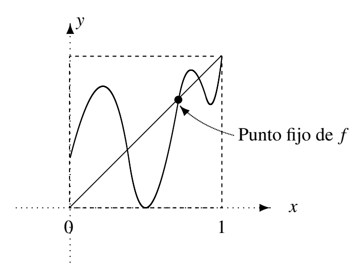
$b = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 1 = c = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, luego $b = c = 1$ y a es cualquier número real.

39. Sea $f(x) = 2x^3 + x^2 + 2$, f es continua en $\mathbb{R}$, $f(-2) = -10$, $f(-1) = 1$.

Por el teorema del valor intermedio existe un $c \in]-2,-1[$ tal que $f(c) = 0$, o sea f tiene un cero entre -2 y -1.

40. Un *punto fijo* de una función f es un número c tal que $f(c) = c$.

a) Veamos el gráfico:



b) El obstáculo radica en que cualquier gráfico de una función continua de $[0,1]$ en $[0,1]$, interseca necesariamente al gráfico de la función $y = x$.

Precisamente, en tal intersección se localiza un punto fijo.

c) Sea $f\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$ continua y sea $g(x) = f(x) - x$, entonces g es continua en $[0,1]$. Veamos las distintas posibilidades:

i) Si $f(0) = 0$, entonces 0 es punto fijo. Lo mismo ocurre si $f(1) = 1$.

ii) Supongamos que $0 < f(0) < f(1) < 1$, entonces $g(0) > 0$ y $g(1) < 0$. Aplicando el Teorema de los valores intermedios a la función g se concluye que existe un $c \in]0,1[$ tal que $g(c) = 0$, o sea $f(c) = c$ y c

es punto fijo de f.

iii) Si $0 < f(1) < f(0) < 1$, entonces la conclusión es idéntica a la del punto anterior.

iv) Si $f(1) = 0$ y $f(0) = 1$, entonces $g(1) = -1$ y $g(0) = 1$ y se concluye similarmente a ii).

41. Calcule los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{25x^3+2}{75x^7-2} = \dfrac{25\cdot 0^3+2}{75\cdot 0^7-2} = \dfrac{2}{-2} = -1.$

b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3}(x+3) = 3+3 = 6.$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2-3x+1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(2x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(2x-1) = 2\cdot 1-1 = 1.$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-a^2}{x^2+2ax+a^2} = \dfrac{0^2-a^2}{0^2+2a\cdot 0+a^2} = \dfrac{-a^2}{a^2} = -1.$

e) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2-a^2}{x^2+2ax+a^2} = \dfrac{a^2-a^2}{a^2+2a^2+a^2} = \dfrac{0}{4a^2} = 0.$

f) $\lim\limits_{a\to 0} \dfrac{x^2-a^2}{x^2+2ax+a^2} = \dfrac{x^2-0}{x^2+2\cdot 0\cdot x+0^2} = \dfrac{x^2}{x^2} = 1.$

g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x^2-1)(x^2+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x-1} =$
$\lim\limits_{x\to 1}(x+1)(x^2+1) = (1+1)(1^2+1) = 2\cdot 2 = 4.$

h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x+1)^2-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+2x+1-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+2x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}(x+2) = 2.$

i) Si $x > 0$, entonces $|x| = x$, por lo tanto $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} 1 = 1.$

j) Si $x < 0$, entonces $|x| = -x$, por lo tanto $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} -1 = -1.$

k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}\cdot\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-(1-x^2)}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})} =$
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{1+\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{1}{2}.$

l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x^2}\cdot\dfrac{1+\sqrt{1-4x^2}}{1+\sqrt{1-4x^2}}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-(1-4x^2)}{x^2(1+\sqrt{1-4x^2})} =$
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x^2}{x^2(1+\sqrt{1-4x^2})} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4}{1+\sqrt{1-4x^2}} = 2.$

m) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}\cdot\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right) =$
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+x-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = 1.$

n) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+8}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+2^3}{x^2-2^2} = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x+2)(x-2)} = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-2x+4}{x-2} = \dfrac{12}{-4} = -3.$

42. a) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} \operatorname{sen} x = \lim\limits_{x\to 1^+}(ax+1) \Longrightarrow \operatorname{sen} 1 = a+1 \Longrightarrow a = \operatorname{sen} 1 - 1.$

b) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) \Longrightarrow \lim\limits_{x\to -2^-} 2\cos x = \lim\limits_{x\to 2^+}(ax^2+1) \Longrightarrow 2\cos(-2) = 4a+1 \Longrightarrow$

$a = \dfrac{\cos 2}{2} - \dfrac{1}{4}$.

c) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 3^-}(2x+1) = \lim\limits_{x\to 3^+}(x^2+a) \Longrightarrow 7 = 9 + a \Longrightarrow a = -2.$

d) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) \Longrightarrow \lim\limits_{x\to -1^-}(x^3 - ax^2 + 2a) = \lim\limits_{x\to -1^+}(x-1) \Longrightarrow -1 + a^2 + 2a = -2$
$\Longrightarrow 1 + 2a + a^2 = 0 \Longrightarrow (1+a)^2 = 0 \Longrightarrow a = -1.$

e) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 1^-}(-ax^2) = \lim\limits_{x\to 1^+}(-1) \Longrightarrow -a = -1 \Longrightarrow a = 1.$

El análisis en $x = -1$ conduce al mismo resultado. Compruébelo!

f) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} |x| = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{x^2}{2} + a\right) \Longrightarrow 1 = \frac{1}{2} + a \Longrightarrow a = \frac{1}{2}.$

Compruebe que para $x = -1$ se obtiene el mismo resultado.

43. Calcule los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2}{2}\cdot\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x} = 2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{2x} = 2.$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 2x}{\operatorname{sen} 2x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 2x\cos 2x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos 2x} = 1.$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{5}{5}\cdot\dfrac{x}{x}\cdot\dfrac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} x}\right) = 5\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{sen} 5x}{5x}\cdot\dfrac{x}{\operatorname{sen} x}\right) = 5.$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 5x - \operatorname{sen} 3x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{sen} 5x}{x} - \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(5\dfrac{\operatorname{sen} 5x}{5x} - 3\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x}\right) = 5 - 3 = 2.$

e) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a}{x-a} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{sen}(x-a+a) - \operatorname{sen} a}{x-a} =$
$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{sen}(x-a)\cos a + \operatorname{sen} a\cos(x-a) - \operatorname{sen} a}{x-a} =$
$\lim\limits_{x\to a}\left(\cos a\dfrac{\operatorname{sen}(x-a)}{x-a} + \operatorname{sen} a\dfrac{\cos(x-a)-1}{x-a}\right) = \cos a.$

Resuelva este ejercicio aplicando la identidad $\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\cos x}{x^2}\cdot\dfrac{1+\cos x}{1+\cos x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2(1+\cos x)} =$
$\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2\cdot\dfrac{1}{1+\cos x}\right] = \dfrac{1}{2}.$

g) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos(x-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})}{\frac{\pi}{2}-x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos(x-\frac{\pi}{2})\cos\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}(x-\frac{\pi}{2})\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}-x} =$
$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} -\dfrac{\operatorname{sen}(x-\frac{\pi}{2})}{\frac{\pi}{2}-x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{sen}(x-\frac{\pi}{2})}{x-\frac{\pi}{2}} = 1.$

Resuélvalo usando $\theta = \frac{\pi}{2} - x$.

h) $\lim\limits_{x\to 0} x\csc^2 x = \lim\limits_{x\to 0} x\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}\right)^2 = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\operatorname{sen}^2 x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{\operatorname{sen} x}\cdot\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}\right) = \begin{cases} +\infty & \text{si } x\to 0^+ \\ -\infty & \text{si } x\to 0^-. \end{cases}$

i) $\lim\limits_{x\to 0} x^2\csc^2 x = \lim\limits_{x\to 0} x^2\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}\right)^2 = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{\operatorname{sen} x}\right)^2 = 1.$

j) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x\cos 3x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3}{3}\cdot\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x\cos 3x}\right) = 3\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{3x}\cdot\dfrac{1}{\cos 3x}\right) = 3.$

k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2+4x} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \dfrac{1}{x+4} \right) = \dfrac{1}{4}.$

l) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2-9)}{x-3} \lim\limits_{x\to 3} \left(\dfrac{x+3}{x+3} \cdot \dfrac{\operatorname{sen}(x^2-9)}{x-3} \right) = \lim\limits_{x\to 3} \left[(x+3) \dfrac{\operatorname{sen}(x^2-9)}{x^2-9} \right] = 6.$

44. Calcule los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{2-x} = +\infty.$

b) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{2-x} = -\infty.$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{(2-x)^2} = +\infty.$

d) $\lim\limits_{x\to 5^+} \dfrac{x+3}{x^2-25} = +\infty.$

e) $\lim\limits_{x\to 2} \left| \dfrac{x^2+4}{x-2} \right| = +\infty.$

f) $\lim\limits_{x\to 0^-} \left(\dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{x} \right) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1-x^2}{x^3} = -\infty.$

g) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x+1}{x} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x(1+1/x)}{x} = \lim\limits_{x\to \infty} (1+1/x) = 1.$

h) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^4} - \dfrac{1}{x} \right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-x^3}{x^4} = +\infty.$

i) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{4}{x} - \dfrac{1}{x^3} \right) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{4x^2-1}{x^3} \right) = -\infty.$

j) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x^3-2x}{2x^3+3} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^3(3-2x^{-2})}{x^3(2+3x^{-3})} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3-\dfrac{2}{x^2}}{2+\dfrac{3}{x^3}} = \dfrac{3}{2}.$

k) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-x}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty} -1 = -1.$ Observe que $|x| = -x$, si $x < 0$.

l) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^3+2x}{x^2-3} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2(x+2x^{-1})}{x^2(1-3x^{-2})} = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x+2x^{-1}}{1-3x^{-2}} = +\infty.$

m) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2-x+1}{x^3+3x-2} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2(1-2x^{-1}+x^{-2})}{x^2(x+3x^{-1}-2x^{-2})} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1-2x^{-1}+x^{-2}}{x+3x^{-1}-2x^{-2}} = 0.$

n) $\lim\limits_{x\to -\infty} (x^2+3x) = \lim\limits_{x\to -\infty} x^2(1+3x^{-1}) = +\infty.$

o) $\lim\limits_{x\to -\infty} (x^3+3x^2) = \lim\limits_{x\to -\infty} x^3(1+3x^{-1}) = -\infty.$

p) $\lim\limits_{x\to \infty} (x^{1/2}-x^{1/3}) = \lim\limits_{x\to \infty} x^{1/2}(1-x^{-1/6}) = +\infty.$

q) $\lim\limits_{x\to -\infty} (x^{1/5}-x^{1/3}) = \lim\limits_{x\to -\infty} x^{1/3}(x^{-3/15}-1) = +\infty.$

r) $\lim\limits_{x\to \infty} (x-\sqrt{x^2+1}) = \lim\limits_{x\to \infty} \left[(x-\sqrt{x^2+1}) \left(\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}} \right) \right] = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2-(x^2+1)}{x+\sqrt{x^2+1}} =$

$\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}} = 0.$

45. Calcular cada uno de los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{x^3-1}{x^2-1}.$

Recordemos que cuando se quiere calcular un límite del tipo: $\lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios tales que $P(x_o) = 0$ y $Q(x_o) = 0$ un buen camino es factorizar los dos polinomios y tratar de buscar factores comunes que se puedan simplificar.

En el problema nuestro $P(x) = x^3 - 1$, $Q(x) = x^2 - 1$ y $x_o = 1$. Claramente $P(1) = Q(1) = 0$.

Por lo tanto procedemos a factorizar los polinomios $P(x) = (x-1)(x^2+x+1)$ y

$Q(x) = (x+1)(x-1)$.

Luego: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}$ y como $x \neq 1$, se tiene:

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x+1}{x+1}$. Este último límite se puede evaluar de manera directa, con lo cual se tiene:

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x+1}{x+1} = \dfrac{3}{2}$.

b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+4x-12}{x^4-16}$.

Nuevamente $P(x) = x^2 + 4x - 12$ y $P(2) = 0$, $Q(x) = x^4 - 16$ y $Q(2) = 0$.

Factorizando, se obtiene $P(x) = x^2 + 4x - 12 = (x+6)(x-2)$, $Q(x) = x^4 - 16 = (x^2-4)(x^2+4) = (x-2)(x+2)(x^2+4)$ y como $x \neq 2$, simplificando resulta:

$\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{x^2+4x-12}{x^4-16} = \dfrac{(x+6)(x-2)}{(x-2)(x+2)(x^2+4)} = \dfrac{x+6}{(x+2)(x^2+4)}$.

Así: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+4x-12}{x^4-16} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+6}{(x+2)(x^2+4)} = \dfrac{8}{32} = \dfrac{1}{4}$.

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^3-x^2-1}{x^2+x-2}$.

$P(x) = 2x^3 - x^2 - 1$; $P(1) = 0$, $Q(x) = x^2 + x - 2$; $Q(1) = 0$.

Factorizando $P(x) = 2x^3 - x^2 - 1 = (2x^2+x+1)(x-1)$, $Q(x) = x^2+x-2 = (x+2)(x-1)$ y como $x \neq 1$,

$\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{(2x^2+x+1)(x-1)}{(x+2)(x-1)} = \dfrac{2x^2+x+1}{x+2}$.

Por lo tanto: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^3-x^2-1}{x^2+x-2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2+x+1}{x+2} = \dfrac{4}{3}$.

d) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x(x-3)}{x-1-\sqrt{x+1}}$.

Observe que una evaluación directa nos lleva a una forma indeterminada del tipo $\dfrac{0}{0}$. Recordemos que cuando hay una forma indeterminada y aparecen raíces, un procedimiento recomendable es racionalizar.

Así, $\dfrac{x(x-3)}{x-1-\sqrt{x+1}} = \dfrac{x(x-3)}{x-1-\sqrt{x+1}} \cdot \dfrac{x-1+\sqrt{x+1}}{x-1+\sqrt{x+1}} = \dfrac{x(x-3)[x-1+\sqrt{x+1}]}{(x-1-\sqrt{x+1})(x-1+\sqrt{x+1})} =$

$\dfrac{x(x-3)[x-1+\sqrt{x+1}]}{(x-1)^2[x+1]} = \dfrac{x(x-3)[x-1+\sqrt{x+1}]}{x^2-2x+1-x-1} = \dfrac{x(x-3)[x-1+\sqrt{x+1}]}{x^2-3x} =$

$\dfrac{x(x-3)[x-1+\sqrt{x+1}]}{x(x-3)} = x + \sqrt{x+1}$, para todo $x \neq 3$.

Luego, $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x(x-3)}{x-1-\sqrt{x+1}} = \lim\limits_{x\to 3}(x-1+\sqrt{x+1}) = 4$.

e) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x+5}-3}$.

Observe que evaluando de manera directa, se obtiene una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$. Procedemos a racionalizar el denominador, con lo cual se obtiene:

$$\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x+5}-3}\cdot\frac{\sqrt{2x+5}+3}{\sqrt{2x+5}+3}=\frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{2x+5}+3)}{(2x+5)-9}=\frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{2x+5}+3)}{2x-4}.$$

Note que todavía no se puede evaluar el límite pues se vuelve a obtener una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$. Por lo tanto, procedemos a multiplicar numerador y denominador por el conjugado de $\sqrt{x+2}-2$, con lo cual se obtiene:

$$\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x+5}-3}=\frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{2x+5}+3)}{2(x-2)}\cdot\frac{(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2}+2)}=$$

$$\frac{(\sqrt{2x+5}+3)(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{2(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}=\frac{(\sqrt{2x+5}+3)[(x+2)-4]}{2(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}=$$

$$\frac{(\sqrt{2x+5}+3)(x-2)}{2(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}=\frac{\sqrt{2x+5}+3}{2(\sqrt{x+2}+2)},\text{ para } x\neq 2.$$

Luego, $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{2x+5}-3}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x+5}+3}{2(\sqrt{x+2}+2)}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$.

f) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x+1+\sqrt{x+1}}$.

Aquí se utiliza el límite de una composición de funciones:

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x+1+\sqrt{x+1}}=\sqrt{0+1+\sqrt{0+1}}=\sqrt{2}.$$

46. a) Note que de acuerdo a la definición de $f(x)$, se tiene:

$\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}(x+2)=5$ y $\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}(2x-1)=5$.

Puesto que $\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)$, se concluye que el $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$ existe y además $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=5$.

b) De acuerdo a la definición de la función f, se ve que la función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-1}{x-1} & \text{si } x<1\\ 4 & \text{si } x=1\\ \dfrac{x^3-1}{x-1} & \text{si } x>1.\end{cases}$$

Luego, $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)}=3$.

$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)}=3$.

Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=3$ y en consecuencia $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ existe y además $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=3$.

Comentario Note que en este caso se pone en evidencia que la noción de límite de una función en un punto, no depende del valor de la función en ese punto. Inclusive puede suceder que la función ni siquiera esté definida en el punto. Aquí, $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=3\neq f(1)=4$.

c) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (x^2+x) = 6$ y $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (k+x) = k+2$.

Recordemos que: $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe si y sólo sí $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.

Por lo tanto para que $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ exista, debe ocurrir que: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$.

O sea se requiere que $6 = k+2$, es decir $k=4$. Así, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ existe si y sólo si $k=4$.

47. a) Vamos a analizar la expresión $|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{si } x-2 \geq 0 \iff x \geq 2 \\ -(x-2) & \text{si } x-2 < 0 \iff x < 2. \end{cases}$

Luego,

$$\frac{x^2-4}{|x-2|} = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x > 2 \\ \dfrac{x^2-4}{-(x-2)} & \text{si } x < 2. \end{cases}$$

Como la función $f(x) = \dfrac{x^2-4}{|x-2|}$ tiene expresiones diferentes según se esté a la derecha o a la izquierda de $x=2$, se requiere estudiar los límites laterales.

$\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-4}{|x-2|} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-4}{-(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{(x-2)(x+2)}{-(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2^-} -(x+2) = -4$

$\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2-4}{|x-2|} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} x+2 = 4.$

Se ve que $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-4}{|x-2|} \neq \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2-4}{|x-2|}$. Por lo tanto se concluye que $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{|x-2|}$ no existe.

b) Note que $|2-x| = \begin{cases} 2-x & \text{si } 2-x \geq 0 \iff x \leq 2 \\ -(2-x) & \text{si } 2-x < 0 \iff x > 2. \end{cases}$

Luego,

$$\frac{(2-x)^2}{|2-x|} = \begin{cases} \dfrac{(2-x)^2}{2-x} & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{(2-x)^2}{-(2-x)} & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

Por lo tanto, se deben analizar los límites laterales.

$\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{(2-x)^2}{|2-x|} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{(2-x)^2}{2-x} = \lim\limits_{x\to 2^-} (2-x) = 0.$

$\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{(2-x)^2}{|2-x|} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{(2-x)^2}{-(2-x)} = \lim\limits_{x\to 2^+} -(2-x) = 0.$

Se observa que $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{(2-x)^2}{|2-x|} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{(2-x)^2}{|2-x|} = 0$ y por lo tanto $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(2-x)^2}{|2-x|}$ existe y además $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(2-x)^2}{|2-x|} = 0$.

48. Calcular cada uno de los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\left(\dfrac{1}{2+h}\right) - \dfrac{1}{2}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{2-(2+h)}{2(2+h)}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2-2-h}{h[2(2+h)]} =$

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-h}{h[2(2+h)]} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-1}{2(2+h)} = -\dfrac{1}{4}.$

b) Note que: $|x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{si } x-3 \geq 0 \iff x \geq 3 \\ -(x-3) & \text{si } x-3 < 0 \iff x < 3. \end{cases}$

Observe que:

- Si $h > 0$, entonces $3+h \geq 3$.
- Si $h < 0$, entonces $3+h < 3$.

Por lo tanto hay que analizar los límites laterales.

Así, $\lim_{h\to 0^+} \dfrac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \dfrac{|(3+h)-3|-|3-3|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \dfrac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \dfrac{h}{h} = 1$

$\lim_{h\to 0^-} \dfrac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \dfrac{|(3+h)-3|-0}{h} = \lim_{h\to 0^-} \dfrac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \dfrac{-h}{h} = -1.$

Puesto que: $\lim_{h\to 0^-} \dfrac{f(3+h)-f(3)}{h} \neq \lim_{h\to 0^+} \dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}$.

Se tiene que: $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}$ no existe.

Tema No. 2

Ejercicios de derivación Prof. Pedro Rodríguez

A. Utilizando la definición de derivada, calcule $f'(x)$ en cada caso:

1) $f(x) = \operatorname{sen} 2x$ R/ $2\cos 2x$

2) $f(x) = \cos 3x$ R/ $-3\operatorname{sen} 3x$

3) $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$ R/ $-\dfrac{2}{(x-1)^2}$

4) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ R/ $\dfrac{1}{(x+1)^2}$

5) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$ R/ $\dfrac{-1}{2\sqrt{(x+2)^3}}$

6) $f(x) = \sqrt[3]{2x+3}$ R/ $\dfrac{2}{3\sqrt[3]{(2x+3)^2}}$

7) $f(x) = x^2 - 3x$ R/ $2x - 3$

8) $f(x) = 4x^2 + 7$ R/ $8x$

9) $f(x) = \dfrac{1}{2x+3}$ R/ $\dfrac{-2}{(2x+3)^2}$

10) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ R/ $-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$

11) $f(x) = \dfrac{x^3}{x+1}$ R/ $\dfrac{x^2(2x+3)}{(x+1)^2}$

12) $f(x) = \sqrt{2x-1}$ R/ $\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$.

B. Calcule la primera derivada de $f(x)$.

1) $f(x) = 2x\sqrt{\cos^2 x + 1}$ R/ $2\sqrt{\cos^2 x + 1} - \dfrac{2x\operatorname{sen} x\cos x}{\sqrt{\cos^2 x + 1}}$

2) $f(x) = (1+2x)\cos^3 5x$ R/ $2\cos^3 5x - 15(2x+1)\operatorname{sen} 5x\cos^2 5x$

3) $f(x) = \left(\dfrac{2x+1}{\tan x}\right)^2$ R/ $2(2x+1)\left(\dfrac{2\tan x - 2x\sec^2 x - \sec^2 x}{\tan^3 x}\right)$

4) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{1+\sqrt{x}}{x^{3/2}+3}}$ R/ $\dfrac{-(2x^{3/2}+3x-3)}{6\sqrt{x}(x^{3/2}+3)^2\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{x^{3/2}+3}\right)^{2/3}}$

5) $f(x) = \dfrac{x(x-3)}{(x+3)^2}$ R/ $\dfrac{9(x-1)}{(x+3)^3}$

6) $f(x) = x\cos 4x$ R/ $\cos 4x - 4x\operatorname{sen} 4x$

7) $f(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{\cos^2 x + 2}}$ R/ $\dfrac{3(\cos^2 x + x\operatorname{sen} x\cos x + 2)}{(\cos^2 x + 2)^{3/2}}$

8) $f(x) = \operatorname{sen}^3 2x\cos^2 3x$ R/ $6\operatorname{sen}^2 2x\cos 2x\cos^2 3x - 6\operatorname{sen}^3 2x\operatorname{sen} 3x\cos 3x$

9) $f(x) = (3x^2+1)\sec^2 x$ R/ $6x\sec^2 x + 6x^2\sec^2 x\tan x + 2\sec^2 x\tan x$

10) $f(x) = \cos^3(\sqrt[3]{x^4+1})$ R/ $\dfrac{-4x^3\operatorname{sen}(\sqrt[3]{x^4+1})\cos^2(\sqrt[3]{x^4+1})}{(x^4+1)^{2/3}}$

11) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x^2+1}}$ R/ $\dfrac{-(x^2-1)}{2\sqrt{x}(x^2+1)^{3/2}}$

12) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+25}}$ R/ $\dfrac{-x}{(x^2+25)^{3/2}}$

13) $f(x) = \sqrt{\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos x}}$ R/ $\dfrac{\cos x}{(1+\cos x)^{3/2}} + \dfrac{\cos^2 x}{(1+\cos x)^{3/2}} + \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{2(1+\cos x)^{3/2}}$

14) $f(x) = \sqrt[5]{x\tan x - x^2}$ R/ $\dfrac{1}{5}(x\tan x - x^2)^{-4/5}(\tan x + x\sec^2 x - 2x)$

15) $f(x) = \cos^2(\operatorname{sen}^2 x)$ R/ $-4\operatorname{sen} x\cos x\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^2 x)\cos(\operatorname{sen}^2 x)$

16) $f(x) = \sqrt[3]{\operatorname{sen}^3 x + \sec^2 x}$ R/ $\dfrac{3\operatorname{sen}^2 x\cos x + 2\sec^2 x\tan x}{3\sqrt[3]{(\operatorname{sen}^3 x + \sec^2 x)^2}}$.

17) $f(x) = 3x - 2$ R/ 3

18) $f(x) = 8x^3 - 7x^2 + 4$ R/ $24x^2 - 14x$.

19) $f(x) = 2x^7 + 4x^2 - 3$ R/ $14x^6 + 8x$

20) $f(x) = x^2 - x^{-1} + x^{-2}$ R/ $2x + x^{-2} - 2x^{-3}$.

21) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ R/ $\dfrac{-2}{(x-1)^2}$

22) $f(x) = x^2 - \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ R/ $2x - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$

23) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$ R/ $\dfrac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$.

24) $f(x) = \dfrac{(x-1)(x-2)}{2x+1}$ R/ $\dfrac{2x^2+2x-7}{(2x+1)^2}$.

25) $f(x) = x\operatorname{sen} x\cos x$ R/ $\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) + x\cos(2x)$.

26) $f(x) = \dfrac{x}{\operatorname{sen} x}$ R/ $\dfrac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$.

27) $f(x) = (x+1)\tan x$ R/ $\tan x + (x+1)\sec^2 x$.

28) $f(x) = x^2\operatorname{sen} x + x\cos x$ R/ $x\operatorname{sen} x + (x^2+1)\cos x$.

29) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1} + x^5\cos x$ R/ $\dfrac{-2x}{(x^2+1)^2} + 5x^4\cos x - x^5\operatorname{sen} x$.

30) $f(x) = \dfrac{1}{2+\cos x}$ R/ $\dfrac{\operatorname{sen} x}{(2+\cos x)^2}$.

31) $f(x) = \dfrac{2-\operatorname{sen} x}{2+\cos x}$ R/ $\dfrac{2(\operatorname{sen} x - \cos x) - 1}{(2+\cos x)^2}$.

32) $f(x) = \dfrac{x\operatorname{sen} x}{1+x^2}$. R/ $\dfrac{(1-x^2)\operatorname{sen} x + (1+x^2)x\cos x}{(1+x^2)^2}$.

C. Determine la ecuación de la recta tangente a:

1) $y = -3x^3 + 5$ en $x = -2$ R/ $y = -36x - 43$

2) $x = \operatorname{sen} 2y$ en $(1, \frac{\pi}{4})$ R/ $x = 1$

3) $y = 3\sqrt{x^2+5} - 8$ en $x = 2$ R/ $y = 2x - 3$

4) $y^3 = x^2 + x$ en el origen R/ $x = 0$

5) $x^2y = x + 2$ en $(2, 1)$ R/ $3x + 4y = 10$.

D. Determine $\dfrac{dy}{dx}$ mediante derivación implícita.

1) $xy^2 + x^2y = 2$ R/ $-\dfrac{2xy + y^2}{2xy + x^2}$

2) $12(x^2 + y^2) = 25xy$ R/ $\dfrac{25y - 24x}{24y - 25x}$

3) $\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{y^3} = 2$ R/ $-\dfrac{y^4}{x^4}$

4) $xy^3 - x^5y^2 = 4$ R/ $\dfrac{5x^4y^2 - y^3}{3xy^2 - 2x^5y}$.

E. Ejercicios varios.

1. En qué puntos la derivada de $f(x) = x^3$ coincide con la función, es decir $f'(x) = f(x)$?

2. a) Considere la función definida por $f(x) = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ y concluya que $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ no existe.

   Sugerencia: Haga una tabla de valores para $x = \dfrac{1}{n\pi}$, $n \in \mathbb{N}$.

   b) Sea $g(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

   Muestre que g es continua en $x = 0$ pero no es derivable en $x = 0$.

   c) Sea $h(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

   Muestre que h es continua y derivable en $x = 0$.

3. Si $f'(a) = 2$ y $g'(a) = 3$ calcule $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$. R/ $\frac{2}{3}$.

4. Hallar los puntos en que las rectas tangentes a la curva $y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 20$, son paralelas al eje x.

   R/ $(0, 20)$, $(1, 15)$, $(-2, -12)$.

5. En qué puntos la tangente a la parábola $y = x^2 - 7x + 3$ es paralela a la recta $5x + y - 3 = 0$?

   R/ $(1, -3)$.

6. Hallar la ecuación de la parábola $y = x^2 + bx + c$ que es tangente a la recta $y = x$ en el punto $(1, 1)$. R/ $y = x^2 - x + 1$.

7. En qué punto de la curva $y^2 = 2x^3$ la tangente es perpendicular a la recta $4x - 3y + 2 = 0$?

   R/ $(\frac{1}{8}, -\frac{1}{16})$.

8. Escribir las ecuaciones de la tangente y la normal a la curva $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ en el punto $(-2, 5)$.R/ Tangente: $y = 5$, Normal: $x = -2$.

9. Hallar las ecuaciones de la tangente y la normal a la curva $y = \sqrt[3]{x-1}$ en el punto $(1, 0)$.
   R/ Tangente $x = 1$, normal $y = 0$.

10. Determine la ecuación de la recta tangente a la curva $x^5 + y^5 - 2xy = 0$ que pasa por el punto $(1, 1)$. R/ $x + y - 2 = 0$.

11. Determine las ecuaciones de la tangente y la normal a la curva $y^4 = 4x^4 + 6xy$ en el punto $(1, 2)$. R/ Tangente: $14x - 13y + 12 = 0$, Normal: $13x + 14y - 41 = 0$.

12. Demuestre que las curvas $y = 4x^2 + 2x - 8$ y $y = x^3 - x + 10$ son tangentes entre sí en el punto $(3, 34)$. Sucederá lo mismo en el punto $(-2, 4)$?

13. Demuestre que las hipérbolas $xy = a^2$, $x^2 - y^2 = b^2$ se cortan entre sí formando un ángulo recto.

14. Para las siguientes funciones determine los puntos para los cuales pasa una tangente horizontal.
   a) $y = \dfrac{1}{x^2}$. R/ No hay tangentes horizontales.
   b) $y = x^4 - 8x^2 + 2$. R/ $(0, 2)$, $(-2, -14)$, $(2, -14)$.

15. Determine las ecuaciones de las rectas que son tangentes comunes a $y = x^2$, $y = -x^2 + 6x - 5$.
   R/$y = 2x - 1$, $y = 4x - 4$.

16. Pruebe que la recta $y = x$ es perpendicular a la curva $y = \dfrac{1}{x}$ en sus puntos de intersección.

17. Sea $f(x) = x^4 - x^3 + 7x^2 + 3x - 11$, demuestre que la gráfica de f tiene al menos una recta tangente horizontal.

Soluciones del Tema 2: Ejercicios de derivación Prof. Pedro Rodríguez

Parte A. Calcule $f'(x)$ utilizando la definición de derivada de:

1. $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(2x+2h) - \operatorname{sen} 2x}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x \cos 2h + \cos 2x \operatorname{sen} 2h - \operatorname{sen} 2x}{h} =$
$\lim_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x(\cos 2h - 1) + \cos 2x \operatorname{sen} 2h}{h} = \lim_{h\to 0} \left[\dfrac{2 \operatorname{sen} 2x(\cos 2h - 1)}{2h} + \dfrac{2\cos 2x(\operatorname{sen} 2h)}{2h}\right] =$
$2 \operatorname{sen} 2x(0) + 2\cos 2x(1) = 2\cos 2x.$

2. Sea $f(x) = \cos 3x$ y considere $\dfrac{\cos(3x+3h) - \cos 3x}{h} = \dfrac{\cos 3x \cos 3h - \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 3h - \cos 3x}{h} =$
$\cos 3x \dfrac{(\cos 3h - 1)}{h} - \operatorname{sen} 3x \dfrac{\operatorname{sen} 3h}{h} \Longrightarrow \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} =$
$\lim_{h\to 0} \left(\cos 3x \dfrac{\cos 3h - 1}{h} - 3 \operatorname{sen} 3x \dfrac{\operatorname{sen} 3h}{h}\right) = -3 \operatorname{sen} 3x$, ya que $\lim_{y\to 0} \dfrac{1-\cos y}{y} = 0$, $\lim_{y\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} y}{y} = 1$.

3. $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{2(x+h)}{x+h-1} - \dfrac{2x}{x-1}}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{(2x+2h)(x-1) - 2x(x-1+h)}{(x+h-1)(x-1)h} =$
$\lim_{h\to 0} \dfrac{2x^2 - 2x + 2xh - 2h - 2x^2 + 2x - 2xh}{(x+h-1)(x-1)h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{-2h}{h(x+h-1)(x-1)} = \dfrac{-2}{(x-1)^2}.$

4. Sea $f(x) = \dfrac{x}{x+1} \Longrightarrow \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{\dfrac{x+h}{x+h+1} - \dfrac{x}{x+1}}{h} = \dfrac{(x+h)(x+1) - x(x+h+1)}{h(x+h+1)(x+1)}$
$= \dfrac{h}{h(x+h+1)(x+1)} = \dfrac{1}{(x+h+1)(x+1)} \Longrightarrow \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{1}{(x+1)^2}.$

5. $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{x+h+2}} - \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+h+2}}{h\sqrt{x+2}\sqrt{x+h+2}} =$
$\lim_{h\to 0} \dfrac{-h}{h\sqrt{x+2}\sqrt{x+h+2}[\sqrt{x+2} + \sqrt{x+h+2}]} =$
$\lim_{h\to 0} \dfrac{-1}{\sqrt{x+2}\sqrt{x+h+2}[\sqrt{x+2} + \sqrt{x+h+2}]} = \dfrac{-1}{2(x+2)\sqrt{x+2}}.$

6. Sea $f(x) = \sqrt[3]{2x+3}$, entonces $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{\sqrt[3]{2(x+h)+3} - \sqrt[3]{2x+3}}{h} =$
$\dfrac{\sqrt[3]{2(x+h)+3} - \sqrt[3]{2x+3}}{h} \dfrac{(2(x+h)+3)^{\frac{2}{3}} + (2(x+h)+3)^{\frac{1}{3}}(2x+3)^{\frac{1}{3}} + (2x+3)^{\frac{2}{3}}}{(2(x+h)+3)^{\frac{2}{3}} + (2(x+h)+3)^{\frac{1}{3}}(2x+3)^{\frac{1}{3}} + (2x+3)^{\frac{2}{3}}} =$
$\dfrac{2(x+h)+3-(2x+3)}{h} \dfrac{1}{(2(x+h)+3)^{\frac{2}{3}} + (2(x+h)+3)^{\frac{1}{3}}(2x+3)^{\frac{1}{3}} + (2x+3)^{\frac{2}{3}}} =$
$\dfrac{2h}{h} \dfrac{2}{(2(x+h)+3)^{\frac{2}{3}} + (2(x+h)+3)^{\frac{1}{3}}(2x+3)^{\frac{1}{3}} + (2x+3)^{\frac{2}{3}}} \Longrightarrow$
$\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{(2x+3)^2}}.$

7. $f'(x) = \lim_{h\to 0} = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^2 - 3(x+h) - (x^2 - 3x)}{h} =$
$\lim_{h\to 0} \dfrac{x^2 + 2xh + h^2 - 3x - 3h - x^2 + 3x}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{2xh + h^2 - 3h}{h} = \lim_{h\to 0}(2x + h - 3) = 2x - 3.$

8. $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{4(x+h)^2 + 7 - (4x^2 + 7)}{h} =$

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{4(x^2+2xh+h^2)+7-4x^2-7}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{8xh+4h^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(8x+4h) = 8x.$

9. $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{2(x+h)+3} - \dfrac{1}{2x+3}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{2x+3-(2x+2h+3)}{(2x+2h+3)(2x+3)}}{h} =$

   $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-2h}{h(2x+2h+3)(2x+3)} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-2}{(2x+2h+3)(2x+3)} = \dfrac{-2}{(2x+3)^2}.$

10. $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{x+h}} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{\sqrt{x+h}\cdot\sqrt{x}}}{h} =$

    $\lim\limits_{h\to 0} \left(\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{h\sqrt{x(x+h)}} \cdot \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x+h}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+h}} \right) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{x-(x+h)}{h\sqrt{x(x+h)}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})} =$

    $\lim\limits_{h\to 0} - \dfrac{1}{\sqrt{x(x+h)}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})} = -\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}.$

11. $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{(x+h)^3}{x+h+1} - \dfrac{x^3}{x+1}}{h} =$

    $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{(x+h)^3(x+1)-x^3(x+h+1)}{(x+h+1)(x+1)}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{12x^3+3x^2(h+1)+hx(h+3)+h^2}{(x+h+1)(x+1)} =$

    $\dfrac{x^2(2x+3)}{(x+1)^2}.$

12. $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{2(x+h)-1}-\sqrt{2x-1}}{h} =$

    $\lim\limits_{h\to 0} \left(\dfrac{\sqrt{2x+2h-1}-\sqrt{2x-1}}{h} \cdot \dfrac{\sqrt{2x+2h-1}+\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x+2h-1}+\sqrt{2x-1}} \right) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2x+2h-1-(2x-1)}{h(\sqrt{2x+2h-1}+\sqrt{2x-1})}$

    $= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2}{\sqrt{2x+2h-1}+\sqrt{2x-1}} = \dfrac{2}{2\sqrt{2x-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}.$

Parte B. Calcule la primera derivada de $f(x)$.

1. $f(x) = 2x(\cos^2 x+1)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = 2(\cos^2 x+1)^{\frac{1}{2}} + 2x \cdot \frac{1}{2}(\cos^2 x+1)^{-\frac{1}{2}} 2\cos x(-\operatorname{sen} x) =$

   $2\sqrt{\cos^2 x+1} - \dfrac{2x\cos x \operatorname{sen} x}{\sqrt{\cos^2 x+1}}.$

2. $f(x) = (1+2x)\cos^3 5x \Longrightarrow f'(x) = (1+2x)'\cos^3 5x + (1+2x)(\cos^3 5x)' =$

   $2\cos^3 5x + (1+2x)[3\cos^2 5x(-\operatorname{sen} 5x)5] = 2\cos^3 5x - 15(2x+1)\operatorname{sen} 5x\cos^2 5x.$

3. $f(x) = \left(\dfrac{2x+1}{\tan x}\right)^2 \Rightarrow f'(x) = 2\left(\dfrac{2x+1}{\tan x}\right)\left(\dfrac{\tan(x)\cdot 2-(2x+1)\sec^2 x}{\tan^2 x}\right) =$

   $2(2x+1)\left(\dfrac{2\tan x - 2x\sec^2 x - \sec^2 x}{\tan^3 x}\right).$

4. $f(x) = \left(\dfrac{1+\sqrt{x}}{x^{\frac{3}{2}}+3}\right)^{\frac{1}{3}} \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1+\sqrt{x}}{x^{\frac{3}{2}}+3}\right)^{-\frac{2}{3}} \left(\dfrac{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}(x^{\frac{3}{2}}+3) - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{2}})}{(x^{\frac{3}{2}}+3)^2}\right) =$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}+3}{1+x^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}+3-3x-3x^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{x}(x^{\frac{3}{2}}+3)^2}\right)=\frac{-(2x^{\frac{3}{2}}+3x-3)}{6\sqrt{x}(x^{\frac{3}{2}}+3)^2\left(\frac{1+\sqrt{x}}{x^{\frac{2}{3}}+3}\right)^{\frac{2}{3}}}.$$

5. $f(x)=\dfrac{x(x-3)}{(x+3)^2}=\dfrac{x^2-3x}{(x+3)^2}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{(x+3)^2(2x-3)-2(x+3)(x^2-3x)}{(x+3)^4}=$
$\dfrac{(2x-3)(x+3)-2(x^2-3x)}{(x+3)^3}=\dfrac{2x^2+3x-9-2x^2+6x}{(x+3)^3}=\dfrac{9x-9}{(x+3)^3}=\dfrac{9(x-1)}{(x+3)^3}.$

6. $f(x)=x\cos 4x\Longrightarrow f'(x)=x'\cos 4x+x(\cos 4x)'=\cos 4x+x(-\operatorname{sen} 4x(4))=\cos 4x-4x\operatorname{sen} 4x.$

7. $f(x)=\dfrac{3x}{\sqrt{\cos^2 x+2}}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{(\cos^2 x+2)^{1/2}\cdot 3-3x\frac{1}{2}(\cos^2 x+2)^{-1/2}\cdot 2\cos x(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x+2}=$
$\dfrac{3(\cos^2 x+2)+3x\cos x\operatorname{sen} x}{(\cos^2 x+2)(\cos^2 x+2)^{1/2}}=\dfrac{3(\cos^2 x+2+x\cos x\operatorname{sen} x)}{(\cos^2 x+2)^{3/2}}.$

8. $f(x)=\operatorname{sen}^3(2x)\cos^2(3x)\Longrightarrow f'(x)=(\operatorname{sen}^3 2x)'\cos^2 3x+\operatorname{sen}^3 2x(\cos^2 3x)'=$

$3\operatorname{sen}^2 2x\cos 2x(2)\cos^2 3x+\operatorname{sen}^3 2x(2\cos 3x(-\operatorname{sen} 3x)(3))=$

$6\operatorname{sen}^2 2x\cos 2x\cos^2 3x-6\operatorname{sen}^3 2x\operatorname{sen} 3x\cos 3x.$

9. $f(x)=(3x^2+1)\sec^2 x\Rightarrow f'(x)=6x\sec^2 x+(3x^2+1)2\sec^2 x\tan x=$

$6x\sec^2 x+6x^2\sec^2 x\tan x+2\sec^2 x\tan x.$

10. $f(x)=\cos^3(\sqrt[3]{x^4+1})\Longrightarrow f'(x)=3\cos^2(\sqrt[3]{x^4+1})(-\operatorname{sen}\sqrt[3]{x^4+1})\times$
$\left(\dfrac{1}{3}(x^4+1)^{-\frac{2}{3}}(4x^3)\right)=\dfrac{-4x^3\operatorname{sen}(\sqrt[3]{x^4+1})\cos^2(\sqrt[3]{x^4+1})}{(x^4+1)^{\frac{2}{3}}}.$

11. $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x^2+1}}=\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)^{1/2}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)^{-1/2}\cdot\dfrac{x^2+1-x(2x)}{(x^2+1)^2}=$
$\frac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x}}\dfrac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x}}\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}\dfrac{(x^2+1)^{1/2}}{\sqrt{x}}\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}=\dfrac{1-x^2}{2\sqrt{x}(x^2+1)^{3/2}}.$

12. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+25}}\Longrightarrow f'(x)=-\dfrac{1}{2}(x^2+25)^{-\frac{3}{2}}(2x)=\dfrac{-x}{(x^2+25)^{\frac{3}{2}}}.$

13. $f(x)=\sqrt{\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos x}}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}}\left(\dfrac{2\operatorname{sen} x\cos x(1+\cos x)+\operatorname{sen}^2 x\operatorname{sen} x}{(1+\cos x)^2}\right)=$
$\frac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}}\dfrac{2\operatorname{sen} x\cos x+2\operatorname{sen} x\cos^2 x+\operatorname{sen}^3 x}{(1+\cos^2 x)^2}=\dfrac{2\operatorname{sen} x\cos x+2\operatorname{sen} x\cos^2 x+\operatorname{sen}^3 x}{2(1+\cos x)^{3/2}\operatorname{sen} x}=$
$\dfrac{\cos x}{(1+\cos x)^{3/2}}+\dfrac{\cos^2 x}{(1+\cos x)^{3/2}}+\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{2(1+\cos x)^{3/2}}.$

Nota El cálculo de $f'(x)$ en el ejercicio 13, supuso que el dominio de f es tal que $\operatorname{sen} x\geq 0$, ya que $\sqrt{\operatorname{sen}^2 x}=|\operatorname{sen} x|$ y si $\operatorname{sen} x>0\Longrightarrow\sqrt{\operatorname{sen}^2 x}=\operatorname{sen} x$.

14. $f(x)=\sqrt[5]{x\tan x-x^2}\Longrightarrow f'(x)=\dfrac{1}{5}(x\tan x-x^2)^{-\frac{4}{5}}(\tan x+x\sec^2 x-2x).$

15. $f(x)=\cos^2(\operatorname{sen}^2 x)\Rightarrow f'(x)=2\cos(\operatorname{sen}^2 x)(-\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^2 x))2\operatorname{sen} x\cos x\Longrightarrow$

$f'(x)=-4\cos(\operatorname{sen}^2 x)\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^2 x)\operatorname{sen} x\cos x.$

16. Sea $f(x) = \sqrt[3]{\operatorname{sen}^3 x + \sec^2 x}$, entonces tenemos que:
$f'(x) = \frac{1}{3}(\operatorname{sen}^3 x + \sec^2 x)^{-\frac{2}{3}}(3\operatorname{sen}^2 x \cos x + 2\sec x \sec x \tan x) = \dfrac{3\operatorname{sen}^2 x \cos x + 2\sec^2 x \tan x}{3(\operatorname{sen}^3 x + \sec^2 x)^{\frac{2}{3}}}$.

17. $f(x) = 3x - 2 \Longrightarrow f'(x) = 3$.

18. $f(x) = 8x^3 - 7x^2 + 4 \Longrightarrow f'(x) = 24x^2 - 14x$.

19. $f(x) = 2x^7 + 4x^2 - 3 \Longrightarrow f'(x) = 14x^6 + 8x$.

20. $f(x) = x^2 - x^{-1} + x^{-2} \Longrightarrow f'(x) = 2x + x^{-2} - 2x^{-3}$.

21. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1} \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1\cdot(x-1) - 1\cdot(x+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$.

22. $f(x) = x^2 - \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} = x^2 - x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} \Longrightarrow f'(x) = 2x - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = 2x - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$.

23. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1} = \dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{x+1} \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(x+1) - x^{\frac{1}{2}}}{(x+1)^2} = \dfrac{\dfrac{x+1}{2x^{\frac{1}{2}}} - x^{\frac{1}{2}}}{(x+1)^2} = \dfrac{\dfrac{x+1-2x}{2x^{\frac{1}{2}}}}{(x+1)^2} = \dfrac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$.

24. Sea $f(x) = \dfrac{(x-1)(x-2)}{2x+1}$, entonces tenemos que:
$f'(x) = \dfrac{[1(x-2) + 1(x-1)](2x+1) - 2(x-1)(x-2)}{(2x+1)^2} = \dfrac{(2x-3)(2x+1) - 2(x-1)(x-2)}{(2x+1)^2} =$
$\dfrac{4x^2 - 4x - 3 - 2x^2 + 6x - 4}{(2x+1)^2} = \dfrac{2x^2 + 2x - 7}{(2x+1)^2}$.

25. $f(x) = x\operatorname{sen} x \cos x \Longrightarrow f'(x) = \operatorname{sen} x \cos x + x\cos^2 x - x\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x) + x\cos(2x)$.

26. $f(x) = \dfrac{x}{\operatorname{sen} x} \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1\cdot\operatorname{sen} x - x(\cos x)}{\operatorname{sen}^2 x} = \dfrac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$.

27. $f(x) = (x+1)\tan x \Longrightarrow f'(x) = \tan x + (x+1)\sec^2 x$.

28. $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x + x\cos x \Longrightarrow f'(x) = 2x\operatorname{sen} x + x^2\cos x + \cos x - x\operatorname{sen} x = x\operatorname{sen} x + (x^2+1)\cos x$.

29. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1} + x^5\cos x \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2} + 5x^4\cos x - x^5\operatorname{sen} x$.

30. $f(x) = \dfrac{1}{2+\cos x} \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{(2+\cos x)^2}$.

31. $f(x) = \dfrac{2-\operatorname{sen} x}{2+\cos x} \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{-\cos x(2+\cos x) - (-\operatorname{sen} x)(2-\operatorname{sen} x)}{(2+\cos x)^2} =$
$\dfrac{-2\cos x - \cos^2 x + 2\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^2 x}{(2+\cos x)^2} = \dfrac{2(\operatorname{sen} x - \cos x) - 1}{(2+\cos x)^2}$.

32. $f(x) = \dfrac{x\operatorname{sen} x}{1+x^2} \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{(\operatorname{sen} x + x\cos x)(1+x^2) - 2x(x\operatorname{sen} x)}{(1+x^2)^2} =$
$\dfrac{\operatorname{sen} x + x^2\operatorname{sen} x + x\cos x + x^3\cos x - 2x^2\operatorname{sen} x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{(1-x^2)\operatorname{sen} x + (1+x^2)x\cos x}{(1+x^2)^2}$.

Parte C.

1. $y = -3x^3 + 5, \quad y' = -9x^2, \quad y'(-2) = -9(-2)^2 = -9 \cdot 4 = -36.$

   La pendiente de la recta tangente es -36 pasa por el punto $(-2, 29)$, luego: $y = -36x + b \Rightarrow 29 = -36(-2) + b \Rightarrow b = -43.$ R/ La ecuación de la recta es $y = -36x - 43.$

2. $x = \operatorname{sen} 2y$ en $(1, \frac{\pi}{4})$.

   Derivando implícitamente tenemos $1 = (\cos 2y)2y' \Longrightarrow y' = \dfrac{1}{2\cos 2y}$. Así, en $(1, \frac{\pi}{4})$ se tiene que y' se indefine en $(1, \frac{\pi}{4})$, luego la tangente a la curva es la recta $x = 1$.

3. $y = 3\sqrt{x^2+5} - 8, \quad y' = \frac{3}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+5}}2x = \dfrac{3x}{\sqrt{x^2+5}}, \quad y'(2) = 2.$

   La pendiente de la recta tangente es 2 y pasa por el punto $(2, 1)$, luego: $y = 2x + b \Rightarrow b = y - 2x \Rightarrow b = 1 - 2 \cdot 2 = -3.$ R/ $y = 2x - 3.$

4. $y^3 = x^2 + x$ en $(0, 0)$.

   Derivando implícitamente, $3y^2y' = 2x + 1 \Longrightarrow y' = \dfrac{2x+1}{3y^2}$, en $(0, 0)$, y' se indefine y la recta $x = 0$ es tangente a la curva.

5. $x^2y = x + 2, \quad y = \dfrac{x+2}{x^2}, \quad y' = \dfrac{-x-4}{x^3}, \quad y'(2) = -\dfrac{3}{4}$

   La pendiente de la tangente es $-\dfrac{3}{4}$ y pasa por el punto $(2, 1)$, luego: $y = -\dfrac{3}{4}x + b \Rightarrow b = 1 + \dfrac{3}{4} \cdot 2 = \dfrac{5}{2} \Rightarrow y = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{5}{2} \Rightarrow y = \dfrac{-3x+10}{4}.$ R/ $4y + 3x = 10.$

Parte D

1. $xy^2 + x^2y = 2$, al derivar implícitamente con respecto a x se obtiene: $y^2 + x2yy' + 2xy + x^2y' = 0 \Rightarrow 2xyy' + x^2y' = -y^2 - 2xy \Rightarrow y' = \dfrac{-y^2 - 2xy}{2xy + x^2}.$

2. $12(x^2 + y^2) = 25xy \Longrightarrow 12(2x + 2yy') = 25xy' + 25y \Longrightarrow 24x + 24yy' = 25xy' + 25y \Longrightarrow (24y - 25x)y' = 25y - 24x \Longrightarrow y' = \dfrac{25y - 24x}{24y - 25x}.$

3. $\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{y^3} = 2 \Rightarrow x^{-3} + y^{-3} = 2 \Rightarrow -3x^{-4} - 3y^{-4}y' = 0 \Rightarrow -3x^{-4} = 3y^{-4}y' \Rightarrow \dfrac{-3x^{-4}}{3y^{-4}} = y' \Rightarrow y' = -\dfrac{y^4}{x^4}.$

4. $xy^3 - x^5y^2 = 4 \Longrightarrow y^3 + 3xy^2y' - 5x^4y^2 - x^5 2yy' = 0 \Longrightarrow y' = \dfrac{5x^4y^2 - y^3}{3xy^2 - 2x^5y}$ y si $y \neq 0$, $y' = \dfrac{5x^4y - y^2}{3xy - 2x^5}.$

Parte E.

1. Se tiene que $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$ y queremos determinar cuándo $f'(x) = f(x) \Rightarrow 3x^2 = x^3 \Rightarrow x^3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 3$, $f(0) = 0$, $f(3) = 27$, $f'(x)$ y $f(x)$ coinciden en los puntos $(0, 0)$ y $(3, 27)$.

2. a) Consideremos $x = \dfrac{1}{n\pi}$, entonces si el límite existe cuando $x \to 0$, sen $\frac{1}{x}$ tiende a un único valor, pero si $x = \dfrac{1}{2n\pi} \to 0$, sen $\frac{1}{x}$ = sen $2n\pi = 0$, por otro lado, si $x = \dfrac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \to 0$, pero sen $\frac{1}{x} = \operatorname{sen}(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1$ y la función no tiende a un único valor, pues al acercarse a 0 según los valores, tiende a 0 o a 1.

   b) Es conocido que $-1 \leq \operatorname{sen}\frac{1}{x} \leq 1$. Sea $x > 0$, entonces multiplicando por x se tiene $-x \leq x \operatorname{sen}\frac{1}{x} \leq x$, por lo que si $0 = \lim\limits_{x\to 0^+}(-x) \leq \lim\limits_{x\to 0^+}(x \operatorname{sen}\frac{1}{x}) \leq \lim\limits_{x\to 0^+}(x) = 0$ es decir $\lim\limits_{x\to 0^+} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0$. Similarmente se concluye que $\lim\limits_{x\to 0^-} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0$ y como $g(0) = 0$, g es continua en 0.

   Por otro lado $g'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(h) - g(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h \operatorname{sen}\frac{1}{h} - 0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \operatorname{sen}\frac{1}{h}$, pero este límite no existe por la parte a).

   c) Al igual que en b) usamos el hecho que $-1 \leq \operatorname{sen}\frac{1}{x} \leq 1 \Longrightarrow -x^2 \leq x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} \leq x^2 \Longrightarrow$

   $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0$ y como $h(0) = 0$, se tiene que h es continua en 0.

   Además $h'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{h(x) - h(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} - 0}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0$, por lo tanto existe el límite y h es derivable en $x = 0$.

3. $f'(a) = 2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = 2$, $g'(a) = 3 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x) - g(a)}{x - a} = 3$; luego: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \dfrac{2}{3}$.

4. Una recta es paralela al eje x si su pendiente es 0, entonces

   $y' = 12x^3 + 12x^2 - 24x = 12x(x^2 + x - 2) = 0 \Longleftrightarrow x = 0, x = 1, x = -2$.

   Además $y(0) = 20$, $y(1) = 15$, $y(-2) = -12$ por lo que los puntos son $(0, 20)$,$(1, 15)$, $(-2, -12)$.

5. $y = x^2 - 7x + 3 \Rightarrow y' = 2x - 7$ además la pendiente de la recta $5x + y - 3 = 0$ es -5, luego hay que resolver la ecuación $2x - 7 = -5$.

   $2x - 7 = -5 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = -3$.

   R/ La tangente a la parábola $y = x^2 - 7x + 3$ por el punto $(1, -3)$ es paralela a la recta $5x + y - 3 = 0$.

6. $y = x^2 + bx + c$, entonces $y' = 2x + b$. En $(1, 1)$ la pendiente de y es $1 \Longrightarrow y'(1) = 2 + b = 1$, por lo tanto $b = -1$. Además debe pasar por $(1, 1) \Longrightarrow y(1) = 1 = 1 - 1 + c \Longrightarrow c = 1$.

   Así tenemos la parábola $y = x^2 - x + 1$.

7. $y^2 = 2x^3 \Rightarrow 2yy' = 6x^2 \Rightarrow y' = \dfrac{3x^2}{y}$. Si la tangente a la curva es perpendicular a la recta $4x - 3y + 2 = 0$ entonces la pendiente de la tangente es :$-\dfrac{3}{4}$, o sea hay que resolver la ecuación $y' = -\dfrac{3}{4}$.

   Como $y' = \dfrac{3x^2}{y}$ y $y^2 = 2x^3$, entonces $(y')^2 = \dfrac{9x^4}{2x^3} = \dfrac{9x}{2}$, dado que $y' = -\dfrac{3}{4} \Rightarrow (y')^2 = \dfrac{9}{16}$, luego $\dfrac{9x}{2} = \dfrac{9}{16} \Rightarrow x = \frac{1}{8} \Rightarrow y^2 = 2\dfrac{1}{8^3} \Rightarrow y = \pm\frac{1}{16}$.

R/ El punto es $(\frac{1}{8}, -\frac{1}{16})$. ¿Por qué se descarta la solución $(\frac{1}{8}, \frac{1}{16})$?

8. $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3 \Longrightarrow y' = 3x^2 + 4x - 4$, y la pendiente es: $y'(-2) = 3(-2)^2 + 4(-2) - 4 = 0$. Como la recta pasa por $(-2, 5)$ la recta es $y = 5$. La recta normal es $x = -2$.

9. $y = \sqrt[3]{x-1} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$, y' se indefine en $x = 1$. Luego, $x = 1$ es la ecuación de la recta tangente, $y = 0$ es la ecuación de la recta normal.

10. $x^5 + y^5 - 2xy = 0 \Longrightarrow 5x^4 + 5y^4y' - 2xy' - 2y = 0 \Longrightarrow y' = \dfrac{2y - 5x^4}{5y^4 - 2x}$ y en $(1,1)$, $y'(1) = \dfrac{2-5}{5-2} = -1$. Así tenemos $\dfrac{y-1}{x-1} = -1 \Longleftrightarrow y - 1 = -x + 1 \Longleftrightarrow x + y - 2 = 0$.

11. $y^4 = 4x^4 + 6xy \Rightarrow 4y^3y' = 16x^3 + 6y + 6xy' \Rightarrow 2y^3y' - 3xy' = 8x^3 + 3y \Rightarrow y' = \dfrac{8x^3 + 3y}{2y^3 - 3x}$.
Si $x = 1$, $y = 2$, entonces $y' = \dfrac{14}{13}$. La ecuación de la tangente es: $y - 2 = \dfrac{14}{13}(x-1) \Rightarrow 14x - 13y + 12 = 0$. La pendiente de la normal es $-\dfrac{13}{14}$ y pasa por el punto $(1,2)$ la ecuación es: $y - 2 = -\dfrac{13}{14}(x-1) \Rightarrow 14y + 13x - 41 = 0$.

12. Se tiene que: $\left.\begin{array}{lllll} y_a = 4x^2 + 2x - 8 & \Longrightarrow & y'_a = 8x + 2 & \Longrightarrow & y'_a(3) = 26 \\ y_b = x^3 - x + 10 & \Longrightarrow & y'_b = 3x^2 - 1 & \Longrightarrow & y'_b(3) = 26 \end{array}\right\}$ i.e. las curvas tienen la misma pendiente cuando $x = 3$. Falta verificar que ambas curvas pasan por $(3, 34)$.

En efecto, $y_a(3) = 4(3)^2 + 2(3) - 8 = 34$ y $y_b(3) = (3)^2 - 3 + 10 = 34$.

En $(-2, 4)$ no sucede lo mismo pues $y'_a(-2) = -14$ y $y'_b(-2) = -11$ y las pendientes son distintas.

13. Hay que demostrar que donde se intersecan la hipérbolas, las rectas tangentes a cada una son perpendiculares. No será necesario calcular los puntos de intersección (trabajo por demás engorroso) pues $xy = a^2 \Rightarrow y = \frac{a^2}{x} \Rightarrow y' = -\frac{a^2}{x^2}$. Por otro lado, $x^2 - y^2 = b^2 \Rightarrow y' = \frac{x}{y}$.
En los puntos de intersección de las hipérbolas el producto de las derivadas corresponderá al producto de las pendientes de las tangentes, por lo tanto bastará probar que tal producto es -1. En efecto; el producto de las derivadas es: $-\frac{a^2}{x^2}\frac{x}{y} = -\frac{a^2}{xy} = -\frac{a^2}{a^2} = -1$.

14. a) $y = \frac{1}{x^2}$, $y' = \frac{-2}{x^3}$ y en ningún punto $y'(x) = 0$, es decir no tienen tangentes horizontales.
b) $y = x^4 - 8x^2 + 2 \Longrightarrow y' = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4) = 0 \Longleftrightarrow x = 0,\ x = \pm 2$. Así tenemos que hay tangentes horizontales en $(0, 2)$, $(-2, -14)$, $(2, -14)$.

15. $y = x^2 \Rightarrow y' = 2x$. Por otro lado, $y = -x^2 + 6x - 5 \Rightarrow y' = -2x + 6$.
Supóngase que $(x_1, {x_1}^2)$ es el punto de tangencia en la curva $y = x^2$, la pendiente de la tangente es $2x_1$. Si $(x_2, -{x_2}^2 + 6x_2 - 5)$ es el punto de tangencia en la curva $y = -x^2 + 6x - 5$ entonces la pendiente de la tangente es $-2x_2 + 6$. Por tratarse de la misma tangente se cumplirá $2x_1 = -2x_2 + 6$, o sea $x_1 = -x_2 + 3$. Como la tangente pasa por $(x_1, {x_1}^2)$ y por $(x_2, -{x_2}^2 + 6x_2 - 5)$, entonces:

$m = \dfrac{{x_1}^2 + {x_2}^2 - 6x_2 + 5}{x_1 - x_2}$, al sustituir $x_1 = -x_2 + 3$ y $m = \dfrac{2{x_2}^2 - 12x_2 + 14}{-2x_2 + 3}$, al igualarlo con $-2x_2 + 6$, se obtiene $x_2^2 - 3x_2 + 2 = 0$, cuyas soluciones son $x_2 = 2$, $x_2 = 1$.

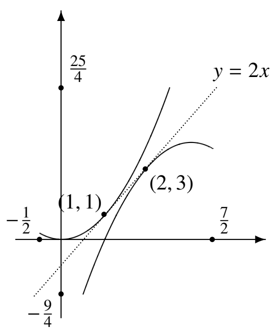
i) Si $x_2 = 2$, entonces la pendiente de la tangente es 2 y pasa por $(2, 3)$, luego su ecuación es : $y - 3 = 2(x - 2) \Rightarrow y - 2x + 1 = 0$. Además, $x_2 = 2 \Rightarrow x_1 = 1$.

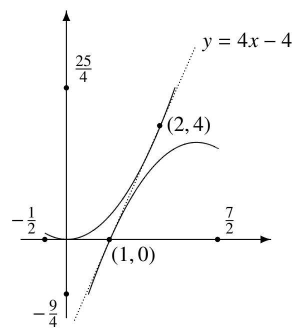
Esta es la ecuación de la tangente que pasa por el punto $(2, 3)$ de la parábola $y = -x^2 + 6x - 5$ y por el punto $(1, 1)$ de la parábola $y = x^2$.

ii) Si $x_2 = 1$ la pendiente de la tangente es 4 y pasa por le punto $(1, 0)$, su ecuación es $y - 0 = 4(x - 1)$, o sea $y = 4x - 4$.

Esta es la ecuación de la recta tangente que pasa por el punto $1, 0)$ en la parábola $y = -x^2 + 6x - 5$ y por $(2, 4)$ en la parábola $y = x^2$.

Los siguientes gráficos son de excelente ayuda con la comprensión del ejercicio anterior.





16. La intersección de las curvas $y_a = x$, $y_b = \dfrac{1}{x}$ se da cuando $x = \dfrac{1}{x} \iff x^2 = 1$ i.e. $x = \pm 1$.
    Así tenemos que $y'_a = 1$, $y'_b = -\dfrac{1}{x^2}$, por lo que $y'_b(\pm 1) = -1$ y se tiene que
    $y'_a(\pm 1) \cdot y'_b(\pm 1) = -1$, es decir las tangentes son perpendiculares en $x = \pm 1$.

17. Para demostrar que al menos hay una tangente horizontal debemos ver que para algún x real $f'(x)$ se anula. Observe que $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 14x + 3$ es un polinomio de grado impar y que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f'(x) = \pm\infty$, por lo que al menos hay una raíz real para $f'(x) = 0$.
    También se puede razonar de la siguiente manera: $f'(0) > 0$; $f'(-1) < 0$, luego por el Teorema de los Valores Intermedios existe un $c \in]-1, 0[$ tal que $f'(c) = 0$.

Tema No. 3

Ejercicios de Razones de Cambio Relacionadas, Teoremas de Rolle y Valor Medio   Prof. Pedro Rodríguez

1. Una explosión de dinamita lanza una roca directamente hacia arriba con una velocidad inicial de $160p/s$ (aproximadamente $175\frac{km}{h}$). La roca alcanza una altura de $S = 160t - 16t^2$ pies después de t segundos.
   a) ¿A qué altura máxima llega la roca?
   b) ¿Cuáles son la velocidad y la rapidez de la roca cuando está a 256 pies sobre el suelo, subiendo, y bajando?
   c) ¿Cuál es la aceleración de la roca en cualquier instante t durante su vuelo?
   d) ¿Cuándo llega al suelo otra vez?
   R/ a) 400 pies, b) $v(2) = 96\frac{pies}{seg}$, $v(8) = -96\frac{pies}{seg}$, c) $a = -32\frac{pies}{seg^2}$, d) 10 segundos después.
2. ¿Con qué rapidez baja el nivel de un fluido contenido en un tanque cilíndrico de almacenamiento, si se bombea hacia afuera el fluido a razón de $3000\frac{l}{min}$? R/ $\frac{dh}{dt} = -\frac{3}{\pi r^2}\frac{l}{min}$.
3. Un globo de aire caliente que se eleva verticalmente desde un campo es rastreado por un localizador a $500m$ del punto de despegue. En el instante en que el ángulo del localizador es $\frac{\pi}{4}$, el ángulo se está elevando a $0,14\frac{rad}{min}$. ¿Con qué velocidad se está elevando el globo en ese instante? R/ $140\frac{m}{min}$.
4. Un auto de policía, al acercarse a una intersección en ángulo recto desde el norte va siguiendo un auto que ha dado vuelta en la esquina y se mueve directo hacia el este. Cuando el auto de policía está a $0,6km$ al norte de la intersección y el auto está a $0,8km$ al este, la policía determina con el radar que la distancia entre ellos y el auto aumenta a $20\frac{km}{h}$. Si el auto de policía se mueve a $60\frac{km}{h}$ en el instante de medición, ¿cuál es la velocidad del auto que siguen? R/ $70\frac{km}{h}$.
5. Se vierte agua en un tanque cónico a razón de $9\frac{pies^3}{min}$. El tanque tiene su vértice hacia abajo, un radio en su base de 5 pies y una altura de 10 pies, ¿con qué rapidez se está elevando el nivel del agua cuando la profundidad es de 6 pies? R/ $0,32\frac{pies}{min}$.

6. Un cohete lanzado en forma vertical es rastreado por una estación de radar, localizada a 3 millas de la plataforma de lanzamiento. ¿Cuál es la velocidad vertical del cohete en el instante en que su distancia a la estación de radar es 5 millas y tal distancia crece a razón de $5000\frac{mi}{h}$? R/ $\frac{dy}{dt} = 6250\frac{mi}{h}$.

7. Un hombre de 6 pies de altura camina con una velocidad de $8\frac{pies}{seg}$, alejándose de un farol de la calle que está en el extremo de un poste de 18 pies. ¿Qué tan rápido se mueve la punta de su sombra a lo largo del piso cuando la persona está a 100 pies del poste de luz? R/ $12\frac{pies}{seg}$.

8. Dos estaciones de radar A y B, donde B está a $6km$ al este de A, rastrean a un barco. En cierto momento el barco está a $5km$ de A y esta distancia aumenta a razón de $28\frac{km}{h}$. En el mismo instante, el barco está también $5km$ de B, pero esta distancia aumenta a sólo $4\frac{km}{h}$. ¿Dónde está el barco, qué tan rápido se mueve y en qué dirección?

   R/ El barco está a $3km$ al este y $4km$ al norte de A; navega hacia el noreste con una rapidez de $20\sqrt{2}\frac{km}{h}$.

9. Una escalera de 10 pies de largo está apoyada contra una pared vertical. Si el extremo inferior de la escalera resbala alejándose de la pared a razón de $1\frac{pie}{s}$, ¿con qué rapidez resbala hacia abajo su extremo superior cuando su extremo inferior está a 6 pies de la pared? R/ $-\frac{3}{4}\frac{pies}{seg}$.

10. Una lámpara de arco cuelga a la altura de $4m$ directamente sobre un paseo rectilíneo y horizontal. Si en este paseo un muchacho de $1,50m$ de alto, está alejándose de la lámpara con una rapidez de $55\frac{m}{min}$, ¿a cuántos metros por minuto se alarga su sombra? R/ $33\frac{m}{min}$.

11. Una lámpara que está sobre el suelo ilumina una pared que se encuentra $12m$ de distancia. Si un hombre de $2m$ de estatura camina de la lámpara hacia el edificio a una velocidad de $1,6\frac{m}{seg}$; ¿con qué rapidez disminuye su sombra sobre el edificio cuando se encuentra a $4m$ de él? R/ $-0,6m/s$.

12. Un avión que vuela horizontalmente a una altura de $1milla$ y a una velocidad de $500\frac{millas}{hora}$, pasa directamente sobre una estación de radar. Encuentre la velocidad a la que la distancia del avión a la estación aumenta, cuando el avión se encuentra a $2millas$ de la estación.

    R/ $250\sqrt{3}mi/h$.

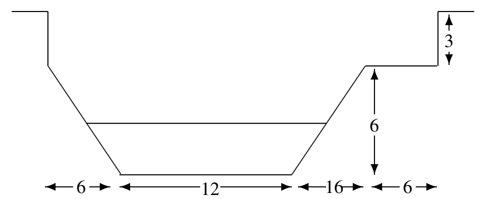
13. Un hombre empieza a caminar hacia el norte a razón de $4\frac{pies}{seg}$, a partir de un punto P. Cinco minutos más tarde una dama empieza a caminar hacia el sur a razón de $5\frac{pies}{seg}$, a partir de un punto situado a $500pies$ al este de P. ¿A qué velocidad se están separando $15min$ después de que la dama empieza a caminar? R/ $8,99pies/seg$.

14. De un tanque en forma de cono invertido se deja salir agua a razón de $10000\frac{cm^3}{min}$, al mismo tiempo que se bombea agua al interior del tanque a una velocidad constante. El tanque tiene $6m$ de altura y el diámetro en la parte superior es de $4m$. Si el nivel del agua está aumentando a razón de $20\frac{cm}{min}$, cuando la altura

del agua es de $2m$, encuentre la velocidad a la que se bombea el agua al interior del tanque. R/ $289252,68 cm^3/min$.

15. Una alberca tiene $20 pies$ de ancho, $40 pies$ de largo, $3 pies$ de profundidad en un extremo y $9 pies$ de profundidad máxima.

    En la figura se encuentra el corte transversal de la alberca. Si la alberca se llena a razón de $0,8 \frac{pies^3}{min}$, ¿con qué velocidad aumenta el nivel del agua cuando la profundidad máxima es de $5 pies$?



R/ $1,32 \times 10^{-3} pies/min$.

16. Una escalera de $10 pies$ de longitud se apoya contra una pared vertical. Si la parte inferior de la escalera se desliza alejándose de la pared a una velocidad de $2 \frac{pies}{seg}$, ¿con qué rapidez cambia el ángulo formado por la parte superior de la escalera y la pared cuando mide $\frac{\pi}{4} rad$? R/ $\frac{\sqrt{2}}{5} rad/seg$.

17. Una pequeña isla se encuentra a una distancia de $3km$ de un faro. El punto de la isla más cercano al faro es P, si la lámpara del faro gira a razón de $4 rev/min$, ¿cuál es la rapidez con la que se mueve el rayo de luz a lo largo de la costa rectilínea, cuando se encuentra a $1km$ del punto P? R/ $\frac{80\pi}{3} km/min$.

Teorema de Rolle y del Valor Medio

18. Verifique que la función dada satisface las tres hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo indicado. Luego, encuentre todos los números c que satisfagan el teorema de Rolle.
    i) $f(x) = \cos(2x)$; $[0, \pi]$
    ii) $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$; $[-1, 1]$.

19. i) Sea $f(x) = 1 - x^{2/3}$. Demuestre que $f(-1) = f(1)$, pero que no hay ningún punto c en $]-1, 1[$ tal que $f'(c) = 0$. ¿Por qué no contradice esto el teorema de Rolle?
    ii) Sea $f(x) = (x-1)^{-2}$. Demuestre que $f(0) = f(2)$, pero que no hay ningún número c en $]0, 2[$ tal que $f'(c) = 0$. ¿Por qué no contradice esto el teorema de Rolle?

20. Verifique que la función dada satisface las hipótesis del Teorema del Valor Medio en el intervalo indicado. Luego, encuentre todos los números c que satisfagan la condición del teorema del valor medio.
    i) $f(x) = \frac{1}{x}$; $[1, 2]$.
    ii) $f(x) = 1 + \sqrt[3]{x-1}$; $[2, 9]$.

21. Demuestre que la ecuación $x^7 + 5x^3 + x - 6 = 0$ tiene exactamente una solución real.

22. Demuestre que la ecuación $x^5 + 10x + 3 = 0$ tiene exactamente una solución real.

23. Si $f'(x) = c$, para todo $x \in \mathbb{R}$, en donde c es una constante, utilice el corolario de teorema del valor medio para demostrar que $f(x) = cx + d$, para alguna constante d.

    Corolario del Teorema del Valor Medio : Si $f'(x) = g'(x)$, para todo x en un intervalo $]a, b[$, entonces $f - g$ es una constante en $]a, b[$; esto es, $f(x) = g(x) + k$; con k constante.

24. Aplique el teorema del valor medio para probar la desigualdad $|\operatorname{sen}(b) - \operatorname{sen}(a)| \leq |b - a|$, para todo a y b.

25. Suponga que la función f es derivable en el intervalo $[-1, 2]$; con $f(-1) = -1$ y $f(2) = 5$. Demuestre que existe un punto sobre la gráfica de f en el que la recta tangente es paralela a la recta con la ecuación $y = 2x$.

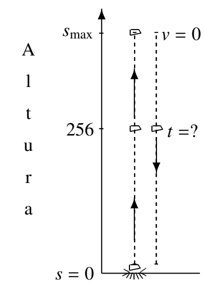
26. La altura de un objeto t segundos después de haberse soltado desde $500 pies$ de altura es $s(t) = -16t^2 + 500$.

    a) Hallar su velocidad media en los tres primeros segundos.

    b) Usar el teorema del valor medio para verificar que en algún instante en esos tres segundos de caída, la velocidad instantánea es igual a la velocidad media. ¿En que instante ocurre esto?

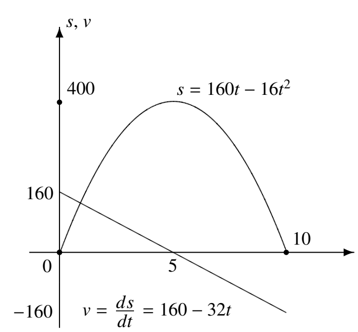
Soluciones de ejercicios del Tema No.3: Razones de Cambio Relacionadas, Teoremas de Rolle y Valor Medio Prof. Pedro Rodríguez

1. a) En el sistema coordenado elegido, s mide la altura del suelo hacia arriba, así que la velocidad es positiva hacia arriba y negativa hacia abajo. En el instante en que la roca está en el punto más alto, es aquel cuando la velocidad durante el vuelo es 0. Por lo tanto, para encontrar la altura máxima, todo lo que hay que hacer es encontrar cuando $v = 0$ y evaluar s en ese tiempo.



En cualquier instante t, la velocidad es viene dada por s', o sea:
$v = \dfrac{ds}{dt} = \dfrac{d}{dt}(160t - 16t^2) = 160 - 32t\ pies/s.$
La velocidad es cero cuando $160 - 32t = 0$, o sea en $t = 5$.
La altura de la roca en $t = 5$ es:
$s_{\max} = s(5) = 160(5) - 16(5)^2 = 800 - 400 = 400\ pies.$

b) Para hallar la velocidad de la roca a 256 pies cuando sube y de nuevo cuando baja, hallamos los dos valores de t para los cuales $s(t) = 160t - 16t^2 = 256$.



Para resolver esta ecuación escribimos:
$160t - 16t^2 - 256 = 0 \Longrightarrow 16(t^2 - 10t + 16) = 0 \Rightarrow$
$(t - 2)(t - 8) = 0 \Rightarrow t = 2, t = 8.$
La roca está a 256 pies sobre el suelo 2 segundos después de la explosión y de nuevo 8 segundos después de la explosión. Las velocidades de la roca en estos instantes son:
$v(2) = 160 - 32(2) = 160 - 64 = 96\ pies/s,$
$v(8) = 160 - 32(8) = 160 - 256 = -96\ pies/s.$
En ambos instantes, la rapidez de la roca es 96 $pies/s$.

c) En cualquier instante durante su vuelo después de la explosión, la aceleración de la roca es $a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d}{dt}(160 - 32t) = -32\ \dfrac{pies}{s^2}$. La aceleración es siempre hacia abajo. Cuando la roca sube, la frena; cuando cae, la acelera.

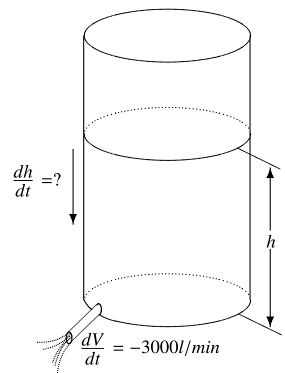
d) La roca toca el suelo en el instante positivo t para el cual $s = 0$. La ecuación $160t - 16t^2 = 0$ se factoriza como $16t(10 - t) = 0$, así que las soluciones son $t = 0$ y $t = 10$. En $t = 0$ ocurrió la explosión y la roca fue lanzada hacia arriba. Regresó al suelo 10 segundos después.

2. Dibujamos una imagen de un tanque cilíndrico parcialmente lleno. Llamando r a su radio y h a la altura del fluido. Sea V el volumen del fluido.

Conforme pasa el tiempo, el radio permanece constante, pero V y h cambian. Pensamos en V y h como funciones diferenciables del tiempo y usamos t para representarlo. Sabemos que $\frac{dV}{dt} = -3000\frac{l}{min}$ (La razón es negativa porque el volumen del fluido decrece).

Se nos pide hallar $\frac{dh}{dt}$. (La velocidad con que baja el nivel del tanque).

Para hallar $\frac{dh}{dt}$, primero escribimos una ecuación que relacione h y V. La ecuación depende de las unidades que se elijan para V, r y h. Con V en litros y r y h en metros, la ecuación apropiada para el volumen del cilindro es $V = 1000\pi r^2 h$, porque un metro cúbico tiene 1000 litros.



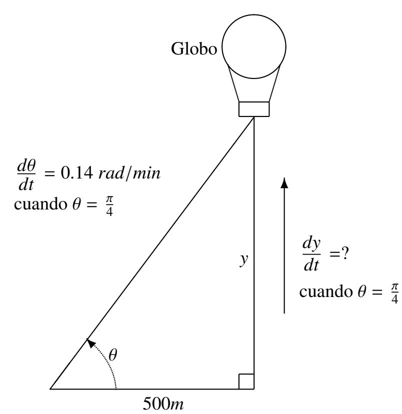
Como V y h son funciones diferenciables de t, podemos diferenciar ambos lados de la ecuación de $V = 1000\pi r^2 h$ con respecto a t para obtener una ecuación que relacione $\frac{dh}{dt}$ con $\frac{dV}{dt} = 1000\pi r^2 \frac{dh}{dt}$ (r es una constante).

Sustituimos el valor conocido de $\frac{dV}{dt} = -3000$ y despejamos $\frac{dh}{dt}$:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{3000}{1000\pi r^2} = -\frac{3}{\pi r^2}. \tag{1}$$

El nivel del fluido decrece a razón de $\frac{3}{\pi r^2} l/min$. La ecuación (1) muestra cómo la razón a la cual el nivel del fluido decrece depende del radio del tanque. Si r es pequeño, $\frac{dh}{dt}$ será grande; si r es grande; $\frac{dh}{dt}$ será pequeña.

3. Se responderá la pregunta en seis pasos:



Paso 1: Hacer un dibujo y nombrar las variables y las constantes.

Las variables de la figura son:

θ = ángulo que el localizador hace con el suelo (en radianes).

y =altura del globo (en metros).

Representemos con t el tiempo y supongamos que θ y y son funciones diferenciables de t.

La única constante en la figura es la distancia del localizador al punto de despegue (500m). No es necesario asignarle un símbolo especial.

Paso 2: Escribir la información numérica restante.

$\frac{d\theta}{dt} = 0,14\ rad/min$ cuando $\theta = \frac{\pi}{4}$

Paso 3: Escribir lo que se nos pide hallar. Queremos $\frac{dy}{dt}$ cuando $\theta = \pi/4$.

Paso 4: Escribir una ecuación que relacione las variables y y θ. Usemos la razón: $\dfrac{y}{500} = \tan\theta$, de donde $y = 500\tan\theta$.

Paso 5: Diferenciar con respecto a t usando la regla de la cadena. El resultado de cómo se relacionan $\dfrac{dy}{dt}$ (lo que queremos) y $\dfrac{d\theta}{dt}$ (lo que conocemos), entonces es:

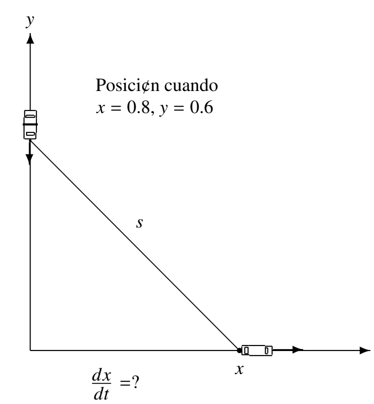
$\dfrac{dy}{dt} = 500\sec^2\theta\dfrac{d\theta}{dt}$

Paso 6: Evaluar con $\theta = \pi/4$ y $d\theta/dt = 0,14$ para hallar dy/dt.

$\dfrac{dy}{dt} = 500(\sqrt{2})^2(0,14) = (1000)(0,14) = 140$

Así, en el instante indicado, el globo se eleva a razón de 140 m/min.

4. Se siguen los pasos de la estrategia básica.



Paso 1: Dibujo y variables. Dibujamos el auto de la policía y el auto perseguido en un plano coordenado, usando la parte positiva del eje x como la autopista que va hacia el este, y la parte positiva del eje y como la que va al sur. Sea t el tiempo y sean

x =posición del auto en el instante t,

y =posición del auto de policía en el instante t,

s =distancia entre ambos autos en el instante t.

Supondremos que x, y y s son funciones diferenciables de t.

Paso 2: Información numérica. En el instante dado,

$x = 0,8\ km$, $y = 0,6\ km$, $\dfrac{dy}{dt} = -60\ km/h$, $\dfrac{ds}{dt} = 20\ km/h$.

(dy/dt es negativa porque y está decreciendo.)

Paso 3: Hallar: $\dfrac{dx}{dt}$

Paso 4: ¿Cómo se relacionan las variables?: $s^2 = x^2 + y^2$ (La ecuación $s = \sqrt{x^2 + y^2}$ también funciona).

Paso 5: Diferenciar respecto a t.

$$2s\frac{ds}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{ds}{dt} = \frac{1}{s}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right)$$

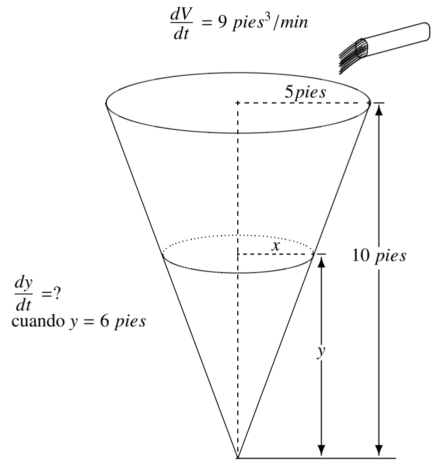
Paso 6: Evaluar, con $x = 0,8$, $y = 0,6$, $dy/dt = -60$, $ds/dt = 20$, y despejar dx/dt.

$$20 = \frac{1}{\sqrt{(0,8)^2 + (0,6)^2}}\left(0,8\frac{dx}{dt} + (0,6)(-60)\right) = 0,8\frac{dx}{dt} - 36 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{20 + 36}{0,8} = 70.$$

En el instante dado la velocidad del auto que persiguen es 70 km/h.

5. Seguimos los pasos de la estrategia básica.

Paso 1: Dibujo y variables. Dibujamos un tanque cónico parcialmente lleno.



Las variables del problema son:

V = volumen del agua (en $pies^3$) en el instante t (en minutos),

x = radio (en $pies$) de la superficie del agua en el instante t,

y = profundidad (en $pies$) del agua en el tanque en el instante t.

Supondremos que V, x y y son funciones diferenciables de t. Las constantes son las dimensiones del tanque.

Paso 2: Información numérica. En el instante dado,

$y = 6\ pies$, $\dfrac{dV}{dt} = 9\ pies^3/min$.

Paso 3: Hallar: $\dfrac{dy}{dt}$.

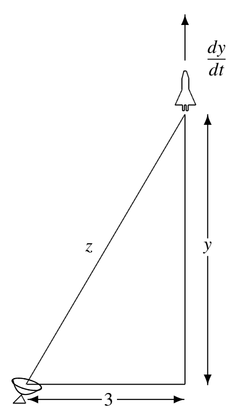
Paso 4: ¿Cómo se relacionan las variables? El volumen del cono: $V = \frac{1}{3}\pi x^2 y$. En esta ecuación aparece x, así como V y y. Como no tenemos información sobre x y dx/dt en el instante dado, necesitamos eliminar x. Por semejanza de triángulos, podemos expresar x en términos de y: $\dfrac{x}{y} = \dfrac{5}{10}$, o $x = \dfrac{y}{2}$, por lo tanto, $V = \dfrac{1}{3}\pi\left(\frac{y}{2}\right)^2 y = \dfrac{\pi}{12}y^3$.

Paso 5: Diferenciar respecto a t. Diferenciamos la ecuación obtenida, y tenemos $\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{\pi}{12}3y^2\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\pi}{4}y^2\dfrac{dy}{dt}$, entonces despejamos dy/dt para expresar la razón de cambio pedida (dy/dt) en términos de la relación que conocemos (dV/dt): $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{4}{\pi y^2}\dfrac{dV}{dt}$.

Paso 6: Evaluar, con $y = 6$ y $dV/dt = 9 \Rightarrow \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{4}{\pi(6)^2}9 = \dfrac{1}{\pi} \approx 0,32\ pies/min$.

En el instante dado, el nivel del agua se eleva a razón de $0,32\ pies/min$, aproximadamente.

6. La figura ilustra esta situación. Sea y la altura del cohete (en millas) y z su distancia a la estación de radar. Tenemos que

   $\dfrac{dz}{dt} = 5000$ cuando $z = 5$.

   Queremos determinar dy/dt (en millas por hora) en este instante. Aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo de la figura y obtenemos:

   $y^2 + 9 = z^2$ como relación entre y y z. De esto vemos que $y = 4$ cuando $z = 5$. Derivando implícitamente con respecto a t, tenemos que $2y\dfrac{dy}{dt} = 2z\dfrac{dz}{dt}$.

   Sustituimos los datos $y = 4$, $z = 5$ y $dz/dt = 5000$, con lo que tenemos $\dfrac{dy}{dt} = 6250\ (mi/h)$, en el instante en cuestión.

7. Sea x la distancia del hombre al poste y z la distancia de la punta de su sombra a la base del poste.

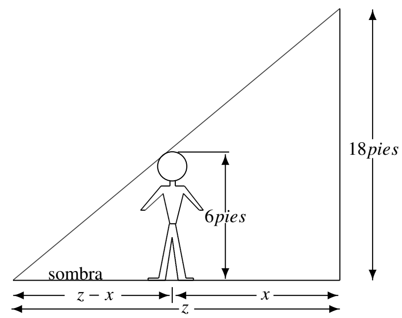
Aunque x y z son funciones del tiempo t, no intentaremos determinar fórmulas explícitas para ellas. Tenemos $dx/dt = 8$ (en pies/seg); queremos determinar dz/dt cuando $x = 100$ $pies$. Igualamos las razones de los lados correspondientes de los dos triángulos semejantes de la figura, y veremos que

$\dfrac{z}{18} = \dfrac{z-x}{6} \Rightarrow 2z = 3x$, y la derivación implícita nos da:

$2\dfrac{dz}{dt} = 3\dfrac{dx}{dt}$. Sustituimos $dx/dt = 8$ y vemos que

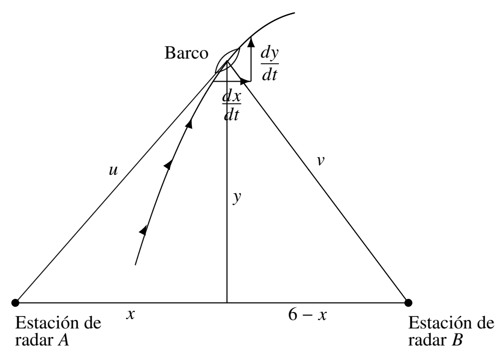
$\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{3}{2}\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{3}{2}8 = 12.$

De modo que la punta de la sombra del hombre se mueve a 12 $pies/seg$.



8. Con las distancias indicadas en la figura, tenemos que (con la ayuda del teorema de Pitágoras) $x^2+y^2 = u^2$ y $(6-x)^2 + y^2 = v^2$.

Tenemos los siguientes datos: $u = v = 5$, $dv/dt = 28$, y $dv/dt = 4$ en el instante en cuestión. Como el barco está a la misma distancia de A y de B, es claro que $x = 3$. Así, $y = 4$, por lo tanto, el barco está a 3 km al este y 4 km al norte de A.



Derivamos de manera implícita las dos ecuaciones y obtenemos:

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 2u\frac{du}{dt}, \quad -2(6-x)\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 2v\frac{dv}{dt}.$$

Cuando sustituimos los datos numéricos dados y los datos deducidos, obtenemos:

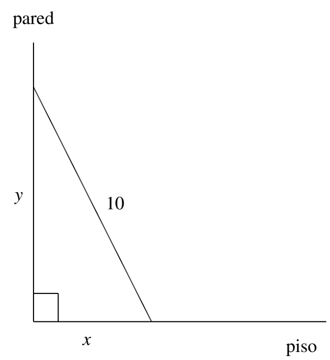
$$3\frac{dx}{dt} + 4\frac{dy}{dt} = 140 \;\text{ y }\; -3\frac{dx}{dt} + 4\frac{dy}{dt} = 20.$$

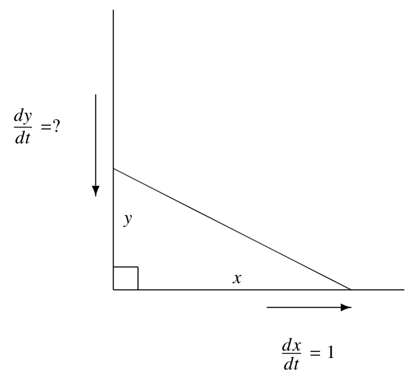
Estas ecuaciones se resuelven fácilmente: $dx/dt = dy/dt = 20$. En consecuencia, el barco navega hacia el noreste, con una rapidez de $\sqrt{20^2+20^2} = 20\sqrt{2}$ (km/h).

9. Dibujamos un diagrama y le asociamos los nombres e indicaciones necesarios. Sean x metros la distancia del extremo inferior de la escalera a la pared y y metros la distancia del extremo superior al piso. Note que tanto x como y son funciones de t (tiempo).

Nos dan que $dx/dt = 1$ $pies/seg$ y se nos pide hallar dy/dt cuando $x = 6$ $pies$. En este problema, la relación entre x y y se expresa con el Teorema de Pitágoras: $x^2 + y^2 = 100$.

Si se deriva cada miembro con respecto a t aplicando la regla de la cadena, tenemos $2x\dfrac{dx}{dt} + 2y\dfrac{dy}{dt} = 0$ y se resuelve para la relación deseada: $\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{x}{y}\dfrac{dx}{dt}$.
Cuando $x = 6$, el teorema de Pitágoras da $y = 8$, por tanto, al sustituir estos valores y $dx/dt = 1$, tenemos $\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{6}{8}(1) = -\dfrac{3}{4}$ $pies/seg$ (x aumenta, y disminuye).





10. Sean:
x = distancia del muchacho a un punto directamente por debajo de la lámpara.

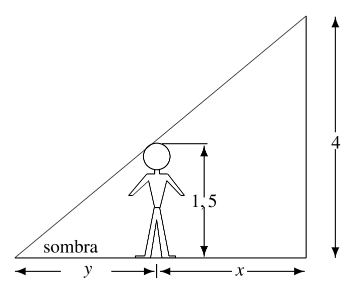
y = longitud de la sombra del muchacho.

Por semejanza de triángulos se tiene:

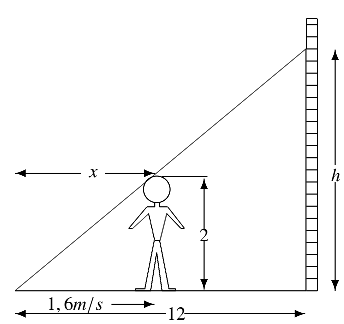
$\dfrac{y}{y+x} = \dfrac{1,5}{4} \Rightarrow y = \dfrac{3}{5}x.$

Derivando a ambos lados obtenemos: $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{3}{5}\dfrac{dx}{dt}$.

Sustituyendo los valores: $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{3}{5} \times 55 \Rightarrow \dfrac{dy}{dt} = 33m/min$.



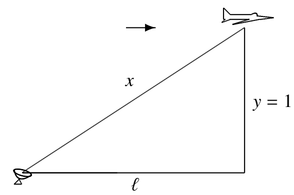
11. Por semejanza de triángulos: $\dfrac{h}{12} = \dfrac{2}{x} \Longrightarrow h = \dfrac{24}{x}$.
Cuando el hombre está a $4m$ de la pared, $x = 8$. Así: $\dfrac{dh}{dt} = -\dfrac{24}{x^2}\dfrac{dx}{dt}$ en $x = 8$, y nos dicen que $\dfrac{dx}{dt} = 1.6 \Longrightarrow \dfrac{dh}{dt} = -\dfrac{24}{64} \cdot 1.6 = -0.6m/s$ en $x = 8$.



12. Por Pitágoras se tiene $\ell^2 = x^2 - y^2 \Longrightarrow \ell = \sqrt{x^2 - y^2}$. Luego $2\ell\dfrac{d\ell}{dt} = 2x\dfrac{dx}{dt} - 2y\dfrac{dy}{dt}$.

Como $\dfrac{dy}{dt} = 0$, la altura es constante e igual a 1 milla:

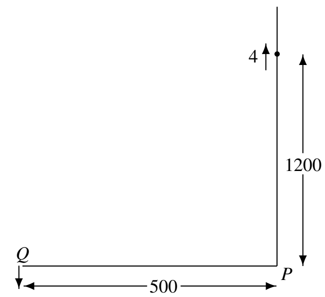
$$2\ell\frac{d\ell}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\ell}{x}\frac{d\ell}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{x^2-y^2}}{x}\frac{d\ell}{dt}.$$



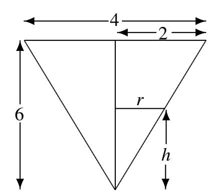
Sustituyendo los valores: $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\sqrt{4-1}}{2} \times 500 \Rightarrow \dfrac{dx}{dt} = 250\sqrt{3}\mathit{millas/hora}$.

13. Después de t segundos que la dama ha caminado, élla se encuentra a $5t$ pies hacia el sur de Q, mientras que él a $1200 + 4t$ hacia el norte de P. La diferencia de velocidades es $1\mathit{pie/s}$ hacia el sur. La rapidez con la que se separan se obtiene por:

$d^2 = (1200+9t)^2 + 500^2 \Longrightarrow d \cdot \dfrac{d}{dt}(d) = 9(1200+9t)$, y así para $t = 15.60$, $\dfrac{d}{dt}(d) = 8,99\mathit{pies/s}$.



14. Por triángulos semejantes $\dfrac{2}{6} = \dfrac{r}{h} \Rightarrow r = \dfrac{h}{3}$, entonces:

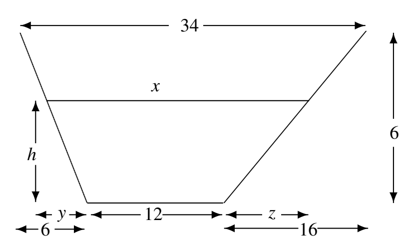


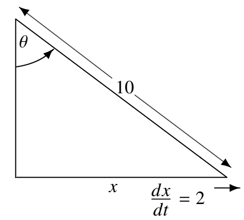
$V = \dfrac{\pi}{3}r^2h = \dfrac{\pi}{3}(\dfrac{h}{3})^2h \Rightarrow V = \dfrac{1}{27}\pi h^3$, de donde $\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{1}{27}\pi \cdot 3h^2\dfrac{dh}{dt} \Rightarrow \dfrac{dV}{dt} = \dfrac{1}{9}\pi h^2\dfrac{dh}{dt}$. Sustituyendo los valores: $\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{1}{9}\pi(200)^2 20 = 279252,68\mathit{cm^3/min}$.

Velocidad de bombeo= $279252,68 + 10000 \Rightarrow$ Velocidad de bombeo $= 289252,68\mathit{cm^3/min}$.

15. Si la profundidad máxima es más que $3\mathit{pies}$; el volumen de agua está dado por $V = 10(24 + y + z)h$.

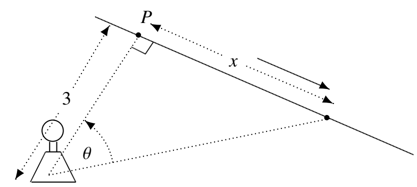
Por semejanza de triángulos: $\dfrac{6}{16} = \dfrac{h}{z} \Longrightarrow z = \dfrac{8}{3}h$, $\dfrac{6}{6} = \dfrac{h}{y} \Longrightarrow y = h$. Sustituyendo z y y en V, resulta $V = 10\left(24 + \dfrac{11}{3}h\right)h \Longrightarrow \dfrac{dV}{dt} = 10\left(24 + \dfrac{22}{3}h\right)\dfrac{dh}{dt}$, como $\dfrac{dV}{dt} = 0,8$ y $h = 5$, entonces $\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{0,8}{10(24+\frac{110}{3})} = 1,32 \times 10^{-3}\mathit{pies/min}$.





16. $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{x}{10} \Rightarrow \cos\theta\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{1}{10}\dfrac{dx}{dt} \Rightarrow \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{1}{10}\sec\theta\dfrac{dx}{dt} \Rightarrow \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{1}{10}\sqrt{2}\cdot 2$ cuando $\theta = \dfrac{\pi}{4} \Longrightarrow \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{\sqrt{2}}{5}$.

17. Tenemos $\frac{d\theta}{dt} = 4rev/min = 8\pi rad/min$ y $\frac{x}{3} = \tan\theta \Longrightarrow$
$\frac{dx}{dt} = 3\sec^2\theta \cdot \frac{d\theta}{dt}$ en $x = 1km$.
$\tan\theta = \frac{1}{3}$ como $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta = 1 + \frac{1}{9} = \frac{10}{9} \Longrightarrow$
$\frac{dx}{dt} = 3 \cdot \frac{10}{9} \cdot 8\pi = \frac{80\pi}{3} km/min$.



Teorema de Rolle y del Valor Medio

18. i) $f(x) = \cos 2x$ es continua en $[0,\pi]$ y derivable en $]0,\pi[$. Además, $f(0) = f(\pi) = 1 \Rightarrow$ cumple las condiciones del Teorema de Rolle $\Rightarrow$ existe c tal que $f'(c) = 0$.

$f'(x) = -2\,\mathrm{sen}(2x) \Rightarrow f'(c) = -2\,\mathrm{sen}(2c)$. En $(0,\pi)$ se tiene que $f'(c) = 0$ sii $c = \frac{\pi}{2}$.

19. i) $f'(x) = -\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, vea que nunca se anula y que se indefine en 0. Esto no contradice el Teorema de Rolle porque f no es diferenciable en $(-1,1)$.

ii) $f(0) = 1 = f(2)$; $f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^3}$, se indefine en 1, así f no es diferenciable en $(0,2)$.

20. i) $f(x) = \frac{1}{x}$; en $[1,2]$.

En el intervalo $[1,2]$, f es continua. Además, en $(1,2)$ es diferenciable $\Rightarrow$ cumple las condiciones del Teorema del Valor Medio.

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(c) = -\frac{1}{c^2}$, dado que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a) \Rightarrow \frac{1}{2} - 1 = \left(-\frac{1}{c^2}\right)(2-1) \Rightarrow c^2 = 2 \Rightarrow |c| = \sqrt{2} \Rightarrow c = \sqrt{2}$ ó $c = -\sqrt{2} \Rightarrow c = \sqrt{2} \in [1,2]$.

ii) $f(x) = 1 + \sqrt[3]{x-1}$; $[2,9]$.

En el intervalo $[2,9]$, f es continua. Además, en $(2,9)$ es diferenciable $\Rightarrow$ cumple las condiciones del Teorema del Valor Medio.

$f'(x) = \frac{1}{3}(x-1)^{-2/3} \Rightarrow f'(c) = \frac{1}{3}(c-1)^{-2/3} = \frac{f(9)-f(2)}{9-2} = \frac{3-2}{9-2} = \frac{1}{7} \Rightarrow$
$(c-1)^{2/3} = \frac{7}{3} \Longrightarrow (c-1)^2 = (\frac{7}{3})^3 \Longrightarrow |c-1| = \frac{7}{3}\sqrt{\frac{7}{3}} \Longrightarrow c = 1 + \frac{7}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}$.

21. Llamando $f(x) = x^7 + 5x^3 + x - 6$, se observa que el grado del polinomio es impar. Si f tuviera más de una raíz real, por el teorema de Rolle f' tendría raíz real, pero esto es imposible pues $f'(x) = 7x^6 + 15x^2 + 1 \geq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Luego f sólo tiene una raíz real.

22. Tomando dos valores cualquiera para x; $f(-1) = -8$, $f(1) = 14$. Por el teorema del valor intermedio existe al menos un número tal que la imagen bajo f de dicho número sea cero.

Del Teorema de Rolle:

i) Por ser un polinomio, f es continua en $\mathbb{R}$.

ii) Por ser un polinomio, f es diferenciable en $\mathbb{R}$.

Suponiendo que hay un a y un b tal que $f(a) = f(b) = 0$ (es decir se supone que existen dos raíces) $\Rightarrow$ existe un c tal que $f'(c) = 0$.

Por otro lado, $f'(x) = 5x^4 + 10 \Rightarrow f'(x) > 0$ para todo x, lo cual contradice la suposición hecha, e indica que no pueden existir dos o más raíces. Se ha demostrado por contradicción que dicho polinomio presenta una única raíz.

23. Sea $g(x) = cx$, entonces $g'(x) = c$, utilizando la hipótesis se tiene que $f'(x) = g'(x)$, por el corolario del Teorema del Valor Medio $f(x) - g(x) = d$, donde d es constante o sea $f(x) = g(x) + d$, es decir $f(x) = cx + d$.

24. Aplique el Teorema del Valor Medio para probar la desigualdad: $|\operatorname{sen}(b) - \operatorname{sen}(a)| \leq |b - a|$; para todo a y b.

    Sea $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, la cual es continua en $\mathbb{R}$ y diferenciable en $\mathbb{R}$, por lo tanto satisface las hipótesis del Teorema del Valor Medio. Tomando dos valores cualquiera distintos a y b, existe un c tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

    $f(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow f'(x) = \cos x$. Tanto f como f' son funciones periódicas. Los valores de $f(x)$ y $f'(x)$ para todo x no se salen del rango $[-1, 1]$ (*)

    Del teorema del valor medio: $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \Longrightarrow \cos c = \dfrac{\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a}{b - a}$, $a \neq b$.

    Por lo dicho en (*) $-1 \leq \cos x \leq 1 \Longrightarrow |\cos x| \leq 1 \Longrightarrow 1 \geq \left|\dfrac{\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a}{b - a}\right| \Longrightarrow |b - a| \geq |\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a|$.

    Reordenando $|\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a| \leq |b - a|$.

25. $f'(c) = \dfrac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} \Longrightarrow f'(c) = \dfrac{5 - (-1)}{2 + 1} = \dfrac{6}{3} = 2$.

    La ecuación de f presenta una pendiente de 2 en el punto c (siendo este algún punto en $(-1, 2)$). Por otro lado $y = 2x \Longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = 2$, como ambas rectas tienen la misma pendiente $\Longrightarrow$ son paralelas.

26. a) $s'(t) = -32t = \dfrac{ds}{dt}$.

    $$\left.\begin{array}{l} s'(3) = -96 \\ s'(0) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{velocidad media} = \frac{-96 + 0}{2} = -48 \text{ pies/seg.}$$

    b) Por ser s un polinomio es continua y derivable en $\mathbb{R}$.

    $$s'(c) = \frac{s(b) - s(a)}{b - a} \Longrightarrow -32t = \frac{s(3) - s(0)}{3 - 0} \Longrightarrow -32t = \frac{[-16(3)^2 + 500] - [-16(0)^2 + 500]}{3 - 0}.$$

    Despejando t se tiene $t = 1,5$ seg. La velocidad media iguala a la velocidad instantánea.

Tema No. 4

Ejercicios de Aplicaciones de la derivada y Trazado de curvas y Optimización Prof. Pedro Rodríguez

I. Clasifique cada uno de los puntos críticos de las funciones:

1. $f(x) = x^4 - 2x^2$. R/ En $(-1,-1)$ y en $(1,-1)$ está el mínimo absoluto; en $(0,0)$ hay un máximo relativo.
2. $f(x) = 2\tan x - \tan^2 x$ intervalo $[0,1]$. R/Max absoluto en $(\frac{\pi}{4}, 1)$.
3. $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$. R/ Min absoluto en $x = 1$.
4. $f(x) = \operatorname{sen} x - x\cos x$ intervalo $[-5,5]$. R/ Max absoluto en (π,π). Min absoluto en $(-\pi,-\pi)$.
5. $f(x) = \operatorname{sen}^3 x$ intervalo $[-3,3]$. R/Max absoluto en $(\frac{\pi}{2}, 1)$. Min absoluto en $(-\frac{\pi}{2}, -1)$.

II. Resuelva los siguientes problemas.

6. Determine el punto (x,y) de la recta $2x + y = 3$ más cercano al punto $(3,2)$. R/ El punto $(1,1)$.
7. Un recipiente cilíndrico sin tapa debe tener un volumen de 250cm^3. El material del fondo del recipiente cuesta 4 centavos el cm^2; el del lado curvo cuesta 2 centavos el cm^2. ¿Qué dimensiones minimizan el costo del recipiente? R/ Radio $5\pi^{-1/3}$cm. Altura $10\pi^{-1/3}$cm.
8. Se forma un sólido adosando dos hemisferios a las bases de un cilindro circular recto. El volumen total del sólido es de 12cm^3, hallar el radio de la base del cilindro que produce área mínima de la superficie del sólido. R/ $r = \sqrt[3]{\frac{9}{\pi}} \approx 1,42$.
9. Cada página de un libro contiene 30pulg^2 de impresión, y cada página debe tener un margen de 2 pulg. en la parte superior e inferior y márgenes de 1 pulg. a cada lado. ¿Cuál es el área mínima posible en dicha página? R/ Largo: $\sqrt{60} + 4$ pulg. Ancho: $\sqrt{15} + 2$ pulg.
10. Determine la longitud L de la varilla más larga que puede pasar horizontalmente una esquina en un corredor de 5m de ancho, hacia otro de 5m de ancho.

    R/ $L = 10\sqrt{2}$m.

III. Haga el cuadro de variación y la gráfica de las funciones dadas a continuación.

11. $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 189x + 137$. R/ Max $(-\frac{7}{2}, -\frac{1107}{2})$ Min $(\frac{9}{2}, -\frac{94}{2})$ Punto de inflexión $(\frac{1}{2}, \frac{83}{2})$.

12. $f(x) = (4 - x)\sqrt[3]{x}$.

R/ Creciente para $x < 1$, decreciente para $x > 1$, tangente vertical y punto de inflexión en $-2, -7, 56)$. Max local en $(1, 3)$.

13. $f(x) = \dfrac{x(3x-4)}{2(x-1)^2}$ R/ $y = \frac{3}{2}$ asíntota horizontal, $x = 1$ asíntota vertical.

14. $f(x) = \dfrac{x^3 - 4}{x^2}$ R/ Oblicua $y = x$. Hay asíntota vertical en $x = 0$.

15. $f(x) = \dfrac{x^3}{(1+x)^2}$. R/ Max $(-3, -\frac{27}{4})$ asíntota vertical $x = -1$. Asíntota oblicua $y = x - 2$.

IV Use el signo de $f'(x)$ para determinar el sentido de crecimiento de las funciones dadas a continuación.

16. $f(x) = x^3 + x + 1$. R/ Creciente en $(-\infty, +\infty)$. Punto de inflexión en $x = 0$.

17. $f(x) = x^4 + 4x + 1$. R/ Decreciente en $(-\infty, -1)$ creciente $[-1, +\infty[$.

18. $f(x) = 8x^4 - x^8$. R/ Decreciente $[-\sqrt{2}, 0]$ y $[\sqrt{2}, +\infty[$. Creciente $]-\infty, -\sqrt{2}]$ y $[0, \sqrt{2}]$.

19. $f(x) = x^3(x-4)^4$. R/ Creciente $(-\infty, 12/7]$ y $[4, +\infty)$. Decreciente $[12/7, 4]$.

20. $f(x) = 3x^5 - 20x^3$. R/ Creciente en $(-\infty, -2]$ y $[-2, +\infty)$. Decreciente $[-2, 2]$.

21. $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$.

R/ Creciente $]-\infty, \frac{-2-\sqrt{7}}{3}]$ y $[\frac{-2+\sqrt{7}}{3}, +\infty[$. Decreciente $[\frac{-2-\sqrt{7}}{3}, \frac{-2+\sqrt{7}}{3}]$.

22. $f(x) = 4x^3 - 3x^4$. R/ Creciente $]-\infty, 1]$. Decreciente $[1, +\infty[$.

23. $f(x) = x^{1/5}(x+1)$. R/ Creciente $[-1, +\infty[$. Decreciente $]-\infty, -1]$, no es derivable en 0.

24. $f(x) = x + \frac{1}{x}$. R/ Creciente en $]-\infty, -1]$ y $[1, +\infty[$. Decreciente en $[-1, 1] \setminus \{0\}$.

25. $f(x) = x\sqrt{x - x^2}$. R/ Creciente en $[0, \frac{3}{4}]$. Decreciente en $[\frac{3}{4}, 1]$.

26. Haga el cuadro de variación y gráfico de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$.
b) $y = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} - 2x + \dfrac{1}{3}$.
c) $y = \dfrac{3}{4}(x^2 - 1)^{\frac{2}{3}}$.
d) $y = \dfrac{2x^2 - 3}{7x + 4}$.
e) $y = \dfrac{x+3}{x+2}$.
f) $y = \dfrac{-8}{x^2 - 4}$.

27. Se quiere construir una caja sin tapa cortando cuadrados congruentes de las esquinas de una hoja de lámina cuadrada de 12m de lado. ¿De qué tamaño deben ser los cuadrados que se corten en las esquinas para que la caja tenga el volumen máximo?

R/ El volumen es máximo si los cuadrados tienen 2m de lado.

28. Se pide diseñar una lata de un litro de capacidad, que tenga la forma de un cilindro circular. ¿Qué dimensiones utilizan la menor cantidad de material? R/ $r \approx 5.42$cm, $h \approx 10.84$cm.

29. Se quiere inscribir un rectángulo dentro de un semicírculo de radio 2. ¿Cuál es el área más grande que puede tener el rectángulo y cuáles sus dimensiones?.

    R/ rea máxima: 4, dimensiones del rectángulo: $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$.

30. Un abrevadero de 20m de largo tiene sus extremos en forma de triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 4m. Determine el ancho en la parte superior del extremo triangular de manera que el volumen sea máximo.

    R/ El volumen es máximo cuando el ancho en la parte superior del abrevadero mide $4\sqrt{2}$m.

31. Un terreno rectangular que tiene 1500m^2 va a ser cercado y dividido en dos porciones iguales mediante una cerca adicional paralela a dos de los lados. Determine las dimensiones del terreno que requieren la menor cantidad de cerca. R/ $15\sqrt{10}$m, $10\sqrt{10}$m.

32. La distancia entre orillas de un lago es 200m. Un hombre que se encuentra en una de las orillas desea llegar a un árbol que está en la orilla opuesta, a 500m del punto que se localiza exactamente en la parte opuesta de él. Si nada a 2m/s y corre a 5m/s, ¿Cuál es el menor tiempo posible en que puede llegar al árbol? R/ $t \approx 190$ segundos.

33. Una página rectangular ha de tener 96cm^2 de texto, los márgenes superior e inferior tienen 3cm de anchura y laterales 2cm. ¿Qué dimensiones de la página minimizan la cantidad de papel requerida? R/ 18cm$\times$12cm.

34. Dos postes de 12 y 28 pies de altura distan 30 pies entre sí. Se desea tender un cable fijado en un único punto en el suelo, atado a los extremos de los postes. ¿En qué punto del suelo hay que fijar el cable para usar la menor cantidad posible de cable?

    R/ El cable debe fijarse a 9 pies del poste de 12 pies.

Soluciones del Tema No.4: Aplicaciones de la derivada y Trazado de curvas y Optimización Prof. Pedro Rodríguez

1. $f(x) = x^4 - 2x^2 \Longrightarrow f'(x) = 4x^3 - 4x$, de donde $f'(x) = 0$, cuando $4x(x^2-1) = 0 \Longrightarrow 4x(x+1)(x-1) = 0$.

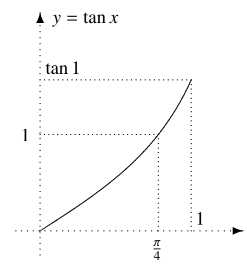
   Cuadro de variación:

	$-\infty$ ··· -1	-1 ··· 0	0 ··· 1	1 ··· $+\infty$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

   $(0,0)$ es un Máximo relativo.
   En $(-1,-1)$, $(1,-1)$ hay mínimos relativos y también está el mínimo absoluto en $x = -1$.

2. $f'(x) = 2\sec^2 x - 2\sec^2 x \tan x = 2\sec^2 x(1 - \tan x)$.

x	0 ··· $\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$ ··· 1
$f'(x)$	$+$	$-$



   Así en $(\frac{\pi}{4}, 1)$ está el máximo absoluto de f en $[0,1]$.

3. $f(x) = x^2 + 2/x \Longrightarrow f'(x) = 2x - 2/x^2 \Longrightarrow f'(x) = 0$, de donde $\dfrac{(2x^3-2)}{x^2} = 0$, cuando $2x^3 - 2 = 0 \Longrightarrow x^3 = 1$.

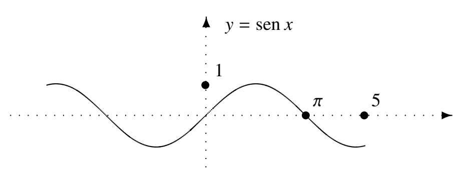
   Cuadro de variación:

	$-\infty$ ··· 1	1 ··· $+\infty$
x^3-1	$-$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$

   Mínimo absoluto en $x = 1$.

4. $f'(x) = x \operatorname{sen} x$.

x	-5 ··· $-\pi$	$-\pi$ ··· 0	0 ··· π	π ··· 5
$\operatorname{sen} x$	$+$	$-$	$+$	$-$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$	$-$



   (π,π) es máximo absoluto, $(-\pi,-\pi)$ es mínimo absoluto.

5. $f(x) = \operatorname{sen}^3 x$ en el intervalo $[-3,3]$. Es suficiente analizar el intervalo $[0,3]$, dado que la función es impar i.e. si existe un máximo en a, en $-a$ existe un mínimo.

   $f'(x) = 3\operatorname{sen}^2 x \cos x$ y dada la identidad $\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{2} = \operatorname{sen} x \cos x$, se tiene $f'(x) = \frac{3}{2} \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x \Longrightarrow$

$f'(x) = 0$, cuando $x = \frac{\pi}{2}$ en el intervalo dado.

Cuadro de variación:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	3
$\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x$	$+$		$-$
$f'(x)$	$+$		$-$

Máximo absoluto en $\frac{\pi}{2}$.

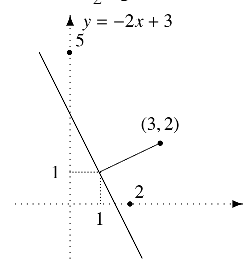
Mínimo absoluto en $-\frac{\pi}{2}$ (por simetría).

6. El punto (x, y) está en la recta y así $y = 3 - 2x$.

   La distancia entre (x, y) y $(3, 2)$ es

   $d^2 = (3-x)^2+(2-y)^2 = (3-x)^2+(2-3+2x)^2 = (3-x)^2+(2x-1)^2 \Longrightarrow 2dd' = 2(x-3)+4(2x-1) = 10(x-1) = 0 \Longrightarrow x = 1$.

   Así, el punto es $(1, 1)$.



7. Minimizar precio: $V = A_1 y \Longrightarrow V = x^2\pi y$, $V = 250cm^3 \Longrightarrow 250 = x^2\pi y \Longrightarrow y = \dfrac{250}{x^2\pi} \Longrightarrow 0 < x < \infty$, donde x es el radio del fondo, y es la altura del lado, A_1 área de fondo, A_2 área del lado, $A_1 = \pi x^2$, $A_2 = 2xy\pi$.

   Precio: $P = 4\pi x^2 + 2\cdot 2\pi xy \Longrightarrow P = 4\pi x^2 + 4\pi x\dfrac{250}{x^2\pi} \Longrightarrow P = 4\pi x^2 + \dfrac{1000}{x} \Longrightarrow P' = 8\pi x - \dfrac{1000}{x^2} \Longrightarrow P' = \dfrac{8\pi x^3 - 1000}{x^2}$ e igualando $P' = 0$ obtenemos $8\pi x^3 = 1000 \Longrightarrow x^3 = \dfrac{1000}{8\pi} \Longrightarrow x = \dfrac{10}{2\pi^{1/3}} = \dfrac{5}{\pi^{1/3}} \Longrightarrow x = 5\pi^{-1/3}cm$.

   Cuadro de variación:

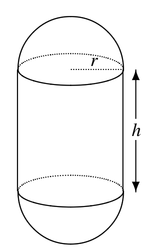
x	0	$5\pi^{-\frac{1}{3}}$	$+\infty$
$8\pi x - \frac{1000}{x^2}$	$-$		$+$
$P'(x)$	$-$		$+$

Min en $x = 5\pi^{-1/3}$,

de donde $y = \dfrac{250}{\pi\left(\dfrac{5}{\pi^{1/3}}\right)^2} = \dfrac{250}{\dfrac{25\pi}{\pi^{2/3}}} = \dfrac{10}{\pi^{1/3}} \Longrightarrow y = 10\pi^{-\frac{1}{3}}cm$.

8. $V = \pi r^2 h + \frac{4}{3}\pi r^3 = 12 \Longrightarrow h\pi r^2 = 12 - \frac{4}{3}\pi r^3 \Longrightarrow h = \dfrac{12}{\pi r^2} - \dfrac{4}{3}r$.

   Además, $A = 2\pi rh + 4\pi r^2 = 2\pi r\left(\dfrac{12}{\pi r^2} - \dfrac{4}{3}r\right) + 4\pi r^2 = \dfrac{24}{r} - \dfrac{8}{3}\pi r^2 + 4\pi r^2 = \dfrac{24}{r} + \dfrac{4}{3}\pi r^2 \Longrightarrow \dfrac{dA}{dr} = -\dfrac{24}{r^2} + \dfrac{8}{3}\pi r = 0 \Longrightarrow \dfrac{9}{\pi} = r^3 \Longrightarrow r = \sqrt[3]{\dfrac{9}{\pi}}$.



9. Minimizar área de página. $A = 30pulg^2 \Longrightarrow A = (x-4)(y-2) = 30 \Longrightarrow y - 2 = \dfrac{30}{(x-4)} \Longrightarrow y = \dfrac{30}{x-4} + 2 \Longrightarrow 4 < x < +\infty$.

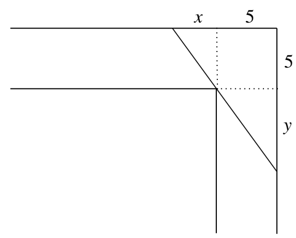
   $A = xy \Longrightarrow A = x\left(\dfrac{30 + 2(x-4)}{x-4}\right) = 2\left(\dfrac{11x + x^2}{x-4}\right) \Longrightarrow$

$A' = \dfrac{2}{(x-4)^2}((11+2x)(x-4)-11x-x^2) = \dfrac{2}{(x-4)^2}(x^2-8x-44) =$

$\dfrac{2(x-\frac{8+4\sqrt{15}}{2})(x-\frac{8-4\sqrt{15}}{2})}{(x-4)^2} = \dfrac{2(x-4-2\sqrt{15})(x-4+2\sqrt{15})}{(x-4)^2}.$

Como $x > 4$, $x = 4+2\sqrt{15}$, $y = \dfrac{30}{2\sqrt{15}}+2 = \sqrt{15}+2$.

10. Se tiene que $d = \sqrt{25+x^2}+\sqrt{25+y^2}$, como aparece en la figura adjunta. Además, por la semejanza de triángulos, $\dfrac{x}{5} = \dfrac{5}{y} \Longrightarrow y = \dfrac{25}{x}$. Así se tiene que $d = \sqrt{25+x^2}+\sqrt{25+\dfrac{625}{x^2}} = \sqrt{25+x^2}+5\dfrac{\sqrt{x^2+25}}{x}$, pues $x \geq 0$.



La derivada $d' = -\dfrac{125-x^3}{x^2\sqrt{x^2+25}} = 0 \Longrightarrow x = 5$. El máximo es $d(5) = 10\sqrt{2}$.

11. $f(x) = 4x^3-6x^2-189x+137$, $D_f = \mathbb{R}$.

Intersección eje y: $x = 0$, $y = 137$.

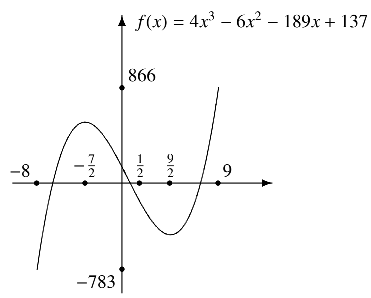
Intersección eje x: $y = 0$, $x = 0,7164$,

$x = -6,5339$, $x = 7,3175$.

$f'(x) = 12x^2-12x-189$ e igualando a cero

$f'(x) = 0 \Longrightarrow x = -3,5$ y $x = 4,5$.

x	$(-\infty, -3,5)$	$(-3,5;\ 4,5)$	$(4,5, +\infty)$
$x+3,5$	$-$	$+$	$+$
$x-4,5$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$



$f''(x) = 24x-12$ e igualando a cero $f''(x) = 0 \Longrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Cuadro de variación para $f''(x)$:

x	$(-\infty, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, +\infty)$
$24x-12$	$-$	$+$
$f''(x)$	$-$	$+$

12. $D_f = \mathbb{R}$, $f(x) = (4-x)\sqrt[3]{x}$.

x	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
$1-x$	$+$	$+$	$-$
$f'(x)$	$+$	$+$	$-$

Intersección eje y, $x = 0$, $y = 0$.

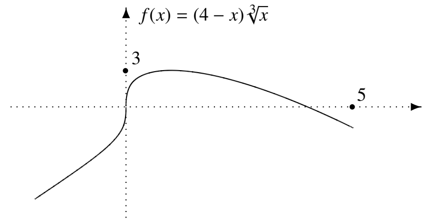
Intersección eje x, $y = 0$, $x = 4$, $x = 0$.

$f'(x) = \dfrac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \dfrac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} = \dfrac{4}{3}\dfrac{(1-x)}{x^{\frac{2}{3}}} = 0$, para $x = 1$, se indefine en 0.

$f''(x) = -\dfrac{8}{9}x^{-\frac{5}{3}} - \dfrac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}} = -\dfrac{4}{9}\left(\dfrac{2}{x^{\frac{5}{3}}}+\dfrac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\right) = -\dfrac{4}{9x^{\frac{5}{3}}}(2+x) = 0$, si $x = -2$, se indefine en 0.

No hay asíntotas.

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
$2+x$	$-$	$+$	$+$	$+$	
$-x^{5/3}$	$+$	$+$	$-$	$-$	
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$-$	
$f(x)$	↗	↗	↗	↘	



Extremos $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} = -\infty$.

13. $f(x) = \dfrac{x(3x-4)}{2(x-1)^2}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Intersección eje y, $x = 0$, $y = 0$.

Intersección eje x, $y = 0$, $x = \frac{4}{3}$ y $x = 0$.

$f'(x) = \dfrac{-x+2}{(x-1)^3}$. Determinando puntos críticos $x = 2$.

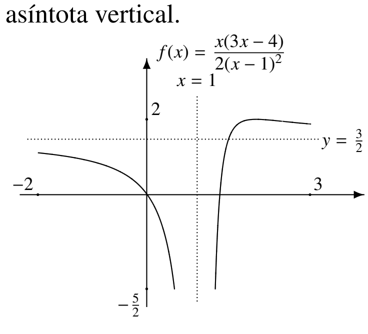
$f''(x) = \dfrac{2x-5}{(x-1)^4}$. Igualando a cero $f''(x) = 0$, cuando $x = \frac{5}{2}$, $f(\frac{5}{2}) = \frac{35}{18}$.

Asíntota horizontal: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-4x}{2x^2-4x+2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2(3-4/x)}{x^2(2-4/x+2/x^2)} = \frac{3}{2} \Longrightarrow y = \frac{3}{2}$.

Asíntota vertical: $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty$ i.e. $x = 1$ es asíntota vertical.

Cuadro de variación:

x	$-\infty$	1	2	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$-$	
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$+$	
$f(x)$	↘	↗	↘	↘	



14. $f(x) = x - \dfrac{4}{x^2}$; $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Intersección eje y, no hay. Intersección eje x, $y = 0$, $x = \sqrt[3]{4}$.

$f'(x) = 1 + \dfrac{8}{x^3} = 0 \Longleftrightarrow x = -2$, se indefine en 0. $f''(x) = -\dfrac{24}{x^4} < 0$, $\forall x \neq 0$.

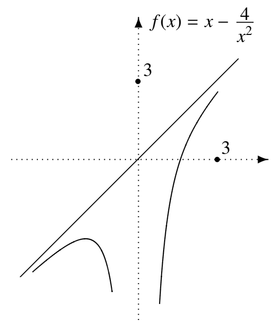
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} x\left(1 - \dfrac{4}{x^3}\right) = \pm\infty$.

Asíntota vertical: $\lim\limits_{x\to0} f(x) = -\infty$.

Asíntota oblicua: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$.

$\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - x) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(-\dfrac{4}{x^2}\right) = 0$, la asíntota oblicua es $y = x$.

x	$-\infty$ — -2	-2 — 0	0 — $+\infty$
x^3	$-$	$-$	$+$
x^3+8	$-$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	↗	↘	↗



15. $f(x) = \dfrac{x^3}{(1+x)^2}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Intersección eje x, en $x = 0$. Intersección eje y, en $y = 0$.

$f'(x) = \dfrac{x^2(3+x)}{(1+x)^3}$. Puntos críticos en $x = -3, 0$.

Máximo en $(-3, -\frac{27}{4})$.

$f''(x) = \dfrac{6x}{(1+x)^4}$. Punto de inflexión en $x = 0$.

Extremos: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{x^2+2x+1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x}{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} = \pm\infty$,

$\lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{x^3}{(1+x)^2} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{x^3}{(1+x)^2} = -\infty$.

Asíntotas:

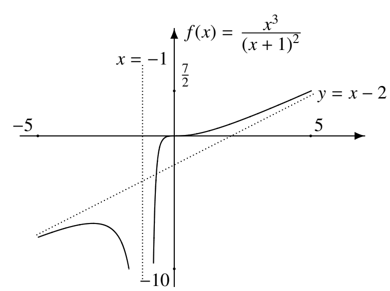
Asíntotas horizontal no hay, asíntotas verticales en $x = -1$,

Asíntotas oblicuas $y = ax + b$, $a = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x^2+2x+1} = 1$,

$b = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{x^2+2x+1} - x = \dfrac{x^3 - x^3 - 2x^2 - x}{x^2+2x+1} = -2 \Longrightarrow y = x - 2$.

Cuadro de variación:

x	$-\infty$ — -3	-3 — -1	-1 — 0	0 — $+\infty$
$x+3$	$-$	$+$	$+$	$+$
x^2	$+$	$+$	$+$	$+$
$1+x$	$-$	$-$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	$+$



16. $f(x) = x^3 + x + 1 \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 + 1$ y $f'(x)$ no tiene raíces reales, pues siempre $f'(x)$ es positiva.

17. $f'(x) = 4x^3 + 4 = 4(x+1)(x^2 - x + 1) = 0$ en $x = -1$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$		$+$	
$x^2 - x + 1$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

18. $f(x) = 8x^4 - x^8 \Longrightarrow f'(x) = 32x^3 - 8x^7 \Longrightarrow$

$f'(x) = 8x^3(4 - x^4) = 8x^3(2 + x^2)(2 - x^2) =$

$8x^3(2 + x^2)(\sqrt{2} + x)(\sqrt{2} - x)$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$\sqrt{2} + x$		$-$		$+$		$+$		$+$	
$\sqrt{2} - x$		$+$		$+$		$+$		$-$	
x		$-$		$-$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$		$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

19. $f(x) = x^3(x-4)^4$.

$f'(x) = 3x^2(x-4)^4 + x^3 4(x-4)^3 =$

$x^2(x-4)^3(3(x-4) + 4x) =$

$x^2(x-4)^3(7x - 12) = 0$ en $x = 0$, $x = 4$, $x = \frac{12}{7}$.

Hay punto de inflexión en $x = 0$.

x	$-\infty$		0		$\frac{12}{7}$		4		$+\infty$
$(x-4)^3$		$-$		$-$		$-$		$+$	
$7x - 12$		$-$		$-$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

20. $f(x) = 3x^5 - 20x^3 = x^3(3x^2 - 20) \Longrightarrow$

$f'(x) = 15x^2(x^2 - 4) = 15x^2(x+2)(x-2)$.

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$x+2$		$-$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$+$	
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

21. $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$.

$f'(x) = 3x^2 + 4x - 1 = (x - x_1)(x - x_2) = 0$, en $x_1 < x_2$.

$x_1 = \dfrac{-2 - \sqrt{7}}{3}$, $x_2 = \dfrac{-2 + \sqrt{7}}{3}$.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x - x_1$		$-$		$+$		$+$	
$x - x_2$		$-$		$-$		$+$	
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

22. $f(x) = 4x^3 - 3x^4 = x^3(4 - 3x) \Longrightarrow$

$f'(x) = 12x^2 - 12x^3 = 12x^2(1 - x) = 0$, en $x = 0$ y $x = 1$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$1 - x$		$+$		$-$	
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

23. $f'(x) = \dfrac{6}{5}x^{\frac{1}{5}} + \dfrac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} = \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{6x+1}{x^{\frac{4}{5}}}\right) = 0$ en $x = -\dfrac{1}{6}$.
f no es derivable en 0.

x	$-\infty$ … $-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$ … 0	0 … $+\infty$
$6x+1$	$-$	$+$	$+$
$x^{4/5}$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	↘	↗	↘

24. $f(x) = x + \dfrac{1}{x} \Longrightarrow$
$f'(x) = \dfrac{2x^2 - (x^2+1)}{x^2}$, de donde $f'(x) = 0 \Longrightarrow$ $x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$.

x	$-\infty$ … -1	-1 … 0	0 … 1	1 … $+\infty$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	↗	↘	↘	↗

25. En $[0,1]$, $f(x) = x\sqrt{x - x^2} = \sqrt{x^3 - x^4}$.
$f'(x) = \dfrac{3x^2 - 4x^3}{2\sqrt{x^3 - x^4}} = \dfrac{x^2(3-4x)}{2x^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-x}} = \dfrac{\sqrt{x}(3-4x)}{2\sqrt{1-x}} = 0.$
En $x = 0$, $x = \dfrac{3}{4}$.

x	0 … $\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$ … 1
$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$	$+$	$+$
$3-4x$	$+$	$-$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	↗	↘

26. Haga el cuadro de variación y gráfico de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$.

b) $y = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} - 2x + \dfrac{1}{3}$.

c) $y = \dfrac{3}{4}(x^2-1)^{\frac{2}{3}}$.

d) $y = \dfrac{2x^2-3}{7x+4}$.

e) $y = \dfrac{x+3}{x+2}$.

f) $y = \dfrac{-8}{x^2-4}$.

Solución

a) Cuadro de variación y gráfico: $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$.

Dominio de f: $\mathbb{R}$.

Sentido de variación $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$.

$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$, donde $x = 3$ es un número crítico.

$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow x > 3$. $\quad f'(x) < 0 \Longleftrightarrow x < 3$.

Concavidad:

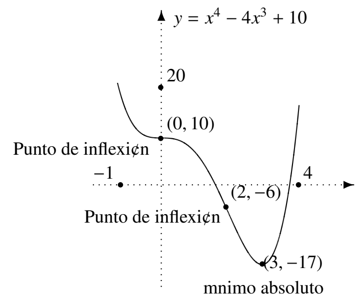
$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2)$. $\quad f''(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0, x = 2$.

$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$ $\quad f''(x) < 0 \Longleftrightarrow x \in]0, 2[$.

Comportamiento en extremos: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$.

$f(0) = 10$, $f(3) = -17$, $f(2) = -6$.

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↘		↘		↘		↗	
$f'(x)$		$-$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$		$-$		$+$		$+$	



b) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} - 2x + \dfrac{1}{3}$. Dominio f: $\mathbb{R}$.

Sentido de variación: $f'(x) = x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$.

$f'(x) = 0 \iff x = -1, x = 2$.

$f'(x) > 0 \iff x \in]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[$. $\qquad f'(x) < 0 \iff x \in]-1, 2[$.

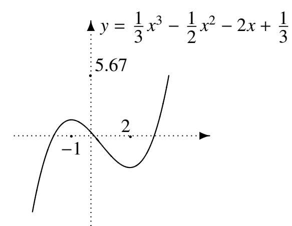
Concavidad: $f''(x) = 2x - 1$. $\quad f''(x) = 0 \iff x = \dfrac{1}{2}$.

$f''(x) > 0 \iff x > \dfrac{1}{2} \qquad f''(x) <\iff x < \dfrac{1}{2}$.

Comportamiento en los extremos: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

$f(1) = \frac{3}{2}$, $f(2) = -3$, $f(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{4}$.

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗		↘		↘		↗	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$		$-$		$+$		$+$	



c) $f(x) = \dfrac{3}{4}(x^2-1)^{\frac{2}{3}}$. Dominio: $\mathbb{R}$.

Sentido de variación: $f'(x) = \dfrac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{1}{3}}(2x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$.

<u>Número crítico</u>:

$x = 0$, pues $f'(0) = 0$ y $x = \pm 1$ pues estos se indefinen $f'(x)$. El signo de f' depende de los factores x, $x-1$, $x+1$, por eso se hace el siguiente cuadro de signos.

x		-1		0		1	
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$		$+$
$x+1$	$-$		$+$		$+$		$+$
$f'(x)$	$-$		$+$	0	$-$		$+$

Concavidad: $f''(x) = \dfrac{(x^2-1)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}x(x^2-1)^{-\frac{2}{3}}(2x)}{(x^2-1)^{\frac{2}{3}}}$.

$f''(x) = \dfrac{x^2-3}{3(x^2-1)^{\frac{4}{3}}}$.

El signo de $f''(x)$ depende del factor $x^2 - 3$ pues el denominador es positivo. Luego:

$f''(x) = 0 \iff x = \pm\sqrt{3}$.

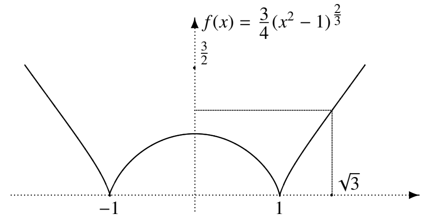
$f''(x) > 0 \iff x \in]-\infty, -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}, +\infty[$.

$f''(x) < 0 \iff x \in]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$.

Comportamiento en extremos: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$.

$f(0) = \dfrac{3}{4}$, $f(\pm\sqrt{3}) = \dfrac{3}{4}\sqrt[3]{4}$.

x		-1		0		1	
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$		$+$
$x+1$	$-$		$+$		$+$		$+$
$f'(x)$	$-$		$+$	0	$-$		$+$



d) $f(x) = \dfrac{2x^2-3}{7x+4}$. Dominio: $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{4}{7}\right\}$.

Sentido de variación:

$f'(x) = \dfrac{(7x+4)4x - (2x^2-3)\cdot 7}{(7x+4)^2} = \dfrac{14x^2+16x+21}{(7x+4)^2}$, $f'(x) > 0$, $\forall\, x \in D_f$.

Concavidad:

$f''(x) = \dfrac{(7x+4)^2(28x+16) - (14x^2+16x+21)14(7x+4)}{(7x+4)^4} =$

$f''(x) = \dfrac{(7x+4)(28x+16) - 14(14x^2+16x+21)}{(7x+4)^3} = \dfrac{-294}{(7x+4)^3}$.

$f''(x) > 0 \iff x < -\frac{4}{7}$, $\qquad f''(x) < 0 \iff x > -\frac{4}{7}$.

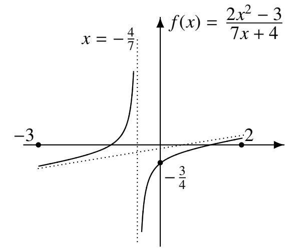
Comportamiento en extremos: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\frac{4}{7}^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\frac{4}{7}^-} f(x) = +\infty \implies x = -\frac{4}{7}$, es una asíntota vertical.

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 \; +0x \; -3 & 7x+4 \\ \cline{2-2} -2x^2 - \frac{8}{7}x & \frac{2}{7}x - \frac{8}{49} \\ \hline -\frac{8}{7}x \; -3 & \end{array}$$

$y = \frac{2}{7}x - \frac{8}{49}$ es asíntota oblicua.

x	$-\infty$	$-\frac{4}{7}$	$+\infty$
$f(x)$	↗	‖	↘
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f''(x)$	$+$	‖	$-$



e) $f(x) = \dfrac{x+3}{x+2}$. Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Sentido de variación: $f'(x) = \dfrac{(x+2)1-(x+3)1}{(x+2)^2} = \dfrac{-1}{(x+2)^2}$. $f'(x) < 0, \forall x \in D_f$.

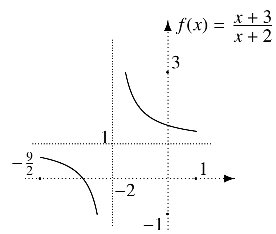
Concavidad: $f''(x) = \dfrac{2}{(x+2)^3}$. $f''(x) > 0 \Longleftrightarrow x > -2$. $f''(x) < 0 \Longleftrightarrow x < -2$.

Comportamiento en extremos:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 1 \Longrightarrow y = 1$, es asíntota horizontal.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow x = -2 \text{ es asíntota vertical.}$$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$	↘	‖	↘
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f''(x)$	$-$	‖	$+$



f) $f(x) = \dfrac{-8}{(x^2-4)}$. Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{2, -2\}$.

Sentido de variación: $f'(x) = \dfrac{16x}{(x^2-4)^2}$.

$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$. $f'(x) > 0 \Longleftrightarrow x > 0$, $f'(x) < 0 \Longleftrightarrow x < 0$.

Concavidad:

$$f''(x) = \frac{(x^2-4)^2(16) - 16x(2)(x^2-4)(2x)}{(x^2-4)^4} = \frac{16^2 - 64 - 64x^2}{(x^2-4)^3} = -\frac{48x^2+64}{(x^2-4)^3}.$$

$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in]-2, 2[$ $f''(x) < 0 \Longleftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$.

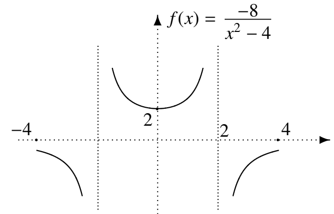
Comportamiento en extremos:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0 \Longrightarrow y = 0$ es asíntota horizontal.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow x = -2 \text{ es asíntota vertical.}$$

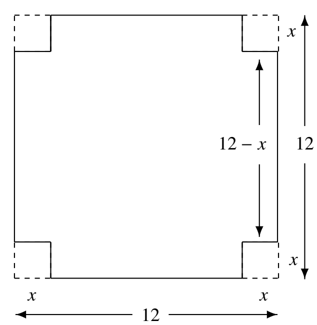
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow x = 2 \text{ es asíntota vertical.}$$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f(x)$	0	↘		↘		↗		↗	0
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f''(x)$		$-$		$+$		$+$		$-$	



27. Se quiere construir una caja sin tapa cortando cuadrados congruentes de las esquinas de una hoja de lámina cuadrada de $12m$ de lado. ¿De qué tamaño deben ser los cuadrados que se corten las esquinas para que la caja tenga el volumen máximo?

Solución Se empieza con un diagrama. En la figura los cuadros de las esquinas tienen x pulgadas por lado. El volumen de la caja es una función de esa variable:



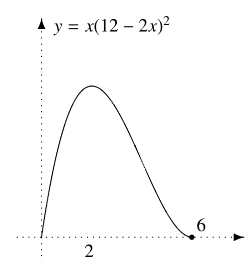
$$V(x) = x(12-2x)^2 = 144x - 48x^2 + 4x^3.$$

Dado que los lados de la lámina miden solamente $12m$ de largo, $x \le 6$ y el dominio de V es el intervalo $0 \le x \le 6$.

La gráfica de V sugiere un valor mínimo de 0 en $x = 0$ y $x = 6$, y un máximo cercano a $x = 2$. Para entender mejor se examina la primera derivada de V con respecto a x:

$$\frac{dV}{dx} = 144 - 96x + 12x^2 = 12(12 - 8x + x^2) = 12(2-x)(6-x).$$

De los dos ceros, $x = 2$ y $x = 6$, sólo $x = 2$ cae dentro del dominio de la función y está dentro de la lista de puntos críticos. Los valores de V en este punto crítico y los dos puntos extremos son:



Valor del punto crítico: $V(2) = 128$.

Valores de los puntos extremos: $V(0) = 0$, $V(6) = 0$.

El volumen máximo es $128m^3$, los cuadros cortados deben tener $2m$ de lado.

28. Se pide diseñar una lata de un litro de capacidad, que tenga la forma de un cilindro circular. ¿Qué dimensiones utilizarán la menor cantidad de materia prima?

Solución Se ilustra la lata como un cilindro circular recto con una altura h y un diámetro $2r$. Si r

y h se miden en centímetros y el volumen se expresa como $1000cm^3$, entonces r y h se relacionan mediante la ecuación $\pi r^2 h = 1000$, $1L = 1000cm^3$. ¿Cómo se interpreta la frase "la menor cantidad de materia prima"? Una posibilidad es ignorar el grosor del material y el desperdicio al fabricarlo. Después, determinamos las dimensiones de r y h que hagan el área total

$$A = \underbrace{2\pi r^2}_{\text{extremos del cilindro}} + \underbrace{2\pi rh}_{\text{pared del cilindro}}$$

tan pequeña como sea posible, al mismo tiempo que se cumpla la restricción de $\pi r^2 h = 1000$. Aún no se tiene la información suficiente para hallar los puntos críticos, porque la ecuación anterior no expresa A como una función de una sola variable. Sin embargo, la primera ecuación se puede resolver para expresar r o h en términos de la otra variable. Es más fácil resolverlo para h, así que tomamos: $h = \dfrac{1000}{\pi r^2}$. Esto cambia la fórmula de A, entonces se tiene:

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{1000}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}.$$

Para valores pequeños de r (un recipiente alto y estrecho, como un tubo), el término $\dfrac{2000}{r}$ domina y A es grande. Para r grandes, el término $2\pi r^2$ domina y A es otra vez grande. Si A tiene un mínimo, debe ser en un valor de r que no sea ni muy grande ni muy pequeño.

Dado que A es diferenciable en todo su dominio $(0, \infty)$ y el dominio no tiene puntos extremos, A puede tener un mínimo sólo donde $\dfrac{dA}{dr} = 0$.

$A = 2\pi r^2 + \dfrac{2000}{r}$.

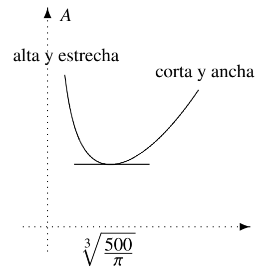
$\dfrac{dA}{dr} = 4\pi r - \dfrac{2000}{r^2}$, halla $\dfrac{dA}{dr}$.

$4\pi r - \dfrac{2000}{r^2} = 0$, iguala a 0.

$4\pi r^3 = 2000$, despejar r.

$r = \sqrt[3]{\dfrac{500}{\pi}}$ punto crítico.

Si el dominio de A fuera un intervalo cerrado, se podría saber evaluando A en su punto crítico y en los puntos extremos, y comparando los resultados. Pero el dominio no es un intervalo cerrado; entonces debemos saber qué ocurre cuando $r = \sqrt[3]{\dfrac{500}{\pi}}$ determinando la forma de la gráfica de A. Se puede hacer esto analizando la segunda derivada, $\dfrac{d^2A}{dr^2}$:



$\frac{dA}{dr} = 4\pi r - \frac{2000}{r^2}$; $\quad \frac{d^2A}{dr^2} = 4\pi + \frac{4000}{r^3}$.

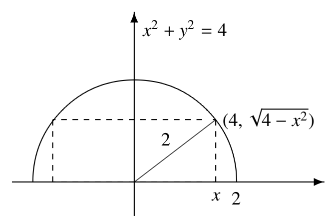
La segunda derivada es positiva en todo el dominio de A. El valor de A en $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$, es entonces un mínimo absoluto, ya que la gráfica de A es cóncava hacia arriba.

Cuando $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$, $h = \frac{1000}{\pi r^2} = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2r$.

La ecuación indica que la lata más eficiente es aquella cuya altura es igual a su diámetro. Con una calculadora hallamos: $r \approx 5.42cm$, $h \approx 10.84cm$.

29. Se quiere inscribir un rectángulo dentro de un semicírculo de radio 2. ¿Cuál es el área más grande que puede tener el rectángulo y cuáles sus dimensiones?

Solución Para describir las dimensiones del rectángulo, colocamos el círculo y el rectángulo en un plano coordenado. Entonces, el largo, la altura y el área del rectángulo se pueden expresar en términos de la posición x de la esquina inferior derecha:



Largo: $2x$; Altura: $\sqrt{4-x^2}$; Area: $2x\sqrt{4-x^2}$.

Observe que los valores de x se hallarán dentro del intervalo $0 \leq x \leq 2$, donde está la esquina escogida del rectángulo.

El objetivo matemático es hallar ahora el valor máximo absoluto de la función continua: $A(x) = 2x\sqrt{4-x^2}$, en el dominio $[0, 2]$. Esto se logra examinando los valores de A en sus puntos críticos y en sus puntos extremos. La derivada $\frac{dA}{dx} = \frac{-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} + 2\sqrt{4-x^2}$ no está definida cuando $x = 2$, y es igual a 0 cuando:

$$\frac{-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} + 2\sqrt{4-x^2} = 0 \Longrightarrow -2x^2 + 2(4-x^2) = 0 \Longrightarrow 8 - 4x^2 = 0 \Longrightarrow x^2 = 2 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{2}.$$

De los dos ceros, $x = \sqrt{2}$ y $x = -\sqrt{2}$, sólo $x = \sqrt{2}$ cae dentro del dominio de A y está en la lista de puntos críticos.

Valor del punto crítico: $A(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}\sqrt{4-2} = 4$.

Valores de los puntos extremos: $A(0) = 0$, $A(2) = 0$.

El área tiene un valor máximo de 4 cuando el rectángulo tiene $\sqrt{4-x^2} = \sqrt{2}$ unidades de alto y $2x = 2\sqrt{2}$ unidades de largo.

30. Un abrevadero de $20m$ de largo tiene sus extremos en forma de triángulo isósceles cuyos lados iguales

miden $4m$. Determine el ancho en la parte superior del extremo triangular de manera que el volumen sea máximo.

Solución El la figura 1 se ilustra el abrevadero con la dimensión incógnita. Su volumen es:

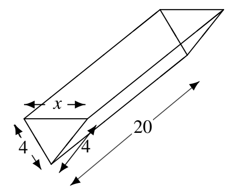


Figura 1

$$V = (\text{área del extremo triángular})(\text{longitud})$$

De la figura 2 y el teorema de Pitágoras, el área del extremo triangular es $x\sqrt{16 - \frac{x^2}{4}}$.

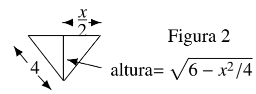


Figura 2

Consecuentemente, el volumen en función de x es:

$$V(x) = \left(\frac{1}{2}x\sqrt{16 - \frac{x^2}{4}}\right) \cdot 20 = 5x\sqrt{64 - x^2}.$$

Además, $V(x)$ solamente tiene sentido en el intervalo cerrado $[0, 8]$. ¿Por qué?

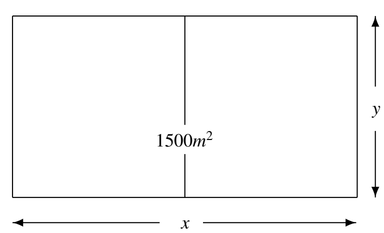
Derivando y simplificando se obtiene:

$$V'(x) = -10\frac{x^2 - 32}{(64 - x^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Aunque $V'(x) = 0$ para $x = \pm 4\sqrt{2}$, el único valor de V en $[0, 8]$ es $4\sqrt{2}$. Puesto que $V(0) = V(8) = 0$, se concluye que el volumen máximo ocurre cuando la anchura en la parte superior del abrevadero es de $4\sqrt{2}m$. El volumen máximo es $V(4\sqrt{2}) = 160m^3$.

31. Un terreno rectangular que tiene $1500m^2$ va a ser cercado y dividido en dos porciones iguales mediante una cerca adicional paralela a dos de los lados. Determine las dimensiones del terreno que requieren la menor cantidad de cerca.

Solución Se introducen las variables x y y de forma que $xy = 1500$, como se muestra en la figura. Entonces la función que se desea minimizar es la suma de las longitudes de las cinco porciones de cerca:

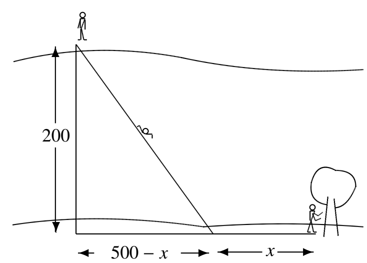


$$L = 2x + 3y.$$

Pero $y = \frac{1500}{x}$ permite escribir $L(x) = 2x + \frac{4500}{x^2}$, en donde el único requisito para la variable x es que no sea negativa. Así que, la función que se está considerando no está definida en un intervalo cerrado. De $L'(x) = 2 - \frac{4500}{x^2}$, $L'(x) = 0$, se obtiene que $x^2 = 2250$ y se concluye que el único valor crítico es $15\sqrt{10}$. Pasando a la segunda derivada $L''(x) = \dfrac{13500}{x^3}$, se obtiene que $L''(15\sqrt{10}) > 0 \Longrightarrow$ para $x = 15\sqrt{10}$, L es mínima.

Las dimensiones del terreno que minimizan la cantidad de cerca son: $x = 15\sqrt{10}m$, $y = \dfrac{1500}{15\sqrt{10}} = 10\sqrt{10}m$.

32. La distancia entre orillas de un lago es $200m$. Un hombre que se encuentra en una de las orillas desea llegar a un árbol que está en la orilla opuesta, a $500m$ del punto que se localiza exactamente en la parte opuesta de él. Si nada a $2m/s$ y corre a $5m/s$, ¿Cuál es el menor tiempo posible en que puede llegar al árbol?



Solución Sea x en metros la distancia que el hombre camina; su tiempo al caminar es entonces $\frac{x}{5}$ segundos. Si el nada y metros, el tiempo que nada es $\frac{y}{2}$ segundos. Por tanto el tiempo total T está dado por la ecuación $T = \frac{x}{5} + \frac{y}{2}$.

Para aplicar la exposición formal, debemos expresar T en términos de una sola variable. Se observa de la figura que $y^2 = (500 - x)^2 + 200^2$, así que $y = \sqrt{200^2 + (500 - x)^2} = \sqrt{x^2 - 1000x + 290000}$. Al sustituir esta expresión por y en la ecuación para T, se tiene:

$$T = \frac{x}{5} + \left(\frac{x^2}{4} - 250x + 72500\right)^{\frac{1}{2}},$$

donde $0 \leq x \leq 500$. Derivamos y obtenemos:

$$\frac{dT}{dx} = \frac{1}{5} + \frac{\frac{x}{2} - 250}{2(\frac{x^2}{4} - 250x + 72500)^{\frac{1}{2}}}.$$

Haciendo $\frac{dT}{dx}$ igual a cero y resolviendo para x, obtenemos

$$-\frac{2}{5}\left(\frac{x^2}{4} - 250x + 72500\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{x}{2} - 250,$$

o bien,

$$\frac{4\left(\frac{x^2}{4} - 250x + 72500\right)}{25} = \frac{x^2}{4} - 250x + 62500$$

o sea,

$$\frac{21}{100}x^2 - 210x + 50900 = 0.$$

Empleando la fórmula general para la resolución de ecuaciones cuadráticas, hallamos

$$x = 500 \pm 400\frac{\sqrt{21}}{21}.$$

Como $0 < x < 500$ se elige $x = 500 - \dfrac{400}{\sqrt{21}} = 412,71$.

Ante la dificultad de estudiar el signo de $\dfrac{dT}{dx}$ para así determinar sí T es máximo o mínimo para tal valor de x, se aplica el criterio de la segunda derivada.

Obteniéndose que $\dfrac{d^2T}{dx^2} > 0$ para $x = 500 - \dfrac{400}{\sqrt{21}}$ =, lo cual permite concluir que tal x produce un T mínimo.

Al evaluar $x = 500 - \dfrac{400}{\sqrt{21}}$ = en la función T; se obtiene: $T \approx 190$ minutos.

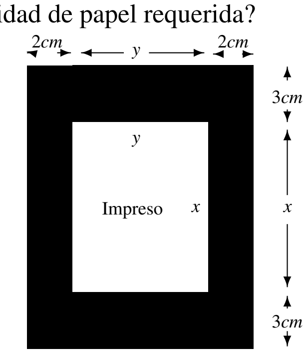
33. Una página rectangular ha de tener $96cm^2$ de texto, los márgenes superior e inferior tienen $3cm$ de anchura y laterales $2cm$. ¿Qué dimensiones de la página minimizan la cantidad de papel requerida?

Solución El área A que hay que minimizar es $A = (x+6)(y+4)$.

El área impresa viene dada por: $96 = xy$. Despejando y tenemos $y = \dfrac{96}{x}$ y la primera ecuación se convierte en :

$A = (x+6)\left(\dfrac{96}{x} + 4\right) = 120 + 4x + \dfrac{576}{x}$.

Sólo estamos interesados en los valores de A con $x > 0$. Para minimizar el área, derivamos con respecto a x, con lo que se obtiene $\dfrac{dA}{dx} = 4 - \dfrac{576}{x^2} = 0 \Longrightarrow x^2 = 144$.

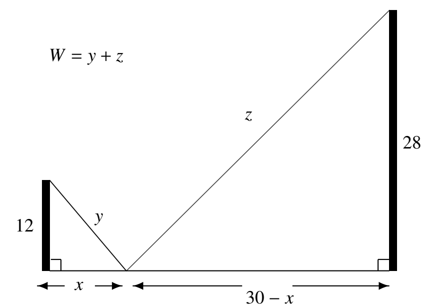


$A = (x+3)(y+2)$

Por lo tanto, los números críticos son $x = \pm 12$. Como -12 está fuera del dominio, se elige $x = 12$. El criterio de la primera derivada confirma que A es mínima en ese valor. Luego $y = \dfrac{96}{12} = 8$ y las dimensiones de la página deben ser $x + 6 = 18cm$ por $y + 4 = 12cm$.

34. Dos postes de 12 y 28 pies de altura distan 30 pies entre sí. Se desea tender un cable fijado en un único punto en el suelo, atado a los extremos de los postes. ¿En qué punto del suelo hay que fijar el cable para usar la menor cantidad posible de cable?

Solución Si W es la longitud del cable, tenemos, de acuerdo con la figura $W = y + z$.



En este problema en vez de despejar y en términos de z (o viceversa), despejaremos ambos y y z en términos de una sola variable x. Por el teorema de Pitágoras se tiene:

$x^2 + 12^2 = y^2 \Longrightarrow y = \sqrt{x^2 + 144}$

$(30 - x)^2 + 28^2 = z^2 \Longrightarrow z = \sqrt{x^2 - 60x + 1684}$.

Por tanto: $W = y + z = \sqrt{x^2 + 144} + \sqrt{x^2 - 60x + 1684}$, $0 \leq x \leq 30$.

Derivando W respecto a x, tenemos: $\dfrac{dW}{dx} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 144}} + \dfrac{x - 30}{\sqrt{x^2 - 60x + 1684}}$.

Haciendo $\dfrac{dW}{dx} = 0$, obtenemos: $x^2(x^2 - 60x + 1684) = (30 - x)^2(x^2 + 144)$,

que se simplifica a $320(x - 9)(2x + 45) = 0$.

Como $x = -22,5$, no está en el intervalo $[0, 30]$ y $W(0) \approx 53,04$, $W(9) = 50$ y $W(30) \approx 60,31$, se concluye que el cable debe fijarse a 9 pies del poste de 12 pies.

Tema No. 5

Ejercicios de antiderivadas Prof. Pedro Rodríguez

I. Use la definición de integral indefinida para demostrar las siguientes igualdades.

1. $\int \left(-\frac{9}{x^4}\right) dx = \frac{3}{x^3} + C$
2. $\int \left(4x^3 - \frac{1}{x^2}\right) dx = x^4 + \frac{1}{x} + C$
3. $\int (x-2)(x+2)\,dx = \frac{1}{3}x^3 - 4x + C$
4. $\int \frac{x^2-1}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx = \frac{2(x^2+3)}{3\sqrt{x}} + C$
5. $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}\,dx = 2\sqrt{\operatorname{sen} x} - \frac{2}{5}\operatorname{sen}^2 x\sqrt{\operatorname{sen} x} + C$
6. $\int x^n \cos x\,dx = x^n \operatorname{sen} x - n\int x^{n-1}\operatorname{sen} x\,dx + C$
7. $\int x^n \operatorname{sen} x\,dx = -x^n \cos x + n\int x^{n-1}\cos x\,dx + C$
8. $\int x^2 \operatorname{sen} 4x\,dx = -\frac{1}{4}x^2\cos 4x + \frac{1}{8}x\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{32}\cos 4x + C.$

II. Calcular la integral indefinida y verificar el resultado por derivación.

9. $\int (x^3+2)\,dx.$
10. $\int (x^2-2x+3)\,dx.$
11. $\int (x^{\frac{3}{2}}+2x+1)\,dx.$
12. $\int \left(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx.$
13. $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx.$
14. $\int (\sqrt[4]{x^3}+1)\,dx.$
15. $\int \frac{1}{x^3}\,dx.$
16. $\int \frac{1}{x^4}\,dx.$
17. $\int \frac{x^2+x+1}{\sqrt{x}}\,dx.$
18. $\int \frac{x^2+1}{x^2}\,dx.$
19. $\int (x+1)(3x-2)\,dx.$
20. $\int (2t^2-1)^2\,dt.$
21. $\int y^2\sqrt{y}\,dy.$
22. $\int (1+3t)t^2\,dt.$
23. $\int dx.$
24. $\int 3\,dt.$

III. Calcular la integral trigonométrica y comprobar el resultado por derivación.

25. $\int (2\operatorname{sen} x + 3\cos x)\,dx.$

26. $\int (t^2 - \operatorname{sen} t)\,dt.$

27. $\int (1 - \operatorname{cosec} t \operatorname{ctg} t)\,dt.$

28. $\int (\theta^2 + \sec^2\theta)\,d\theta.$

29. $\int (\sec^2\theta - \operatorname{sen}\theta)\,d\theta.$

30. $\int \sec y(\tan y - \sec y)\,dy.$

31. $\int (\tan^2 y + 1)\,dy.$

32. $\int \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen}^2 x}\,dx.$

IV. Completar la tabla identificando u y du para la integral.

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx \qquad u = g(x) \qquad du = g'(x)\,dx$$

33. $\int (5x^2 + 1)^2(10x)\,dx.$

34. $\int x^2\sqrt{x^3 + 1}\,dx.$

35. $\int \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\,dx.$

36. $\int \sec 2x \tan 2x\,dx.$

37. $\int \tan^2 x \sec^2 x\,dx.$

38. $\int \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx.$

V. Hallar la primitiva y comprobar el resultado por derivación.

39. $\int (1 + 2x)^4(2)\,dx.$

40. $\int (x^2 - 1)^3(2x)\,dx.$

41. $\int \sqrt{9 - x^2}(-2x)\,dx.$

42. $\int (1 - 2x^2)^3(-4x)\,dx.$

43. $\int x^2(x^3 - 1)^4\,dx.$

44. $\int x(4x^2 + 3)^3\,dx.$

45. $\int 5x\sqrt[3]{1 - x^2}\,dx.$

46. $\int u^3\sqrt{u^4 + 2}\,du.$

47. $\int \dfrac{x^2}{(1 + x^3)^2}\,dx.$

48. $\int \dfrac{x^2}{(16 - x^3)^2}\,dx.$

49. $\int \left(1 + \dfrac{1}{t}\right)^2\left(\dfrac{1}{t^2}\right)dt.$

50. $\int \left[x^2 + \dfrac{1}{(3x)^2}\right]dx.$

51. $\int \dfrac{1}{\sqrt{2x}}\,dx.$

52. $\int \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,dx.$

53. $\int \dfrac{x^2 + 3x + 7}{\sqrt{x}}\,dx.$

54. $\int \dfrac{t + 2t^2}{\sqrt{t}}\,dt.$

55. $\int t^2\left(t - \dfrac{2}{t}\right)dt.$

56. $\int \left(\dfrac{t^3}{3} + \dfrac{1}{4t^2}\right)dt.$

57. $\int (9 - y)\sqrt{y}\,dy.$

58. $\int 2\pi y(8 - y^{\frac{3}{2}})\,dy.$

VI. Resolver la ecuación diferencial.

59. $\dfrac{dy}{dx} = 4x + \dfrac{4x}{\sqrt{16 - x^2}}.$

60. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{10x^2}{\sqrt{1 + x^3}}.$

61. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + 1}{(x^2 + 2x - 3)^2}.$

62. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - 4}{\sqrt{x^2 - 8x + 1}}.$

VII. Hallar la primitiva.

63. $\int \operatorname{sen} 2x\,dx.$

64. $\int x \operatorname{sen} x^2\,dx.$

65. $\int \dfrac{1}{\theta^2}\cos\dfrac{1}{\theta}\,d\theta.$

66. $\int \cos 6x\,dx.$

67. $\int \operatorname{sen} 2x \cos 2x\,dx.$

68. $\int \sec(1 - x)\tan(1 - x)\,dx.$

69. $\int \tan^4 x \sec^2 x\,dx.$

70. $\int \sqrt{\cot x}\operatorname{cosec}^2 x\,dx.$

71. $\int \dfrac{\operatorname{cosec}^2 x}{\cot^3 x}\,dx.$

72. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\,dx.$

73. $\displaystyle\int \cot^2 x\,dx.$

74. $\displaystyle\int \operatorname{cosec}^2\left(\frac{x}{2}\right)dx.$

75. $\displaystyle\int x\sqrt{x+2}\,dx.$

76. $\displaystyle\int x\sqrt{2x+1}\,dx.$

77. $\displaystyle\int x^2\sqrt{1-x}\,dx.$

78. $\displaystyle\int (x+1)\sqrt{2-x}\,dx.$

79. $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{\sqrt{2x-1}}\,dx.$

80. $\displaystyle\int \frac{2x-1}{\sqrt{x+3}}\,dx.$

81. $\displaystyle\int \frac{-x}{(x+1)-\sqrt{x+1}}\,dx.$

82. $\displaystyle\int t\sqrt[3]{t-4}\,dt.$

VIII. Eavaluar la integral definida.

83. $\displaystyle\int_{-1}^{1} x(x^2+1)^3\,dx.$

84. $\displaystyle\int_{0}^{1} x\sqrt{1-x^2}\,dx.$

85. $\displaystyle\int_{0}^{4} \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\,dx.$

86. $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}\,dx.$

87. $\displaystyle\int_{1}^{9} \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}\,dx.$

88. $\displaystyle\int_{0}^{2} x\sqrt[3]{4+x^2}\,dx.$

89. $\displaystyle\int_{1}^{2} (x-1)\sqrt{2-x}\,dx.$

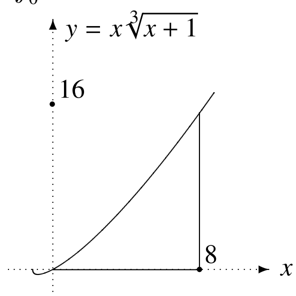
90. $\displaystyle\int_{0}^{4} \frac{x}{\sqrt{2x+1}}\,dx.$

91. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{2x}{3}\right)dx.$

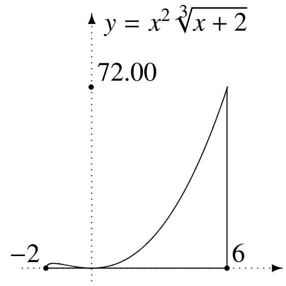
92. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x+\cos x)\,dx.$

IX. Hallar el área de la región. Verificar el resultado con la calculadora.

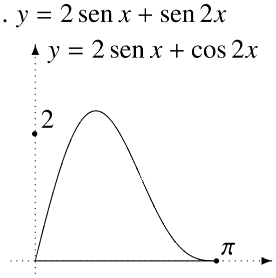
93. $\displaystyle\int_{0}^{7} x\sqrt[3]{x+1}\,dx$



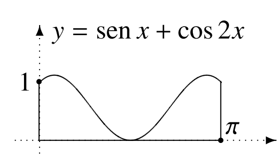
94. $\displaystyle\int_{-2}^{6} x^2\sqrt[3]{x+2}\,dx$



95. $y = 2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x$

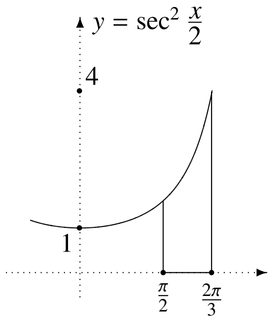


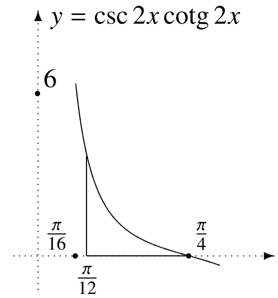
96. $y = \operatorname{sen} x + \cos 2x$



97. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \sec^2\left(\frac{x}{2}\right)dx$

98. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{cosec} 2x \operatorname{ctg} 2x\,dx.$





X. Efectuar la integración de dos maneras y explicar cualquier diferencia que se observe en las respuestas.

99. $\displaystyle\int (2x-1)^2\, dx.$

100. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \cos x\, dx.$

Soluciones del Tema No.5: Antiderivadas Prof. Pedro Rodríguez

I. Use la definición de integral indefinida para demostrar las siguientes igualdades.

1. $\int \left(-\frac{9}{x^4}\right) dx = \frac{3}{x^3} + C \iff \left(\frac{3}{x^3}\right)' = -\frac{9}{x^4}$.

   En efecto: $\left(\frac{3}{x^3}\right)' = (3x^{-3})' = -9x^{-4} = -\frac{9}{x^4}$.

2. $\int \left(4x^3 - \frac{1}{x^2}\right) dx = x^4 + \frac{1}{x} + C \iff \left(x^4 + \frac{1}{x}\right)' = 4x^3 - \frac{1}{x^2}$.

   En efecto $\left(x^4 + \frac{1}{x}\right)' = (x^4 + x^{-1})' = 4x^3 - x^{-2} = 4x^3 - \frac{1}{x^2}$.

3. $\int (x-2)(x+2)dx = \frac{1}{3}x^3 - 4x + C \iff \left(\frac{1}{3}x^3 - 4x\right)' = (x-2)(x+2)$.

   En efecto $\left(\frac{1}{3}x^3 - 4x\right)' = x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$.

4. $\int \frac{x^2-1}{x^{\frac{3}{2}}}dx = \frac{2(x^2+3)}{3\sqrt{x}} + C \iff \left[\frac{2(x^2+3)}{3\sqrt{x}}\right]' = \frac{x^2-1}{x^{\frac{3}{2}}}$.

   En efecto $\left(\frac{2}{3}\frac{x^2+3}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{x}(2x) - (x^2+3)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2}{3}\frac{4x^2 - x^2 - 3}{2x^{\frac{3}{2}}} = \frac{3x^2-3}{3x^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^2-1}{x^{\frac{3}{2}}}$.

5. $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}dx = 2\sqrt{\operatorname{sen} x} - \frac{2}{5}\operatorname{sen}^2 x\sqrt{\operatorname{sen} x} + C \iff (2\sqrt{\operatorname{sen} x} - \frac{2}{5}\operatorname{sen}^2 x\sqrt{\operatorname{sen} x})' = \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}$.

   En efecto $(2\sqrt{\operatorname{sen} x} - \frac{2}{5}\operatorname{sen}^2 x\sqrt{\operatorname{sen} x})' = (2\sqrt{\operatorname{sen} x} - \frac{2}{5}\operatorname{sen}^{\frac{5}{2}} x)' = 2\frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}} - \frac{2}{5}\frac{5}{2}\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} x\cos x =$ $\cos x\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} x\right) = \cos x\frac{1-\operatorname{sen}^2 x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}} = \cos x\frac{\cos^2 x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}} = \cos x\frac{\cos^2 x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}} = \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}$.

6. $\int x^n \cos x dx = x^n \operatorname{sen} x - n\int x^{n-1}\operatorname{sen} x dx + C \iff \left(x^n \operatorname{sen} x - n\int x^{n-1}\operatorname{sen} x dx\right)' = x^n\cos x$.

   En efecto $\left(x^n \operatorname{sen} x - n\int x^{n-1}\operatorname{sen} x dx\right)' = nx^{n-1}\operatorname{sen} x + x^n\cos x - nx^{n-1}\operatorname{sen} x = x^n\cos x$.

7. $\int x^n \operatorname{sen} x dx = -x^n\cos x + n\int x^{n-1}\cos x dx + C \iff \left(-x^n\cos x + n\int x^{n-1}\cos x dx\right)' = x^n\operatorname{sen} x$.

   En efecto $\left(-x^n\cos x + n\int x^{n-1}\cos x dx\right)' = -nx^{n-1}\cos x + x^n\operatorname{sen} x + nx^{n-1}\cos x = x^n\operatorname{sen} x$.

8. $\int x^2\operatorname{sen} 4x dx = -\frac{1}{4}x^2\cos 4x + \frac{1}{8}x\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{32}\cos 4x + C \iff$ $\left(-\frac{1}{4}x^2\cos 4x + \frac{1}{8}x\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{32}\cos 4x\right)' = x^2\operatorname{sen} 4x$.

   En efecto $\left(-\frac{1}{4}x^2\cos 4x + \frac{1}{8}x\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{32}\cos 4x\right)' = -\frac{1}{4}(2x\cos 4x - 4x^2\operatorname{sen} 4x) + \frac{1}{8}(\operatorname{sen} 4x + 4x\cos 4x) -$ $\frac{1}{8}\operatorname{sen} 4x = -\frac{x}{2}\cos 4x + x^2\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{8}\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{2}x\cos 4x - \frac{1}{8}\operatorname{sen} 4x = x^2\operatorname{sen} 4x$.

9. $\int (x^3+2)dx = \frac{x^4}{4} + 2x + C$.

10. $\int (x^2 - 2x + 3)dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + C$.

11. $\int (x^{\frac{3}{2}} + 2x + 1)\,dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + x^2 + x + C.$

12. $\int (\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}})\,dx = \int (x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}})\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}} + C.$

13. $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx = \int x^{\frac{2}{3}}\,dx = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + C.$

14. $\int (\sqrt[4]{x^3} + 1)\,dx = \int (x^{\frac{3}{4}} + 1)\,dx = \frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} + x + C.$

15. $\int \frac{1}{x^3}\,dx = \int x^{-3}\,dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C = \frac{-1}{2x^2} + C.$

16. $\int \frac{1}{x^4}\,dx = \int x^{-4}\,dx = \frac{x^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{3x^3} + C.$

17. $\int \frac{(x^2 + x + 1)}{\sqrt{x}}\,dx = \int (x^2 + x + 1)x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \int (x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})\,dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C.$

18. $\int \frac{x^2 + 1}{x^2}\,dx = \int (x^2 + 1)x^{-2}\,dx = \int (1 + x^{-2})\,dx = x + \frac{x^{-1}}{-1} + C = x - \frac{1}{x} + C.$

19. $\int (x + 1)(3x - 2)\,dx = \int (3x^2 + x - 2)\,dx = x^3 + \frac{x^2}{2} - 2x + C.$

20. $\int (2t^2 - 1)^2\,dt = \int (4t^4 - 4t^2 + 1)\,dt = \frac{4t^5}{5} - \frac{4t^3}{3} + t + C.$

21. $\int y^2\sqrt{y}\,dy = \int y^{\frac{5}{2}}\,dy = \frac{2}{7}y^{\frac{7}{2}} + C.$

22. $\int (1 + 3t)t^2\,dt = \int (t^2 + 3t^3)\,dt = \frac{t^3}{3} + \frac{3}{4}t^4 + C.$

23. $\int dx = x + C.$

24. $\int 3\,dt = 3t + C.$

25. $\int (2\operatorname{sen} x + 3\cos x)\,dx = -2\cos x + 3\operatorname{sen} x + C.$

26. $\int (t^2 - \operatorname{sen} t)\,dt = \frac{t^3}{3} + \cos t + C.$

27. $\int (1 - \csc t\cot t)\,dt = t + \csc t + C.$

28. $\int (\theta^2 + \sec^2\theta)\,d\theta = \frac{\theta^3}{3} + \tan\theta + C.$

29. $\int (\sec^2\theta - \operatorname{sen}\theta)\,d\theta = \tan\theta + \cos\theta + C.$

30. $\int \sec y(\tan y - \sec y)\,dy = \int (\sec y\tan y - \sec^2 y)\,dy = \sec y - \tan y + C.$

31. $\int (\tan^2 y + 1)\,dy = \int \sec^2 y = \tan y + C.$

32. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen}^2 x}\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\,dx = \int \tan x\sec x\,dx = \sec x + C.$

33. $\int (5x^2+1)^2 10x\,dx$, sea $u = 5x^2+1$, $du = 10x\,dx$, entonces:
$\int (5x^2+1)^2 10x\,dx = \int u^2\,du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{(5x^2+1)^3}{3} + C.$

34. Se tiene $u = x^3+1$, $du = 3x^2\,dx$. $\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx = \frac{1}{3}\int \sqrt{x^3+1}3x^2\,dx = \frac{1}{3}\int \sqrt{u}\,du = \frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}\,du =$
$\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{9}(x^3+1)^{\frac{3}{2}} + C.$

35. Sea $u = x^2+1$, $du = 2x\,dx$.
$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}\,du = u^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{x^2+1} + C.$
Pruebe usted con la sustitución $u = \sqrt{x^2+1}$.

36. Sea $u = 2x$, $du = 2\,dx$ entonces se tiene:
$\int \sec 2x \tan 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \sec 2x \tan 2x\, 2\,dx = \frac{1}{2}\int \sec u \tan u\,du = \frac{1}{2}\sec u + C = \frac{1}{2}\sec 2x + C.$
Pruebe usted con la sustitución $u = \sec 2x$.

37. Sea $u = \tan x$, $du = \sec^2\,dx$.
$\int \tan^2 x \sec^2 x\,dx = \int u^2\,du = \frac{u^3}{3} + 3 = \frac{\tan^3 x}{3} + C.$

38. Sea $u = \operatorname{sen} x$, $du = \cos x\,dx$.
$\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx = \int \frac{du}{u^2} = \int u^{-1}\,du = \frac{u^{-1}}{-1} + C = \frac{-1}{u} + C = -\frac{1}{\operatorname{sen} x} + C = -\csc x + C.$

39. Sea $u = 1+2x$, $du = 2\,dx$ $\int (1+2x^4)(2)\,dx = \int u^4\,du = \frac{u^5}{5} + C = \frac{(1+2x)^5}{5} + C.$

40. Sea $u = x^2-1$, $du = 2x\,dx$.
$\int (x^2-1)^3 2x\,dx = \int u^3\,du = \frac{u^4}{4} + C = \frac{(x^2-1)^4}{4} + C.$

41. Sea $v = 9-x^2$, $dv = -2x\,dx$.
$\int \sqrt{9-x^2}(-2x)\,dx = \int \sqrt{u}\,dv = \int v^{\frac{1}{2}}\,dv = \frac{2}{3}v^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}(9-x^2)^{\frac{3}{2}} + C.$

42. Sea $z = 1-2x^2$, $dz 0 - 4x\,dx$.
$\int (1-2x^2)^3(-4x)\,dx = \int z^3\,dz = \frac{z^4}{4} + C = \frac{(1-2x^2)^4}{4} + C.$

43. Sea $r = x^3-1$, $dr = 3x^2\,dx$.
$\int x^2(x^3-1)^4\,dx = \frac{1}{3}\int 3x^2(x^3-1)^4\,dx = \frac{1}{3}\int r^4\,dr = \frac{r^4}{15} + C = \frac{(x^3-1)^5}{15} + C.$

44. Sea $s = 4x^2+3$, $ds = 8x\,dx$.
$\int x(4x^2+3)^3\,dx = \frac{1}{8}\int 8x(4x^2+3)^3\,dx = \frac{1}{8}\int s^3\,ds = \frac{1}{8}\frac{s^4}{4} + C = \frac{(4x^2+3)^4}{32} + C.$

45. Sea $u = 1 - x^2$, $du = -2x dx$ $\int 5x\sqrt[3]{1-x^2}\,dx = -\frac{5}{2}\int \sqrt[3]{1-x^2}\,dx = -\frac{5}{2}\int \sqrt[3]{u}\,du = -\frac{5}{2}\int u^{\frac{1}{3}}\,du =$ $-\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot u^{\frac{4}{3}} + C = -\frac{15}{8}(1-x^2)^{\frac{4}{3}} + C.$

46. Sea $t = u^4 + 2$, $dt = 4u^3\,du.$
$\int u^3\sqrt{u^4+2}\,du = \frac{1}{4}\int 4u^3\sqrt{u^4+2}\,du = \frac{1}{4}\int \sqrt{t}\,dt = \frac{1}{4}\int t^{\frac{1}{2}}\,dt = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{6}(u^4+2)^{\frac{3}{2}} + C.$

47. Sea $v = 1 + x^3$, $dv = 3x^2\,dx.$ $\int \frac{x^2}{(1+x^3)^2}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2\,dx}{(1+x^3)^2} = \frac{1}{3}\int \frac{dv}{v^2} = \frac{1}{3}\int v^{-2}\,dv =$
$\frac{1}{3}\frac{v^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{3(1+x^3)} + C.$

48. Sea $v = 16 - x^3$, $dv = -3x^2\,dx.$
$\int \frac{x^2}{(16-x^3)^2}\,dx = -\frac{1}{3}\int \frac{-3x^2}{(16-x^3)^2}\,dx = -\frac{1}{3}\int \frac{dv}{v^2} = -\frac{1}{3}\int v^{-2}\,dv = -\frac{1}{3}\frac{v^{-1}}{-1} + C =$
$\frac{1}{3(16-x^3)} + C.$

49. Sea $z = 1 + \frac{1}{t}$, $dz = \frac{-1}{t^2}\,dt.$ $\int \left(1+\frac{1}{t}\right)^2 \frac{1}{t^2}\,dt = -\int z^2\,dz = -\frac{z^3}{3} + C = -\frac{\left(1+\frac{1}{t}\right)^3}{3} + C.$

50. $\int \left(x^2 + \frac{1}{(3x)^2}\right)dx = \int x^2\,dx + \frac{1}{9}\int x^{-2}\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{9}\frac{x^{-1}}{-1} + C = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{9x} + C.$

51. $\int \frac{1}{\sqrt{2x}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2x}}\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}2x^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{2}\sqrt{x} + C = \sqrt{2x} + C.$

52. $\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{2}\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = x^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{x} + C.$

53. $\int \frac{x^2+3x+7}{\sqrt{x}}\,dx = \int (x^2+3x+7)x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \int (x^{\frac{3}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}} + 7x^{-\frac{1}{2}})dx =$
$\frac{2}{5}x^{-\frac{5}{2}} + 3\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2\cdot 7x^{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}} + 14x^{\frac{1}{2}} + C.$

54. $\int \frac{t+2t^2}{\sqrt{t}}\,dt = \int (t^{\frac{1}{2}} + 2t^{\frac{3}{2}})dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{5}t^{\frac{5}{2}} + C.$

55. $\int t^2\left(t - \frac{2}{t}\right)dt = \int (t^3 - 2t)dt = \frac{t^4}{4} - t^2 + C.$

56. $\int \left(\frac{t^3}{3} + \frac{1}{4t^2}\right)dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{t^4}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{t^{-1}}{-1} + C = \frac{t^4}{12} - \frac{1}{4t} + C.$

57. $\int (9-y)\sqrt{y}\,dy = \int (9y^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{3}{2}})dy = 9\cdot\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} + C = 6y^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}} + C.$

58. $\int 2\pi y(8 - y^{\frac{3}{2}})dy = 2\pi\int (8y - y^{\frac{5}{2}}\,dy = 2\pi\left(4y^2 - \frac{2}{7}y^{\frac{7}{2}}\right) + C.$

59. $\frac{dy}{dx} = 4x + \frac{4x}{\sqrt{16-x^2}} \Longleftrightarrow y = \int \left(4x + \frac{4x}{\sqrt{16-x^2}}\right)dx = \frac{4}{2}x^2 - 2\int \frac{-2x}{\sqrt{16-x^2}}\,dx.$
Sea $u = 16 - x^2$, $du = -2x dx.$
$y = 2x^2 - 2\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2x^2 - 4\sqrt{u} + C = 2x^2 - 4\sqrt{16-x^2} + C.$

60. $\frac{dy}{dx} = \frac{10x^2}{\sqrt{1+x^3}} \Longleftrightarrow y = \int \frac{10x^2}{\sqrt{1+x^3}}\,dx.$

$y = \frac{10}{3}\int \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^3}}\,dx = \frac{10}{3}\int du\,\sqrt{u} = \frac{10}{3}2\sqrt{u} + C = \frac{20}{3}\sqrt{1+x^3} + C.$

61. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{(x^2+2x-3)^2} \Longleftrightarrow y = \int \frac{(x+1)}{(x^2+2x-3)}\,dx \Longleftrightarrow y = \frac{1}{2}\int \frac{2(x+1)}{(x^2+2x-3)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^2} =$
$\frac{1}{2}\int z^{-2}\,dz = \frac{1}{2}\cdot\frac{z^{-1}}{-1} + C = \frac{-1}{2(x^2+2x-3)} + C.$

62. $\frac{dy}{dx} = \frac{(x-4)}{\sqrt{x^2-8x+1}} \Longleftrightarrow y = \int \frac{(x-4)}{\sqrt{x^2-8x+1}}\,dx.$

$y = \frac{1}{2}\int \frac{2(x-4)}{\sqrt{x^2-8x+1}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \sqrt{u} + C = \sqrt{x^2-8x+1} + C.$

63. $\int \operatorname{sen} 2x\,dx = -\frac{\cos 2x}{2} + C.$

64. $\int x \operatorname{sen} x^2\,dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} u\,du = -\frac{1}{2}\cos u + C = -\frac{1}{2}\cos x^2 + C.$

65. $\int \frac{1}{\theta^2}\cos\frac{1}{\theta}\,d\theta = -\int \cos u\,du = -\operatorname{sen} u + C = -\operatorname{sen}\frac{1}{\theta} + C.$

66. $\int \cos 6x\,dx = \frac{1}{6}\operatorname{sen} 6x + C.$

67. Sea $u = \operatorname{sen} 2x$, $du = 2\cos 2x\,dx.$ $\int \operatorname{sen} 2x\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int u\,du = \frac{u^2}{4} + C = \frac{\operatorname{sen}^2 2x}{4} + C.$

También $\int \operatorname{sen} 2x\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} 4x\,dx = -\frac{\cos 4x}{8} + C.$

Resuelva la integral con la sustitución $z = \cos 2x$.

68. $\int \sec(1-x)\tan(1-x)\,dx = -\sec(1-x) + C.$

69. $\int \tan^4 x\sec^2 x\,dx = \int u^4\,du = \frac{u^5}{5} + C = \frac{\tan^5 x}{5} + C.$

70. $\int \sqrt{\cot x}\operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\int \sqrt{u}\,du = -\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{3}(\cot x)^{\frac{3}{2}} + C.$

71. $\int \frac{\csc^2 x}{\cot^3}\,dx = -\int \frac{du}{u^3} = -\int u^{-3}\,du = \frac{u^{-2}}{2} + C = \frac{1}{2\cot^2 x} + C.$

72. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}dx = -\int \frac{dv}{v^2} = -\int v^{-2}dv = v^{-1} + C = \frac{1}{\cos x} + C.$

73. $\int \cot^2 x dx = \int \left(\csc^2 - 1\right)\,dx = -\cot x - x + C.$

74. $\int \operatorname{cosec}^2 \frac{x}{2}dx = -2\operatorname{cotg}\frac{x}{2} + C.$

75. $\int x\sqrt{x+2}dx.$

Sea $u = x + 2$ y $dv = dx$, entonces:

$$\int x\sqrt{x+2}dx = \int (u-2)\sqrt{u}du = \int \left(v^{\frac{3}{2}} - 2v^{\frac{1}{2}}\right) du = \frac{2}{5}v^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}v^{\frac{3}{2}} + C$$
$$= \frac{2}{5}(x+2)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

76. $\int x\sqrt{2x+1}\,dx.$

Sea $z = 2x+1$ y $dz = 2dx$, $x = \frac{z-1}{2}$.

$$\int x\sqrt{2x+1}\,dx = \int \frac{z-1}{2}\sqrt{z}\frac{dz}{2} = \frac{1}{4}\int \left(z^{\frac{3}{2}} - z^{\frac{1}{2}}\right) dz = \frac{1}{4}\int \left[\frac{2}{5}z^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}\right] + C =$$
$$\frac{1}{10}(2x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{6}(2x+1)^{\frac{3}{2}} + C.$$

77. $\int x^2\sqrt{1-x}\,dx.$

Sea $r = 1-x$ y $dr = -dx$

$$\int x^2\sqrt{1-x}\,dx = -\int (1-r)^2\sqrt{r}\,dr = -\int (1-2r+r^2)\sqrt{r}\,dr = -\int \left(r^{\frac{1}{2}} - 2r^{\frac{3}{2}} + r^{\frac{5}{2}}\right) dr =$$
$$-\left(\frac{2}{3}r^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{5}r^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{7}r^{\frac{7}{2}}\right) + C = -\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{7}(1-x)^{\frac{7}{2}} + C.$$

78. $\int (x+1)\sqrt{2-x}\,dx.$

Sea $z = 2-x$ y$dz = -dx$ y $x = 2-z$, entonces:

$$\int (x+1)\sqrt{2-x}\,dx = -\int (3-z)\sqrt{z}dz = -\int \left(3z^{\frac{1}{2}} - z^{\frac{3}{2}}\right) dz = -\left(2z^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}z^{\frac{5}{2}}\right) + C =$$
$$-2(2-x)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}(2-x)^{\frac{5}{2}} + C.$$

79. $\int \frac{x^2-1}{\sqrt{2x-1}}\,dx.$

Sea $u = 2x-1$, $du = 2dx$ y $x = \frac{u+1}{2}$, entonces se tiene:

$$\int \frac{x^2-1}{\sqrt{2x-1}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{\left(\frac{u+1}{2}\right)^2 - 1}{\sqrt{u}}\,du = \frac{1}{8}\int (u^2+2u-3)u^{-\frac{1}{2}}\,du =$$
$$\frac{1}{8}\int (u^{\frac{3}{2}} + 2u^{\frac{1}{2}} - 3u^{-\frac{1}{2}})du = \frac{1}{8}\left(\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3}u^{\frac{3}{2}} - 6u^{\frac{1}{2}}\right) + C =$$
$$\frac{1}{20}(2x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{6}(2x-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{4}(2x-1)^{\frac{1}{2}} + C.$$

80. Sea $z = \sqrt{x+3}$, $dz = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}\,dx$, por tanto:

$$\int \frac{2x-1}{\sqrt{x+3}}\,dx = 2\int \left(2(z^2-3)-1\right) dz = 2\int \left(2z^2-7\right) dz = 2\left(\frac{2}{3}z^3 - 7z\right) + C =$$
$$\frac{4}{3}\left(\sqrt{x+3}\right)^3 - 14\sqrt{x+3} + C.$$

81. Sea $I = \int \frac{-x\,dx}{(x+1) - \sqrt{x+1}} = -\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}-1)}.$

Hágase $s = \sqrt{x+1} - 1 \Longrightarrow ds = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}\,dx$

$I = -2\displaystyle\int \frac{(s+1)^2 - 1}{s}\,ds = -2\int (s^2+2s)s^{-1}\,ds = -2\int (s+2)\,ds = -2\left(\frac{s^2}{2} + 2s\right) + C =$

$-(\sqrt{x+1} - 1)^2 - 4(\sqrt{x+1} - 1) + C = 2\sqrt{x+1} - x + C.$

82. Sea $u = t - 4$, $du = dt$, $t = u + 4$.

$$\int t\sqrt[3]{t-4}\,dt = \int (u+4)u^{\frac{1}{3}}\,du = \int (u^{\frac{4}{3}} + 4u^{\frac{1}{3}})\,du = \frac{3}{7}(t-4)^{\frac{7}{3}} + 3(t-4)^{\frac{4}{3}} + C.$$

83. Sea $u = x^2 + 1$, $du = 2x\,dx$.

$$\int_{-1}^{1} x(x^2+1)^3\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 2x(x^2+1)^3\,dx = \frac{1}{2}\int_{2}^{2} u^3\,du = 0.$$

84. Sea $u = 1 - x^2$, $du = -2x\,dx$

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 -2x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{u}\,du = \frac{1}{2}\int_0^1 u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

85. Sea $v = \sqrt{2x+1}$, $dv = \dfrac{dx}{\sqrt{2x+1}}$

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} = \int_1^3 dv = v\Big|_1^3 = 2.$$

86. Sea $t = 1 + 2x^2$, $dt = 4x\,dx$

$$\int_0^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+2x^2}} = \frac{1}{4}\int_9^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\sqrt{t}\Big|_1^9 = \frac{1}{2}(2) = 1.$$

87. Sea $u = 1 + \sqrt{x}$, $du = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

$$\int_1^9 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} = 2\int_2^4 \frac{du}{u^2} = \frac{-}{2}u\Big|_2^4 = -2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = -2\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

88. Sea $v = 4 + x^2$, $dv = 2x\,dx$

$$\int_0^2 x\sqrt[3]{4+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_4^8 \sqrt[3]{v}\,dv = \frac{3}{8}v^{\frac{4}{3}}\Big|_4^8 = \frac{3}{8}(8^{\frac{4}{3}} - 4^{\frac{4}{3}}) = \frac{3}{8}((2^3)^{\frac{4}{3}} - (2^2)^{\frac{4}{3}}) = \frac{3}{8}(2^4 - 2^{\frac{8}{3}}).$$

89. Sea $z = 2 - x$, $dz = -dx$

$$\int_1^2 (x-1)\sqrt{2-x}\,dx = -\int_1^0 (1-z)\sqrt{z} = \int_0^1 (z^{\frac{1}{2}} - z^{32})\,dz = \left(\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}z^{\frac{5}{2}}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}.$$

90. Sea $S = \sqrt{2x+1}$, $ds = \dfrac{dx}{\sqrt{2x+1}}$.

$$\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{2x+1}}\,dx = \int_1^3 \frac{s^2-1}{2}\,ds = \frac{1}{2}\left(\frac{s^3}{3} - s\right)\Big|_1^3 = \frac{1}{2}\left[6 - \left(-\frac{2}{3}\right)\right] = \frac{1}{2}\frac{20}{3} = \frac{10}{3}.$$

91. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\frac{2x}{3}\,dx = \frac{3}{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{2x}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$

92. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x + \cos x)\,dx = 0.$

93. Sea $v = x + 1$, $du = dx$
$A = \int_0^7 x\sqrt[3]{x+1}\,dx = \int_1^8 (u-1)\sqrt[3]{u}\,du = \int_1^8 (u^{\frac{4}{3}} - u^{\frac{1}{3}})\,du = \left(\frac{3}{7}u^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{4}u^{\frac{4}{3}}\right)\Big|_1^8 =$
$\frac{3}{7}(8)^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{4}(8)^{\frac{4}{3}} - \left(\frac{3}{7} - \frac{3}{4}\right) = \frac{3}{7}(2^7) - \frac{3}{4}(2^4) - \left(\frac{3}{7} - \frac{3}{4}\right) = 43.18.$

94. Sea $u = x + 2$, $du = dx$
$A = \int_{-2}^6 x^2\sqrt[3]{x+2}\,dx = \int_0^8 (u^{\frac{7}{3}} - 4u^{\frac{4}{3}} + 4u^{\frac{1}{3}})\,du = \left(\frac{3}{10}u^{\frac{10}{3}} - \frac{12}{7}u^{\frac{7}{3}} + 3u^{\frac{4}{3}}\right)\Big|_0^8 =$
$\frac{3}{10}\cdot 2^{10} - \frac{12}{7}\cdot 2^7 - 3\cdot 2^4.$

95. $A = \int_0^\pi (2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x)\,dx = \left(-2\cos x - \frac{\cos 2x}{2}\right)\Big|_0^\pi = \left(2 - \frac{1}{2}\right) - \left(-2 - \frac{1}{2}\right) = 4.$

96. $A = \int_0^\pi (\operatorname{sen} x + \cos 2x)\,dx = \left(-\cos x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right)\Big|_0^\pi = 1 - (-1) = 2.$

97. $A = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \sec^2\frac{x}{2}\,dx = 2\tan\frac{x}{2}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} = 2\left[\tan\frac{\pi}{3} - \tan\frac{\pi}{4}\right] = 2(\sqrt{3} - 1).$

98. $A = \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} \csc 2x\cot 2x\,dx = -\frac{1}{2}\csc 2x\Big|_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{2}\left(\csc\frac{\pi}{2} - \csc\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}(1-2) = \frac{1}{2}.$

99. $\int (2x-1)^2\,dx = \frac{(2x-1)^3}{6} + C = \int (2x-1)^2\,dx = \int (4x^2 - 4x + 1) = \frac{4x^3}{3} - 2x^2 + x + C.$
¿A qué se deben las diferencias entre las dos respuestas?

100. $\int \operatorname{sen} x\cos x\,dx = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + C$ haciendo $u = \operatorname{sen} x$.
$\int \operatorname{sen} x\cos x\,dx = -\frac{\cos^2 x}{2} + C$ haciendo $v = \cos x$.
$\int \operatorname{sen} x\cos x\,dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} 2x\,dx = -\frac{\cos 2x}{4} + C.$
¿A qué se deben las diferencias entre los tres resultados?

Tema No. 6

Ejercicios de Funciones Exponenciales, Logarítmicas y Trigonométricas Inversas   Prof. Pedro Rodríguez

Calcule la derivada de y respecto a x, t o θ según corresponda.

1 $y = \ln kx$, k constante.

2 $y = \ln t^2$.

3 $y = \ln t^{\frac{3}{2}}$.

4 $y = \ln \frac{3}{x}$.

5 $y = \ln \frac{10}{x}$.

6 $y = \ln(\theta + 1)$.

7 $y = (\ln x)^3$.

8 $y = \ln x^3$.

9 $y = t \ln^2 t$.

10 $y = t\sqrt{\ln t}$.

11 $y = t \ln \sqrt{t}$.

12 $y = \frac{\ln t}{t}$.

13 $y = \frac{1 + \ln t}{t}$.

14 $y = \frac{\ln x}{1 + \ln x}$.

15 $y = \ln(\ln(\ln x))$.

16 $y = \theta \operatorname{sen}(\ln \theta) + \cos(\ln \theta)$.

17 $y = \ln(\sec \theta + \tan \theta)$.

18 $y = \displaystyle\int_{\frac{x^2}{2}}^{x^2} \ln \sqrt{t}\, dt$.

19 $y = \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{\sqrt[3]{x}} \ln t\, dt$.

20 $y = \displaystyle\int_{x}^{\ln x} \frac{1}{t}\, dt$.

En los siguientes ejercicios 21 a 28 use la derivación logarítmica para el cálculo de y'.

21 $y = \sqrt{x(x + 1)}$.

22 $y = \sqrt{\dfrac{x^2 + 1}{(x - 1)^3}}$.

23 $y = \sqrt{\dfrac{1}{t(t + 1)}}$.

24 $y = \dfrac{1}{t(t + 1)(t + 2)}$.

25 $y = \dfrac{x\sqrt{x^2 + 1}}{(x + 1)^{\frac{2}{3}}}$.

26 $y = \sqrt[3]{\dfrac{x(x + 1)(x - 2)}{(x^2 + 1)(2x + 3)}}$.

27 $y = \theta^{\cos \theta}$.

28 $y = (\tan \theta)^{\sec^2 \theta}$.

En los ejercicios del 29 al 50 calcule las integrales propuestas.

29 $y = \int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x}$.

30 $y = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{3x-2}$.

31 $y = \int \frac{y\,dy}{y^2-25}$.

32 $y = \int \frac{r\,dr}{4r^2+7}$.

33 $y = \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} t}{2-\cos t}\,dt$.

34 $y = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{sen}\theta}{1-4\cos\theta}\,d\theta$.

35 $y = \int_1^2 \frac{2\ln x}{x}\,dx$.

36 $y = \int_2^4 \frac{dx}{x\ln x}$.

37 $y = \int_2^4 \frac{dx}{x(\ln x)^2}$.

38 $y = \int_2^{16} \frac{dx}{2x\sqrt{\ln x}}$.

39 $y = \int \frac{\sec^2 t}{6+3\tan t}\,dt$.

40 $y = \int \frac{\sec\theta\tan\theta}{2+\sec\theta}\,d\theta$.

41 $y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan\frac{x}{2}\,dx$.

42 $y = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot\theta\,d\theta$.

43 $y = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2\cot\frac{\theta}{3}\,d\theta$.

44 $y = \int_0^{\frac{\pi}{12}} 6\tan 3x\,dx$.

45 $y = \int \frac{dx}{2\sqrt{x}+2x}$.

46 $y = \int \frac{\sec x\,dx}{\sqrt{\ln(\sec x+\tan x)}}$.

47 $y = \int \frac{x}{x+1}\,dx$.

48 $y = \int \frac{dx}{x(2+\ln x)}$.

49 $y = \int \frac{x^2+1}{x^{-}1}\,dx$.

50 $y = \int \frac{x-1}{x+1}\,dx$.

En los ejercicios 51 a 60 calcule y' como función de x, t o θ según corresponda.

51 $y = e^{\frac{2x}{3}}$.

52 $y = e^{4\sqrt{x}+x^2}$.

53 $y = (1+2x)e^{-2x}$.

54 $y = (9x^2-6x+2)e^{3x}$

55 $y = \ln\left(3\theta e^{-\theta}\right)$.

56 $y = \theta^3 e^{-2\theta}\cos 5\theta$.

57 $y = \ln(2e^{-t}\operatorname{sen} t)$.

58 $y = \ln\left(\frac{\sqrt{\theta}}{1+\sqrt{\theta}}\right)$.

59 $y = e^{\operatorname{sen} t}\left(\ln t^2+1\right)$.

60 $y = \int_{e^{4\sqrt{x}}}^{e^{2x}} \ln t\,dt$.

En los ejercicios 61 a 64 calcule $\frac{dy}{dx}$.

61 $\ln y = e^y \operatorname{sen} x$.

62 $\ln xy = e^{x+y}$.

63 $e^{2x} = \operatorname{sen}(x+3y)$.

64 $\tan y = e^x + \ln x$.

En los ejercicios 65 a 78 calcule la integral propuesta.

65 $\int (2e^x - 3e^{-2x})\,dx.$

66 $\int_{-\ln 2}^{0} e^{-x}\,dx.$

67 $\int 2e^{2x-1}\,dx.$

68 $\int_0^{\ln 16} e^{\frac{x}{4}}\,dx.$

69 $\int \frac{e^{-\sqrt{r}}}{\sqrt{r}}\,dr.$

70 $\int t^3 e^{t^4}\,dt.$

71 $\int \frac{e^{\frac{-1}{x^2}}}{x^3}\,dx$

72 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + e^{\cot\theta}\right)\operatorname{cosec}^2\theta\, d\theta.$

73 $\int e^{\sec \pi t} \sec \pi t \tan \pi t\, dt.$

74 $\int_{\ln\frac{\pi}{4}}^{\ln\frac{\pi}{2}} 2e^v \cos e^v\,dv.$

75 $\int_0^{\sqrt{\ln \pi}} 2xe^{x^2}\cos\left(e^{x^2}\right)dx.$

76 $\int \frac{e^r}{1+e^r}\,dr.$

77 $\int \frac{dx}{1+e^x}.$

78 $\int_1^{e} \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx.$

79 Muestre que $a^x = e^{x\ln a}$, $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$
y concluya que $(a^x)' = a^x \ln a$, $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x\ln a}.$

80 Use las igualdades obtenidas en el ejercicio anterior para concluir que $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + K.$

En los ejercicios 81 a 100 calcule y'.

81 $y = \arccos x^2.$

82 $y = \arccos \frac{1}{x}.$

83 $y = \operatorname{arcsen} \sqrt{2}\,t.$

84 $y = \operatorname{arcsen}(1-t).$

85 $y = \operatorname{arcsec}(2x+1).$

86 $y = \operatorname{arcsec} 5x.$

87 $y = \operatorname{arcsec} \frac{1}{t}.$

88 $y = \operatorname{arcsen} \frac{3}{t^2}.$

89 $y = \operatorname{arccotan} \sqrt{t}.$

90 $y = \arctan \sqrt{t-1}.$

91 $y = \ln(\arctan x).$

92 $y = \arctan(\ln x).$

93 $y = \arccos(e^{-t}).$

94 $y = x\sqrt{1-x} + \arccos x.$

95 $y = \sqrt{x^2-1} - \operatorname{arcsec} x.$

96 $y = \arctan \sqrt{x^2-1} + \operatorname{arcsec} x.$

97 $y = \operatorname{arccotan} \frac{1}{x} + \arctan x.$

98 $y = \arctan \frac{1}{x} + \operatorname{arccotan} x.$

99 $y = x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2}.$

100 $y = \ln\left(x^2+4\right) - x\arctan \frac{x}{2}.$

En los ejercicios 101 a 130 calcule la integral propuesta:

101 $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}.$

102 $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}.$

103 $\int \frac{dx}{12+x^2}.$

104 $\int \frac{dx}{9+3x^2}.$

105 $\int \frac{dx}{x\sqrt{25x^2-2}}.$

106 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}.$

107 $\int_0^{\frac{3\sqrt{2}}{4}} \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}.$

108 $\int_0^2 \frac{dt}{8+2t^2}.$

109 $\displaystyle\int \frac{dt}{4+3t^2}$.

110 $\displaystyle\int_{-1}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dy}{y\sqrt{4y^2-1}}$.

111 $\displaystyle\int_{-\frac{2}{3}}^{-\frac{\sqrt{2}}{3}} \frac{dy}{y\sqrt{9y^2-1}}$.

112 $\displaystyle\int \frac{3\,dx}{\sqrt{1-4(x-1)^2}}$.

113 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x+3}}$.

114 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-2x+3}$.

115 $\displaystyle\int \frac{dx}{9x^2+6x+2}$.

116 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta\, d\theta}{1+\operatorname{sen}^2\theta}$.

117 $\displaystyle\int_{0}^{\ln\sqrt{3}} \frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}}$.

118 $\displaystyle\int_{1}^{e^{\frac{x}{4}}} \frac{4\,dt}{t\left(1+\ln^2 t\right)}$.

119 $\displaystyle\int \frac{y\,dy}{\sqrt{1-y^4}}$.

120 $\displaystyle\int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\sqrt{1-\tan^2\theta}}$.

121 $\displaystyle\int \frac{e^{\operatorname{arcsen} x}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

122 $\displaystyle\int \frac{(\operatorname{arcsen} x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

123 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x-3}}$.

124 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$.

125 $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{6\,dt}{\sqrt{3-2t-t^2}}$.

126 $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dt}{\sqrt{3+4t-4t^2}}$.

127 $\displaystyle\int \frac{dy}{y^2+6y+10}$.

128 $\displaystyle\int \frac{dy}{y^2-2y+5}$.

129 $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{dx}{x^2-2x+2}$.

130 $\displaystyle\int_{2}^{4} \frac{dx}{x^2-6x+10}$.

Soluciones de ejercicios del Tema No.6: Funciones Exponenciales, Logarítmicas y Trigonométricas Inversas Prof. Pedro Rodríguez

Calcule la derivada de y respecto a x, t o θ según corresponda.

1. $y = \ln kx \Longrightarrow y' = \frac{k}{kx} = \frac{1}{x}$, también $y = \ln k + \ln x \Longrightarrow y' = \frac{1}{x}$.
2. $y = \ln t^2 = 2\ln t \Longrightarrow y' = \frac{2}{t}$.
3. $y = \ln t^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\ln t \Longrightarrow y' = \frac{3}{2t}$.
4. $y = \ln\frac{3}{x} = \ln 3 - \ln x \Longrightarrow y' = -\frac{1}{x}$.
5. $y = \ln\frac{10}{x} = \ln 10 - \ln x \Longrightarrow y' = -\frac{1}{x}$.
6. $y = \ln(\theta + 1) \Longrightarrow y' = \dfrac{1}{\theta + 1}$.
7. $y = (\ln x)^3 \Longrightarrow y' = 3\ln^2 x \cdot \frac{1}{x} = \dfrac{3\ln^2 x}{x}$.
8. $y = \ln x^3 = 3\ln x \Longrightarrow y' = \frac{3}{x}$.
9. $y = t\ln^2 t \Longrightarrow y' = \ln^2 t + t \cdot 2\ln t \cdot \dfrac{1}{t} = \ln^2 t + 2\ln t$.
10. $y = t\sqrt{\ln t} \Longrightarrow y' = \sqrt{\ln t} + t\dfrac{1}{2\sqrt{\ln t}} \cdot \dfrac{1}{t} = \sqrt{\ln t} + \dfrac{1}{2\sqrt{\ln t}}$.
11. $y = t\ln\sqrt{t} = t\ln t^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}t\ln t \Longrightarrow y' = \dfrac{1}{2}\left(\ln t + t \cdot \dfrac{1}{t}\right) \Longrightarrow y' = \dfrac{1}{2}(\ln t + 1)$.
12. $y = \dfrac{\ln t}{t} \Longrightarrow y' = \dfrac{t \cdot \frac{1}{t} - \ln t}{t^2} = \dfrac{1 - \ln t}{t^2}$.
13. $y = \dfrac{1 + \ln t}{t} \Longrightarrow y' = \dfrac{t \cdot \frac{1}{t} - (1 + \ln t)}{t^2} = -\dfrac{\ln t}{t^2}$.
14. $y = \dfrac{\ln x}{1 + \ln x} \Longrightarrow y' = \dfrac{\frac{1 + \ln x}{x} - \frac{\ln x}{x}}{(1 + \ln x)^2}$.
15. $y = \ln(\ln(\ln x)) \Longrightarrow y' = \dfrac{1}{\ln(\ln x)} \cdot \dfrac{1}{\ln x} \cdot \dfrac{1}{x} \Longrightarrow y' = \dfrac{1}{x\ln x\ln(\ln x)}$.
16. $y = \theta\operatorname{sen}(\ln\theta) + \cos(\ln\theta) \Longrightarrow y' = \operatorname{sen}(\ln\theta) + \theta\cos(\ln\theta)\dfrac{1}{\theta} - \operatorname{sen}(\ln\theta)\dfrac{1}{\theta} \Longrightarrow$
    $y' = \cos(\ln\theta) + \operatorname{sen}(\ln\theta)(1 - \frac{1}{\theta})$.
17. $y = \ln(\sec\theta + \tan\theta) \Longrightarrow y' = \dfrac{\sec\theta\tan\theta + \sec^2\theta}{\sec\theta + \tan\theta} = \dfrac{\sec\theta(\tan\theta + \sec\theta)}{\sec\theta + \tan\theta} = \sec\theta$.
18. $y = \displaystyle\int_{\frac{x^2}{2}}^{x^2} \ln\sqrt{t}\,dt \Longrightarrow y' = (\ln\sqrt{x^2})2x - \left(\ln\sqrt{\frac{x^2}{2}}\right)x$, si $x > 0$; $y' = x\left(2\ln x - \ln\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right) =$
    $x(2\ln x - \ln x + \ln\sqrt{2}) = x(\ln x + \ln\sqrt{2})$.
19. $y = \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{\sqrt[3]{x}} \ln t\,dt \Longrightarrow y' = (\ln\sqrt[3]{x})\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - (\ln\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\ln x^{\frac{1}{3}}}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{\ln x^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{x}} = \frac{\ln x}{9\sqrt[3]{x^2}} - \frac{\ln x}{4\sqrt{x}}$.
20. $y = \displaystyle\int_{x}^{\ln x} \frac{1}{t}\,dt \Longrightarrow y' = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \Longrightarrow y' = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\ln x} - 1\right)$.

21. $y = \sqrt{x(x+1)} \Longrightarrow \ln y = \ln[x(x+1)]^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\ln[x(x+1)] = \dfrac{1}{2}[\ln x + \ln(x+1)]$, derivando se obtiene: $\frac{1}{y}y' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\right) \Longrightarrow y' = \dfrac{\sqrt{x(x+1)}}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\right)$.

22. $y = \sqrt{\dfrac{x^2+1}{(x-1)^3}} \Longrightarrow \ln y \left[\dfrac{x^2+1}{(x-1)^3}\right]^{\frac{1}{2}} = \ln \dfrac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{(x-1)^{\frac{3}{2}}} \Longrightarrow \ln y = \ln(x^2+1)^{\frac{1}{2}} - \ln(x-1)^{\frac{3}{2}} =$

$\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) - \dfrac{3}{2}\ln(x-1)$, derivando se obtiene: $\frac{1}{y}y' = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x^2+1}(2x) - \dfrac{3}{2}\dfrac{1}{x-1} \Longrightarrow$

$y' = \sqrt{\dfrac{x^2+1}{(x-1)^3}}\left[\dfrac{x}{x^2+1} - \dfrac{3}{2(x-1)}\right]$.

23. $y = \sqrt{\dfrac{1}{t(t+1)}} \Longrightarrow \ln y = \ln[t(t+1)]^{-\frac{1}{2}} = -\dfrac{1}{2}\ln t(t+1) \Longrightarrow \ln y = -\dfrac{1}{2}[\ln t + \ln(t+1)] \Longrightarrow$

$\frac{1}{y}y' = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t+1}\right) \Longrightarrow y' = \sqrt{\dfrac{1}{t(t+1)}}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t+1}\right)$.

24. $y = \dfrac{1}{t(t+1)(t+2)} \Longrightarrow \ln y = \ln[t(t+1)(t+2)]^{-1} \Longrightarrow \ln y = -[\ln t + \ln(t+1) + \ln(t+2)] \Longrightarrow \frac{1}{y}y' = -\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t+1} + \frac{1}{t+2}\right) \Longrightarrow y' = -\dfrac{1}{t(t+1)(t+2)}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t+1} + \frac{1}{t+2}\right)$.

25. $y = \dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{(x+1)^{\frac{2}{3}}} \Longrightarrow \ln y = \ln x + \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) - \dfrac{2}{3}\ln(x+1) \Longrightarrow$

$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x^2+1}(2x) - \dfrac{2}{3(x+1)} \Longrightarrow y' = \dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{(x+1)^{\frac{2}{3}}}\left(\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{2}{3(x+1)}\right)$.

26. $y = \sqrt[3]{\dfrac{x(x+1)(x-2)}{(x^2+1)(2x+3)}} \Longrightarrow \ln y = \dfrac{1}{3}[\ln x + \ln(x+1) + \ln(x-2) - \ln(x^2+1) - \ln(2x+3)] \Longrightarrow$

$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} - \frac{2x}{x^2+1} - \frac{2}{2x+3}\right)$

$\Longrightarrow y' = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{x(x+1)(x-2)}{(x^2+1)(2x+3)}}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} - \frac{2x}{x^2+1} - \frac{2}{2x+3}\right)$.

27. $y = \theta^{\cos\theta} \Longrightarrow \ln y = \ln\theta^{\cos\theta} = (\cos\theta)(\ln\theta) \Longrightarrow \frac{1}{y}y' = (-\operatorname{sen}\theta)(\ln\theta) + \dfrac{\cos\theta}{\theta} \Longrightarrow$
$y' = \theta^{\cos\theta}\left(-\operatorname{sen}\theta\ln\theta + \dfrac{\cos\theta}{\theta}\right)$.

28. $y = (\tan\theta)^{\sec^2\theta} \Longrightarrow \ln y = \sec^2\theta\ln(\tan\theta) \Longrightarrow \frac{1}{y}y' = 2\sec\theta\sec\theta\tan\theta\ln(\tan\theta) + \sec^2\theta\dfrac{1}{\tan\theta}\sec^2\theta$

$\Longrightarrow y' = \tan\theta^{\sec^2\theta}\left[2\sec^2\theta\tan\theta\ln(\tan\theta) + \dfrac{\sec^4\theta}{\tan\theta}\right]$.

29. $y = \displaystyle\int_{-3}^{-2}\frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_{-3}^{-2} = \ln 2 - \ln 3 = \ln\frac{2}{3}$.

30. $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{dx}{3x-2} = \frac{1}{3}\ln|3x-2|\Big|_{-1}^{0} = \frac{1}{3}(\ln 2 - \ln 5) = \frac{1}{3}\ln\frac{2}{5}$.

31. $\displaystyle\int\frac{y\,dy}{y^2-25} = \frac{1}{2}\int\frac{2y\,dy}{y^2-25} = \frac{1}{2}\ln|y^2-25| + K$.

32. $\displaystyle\int\frac{r\,dr}{4r^2+7} = \frac{1}{8}\int\frac{8r\,dr}{4r^2+7} = \frac{1}{8}\ln|4r^2+7| + K$.

33. $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\operatorname{sen}t}{2-\cos t}\,dt = \ln|2-\cos t|\Big|_0^{\pi} = (\ln 3 - \ln 1) = \ln 3$.

34. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{sen}\theta}{1-4\cos\theta}\,d\theta$, sea $u = 1-4\cos\theta \Longrightarrow du = 4\operatorname{sen}\theta d\theta$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{sen}\theta}{1-4\cos\theta} = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{4\operatorname{sen}\theta}{1-4\cos\theta}\,d\theta = \frac{1}{4}\int_{-3}^{-1} \frac{du}{u} = \frac{1}{4}\ln|u|\Big|_{-3}^{-1} = \frac{1}{4}(\ln 1 - \ln 3) = -\frac{\ln 3}{4}.$$

35. $\displaystyle\int_1^2 \frac{2\ln x}{x}\,dx$; sea $v = \ln x \Longrightarrow dv = \frac{1}{x}\,dx \Longrightarrow \int_1^2 \frac{2\ln x}{x}\,dx = 2\int_0^{\ln 2} v\,dv = 2\frac{v^2}{2}\Big|_0^{\ln 2} = (\ln 2)^2.$

36. $\displaystyle\int_2^4 \frac{dx}{x\ln x}$, sea $z = \ln x \Longrightarrow dz = \frac{1}{x}\,dx \Longrightarrow \int_2^4 \frac{dx}{x\ln x} = \int_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{dz}{z} = \ln|z|\Big|_{\ln 2}^{\ln 4} = \ln\ln 4 - \ln\ln 2.$

37. $\displaystyle\int_2^4 \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \int_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{dz}{z^2} = \int_{\ln 2}^{\ln 4} z^{-2}\,dz = \frac{z^{-1}}{-1}\Big|_{\ln 2}^{\ln 4} = -\frac{1}{z}\Big|_{\ln 2}^{\ln 4} = -\frac{1}{\ln 4} + \frac{1}{\ln 2} = -\frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{2\ln 2}.$

38. $\displaystyle\int_2^{16} \frac{dx}{2x\sqrt{\ln x}}$, sea $t = \ln x \Longrightarrow dt = \frac{dx}{x}$.

$$\int_2^{16} \frac{dx}{2x\sqrt{\ln x}} = \frac{1}{2}\int_{\ln 2}^{\ln 16} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int_{\ln 2}^{4\ln 2} t^{-\frac{1}{2}}dt = t^{\frac{1}{2}}\Big|_{\ln 2}^{4\ln 2} = \sqrt{t}\Big|_{\ln 2}^{4\ln 2} = \sqrt{4\ln 2} - \sqrt{\ln 2} = \sqrt{\ln 2}.$$

39. $\displaystyle\int \frac{\sec^2 t}{6+3\tan t}\,dt$, sea $v = 6+3\tan t \Longrightarrow dv = 3\sec^2 t\,dt$.

$$\int \frac{\sec^2 t}{6+3\tan t}\,dt = \frac{1}{3}\int \frac{dv}{v} = \frac{1}{3}\ln|v| + K = \frac{1}{3}\ln|6+3\tan t| + K.$$

40. $\displaystyle\int \frac{\sec\theta\tan\theta}{2+\sec\theta}\,d\theta = \int \frac{dz}{z} = \ln|z| + K = \ln|2+\sec\theta| + K.$

41. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan\frac{x}{2}\,dx = 2\ln\left|\sec\frac{x}{2}\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\left(\ln\sec\frac{\pi}{4} - \ln\sec 0\right) = 2(\ln\sqrt{2} - \ln 1) = 2\ln\sqrt{2} = \ln 2.$

42. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot\theta\,d\theta = -\ln|\csc\theta|\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -(\ln|\csc\tfrac{\pi}{2}| - \ln|\csc\tfrac{\pi}{4}|) = -(\ln 1 - \ln\sqrt{2}) = \ln\sqrt{2}.$

43. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2\cot\tfrac{\theta}{3}\,d\theta = -6\ln|\csc\tfrac{\theta}{3}|\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -6(\ln|\csc\tfrac{\pi}{3}| - \ln|\csc\tfrac{\pi}{6}|) - 6(\ln\tfrac{2}{\sqrt{3}} - \ln 2) =$
$-6(\ln 2 - \ln\sqrt{3} - \ln 2) = 6\ln\sqrt{3} = 3\ln 3.$

44. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{12}} 6\tan 3x\,dx = 2\ln|\sec 3x|\Big|_0^{\frac{\pi}{12}} = 2(\ln|\sec\tfrac{\pi}{4}| - \ln|\sec 0|) = 2(\ln\sqrt{2} - \ln 1) = \ln 2.$

45. $\displaystyle I = \int \frac{dx}{2\sqrt{x}+2x} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$, sea $u = 1+\sqrt{x} \Longrightarrow du = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

$$I = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + K = \ln(1+\sqrt{x}) + K.$$

46. $\displaystyle I = \int \frac{\sec x\,dx}{\sqrt{\ln(\sec x+\tan x)}}$, $z = \ln(\sec x+\tan x) \Longrightarrow dz = \dfrac{\sec x\tan x + \sec^2 x}{\sec x + \tan x}$, $dx = \sec x\,dx$.

$$I = \int \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{z} + C = 2\sqrt{\ln(\sec x+\tan x)} + C.$$

47. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x+1} = \int \frac{x+1-1}{x+1}\,dx = \int dx - \int \frac{dx}{x+1} = x - \ln|x+1| + C.$

48. $\displaystyle J = \int \frac{dx}{x(2+\ln x)}$, $v = 2+\ln x \Longrightarrow dv = \frac{1}{x}\,dx \Longrightarrow J = \int \frac{dv}{v} = \ln|v| + C = \ln|2+\ln x| + C.$

49. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x-1}\,dx;$

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 0x + 1 & x-1 \\ \cline{2-2} -x^2 + x & x+1 \\ \cline{1-1} x+1 & \\ -x+1 & \\ \cline{1-1} 2 & \end{array}$$

De la división anterior se concluye la siguiente igualdad $\frac{x^2+1}{x-1} = x+1+\frac{2}{x-1}$,
luego $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x-1}\,dx = \int (x+1)\,dx + 2\int \frac{dx}{x-1} = \frac{x^2}{2} + x + 2\ln|x-1| + K.$

50. $\displaystyle\int \frac{x-1}{x+1}\,dx = \int \frac{x+1-2}{x+1}\,dx = \int dx - 2\int \frac{dx}{x+1} = x - 2\ln|x+1| + C.$

51. $y = e^{\frac{2x}{3}} \Longrightarrow y' = \frac{2}{3}e^{\frac{2}{3}x}.$

52. $y = e^{4\sqrt{x}+x^2} \Longrightarrow y' = e^{4\sqrt{x}+x^2}(\frac{2}{\sqrt{x}} + 2x).$

53. $y = (1+2x)e^{-2x} \Longrightarrow y' = 2e^{-2x} + (1+2x)(-2)e^{-2x} \Longrightarrow y' = 2e^{-2x}(1-1-2x) = -4xe^{-2x}.$

54. $y = (9x^2-6x+2)e^{3x} \Longrightarrow y' = (18x-6)e^{3x} + (9x^2-6x+2)3e^{3x} \Longrightarrow y' = 27x^2e^{3x}.$

55. $y = \ln\left(3\theta e^{-\theta}\right) = \ln 3 + \ln\theta - \theta \Longrightarrow y' = \frac{1}{\theta} - 1.$

56. $y = \theta^3 e^{-2\theta}\cos 5\theta \Longrightarrow y' = 3\theta^2 e^{-2\theta}\cos 5\theta - 2\theta^3 e^{-2\theta}\cos 5\theta - 5\theta^3 e^{-2\theta}\,\mathrm{sen}\,5\theta.$

57. $y = \ln\left(2e^{-t}\,\mathrm{sen}\,t\right) = \ln 2 - t + \ln\mathrm{sen}\,t \Longrightarrow y' = -1 + \frac{\cos t}{\mathrm{sen}\,t}.$

58. $y = \ln\frac{\sqrt{\theta}}{1+\sqrt{\theta}} = \frac{1}{2}\ln\theta - \ln(1+\sqrt{\theta}) \Longrightarrow y' = \frac{1}{2\theta} - \frac{1}{1+\sqrt{\theta}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\theta}} = \frac{1}{2}(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta+\sqrt{\theta}}).$

59. $y = e^{\mathrm{sen}\,t}(\ln t^2 + 1) = e^{\mathrm{sen}\,t}(2\ln t + 1) \Longrightarrow y' = e^{\mathrm{sen}\,t}\cos t(2\ln t + 1) + e^{\mathrm{sen}\,t}(\frac{2}{t}).$

60. $\displaystyle y = \int_{e^{4\sqrt{x}}}^{e^{2x}} \ln t\,dt \Longrightarrow y' = (\ln e^{2x})e^{2x}(2) - (\ln e^{4\sqrt{x}})e^{4\sqrt{x}}\frac{2}{\sqrt{x}} = 2xe^{2x}2 - 4\sqrt{x}e^{4\sqrt{x}}\frac{2}{\sqrt{x}} =$
$4xe^{2x} - 8e^{4\sqrt{x}}.$

61. $\ln y = e^y\,\mathrm{sen}\,x \Longrightarrow \frac{1}{y}y' = e^y y'\,\mathrm{sen}\,x + e^y\cos x \Longrightarrow y'\left(\frac{1}{y} - e^y\,\mathrm{sen}\,x\right) = e^y\cos x \Longrightarrow$
$y' = \dfrac{e^y\cos x}{\frac{1}{y} - e^y\,\mathrm{sen}\,x} = \dfrac{ye^y\cos x}{1 - ye^y\,\mathrm{sen}\,x}.$

62. $y = \ln xy = e^{x+y} \Longrightarrow \ln x + \ln y = e^{x+y} \Longrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y}y' = e^{x+y}(1+y') \Longrightarrow \frac{1}{x} + \frac{y'}{y} = e^{x+y} + e^{x+y}y'$
$\Longrightarrow \frac{y'}{y} - y'e^{x+y} = e^{x+y} - x \Longrightarrow y' = \dfrac{e^{x+y} - x}{\frac{1}{y} - e^{x+y}} = \dfrac{y\,(e^{x+y} - y)}{1 - ye^{x+y}}.$

63. $y = e^{2x} = \mathrm{sen}(x+3y) \Longrightarrow 2e^{2x} = \cos(x+3y)(1+3y') \Longrightarrow 2e^{2x} - \cos(x+3y) = 3y'\cos(x+3y)$
$\Longrightarrow y' = \dfrac{2e^{2x} - \cos(x+3y)}{3\cos(x+3y)}.$

64. $\tan y = e^x + \ln x \Longrightarrow (\sec^2 y)y' = e^x + \frac{1}{x} \Longrightarrow y' = \dfrac{xe^x + 1}{x\sec^2 y}.$

65. $\displaystyle\int (2e^x - 3e^{-2x})\,dx = 2e^x + \frac{3}{2}e^{-2x} + C.$

66. $\displaystyle\int_{-\ln 2}^{0} e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_{-\ln 2}^{0} = -(1-e^{\ln 2}) = -(1-2) = 1.$

67. $\displaystyle\int 2e^{2x-1}\,dx = e^{2x-1} + C.$

68. $\displaystyle\int_{0}^{\ln 16} e^{\frac{x}{4}}\,dx = 4e^{\frac{x}{4}}\Big|_{0}^{\ln 16} = 4(e^{\frac{\ln 16}{4}} - e^{0}) = 4(e^{\frac{4\ln 2}{4}} - 1) = 4(e^{\ln 2} - 1) = 4(2-1) = 4.$

69. $\displaystyle\int \frac{e^{-\sqrt{r}}}{\sqrt{r}}\,dr;\ u = -\sqrt{r} \Longrightarrow du = -\frac{1}{2\sqrt{r}}\,dr.$

$\displaystyle\int \frac{e^{-\sqrt{r}}}{\sqrt{r}}\,dr = -2\int \frac{e^{-\sqrt{r}}}{-2\sqrt{r}}\,dr = -2\int e^{u}\,du = -2e^{u} + C = -2e^{-\sqrt{r}} + C.$

70. $\displaystyle I = \int t^{3}e^{t^{4}}\,dt;\ z = t^{4} \Longrightarrow dz = 4t^{3}\,dt.$

$\displaystyle I = \frac{1}{4}\int 4t^{3}e^{t^{4}}\,dt = \frac{1}{4}\int e^{u}\,du = \frac{e^{u}}{4} + C = \frac{e^{t^{4}}}{4} + C.$

71. $\displaystyle J = \int \frac{e^{-\frac{1}{x^{2}}}}{x^{3}}\,dx;\ z = -\frac{1}{x^{2}} = -x^{-2} \Longrightarrow dz = \frac{2}{x^{3}}\,dx.$

$\displaystyle J = \frac{1}{2}\int \frac{2e^{-\frac{1}{x^{2}}}}{x^{3}}\,dx = \frac{1}{2}\int e^{z}\,dz = \frac{1}{2}e^{z} + C = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{x^{2}}} + C.$

72. $\displaystyle I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1+e^{\cot\theta})\csc^{2}\theta\,d\theta;\ u = \cot\theta \Longrightarrow du = -\csc^{2}\theta\,d\theta.$

$\displaystyle I = -\int_{1}^{0} (1+e^{u})\,du = \int_{0}^{1} (1+e^{u})\,du = (u+e^{u})\Big|_{0}^{1} = (1+e) - (1) = e.$

73. $\displaystyle y = \int e^{\sec\pi t}\sec\pi t\tan\pi t\,dt = \frac{1}{\pi}e^{\sec\pi t} + k.$ Haga $u = \sec\pi t$.

74. $\displaystyle I = \int_{\ln\frac{\pi}{4}}^{\ln\frac{\pi}{2}} 2e^{v}\cos e^{v}\,dv;\ z = e^{v} \Longrightarrow dz = e^{v}\,dv.$

$\displaystyle I = 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos z\,dz = 2\,\mathrm{sen}\,z\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 2(1 - \tfrac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}(\sqrt{2}-1) = 2 - \sqrt{2}.$

75. $\displaystyle I = \int_{0}^{\sqrt{\ln\pi}} 2xe^{x^{2}}\cos e^{x^{2}}\,dx;$ Sea $r = e^{x^{2}}$, $dr = e^{x^{2}}2x\,dx \Longrightarrow$

$\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{\ln\pi}} 2xe^{x^{2}}\cos e^{x^{2}}\,dx = \int_{1}^{\pi} \cos r\,dr = \mathrm{sen}\,r\Big|_{1}^{\pi} = -\,\mathrm{sen}\,1.$

76. $\displaystyle\int \frac{e^{r}}{1+e^{r}}\,dr = \ln(1+e^{r}) + C;$ haga $u = 1 + e^{r}$.

77. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+e^{x}} = \int \frac{(1+e^{x}-e^{x})}{1+e^{x}}\,dx = \int dx - \int \frac{e^{x}}{e^{x}+1}\,dx = x - \ln(1+e^{x}) + C.$

78. $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx = \int_{0}^{1} \sqrt{z}\,dz = \frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}\Big|_{0}^{1} = \frac{2}{3}.$

79. Sea $y = a^{x} \Longrightarrow \ln y = \ln a^{x} \Longrightarrow \ln y = x\ln a \Longrightarrow y = e^{x\ln a}$ o sea $\boxed{a^{x} = e^{x\ln a}}$

Sea $\log_{a} x = y \Longrightarrow x = a^{y} \Longrightarrow \ln x = y\ln a \Longrightarrow y = \dfrac{\ln x}{\ln a} \Longrightarrow \boxed{\log_{a} x = \tfrac{\ln x}{\ln a}}.$

Las igualdades anteriores son de gran importancia por cuanto reducen el problema de derivar o integrar las funciones $f(x) = a^x$ y $g(x) = \log_a^x$ a derivar o integrar $y = e^x$, $y = \ln x$.

80. $\displaystyle\int a^x\,dx = \int e^{x\ln a}\,dx = \frac{e^{x\ln a}}{\ln a} + C = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

81. $y = \arccos x^2 \Longrightarrow y' = \dfrac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}.$

82. $y = \arccos\frac{1}{x} \Longrightarrow y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-(\frac{1}{x})^2}}\cdot -\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, si $x > 0$.

83. $y = \operatorname{arcsen}\sqrt{2}t \Longrightarrow y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-2t^2}}\cdot\sqrt{2}.$

84. $y = \operatorname{arcsen}(1-t) \Longrightarrow y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-(1-t)^2}}.$

85. $y = \operatorname{arcsec}(2x+1) \Longrightarrow y' = \dfrac{2}{(2x+1)\sqrt{(2x+1)^2-1}}.$

86. $y = \operatorname{arcsec}5x \Longrightarrow y' = \dfrac{5}{5x\sqrt{25x^2-1}} = \dfrac{1}{x\sqrt{25x^2-1}}.$

87. $y = \operatorname{arcsec}\frac{1}{t} \Longrightarrow y' = \dfrac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{(\frac{1}{t})^2-1}} = \dfrac{-1}{\sqrt{1-t^2}}.$

88. $y = \operatorname{arcsen}\frac{3}{t^2} \Longrightarrow y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-(\frac{3}{t^2})^2}}\cdot -\dfrac{6}{t^3} \Longrightarrow y' = \dfrac{-6}{t\sqrt{t^4-9}}$

89. $y = \operatorname{arccotan}\sqrt{t} \Longrightarrow y' = \dfrac{-1}{1+t}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$

90. $y = \arctan\sqrt{t-1} \Longrightarrow y' = \dfrac{1}{1+t-1}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{t-1}} = \dfrac{1}{2t\sqrt{t-1}}$

91. $y = \ln(\arctan x) \Longrightarrow y' = \dfrac{1}{\arctan x}\cdot\dfrac{1}{1+x^2}$

92. $y = \arctan(\ln x) \Longrightarrow y' = \dfrac{1}{1+\ln^2 x}\cdot\dfrac{1}{x}$

93. $y = \arccos e^{-t} \Longrightarrow y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-(e^{-t})^2}}\cdot -e^{-t} = \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}}$

94. $y = x\sqrt{1-x} + \arccos x \Longrightarrow y' = \sqrt{1-x} - \dfrac{x}{2\sqrt{1-x}} - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

95. $y = \sqrt{x^2-1} - \operatorname{arcsec}x \Longrightarrow y' = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} - \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{x^2-1}{x\sqrt{x^2-1}} \Longrightarrow \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$

96. $y = \arctan\sqrt{x^2-1} + \operatorname{arcsec}x \Longrightarrow y' = \dfrac{1}{1+(x^2-1)}\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} + \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{2}{x\sqrt{x^2-1}}$

97. $y = \operatorname{arccotan}\frac{1}{x} + \arctan x \Longrightarrow y' = -\dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{2}{1+x^2}$

98. $y = \arctan\frac{1}{x} + \operatorname{arccotan}x \Longrightarrow y' = \dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}} - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^2} = -\dfrac{2}{1+x^2}.$

99. $y = x\operatorname{arcsen}x + \sqrt{1-x^2} \Longrightarrow y' = \operatorname{arcsen}x + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsen}x.$

100. $y = \ln(x^2+4) - x\arctan\frac{x}{2} \Longrightarrow y' = \frac{2x}{x^2+4} - \left(\arctan\frac{x}{2} + x\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{4}}\cdot\frac{1}{2}\right)$

$\Longrightarrow y' = \frac{2x}{x^2+4} - \arctan\frac{x}{2} - \frac{2x}{4+x^2} = -\arctan\frac{x}{2}$

101. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \operatorname{arcsen}\frac{x}{3} + C.$

102. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x)^2}} = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} 2x + C.$

103. $\int \frac{dx}{12+x^2} = \frac{1}{\sqrt{12}}\arctan\frac{x}{\sqrt{12}} + C.$

104. $\int \frac{dx}{9+3x^2} = \frac{1}{3}\int\frac{dx}{3+x^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}} + C.$

105. $\int \frac{dx}{x\sqrt{25x^2-2}} = \int\frac{dx}{5\sqrt{(5x)^2-2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arcsec}\frac{|5x|}{\sqrt{2}} + C.$

106. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \operatorname{arcsen}\frac{x}{2}\Big|_0^1 = \operatorname{arcsen}\frac{1}{2} - \operatorname{arcsen} 0 = \frac{\pi}{6}.$

107. $\int_0^{\frac{3\sqrt{2}}{4}} \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}} = \int_0^{\frac{3\sqrt{2}}{4}} \frac{dx}{\sqrt{3^2-(2x)^2}} = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\frac{2x}{3}\Big|_0^{\frac{3\sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{2}}{2} - \operatorname{arcsen} 0\right) = \frac{\pi}{8}$

108. $\int_0^2 \frac{dt}{8+2t^2} = \frac{1}{2}\int_0^2\frac{dt}{4+t^2} = \frac{1}{4}\arctan\frac{t}{2}\Big|_0^2 = \frac{1}{4}(\arctan 1 - \arctan 0) = \frac{\pi}{16}$

109. $y = \int\frac{dt}{4+3t^2} = \int\frac{dt}{4+(\sqrt{3}t)^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{\sqrt{3}t}{2} + C.$

110. $\int_{-1}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dy}{y\sqrt{4y^2-1}} = \operatorname{arcsec}|2y|\Big|_{-1}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \operatorname{arcsec}\sqrt{2} - \operatorname{arcsec} 2 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{12}$

111. $\int_{-\frac{2}{3}}^{-\frac{\sqrt{2}}{3}} \frac{dy}{y\sqrt{9y^2-1}} = \operatorname{arcsec}|3y|\Big|_{-\frac{2}{3}}^{-\frac{\sqrt{2}}{3}} = \operatorname{arcsec}\sqrt{2} - \operatorname{arcsec} 2 = -\frac{\pi}{12}$. (Véase el anterior).

112. $\int\frac{3dx}{\sqrt{1-4(x-1)^2}} = 3\int\frac{dx}{\sqrt{1-[2(x-1)]^2}} = \frac{3}{2}\operatorname{arcsen} 2(x-1) + C.$

113. $\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x+3}} = \int\frac{dx}{\sqrt{3-(x^2+2x)}} = \int\frac{dx}{\sqrt{4-(x^2+2x+1)}} = \int\frac{dx}{\sqrt{4-(x+1)^2}} =$
$\operatorname{arcsen}\frac{x+1}{2} + C.$

114. $\int\frac{dx}{x^2-2x+3} = \int\frac{dx}{(x^2-2x+1)+2} = \int\frac{dx}{2+(x-1)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x-1}{\sqrt{2}} + C.$

115. $\int\frac{dx}{9x^2+6x+2} = \int\frac{dx}{9x^2+6x+1+1} = \int\frac{dx}{1+(3x+1)^2} = \frac{1}{3}\arctan(3x+1) + C.$

116. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta\, d\theta}{1+\operatorname{sen}^2\theta} = \arctan(\operatorname{sen}\theta)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.$

117. $\int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} = \int_0^{\ln\sqrt{3}}\frac{e^x}{1+(e^x)^2}\,dx = \arctan e^x\Big|_0^{\ln\sqrt{3}} = \arctan\sqrt{3} - \arctan 1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$

118. $I = \int_1^{e^{\frac{x}{4}}} \frac{4dt}{t(1+\ln^2 t)}$. Haciendo $u = \ln t$ se obtiene:
$I = 4\int_0^{\frac{x}{4}} \frac{du}{1+u^2} = 4\arctan u\Big|_0^{\frac{x}{4}} = 4\arctan\frac{x}{4}$

119. $\int \frac{y\,dy}{\sqrt{1-y^4}} = \frac{1}{2}\int \frac{2y\,dy}{\sqrt{1-(y^2)^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} u + C = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} y^2 + C.$

120. $\int \frac{\sec^2\theta\,d\theta}{\sqrt{1-\tan^2\theta}} = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \operatorname{arcsen} u + C = \arctan(\tan\theta) + C.$

121. $I = \int \frac{e^{\operatorname{arcsen} x}dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Con $u = \operatorname{arcsen} x \Longrightarrow du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.
$I = \int e^u du = e^u + C = e^{\operatorname{arcsen} x} + C.$

122. Por el ejercicio anterior: $\int \frac{(\operatorname{arcsen} x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{3}(\operatorname{arcsen} x)^3 + C.$

123. $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x-3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2-4x+3)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x^2-4x+4)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-2)^2}} =$
$\operatorname{arcsen}(x-2) + C.$

124. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}} = \operatorname{arcsen}(x-1) + C.$

125. $\int_{-1}^0 \frac{6\,dt}{\sqrt{3-2t-t^2}} = \int_{-1}^0 \frac{6\,dt}{\sqrt{4-(t+1)^2}} = 6\operatorname{arcsen}\frac{t+1}{2}\Big|_{-1}^0 = 6(\operatorname{arcsen}\frac{1}{2} - \operatorname{arcsen} 0) = \pi.$

126. $\int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{3-2t-t^2}} = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dt}{\sqrt{4-(4t^2-4t+1)}} = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dt}{\sqrt{4-(2t-1)^2}} =$
$\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\frac{2t-1}{2}\Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{2}(\frac{1}{\pi}) = \frac{\pi}{12}.$

127. $\int \frac{dy}{y^2+6y+10} = \int \frac{dy}{(y+3)^2+1} = \arctan(y+3) + C.$

128. $\int \frac{dy}{y^2-2y+5} = \int \frac{dy}{(y-1)^2+4} = \arctan\frac{y-1}{2} + C.$

129. $\int_1^2 \frac{dx}{x^2-2x+1} = \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2+1} = \arctan(x-1)\Big|_1^2 = \frac{\pi}{4}.$

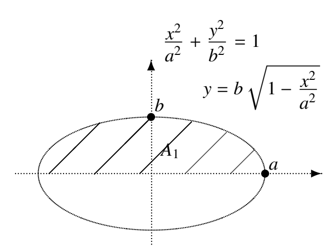
130. $\int_2^4 \frac{dx}{x^2-6x+10} = \int_2^4 \frac{dx}{(x-3)^2+1} = \arctan(x-3)\Big|_2^4 = \arctan 1 - \arctan(-1) =$
$\frac{\pi}{4} - (-\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2}.$

Tema No. 7

Ejercicios de cálculo de áreas y volúmenes   Prof. Jorge Poltronieri

I. En los problemas siguientes describa las regiones acotadas por las curvas dadas, determine después su área.

1. $y = 0$, $y = 25 - x^2$.
2. $y = x^2$, $y = 4$.
3. $y = x^2$, $y = 8 - x^2$.
4. $x = 0$, $x = 16 - y^2$.
5. $x = y^2$, $x = 25$.
6. $x + y^2$, $x = 32 - y^2$.
7. $y = x^2$, $y = 2x$.
8. $y = x^2$, $x = y^2$.
9. $y = x^2$, $y = x^3$.
10. $y = 2x^2$, $y = 5x - 3$.
11. $x = 4y^2$, $x + 12y + 5 = 0$.
12. $y = x^2$, $y = 3 + 5x - x^2$.
13. $x = 3y^2$, $x = 12y - y^2 - 5$.
14. $y = x^2$, $y = 4(x - 1)^2$.
15. $x = y^2 - 2y - 2$, $x = 4 + y - 2y^2$.
16. $y = x^4$, $y = 32 - x^4$.
17. $y = x^3$, $y = 32\sqrt{x}$.
18. $y = x^3$, $y = 2x - x^2$.
19. $y = x^2$, $y = \sqrt[3]{x^2}$.
20. $y^2 = x$, $y^2 = 2(x - 3)$.
21. $y = x^3$, $y = 2x^3 + x^2 - 2x$.
22. $y = x^3$, $x + y = 0$, $y = x + 6$.
23. La elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ aparece en la siguiente figura. Muestre que el área de la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ es $A = \pi ab$. Una agradable generalización de la fórmula del área del círculo!!



24. Determinar el área de las siguientes regiones:

a) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \sqrt{3}x^2 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\}$.

b) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}$.

c) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq y \leq \frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2}\}$.

d) El área del dominio común al interior de la parábola $y^2 = 2x$ y el círculo $x^2 + y^2 = 1$.

II. En los problemas del 25 al 51, determine el volumen del sólido generado, al girar en torno del eje indicado la región plana acotada por las curvas dadas.

25. $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$; el eje x.
26. $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 4$; el eje x.
27. $y = x^2$, $y = 4$, $x = 0$ (sólo el primer cuadrante), el eje y.
28. $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 0.1$, $x = 1$; el eje x.
29. $y = \operatorname{sen} x$ en $[0, \pi]$, $y = 0$; el eje x.
30. $y = 9 - x^2$, $y = 0$; el eje x.
31. $y = x^2$, $x = y^2$; el eje x.
32. $y = x^2$, $y = 4x$; la recta $x = 5$.
33. $y = x^2$, $y = 8 - x^2$; el eje x.
34. $x = y^2$, $x = y + 6$; el eje y.
35. $y = 1 - x^2$, $y = 0$; el eje x.
36. $y = x - x^2$, $y = 0$, $0 \leq x \leq 1$; el eje x.
37. $y = 1 - x^2$, $y = 0$; el eje y.
38. $y = 6 - x^2$, $y = 2$; el eje x.
39. $y = 6 - x^2$, $y = 2$; el eje y.
40. $y = 1 - x^2$, $y = 0$; la recta vertical $x = 2$.
41. $y = x - x^3$, $y = 0$, $0 \leq x \leq 1$; la recta horizontal $y = -1$.
42. $y = 4$, $x = 0$, $y = x^2$; el eje x.
43. $y = 4$, $x = 0$, $y = x^2$; el eje y.
44. $x = 16 - y^2$, $x = 0$, $y = 0$; el eje x.
45. $y = x^2$, $x = y^2$; la recta $y = -2$.
46. $y = x^2$, $y = 8 - x^2$; la recta $y = -1$.
47. $y = x^2$, $x = y^2$; la recta $x = 3$.
48. $y = x^2$, $y = 8 - x^2$; la recta $x = 4$.
49. La región R que se muestra en la figura siguiente, está acotada por las parábolas $y^2 = x$ y $y^2 = 2(x - 3)$. Determine el volumen del sólido generando al girar R en torno al eje x.
50. Determine el volumen del elipsoide generado al girar en torno del eje x la región acotada por la elipse con ecuación $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$, $a, b \geq 0$.
51. Repita el problema 50, pero gire la región elíptica en torno del eje y.

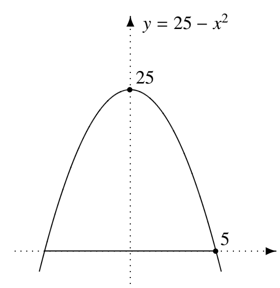
Soluciones de ejercicios del Tema No.7: Cálculo de áreas y volúmenes
Prof. Jorge Poltronieri

I. En los problemas siguientes esquematice las regiones acotadas por las curvas dadas, determine después su área.

1. $y = 0$, $y = 25 - x^2$.
2. $y = x^2$, $y = 4$.
3. $y = x^2$, $y = 8 - x^2$.
4. $x = 0$, $x = 16 - y^2$.
5. $x = y^2$, $x = 25$.
6. $x + y^2$, $x = 32 - y^2$.
7. $y = x^2$, $y = 2x$.
8. $y = x^2$, $x = y^2$.
9. $y = x^2$, $y = x^3$.
10. $y = 2x^2$, $y = 5x - 3$.
11. $x = 4y^2$, $x + 12y + 5 = 0$.
12. $y = x^2$, $y = 3 + 5x - x^2$.
13. $x = 3y^2$, $x = 12y - y^2 - 5$.
14. $y = x^2$, $y = 4(x - 1)^2$.
15. $x = y^2 - 2y - 2$, $x = 4 + y - 2y^2$.
16. $y = x^4$, $y = 32 - x^4$.
17. $y = x^3$, $y = 32\sqrt{x}$.
18. $y = x^3$, $y = 2x - x^2$.
19. $y = x^2$, $y = \sqrt[3]{x^2}$.
20. $y^2 = x$, $y^2 = 2(x - 3)$.
21. $y = x^3$, $y = 2x^3 + x^2 - 2x$.
22. $y = x^3$, $x + y = 0$, $y = x + 6$.

Solución

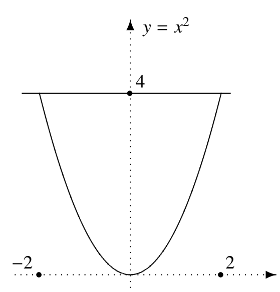
1. $y = 0$, $y = 25 - x^2$.



Los puntos de intersección de estas dos curvas se da en las soluciones de la ecuación $25 - x^2 = 0$, es decir $x = \pm 5$. Por lo tanto, el área determinada por las curvas está dada por:

$$\int_{-5}^{5}(25 - x^2)dx = 25\int_{-5}^{5}dx - \int_{-5}^{5}x^2dx = \left(25x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-5}^{5} =$$
$$25(5 - (-5)) - \left(\frac{125}{3} - \frac{-125}{3}\right) = 25 \cdot 10 - \frac{250}{3} = \frac{500}{3}.$$

2. $y = x^2$, $y = 4$.

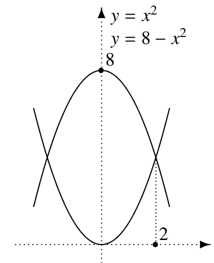


Los puntos de intersección de estas dos curvas están dados por la solución de la ecuación $x^2 = 4$, es decir $x = \pm 2$.

Por lo tanto el área determinada por estas curvas es

$$\int_{-2}^{2}(4 - x^2)dx = 4\int_{-2}^{2}dx - \int_{-2}^{2}x^2dx = 4\left(x\Big|_{-2}^{2}\right) - \left(\frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{2}\right) =$$
$$4(2 - (-2)) - \left(\frac{8}{3} - \frac{-8}{3}\right) = 4 \cdot 4 - \frac{16}{3} = \frac{16 \cdot 3 - 16}{3} = \frac{32}{3}.$$

3. $y = x^2$, $y = 8 - x^2$.



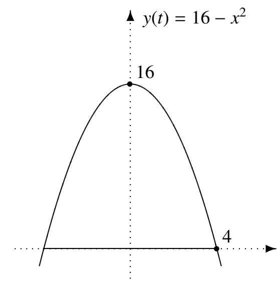
Los puntos de intersección de las dos curvas están dadas por la solución de la ecuación $8 - x^2 = x^2$, es decir $x^2 = 4$, o sea $x = \pm 2$.

Por tanto, el área determinada por estas dos curvas es:

$$\int_{-2}^{2} [(8 - x^2) - x^2]dx = \int_{-2}^{2} (8 - 2x^2)dx = 2\left[4\int_{-2}^{2} dx - \int_{-2}^{2} x^2 dx\right] = 2\left[4 \cdot 4 - \frac{16}{3}\right] =$$
$$2\left(\frac{8 \cdot 2 \cdot 3 - 16}{3}\right) = \frac{2 \cdot 32}{3} = \frac{64}{3}.$$

4. $x = 0$, $x = 16 - y^2$.

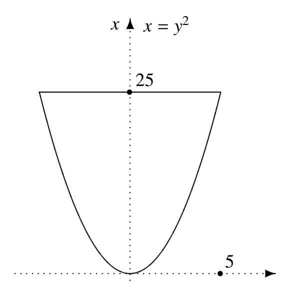
   Los puntos de intersección de las curvas están dadas por la solución de la ecuación $16 - y^2 = 0$, es decir $y = \pm 4$. Por tanto el área de la región determinada por estas dos curvas está dada por:



$$\int_{-4}^{4} (16 - y^2)dy = 16\int_{-4}^{4} dy - \int_{-4}^{4} y^2 dy = 16 \cdot 8 - \left(\frac{y^3}{3}\Big|_{-4}^{4}\right) = 2^7 -$$
$$\left(\frac{4^3}{3} - \frac{-4^3}{3}\right) = 2^7 - \frac{2 \cdot 2^6}{3} = \frac{2^7 \cdot 3 - 2^7}{3} = \frac{2^7(3 - 1)}{3} = \frac{2^8}{3} = \frac{256}{3}.$$

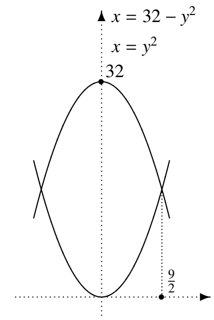
5. $x = y^2$, $x = 25$.

   Los puntos de intersección de estas dos curvas están dadas por la solución de la ecuación $y^2 = 25$, es decir $y = \pm 5$.



   Por tanto el área de la región determinada por estas dos curvas está dada por $\int_{-5}^{5} (25 - y^2)dy = 25\int_{-5}^{5} dy - \int_{-5}^{5} y^2 dy = 25(10) -$ $\left(\frac{y^3}{3}\Big|_{-5}^{5}\right) = 250 - \frac{2 \cdot 5^3}{3} = \frac{5^3 \cdot 2 \cdot 3 - 2 \cdot 5^3}{3} = \frac{2 \cdot 5^3(3 - 1)}{3} =$ $\frac{250 \cdot 2}{3} = \frac{500}{3}$.

6. $x = y^2$, $x = 32 - y^2$.

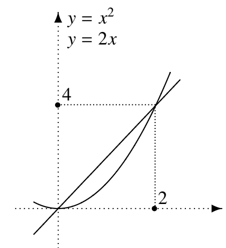


Los puntos de intersección de estas dos curvas están dadas por la solución de la ecuación $32 - y^2 = y^2$, es decir $y^2 = 16$ entonces $y = \pm 4$.

Por tanto, el área de la región determinada por estas dos curvas está dada por:

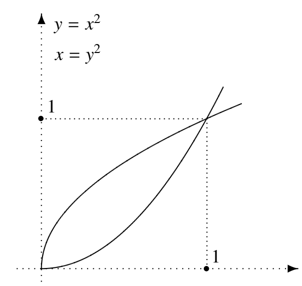
$$\int_{-4}^{4}[(32-y^2)-y^2]dy = \int_{-4}^{4}(32-2y^2)dy = 32\int_{-4}^{4}dy - 2\int_{-4}^{4}y^2dy = 32\cdot(4+4)-2\left(\frac{y^3}{3}\Big|_{-4}^{4}\right) = 2^8 - 2^2\frac{2^6}{3} = \frac{2^8\cdot 3 - 2^8}{3} = \frac{2^8\cdot 2}{3} = \frac{512}{3}.$$

7. $y = x^2$, $y = 2x$.



Los puntos de intersección de están dadas por la ecuación $x^2 = 2x$ lo que da $x = 0$, $x = 2$. Por tanto, el área de la región determinada por estas dos curvas está dada por $\int_0^2 (2x - x^2)dx = 2\int_0^2 xdx - \int_0^2 x^2dx = 2\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^2\right) - \left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^2\right) = 2\cdot\frac{4}{2} - \frac{8}{3} = 4 - \frac{8}{3} = \frac{12-8}{3} = \frac{4}{3}$.

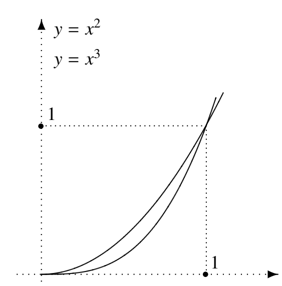
8. $y = x^2$, $x = y^2$.



Se ve claramente en la figura que la rama de la curva $x = y^2$ (o sea $y = \pm\sqrt{x}$) que nos interesa es $y = \sqrt{x}$. Los puntos de intersección de estas dos curvas están dadas por la solución de la ecuación $x^2 = \sqrt{x}$. Es decir $x^4 = x$, o equivalente $x(x^3 - 1) = 0$. Se tiene que $x = 0$ y $x = 1$. Por tanto el área de la región determinada por estas dos curvas está dada por:

$$\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \int_0^1 \sqrt{x}dx - \int_0^1 x^2dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

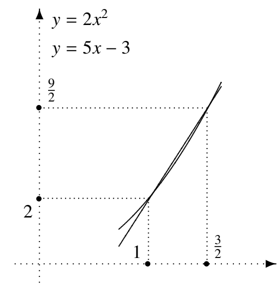
9. $y = x^2$, $y = x^3$.



Los puntos de intersección de las dos curvas están dadas por la ecuación $x^2(x-1) = 0$, así $x = 0$ y $x = 1$.

Por tanto, el área de la región determinada está dada por $\int_0^1 (x^2 - x^3)dx = \int_0^1 x^2dx = \int_0^1 x^3dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 - \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.

10. $y = 2x^2$, $y = 5x - 3$.



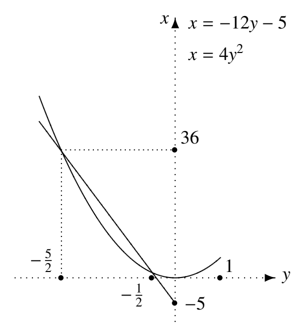
Los puntos de intersección de las dos curvas están dadas por la ecuación $2x^2 = 5x - 3$, es decir $2x^2 - 5x + 3 = 0$.

En este caso, utilizando al fórmula general, $\Delta = 25 - 4(2)(3) = 25 - 24 = 1$ por tanto $x_1 = \frac{5+1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ y $x_2 = \frac{5-1}{4} = 1$.

Por tanto, el área de la región está determinada por:

$$\int_1^{\frac{3}{2}} (5x - 3 - 2x^2)dx = 5\int_1^{\frac{3}{2}} xdx - 3\int_1^{\frac{3}{2}} dx - 2\int_1^{\frac{3}{2}} x^2dx = 5\left(\frac{x^2}{2}\Big|_1^{\frac{3}{2}}\right) - 3\left(x\Big|_1^{\frac{3}{2}}\right) - 2\left(\frac{x^3}{3}\Big|_1^{\frac{3}{2}}\right) = 5\left[\frac{9}{8} - \frac{1}{2}\right] - 3\left[\frac{3}{2} - 1\right] - 2\left[\frac{27}{24} - \frac{1}{3}\right] = 5\left[\frac{5}{8}\right] - 3\left[\frac{1}{2}\right] - 2\left[\frac{19}{24}\right] = \frac{25 \cdot 3 - 3 \cdot 12 - 38}{24} = \frac{75 - 36 - 38}{24} = \frac{1}{24}.$$

11. $x = 4y^2$, $x + 12y + 5 = 0$.
En este caso integramos con respecto a y y la segunda curva está dada por $x = -12y - 5$.

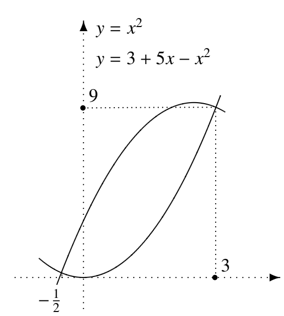


Los puntos de intersección están dados por las soluciones de la ecuación $4y^2 = -12y - 5$, es decir $4y^2 + 12y + 5 = 0$. En este caso $\Delta = 12^2 - 4(4)(5) = 144 - 80 = 64$; por tanto $y_1 = \frac{-12 - \sqrt{64}}{8} = \frac{-12 - 8}{8} = -\frac{20}{8} = -\frac{5}{2}$ y $y_2 = \frac{-12 + \sqrt{64}}{8} = \frac{-12 + 8}{8} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$.

El área de la región acotada por las dos curvas está dada por:

$$\int_{-\frac{5}{2}}^{-\frac{1}{2}} (-12y - 5 - 4y^2)dy = -12\int_{-\frac{5}{2}}^{-\frac{1}{2}} ydy - 5\int_{-\frac{5}{2}}^{-\frac{1}{2}} dy - 4\int_{-\frac{5}{2}}^{-\frac{1}{2}} y^2dy = -12\left(\frac{y^2}{2}\Big|_{-\frac{5}{2}}^{-\frac{1}{2}}\right) - 5\left(y\Big|_{-\frac{5}{2}}^{-\frac{1}{2}}\right) - 4\left(\frac{y^3}{3}\Big|_{-\frac{5}{2}}^{-\frac{1}{2}}\right) = -12\left[\frac{1}{8} - \frac{25}{8}\right] - 5\left[-\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\right] - 4\left[-\frac{1}{24} + \frac{125}{24}\right] = 36 - 10 - \frac{124}{6} = \frac{16}{3}.$$

12. $y = x^2$, $y = 3 + 5x - x^2$.

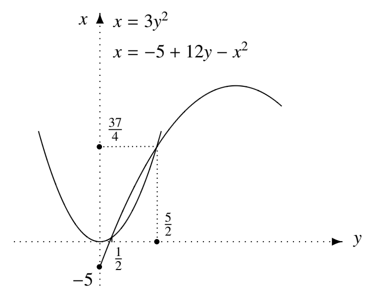


Los puntos de intersección de estas dos curvas dadas por la ecuación $x^2 = 3 + 5x - x^2$, es decir $2x^2 - 5x - 3 = 0$. En este caso $\Delta = 25 - 4(2)(-3) = 25 - 24 = 1$.

Por tanto $x_1 = \frac{5-7}{4} = -\frac{1}{2}$ y $x_2 = \frac{5+7}{4} = 3$. Por tanto el área de la región entre las dos curvas está dada por:

$\int_{-\frac{1}{2}}^{3}[(3+5x-x^2)-x^2]dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{3}(3+5x-2x^2)dx = 3\int_{-\frac{1}{2}}^{3}dx + 5\int_{-\frac{1}{2}}^{3}xdx - 2\int_{-\frac{1}{2}}^{3}x^2dx = 3\left(x\Big|_{-\frac{1}{2}}^{3}\right) +$
$5\left(\frac{x^2}{2}\Big|_{-\frac{1}{2}}^{3}\right) - 2\left(\frac{x^3}{3}\Big|_{-\frac{1}{2}}^{3}\right) = \frac{343}{24}.$

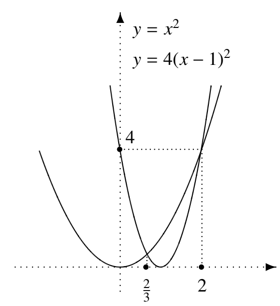
13. $x = 3y^2$, $x = 12y - y^2 - 5$.



Los puntos de intersección de las dos curvas están dados por la ecuación $3y^2 = 12y - y^2 - 5$, es decir $4y^2 - 12y + 5 = 0$. En este caso $\Delta = 144 - 4(4)(5) = 144 - 80 = 64$. Por tanto $y_1 = \frac{12-8}{8} = \frac{1}{2}$ y $y_2 = \frac{12+8}{8} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$. El área de la región acotada por estas dos curvas está dada por:

$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}}[(12y - y^2 - 5) - (3y^2)]dy = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}}(12y - 4y^2 - 5)dy =$
$12\left(\frac{y^2}{2}\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}}\right) - 4\left(\frac{y^3}{3}\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}}\right) - 5\left(y\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}}\right) = 12\left(\frac{25}{8} - \frac{1}{8}\right) - 4\left(\frac{125}{24} - \frac{1}{24}\right) - 5\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\right) =$
$12\cdot 3 - 4\cdot\frac{31}{6} - 5\cdot 2 = 36 - \frac{62}{3} - 10 = 26 - \frac{62}{3} = \frac{16}{3}.$

14. $y = x^2$, $y = 4(x-1)^2$.

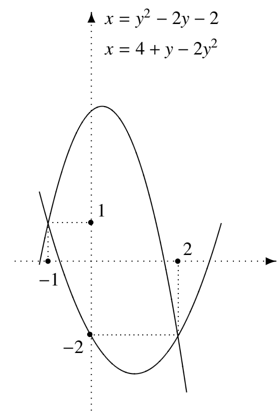


Los puntos de intersección de las dos curvas están dadas por la ecuación $x^2 = 4(x-1)^2$, es decir $x = \pm 2(x-1)$. Por un lado se obtiene que $x = 2x - 2$ y por otro $x = -2x + 2$, por lo tanto $x = 2$ y $x = \frac{2}{3}$.

Por otro lado el área entre las dos curvas está dada por:

$\int_{\frac{2}{3}}^{2}[x^2 - 4(x-1)^2]dx = \int_{\frac{2}{3}}^{2}(x^2 - 4x^2 + 8x - 4)dx = \int_{\frac{2}{3}}^{2}(-3x^2 + 8x - 4)dx =$
$-3\int_{\frac{2}{3}}^{2}x^2dx + 8\int_{\frac{2}{3}}^{2}xdx - 4\int_{\frac{2}{3}}^{2}dx = -3\left(\frac{x^3}{3}\Big|_{\frac{2}{3}}^{2}\right) + 8\left(\frac{x^2}{2}\Big|_{\frac{2}{3}}^{2}\right) - 4\left(x\Big|_{\frac{2}{3}}^{2}\right) =$
$-\left(8 - \frac{8}{27}\right) + 4\left(4 - \frac{4}{9}\right) - 4\left(2 - \frac{2}{3}\right) = -\frac{208}{27} + \frac{128}{9} - \frac{16}{3} = \frac{32}{27}.$

15. $x = y^2 - 2y - 2$, $x = 4 + y - 2y^2$.

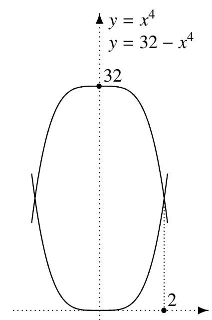


Los puntos de intersección de estas dos curvas están dados por la ecuación $y^2-2y-2 = 4+y-2y^2$, o equivalentemente $3y^2-3y-6 = 0$; es decir $y^2 - y - 2 = 0$.Entonces $(y+1)(y-2) = 0$, lo que da $y = -1$ o $y = 2$. La figura se representa de la siguiente manera:

El área determinada por la región entre las dos curvas está dada por:

$$\int_{-1}^{2}[(-2y^2 + y + 4) - (y^2 - 2y - 2)]dy = -3\int_{-1}^{2} y^2dy + 3\int_{-1}^{2} ydy + 6\int_{-1}^{2} dy =$$
$$-3\left(\frac{y^3}{3}\Big|_{-1}^{2}\right)+3\left(\frac{y^2}{2}\Big|_{-1}^{2}\right)+6\left(y\Big|_{-1}^{2}\right) = -(2^3-(-1)^3)+3(2-\frac{1}{2})+6(2-(-1)) = -9+\frac{9}{2}+18 = \frac{18+5}{2} = \frac{27}{2}.$$

16. $y = x^4$, $y = 32 - x^4$.

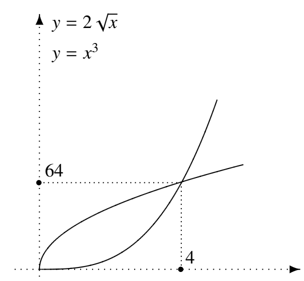


Los puntos de intersección de las dos curvas están dadas por la ecuación $x^4 = 32 - x^4$, es decir $x^4 = \frac{32}{2} = 16$ o equivalentemente $x = \pm 2$.

El área de la región entre las dos curvas está dada por:

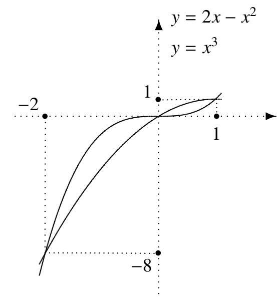
$$\int_{-2}^{2}[(32 - x^4) - x^4]dx = \int_{-2}^{2}(32 - 2x^4)dx = 32\int_{-2}^{2} dx - 2\int_{-2}^{2} x^4dx =$$
$$32\left(x\Big|_{-2}^{2}\right) - 2\left(\frac{x^5}{5}\Big|_{-2}^{2}\right) = 32\cdot 4 - 4\cdot\frac{32}{5} = 32(4 - \frac{4}{5}) = 32\left(\frac{20-4}{5}\right) = 32\cdot\frac{16}{5} = \frac{512}{5}.$$

17. Estos puntos de intersección de las gráficas están dados por la ecuación $x^3 = 32\sqrt{x}$, es decir que $x^6 = 1024x$. Equivalentemente se tiene que $x(x^5 - 1024) = 0$, entonces $x = 0$, $x^5 = 1024$, $x = 4$. El área de la región acotada por estas dos curvas está dada por:



$$\int_{0}^{4}[32\sqrt{x} - x^3]dx = 32\int_{0}^{4}\sqrt{x}dx - \int_{0}^{4} x^3dx = 32\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_{0}^{4}\right) -$$
$$\left(\frac{x^4}{4}\Big|_{0}^{4}\right) = 32\cdot\frac{2}{3}\cdot 4^{\frac{3}{2}} - \frac{4^4}{4} = \frac{64}{3}\cdot 8 - 64 = 64\left(\frac{8}{3} - 1\right) = \frac{64\cdot 5}{3} =$$
$$\frac{320}{3}.$$

18. $y = x^3$, $y = 2x - x^2$.

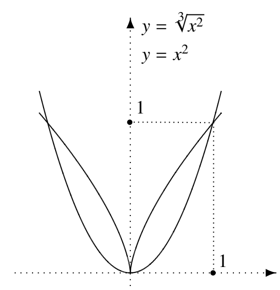


Los puntos de intersección de estas dos curvas están dadas por la ecuación $x^3 = 2x - x^2$, es decir $x(x^2 + x - 2) = 0$. Por tanto $x = 0$ y $x^2 + x - 2 = 0$. Esta última ecuación da $(x-1)(x+2) = 0$, entonces $x = 1$ y $x = -2$.

Por tanto, el área determinada por las dos curvas está dada por:

$$\int_{-2}^{0}[x^3 - (2x - x^2)]dx + \int_{0}^{1}[(2x - x^2) - x^3]dx =$$
$$\int_{-2}^{0} x^3dx + \int_{-2}^{0} x^2dx - 2\int_{-2}^{0} xdx + 2\int_{0}^{1} xdx - \int_{0}^{1} x^2dx - \int_{0}^{1} x^3dx =$$
$$\left(\frac{x^4}{4}\Big|_{-2}^{0}\right) + \left(\frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{0}\right) - \left(x^2\Big|_{-2}^{0}\right) + \left(x^2\Big|_{0}^{1}\right) - \left(\frac{x^3}{3}\Big|_{0}^{1}\right) - \left(\frac{x^4}{4}\Big|_{0}^{1}\right) =$$
$$-4 + \frac{8}{3} + 4 + 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = +\frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{32+5}{12} = \frac{37}{12}.$$

19. $y = x^2$, $y = \sqrt[3]{x^2}$.



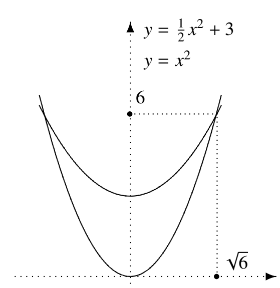
Los puntos de intersección de estas dos curvas están dados por la ecuación $x^2 = \sqrt[3]{x^2}$, es decir $x^6 = x^2$, equivalentemente $x^3(x^4 - 1) = 0$, entonces $x = 0$ y $x = \pm 1$. La figura se presenta de la siguiente manera:

El área de la región acotada por estas dos curvas está dada por:

$$\int_{-1}^{1}(\sqrt[3]{x^2} - x^2)dx = \int_{-1}^{1} x^{\frac{2}{3}}dx - \int_{-1}^{1} x^2dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}\Big|_{-1}^{1} - \left(\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1}\right) = \frac{1}{5/3} + \frac{1}{5/2} - (\frac{1}{3} + \frac{1}{3}) = 2\cdot\frac{3}{5} - \frac{2}{3} =$$
$$\frac{6}{5} - \frac{2}{3} = \frac{18-10}{15} = \frac{8}{15}.$$

20. $y^2 = x$, $y^2 = 2(x-3)$.

Aquí necesitamos expresar la ecuación de la segunda curva de manera que x esté en términos de y:



$y^2 = 2(x-3) = 2x - 6 \Longleftrightarrow 2x = y^2 + 6 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{2}y^2 + 3.$

Los puntos de intersección de estas dos curvas están dados por la ecuación $y^2 = \frac{1}{2}y^2 + 3$, es decir $y^2 = 6$ y por tanto $y = \pm\sqrt{6}$. La figura se representa de la siguiente manera:

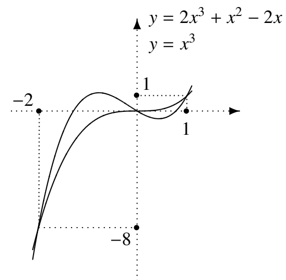
El área de la región acotada por estas dos curvas está dada por:

$$\int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}}\left[\frac{1}{2}y^2 + 3 - y^2\right]dy = \int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}}\left(-\frac{1}{2}y^2 + 3\right)dy = -\frac{1}{2}\int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} y^2dy + 3\int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}} dy =$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{y^3}{3}\Big|_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}}\right)+3\left(y\Big|_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}}\right)=-\frac{1}{2}\left(\frac{6\sqrt{6}}{3}+\frac{6\sqrt{6}}{3}\right)+3(2\sqrt{6})=-2\sqrt{6}+6\sqrt{6}=4\sqrt{6}.$$

21. $y = x^3$, $y = 2x^3 + x^2 - 2x$.

    Los puntos de intersección de estas dos curvas están dadas por la ecuación $x^3 = 2x^3 + x^2 - 2x$, es decir $x^3 + x^2 - 2x = 0$.

    Equivalentemente $x = 0$ y $x^2 + x - 2 = 0$, entonces $x = 0$ y $(x+2)(x-1) = 0$. Por tanto $x = 0$, $x = -2$, $x = 1$. Un estudio de la función de la curva $y = 2x^3 + x^2 - 2x$ (por medio de su derivada) permite ver su gráfico.

    El área de la región acotada entre las dos curvas está dada por:

    $$\int_{-2}^{0}[(2x^3+x^2-2x)-x^3]dx+\int_{0}^{1}[x^3-(2x^3+x^2-2x)]dx=$$

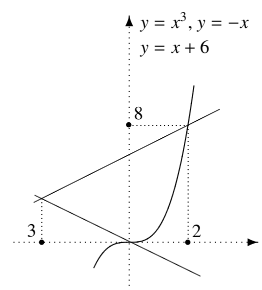
    $$\int_{-2}^{0}(x^3+x^2-2x)dx+\int_{0}^{1}(-x^3-x^2+2x)dx=$$

    $$\left(\frac{x^4}{4}\Big|_{-2}^{0}\right)+\left(\frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{0}\right)-\left(x^2\Big|_{-2}^{0}\right)+\left(-\frac{x^4}{4}\Big|_{0}^{1}\right)+\left(-\frac{x^3}{3}\Big|_{0}^{1}\right)+\left(x^2\Big|_{0}^{1}\right)=$$

    $$-\frac{16}{4}+\frac{8}{3}+4-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+1=\frac{37}{12}.$$

22. $y = x^3$, $x + y = 0$, $y = x + 6$.

    La figura se presenta de la siguiente manera:

    Cálculos simples muestran que el punto de intersección de $y = x+6$ y $y = x^3$ está dado por $x = 2$ y el punto de intersección de $y = x + 6$, $y = -x$ es $x = -3$.

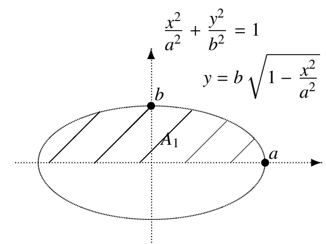
    Se ve claramente que el área de la región acotada por estas tres curvas está dada por:

    $$\int_{-3}^{0}[(x+6)-(-x)]dx+\int_{0}^{2}[x+6-x^3]dx=\int_{-3}^{0}(2x+6)dx+\int_{0}^{2}(x+6-x^3)dx=$$

    $$x^2\Big|_{-3}^{0}+6x\Big|_{-3}^{0}+\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{2}+6x\Big|_{0}^{2}-\frac{x^4}{4}\Big|_{0}^{2}=-9+18+2+12-4=19.$$

23. La elipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ aparece en la siguiente figura. Muestre que el área de la región acotada es $A = \pi ab$, una agradable generalización de la fórmula del área del círculo.

Solución Aquí se tiene que $y = \pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ (suponemos que a, $b > 0$).



Sea A_1 el área determinada por la curva $y = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ y el eje $y = 0$, entonces el área A acotada por la elipse es $2A_1$ y se tiene que:

$$A_1 = \int_{-a}^{a} b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx = b\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\cdot\frac{1}{a}dx = \frac{b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx.$$

Debemos calcular $\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx$, esto lo hacemos por medio del cambio de variable $x = a\cos\theta$. Cuando $x = -a$, se tiene que $\cos\theta = -1$ y esto es $\theta = \pi$. Cuando $x = a$ se tiene que $\cos\theta = 1$ y esto es $\theta = 0$. Se sabe que $dx = -a\,\mathrm{sen}\,\theta d\theta$.

Por tanto $\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}dx = \int_{\pi}^{0}\sqrt{a^2-a^2\cos^2\theta}(-a\,\mathrm{sen}\,\theta d\theta) = -a\int_{\pi}^{0} a\sqrt{1-\cos^2\theta}\cdot\mathrm{sen}\,\theta d\theta =$
$-a\int_{\pi}^{0}\mathrm{sen}^2\,\theta d\theta = a^2\int_{0}^{\pi}\mathrm{sen}^2\,\theta d\theta$, entonces $A_1 = \frac{b}{a}\cdot a^2\int_0^{\pi}\mathrm{sen}^2\,\theta d\theta = ba\int_0^{\pi}\mathrm{sen}^2\,\theta d\theta.$

Para calcular $\int_0^{\pi}\mathrm{sen}^2\,\theta d\theta$, usamos la igualdad bien conocida en trigonometría:
$\mathrm{sen}^2\,\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, entonces $\mathrm{sen}^2\,\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$ y por tanto
$\int_0^{\pi}\mathrm{sen}^2\,\theta d\theta = \frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi}d\theta - \int_0^{\pi}\cos 2\theta d\theta\right] = \frac{1}{2}\left[\pi - \int_0^{\pi}\cos 2\theta d\theta\right].$

Para calcular $\int_0^{\pi}\cos 2\theta d\theta$, hacemos un nuevo cambio de variable $\phi = 2\theta$, $d\phi = 2d\theta$ y cuando $\theta = 0$, $\phi = 0$ y $\theta = \pi$, $\phi = 2\pi$.

Así, $\int_0^{\pi}\cos 2\theta d\theta = \int_0^{2\pi}\cos\phi\cdot\frac{d\phi}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos\phi d\phi = \frac{1}{2}\left(\mathrm{sen}\,\phi\Big|_0^{2\pi}\right) = \frac{1}{2}(\mathrm{sen}\,2\pi - \mathrm{sen}\,0) = \frac{1}{2}(0-0) = 0.$

Resumiendo tenemos que $\int_0^{\pi}\mathrm{sen}^2\,\theta d\theta = \frac{1}{2}\pi$, por lo que $A_1 = \frac{\pi ab}{2}$ y finalmente que $A = \pi ab$.

24. Determinar el área de las siguientes regiones:

a) $D = \{(x, y)\in\mathbb{R}^2/\ \sqrt{3}x^2 \le y \le \sqrt{4-x^2}\}$.

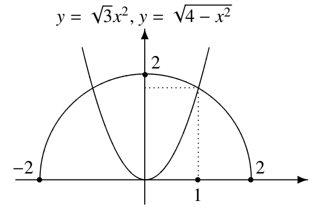
b) $D = \{(x, y)\in\mathbb{R}^2/0 \le x \le 1, x^2 \le y \le x\}$.

c) $D = \{(x, y)\in\mathbb{R}^2/0 \le x \le y \le \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}\}$.

d) El área del dominio común al interior de la parábola $y^2 = 2x$ y el círculo $x^2 + y^2 = 1$.

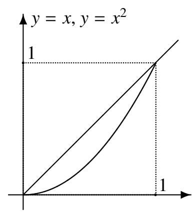
Solución

a) La curva $y = \sqrt{3}x^2$ interseca a la curva $y = \sqrt{4-x^2} \iff \sqrt{3}x^2 = \sqrt{4-x^2} \iff 3x^4 + x^2 - 4 = 0$. Sea $y = x^2$, $3y^2 + y - 4 = 0$, $\Delta = 1 - 4(3)(-4) = 49$ i.e. $y = -\dfrac{1 \pm 7}{6}$, pero $y = x^2 = 1$ (se elimina la solución negativa) $\Longrightarrow x = \pm 1$. Así, $A = \displaystyle\int_{-1}^{1} (\sqrt{4-x^2} - \sqrt{3}x^2)\,dx =$



$$2\left(\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + 2\,\text{arcsen}\,\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}x^3\right)\Big|_0^1 =$$

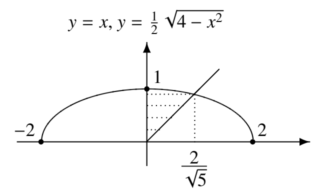
$$2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\,\text{arcsen}\,\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



b) Las curvas $y = x$, $y = x^2$ se intersecan en $x = 0$ y $x = 1$. El área es $A = \displaystyle\int_0^1 (x - x^2)dx = (\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{3}x^3)\Big|_0^1 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{6}$.

c) Las curvas se intersecan en las soluciones de la ecuación $x = \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2} \iff 4x^2 = 4 - x^2 \iff x = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$, pero $x > 0$ y se elimina la solución negativa.

El área es $A = \displaystyle\int_0^{\frac{2}{\sqrt{5}}} (\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2} - x)\,dx =$

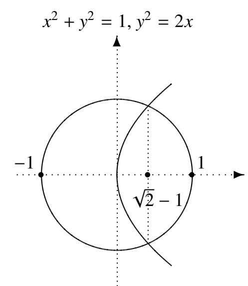


$$\tfrac{1}{2}(\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + 2\,\text{arcsen}\,\frac{x}{2}) - \tfrac{1}{2}x^2\Big|_0^{\frac{2}{\sqrt{5}}} = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{4-\tfrac{4}{5}} + 2\,\text{arcsen}\,\tfrac{1}{\sqrt{5}}) - \tfrac{2}{5} = \text{arcsen}\,\tfrac{1}{\sqrt{5}}.$$

d) Los puntos de intersección se determinan sustituyendo $y^2 = 2x$ en la ecuación $x^2 + y^2 = 1$, es decir $x^2 + 2x - 1 = 0$, con $x > 0 \Longrightarrow x = \sqrt{2} - 1$. De esta forma $A = 2\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}-1} \sqrt{2x}\,dx + 2\int_{\sqrt{2}-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{4\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{2}-1} +$

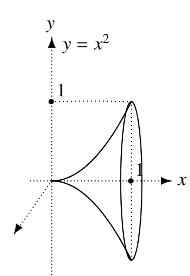
$$2(\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \tfrac{1}{2}\,\text{arcsen}\,x)\Big|_{\sqrt{2}-1}^{1} =$$

$$\tfrac{1}{3}(2 - \sqrt{2})\sqrt{\sqrt{2}-1} - \text{arcsen}(\sqrt{2}-1) + \tfrac{\pi}{2}.$$



II. En los problemas del 25 al 51, determine el volumen del sólido generado, al girar en torno del eje indicado la región plana acotada por las curvas dadas.

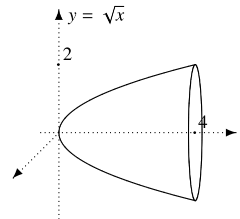
25. $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$; el eje x.



En este caso se sabe que el volumen de dicho sólido es:

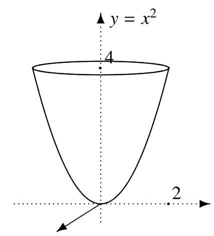
$$V = \pi\int_0^1 (x^2)^2dx = \pi\int_0^1 x^4dx = \pi\frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{5}.$$

26. $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 4$; el eje x.



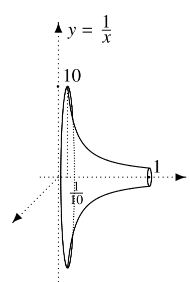
Este caso es como el ejercicio anterior, es decir:
$V = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^4 x dx = \pi \frac{x^2}{2}\Big|_0^4 = 8\pi.$

27. $y = x^2$, $y = 4$, $x = 0$ (sólo el primer cuadrante), el eje y.



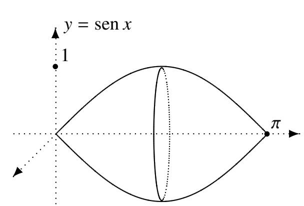
En este caso se sabe que el volumen de dicho sólido está dado por la fórmula:
$V = 2\pi \int_0^2 x(x^2) dx = 2\pi \int_0^2 x^3 dx = 2\pi \frac{x^4}{4}\Big|_0^2 = 2\pi \frac{2^4}{4} = 2\pi \cdot 4 = 8\pi$. (Compare con el ejercicio anterior).

28. $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 0.1$, $x = 1$; el eje x.



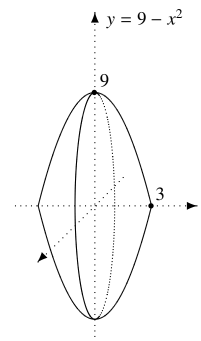
Se tiene que el volumen de dicho sólido es:
$V = \pi \int_{0.1}^1 (1/x)^2 dx = \pi \int_{0.1}^1 \frac{dx}{x^2} = \pi \int_{0.1}^1 x^{-2} dx = \pi \frac{x^{-2+1}}{-2+1}\Big|_{0.1}^1 = -\pi \frac{1}{x}\Big|_{0.1}^1 = \pi(-1+10) = 9\pi.$

29. $y = \operatorname{sen} x$ en $[0, \pi]$, $y = 0$; el eje x.



El volumen V de este sólido está dado por:
$V = \pi \int_0^\pi (\operatorname{sen} x)^2 dx = \pi \int_0^\pi \operatorname{sen}^2 x dx =$
$\pi \int_0^\pi \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi dx - \int_0^\pi \frac{\cos 2x dx}{2} =$
$\frac{\pi}{2} x\Big|_0^\pi - \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos(2x) dx = \frac{\pi^2}{2} - \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2}\Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{2} - \frac{1}{2}(0-0) = \frac{\pi^2}{2}.$

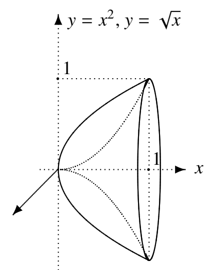
30. $y = 9 - x^2$, $y = 0$; el eje x.



Las soluciones de $9 - x^2 = 0$ son $x = \pm 3$. Por tanto el volumen del sólido es:

$V = \pi \int_{-3}^{3} (9 - x^2)^2 dx = \pi \int_{-3}^{3} (81 - 18x^2 + x^4) dx = \pi \Big[\int_{-3}^{3} 81 dx -$
$18 \int_{-3}^{3} x^2 dx + \int_{-3}^{3} x^4 dx \Big] =$
$\pi \Big[81 \Big(x \Big|_{-3}^{3} \Big) - 18 \Big(\frac{x^3}{3} \Big|_{-3}^{3} \Big) + \Big(\frac{x^5}{5} \Big|_{-3}^{3} \Big) \Big] =$
$\pi \left[81 \cdot 6 - 18 \left(2 \cdot \frac{3^3}{3} \right) + \left(2 \cdot \frac{3^5}{5} \right) \right] = \pi \left[486 - 3^4 \cdot 2^2 + \frac{2 \cdot 3^5}{5} \right] = \pi \left[\frac{486 \cdot 5 - 324 \cdot 5 + 486}{5} \right] =$
$\pi \left[\frac{2430 - 1620 + 486}{5} \right] = \frac{1296}{5} \pi.$

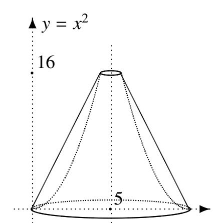
31. $y = x^2$, $x = y^2$; el eje x.



El volumen de este sólido está dado por la fórmula:

$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 - (x^2)^2) dx = \pi \int_0^1 (x - x^4) dx =$
$\pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 \right) = \pi[(1/2 - 1/5) - 0] = \pi \left(\frac{5-2}{10} \right) = \frac{3}{10} \pi.$

32. $y = x^2$, $y = 4x$; la recta $x = 5$.



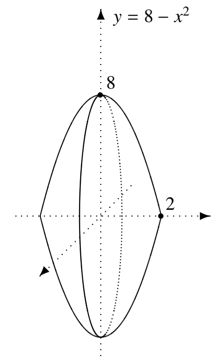
Lo que hay que hacer en este caso es trasladar las curvas $y = x^2$ y $y = 4x$, a las curvas $y = (x - 5)^2$ y $y = 4(x - 5)$ de manera que la recta $x = 5$ se pueda pensar como el eje y. La nueva figura se presenta de la siguiente manera:
Luego de estos cambios tenemos que el volumen del sólido es:

$V = 2\pi \int_5^9 x[(4(x-5))^2 - ((x-5)^2)^2] dx.$

Haciendo el cambio de variable $z = x - 5$, se tiene que $x = z + 5$, $dx = dz$ y cuando $x = 5$, $z = 0$; cuando $x = 9$, $z = 4$, entonces:

$V = 2\pi \int_0^4 (z+5)[(4z)^2 - (z^2)^2] dz = 2\pi \int_0^4 (z+5)(16z^2 - z^4) dz =$
$2\pi \int_0^4 (16z^3 - z^5 + 80z^2 - 5z^4) dz = 2\pi \left[(4z^4 \Big|_0^4) - (\frac{z^6}{6} \Big|_0^4) + 80(\frac{z^3}{3} \Big|_0^4) - (z^5 \Big|_0^4) \right] =$
$2\pi \left[4^5 - \frac{2048}{3} + \frac{5120}{3} - 4^5 \right] = 2\pi(1024) = 2048\pi.$

33. $y = x^2$, $y = 8 - x^2$; el eje x.



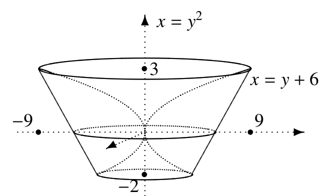
Las curvas $y = x^2$ y $y = 8 - x^2$ se intersecan en los puntos dados por la solución $8 - x^2 = x^2$, es decir $x^2 = 4$, $x = \pm 2$, entonces el volumen del sólido en cuestión es:

$V = \pi \int_{-2}^{2} [(8 - x^2)^2 - (x^2)^2] dx =$

$\pi \int_{-2}^{2} (64 - 16x^2 + x^4 - x^4) dx = \pi \int_{-2}^{2} (64 - 16x^2) dx =$

$\pi \left[64 \left(x \Big|_{-2}^{2} \right) - 16 \left(\frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^{2} \right) \right] = \pi(256 - 256/3) = \frac{512}{3}\pi.$

34. $x = y^2$, $x = y + 6$; el eje y.



En este problema lo más simple es pensar en el eje y como x; puesto que las curvas están dadas por funciones del tipo $x = g(y)$. Los límites de integración están dados por las soluciones de $y^2 = y + 6$, es decir $y^2 - y - 6 = (y - 3)(y + 2) = 0 \Longrightarrow y = 3$, $y = -2$.

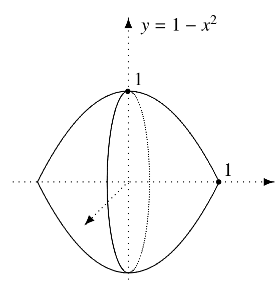
El volumen del sólido en cuestión es:

$V = \pi \int_{-2}^{3} [(y + 6)^2 - (y^2)^2] dy = \pi \int_{-2}^{3} [(y^2 + 12y + 36) - y^4] dy =$

$\pi \left[\left(\frac{y^3}{3} \Big|_{-2}^{3} \right) + 12 \left(\frac{y^2}{2} \Big|_{-2}^{3} \right) + 36 \left(y \Big|_{-2}^{3} \right) - \left(\frac{y^5}{5} \Big|_{-2}^{3} \right) \right] = \pi(9 + \tfrac{8}{3} + 6 \cdot 9 - 6 \cdot 4 + 180 - 55) =$

$\frac{500\pi}{3}$.

35. $y = 1 - x^2$, $y = 0$; el eje x.



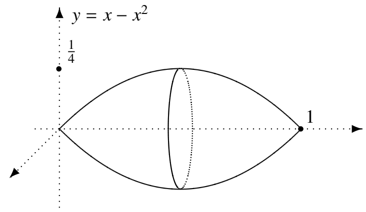
Las intersecciones con el eje x están dadas por $1 - x^2 = 0$, es decir $x = \pm 1$. El volumen del sólido es:

$V = \pi \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^2 dx = \pi \int_{-1}^{1} (1 - 2x^2 + x^4) dx =$

$\pi \left[\left(x \Big|_{-1}^{1} \right) - 2 \left(\frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^{1} \right) + \left(\frac{x^5}{5} \Big|_{-1}^{1} \right) \right] =$

$\pi[(1 + 1) - 2(1/3 + 1/3) + (1/5 + 1/5)] = \frac{16\pi}{15}.$

36. $y = x - x^2$, $y = 0$, $0 \leq x \leq 1$; el eje x.

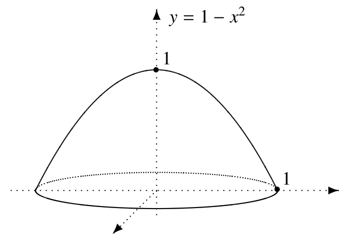


El volumen de dicho sólido está dado por:

$$V = \pi \int_0^1 (x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^1 (x^2 - 2x^3 + x^4) dx =$$

$$\pi \left[\left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 \right) - 2\left(\frac{x^4}{4}\Big|_0^1 \right) + \left(\frac{x^5}{5}\Big|_0^1 \right) \right] = \pi\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) = \frac{\pi}{30}.$$

37. $y = 1 - x^2$, $y = 0$; el eje y.



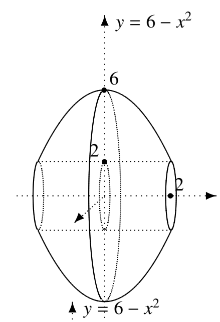
La curva de la figura está dada por $x^2 = 1 - y$, es decir $x = \pm\sqrt{1-y}$ para $y \in [0,1]$. Basta considerar solamente $x = +\sqrt{1-y}$ para obtener todo el sólido. El volumen del sólido es:

$$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{1-y})^2 dy = \pi \int_0^1 (1-y) dy = \pi \left[\left(y\Big|_0^1 \right) - \left(\frac{y^2}{2}\Big|_0^1 \right) \right] = \pi(1 - 1/2) = \frac{\pi}{2}.$$

En este cálculo se está pensando el eje y como el eje x y aplicando la respectiva fórmula. También se puede calcular el volumen mediante:

$$V = 2\pi \int_0^1 x(1-x^2) dx = 2\pi \int_0^1 (x - x^3) dx = 2\pi\left[\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 \right) - \left(\frac{x^4}{4}\Big|_0^1 \right) \right] = 2\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

38. $y = 6 - x^2$, $y = 2$; el eje x.

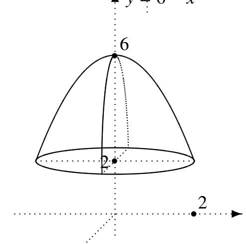


Los límites de integración están dados por la ecuación $6 - x^2 = 2$, es decir $x = \pm 2$. El volumen del sólido es:

$$V = \pi \int_{-2}^2 [(6-x^2)^2 - (2)^2] dx = \pi \int_{-2}^2 [(36 - 12x^2 + x^4) - 4] dx =$$

$$\pi \int_{-2}^2 (32 - 12x^2 + x^4) dx = \pi\left[32\left(x\Big|_{-2}^2 \right) - 12\left(\frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^2 \right) + \left(\frac{x^5}{5}\Big|_{-2}^2 \right) \right] =$$

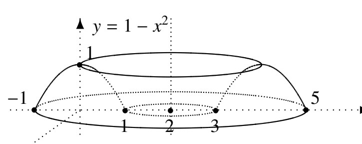
$$\pi[32(4) - 4(8+8) + (32/5 + 32/5)] = \frac{384\pi}{5}.$$



39. $y = 6 - x^2$, $y = 2$; el eje y.
El volumen de este sólido es:

$$V = 2\pi \int_0^2 x(6-x^2) dx = 2\pi \int_0^2 (6x - x^3) dx =$$

$$2\pi \left[\left(3x^2\Big|_0^2 \right) - \left(\frac{x^4}{4}\Big|_0^2 \right) \right] = 2\pi(12 - 4) = 16\pi.$$



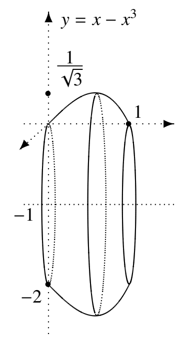
40. $y = 1 - x^2$, $y = 0$; la recta vertical $x = 2$.

En este caso lo que hay que hacer es trasladar la figura de manera que la recta vertical $x = 2$, sea el eje y.

Considere entonces la curva $y = 1-(x+2)^2$ que es la misma que $y = 1-x^2$ pero trasladada a -2. El volumen del sólido es:

$V = 2\pi \int_{-3}^{-1} x[1-(x+2)^2]dx = 2\pi \int_{-3}^{-1} x(1-x^2-4x-4)dx = 2\pi \int_{-3}^{-1} (-3x-x^3-4x^2)dx = -2\pi \int_{-3}^{-1} (3x+x^3+4x^2)dx = -2\pi[\frac{3}{2}(1-9)+\frac{1}{4}(1-81)+\frac{4}{3}(-1+27)] =$
$-2\pi(-12-20+\frac{104}{3}) = \frac{16}{3}\pi.$

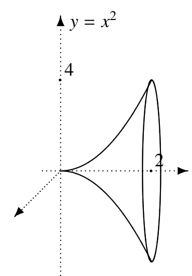
41. $y = x - x^3$, $y = 0$, $0 \le x \le 1$; la recta horizontal $y = -1$.



En este ejercicio, lo que hay que hacer es trasladar la recta $y = -1$, hacia el eje x, por tanto hay que trasladar las curvas $y = x - x^3$ y $y = 0$ de una unidad. Considerar el sólido generado, al girar el eje x la región entre las curvas $y = x - x^3 + 1$ y $y = 1$, para $x \in [0, 1]$. El volumen de dicho sólido está dado por:

$V = \pi \int_0^1 [(x-x^3+1)^2 - 1^2]dx = \pi \int_0^1 [(x-x^3)^2 + 2(x-x^3)+1-1]dx =$
$\pi \int_0^1 (x^2-2x^4+x^6+2x-2x^3)dx = \pi\left[\left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^1\right) - \frac{2}{5}\left(x^5\Big|_0^1\right) + \left(\frac{x^7}{7}\right) + \left(x^2\Big|_0^1\right) - \left(\frac{x^4}{4}\Big|_0^1\right)\right] =$
$\pi(\frac{1}{3}-\frac{2}{5}+\frac{1}{7}+1-\frac{1}{2}) = \frac{121}{210}\pi.$

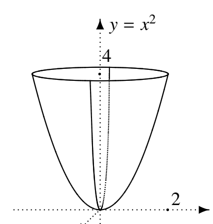
42. $y = 4$, $x = 0$, $y = x^2$; el eje x.



El volumen de dicho sólido está dado por:

$V = \pi \int_0^2 [4^2 - (x^2)^2]dx = \pi \int_0^2 (16-x^4)dx =$
$\pi\left[16\left(x\Big|_0^2\right) - \frac{1}{5}\left(x^5\Big|_0^2\right)\right] = \pi(32-32/5) = \frac{128}{5}\pi.$

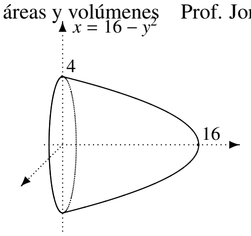
43. $y = 4$, $x = 0$, $y = x^2$; el eje y.



La figura de este ejercicio es la misma que la precedente, salvo que se gira en torno al eje y. El volumen es:

$V = 2\pi \int_0^2 x(x^2)dx = 2\pi \int_0^2 x^3 dx = 2\pi\left(\frac{x^4}{4}\Big|_0^2\right) = 8\pi.$

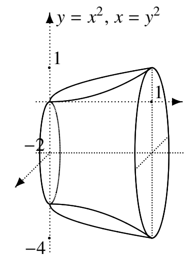
44. $x = 16 - y^2$, $x = 0$, $y = 0$; el eje x.



El volumen es $V = \pi \int_0^{16} (\sqrt{16-x})^2 dx =$

$\pi \int_0^{16} (16-x)dx = \pi\left[16\left(x\Big|_0^{16}\right) - \left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^{16}\right)\right] = 128\pi.$

45. $y = x^2$, $x = y^2$; la recta $y = -2$.



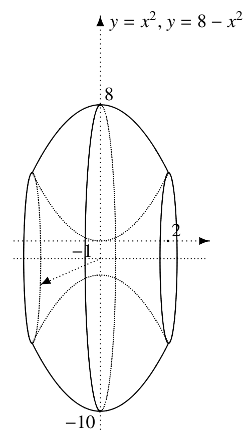
En este caso hay que trasladar la recta horizontal $y = -2$ al eje x y de la misma forma las curvas $y = x^2$ y $y^2 = x$ ($y = \pm\sqrt{x}$). Por lo tanto, el volumen (que es invariante bajo traslación) está dado por:

$V = \pi \int_0^1 [(\sqrt{x}+2)^2 - (x^2+2)^2]dx = \pi \int_0^1 [(x + 4\sqrt{x} + 4) - (x^4 + 4x^2 + 4)]dx =$

$\pi \int_0^1 (x + 4\sqrt{x} - x^4 - 4x^2)dx = \pi\left[\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^1\right) + 4\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^1\right) - \left(\frac{x^5}{5}\Big|_0^1\right) - 4\left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^1\right)\right] =$

$\pi(\frac{1}{2} + \frac{8}{3} - \frac{1}{5} - \frac{4}{3}) = \frac{49}{30}\pi.$

46. $y = x^2$, $y = 8 - x^2$; la recta $y = -1$.



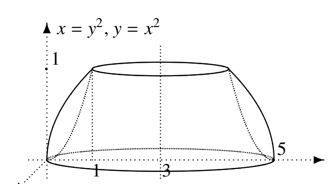
Los límites de integración están dados por la solución de la ecuación $x^2 = 8 - x^2$, es decir $x^2 = 4$, $x \pm 2$.

Trasladando la recta $y = -1$ al eje x y las curvas $y = 8 - x^2$ y $y = x^2$ a $y = 8 - x^2 + 1 = 9 - x^2$ y $y = 1 + x^2$ respectivamente, se tiene que el volumen de sólido es:

$V = \pi \int_{-2}^{2} [(9-x^2)^2 - (1+x^2)^2]dx = \pi \int_{-2}^{2} [(81 - 18x^2 + x^4) - (1 + 2x^2 + x^4)]dx =$

$\pi \int_{-2}^{2} (80 - 20x^2)dx = \pi\left[80\left(x\Big|_{-2}^{2}\right) - 20\left(\frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{2}\right)\right] = \frac{640}{3}\pi.$

47. $y = x^2$, $x = y^2$; la recta $x = 3$.

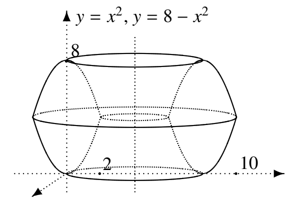


En este caso hay que trasladar la recta $x = 3$ al eje y. Considere entonces las curvas $y = (x+3)^2$ y $x = \sqrt{x+3}$. El volumen del sólido está dado por:

$V = 2\pi \int_{-3}^{-2} (-x)(\sqrt{x+3} - (x+3)^2)dx = -2\pi\left(\frac{2}{5}\sqrt{x+3}(x^2 + x - 6) - \frac{x^4}{4} - 2x^3 - \frac{9}{2}x^2\right)\Big|_{-3}^{2} =$

$$-2\pi\left[\frac{2}{5}(-4)-4+16-18+\frac{81}{4}-54+\frac{81}{2}\right)=\frac{17\pi}{10}.$$

48. $y = x^2$, $y = 8 - x^2$; la recta $x = 4$.



Trasladamos la recta vertical $x = 4$ al eje y y las curvas $y = 8-x^2$, $y = x^2$ con $x \in [-2, 2]$, a las curvas $y = 8 - (x - 4)^2$, $y = (x - 4)^2$ con $x \in [2, 6]$. El volumen del sólido es:

$$V = 2\pi\int_2^6 x[(8-(x-4)^2)-((x-4)^2)]dx = 2\pi\int_2^6 x[8-2(x-4)^2]dx =$$

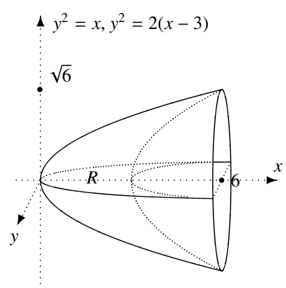
$$2\pi\int_2^6 x[8-2(x^2-8x+16)]dx = 2\pi\int_2^6 x(-2x^2+16x-24)dx =$$

$$2\pi\int_2^6(-2x^3+16x^2-24x)dx = 2\pi\left[\left(-\frac{x^4}{4}\Big|_2^6\right)+16\left(\frac{x^3}{3}\Big|_2^6\right)-12\left(x^2\Big|_2^6\right)\right] =$$

$$2\pi[(-684+8)+16(72-8/3)-12(36-4)] = 2\pi(128-128/3) = \frac{512}{3}\pi.$$

49. La región R que se muestra en la figura siguiente, está acotada por las parábolas $y^2 = x$ y $y^2 = 2(x - 3)$. Determine el volumen del sólido generando al girar R en torno al eje x.

Solución Los límites de integración están dados por 0 y por la solución de $x = 2(x - 3)$, es decir $x = 2x - 6$, $x = 6$. El volumen de dicho sólido está dado por:

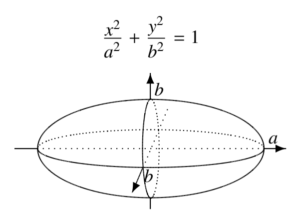


$$V = \pi\int_0^6[(\sqrt{x})^2-(\sqrt{2(x+3)})^2]dx =$$

$$\pi\int_0^6(x-2(x-3))dx = \pi\int_0^6(6-x)dx =$$

$$\pi\left[6\left(x\Big|_0^6\right)-\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^6\right)\right] = \pi(36-18) = 18\pi.$$

50. Determine el volumen del elipsoide generado al girar en torno del eje x la región acotada por la elipse con ecuación $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$, $a, b \geq 0$.



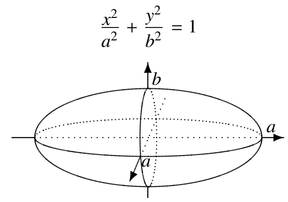
Solución En este caso debemos conocer y en función de x; es decir $\left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2$, $y = \pm b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}$.

Por lo tanto el volumen del elipsoide es:

$$V = \pi\int_{-a}^{a}\left[b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right]^2dx = \pi b^2\int_{-a}^{a}[1-\left(\frac{x}{a}\right)^2]dx = \pi b^2\left[\left(x\Big|_{-a}^{a}\right)-\left(\frac{x^3}{3a^2}\Big|_{-a}^{a}\right)\right] =$$

$$\pi b^2\left(2a-\frac{2a^3}{3a^2}\right) = \pi b^2\left(2a-\frac{2a}{3}\right) = \frac{4\pi}{3}b^2a.$$

51. Repita el problema 50, pero gire la región elíptica en torno del eje y.



Solución En este caso $V_1 = 2\pi \int_0^a x \cdot b \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} dx$, es el volumen del medio elipsoide generado por la parte positiva de la curva $y = \pm b \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$. El volumen del elipsoide completo es:

$V = 2V_1 = 4\pi \int_0^a x \cdot b \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} dx = 4\pi b \int_0^a x \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} dx.$

Hacemos el siguiente cambio de variable para calcular la última integral. Sea $u = 1 - \frac{x^2}{a^2}$, entonces $du = -\frac{2xdx}{a^2}$ y $xdx = -\frac{a^2du}{2}$. Cuando $x = 0$, $u = 1$ y cuando $x = a$, $u = 0$. Así:

$V = 4\pi b \int_1^0 \sqrt{u} \left(\frac{-a^2du}{2}\right) = 2\pi ba^2 \int_0^1 \sqrt{u}du = 2\pi ba^2 \left(\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Big|_0^1\right) = 2\pi ba^2 \frac{2}{3} = \frac{4\pi}{3} ba^2.$

Note que los elipsoides obtenidos en este ejercicio y en el anterior no son los mismos, a menos que $a = b$.

Tema No. 8

Ejercicios de Integrales: I Parte Prof. Jorge Poltronieri

1 Integral definida

1. Determinar el área limitada por la curva $y = x^2$ y las rectas $x = 0$, $y = 0$, $x = a$.
2. Calcular por sumas de Riemann $\displaystyle\int_1^a x^3 dx$.
3. Hallar el área limitada por la hipérbola $y = \dfrac{1}{x}$ y las rectas $x = a$, $x = b$, $y = 0$.
4. Determinar $\displaystyle\int_0^x \operatorname{sen} t\, dt$.

2 Cálculo de integrales definidas

5. Sea $I = \displaystyle\int_a^b \frac{dx}{\ln x}$, $1 < a < b$, determinar $\dfrac{dI}{da}$, $\dfrac{dI}{db}$.
6. Determinar las derivadas de las siguientes funciones:

   a) $F(x) = \displaystyle\int_1^x \ln t\, dt$

   b) $F(x) = \displaystyle\int_x^0 \sqrt{1 + t^4}\, dt$

   c) $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} e^{-t^2}\, dt$

   d) $F(x) = \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \cos(t^2)\, dt$, $x > 0$.

7. Determinar los extremos de la función $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt$, cuando $x > 0$.
8. Calcular las siguientes integrales:

   a) $\displaystyle\int_0^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25 + 3x}}$

   b) $\displaystyle\int_3^4 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$

   c) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\, dx$

   d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{y^2\, dy}{\sqrt{y^6 + 4}}$

   e) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\, dx$

9. a) Verificar que $\displaystyle\int_0^1 x^n(1 - x)^m dx = \int_0^1 x^m(1 - x)^n dx$.

   b) Sea $g(x) = \displaystyle\int_0^x \operatorname{sen}^n t\, dt$, $n \in \mathbb{N}$, pruebe que $n g_n(x) = (n - 1) g_{n-2}(x) - \operatorname{sen}^{n-1} x \cos x$, si $n \geq 1$.

10. Calcular las siguientes integrales usando las sustituciones indicadas:

a) $\displaystyle\int_1^3 \sqrt{x+1}\,dx,\ x = 2t-1$ b) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\ x = \operatorname{sen} t$

c) $\displaystyle\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}},\ x = \tan t$ d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx,\ x = \operatorname{arctg} t.$

11. Calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ b) $\displaystyle\int_3^{29} \frac{(x-2)^{\frac{2}{3}}}{(x-2)^{\frac{2}{3}}+3}dx$ c) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$

d) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dt}{3+2\cos t}$ e) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+a^2\operatorname{sen}^2 x}$ f) $\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$

g) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$ h) $\displaystyle\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$ i) $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}.$

12. Demostrar que si f es par, $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$ y si f es impar $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0.$

13. Calcular el área en la región indicada:

a) por la parábola $y = 4x - x^2$ y ele eje de las abscisas

b) por la curva $y = \ln x$, el eje x y la recta $y = e$

c) por la curva $y = x(x-1)(x-2)$ y el eje x

d) por la curva (Agnesi) $y = \dfrac{a^3}{x^2+a^2}$ y el eje de las abscisas

e) por la parábolas $y = \frac{1}{3}x^2$ y $y = 4 - \frac{2}{3}x^2$

f) por la curva $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ y la parábola $y = \frac{1}{2}x^2$

g) por las curvas $y = e^x$, $y = e^{-x}$ y la recta $x = 1$

h) por el astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

i) por la catenaria $y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$, el eje y y la recta $y = \dfrac{a}{2e}(e^2+1)$

j) por la curva $a^2y^2 = x^2(a^2-x^2)$.

14. Determinar el área en la región indicada:

a) comprendida entre la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = 9$, el eje x y la recta $x = 5$

b) limitada por el cisoide $y^2 = \dfrac{x^3}{2a-x}$ y su asíntota $x = 2a$, $(a > 0)$

c) comprendida entre el esferoide $y^2 = \dfrac{x(x-a)^2}{2a-x}$ y su asíntota $(a > 0)$

d) limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 8$ y la parábola $y^2 = 2x$.

15. Calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_0^3 e^{\sqrt{x+1}}dx$ b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x+\tan^2 x}dx$

c) $\displaystyle\int_0^1 e^{-2x}\cos(2\pi x)dx$

d) $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}+1)}$

e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}+1}dx$

f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^3}$

g) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}dx$

h) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 x\cos 2x dx$

i) $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}}$

j) $\displaystyle\int_4^5 \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x}}$

k) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos x+\operatorname{sen} x}dx$

l) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}dx$

m) $\displaystyle\int_7^{27} \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x}dx$

n) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^5 x\operatorname{sen} x dx$

o) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^4 x}dx$

p) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^2+x+1}{(x-1)^2(x+1)^2}dx$

q) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2\ln x}{(x^3+1)^3}dx$

r) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{2\operatorname{ch} x+\operatorname{sh} x+1}$

s) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$

t) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(x^3-1)^2}$

u) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}dx$

v) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan x}{1+\tan^2 x}dx$

w) $\displaystyle\int_2^3 \frac{\sqrt{x+1}}{x}dx$

x) $\displaystyle\int_1^2 (x^2+1)\ln x dx$

y) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} (\operatorname{arcsen} x)^2 dx$

z) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}^3 x\cos x}{1+\operatorname{sen}^3 x}dx$

a') $\displaystyle\int_1^2 \ln^2 x dx$

b') $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3+1}{x^2+1}$

c') $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^5+x^3+x}{x^4+1}dx$

d') $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^5}{(x+1)(x^3+1)}dx$

e') $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3(1-x^2)}{(1+x^2)^3}dx$

f') $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx$

g') $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{1+\sqrt{2x-x^2}}$

h') $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{ch} x}{e^x+1}dx$

i') $\displaystyle\int_0^1 \arctan x dx$

j') $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\operatorname{sen}^2 x dx$

k') $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2\operatorname{sen} x}dx$

l') $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan x}{1+\operatorname{sen}^2 x}dx$

m') $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 x}{\cos^2 x}dx$

n') $\displaystyle\int_1^e \operatorname{sen}(\log x)dx$

o') $\displaystyle\int_1^2 \frac{\log x}{(1+x)^2}dx$

p') $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2-x+1}}dx$

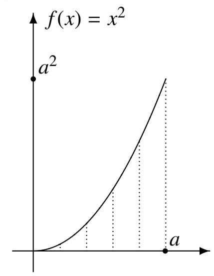
q') $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$

r') $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^3+x^4}\,dx.$

Soluciones de ejercicios del Tema No.8: Integrales I Parte
Prof. Jorge Poltronieri

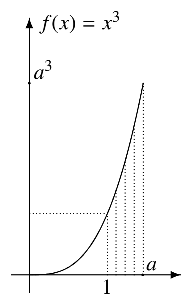
1 Integral definida

1. Determinar el área limitada por la curva $y = x^2$ y las rectas $x = 0$, $y = 0$, $x = a$.



Solución Dividiendo el intervalo $[0, a]$ en n partes iguales de longitud $\frac{a}{n}$, tenemos $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{a}{n}, \ldots, x_k = \frac{k}{n}a, \ldots, x_n = a$. Definiendo $f(x) = x^2$, la suma de Riemann $\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)(x_{k+1} - x_k) = \sum\limits_{k=n}^{n} \left(\frac{k}{n}a\right)^2 \frac{a}{n} = \frac{a^3}{n^3} \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{a^3}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{6}a^3\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) \longrightarrow \frac{1}{6}a^3$, cuando $n \to \infty$.

2. Calcular por sumas de Riemann $\displaystyle\int_1^a x^3 dx$.



Solución Sea $x_0 = 1$, $x_1 = 1 + \frac{1}{n}(a-1), \ldots, x_k = 1 + \frac{k}{n}(a-1)$, $\ldots, x_n = a$ y sea $f(x) = x^3$, entonces:

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k-1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n}(a-1)\right)^3 \frac{a-1}{n} =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left(1 + 3\frac{k}{n}(a-1) + 3\frac{k^2}{n^2}(a-1)^2 + \frac{k^3}{n^3}(a-1)^3\right) \frac{a-1}{n} =$$

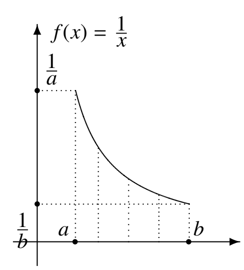
$$(a-1) + \frac{3(a-1)^2}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k + \frac{3(a-1)^3}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{(a-1)^4}{n^4} \sum_{k=1}^{n} k^3 =$$

$$(a-1) + \frac{3(a-1)^2}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{3(a-1)^3}{n^3} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{(a-1)^4}{n^4} \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2 \longrightarrow$$

$$(a-1) + \tfrac{3}{2}(a-1)^2 + (a-1)^3 + \tfrac{1}{4}(a-1)^4 =$$

$$a - 1 + \tfrac{3}{2}a^2 - 3a + \tfrac{3}{2} + a^3 - 3a^2 + 3a - 1 + \tfrac{1}{4}(a^4 - 4a^3 + 6a^2 - 4a + 1) = \tfrac{1}{4}a^4 - \tfrac{1}{4}.$$

3. Hallar el área limitada por la hipérbola $y = \frac{1}{x}$ y las rectas $x = a$, $x = b$, $y = 0$.



Solución Dividamos el segmento $\overline{ab}$ en partes tales que los puntos x_i, forman una progresión geométrica. Sea $x_0 = a$, $x_1 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$, $x_2 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{n}}, \ldots, x^k = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k}{n}}, \ldots, x_n = b$ y sea $f(x) = \frac{1}{n}$, entonces:

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k}{n}}} \left(a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k}{n}} - a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k-1}{n}}\right) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k}{n}}} a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k-1}{n}} \left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{-\frac{1}{n}}\right) =$$

$$n\left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{-\frac{1}{n}}\right) = \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{-\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}} \longrightarrow \ln\frac{b}{a}, \text{ ya que } \frac{1 - \beta^{-x}}{-x} \longrightarrow \ln\beta, \text{ si } x \to 0.$$

4. Determinar $\displaystyle\int_0^x \operatorname{sen} t\,dt$.

Solución Para el cálculo de la integral usemos la fórmula:

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}(2\alpha) + \cdots + \operatorname{sen}(n\alpha) = \frac{1}{2\operatorname{sen}(\frac{1}{2}\alpha)}\left[\cos(\tfrac{1}{2}\alpha) - \cos((n+\tfrac{1}{2})\alpha)\right].$$

Si partimos el intervalo $[0, x]$ en n partes iguales tenemos $x_k = \frac{k}{n}x$, $k = 0, \ldots, n$.

Así, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}\left(\frac{k}{n}x\right)\frac{x}{n} = \frac{x}{n}\frac{1}{2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2n}\right)}\left[\cos\left(\frac{x}{2n}\right) - \cos\left((n+\tfrac{1}{2})\frac{x}{n}\right)\right] =$

$\displaystyle\frac{\frac{x}{2n}}{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2n}\right)}\left[\cos\left(\frac{x}{2n}\right) - \cos\left(\left(1+\frac{1}{2n}\right)x\right)\right] \longrightarrow 1 - \cos x.$

2 Cálculo de integrales definidas

5. Sea $I = \displaystyle\int_a^b \frac{dx}{\ln x}$, $1 < a < b$, determinar $\frac{dI}{da}, \frac{dI}{db}$.

Solución Usando el teorema fundamental del cálculo tenemos que: $\frac{dI}{da} = -\frac{1}{\ln a}$ y $\frac{dI}{db} = \frac{1}{\ln b}$.

6. Determinar las derivadas de las siguientes funciones:

a) $F(x) = \displaystyle\int_1^x \ln t\,dt$ b) $F(x) = \displaystyle\int_x^0 \sqrt{1+t^4}\,dt$

c) $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} e^{-t^2}\,dt$ d) $F(x) = \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \cos(t^2)\,dt$, $x > 0$.

Solución Aplicando el teorema fundamental del cálculo tenemos:

a) $F'(x) = \ln x$.

b) $F'(x) = -\sqrt{1+x^4}$.

c) $F'(x) = 2xe^{-x^4} - e^{-x^2}$.

d) $F'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cos x + \dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x^2}$.

7. Determinar los extremos de la función $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$, cuando $x > 0$.

Solución Se tiene que $f'(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0 \Longleftrightarrow x = n\pi$, $n \in \mathbb{N}^*$.

8. Calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_0^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$ b) $\displaystyle\int_3^4 \frac{dx}{x^2-3x+2}$ c) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\,dx$

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{y^2\,dy}{\sqrt{y^6+4}}$ e) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\,dx$

Solución

a) Sea $v = 25 + 3x$, $dv = 3dx$, entonces $\displaystyle\int_0^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}} = \frac{1}{3}\int_{25}^{16} \frac{dv}{\sqrt{v}} = \frac{2}{3}\sqrt{v}\Big|_{25}^{16} = \frac{2}{3}(4-5) = -\frac{2}{3}$.

b) Se tiene que $x^2 - 3x + 2 = (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4}$, entonces $\displaystyle\int_3^4 \frac{dx}{(x-\frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4}} = \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\Big|_3^4 = \ln\frac{2}{3} - \ln\frac{1}{2} = \ln\frac{4}{3}$.

c) Tenemos que $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x dx = \tan x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$.

d) Sea $y^3 = x$, $3y^2 dy = dx$, entonces

$$\int_0^1 \frac{y^2\,dy}{\sqrt{y^6+4}} = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{1}{3}\ln\left|x + \sqrt{x^2+4}\right|\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

e) Se tiene que $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx = \ln|\cos x|\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 0$.

9. a) Verificar que $\displaystyle\int_0^1 x^n(1-x)^m dx = \int_0^1 x^m(1-x)^n dx$.

   b) Sea $g(x) = \displaystyle\int_0^x \operatorname{sen}^n t dt$, $n \in \mathbb{N}$, pruebe que $ng_n(x) = (n-1)g_{n-2}(x) - \operatorname{sen}^{n-1} x \cos x$, si $n \geq 1$.

   Solución

a) Sea $u = 1 - x$, $x = 1 - u$, $dx = -du$ y tenemos que:

$$\int_0^1 x^n(1-x)^m dx = -\int_0^1 (1-u)^n u^m du = \int_0^1 u^m(1-u)^n du = \int_0^1 x^m(1-x)^n dx.$$

b) Sea $u = \operatorname{sen}^{n-1} t$, $du = \operatorname{sen} t dt$, $du = (n-1)\operatorname{sen}^{n-2} t dt$, $u = -\cos t$, entonces:

$$g_n(x) = -\operatorname{sen}^{n-1} t \cos t \int_0^x + \int_0^x (n-1)\operatorname{sen}^{n-2} t \cos^2 t dt =$$

$$-\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + (n-1)\int_0^x \operatorname{sen}^{n-2} t dt - (n-1)\int_0^x \operatorname{sen}^n t dt =$$

$$-\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + (n-)g_{n-2}(x) - (n-1)g_n(x) \Longrightarrow$$

$$ng_n(x) = (n-1)g_{n-2}(x) - \operatorname{sen}^{n-1} x \cos x.$$

10. Calcular las siguientes integrales usando las sustituciones indicadas:

    a) $\displaystyle\int_1^3 \sqrt{x+1}\, dx$, $x = 2t - 1$ b) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $x = \operatorname{sen} t$

    c) $\displaystyle\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$, $x = \tan t$ d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$, $x = \operatorname{arctg} t$.

    Solución

a) Sea $x = 2t-1$, $x+1 = 2t$, $dx = 2dt$, entonces $\displaystyle\int_1^3 \sqrt{x+1}\, dx = \int_1^2 \sqrt{2t}\, 2dt = 2\sqrt{2}\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2 = \frac{4}{3}\sqrt{2}(2^{\frac{3}{2}} - 1) =$ $\frac{16}{3} - \frac{4}{3}\sqrt{2}$.

b) Sea $x = \operatorname{sen} t$, $dx = \cos t dt$, entonces $I = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

c) Sea $x = \tan t$, $dx = \sec^2 t\,dt$, entonces $I = \displaystyle\int_{\arctan\frac{3}{4}}^{\arctan\frac{4}{3}} \frac{\sec^2 t}{\sec t}dt = \ln|\sec t + \tan t|\Big|_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} = \ln\frac{3}{2}$.

d) Sea $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$, por lo que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx = \int_0^1 \frac{f(\operatorname{arctg} t)}{1+t^2}dt$.

11. Calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ b) $\displaystyle\int_3^{29} \frac{(x-2)^{\frac{2}{3}}}{(x-2)^{\frac{2}{3}}+3}dx$ c) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$

d) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dt}{3+2\cos t}$ e) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+a^2\operatorname{sen}^2 x}$ f) $\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$

g) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$ h) $\displaystyle\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$ i) $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$.

Solución

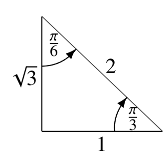
a) Sea $x = t^2$, $dx = 2t dt$, entonces $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int_0^2 \frac{2t\,dt}{1+t} = \int_0^2 \left(2 - \frac{2}{t+1}\right)dt =$

$2(t - \ln(t+1))\Big|_0^2 = 2(2 - \ln 3)$.

b) Sea $x - 2 = z^3$, $dx = 3z^2 dz$, entonces $\displaystyle\int_3^{29} \frac{(x-2)^{\frac{2}{3}}}{(x-2)^{\frac{2}{3}}+3}dx = \int_1^3 \frac{3z^4 dz}{z^2+3} =$

$3\displaystyle\int_1^3 \left(z^2 - 3 + \frac{9}{z^2+3}\right)dz = \left(z^3 - 9z + 9\sqrt{3}\arctan\frac{z}{\sqrt{3}}\right)\Big|_1^3 = 27 - 27 +$

$9\sqrt{3}\arctan\sqrt{3} - 1 + 9\sqrt{3}\arctan\dfrac{1}{\sqrt{3}} = 8 + 9\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = 8 + \frac{3}{2}\sqrt{3}\pi$.



c) Sea $e^x - 1 = z^2$, entonces $e^x dx = 2z dz$, $dx = \dfrac{2z\,dz}{1+z^2}$, entonces:

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx = \int_0^1 \frac{2z^2}{1+z^2}dz = 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+z^2}\right)dz = 2(z - \arctan z)\Big|_0^1 = 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right).$$

d) Sea $z = \operatorname{tg}\frac{1}{2}t$, $\cos t = \dfrac{1-z^2}{1+z^2}$, $dt = \dfrac{2\,dz}{1+z^2}$, con lo cual se tiene que:

$$\int_0^{\pi} \frac{dt}{3+2\cos t} = \int_0^{\infty} \frac{\frac{2\,dz}{1+z^2}}{3+2\frac{1-z^2}{1+z^2}} = \int_0^{\infty} \frac{2\,dz}{z^2+5} = \frac{2}{\sqrt{5}}\arctan\frac{z}{\sqrt{5}}\Big|_0^{\infty} = \frac{2}{\sqrt{5}}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{5}}.$$

e) Sea $t = \operatorname{tg} x$, $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$, $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2}$, entonces $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+a^2\operatorname{sen}^2 x} = \int_0^{\infty} \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1+\frac{a^2t^2}{1+t^2}} = \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+(a^2+1)t^2} =$

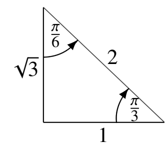
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}\arctan(\sqrt{a^2+1}\,t)\Big|_0^{\infty} = \dfrac{\pi}{2\sqrt{a^2+1}}$.

f) Sea $x = \operatorname{sen} y$, $dx = \cos y\,dy$, entonces:

$$\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 y}{\operatorname{sen}^2 y}dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\csc^2 x - 1)dx = (-\operatorname{ctg} x - x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{2} - \left(-1 - \frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

g) Sea $x = \sec y$, $\sqrt{x^2-1} = \tan y$, $dx = \sec y \tan y\,dy$, entonces:

$\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}\,dx}{x} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^2 y\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sec^2 y - 1)\,dy = (\tan y - y)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3} - \tfrac{\pi}{3}.$



h) Sea $e^x - 1 = z^2$, $e^x\,dx = 2z\,dz$, $e^x + 3 = z^2 + 4$, por lo que tenemos:

$$\int_0^{\ln 5} \frac{\sqrt{e^x-1}\,e^x\,dx}{e^x+3} = \int_0^2 \frac{2z^2\,dz}{z^2+4} = 2\int_0^2 \Big(1 - \frac{4}{z^2+4}\Big)\,dz = 2(z - 2\arctan \tfrac{1}{2}z) = 4 - \pi.$$

i) Consideremos $y = \frac{1}{x}$, $dx = -\frac{1}{y^2}\,dy$, entonces:

$$\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}} = \int_1^{\frac{1}{3}} \frac{-\frac{dy}{y^2}}{\frac{1}{y}\sqrt{\frac{1}{y^2}+\frac{5}{y}+1}} = \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{dy}{\sqrt{y^2+5y+1}} = \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{dy}{\sqrt{(y+\frac{5}{2})^2 - \frac{21}{4}}} =$$

$$\ln(y + \tfrac{5}{2} + \sqrt{y^2+5y+1})\Big|_{\frac{1}{3}}^1 = \ln \frac{1+\frac{5}{2}+\sqrt{7}}{\frac{1}{3}+\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{5}{3}+1}} = \ln\frac{7+2\sqrt{7}}{9}.$$

12. Demostrar que si f es par, $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$ y si f es impar $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$.

Solución En efecto, $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx = \int_{-a}^0 f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$. Además:

– Si f es par ($f(x) = f(-x)$), entonces si $v = -x$, $\displaystyle\int_{-a}^0 f(x)\,dx = \int_a^0 f(-v)(-dv) = \int_a^0 f(v)(-dv) = \int_0^a f(v)dv$, o sea $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx = \int_0^a f(v)dv + \int_0^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.

– Si f es impar ($f(-x) = -f(x)$), entonces si $v = -x$, $\displaystyle\int_{-a}^0 f(x)\,dx = \int_a^0 f(-v)(-dv) = \int_a^0 -f(v)(-dv) = -\int_0^a f(v)dv$, es decir $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx = -\int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = 0$.

13. Calcular el área en la región indicada:

a) por la parábola $y = 4x - x^2$ y ele eje de las abscisas

b) por la curva $y = \ln x$, el eje x y la recta $y = e$

c) por la curva $y = x(x-1)(x-2)$ y el eje x

d) por la curva (Agnesi) $y = \dfrac{a^3}{x^2+a^2}$ y el eje de las abscisas

e) por la parábolas $y = \frac{1}{3}x^2$ y $y = 4 - \frac{2}{3}x^2$

f) por la curva $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ y la parábola $y = \frac{1}{2}x^2$

g) por las curvas $y = e^x$, $y = e^{-x}$ y la recta $x = 1$

h) por el astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

i) por la catenaria $y = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$, el eje y y la recta $y = \frac{a}{2\mathrm{e}}(\mathrm{e}^2 + 1)$

j) por la curva $a^2y^2 = x^2(a^2 - x^2)$.

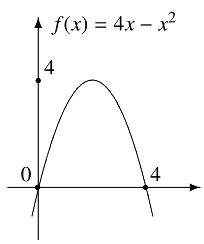
Solución

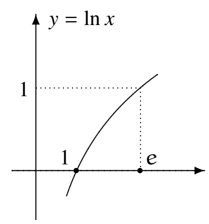
a) rea $= \displaystyle\int_0^4 (4x - x^2)\,dx = \Big(2x^2 - \frac{x^3}{3}\Big)\Big|_0^4 = 32 - \tfrac{64}{3} = \tfrac{32}{3}$.

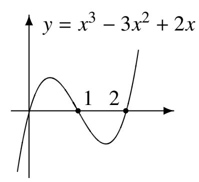
b) rea $= \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\,dx = (x\ln x - x)\Big|_1^{\mathrm{e}} = 1$.

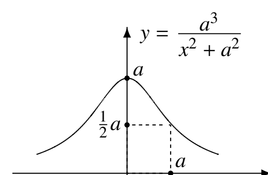
c) rea $= \displaystyle\int_0^1 (x^3-3x^2+2x)\,dx + \int_1^2 \left|(x^3-3x^2+2x)\right|dx = \Big(\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\Big)\Big|_0^1 + \Big|\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\Big|\Big|_1^2 = \tfrac{1}{4}+\left|4-8+1-\tfrac{1}{4}\right| = \tfrac{1}{2}$.

d) rea $= \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a^3}{x^2+a^2}\,dx = a^2 \operatorname{arctg}\frac{x}{a}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = a^2\big(\tfrac{\pi}{2} + \tfrac{\pi}{2}\big) = a^2\pi$.

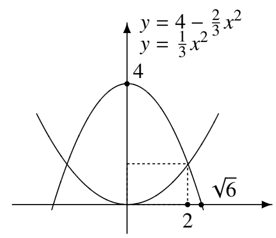


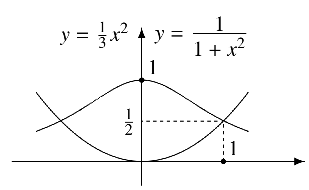






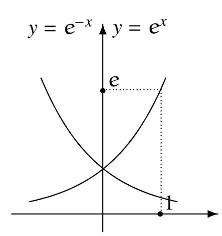
e) Los puntos de intersección de las parábolas satisfacen $\frac{1}{3}x^2 = 4 - \frac{2}{3}x^2 \iff x^2 = 4 \iff x = \pm 2$. Así se tiene, rea $= \displaystyle\int_{-2}^{2} (4 - \tfrac{2}{3}x^2 - \tfrac{1}{3}x^2)\,dx =$ $2\displaystyle\int_0^2 (4 - x^2)\,dx = 2\big(4x - \tfrac{1}{3}x^3\big)\Big|_0^2 = 2(8 - \tfrac{8}{3}) = \tfrac{32}{3}$.





f) Los puntos de intersección satisfacen $\dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{x^2}{2} \iff$ $x^4 + x^2 - 2 = 0 \Longrightarrow x^2 = -2{,}1$ i.e. $x = \pm 1$, pues se elimina la solución $x^2 = -2$. Así se tiene:

rea $= \displaystyle\int_{-1}^{1} \Big(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2}\Big)\,dx = 2\big(\arctan x - \tfrac{1}{6}x^3\big)\Big|_0^1 = 2(\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{1}{6}) = \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{1}{3}$.

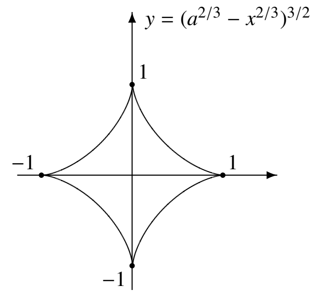


g) rea $= \displaystyle\int_0^1 (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})\,dx = 2\int_0^1 \mathrm{sh}\,x\,dx = 2\,\mathrm{ch}\,x\Big|_0^1 =$ $2\Big(\dfrac{\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1}}{2} - 1\Big) = \mathrm{e} + \dfrac{1}{\mathrm{e}} - 2 = \dfrac{(\mathrm{e}-1)^2}{\mathrm{e}}$.

h) Por la simetría de la curva,

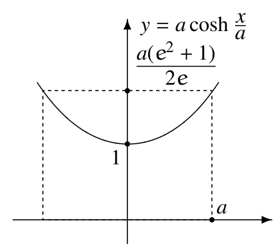
rea $= 4\displaystyle\int_0^a (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}\, dx$ y efectuando el cambio de variable $x = a\cos^3 t$, $(a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2} = a\,\mathrm{sen}^3\, t$, $dx = -3a\cos^2 t\,\mathrm{sen}\, t\, dt$ y usando el ejercicio 9 se tiene rea $= -4\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^0 3a^2\cos^2 t\,\mathrm{sen}^4\, t\, dt =$

$12a^2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \mathrm{sen}^6\, t) dt = 12a^2(\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}\tfrac{\pi}{2}) = \tfrac{33}{8}\pi a^2.$



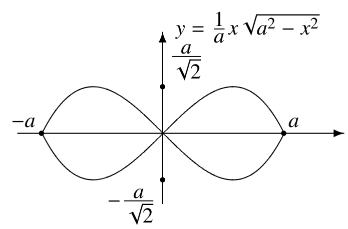
i) Necesitamos determinar el valor de x tal que $a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a} = \frac{a}{2\mathrm{e}}(\mathrm{e}^2 + 1) \iff a\dfrac{\mathrm{e}^{x/a} + \mathrm{e}^{-x/a}}{2} = a\dfrac{\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-1}}{2} \iff \frac{x}{a} = \pm 1$

i.e. $x = \pm a$. Así, rea $= \displaystyle\int_{-a}^a \big(\frac{a}{2\mathrm{e}}(\mathrm{e}^2 + 1) - a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}\big) dx = \big(\frac{a}{2\mathrm{e}}(\mathrm{e}^2+1)x - a^2\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{a}\big)\Big|_{-a}^a = 2\big(\frac{a^2}{2\mathrm{e}}(\mathrm{e}^2+1) - a^2\frac{\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1}}{2}\big) = \frac{2a^2}{\mathrm{e}}.$



j) Es claro que el gráfico de la curva es simétrico respecto al eje x y respecto al eje y. De esta forma es suficiente considerar la curva en el primer cuadrante.

La función $y = \frac{1}{a}x\sqrt{a^2 - x^2}$ en $[0, a]$, nos lleva a que rea $= \dfrac{4}{a}\displaystyle\int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2}\, dx$. Sustituyendo $x = a\,\mathrm{sen}\, t$, $\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t$, $dx = a\cos t\, dt$, se tiene: rea $= \dfrac{4}{a}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3\,\mathrm{sen}\, t\cos^2 t\, dt = -\tfrac{4}{3}a^2\cos^3 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \tfrac{4}{3}a^2.$



14. Determinar el área en la región indicada:

a) comprendida entre la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = 9$, el eje x y la recta $x = 5$

b) limitada por el cisoide $y^2 = \dfrac{x^3}{2a - x}$ y su asíntota $x = 2a$, $(a > 0)$

c) comprendida entre el esferoide $y^2 = \dfrac{x(x-a)^2}{2a - x}$ y su asíntota $(a > 0)$

d) limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 8$ y la parábola $y^2 = 2x$.

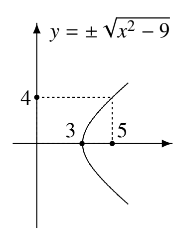
Solución

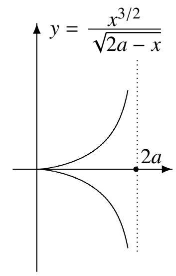
a) rea $= \displaystyle\int_3^5 \sqrt{x^2 - 9}\, dx =$

$\frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - 9}\Big|_3^5 - \frac{9}{2}\displaystyle\int_3^5 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 9}} =$

$\big(\frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - 9} - \frac{9}{2}\ln(x + \sqrt{x^2 - 9})\big)\Big|_3^5 =$

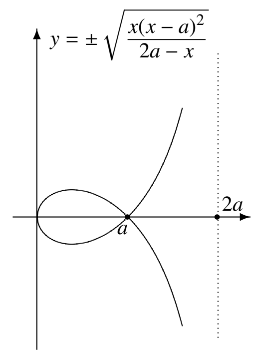
$10 + \frac{9}{2}\ln 3.$





b) rea $= 2\displaystyle\int_0^{2a} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2a-x}}dx$. Sea $2a - x = u^2$, $-dx = 2udu$, $2a - u^2 = x$, entonces: rea $= 2\displaystyle\int_{\sqrt{2a}}^{0} \frac{(2a-u^2)^{\frac{3}{2}}}{u}(-2udu) =$ $4\displaystyle\int_0^{\sqrt{2a}} (2a-u^2)^{\frac{3}{2}}du$. Sea $u = \sqrt{2a}\cos t$, $(2a-u^2)^{\frac{3}{2}} =$ $(2a)^{\frac{3}{2}}\operatorname{sen}^3 t$, $du = -\sqrt{2a}\operatorname{sen} t dt$, por lo que:

rea $= 4\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (2a)^{\frac{3}{2}}\operatorname{sen}^3 t(-2\sqrt{2a}\operatorname{sen} t\, dt) = 4(2a)^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^4 t dt = 16a^2\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\frac{\pi}{2} = 3\pi a^2$.



c) Sea $y = \sqrt{\dfrac{x(x-a)^2}{2a-x}}$, con $0 \le x \le 2a$. rea $= 2\displaystyle\int_a^{2a} \frac{\sqrt{x}(a-x)}{\sqrt{2a-x}}dx$. Consideremos la sustitución $2a - x = u^2$, $-dx = 2udu$, entonces:

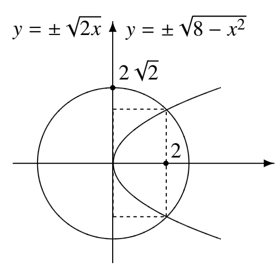
rea $= 2\displaystyle\int_{\sqrt{a}}^{0} \frac{\sqrt{2a-u^2}(u^2-a)(-2udu)}{u} =$

$4\displaystyle\int_0^{\sqrt{a}} \sqrt{2a-u^2}(a-u^2)du.$

Usando el cambio de variable $u = \sqrt{2a}\operatorname{sen} t$, $du = \sqrt{2a}\cos t dt$ se tiene:

rea $= 4\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2a)\cos^2 t(a - 2a\operatorname{sen}^2 t)dt = 8a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t(1-2\operatorname{sen}^2 t)dt =$

$8a^2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt - 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}^2 2t dt = 4a^2\left(\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{1}{2}\right) - 2a^2\tfrac{\pi}{4} = a^2\left(2 + \tfrac{\pi}{2}\right).$



d) Igualando $u^2 = 2x = 8 - x^2 \Longrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0$. Tenemos $x = -4, 2$. Se elimina la solución $x = -4$. De esta forma tenemos que el área es:

rea$=\displaystyle\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{8-y^2} - \tfrac{1}{2}y^2\right)dy = 2\left(\tfrac{1}{2}x\sqrt{8-x^2} + 4\arcsen\frac{x}{2\sqrt{2}} - \tfrac{1}{6}y^3\right)\Big|_0^2 = 2\left(2 + 4\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{8}{6}\right) = \tfrac{4}{3} + 2\pi.$

15. Calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_0^3 e^{\sqrt{x+1}}dx$

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x+\tan^2 x}dx$

c) $\displaystyle\int_0^1 e^{-2x}\cos(2\pi x)dx$

d) $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}+1)}$

e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}+1}dx$

f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^3}$

g) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}dx$

h) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 x\cos 2x dx$

i) $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}}$

j) $\displaystyle\int_4^5 \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x}}$

k) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos x + \operatorname{sen} x}dx$

l) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}dx$

m) $\displaystyle\int_7^{27} \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x}dx$

n) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^5 x \operatorname{sen} x dx$

o) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^4 x}dx$

p) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^2+x+1}{(x-1)^2(x+1)^2}dx$

q) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2\ln x}{(x^3+1)^3}dx$

r) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{2\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x + 1}$

s) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$

t) $\displaystyle\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(x^3-1)^2}$

u) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}dx$

v) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan x}{1+\tan^2 x}dx$

w) $\displaystyle\int_2^3 \frac{\sqrt{x+1}}{x}dx$

x) $\displaystyle\int_1^2 (x^2+1)\ln x dx$

y) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} (\operatorname{arcsen} x)^2 dx$

z) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}^3 x\cos x}{1+\operatorname{sen}^3 x}dx$

a') $\displaystyle\int_1^2 \ln^2 x dx$

b') $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3+1}{x^2+1}$

c') $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^5+x^3+x}{x^4+1}dx$

d') $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^5}{(x+1)(x^3+1)}dx$

e') $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3(1-x^2)}{(1+x^2)^3}dx$

f') $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx$

g') $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{1+\sqrt{2x-x^2}}$

h') $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{ch} x}{e^x+1}dx$

i') $\displaystyle\int_0^1 \arctan x dx$

j') $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\operatorname{sen}^2 x dx$

k') $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2\operatorname{sen} x}dx$

l') $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan x}{1+\operatorname{sen}^2 x}dx$

m') $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 x}{\cos^2 x}dx$

n') $\displaystyle\int_1^e \operatorname{sen}(\log x)dx$

o') $\displaystyle\int_1^2 \frac{\log x}{(1+x)^2}dx$

p') $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2-x+1}}dx$

q') $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$

r') $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^3+x^4}dx.$

Solución

a) $\displaystyle\int_0^3 e^{\sqrt{x+1}}dx.$

Sea $t^2 = x+1$, $x = t^2-1$, $dx = 2tdt \Longrightarrow \displaystyle\int_0^3 e^{\sqrt{x+1}}dx = 2\int_1^2 te^t dt = 2te^t\Big|_1^2 - 2\int_1^2 e^t dt = 2(t-1)e^t\Big|_1^2 =$

$2e^2$.

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x+\tan^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{sen} x}{\sec^2 x+\cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x \operatorname{sen} x}{1+\cos^3 x}dx = \frac{1}{3}\ln(1+\cos^3 x)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{2}{3}\log\frac{4}{3}$.

c) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-2x}\cos(2\pi x)dx = \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-2x}\operatorname{sen}(2\pi x)\Big|_0^1 + \frac{1}{\pi}\int_0^1 \mathrm{e}^{-2x}\operatorname{sen}(2\pi x)dx =$

$\displaystyle\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-2x}\cos(2\pi x)\Big|_0^1 - \frac{1}{\pi}\int_0^1 \mathrm{e}^{-2x}\cos(2\pi x)\right)dx \Longrightarrow \int_0^1 \mathrm{e}^{-2x}\cos(2\pi x)dx = \frac{1-\mathrm{e}^{-2}}{2(1+\pi^2)}$.

d) $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}+1)}$

Sea $u = \sqrt{x+1}+1$, $du = \dfrac{dx}{2\sqrt{x+1}}$, entonces $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1}+1)} = 2\int_2^3 \frac{du}{u} = 2\ln u\Big|_2^3 = 2\ln\frac{3}{2}$.

e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}+1}dx$

Sea $x = t^6$, $dx = 6t^5dt$, por lo que $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+1}dx = 6\int_0^1 \frac{t^9dt}{t^3+1} =$

$\displaystyle 6\int_0^1 \left(t^6 - t^5 + 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{t+1} - \frac{t^2-2}{t^2-t+1}\right)\right)dt =$

$\displaystyle 6\left(\frac{1}{7}t^2 - \frac{1}{4}t^4 + t - \frac{1}{3}\ln|t+1| + \frac{1}{6}\ln|t^2-t+1| - \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\Big|_0^1 = \frac{75}{14} - 2\ln 2 - \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \left[\frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3}{8}\left(\frac{x}{x^2+1} + \arctan x\right)\right]\Big|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{3\pi}{32}$.

g) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x}$ y considerando el cambio de variable $t = \tan\dfrac{x}{2}$ tenemos que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}dx = \frac{\pi}{2} - 2\int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{1+t}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1$.

h) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 x\cos 2x dx$.

Dado que $\operatorname{sen}^2 2x\cos 2x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\cos 2x = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos^2 2x) = \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{4}(1+\cos 4x) = \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 4x$, entonces: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 x\cos 2x dx =$

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 4x\right)dx = \left(\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{4}x - \frac{1}{16}\operatorname{sen} 4x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{8}$.

i) $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}} = \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{4-(x-2)^2}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} = \arctan\frac{t}{2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}$.

j) $\displaystyle\int_4^5 \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x}} = \int_4^5 \frac{dx}{\sqrt{(x-\frac{3}{2})^2-(\frac{3}{2})^2}} = \int_{\frac{5}{2}}^{\frac{7}{2}} \frac{dt}{\sqrt{t^2-(\frac{3}{2})^2}} = \ln|t+\sqrt{t^2-\frac{9}{4}}|\Big|_{\frac{5}{2}}^{\frac{7}{2}} = \ln\frac{7+2\sqrt{10}}{9}$.

k) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos x+\operatorname{sen} x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\tan x}$.

Se considera el cambio de variable $t = \tan x$, entonces $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+\tan x} = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)(1+t^2)} =$
$\frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1-t}{1+t^2}\right) dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{1+t} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{tdt}{t^2+1} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{t^2+1} =$
$\left[\frac{1}{2}\ln(1+t) - \frac{1}{4}\ln(t^2+1) + \frac{1}{2}\arctan t\right]\Big|_0^1 = \frac{1}{4}\left(\ln 2 + \frac{\pi}{2}\right).$

l) $\int_0^1 \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}dx = 2\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2} - \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x}{x^2+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$ ya que $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\frac{x}{(1+x^2)} + \int \frac{dx}{1+x^2}$.

m) $\int_7^{27} \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x}dx$

Sea $x = t^3 - 1$, $dx = 3t^2dt$ y se tiene que:
$\int_7^{26} \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x}dx = \int_2^3 \frac{3t^3dt}{t^3-1} = 3\int_2^3 \left(1 + \frac{1}{t^3-1}\right) dt = 3\left[t\Big|_2^3 + \frac{1}{3}\int_2^3 \left(\frac{1}{t-1} - \frac{t+2}{t^2+t+1}\right)dt\right] = 3 + (\log|t-1| - \frac{1}{2}\ln|t^2+t+1| - \sqrt{3}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}})\Big|_2^3 =$
$3 + \ln 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{7}{13} + \sqrt{3}\arctan\frac{5}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}\arctan\frac{7}{\sqrt{3}}.$

n) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^5 x \operatorname{sen} x dx = -\frac{1}{6}\cos^6 x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{2^6}\right) = \frac{21}{128}$

o) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^4 x}dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\operatorname{sen}^2 x)\cos x}{\operatorname{sen}^4 x}dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1-t^2}{t^4}dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{t^4} - \frac{1}{t^2}\right)dt =$
$\left(-\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{t}\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{4}{3}.$

p) $\int_2^3 \frac{x^2+x+1}{(x-1)^2(x+1)^2}dx = \frac{3}{4}\int_2^3 \frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{1}{4}\int_2^3 \frac{dx}{(x+1)^2} = -\frac{3}{4(x-1)}\Big|_2^3 - \frac{1}{4(x-1)}\Big|_2^3 = \frac{19}{48}.$

q) $\int_1^2 \frac{x^2\ln x}{(x^3+1)^3}dx$

Sea $du = \frac{3x^2}{(x^3+1)^3}dx$, $u = -\frac{1}{(x^3+1)^2}$, $v = \ln x$, $dv = \frac{1}{x}dx$, por lo que:
$\int_1^2 \frac{x^2}{(x^3+1)^3}\ln x dx = \frac{-\ln x}{6(x^3+1)^2}\Big|_1^2 + \frac{1}{6}\int_1^2 \frac{dx}{x(x^3+1)^2} =$
$-\frac{\ln 2}{486} + \frac{1}{18}\int_1^2 \frac{3x^2}{[(x^3+1)-1](x^3+1)^2}dx = -\frac{\ln 2}{486} + \int_2^9 \frac{dt}{(t-1)t^2} =$
$-\frac{\ln 2}{486} + \frac{1}{18}\left(\int_2^9 \frac{dt}{t-1} - \int_2^9 \frac{dt}{t} - \int_2^9 \frac{dt}{t^2}\right) = -\frac{\ln 2}{486} + \frac{1}{18}[\ln(t-1) - \ln t + \frac{1}{t}]\Big|_2^9 =$
$-\frac{\ln 2}{486} + \frac{1}{9}\ln\frac{4}{3} - \frac{7}{324}.$

r) $\int_0^1 \frac{dx}{2\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x + 1} = 2\int_0^1 \frac{e^x}{3e^{2x} + 2e^x + 1}dx = 2\int_1^e \frac{dt}{3t^2+2t+1} = \frac{2}{3}\int_1^e \frac{dt}{t^2 + \frac{2}{3}t + \frac{1}{3}} =$

$\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{\sqrt{2}}\arctan\frac{3t+1}{\sqrt{2}}\Big|_1^e = \sqrt{2}\arctan\frac{3e+1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\arctan\frac{4}{\sqrt{2}}.$

s) $\int_0^1 x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$

Sea $t^2 = \frac{1-x}{1+x} \Longrightarrow x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{-2t(1+t^2)-2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2} = \frac{-4tdt}{(1+t^2)^2}$ entonces:

$\int_0^1 x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx = -\int_1^0 \frac{1-t^2}{1+t^2}\cdot t\cdot\frac{4tdt}{(1+t^2)^2} = 4\int_0^1 \frac{t^2(1-t^2)}{(1+t^2)^3}dt =$

$-4\int_0^1\frac{dt}{1+t^2} + 12\int_0^1\frac{dt}{(1+t^2)^2} - 8\int_0^1\frac{dt}{(1+t^2)^3} = -4\arctan t\Big|_0^1 + 6\left(\frac{t}{t^2+1}+\arctan t\right)\Big|_0^1 =$

$-2\Big[\frac{1}{(t^2+1)^2} + \frac{3}{2}\big(\frac{t}{t^2+1}+\arctan t\big)\Big]\Big|_0^1 = 1-\frac{\pi}{4}.$

t) $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{(x^3-1)^2} = \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{(1-x^3)+x^3}{(x^3-1)^2}dx = -\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{x^3-1} + \frac{1}{3}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{3x^2}{(x^3-1)^2}(xdx) =$

$-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{x^3-1} + \frac{1}{3}\left(-\frac{x}{x^3-1}\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{x^3-1}\right) = \frac{4}{21} - \frac{2}{3}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{x^3-1} =$

$\frac{4}{21} - \frac{2}{9}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{x-1} - \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x+2}{x^2+x+1}dx\right) =$

$\frac{4}{21} - \frac{2}{9}\left(\log|x-1| - \frac{1}{2}\log|x^2+x+1| - \sqrt{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}} =$

$\frac{4}{21} + \frac{1}{9}\ln 7 + \frac{2\sqrt{3}}{9}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{9\sqrt{3}}.$

u) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\cos^2 x}dx = x\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x dx = \frac{\pi}{4} - \ln\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$

v) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\tan x}{1+\tan^2 x}dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 x\tan x dx = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\operatorname{sen} 2x dx = \frac{1}{4}\cos 2x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{8}.$

w) $\int_2^3\frac{\sqrt{x+1}}{x}dx$

Sea $u^2 = x+1$, $2udu = dx$, entonces $\int_2^3\frac{\sqrt{x+1}}{x}dx = 2\int_{\sqrt{3}}^2\frac{u^2}{u^2-1}du = 2\int_{\sqrt{3}}^2\left(1-\frac{1}{u^2-1}\right)du =$ $2(2-\sqrt{3}) + \int_{\sqrt{3}}^2\frac{du}{u-1} - \int_{\sqrt{3}}^2\frac{du}{u+1} = 4-2\sqrt{3} + \ln\frac{u-1}{u+1}\Big|_{\sqrt{3}}^2 = 4-2\sqrt{3}+\ln\frac{\sqrt{3}+1}{3(\sqrt{3}-1)}.$

x) $\int_1^2(x^2+1)\ln x dx = \left(\frac{1}{3}x^3+x\right)\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2\left(\frac{1}{3}x^2+1\right)dx = \frac{14}{3}\ln 2\cdot\left(\frac{1}{9}x^3+x\right)\Big|_1^2 = \frac{14}{3}\ln 2 - \frac{16}{9}.$

y) $\int_0^{\frac{1}{2}}(\operatorname{arcsen} x)^2 dx = x(\operatorname{arcsen} x)^2\Big|_0^{\frac{1}{2}} - 2\int_0^{\frac{1}{2}}x\frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}dx =$

$\frac{\pi^2}{72} - 2\Big(-\sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen} x\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \int_0^{\frac{1}{2}}dx\Big) = \frac{\pi^2}{72} + \frac{\pi}{2\sqrt{3}} - 1.$

z) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}^3 x \cos x}{1+\operatorname{sen}^3 x} dx$

Sea $x = \operatorname{arcsen} t$, $dx = \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, entonces:

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}^3 x \cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x} dx = \int_0^1 \frac{t^3}{1+t^2} dt = \int_0^1 \left(t - \frac{t}{1+t^2}\right) dt = \left(\tfrac{1}{2}t^2 - \tfrac{1}{2}\ln(1+t^2)\right)\Big|_0^1 = \tfrac{1}{2}(1-\ln 2).$

a') $\displaystyle\int_1^2 \ln^2 x dx = x\ln^2 x\Big|_1^2 - 2\int_1^2 \ln x dx = 2\ln^2 2 - 2x(\ln x - 1)\Big|_1^2 = 2(1 - 2\ln 2 + \ln^2 2).$

b') $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3+1}{x^2+1}$

Tenemos que $\dfrac{x^3+1}{x^2+1} = x + \dfrac{-x+1}{x^2+1}$, por lo tanto $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3+1}{x^2+1} dx = \int_0^1 \left(x + \frac{-x+1}{x^2+1}\right) dx =$

$\displaystyle\int_0^1 x dx - \int_0^1 \frac{x dx}{x^2+1} + \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \left[\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}\ln(x^2+1) + \arctan x\right]\Big|_0^1 = \tfrac{1}{2}(1-\ln 2) + \tfrac{\pi}{4}.$

c') $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^5+x^3+x}{x^4+1} dx = \int_0^1 \left(x + \frac{x^3}{x^4+1}\right) dx = \left[\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{4}\ln(x^4+1)\right]\Big|_0^1 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\ln 2.$

d') $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^5}{(x+1)(x^3+1)} dx = \int_0^1 \left[(x-1) + \frac{x^3-x^2+1}{(x+1)^2(x^2-x+1)}\right] dx =$

$\displaystyle\int_0^1 (x-1)dx + \int_0^1 \left[\frac{4}{3(x+1)} - \frac{1}{3(x+1)^2} - \frac{x}{3(x^2-x+1)}\right] dx =$

$\displaystyle\frac{1}{2}(x-1)^2\Big|_0^1 + \left[\frac{4}{3}\ln(x+1) + \frac{1}{3(x+1)} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\ln|x^2-x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right]\Big|_0^1 =$

$-\tfrac{2}{3} + \tfrac{4}{3}\ln 2 - \tfrac{\pi\sqrt{3}}{27}.$

e') $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3(1-x^2)}{(1+x^2)^3} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{[(x^2+1)-1][2-(x^2+1)]}{(1+x^2)^3}(2x)dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{(t-1)(2-t)}{t^3} dt =$

$\displaystyle\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{-t^2+3t-2}{t^3} dt = -\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{dt}{t} + \frac{3}{2}\int_1^2 \frac{dt}{t^2} - \int_1^2 \frac{dt}{t^3} = \left(-\frac{1}{2}\ln t - \frac{3}{2t} + \frac{1}{2t^2}\right)\Big|_1^2 = \tfrac{3}{8} - \tfrac{1}{2}\ln 2.$

f') $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx$. Se considera el cambio de variable $x = \operatorname{sh} t$, $dx = \operatorname{ch} t dt$,

$\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx = \int_{\operatorname{arcsh} 1}^{\operatorname{arcsh} 2} \frac{\operatorname{ch}^2 t}{\operatorname{sh}^2 t} dt = \int_{\operatorname{arcsh} 1}^{\operatorname{arcsh} 2} (1 + \operatorname{csch}^2 t) dt = (t - \coth t)\Big|_{\operatorname{arcsh} 1}^{\operatorname{arcsh} 2} =$

$\displaystyle\left(t - \frac{\sqrt{1+\operatorname{sh} t^2}}{\operatorname{sh} t}\right)\Big|_{\operatorname{arcsh} 1}^{\operatorname{arcsh} 2} = \operatorname{arcsh} 2 - \frac{\sqrt{5}}{2} - \operatorname{arcsh} 1 + \sqrt{2} = \operatorname{arcsh} 2 - \operatorname{arcsh} 1 - \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 2\sqrt{2}) =$

$\displaystyle\log\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}} - \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 2\sqrt{2})$, donde se usó el hecho que $\operatorname{arcsh} x = \log(x + \sqrt{x^2+1})$.

g') $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{1+\sqrt{2x-x^2}} = \int_1^2 \frac{dx}{1+\sqrt{1-(x-1)^2}}$ y consideremos el cambio de variable $x = 1 + \operatorname{sen} t$, entonces $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{1+\sqrt{1-(x-1)^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{1+\cos t} dt$. Ahora consideremos $u = \tan\frac{t}{2}$, por lo que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{1+\cos t} dt =$

$\int_0^1 \frac{1-u^2}{1+u^2}du = \int_0^1 \frac{2-(1+u^2)}{1+u^2}du = 2\int_0^1 \frac{du}{1+u^2} - \int_0^1 du = (2\arctan u - u)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1.$

h') $\int_0^1 \frac{\operatorname{ch} x}{e^x+1}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{e^x+e^{-x}}{e^x+1}dx$. Sea $x = \log t$, $dx = \frac{1}{t}dt$, entonces:

$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{e^x+e^{-x}}{e^x+1}dx = \frac{1}{2}\int_1^e \frac{t^2+1}{t^2(t+1)}dt = \frac{1}{2}\int_1^e \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} + \frac{2}{t+1}\right)dt =$

$\frac{1}{2}\left(-\log|t| - \frac{1}{2} + 2\log|t+1|\right)\Big|_0^e = -\frac{1}{2e} + \log\left(\frac{1+e}{2}\right).$

i') $\int_0^1 \arctan x dx = x\arctan x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log(1+x^2)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \log\sqrt{2}.$

j') $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\operatorname{sen}^2 x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2(1-\cos 2x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{x^2}_{u}\underbrace{\cos 2x dx}_{dv} =$

$\frac{1}{2}\frac{1}{3}x^3\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2\operatorname{sen} 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\operatorname{sen} 2x dx\right) = \frac{\pi^3}{48} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\operatorname{sen} 2x dx =$

$\frac{\pi^3}{48} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x dx\right) = \frac{\pi^3}{48} + \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{48} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{8}\left(\frac{\pi^6}{6} + 1\right).$

k') $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2\operatorname{sen} x}dx$

Sea $x = \operatorname{arcsen} t$, entonces $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2\operatorname{sen} x}dx = \int_0^1 \frac{dt}{1+2t} = \frac{1}{2}\log|1+2t|\Big|_0^1 = \log\sqrt{3}.$

l') $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan x}{1+\operatorname{sen}^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x(2-\cos^2 x)}dx.$

Sea $t = \cos x$, entonces $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x(2-\cos^2 x)}dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dt}{t(2-t^2)} =$

$\int_{\frac{1}{2}}^1 \left[\frac{1}{2t} + \frac{1}{4(\sqrt{2}-t)} - \frac{1}{4(\sqrt{2}+t)}\right]dt = \left(\frac{1}{2}\log|t| - \frac{1}{4}\log|\sqrt{2}-t| - \frac{1}{4}\log|\sqrt{2}+1|\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{4}\log 7.$

m') $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 x}{\cos^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x(\sec^2 x dx) = \int_0^1 u^2 du = \frac{1}{3}u^3\Big|_0^1 = \frac{1}{8}.$

n') $\int_1^e \operatorname{sen}(\log x)dx = x\operatorname{sen}(\log x)\Big|_1^e - \int_1^e \cos(\log x)dx = e\operatorname{sen} 1 - (x\cos|\log x|)\Big|_1^e + \int_1^e \operatorname{sen}(\log x)dx =$

$e\operatorname{sen} 1 - e\cos 1 + 1 - \int_1^e \operatorname{sen}(\log x)dx \Longrightarrow \int_1^e \operatorname{sen}(\log x)dx = \frac{1}{2}(1 + e\operatorname{sen} 1 - e\cos 1).$

o') $\int_1^2 \frac{\log x}{(1+x)^2}dx = -\frac{\log x}{1+x}\Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{dx}{x(x+1)} = -\frac{1}{3}\log 2 + \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx =$

$\frac{1}{3}\log 2 + (\log|x| - \log|x+1|)\Big|_1^2 = \frac{5}{3}\log 2 - \log 3.$

p') $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2-x+1}}dx = \int_0^1 \frac{(x^2-x+1)+(x-\frac{1}{2})-\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2-x+1}}dx =$

$$\int_0^1 \sqrt{(x-\tfrac{1}{2})^2+(\tfrac{\sqrt{3}}{2})^2}dx+\int_0^1 \frac{(x-\frac{1}{2})}{\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}}dx-\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}}=$$

$$\left(\left(\tfrac{1}{2}x+\tfrac{3}{4}\right)\sqrt{x^2-x+1}-\tfrac{1}{8}\log((x-\tfrac{1}{2})+\sqrt{x^2-x+1})\right)\Big|_0^1=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{8}\log 3.$$

q') $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$

Sea $x=\dfrac{1-t}{t}$, $dx=\dfrac{-1}{t^2}dt$, entonces $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}=\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dt}{\sqrt{2t^2-2t+1}}=$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dt}{\sqrt{(t-\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\log\left((t-\tfrac{1}{2})+\sqrt{t^2-t+\tfrac{1}{2}}\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^1=\frac{1}{\sqrt{2}}\log(1+\sqrt{2}).$$

r') $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^3+x^4}dx=\int_0^1 x\sqrt{x+x^2}dx=\frac{1}{2}x^2\sqrt{x+x^2}\Big|_0^1-\frac{1}{4}\int_0^1 x^2\frac{2x+1}{\sqrt{x+x^2}}dx=$

$$\tfrac{\sqrt{2}}{2}-\tfrac{1}{4}\int_0^1 \frac{(2x+1)(x+x^2)-x(2x+1)}{\sqrt{x+x^2}}dx=\tfrac{\sqrt{2}}{2}-\tfrac{1}{4}\int_0^1(2x+1)\sqrt{x+x^2}dx+\tfrac{1}{4}\int_0^1 x\frac{2x+1}{\sqrt{x+x^2}}dx=$$

$$\tfrac{\sqrt{2}}{2}-\tfrac{1}{6}(x^2+x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1+\tfrac{1}{4}(2x\sqrt{x+x^2}\Big|_0^1-2\int_0^1\sqrt{x+x^2}dx)=\tfrac{2}{3}\sqrt{2}-\tfrac{1}{2}\int_0^1\sqrt{(x+\tfrac{1}{2})^2-(\tfrac{1}{2})^2}dx=$$

$$\tfrac{2}{3}\sqrt{2}-\tfrac{1}{4}(x+\tfrac{1}{2})\sqrt{x+x^2}\Big|_0^1+\tfrac{1}{16}\log[(x+\tfrac{1}{2})+\sqrt{x^2-x})\Big|_0^1=\tfrac{7}{24}\sqrt{2}+\tfrac{1}{16}\log(3+2\sqrt{2}).$$

Ejercicios de Integrales: II Parte Prof. Jorge Poltronieri

2 Integral indefinida

1. Hallar las integrales siguientes:

a) $\int (nx)^{\frac{1-n}{n}}\,dx$

b) $\int \frac{(x^m - x^n)^2}{\sqrt{x}}\,dx$

c) $\int \frac{dx}{x^2+7}$

d) $\int \frac{dx}{x^2-10}$

e) $\int \frac{dx}{\sqrt{8-x^2}}$

f) $\int \frac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}}\,dx$

g) $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$

h) $\int \frac{2x+1}{x^2+x+3}\,dx$

i) $\int 3^x e^x\,dx$

j) $\int \frac{a\,dx}{a-x}$

k) $\int \frac{2x+3}{2x+1}\,dx$

l) $\int \frac{1-3x}{3+2x}\,dx$

m) $\int \frac{x^4+x^2+1}{x-1}\,dx$

n) $\int \frac{x}{(x+1)^2}\,dx$

o) $0<b<a$, $\int \frac{dx}{a+b-(a-b)x^2}$

p) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^4-x^4}}$

q) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^6-1}}$

r) $\int \sqrt{\frac{\operatorname{arcsen} x}{1-x^2}}\,dx$

s) $\int \frac{x-\sqrt{\arctan 2x}}{1+4x^2}\,dx$

t) $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)\ln(x+\sqrt{1+x^2})}}$

u) $\int x7^{x^2}\,dx$

v) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$

w) $\int \frac{dx}{2^x+3}$

x) $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

y) $\int \operatorname{sen}(\ln x)\frac{dx}{x}$

z) $\int \cos^2 x\,dx$

a’) $\int \sec^2(ax+b)\,dx$

b’) $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x^2}$

c’) $\int \operatorname{tg} x\,dx$

d’) $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x}$

e’) $\int \frac{dx}{\cos x \operatorname{sen} x}$

f’) $\int \frac{\operatorname{sen} x\cos x}{\sqrt{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}}\,dx$

g’) $\int \sqrt{1+3\cos^2 x}\operatorname{sen} 2x\,dx$

h’) $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx$

i’) $\int \frac{(\cos ax+\operatorname{sen} ax)^2}{\operatorname{sen} ax}\,dx$

j’) $\int x\sqrt[5]{5-x^2}\,dx$

k’) $\int \frac{3-\sqrt{2+3x^2}}{2+3x^2}\,dx$

l’) $\int \frac{x^3-1}{x+1}\,dx$

m') $\displaystyle\int \left(2 + \frac{x}{2x^2+1}\right)\frac{dx}{2x^2+1}$

n') $\displaystyle\int a^{\operatorname{sen} x}\cos x\,dx$

o') $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x\,dx}{\sqrt{4-\operatorname{tg}^2 x}}$

p') $\displaystyle\int \frac{e^{\arctan x} + x\ln(1+x^2)+1}{1+x^2}\,dx$

q') $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x}\,dx$

r') $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} ax\,\cos ax}$

s') $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x\cos x}{\sqrt{2-\operatorname{sen}^4 x}}\,dx$

t') $\displaystyle\int \sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{1+x^2}}\,dx$

u') $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{4+\cos^2 2x}\,dx$

v') $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$

w') $\displaystyle\int x(2x+5)^{10}\,dx$

x') $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$

y') $\displaystyle\int \frac{(\operatorname{arcsen} x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

z') $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$

a") $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$

b") $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

c") $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{2-x^2}}\,dx$

d") $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx$

e") $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

f") $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

g") $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

h") $\displaystyle\int \frac{dx}{x(1-x)}$

i") $\displaystyle\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx$

j") $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}}.$

2. Determine las siguientes integrales usando integración por partes:

a) $\displaystyle\int \operatorname{arcsen} x\,dx$

b) $\displaystyle\int x\operatorname{sen} x\,dx$

c) $\displaystyle\int x\cos 3x\,dx$

d) $\displaystyle\int x2^{-x}\,dx$

e) $\displaystyle\int (x^2-2x+5)e^{-x}dx$

f) $\displaystyle\int x\operatorname{sen} x\cos x\,dx$

g) $\displaystyle\int (x^2+5x+6)\cos 2x\,dx$

h) $\displaystyle\int x\arctan x\,dx$

i) $\displaystyle\int x\arctan x\,dx$

j) $\displaystyle\int x^3e^{-x^2}\,dx$

k) $\displaystyle I = \int \frac{\operatorname{arcsen} x}{x}\,dx$

l) $\displaystyle\int \operatorname{sen} y\,e^y\,dy$

m) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx$

n) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arcsen}\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx.$

o) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx$

p) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$

q) $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$

r) $\displaystyle\int \sqrt{a+x^2}\,dx$

s) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx.$

3. Calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$ b) $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{x^2-6x+10}$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}$ d) $\displaystyle\int \frac{2x-8}{\sqrt{-x-x^2}}\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}$ f) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$

g) $\displaystyle\int \frac{\cos x\,dx}{\operatorname{sen}^2 - 6\operatorname{sen} x + 12}$ h) $\displaystyle\int \frac{\ln x\,dx}{x\sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x}}$.

4. Calcule las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$, con $a \neq b$ b) $\displaystyle\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2}\,dx$ d) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^4-1}\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-4x+3)(x^2+4x+5)}$ f) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+1}$

g) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$ h) $\displaystyle\int \frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2}\,dx$

i) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+x+1)^2}$ j) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2}$

k) $\displaystyle\int \frac{7x+13}{x^2+12x+52}dx$ l) $\displaystyle\int \frac{x^4-2x^2+2}{(x^2-2x+2)^2}dx$

m) $\displaystyle\int \frac{x^5\,dx}{(x^3+1)(x^3+8)}$ n) $\displaystyle\int \frac{x^7+x^3}{x^{12}-2x^4+1}dx$

o) $\displaystyle\int \frac{x^2-x+14}{(x-4)^3(x-2)}dx$ p) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4(x^3+1)^2}$

q) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3-4x^2+5x-2}$ r) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^7+1)}$

s) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^5+1)^2}$ t) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+2x+2)(x^2+2x+5)}$

u) $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(x-1)^{10}}$ v) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^6+x^8}$

w) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}\,dx$ x) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{ax+b}}$

y) $\displaystyle\int \frac{2x^3+x+3}{(1+x^2)^2}\,dx$ z) $\displaystyle\int \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$

a') $\displaystyle\int \frac{4}{x^3+4x}dx$ b') $\displaystyle\int \frac{x+2}{x+1}dx$

c') $\displaystyle\int \frac{dx}{-x^2-x+2}$ d') $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x^2-x-1}dx$

e') $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x^2+1)^2}\,dx$ f') $\displaystyle\int \frac{dx}{x(1+x^2)}$

g') $\displaystyle\int \frac{x^3}{(1+x^2)^3}\,dx$ h') $\displaystyle\int \frac{x^5}{(x^2+1)^3}dx$

i') $\int \frac{x^2+2}{x^3-1}dx$

j') $\int \frac{x^2+1}{(x-1)^6}dx$

k') $\int \frac{2x^2-2+2}{2x-3}dx$

l') $\int \frac{x^2}{x^4+x^2-2}dx$

m') $\int \frac{x}{x^4-x^2-2}dx$

n') $\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx,\ a \neq b.$

o') $\int \frac{8x^2}{(x^3+2)^3}dx$

p') $\int \frac{x+2}{x^4-1}dx$

q') $\int \frac{x}{x^4-1}dx$

r') $\int \frac{1+x}{x(1+x^2)}dx$

s') $\int \frac{1+x}{(x-1)^2}dx$

t') $\int \frac{x^4}{x^3-8}dx$

u') $\int \frac{x^5}{(x^2-1)(x+1)}dx$

v') $\int \frac{2x^3-2x^2-2x+1}{x^4-2x^3+x^2}dx$

w') $\int \frac{3x^2}{x^4+5x^2+4}dx$

x') $\int \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}dx$

5. Calcule las siguientes integrales:

a) $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$

b) $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^2}}$

c) $I = \int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}dx$

d) $I = \int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}dx$

e) $I = \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx$

f) $I = \int \frac{x+3}{x^3\sqrt{2x+3}}dx.$

6. Calcule las siguientes integrales:

a) $\int \cos^3 dx$

b) $\int \operatorname{sen}^2 x\cos^3 x dx$

c) $\int \operatorname{sen}^3(\frac{1}{2}x)\cos^5(\frac{1}{2}x)\,dx$

d) $\int \operatorname{sen}^4 x\,dx.$

e) $\int \operatorname{sen}^2 x\cos^4 x dx$

f) $\int \cos^6 3x dx$

g) $\int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^6 x}dx$

h) $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}x\cos^3\frac{1}{2}x}$

i) $\int \tan^2 5x dx$

j) $\int \operatorname{cotg}^4 x dx$

k) $\int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^4 x}dx$

l) $\int \operatorname{sen}^5 x\sqrt[3]{\cos x}dx$

m) $\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{sen} x\cos^3 x}}$

n) $\int \frac{dx}{\sqrt{\tan x}}.$

7. Calcular las siguientes integrales:

a) $\int \operatorname{sen} 10x\operatorname{sen} 15x dx$

b) $\int \operatorname{sen}\frac{1}{3}x\cos\frac{2}{3}x dx$

c) $\int \cos x\cos^2 3x dx$

d) $\int \operatorname{sen} x\operatorname{sen} 2x\operatorname{sen} 3x dx$

e) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x + \cos x}$

f) $\displaystyle\int \frac{3\operatorname{sen} x + 2\cos x}{2\operatorname{sen} x + 3\operatorname{sen} x}\,dx$

g) $\displaystyle\int \frac{1+\tan x}{1-\tan x}\,dx$

h) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$

i) $\displaystyle\int \frac{dx}{3\operatorname{sen}^2 x + 5\cos^2 x}$

j) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x + 3\operatorname{sen} x\cos x - \cos^2 x}$

k) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x - 5\operatorname{sen} x\cos x}$

l) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{(1-\cos x)^3}\,dx$

m) $\displaystyle\int \frac{\cos x\,dx}{\operatorname{sen}^2 x - 6\operatorname{sen} x + 5}$

n) $\displaystyle\int \frac{dx}{(2-\operatorname{sen} x)(3-\operatorname{sen} x)}$

o) $\displaystyle\int \frac{1-\operatorname{sen} x+\cos x}{1+\operatorname{sen} x-\cos x}\,dx.$

Soluciones de ejercicios del Tema No.8: Integrales II Parte

Prof. Jorge Poltronieri

2 Integral indefinida

1. Hallar las integrales siguientes:

a) $\int (nx)^{\frac{1-n}{n}}\,dx$

b) $\int \frac{(x^m - x^n)^2}{\sqrt{x}}\,dx$

c) $\int \frac{dx}{x^2+7}$

d) $\int \frac{dx}{x^2-10}$

e) $\int \frac{dx}{\sqrt{8-x^2}}$

f) $\int \frac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}}\,dx$

g) $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$

h) $\int \frac{2x+1}{x^2+x+3}\,dx$

i) $\int 3^x e^x\,dx$

j) $\int \frac{a\,dx}{a-x}$

k) $\int \frac{2x+3}{2x+1}\,dx$

l) $\int \frac{1-3x}{3+2x}\,dx$

m) $\int \frac{x^4+x^2+1}{x-1}\,dx$

n) $\int \frac{x}{(x+1)^2}\,dx$

o) $0 < b < a$, $\int \frac{dx}{a+b-(a-b)x^2}$

p) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^4-x^4}}$

q) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^6-1}}$

r) $\int \sqrt{\frac{\operatorname{arcsen} x}{1-x^2}}\,dx$

s) $\int \frac{x-\sqrt{\arctan 2x}}{1+4x^2}\,dx$

t) $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)\ln(x+\sqrt{1+x^2})}}$

u) $\int x7^{x^2}\,dx$

v) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$

w) $\int \frac{dx}{2^x+3}$

x) $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

y) $\int \operatorname{sen}(\ln x)\frac{dx}{x}$

z) $\int \cos^2 x\,dx$

a') $\int \sec^2(ax+b)\,dx$

b') $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x^2}$

c') $\int \operatorname{tg} x\,dx$

d') $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x}$

e') $\int \frac{dx}{\cos x \operatorname{sen} x}$

f') $\int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\sqrt{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}}\,dx$

g') $\int \sqrt{1+3\cos^2 x}\,\operatorname{sen} 2x\,dx$

h') $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx$

i') $\int \frac{(\cos ax + \operatorname{sen} ax)^2}{\operatorname{sen} ax}\,dx$

j') $\int x\sqrt[5]{5-x^2}\,dx$

k') $\int \frac{3-\sqrt{2+3x^2}}{2+3x^2}\,dx$

l') $\int \frac{x^3-1}{x+1}\,dx$

m’) $\int \left(2+\frac{x}{2x^2+1}\right)\frac{dx}{2x^2+1}$

n’) $\int a^{\operatorname{sen} x}\cos x\,dx$

o’) $\int \frac{\sec^2 x\,dx}{\sqrt{4-\operatorname{tg}^2 x}}$

p’) $\int \frac{e^{\arctan x}+x\ln(1+x^2)+1}{1+x^2}\,dx$

q’) $\int \frac{\operatorname{sen} x-\cos x}{\operatorname{sen} x+\cos x}\,dx$

r’) $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} ax\cos ax}$

s’) $\int \frac{\operatorname{sen} x\cos x}{\sqrt{2-\operatorname{sen}^4 x}}\,dx$

t’) $\int \sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{1+x^2}}\,dx$

u’) $\int \frac{\cos 2x}{4+\cos^2 2x}\,dx$

v’) $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$

w’) $\int x(2x+5)^{10}\,dx$

x’) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$

y’) $\int \frac{(\operatorname{arcsen} x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

z’) $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$

a”) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$

b”) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

c”) $\int \frac{x^3}{\sqrt{2-x^2}}\,dx$

d”) $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx$

e”) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

f”) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

g”) $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

h”) $\int \frac{dx}{x(1-x)}$

i”) $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx$

j”) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

Solución

a) $\int (nx)^{\frac{1-n}{n}}\,dx=\frac{1}{n}\int u^{\frac{1}{n}-1}du=\frac{1}{n}\frac{u^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}}+C=u^{\frac{1}{n}}+C=(nx)^{\frac{1}{n}}+C$, donde $u=nx$, $du=n\,dx$.

b) $\int \frac{(x^m-x^n)^2}{\sqrt{x}}\,dx$

Sea $u=\sqrt{x}$, $du=\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$, entonces

$$\int \frac{(x^m-x^n)^2}{\sqrt{x}}\,dx=2\int (u^{2m}-u^{2n})^2\,du=2\int (u^{4m}+u^{4n}-2u^{2m+2n})\,du=$$

$$2\frac{u^{4m+1}}{4m+1}+2\frac{u^{4n+1}}{4n+1}-4\frac{u^{2m+2n+1}}{2m+2n+1}+C=2\frac{x^{2m+\frac{1}{2}}}{4m+1}+2\frac{x^{2n+\frac{1}{2}}}{4n+1}-4\frac{x^{m+n+\frac{1}{2}}}{2m+2n+1}+C.$$

c) $\int \frac{dx}{x^2+7}=\int \frac{dx}{x^2+(\sqrt{7})^2}=\frac{1}{\sqrt{7}}\arctan\frac{x}{\sqrt{7}}+C.$

d) $\int \frac{dx}{x^2-10}=\int \frac{dx}{(x-\sqrt{10})(x+\sqrt{10})}=\frac{1}{2\sqrt{10}}\int\left(\frac{1}{x-\sqrt{10}}-\frac{1}{x+\sqrt{10}}\right)dx=$

$\frac{1}{2\sqrt{10}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{10}}{x+\sqrt{10}}\right|+C.$

e) Se tiene que $\int \frac{dx}{\sqrt{8-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{8}}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{8}}\right)^2}}$. Sea $\operatorname{sen} u=\frac{x}{\sqrt{8}}$, $\cos u\,du=\frac{dx}{\sqrt{8}}\Longrightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{8-x^2}}=$

$\int \frac{\cos u du}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 u}} = u + C = \operatorname{arcsen} \frac{x}{\sqrt{8}} + C.$

f) $\int \frac{\sqrt{2+x^2} - \sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}} dx = \int \frac{\sqrt{2+x^2} - \sqrt{2-x^2}}{\sqrt{2-x^2}\sqrt{2+x^2}} dx = \int \left(\frac{1}{\sqrt{2-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{2+x^2}}\right) dx =$
$\operatorname{arcsen} \frac{x}{\sqrt{2}} - \ln(x + \sqrt{x^2+2}) + C.$

g) $\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int (\sec^2 x - 1) dx = \operatorname{tg} x - x + C.$

h) $\int \frac{2x+1}{x^2+x+3} dx$

Sea $u = x^2 + x + 3$, entonces $du = (2x+1)dx$ y $\int \frac{(2x+1)dx}{x^2+x+3} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|x^2+x+3| + C.$

i) $\int 3^x e^x dx = \int e^{x\ln 3 + x} dx = \int e^{x(\ln 3+1)} \frac{\ln 3 + 1}{\ln 3 + 1} dx = \frac{1}{\ln 3 + 1} e^{x(\ln 3+1)} + C = \frac{3^x e^x}{\ln 3 + 1} + C.$

j) $\int \frac{a dx}{a-x} = a \ln|a-x| + C.$

k) $\int \frac{2x+3}{2x+1} dx = \int \frac{2x+1+2}{2x+1} = \int \left(1 + \frac{2}{2x+1}\right) dx = x + \ln|2x+1| + C.$

l) $\int \frac{1-3x}{3+2x} dx = -\frac{3}{2} \int \frac{2x - \frac{2}{3}}{2x+3} dx = -\frac{3}{2} \int \left(1 - \frac{\frac{11}{3}}{2x+3}\right) dx = -\frac{3}{2}(x - \frac{11}{6} \ln|2x+3|) + C =$
$-\frac{3}{2}x + \frac{11}{4} \ln|3+2x| + C.$

m) $\int \frac{x^4+x^2+1}{x-1} dx$

Se tiene que $\frac{x^4+0x^3+x^2+0x+1}{x-1} = x^3 + x^2 + 2x + 3 + \frac{4}{x-1}$, por lo que $\int \frac{x^4+x^2+1}{x-1} dx =$
$\int \left(x^3 + x^2 + 2x + 3 + \frac{4}{x-1}\right) dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x^2 + 3x + 4\ln|x-1| + C.$

n) $\int \frac{x}{(x+1)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+2-2}{x^2+2x+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+1} dx - \int \frac{1}{(x-1)^2} dx =$
$\frac{1}{2} \ln|x+1|^2 + \frac{1}{x-1} + C = \ln|x+1| + \frac{1}{x-1} + C.$

o) $0 < b < a$, $\int \frac{dx}{a+b-(a-b)x^2} = \frac{1}{a-b} \int \frac{dx}{\frac{a+b}{a-b} - x^2} =$

$$\frac{1}{2(a-b)\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} + x}{\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} - x} \right| + C = \frac{1}{2\sqrt{a^2-b^2}} \ln \left| \frac{\sqrt{a+b} + x\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b} - x\sqrt{a-b}} \right| + C.$$

p) $\int \frac{x dx}{\sqrt{a^4-x^4}}$

Sea $x^2 = u$, $2x dx = du$ y tenemos que $\frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{\sqrt{a^4-x^4}} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{a^4-u^2}} = \frac{1}{2} \operatorname{arcsen} \frac{u}{a^2} + C = \frac{1}{2} \operatorname{arcsen} \frac{x^2}{a^2} + C.$

q) Sea $u = x^3$, $du = 3x^2 dx$, entonces

$\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^6-1}} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \frac{1}{3}\ln|u+\sqrt{u^2-1}| + C = \frac{1}{3}\ln|x^3+\sqrt{x^6-1}| + C.$

r) Sea $u = \operatorname{arcsen} x$, $du = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, con lo cual tenemos que:

$\displaystyle\int \sqrt{\frac{\operatorname{arcsen} x}{1-x^2}}\,dx = \int \sqrt{u}du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}(\operatorname{arcsen} x)^{\frac{3}{2}} + C.$

s) Sea $u = \arctan 2x$, $du = \dfrac{2\,dx}{1+4x^2}$, entonces:

$\displaystyle\int \frac{x-\sqrt{\arctan 2x}}{1+4x^2}\,dx = \frac{1}{8}\int \frac{8x\,dx}{1+4x^2} - \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{\arctan 2x}}{1+4x^2}(2\,dx) =$

$\frac{1}{8}\ln(1+4x^2) - \frac{1}{3}\arctan^{\frac{3}{2}} 2x + C.$

t) Sea $u = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$, $du = \dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$, entonces:

$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)\ln(x+\sqrt{1+x^2})}} = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C = 2\sqrt{\ln(x+\sqrt{1+x^2})} + C.$

u) $\displaystyle\int x7^{x^2}\,dx$

Sabemos que $7^{x^2} = e^{x^2\ln 7} = u$, $du = 7^{x^2}2x\ln 7\,dx$, lo que permite escribir:

$\displaystyle\int x7^{x^2}\,dx = \frac{1}{2\ln 7}\int du = \frac{1}{2\ln 7}u + C = \frac{1}{2\ln 7}7^{x^2} + C.$

v) $\displaystyle\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$

Sea $u = \dfrac{1}{x}$, $du = -\dfrac{1}{x^2}\,dx$ y entonces:

$\displaystyle\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx = -\int e^u du = -e^u + C = -e^{\frac{1}{x}} + C.$

w) $\displaystyle\int \frac{dx}{2^x+3} = \frac{1}{3}\int \frac{2^x+3-2^x}{2^x+3}\,dx = \frac{1}{3}\int \left(1-\frac{2^x}{2^x+3}\right)dx = \frac{1}{3}\left(x-\frac{\ln(2^x+3)}{\ln 2}\right) + C =$

$\dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{3\ln 2}\ln(2^x+3) + C.$

x) $\displaystyle\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

Sea $u = \sqrt{x}$, $du = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$ y se tiene:

$\displaystyle\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int \cos u du = 2\operatorname{sen} u + C = 2\operatorname{sen}\sqrt{x} + C.$

y) Sea $u = \ln x$, $du = \dfrac{dx}{x}$, entonces:

$\displaystyle\int \operatorname{sen}(\ln x)\frac{dx}{x} = \int \operatorname{sen} u du = -\cos u + C = -\cos\ln x + C.$

z) $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1}{2}(1+\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C.$

a') $\displaystyle\int \sec^2(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\int \sec^2 u du = \frac{1}{a}\operatorname{tg} u + C = \frac{1}{a}\operatorname{tg}(ax+b) + C$, donde $u = ax+b$, $du = a\,dx$.

b') $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x^2} = \frac{1}{2}\int \sec^2 u\,du = \frac{1}{2}\operatorname{tg} u + C = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x^2 + C$, con $x^2 = u$, $2x\,dx = du$.

c') $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C$, donde $u = \cos x$, $du = -\operatorname{sen} x\,dx$.

d') $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \int \frac{dx}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x} = \tfrac{1}{2}\int \frac{1}{\tan\frac{1}{2}x}\sec^2\tfrac{1}{2}x\,dx = \ln|\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x| + C.$

e') $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x\operatorname{sen} x} = \int \frac{2\,dx}{\operatorname{sen} 2x} = \int \frac{u}{\operatorname{sen} u} = \ln|\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}u| + C = \ln|\operatorname{tg} x| + C.$

f') $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x\cos x}{\sqrt{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}}\,dx = \tfrac{1}{4}\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{\cos 2x}}2\,dx = -\tfrac{1}{4}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{u} + C = -\tfrac{1}{2}\sqrt{\cos 2x} + C$, con $u = \cos 2x$.

g') $\displaystyle\int \sqrt{1 + 3\cos^2 x}\operatorname{sen} 2x\,dx$

Sea $u = 1 + 3\cos^2 x$, $du = -6\cos x\operatorname{sen} x\,dx = -3\operatorname{sen} 2x\,dx$, entonces:

$$\int \sqrt{1 + 3\cos^2 x}\operatorname{sen} 2x\,dx = -\tfrac{1}{3}\int \sqrt{u}\,du = -\tfrac{1}{3}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -\tfrac{2}{9}(1 + 3\cos^2 x)^{\frac{3}{2}} + C.$$

h') $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx$

Sea $u = \operatorname{tg} x$, $du = \sec^2 x\,dx = \dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx$, luego:

$$\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx = \int \sqrt{u}\,du = \tfrac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \tfrac{2}{3}\operatorname{tg}^{\frac{3}{2}} x + C.$$

i') $\displaystyle\int \frac{(\cos ax + \operatorname{sen} ax)^2}{\operatorname{sen} ax}\,dx = \int \left(\frac{\cos^2 ax + \operatorname{sen}^2 ax}{\operatorname{sen} ax} + 2\cos ax\right)dx = \int (\csc ax + 2\cos ax)\,dx =$
$\dfrac{1}{a}(\ln|\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x| + 2\operatorname{sen} ax) + C.$

j') $\displaystyle\int x\sqrt[5]{5 - x^2}\,dx$

Sea $u = 5 - x^2$, $du = -2x\,dx$ y tenemos que:

$$\int x\sqrt[5]{5 - x^2}\,dx = -\tfrac{1}{2}\int u^{\frac{1}{6}}\,du = -\tfrac{5}{12}u^{\frac{6}{5}} + C = -\tfrac{5}{12}(5 - x^2)^{\frac{6}{5}} + C.$$

k') $\displaystyle\int \frac{3 - \sqrt{2 + 3x^2}}{2 + 3x^2}\,dx = \int \frac{dx}{x^2 + \frac{2}{3}} - \int \frac{dx}{\sqrt{3}(x^2 + \frac{2}{3})^{\frac{1}{2}}} =$

$$\sqrt{\tfrac{3}{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{\frac{2}{3}}} - \tfrac{1}{\sqrt{3}}\ln|x\sqrt{3} + \sqrt{2 + 3x^2}| + C = \sqrt{\tfrac{3}{2}}\arctan\sqrt{\tfrac{3}{2}}x - \tfrac{1}{\sqrt{3}}\ln|x\sqrt{3} + \sqrt{2 + 3x^2}| + C.$$

l') $\displaystyle\int \frac{x^3 - 1}{x + 1}\,dx = \int \left(x^2 - x + 1 - \frac{2}{x + 1}\right)dx = \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + x - 2\ln|x + 1| + C.$

m') $\displaystyle\int \left(2 + \frac{x}{2x^2 + 1}\right)\frac{dx}{2x^2 + 1} = \sqrt{2}\int \frac{\sqrt{2}\,dx}{(\sqrt{2}x)^2 + 1} + \tfrac{1}{4}\int \frac{4x\,dx}{(2x^2 + 1)^2} = \sqrt{2}\arctan\sqrt{2}x - \frac{1}{4(2x^2 + 1)} + C.$

n') $\displaystyle\int a^{\operatorname{sen} x}\cos x\,dx = \int e^{\operatorname{sen} x\ln a}\cos x\,dx = \frac{1}{\ln a}e^{\operatorname{sen} x\ln a} + C = \frac{1}{\ln a}a^{\operatorname{sen} x} + C.$

o') Sea $u = \operatorname{tg} x$, $du = \sec^2 x\,dx$, se puede escribir:

$$\int \frac{\sec^2 x dx}{\sqrt{4-\operatorname{tg}^2 x}} = \int \frac{du}{\sqrt{4-u^2}} = \tfrac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{1-(\frac{1}{2}u)^2}} = \operatorname{arcsen} \tfrac{1}{2}u + C = \operatorname{arcsen}(\tfrac{1}{2}\operatorname{tg} x) + C.$$

p') $I = \displaystyle\int \frac{e^{\arctan x} + x\ln(1+x^2)+1}{1+x^2}dx = \int e^{\arctan x}\frac{dx}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{2x\ln(1+x^2)}{1+x^2}dx + \int \frac{dx}{1+x^2}.$

Sea $u = \arctan x$, $v = 1+x^2$, entonces $I = \displaystyle\int e^u du + \frac{1}{2}\int \ln v \frac{dv}{v} + \arctan x + C =$

$e^{\arctan x} + \frac{1}{4}\ln^2(1+x^2) + \arctan x + C.$

q') $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x}dx = -\int \frac{d(\operatorname{sen} x + \cos x)}{\operatorname{sen} x + \cos x} = -\ln|\operatorname{sen} x + \cos x| + C.$

r') $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} ax \cos ax} = \frac{1}{a}\int \frac{2a dx}{\operatorname{sen} 2ax} = \frac{1}{a}\ln|\tan ax| + C.$

s') $I = \displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\sqrt{2-\operatorname{sen}^4 x}}dx$

Sea $u = \operatorname{sen}^2 x$, $du = 2\operatorname{sen} x \cos x dx$, entonces:

$I = \displaystyle\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{2-u^2}} = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\frac{u}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\sqrt{2}} + C.$

t') $I = \displaystyle\int \sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{1+x^2}}dx$

Sea $u = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$, $du = \dfrac{\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx}{x+\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$, por lo que:

$I = \displaystyle\int \sqrt{u}du = \tfrac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \tfrac{2}{3}((\ln(x+\sqrt{x^2+1}))^{\frac{3}{2}} + C.$

u') $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{4+\cos^2 2x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2\cos 2x}{5-\operatorname{sen}^2 2x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{5-u^2} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{u+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-u}\right| + C =$

$\displaystyle\frac{1}{4\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\operatorname{sen} 2x+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\operatorname{sen} 2x}\right| + C$, efectuando la sustitución $v = \operatorname{sen} 2x$.

v') $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos^2 x} = \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x + 2\cos^2 x} = \int \frac{1}{\tan^2 x + 2}\left(\frac{dx}{\cos^2 x}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right) + C.$

w') $\displaystyle\int x(2x+5)^{10}dx$

Sea $u = 2x+5$, $x = \frac{1}{2}(u-5)$, $dx = \frac{1}{2}du$, entonces tenemos que:

$\displaystyle\int x(2x+5)^{10}dx = \int \tfrac{1}{2}(u-5)u^{10}\tfrac{1}{2}du = \tfrac{1}{4}\int (u^{11}-5u^{10})du = \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{12}u^{12} - \tfrac{5}{11}u^{11}\right) + C =$

$\tfrac{1}{4}(2x+5)^{11}\left(\tfrac{1}{12}(2x+5) - \tfrac{5}{11}\right) + C = \tfrac{1}{528}(2x+5)^{11}(22x-5).$

x') $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$

Sea $u = e^x - 1$, $du = e^x dx$, $dx = \dfrac{du}{u+1}$, entonces:

$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}} = 2\int \frac{du}{2\sqrt{u}(u+1)}$. Realizando la sustitución $u = y^2$, $du = 2y dy$, $dy = \dfrac{du}{2\sqrt{u}}$ y se tiene $\displaystyle 2\int \frac{du}{2\sqrt{u}(u+1)} = 2\int \frac{dy}{y^2+1} = 2\arctan y + C = 2\arctan\sqrt{u} + C = 2\arctan\sqrt{e^x-1} + C.$

y') $I = \displaystyle\int \frac{(\operatorname{arcsen} x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

Si consideramos $u = \operatorname{arcsen} x$, $du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, tenemos:

$I = \displaystyle\int u^2 du = \tfrac{1}{3}u^3 + C = \tfrac{1}{3}\operatorname{arcsen}^3 x + C.$

z') $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$

Sea $u = \cos x$, $du = -\operatorname{sen} x\,dx$, entonces tenemos:

$$\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{\cos x}}\,dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)\operatorname{sen} x}{\sqrt{\cos x}}\,dx = -\int \frac{(1-u^2)du}{\sqrt{u}} = -\int \frac{du}{\sqrt{u}} + \int u^{\frac{3}{2}} du =$$

$$-2\sqrt{u} + \tfrac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} + C = -2\sqrt{\cos x} + \tfrac{2}{5}\cos^{\frac{5}{2}} x + C.$$

a") $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$

Sea $x = \dfrac{1}{t}$, $dx = -\dfrac{1}{t^2}\,dt$, $x\sqrt{1+x^2} = \dfrac{1}{t}\sqrt{1+\dfrac{1}{t^2}} = \dfrac{1}{t|t|}\sqrt{t^2+1}$, entonces:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = -\int \frac{dt}{t^2\frac{1}{t|t|}\sqrt{t^2+1}} = \begin{cases} -\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}, & \text{si } t > 0 \\ \displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}, & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

$$= -\operatorname{signo}(t)\ln|t + \sqrt{t^2+1}| + C = -\operatorname{signo}(x)\ln\left|\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}\right| + C$$

$$= \begin{cases} \ln\left|\dfrac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}\right| + C, & \text{si } x > 0 \\ -\ln\left|\dfrac{x}{1-\sqrt{x^2+1}}\right| + C, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

b") $I = \displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Sea $x = \operatorname{sen} y$, $dx = \cos y\,dy$, entonces:

$$I = \int \frac{\operatorname{sen}^2 y\cos y\,dy}{\cos y} = \int \operatorname{sen}^2 y\,dy = \int \tfrac{1}{2}(1+\cos 2y)\,dy = \tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2y + C =$$

$$\tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} y\cos y + C = \tfrac{1}{2}\operatorname{arcsen} x - \tfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C.$$

c") $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{2-x^2}}\,dx$

Tomemos $x = \sqrt{2}\operatorname{sen} y$, $dx = \sqrt{2}\cos y\,dy$, $\sqrt{2-x^2} = \sqrt{2}\cos y$, entonces:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{2-x^2}}\,dx = \int \frac{2\sqrt{2}\operatorname{sen}^3 y\,\sqrt{2}\cos y\,dy}{\sqrt{2}\cos y} = 2\sqrt{2}\int \operatorname{sen}^3 y\,dy = 2\sqrt{2}\int \operatorname{sen} y(1-\cos^2 y)\,dy =$$

$$2\sqrt{2}\int \operatorname{sen} y\,dy + 2\sqrt{2}\int \cos^2 y(-\operatorname{sen} y\,dy) = -2\sqrt{2}\cos y + \frac{2\sqrt{2}}{3}\cos^3 y + C =$$

$$-2\sqrt{2-x^2} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\frac{2-x^2}{2}\right)\frac{\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{2}} + C = -\tfrac{4}{3}\sqrt{2-x^2} - \tfrac{1}{3}x^2\sqrt{2-x^2} + C.$$

d") $I = \displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx$

Sea $x = a\sec t$, $dx = -a\sec t\tan t\,dt$, $\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2\sec^2 t - a^2} = a\tan t$, entonces:

$I = -\displaystyle\int \frac{a\tan t}{a\sec t} a\sec^2 t\tan t\,dt = -a\int \tan^2 t\,dt = a^2\int (1-\sec^2 t)\,dt = -a(t-\tan t) + C =$

$-a\left(\operatorname{arcsec}\frac{x}{a} - \dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right) + C = \sqrt{x^2-a^2} - a\operatorname{arcsec}\frac{x}{a} + C.$

e”) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

Consideremos el cambio de variable $x = \sec t$, entonces:

$\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\sec t\tan t\,dt}{\sec t\tan t} = \int dt = t + C = \operatorname{arcsec} x + C.$

f”) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

Sea $z = \frac{1}{x}$, $dz = -\frac{1}{x^2}\,dx$, $dx = -\frac{1}{z^2}\,dz$, entonces:

$\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = -\int \frac{\frac{1}{z^2}\,dz}{\frac{1}{z^2}\sqrt{4-\frac{1}{z^2}}} = -\int \frac{z\,dz}{\sqrt{4z^2-1}} = -\frac{1}{8}\int \frac{8z\,dz}{\sqrt{4z^2-1}} = -\frac{1}{8}2\sqrt{4z^2-1} + C = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x} +$
C.

g”) $I = \displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

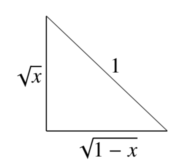
Tomemos $x = \operatorname{sen} t$, $dx = \cos t\,dt$, entonces:

$I = \displaystyle\int \cos^2 t\,dt = \int \tfrac{1}{2}(1+\cos 2t)\,dt = \tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2t + C = \tfrac{1}{2}\operatorname{arcsen} x + \tfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C$, ya que $\operatorname{sen} 2t = 2\operatorname{sen} t\cos t = 2x\sqrt{1-x^2}$.

h”) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(1-x)}$

Sea $x = \operatorname{sen}^2 t$, $dx = 2\operatorname{sen} t\cos t\,dt$, entonces:

$\displaystyle\int \frac{dx}{x(1-x)} = \int \frac{2\operatorname{sen} t\cos t\,dt}{\operatorname{sen}^2 t\cos^2 t} = 2\int \frac{2\,dt}{\operatorname{sen} 2t} = \int \left(\frac{\cos t}{\operatorname{sen} t} + \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}\right) dt =$



$\log|\operatorname{sen} t| - \log|\cos t| + C = \log|\tan t| + C = \log\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} + C.$

i”) $\displaystyle\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx$

Sea $x = a\operatorname{sh} t$, $\sqrt{a^2+x^2} = a\operatorname{ch} t$, $dx = a\operatorname{ch} t\,dt$, entonces:

$\displaystyle\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \int a^2\operatorname{ch}^2 t\,dt = a^2\int \tfrac{1}{2}(\operatorname{ch} 2t + 1)\,dt = \tfrac{1}{2}a^2(\tfrac{1}{2}\operatorname{sh} 2t + t) + C =$

$\tfrac{1}{2}a^2(\operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t + t) + C = \tfrac{1}{2}x\sqrt{a^2+x^2} + \tfrac{1}{2}a^2\ln(x + \sqrt{a^2+x^2}) + C$, pues:

$e^t = \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t = \tfrac{1}{2}(x + \sqrt{x^2+a^2})$, es decir $t = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2})$.

j”) $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$

Sea $x = a\operatorname{ch} t$, $dx = a\operatorname{sh} t$, entonces:

$\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{a^3\operatorname{ch}^2 t\operatorname{sh} t\,dt}{a\operatorname{sh} t} = a^2\int \tfrac{1}{2}(1+\operatorname{ch}2t)\,dt = a^2(\tfrac{1}{2}t+\tfrac{1}{4}\operatorname{sh}2t)+C =$
$a^2(\tfrac{1}{2}t+\tfrac{1}{2}\operatorname{sh} t\operatorname{ch} t)+C = \tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2}+\tfrac{1}{2}a^2\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C.$

2. Determine las siguientes integrales usando integración por partes:

a) $\displaystyle\int \operatorname{arcsen} x\,dx$

b) $\displaystyle\int x\operatorname{sen} x\,dx$

c) $\displaystyle\int x\cos 3x\,dx$

d) $\displaystyle\int x2^{-x}\,dx$

e) $\displaystyle\int (x^2-2x+5)e^{-x}dx$

f) $\displaystyle\int x\operatorname{sen} x\cos x\,dx$

g) $\displaystyle\int (x^2+5x+6)\cos 2x\,dx$

h) $\displaystyle\int x\arctan x\,dx$

i) $\displaystyle\int x\operatorname{arcsen} x\,dx$

j) $\displaystyle\int x^3e^{-x^2}\,dx$

k) $\displaystyle I=\int \frac{\operatorname{arcsen} x}{x}\,dx$

l) $\displaystyle\int \operatorname{sen} y\,e^y\,dy$

m) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx$

n) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arcsen}\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx.$

o) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx$

p) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$

q) $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$

r) $\displaystyle\int \sqrt{a+x^2}\,dx$

s) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx.$

Solución

a) $\displaystyle\int \operatorname{arcsen} x\,dx$

Sea $u=\operatorname{arcsen} x$, $x=\operatorname{sen} u$, $du=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$, $dv=dx$, $v=x$, entonces:

$$\int \operatorname{arcsen} x\,dx = x\operatorname{arcsen} x-\frac{1}{2}\int\frac{2x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = x\operatorname{arcsen} x+\sqrt{1-x^2}+C.$$

b) $\displaystyle\int x\operatorname{sen} x\,dx$

Sea $u=x$, $dv=\operatorname{sen} x\,dx$, $du=dx$, $v=-\cos x$ y nos queda:

$$\int x\operatorname{sen} x\,dx = -x\cos x-\int\cos x\,dx = \operatorname{sen} x-x\cos x+C.$$

c) $\displaystyle\int x\cos 3x\,dx$

Consideremos $v=x$, $du=\cos 3x\,dx$, $u=\frac{1}{3}\operatorname{sen}3x$, $dv=dx$, luego:

$$\int x\cos 3x\,dx = \tfrac{1}{3}x\operatorname{sen}3x-\tfrac{1}{3}\int\operatorname{sen}3x\,dx = \tfrac{1}{3}x\operatorname{sen}3x+\tfrac{1}{9}\cos 3x+C$$

d) $\displaystyle\int x2^{-x}\,dx = \int xe^{-x\ln 2}\,dx$

Tomemos $x = v$, $du = \dfrac{e^{-x\ln 2}(\ln 2\, dx)}{\ln 2}$, $dx = dv$, $u = -\dfrac{1}{\ln 2}e^{-x\ln 2} = -\dfrac{1}{\ln 2}2^{-x}$, entonces:

$\displaystyle\int xe^{-x\ln 2}\,dx = -\frac{1}{\ln 2}xe^{-x} + \frac{1}{\ln 2}\int e^{-x\ln 2}\,dx = -\frac{x2^{-x}}{\ln 2} - \frac{1}{\ln^2 2}2^{-x} + C.$

e) $\displaystyle\int (x^2 - 2x + 5)e^{-x}dx$

Sea $x^2 = u$, $e^{-x}dx = dv \Longrightarrow du = 2xdx$, $v = -e^{-x}$, entonces:

$\displaystyle\int x^2e^{-x}dx = -x^2e^{-x} + 2\int e^{-x}xdx + C'.$

Ahora si $u = x$, $e^{-x}dx = dv \Longrightarrow du = dx$, $v = -e^{-x}$ y $\displaystyle\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + e^{-x} + C''.$

Finalmente, $\displaystyle\int (x^2 - 2x + 5)e^{-x}dx = e^{-x}(x^2 + 5) + C.$

f) $\displaystyle\int x\operatorname{sen} x\cos x dx$

Tomemos $x = u$, $du = \operatorname{sen} 2xdx \Longrightarrow dx = du$, $u = -\frac{1}{2}\cos 2x$, as tenemos $\displaystyle\int x\operatorname{sen} x\cos xdx =$ $\displaystyle\frac{1}{2}\int x\operatorname{sen} 2xdx = \frac{1}{2}(-x\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\int\cos 2xdx) = \frac{1}{4}(\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x - x\cos 2x) + C.$

g) $\displaystyle\int (x^2 + 5x + 6)\cos 2xdx$

Si tomamos $x = v$, $dv = \cos 2x\,dx \Longrightarrow dv = 2xdx$, $v = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$ y tenemos:

$\displaystyle\int x^2\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}x^2\operatorname{sen} 2x - \int x\operatorname{sen} 2x\,dx = \frac{1}{2}x^2\operatorname{sen} 2x - (-\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx) =$ $\frac{1}{2}x^2\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{2}x\cos 2x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C'.$

Adems, $\displaystyle\int x\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}x\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{4}\int 2\operatorname{sen} 2x\,dx = \frac{1}{2}x\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C''.$

Finalmente, $\displaystyle\int (x^2 + 5x + 6)\cos 2x\,dx = (\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{11}{4})\operatorname{sen} 2x + (\frac{1}{2}x + \frac{5}{4})\cos 2x + C.$

h) $\displaystyle\int x\arctan x\,dx$

Sea $v = \arctan x$, $dv = \dfrac{dx}{1 + x^2}$, $dv = x\,dx$, $v = \frac{1}{2}x^2$, entonces:

$\displaystyle\int x\arctan x\,dx = \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1 + x^2}\,dx = \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1}{1 + x^2}\right)dx =$ $\frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan x + C.$

i) $\displaystyle\int x\operatorname{arcsen} x\,dx.$

Definiendo $u = \operatorname{arcsen} x$, $dv = x\,dx \Longrightarrow du = \dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$, $v = \frac{1}{2}x^2$, entonces:

$\displaystyle\int x\operatorname{arcsen} x\,dx = \frac{1}{2}x^2\operatorname{arcsen} x - \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx = \frac{1}{2}x^2\operatorname{arcsen} x + \frac{1}{2}\int(\sqrt{1 - x^2} - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}})\,dx =$ $\frac{1}{2}x^2\operatorname{arcsen} x + \frac{1}{4}x\sqrt{1 - x^2} - \frac{1}{4}\operatorname{arcsen} x + C$, ya que:

$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = -\int \cos^2 t\,dt = -\frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)\,dt = -\frac{1}{2}(t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t) + C' =$
$-\frac{1}{2}(t + \operatorname{sen} t \cos t) + C' = -\frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C.$

j) $\int x^3 e^{-x^2}\,dx$

Sea $y = x^2$, $dy = 2x\,dx$, entonces $\int x^3 e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int y e^{-y}\,dy = \frac{1}{2}\big(-ye^{-y} + \int e^{-y}\,dy\big) =$
$-\frac{1}{2}(ye^{-y} - e^{-y}) + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2}(x^2+1) + C.$

k) $I = \int \frac{\operatorname{arcsen} x}{x}\,dx$

Sea $v = \operatorname{arcsen} x \Longrightarrow dv = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $\frac{1}{x^2}\,dx = dv \Longrightarrow -\frac{1}{x} = v$, entonces:

$I = -\frac{\operatorname{arcsen} x}{x} + \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\operatorname{arcsen} x}{x} + \ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right| + C$, ya que si definimos $x = \operatorname{sen} y$, $dx = \cos y\,dy$, $\sqrt{1-x^2} = \cos y$ y la integral $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\cos y\,dy}{\operatorname{sen} y \cos y} = \ln\left|\tan \frac{1}{2}y\right| + C' =$
$\ln\left|\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}y}{\cos \frac{1}{2}y}\right| + C' = \ln\left|\frac{\operatorname{sen} y}{\cos^2 \frac{1}{2}y}\right| + C = \ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right| + C.$

l) $\int \operatorname{sen} y\, e^y\,dy = e^y \operatorname{sen} y - \int e^y \cos y\,dy = e^y \operatorname{sen} y - e^y \cos y - \int \operatorname{sen} y\, e^y\,dy + C' \Longrightarrow$
$2\int \operatorname{sen} y\, e^y\,dy = e^y(\operatorname{sen} y - \cos y) + C'$, es decir $\int \operatorname{sen} y\, e^y\,dy = \frac{1}{2}e^y(\operatorname{sen} y - \cos y) + C.$

m) $\int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx$

Sea $y = \ln x$, $dy = \frac{1}{x}\,dx$ i.e. $dx = e^y\,dy$ y tenemos que:

$\int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx = \int \operatorname{sen} y\, e^y\,dy = \frac{1}{2}e^y(\operatorname{sen} y - \cos y) + C = \frac{1}{2}x(\operatorname{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)) + C$, usando el ejercicio 2l).

n) $\int \frac{\operatorname{arcsen}\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx.$

Sea $v = \operatorname{arcsen}\sqrt{x}$, $du = \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$, $u = -2\sqrt{1-x}$, $dv = \frac{1}{2\sqrt{1-x}}\frac{dx}{\sqrt{x}}$, entonces:

$\int \frac{\operatorname{arcsen}\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx = -2\sqrt{1-x}\operatorname{arcsen}\sqrt{x} + \int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = -2\sqrt{1-x}\operatorname{arcsen}\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C.$

o) $\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx$

Sea $u = x$, $du = \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} \Longrightarrow du = dx$, $u = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1} \Longrightarrow$

$\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx = -\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + C.$

p) $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{x^2+a^2-x^2}{(x^2+a^2)^2}\,dx = \frac{1}{a^2}\int \left(\frac{1}{x^2+a^2} - \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}\right)dx =$
$\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} - \frac{1}{2a}\arctan\frac{x}{a} + \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+a^2}\right) + C = \frac{1}{2a^2}\left(\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + \frac{x}{x^2+a^2}\right) + C.$

q) $\displaystyle\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$

Sea $x = a \operatorname{sen} y$, $dx = a \cos y\, dy$ y tenemos $\displaystyle\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = a^2 \int \cos^2 y\, dy =$

$\frac{1}{2}a^2 \displaystyle\int (1 + \cos 2y)\, dy = \frac{1}{2}a^2(y + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2y) + C = \frac{1}{2}a^2(y + \operatorname{sen} y \cos y) + C =$

$\frac{1}{2}a^2 \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} + \frac{1}{2}x \sqrt{a^2 - x^2} + C.$

r) $\displaystyle\int \sqrt{a + x^2}\, dx$

Sea $\dfrac{x}{\sqrt{a}} = y$, $\dfrac{dx}{\sqrt{a}}\, dy$, entonces $\displaystyle\int \sqrt{a + x^2}\, dx = a \int \sqrt{1 + y^2}\, dy = a(y \sqrt{1 + y^2} - \int \frac{y^2}{\sqrt{1 + y^2}}\, dy)$, usando integraci¢n por partes al definir $u = \sqrt{1 + y^2}$, $dy = dv$, pues $du = \dfrac{y}{1 + y^2}\, dy$, $y = v$.

Observemos que $\dfrac{y^2}{\sqrt{1 + y^2}} = \dfrac{y^2 + 1 - 1}{\sqrt{1 + y^2}} = \sqrt{1 + y^2} - \dfrac{1}{\sqrt{1 + y^2}}$, con lo cual tenemos:

$\displaystyle\int \sqrt{1 + y^2}\, dy = \frac{1}{2}y \sqrt{1 + y^2} + \frac{1}{2} \ln(y + \sqrt{1 + y^2})$ y $\displaystyle\int \frac{dy}{\sqrt{1 + y^2}} = \ln(y + \sqrt{1 + y^2})$.

Finalmente,

$\displaystyle\int \sqrt{a + x^2}\, dx = a(y \sqrt{1 + y^2} - \frac{1}{2}y \sqrt{1 + y^2} - \frac{1}{2} \ln(y + \sqrt{1 + y^2}) + \ln(y + \sqrt{1 + y^2}) + C' =$

$a\big(\frac{1}{2}y \sqrt{1 + y^2} + \frac{1}{2} \ln(y + \sqrt{1 + y^2})\big) + C' = \frac{1}{2}x \sqrt{a + x^2} + \frac{1}{2}a \ln |x + \sqrt{a + x^2}| - \frac{1}{2}a \ln \sqrt{a} + C' =$

$\frac{1}{2}x \sqrt{a + x^2} + \frac{1}{2}a \ln |x + \sqrt{a + x^2}| + C.$

s) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{9 - x^2}}\, dx$

Sea $x = 3 \operatorname{sen} u$, $dx = 3 \cos u\, du$, entonces $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{9 - x^2}}\, dx = 9 \int \operatorname{sen}^2 u\, du = \frac{9}{2} \int (1 - \cos 2u)\, du =$

$\dfrac{9}{2}(u - \dfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2u) + C = \dfrac{9}{2}\Big(\operatorname{arcsen} \frac{x}{3} - \frac{x}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{9 - x^2}}{3}\Big) + C = \dfrac{9}{2} \operatorname{arcsen} \frac{x}{3} - \dfrac{1}{2}x \sqrt{9 - x^2} + C.$

3. Calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$

b) $\displaystyle\int \frac{x^2\, dx}{x^2 - 6x + 10}$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + px + q}}$

d) $\displaystyle\int \frac{2x - 8}{\sqrt{-x - x^2}}\, dx$

e) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x + 1) \sqrt{x^2 + 2x}}$

f) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x - 1) \sqrt{x^2 - 2}}$

g) $\displaystyle\int \frac{\cos x\, dx}{\operatorname{sen}^2 - 6 \operatorname{sen} x + 12}$

h) $\displaystyle\int \frac{\ln x\, dx}{x \sqrt{1 - 4 \ln x - \ln^2 x}}$.

Solución

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} = \int \frac{dx}{(x + 1)^2 + 4} = \frac{1}{2} \arctan \frac{x + 1}{2} + C.$

b) $\displaystyle\int \frac{x^2\, dx}{x^2 - 6x + 10} = \int \frac{x^2\, dx}{x^2 - 6x + 10} = \int (1 + \frac{6x - 10}{x^2 - 6x + 10})\, dx =$

$$\int (1+\frac{3(2x-6)}{x^2-6x+10}+\frac{8}{(x-3)^2+1})\,dx = x+3\ln(x^2-6x+10)+8\arctan(x-3)+C.$$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}} = \ln(\sqrt{x^2+px+q}+x+\tfrac{1}{2}p)+C.$

d) $\displaystyle\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}\,dx$

Se tiene que $1-x-x^2=\frac{5}{4}-(x+\frac{1}{2})^2$ y si $v=1-x-x^2$, $dv=-(1+2x)\,dx$, por lo que $\displaystyle\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}\,dx =$ $\displaystyle -\int \frac{-(2x+1)\,dx}{\sqrt{1-x-x^2}} - \int \frac{9\,dx}{\sqrt{\frac{5}{4}-(x+\frac{1}{2})^2}} = -2\sqrt{1-x-x^2}-9\,\mathrm{arcsen}\,\frac{2x+1}{\sqrt{5}}+C.$

e) $\displaystyle I=\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}$

Consideramos el cambio de variable $\frac{1}{x+1}=t$, $dx=-\frac{1}{t^2}dt$, $x=\frac{1}{t}-1=\frac{1-t}{t}$, $x^2+2x=\frac{1-t^2}{t^2}$, entonces:

$$I=\int \frac{-\frac{1}{t^2}\,dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1-t^2}{t^2}}} = -\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = -\,\mathrm{arcsen}\,t + C = -\,\mathrm{arcsen}\,\frac{1}{x+1}+C.$$

f) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$

Es caro que $|x|>\sqrt{2}$. Sea $t=\frac{1}{t-1}$, $x=1+\frac{1}{t}=\frac{t+1}{t}$, $dx=-\frac{1}{t^2}dt$, $x^2-2=\frac{(t+1)^2}{t^2}-2=\frac{2-(t+1)^2}{t^2}$, $t-1=\frac{1}{x-1}-1=\frac{2-x}{x-1}$, con lo cual tenemos que:

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}} = \int \frac{-\frac{1}{t^2}\,dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1+2t-t^2}{t^2}}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{2-(t-1)^2}} = -\,\mathrm{arcsen}\,\frac{t-1}{\sqrt{2}}+C =$$

$\displaystyle \mathrm{arcsen}\,\frac{2-x}{(1-x)\sqrt{2}}+C.$

g) $\displaystyle\int \frac{\cos x\,dx}{\mathrm{sen}^2\,x-6\,\mathrm{sen}\,x+12}.$

Sea $v=\mathrm{sen}\,x$, $dv=\cos x\,dx$, entonces $\displaystyle\int \frac{\cos x\,dx}{\mathrm{sen}^2\,x-6\,\mathrm{sen}\,x+12}=\int \frac{dv}{v^2-6v+12}=$ $\displaystyle\int \frac{dv}{(v-3)^2+3}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{v-3}{\sqrt{3}}+C=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\mathrm{sen}\,x-3}{\sqrt{3}}+C.$

h) $\displaystyle I=\int \frac{\ln x\,dx}{x\sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x}}$

Se considera el cambio de variable $v=\ln x$, $dv=\frac{1}{x}\,dx$, entonces:

$$I=\int \frac{v\,dv}{\sqrt{1-4v-v^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{-(2v+4)dv}{\sqrt{1-4v-v^2}} - 2\int \frac{dv}{\sqrt{5-(v+2)^2}} =$$

$$-\sqrt{1-4v-v^2}-2\,\mathrm{arcsen}\,\frac{v+2}{\sqrt{5}}+C = -\sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x}-2\,\mathrm{arcsen}\,\frac{\ln x+2}{\sqrt{5}}+C.$$

4. Calcule las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$, con $a \neq b$

b) $\displaystyle\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^4-1}\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-4x+3)(x^2+4x+5)}$

f) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+1}$

g) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$

h) $\displaystyle\int \frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2}\,dx$

i) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+x+1)^2}$

j) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2}$

k) $\displaystyle\int \frac{7x+13}{x^2+12x+52}dx$

l) $\displaystyle\int \frac{x^4-2x^2+2}{(x^2-2x+2)^2}dx$

m) $\displaystyle\int \frac{x^5\,dx}{(x^3+1)(x^3+8)}$

n) $\displaystyle\int \frac{x^7+x^3}{x^{12}-2x^4+1}dx$

o) $\displaystyle\int \frac{x^2-x+14}{(x-4)^3(x-2)}dx$

p) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4(x^3+1)^2}$

q) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3-4x^2+5x-2}$

r) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^7+1)}$

s) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^5+1)^2}$

t) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+2x+2)(x^2+2x+5)}$

u) $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(x-1)^{10}}$

v) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^6+x^8}$

w) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}\,dx$

x) $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{ax+b}}$

y) $\displaystyle\int \frac{2x^3+x+3}{(1+x^2)^2}\,dx$

z) $\displaystyle\int \frac{x\ln x\,dx}{(1+x^2)^2}$

a') $\displaystyle\int \frac{4}{x^3+4x}dx$

b') $\displaystyle\int \frac{x+2}{x+1}dx$

c') $\displaystyle\int \frac{dx}{-x^2-x+2}$

d') $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x^2-x-1}dx$

e') $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x^2+1)^2}\,dx$

f') $\displaystyle\int \frac{dx}{x(1+x^2)}$

g') $\displaystyle\int \frac{x^3}{(1+x^2)^3}\,dx$

h') $\displaystyle\int \frac{x^5}{(x^2+1)^3}dx$

i') $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{x^3-1}dx$

j') $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x-1)^6}dx$

k') $\displaystyle\int \frac{2x^2-2+2}{2x-3}dx$

l') $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^4+x^2-2}dx$

m') $\displaystyle\int \frac{x}{x^4-x^2-2}dx$

n') $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx,\ a \neq b.$

o') $\displaystyle\int \frac{8x^2}{(x^3+2)^3}dx$

p') $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^4-1}dx$

q') $\displaystyle\int \frac{x}{x^4-1}dx$

r') $\displaystyle\int \frac{1+x}{x(1+x^2)}dx$

s') $\displaystyle\int \frac{1+x}{(x-1)^2}dx$

t') $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^3-8}dx$

u') $\displaystyle\int \frac{x^5}{(x^2-1)(x+1)}dx$ v') $\displaystyle\int \frac{2x^3-2x^2-2x+1}{x^4-2x^3+x^2}dx$

w') $\displaystyle\int \frac{3x^2}{x^4+5x^2+4}dx$ x') $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}dx$

Solución

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$, con $a \neq b$.

Se descompone al integrarlo $\dfrac{1}{(x+a)(x+b)} = \dfrac{A}{x+a} + \dfrac{B}{x+b} \Longrightarrow 1 = A(x+b) + B(x+a)$.

Si $x = -a$, $A = \dfrac{1}{b-a}$ y $B = \dfrac{1}{a-b}$ por lo que:

$\displaystyle\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{b-a}\int \frac{dx}{x+a} - \frac{1}{b-a}\int \frac{dx}{x+b} = \frac{1}{b-a}\ln\left|\frac{x+a}{x+b}\right| + C$, si $a \neq b$.

b) $\displaystyle\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}\,dx$.

Dividiendo los polinomios del integrado tenemos:

$\dfrac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6} = 1 + \dfrac{3}{x^2-5x+6}$ y como $\dfrac{3}{(x-2)(x-3)} = -\dfrac{3}{x-2} + \dfrac{3}{x-3}$, entonces:

$\displaystyle\int \frac{x^2-5x+4}{x^2-5x+6}\,dx = \int (1 - \frac{3}{x-2} + \frac{3}{x-3})\,dx = x - 3\ln|x-2| + 3\ln|x-3| + C =$

$x + 3\ln|\dfrac{x-3}{x-2}| + C$.

c) $\displaystyle\int \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2}\,dx$.

Si expresamos $\dfrac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2} = \dfrac{a}{x-3} + \dfrac{b}{(x-3)^2} + \dfrac{c}{x+1} + \dfrac{d}{(x+1)^2}$, se tiene que:

$$5x^2+6x+9 = a(x-3)(x+1)^2 + b(x+1)^2 + c(x+1)(x-3)^2 + d(x-2)^2. \qquad (1)$$

Si $x = 3$, tenemos que $16b = 72 \Longrightarrow b = \frac{9}{2}$.

Si $x = -1$, $16d = 8 \Longrightarrow d = \frac{1}{2}$.

Desarrollando la expresi¢n de la derecha de (1) obtenemos que:

$5x^2 + 6x + 9 = (a+c)x^3 + (-a+b-5c+d)x^2 + (2b+3c-6d)x - 3a + b + 9c + 9d \Longrightarrow a + c = 0$,

$b - 4c + \frac{1}{2} = 5 \Longrightarrow c = 0 = a$.

As, $\displaystyle\int \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2}\,dx = \frac{9}{2}\int \frac{dx}{(x-3)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1)^2} = -\frac{9}{2(x+3)} - \frac{1}{2(x+1)} + C.$

d) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^4-1}\,dx = \int \left(1 + \frac{1}{x^4-1}\right)dx.$

Consideramos la expresi¢n $\dfrac{1}{x^4-1} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{cx+d}{x^2+1} \Longleftrightarrow$

$1 = a(x+1)(x^2+1) + b(x-1)(x^2+1) + (cx+d)(x^2+1)$.

Si $x = 1 \Longrightarrow a = \frac{1}{4}$ y si $x = -1$, $b = -\frac{1}{4}$. Desarrollando la igualdad tenemos:

$(a+b+c)x^3 + (a-b+d)x^2 + (a+b-c)x + a - b - d = 1 \Longrightarrow c = 0$, $d = -\frac{1}{2}$, de donde $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^4-1}\,dx =$

$x + \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+1} = x + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\arctan x + C.$

e) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-4x+3)(x^2+4x+5)}.$

Se sabe que la descomposici¢n de fracciones parciales nos lleva a escribir:

$\dfrac{1}{(x-3)(x-1)(x^2+4x+5)} = \dfrac{a}{x-3}\dfrac{b}{x-1}\dfrac{cx+d}{x^2+4x+5} \Longleftrightarrow$
$1 = a(x-1)(x^2+4x+5) + b(x-3)(x^2+4x+5) + (cx+d)(x-3)(x-1).$

Si $x = 1$, $b = -\frac{1}{20}$ y si $x = 3$, $a = \frac{1}{52}$.

Si desarrollamos la igualdad se tiene:

$1 = (a+b+c)x^3 + (3a-b-4c+d)x^2 + (a-7b+3c-4d)x - 5a - 15b + 3d = 1.$

As tenemos que $a+b+c = 0 \Longrightarrow c = \frac{2}{65}$ y $d = \frac{3}{26}$, lo que nos lleva a escribir:

$\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-4x+3)(x^2+4x+5)} = \frac{1}{52}\ln|x-3| - \frac{1}{20}\ln|x-1| + \int \frac{\frac{2}{65}x + \frac{3}{26}}{(x+2)^2+1}\,dx =$

$\displaystyle\frac{1}{52}\ln|x-3| - \frac{1}{20}\ln|x-1| + \frac{1}{65}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,dx + \int \frac{\frac{7}{30}}{(x+2)^2+1}\,dx =$

$\frac{1}{52}\ln|x-3| - \frac{1}{20}\ln|x-1| + \frac{1}{65}\ln(x^2+4x+5) + \frac{7}{30}\arctan(x+2) + C.$

f) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+1}$

Recordemos que $x^4+1 = (x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$, por lo que podemos escribir:

$\dfrac{1}{x^4+1}\dfrac{ax+b}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \dfrac{cx+d}{x^2-\sqrt{2}x+1} \Longleftrightarrow 1 = (ax+b)(x^2-\sqrt{2}x+1) + (cx+d)(x^2+\sqrt{2}x+1) \Longleftrightarrow$
$1 = x^3(a+c) + x^2(d+\sqrt{2}c+d-\sqrt{2}a) + x(a-\sqrt{2}b+c+\sqrt{2}d) + b + d \Longrightarrow a = -c,\ b+d = 1,$
$2\sqrt{2}c = 1 \Longrightarrow c = -\frac{\sqrt{2}}{4},\ a = \frac{\sqrt{2}}{4},\ d = \frac{1}{2},\ b = \frac{1}{2}.$

Por consiguiente, $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+1} = \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx + \int \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx =$

$\displaystyle\frac{\sqrt{2}}{8}\int \frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx + \int \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}{(x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}\,dx - \frac{\sqrt{2}}{8}\int \frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx + \int \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}{(x-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}\,dx =$

$\dfrac{\sqrt{2}}{8}\ln\dfrac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \dfrac{\sqrt{2}}{4}\big(\arctan(\sqrt{2}x+1) + \arctan(\sqrt{2}x-1)\big)$, pero como

$\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\sqrt{2}x+1+\sqrt{2}x-1}{1-2x^2+1} = \dfrac{\sqrt{2}x}{1-x^2} \Longrightarrow \alpha+\beta = \arctan\dfrac{\sqrt{2}x}{1-x^2}$, es decir:

$\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\frac{\sqrt{2}x}{1-x^2} + C.$

g) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$

Recordemos que $x^4+x^2+1 = (x^2+x+1)(x^2-x+1)$, por lo que:

$\dfrac{1}{x^4+x^2+1} = \dfrac{ax+b}{x^2+x+1} + \dfrac{cx+d}{x^2-x+1} \Longleftrightarrow 1 = (ax+b)(x^2-x+1) + (cx+d)(x^2+x+1) \Longleftrightarrow$

$1 = (a+c)x^3 + (-a+b+c+d)x^2 + (a-b+c+d)x + b + d \Longrightarrow a = -c,\, b = d,\, 2b = 1 \Longrightarrow b = \frac{1}{2},\, d = \frac{1}{2}$

i.e. $2c = -1$, es decir $c = -\frac{1}{2}$, $a = \frac{1}{2}$.

Por £ltimo, $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{x-1}{x^2-x+1}\,dx =$

$\frac{1}{4}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} - \frac{1}{4}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} =$

$\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} + \frac{1}{4}\Big(\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\Big)\frac{2}{\sqrt{3}} + C =$

$\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{\sqrt{3}x}{1-x^2} + C.$

h) $\int \frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+2)^2}\,dx + \int \frac{2\,dx}{(x^2+2x+2)^2}$, pero

$\int \frac{2\,dx}{((x+1)^2+1)^2} = \int \frac{2\,dz}{(z^2+1)^2} = 2\int \frac{1+z^2}{(z^2+1)^2}\,dz - 2\int \frac{z^2}{1+z^2}\,dz =$

$-2\int \frac{dz}{z^2+1} - 2\int z\frac{z\,dz}{(z^2+1)^2} = 2\arctan z - 2\Big(-\arctan z - \frac{z}{2(z^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan z\Big) + C' =$

$\frac{z}{z^2+1} + \arctan z + C' = \frac{x+1}{x^2+2x+2} + \arctan(x+1) + C'$ y finalmente:

$\int \frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2}\,dx = -\frac{3}{2(x^2+2x+2)} + \frac{x+1}{x^2+2x+2} + \arctan(x+1) + C =$

$\frac{2x-1}{2(x^2+2x+2)} + \arctan(x+1) + C.$

i) $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+x+1)^2}$

Usando fracciones parciales podemos escribir:

$\frac{1}{(x+1)(x^2+x+1)^2} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1} + \frac{dx+e}{(x^2+x+1)^2} \Longleftrightarrow$

$1 = a(x^2+x+1)^2 + (bx+c)(x+1)(x^2+x+1) + (dx+e)(x+1).$

Si $x = -1$, $a = 1$ y desarrollando el trmino derecho de la igualdad se tiene:

$1 = (a+b)x^4 + (2a+2b+c)x^3 + (3a+2b+2c+d)^2 + (2a+b+2c+d+e)x + a + c + e,$

lo que implica $b = -1$, $c = 0$, $d = -1$, $e = 0$. As tenemos que la integral:

$\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+x+1)^2} = \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{x\,dx}{x^2+x+1} - \int \frac{x\,dx}{(x^2+x+1)^2}.$

Pero, $\int \frac{x\,dx}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+1)\,dx}{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}},$

$\int \frac{x\,dx}{(x^2+x+1)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+1)\,dx}{(x^2+x+1)^2} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{((x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4})^2} =$

$-\frac{2x+1}{2(x^2+x+1)} - \frac{2x+1}{\sqrt{3}(x^2+x+1)} - \frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$, ya que $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} =$

$\frac{1}{a^2}(\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + \frac{x}{x^2+a^2})$ (ver ejercicio 2p).

Finalmente, $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+2x+2)^2} = \ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+x+1} +$
$\displaystyle\frac{1}{2}\Big(\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big) + C =$
$\displaystyle\ln\frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{x+2}{3(x^2+x+1)} + \frac{5}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{5}} + C.$

j) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2}$

Consideremos la descomposici¢n siguiente:

$\displaystyle\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)^2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{cx+d}{x^2+1} + \frac{ex+1}{(x^2+1)^2} \Longleftrightarrow$
$1 = a(x+1)(x^2+1)^2 + b(x^2+1)^2 + (cx+d)(x+1)^2(x^2+1) + (ex+f)(x+1)^2 \Longleftrightarrow$

$1 = (a+c)x^5 + (a+b+2c+d)x^4 + (2a+2c+2d+e)x^3 + (2a+2b+2c+2d+2e+f)x^2 + (a+c+2d+$
$e+2f)x + a+b+d+f.$

Si $x=-1$, $b=\frac{1}{4}$, $a+c=0$, $b+c+d=0 \Longrightarrow 2d+e=0$, $2a+2e+f=0$, $2b+2d+2e+f=0$, $2d+e+2f=0 \Longrightarrow f=0$, $d=\frac{1}{4}$, $e=-\frac{1}{2}$, $a=\frac{1}{2}$, $c=-d-b=-\frac{1}{2}$, con lo que se tiene:

$\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{4}\Big(-\frac{1}{x+1}\Big) - \frac{1}{2}\int\frac{x-\frac{1}{2}}{x^2+1}\,dx - \frac{1}{2}\int\frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} =$
$\displaystyle\frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{4}\arctan x - \frac{1}{4}\frac{1}{x^2+1} + C =$
$\displaystyle\frac{-x^2+x}{4(x+1)(x^2+1)} - \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{4}\arctan x + C.$

k) $\displaystyle\int \frac{7x+13}{x^2+12x+52}dx = \frac{7}{2}\frac{2x+12}{x^2+12x+52}dx - \int\frac{29}{(x+6)^2+16}dx =$
$\displaystyle\frac{7}{2}\ln|x^2+12x+52| - \frac{29}{4}\arctan\frac{x+6}{4} + C.$

l) $\displaystyle\int \frac{x^4-2x^2+2}{(x^2-2x+2)^2}dx$

Dividiendo los polinomios tenemos:

$\displaystyle\frac{x^4-2x^2+2}{x^4-4x^3+8x^2-8x+4} = 1 + \frac{4x^3-10x^2+8x-2}{(x^2-2x+2)^2}$ y descomponemos
$\displaystyle\frac{4x^3-10x^2+8x-2}{(x^2-2x+2)^2} = \frac{ax+b}{x^2-2x+2} + \frac{cx+d}{(x^2-2x+2)^2} \Longleftrightarrow 4x^3-10x^2+8x-2 =$
$(ax+b)(x^2-2x+1) + cx+d = ax^3 + (b-2a)x^2 + (2a-2b+c)x + 2b+d \Longrightarrow a=4$, $b=2a-10=-2$, $c=-4$, $d=2$. As tenemos que:

$\displaystyle\int \frac{x^4-2x^2+2}{(x^2-2x+2)^2}\,dx = \int\left(1 + \frac{4x-2}{x^2-2x+2} + \frac{-4x+2}{(x^2-2x+2)^2}\right)dx =$
$\displaystyle x + 2\int\frac{2x-2}{x^2-2x+2} + 2\int\frac{dx}{(x-1)^2+1} - 2\int\frac{2x-2}{(x^2-2x+2)^2}\,dx - 2\int\frac{dx}{((x-1)^2+1)^2} =$
$\displaystyle x + 2\ln(x^2-2x+2) + 2\arctan(x-1) + \frac{2}{x^2-2x+2} - \frac{x-1}{(x-1)^2+1} - \arctan(x-1) + C =$
$\displaystyle x + 2\ln(x^2-2x+2) + \arctan(x-1) - \frac{x-3}{x^2-2x+2} + C$ (ver ejercicio 2p).

m) $\displaystyle\int \frac{x^5\,dx}{(x^3+1)(x^3+8)}$

Consideramos la expresi¢n:

$$\frac{x^5}{(x+1)(x+2)(x^2-x+1)(x^2-2x+4)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} + \frac{cx+d}{x^2-x+1} + \frac{ex+f}{x^2-2x+4} \Longleftrightarrow$$

$x^5 = a(x^3+8)(x^2-x+1) + b(x^3+1)(x^2-2x+4) + (cx+d)(x+1)(x^3+8) + (ex+f)(x^3+1)(x+2).$

Si $x=-1$, $a=-\frac{1}{4}$ y si $x=-2$, $-32=-84b \Longrightarrow b=\frac{8}{21}$. Desarrollando la igualdad tenemos:

$x^5 = (a+b+c+e)x^5 - (a+2b-c-d-2e+f)x^4 + (a+4b+d+2f)x^3 + (8a+b+8c+e)x^2 - (8a+2b-8c-8d-2e-f)x + (8a+4b+8d+2f).$

As, $c+e+\frac{1}{3}=1 \Longrightarrow c+e=\frac{2}{3}$ y $8c+e=0 \Longrightarrow c=-\frac{2}{21}$, $e=\frac{16}{21}$. Adems $d+2f-\frac{1}{21}+\frac{32}{21}=0$, $-\frac{8}{21}+\frac{32}{21}+8d+2f=0 \Longrightarrow d=\frac{1}{21}$, $f=-\frac{16}{21}$, por lo que:

$$\int \frac{x^5\,dx}{(x^3+1)(x^3+8)} = -\frac{1}{21}\ln|x+1| + \frac{8}{21}\ln|x+2| - \frac{1}{21}\ln|x^2-x+1| - \frac{8}{21}\ln|x^2-2x+4| + C = \frac{1}{21}\ln\frac{(x^3+8)^8}{|x^3+1|} + C.$$

n) $\displaystyle I = \int \frac{x^7+x^3}{x^{12}-2x^4+1}\,dx$

Sea $y=x^4$, $y^3-2y+1=(y-1)(y^2+y-1)$, $dy=4x^3\,dx$, entonces:

$$I = \frac{1}{4}\int \frac{(x^4+1)4x^3\,dx}{(x^4)^3-2x^4+1} = \frac{1}{4}\int \frac{(y+1)\,dy}{y^3-2y+1} = \frac{1}{4}\int \left(\frac{2}{y-1} - \frac{2y+3}{y^2+y-1}\right) dy =$$

$$\frac{1}{2}\ln|y-1| - \frac{1}{4}\int \frac{2y+1}{y^2+y-1}\,dy - \frac{1}{2}\int \frac{dy}{(y+\frac{1}{2})^2-\frac{5}{4}} =$$

$$\frac{1}{2}\ln|y-1| - \frac{1}{4}\ln|y^2+y-1| - \frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{y+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}{y+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}\right| + C =$$

$$\frac{1}{2}\ln|x^4-1| - \frac{1}{4}\ln|x^8+x^4-1| - \frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x^4+1-\sqrt{5}}{2x^4+1+\sqrt{5}}\right| + C.$$

o) $\displaystyle\int \frac{x^2-x+14}{(x-4)^3(x-2)}\,dx$

Sabemos que $\displaystyle\frac{x^2-x+14}{(x-4)^3(x-2)} = \frac{a}{x-4} + \frac{b}{(x-4)^2} + \frac{c}{(x-4)^3} + \frac{d}{x-2} \Longleftrightarrow$

$x^2-x+14 = a(x-4)^2(x-2) + b(x-4)(x-2) + c(x-1) + d(x-4)^3 =$

$(a+d)x^3 - (10a+12d-b)x^2 + (32a-6b+c+48d)x - 32a+2b-2c-64d.$

Si $x=4$, $26=2c \Longrightarrow c=13$, $x=2$, $16=-8d \Longrightarrow d=-2 \Longrightarrow a=2$, $b=-3$.

De esta forma tenemos que:

$$\int \frac{x^2-x+14}{(x-4)^3(x-2)}\,dx = 2\ln|x-4| + \frac{3}{x-4} - \frac{13}{2}\frac{1}{(x-4)^2} - 2\ln|x-2| + C =$$

$$2\ln\left|\frac{x-4}{x-2}\right| + \frac{3}{x-4} - \frac{13}{2(x-4)^2} + C.$$

p) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4(x^3+1)^2}$

Sea $y = x^3 + 1$, $dy = 3x^2\,dx \Longrightarrow \displaystyle\int \frac{dx}{x^4(x^3+1)^2} = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2\,dx}{x^6(x^3+1)^2} = \frac{1}{3}\int \frac{dy}{y^2(y-1)^2}$, que simplifica la expresi¢n. Ahora $\dfrac{1}{y^2(y-1)^2} = \dfrac{a}{y} + \dfrac{b}{y^2} + \dfrac{c}{y-1} + \dfrac{d}{(y-1)^2} \Longleftrightarrow$

$1 = ay(y-1)^2 + b(y-1)^2 + cy^2(1-y) + dy^2 \Longleftrightarrow 1 = (a-c)y^3 + (b+c+d-2a)y^2 + (a-2b)y + b.$

Si $y = 1$, $d = 1$ y si $y = 0$, $b = 1 \Longrightarrow a = c$, $b = 2$, por lo que:

$$\int \frac{dx}{x^4(x^3+1)^2} = \frac{1}{3}\Big(5\ln|y| - 2\ln|y-1| - \frac{1}{y-1}\Big) + C = \frac{1}{3}\Big(2\ln\frac{x^3+1}{x^3} - \frac{1}{x^3+1} - \frac{1}{x^3}\Big) + C.$$

q) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$

Sabemos que $\dfrac{1}{x^3-4x^2+5x-2} = \dfrac{1}{(x-2)(x-1)^2} = \dfrac{a}{x-2} + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{(x-1)^2} \Longleftrightarrow$

$1 = a(x-1)^2 + b(x-1)(x-2) + c(x-2) = (a+b)x^2 - (2a+3b+c)x + a + 2b - 2c.$

Si $x = 1$, $c = -1$ y si $x = 2$, $a = 1 \Longrightarrow b = -1$, de modo que:

$$\int \frac{dx}{x^3-4x^2+5x-2} = \ln|x-2| - \ln|x-1| + \frac{1}{x-1} + C = \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| + \frac{1}{x-1} + C.$$

r) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^7+1)} = \int \frac{x^7+1-x^7}{x(x^7+1)}\,dx = \int \Big(\frac{1}{x} - \frac{x^6}{x^7+1}\Big)\,dx = \ln|x| - \tfrac{1}{7}\ln|x^7-1| + C.$

s) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^5+1)^2}$

Sea $y = x^5 + 1$, $dy = 5x^4\,dx$ y tenemos

$$\int \frac{dx}{x(x^5+1)^2} = \frac{1}{5}\int \frac{5x^4\,dx}{x^5(x^5+1)^2} = \frac{1}{5}\int \frac{dy}{y^2(y-1)}.$$

As, $\dfrac{1}{y^2(y-1)} = \dfrac{a}{y} + \dfrac{b}{y^2} + \dfrac{c}{y-1} \Longleftrightarrow 1 = a(y-1)y + b(y-1) + cy^2 = (a+c)y^2 + (b-a)y - b \Longrightarrow b = -1.$

Si $y = 1$, $c = 1 \Longrightarrow a = -1$, por lo tanto:

$$\int \frac{dx}{x(x^5+1)^2} = \frac{1}{5}\Big(-\ln|y| + \frac{1}{y} + \ln|y-1|\Big) + C = \frac{1}{5}\Big(\ln\left|\frac{x^5}{x^5+1}\right| + \frac{1}{x^5+1}\Big) + C.$$

t) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+2x+2)(x^2+2x+5)}$

Descompongamos la expresi¢n:

$$\frac{1}{(x^2+2x+2)(x^2+2x+5)} = \frac{ax+b}{x^2+2x+2} + \frac{cx+d}{x^2+2x+5} \Longleftrightarrow$$

$1 = (ax+b)(x^2+2x+5) + (cx+d)(x^2+2x+2)$

$\quad = (a+c)x^3 + (2a+b+2c+d)x^2 + (5a+2b+2c+2d)x + 5b + 2d.$

As $a = -c$, $b = -d \Longrightarrow 5b + 2d = 1 \Longrightarrow 3b = 1$, $b = \frac{1}{3}$, $d = -\frac{1}{3}$. Adems, $5a + 2c = 0 \Longrightarrow a = c = 0$, con lo cual tenemos:

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+2)(x^2+2x+5)} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x+1)^2+1} - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x+1)^2+4} =$$

$$\frac{1}{3}\arctan(x+1) - \frac{1}{6}\arctan\Big(\frac{x+1}{2}\Big) + C.$$

u) $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(x-1)^{10}}$

Sea $y = x-1$, $x^2 = (y+1)^2 = y^2+2y+1$ y tenemos

$\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(x-1)^{10}} = \int \frac{(y^2+2y+1)}{y^{10}}\,dy = \int \left(\frac{1}{y^8}+\frac{2}{y^9}+\frac{1}{y^{10}}\right)dy = -\frac{1}{7y^7}-\frac{1}{4y^8}-\frac{1}{9y^9}+C =$

$\displaystyle -\frac{1}{9(x-1)^9}-\frac{1}{4(x-1)^8}-\frac{1}{7(x-1)^7}+C.$

v) $\displaystyle I = \int \frac{dx}{x^6+x^8} = \int \frac{dx}{x^6(1+x^2)}$

Sea $t = \frac{1}{x}$, $dx = \frac{1}{t^2}dt$, entonces:

$$I = \int \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t^6}+\frac{1}{t^8}} = -\int \frac{t^6dt}{t^2+1} = -\int \left(t^4-t^2+1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt = -\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}-t+\arctan t+C' =$$

$\displaystyle -\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{x}-\arctan x+C$, pues $\arctan x+\arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.

w) $\displaystyle I = \int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}\,dx$

Sea $y^2 = x-1 \Longrightarrow 2y\,dy = dx$, $(y^2+1)^3 = x^3$, de donde

$\displaystyle I = \int \frac{(y^2+1)^3}{y}2y\,dy = 2\int (y^6+3y^4+3y^2+1)\,dy = 2\left(\tfrac{1}{7}y^7+\tfrac{3}{5}y^5+y^3+y\right)+C =$

$2y\left(\tfrac{1}{7}y^6+\tfrac{3}{5}y^4+y^2+1\right)+C = 2\sqrt{x-1}\left(\tfrac{1}{7}(x-1)^3+\tfrac{3}{5}(x-1)^2+x\right)+C.$

x) $\displaystyle I = \int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{ax+b}}$

Sea $z^3 = ax+b$, $3z^2\,dz = a\,dx$, entonces $\displaystyle I = \int \frac{z^3-b}{a^2}\frac{3z^2\,dz}{z} = \frac{3}{a^2}\int (z^3-b)z\,dz =$

$\displaystyle \frac{3}{a^2}\left(\frac{z^5}{5}-b\frac{z^2}{2}\right)+C = \frac{3}{a^2}z^2\left(\frac{z^3}{5}-\frac{b}{2}\right)+C = \frac{3}{a^2}z^2(ax+b)^{2/3}\left(\frac{1}{5}(ax+b)-\frac{b}{2}\right)+C =$

$\displaystyle \frac{3}{10a^2}(ax+b)^{2/3}\big(2ax-3b\big)+C.$

y) $\displaystyle\int \frac{2x^3+x+3}{(1+x^2)^2}\,dx = \int \frac{(2x^2+1)x}{(1+x^2)^2}dx + \int \frac{3}{(1+x^2)^2}\,dx.$

Para la primera integral consideremos $x^2 = t$, entonces $\displaystyle\int \frac{(2x^2+1)x}{(1+x^2)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2t+1}{(t+1)^2}dt = \int \frac{dt}{t+1} -$ $\displaystyle\frac{1}{2}\int \frac{dt}{(t+1)^2} = \ln|t+1|+\frac{1}{2(t+1)}+C' = \ln|x^2+1|+\frac{1}{2(x^2+1)}+C'.$

En la segunda integral usamos integraci¢n por partes sobre la integral $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+1}$, por lo que $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+1} =$ $\displaystyle\arctan x = \frac{x}{x^2+1}+\int \frac{2x^2}{(x^2+1)^2}dx = \frac{x}{x^2+1}+2\int \frac{dx}{(x^2+1)}-2\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$, con lo cual se tiene $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1}+\arctan x\right)+C''.$

Finalmente, $\displaystyle\int \frac{2x^3+x+3}{(1+x^2)^2}dx = \ln(x^2+1)+\frac{3}{2}\arctan x+\frac{3x+1}{2(x^2+1)}+C.$

z) $\displaystyle I = \int \frac{x\ln x\,dx}{(1+x^2)^2}.$

Sea $x^2 = y$, $dy = 2x\,dx$, $dx = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}dy$, entonces:

$I = -\dfrac{1}{4}\displaystyle\int \dfrac{\ln y}{(1+y)^2}dy$. Integrando por partes, definiendo $u = \ln y$, $dv = \dfrac{1}{(1+y)^2}dy$, $du = \dfrac{1}{y}dy$, $v = -\dfrac{1}{1+y}$, tenemos:

$I = -\dfrac{1}{4}\dfrac{\ln y}{1+y} + \dfrac{1}{4}\displaystyle\int \dfrac{dy}{y(1+y)} = \dfrac{1}{4}\dfrac{\ln y}{1+y} + \dfrac{1}{4}\displaystyle\int \left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{y+1}\right)dy = -\dfrac{1}{4}\dfrac{\ln y}{1+y} + \dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{y}{y+1}\right| + C = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\ln x}{1+x^2} + \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x^2}{1+x^2} + C.$

a') $\displaystyle\int \dfrac{4}{x^3+4x}dx$

Si escribimos $\dfrac{4}{x^3+4x} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{bx+c}{x^2+4} \Longleftrightarrow 4 = a(x^2+4) + (bx+c)x = (a+b)x^2 + cx + 4a.$

Si $x = 0$, $a = 1$, $b = -1$, $c = 0$ y de esta forma: $\displaystyle\int \dfrac{4}{x^3+4x}dx = \ln|x| - \tfrac{1}{2}\ln(x^2+4) + C.$

b') $\displaystyle\int \dfrac{x+2}{x+1}dx = \int \left(1 + \dfrac{1}{x+1}\right)dx = x + \ln|x+1| + C.$

c') $\displaystyle\int \dfrac{dx}{-x^2-x+2}$

Como $\dfrac{1}{-x^2-x+2} = \dfrac{1}{-(x-1)(x+2)} = \dfrac{a}{x+2} + \dfrac{b}{1-x} \Longleftrightarrow$

$-1 = a(1-x) + b(x+2) = (a+b)x - a + 2b.$

Si $x = 1$, $b = \tfrac{1}{3}$, $a = -\tfrac{1}{3} \Longrightarrow \displaystyle\int \dfrac{dx}{-x^2-x+2} = \dfrac{1}{3}\ln\left|\dfrac{x+2}{x-1}\right| + C.$

d') $\displaystyle\int \dfrac{x^2+x+1}{x^2-x-1}dx$

Notemos que $\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x-1} = 1 + \dfrac{2x+2}{x^2-x-1} = 1 + \dfrac{2x-1}{x^2-x+1} + \dfrac{3}{(x-\frac{1}{2})^3 - \frac{5}{4}}$ y

$\displaystyle\int \dfrac{x^2+x+1}{x^2-x-1}dx = x + \tfrac{3\sqrt{5}}{5}\ln\left|x - \tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right| - \tfrac{3\sqrt{5}}{5}\ln\left|x - \tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right| + \ln(x^2-x+1) + C =$

$x + \tfrac{3\sqrt{5}}{5}\ln\left|\dfrac{2x-\sqrt{5}-1}{2x+\sqrt{5}-1}\right| + \ln(x^2-x+1) + C.$

e') $I = \displaystyle\int \dfrac{x^3}{(x^2+1)^2}\,dx$

Sea $x^2 = u$, $2x\,dx = du$, por lo que $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \dfrac{u\,du}{(u+1)^2} = \dfrac{1}{2}\int \dfrac{du}{u+1} - \dfrac{1}{2}\int \dfrac{du}{(1+u)^2} =$

$\dfrac{1}{2}\ln|u+1| + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{u+1} + C = \dfrac{1}{2}\ln|x^2+1| + \dfrac{1}{2(x^2+1)} + C.$

f') $I = \displaystyle\int \dfrac{dx}{x(1+x^2)}$

Sea $u = x^2$, $x = \sqrt{u}$, $dx = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}du$, entonces $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \dfrac{du}{u(u+1)} = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{u}{u+1}\right| + C =$

$\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x^2}{x^2+1} + C.$

g’) $\int \frac{x^3}{(1+x^2)^3}\,dx$

Sea $u = x^2+1$, $du = 2x\,dx$, entonces $\int \frac{x^3}{(2+x^2)^3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{u-1}{u^3}du = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2} - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^3} = -\frac{1}{2u} + \frac{1}{4u^2} + C = -\frac{1}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4(x^2+1)^2} + C = \frac{x^4}{4(x^2+1)^2} + C.$

h’) $\int \frac{x^5}{(x^2+1)^3}dx$

Sea $u = x^2+1$, $du = 2x\,dx$ y tenemos $\int \frac{x^5}{(1+x^2)^3}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(u-1)^2}{u^3}du =$

$\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{u} - \frac{2}{u^2} + \frac{1}{u^3}\right)du = \frac{1}{2}\ln|u| + \frac{1}{u} - \frac{1}{4u^2} + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{4(x^2+1)^2} + C.$

i’) $\int \frac{x^2+2}{x^3-1}dx$

Escribiendo $x^2+2x^3+1 = \frac{a}{x-1} + bx + cx^2 + x + 1$ tenemos:

$x^2+2 = a(x^2+x+1) + (bx+c)(x-1) = (a+b)x^2 + (a+c-b)x + a - c.$

Si $x=1$, $a=1$, $b=0$, $c=1$, entonces $\int \frac{x^2+2}{x^3-1}dx = \ln|x-1| - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$

j’) $\int \frac{x^2+1}{(x-1)^6}dx$

Sea $u = x-1 \implies x^2 = (u+1)^2 = u^2+2u+1$, entonces $\int \frac{x^2+1}{(x-1)^6}dx = \int \frac{u^2+2u+2}{u^6}du =$
$\int \left(\frac{1}{u^4} + \frac{2}{u^5} + \frac{2}{u^6}\right)du = -\frac{1}{3u^3} - \frac{1}{2u^4} - \frac{2}{5u^5} + C = -\frac{1}{u^5}\left(\frac{1}{3}u^2 + \frac{1}{2}u + \frac{2}{5}\right) + C =$
$-\frac{1}{(x-1)^5}\left(\frac{1}{3}(x^2-2x+1) + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{2}{5}\right) + C = \frac{-1}{(x-1)^5}\left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{6}x + \frac{7}{30}\right) + C =$
$-\frac{10x^2-5x+7}{30(x-1)^5} + C.$

k’) $\int \frac{2x^2-2+2}{2x-3}dx$

Dividiendo el integrado tenemos $\frac{2x^2-x+2}{2x-3} = x+1+\frac{5}{2x-3}$, entonces:
$\int \frac{2x^2-x+2}{2x-3}dx = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{5}{2}\ln|2x-3| + C.$

l’) $\int \frac{x^2}{x^4+x^2-2}dx$

Tenemos que $\frac{x^2}{x^4+x^2-2} = \frac{u}{u^2+u-2} = \frac{a}{u-1} + \frac{b}{u+2} \iff u = a(u+2) + b(u-1).$

Si $u=1$, $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{2}{3}$, entonces $\int \frac{x^2}{x^4+x^2-2}dx = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2-1} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x^2+2} =$
$\frac{1}{6}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + \frac{\sqrt{2}}{3}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} + C.$

m’) $I = \int \frac{x}{x^4-x^2-2}dx$

Sea $u = x^2$, $du = 2x\,dx$, entonces $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \dfrac{du}{u^2 - u - 2} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \dfrac{du}{\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}} =$

$\dfrac{1}{6}\ln\left|\dfrac{u - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{u - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}}\right| + C = \dfrac{1}{6}\ln\left|\dfrac{x^2 - 2}{x^2 + 1}\right| + C.$

n') $I = \displaystyle\int \dfrac{x^2}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}dx$, $a \neq b$.

Escribiendo $\dfrac{x^2}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} = \dfrac{u}{(u + a^2)(u + b^2)} = \dfrac{\alpha}{u + a^2} + \dfrac{\beta}{u + b^2} \Longleftrightarrow$

$u = \alpha(u + b^2) + \beta(u + a^2) = (\alpha + \beta)u + \alpha b^2 + \beta a^2 \Longrightarrow \alpha + \beta = 1,\ \alpha = -\dfrac{a^2}{b^2 - a^2},\ \beta = \dfrac{b^2}{b^2 - a^2}$ y se tiene

$\displaystyle\int \dfrac{x^2}{(x^2 + b^2)(x^2 + a^2)}dx = \dfrac{1}{b^2 - a^2}\left(\int \dfrac{b^2\,dx}{x^2 + a^2} - \int \dfrac{a^2\,dx}{x^2 + b^2}\right) =$

$\dfrac{1}{b^2 - a^2}\left(b\arctan\dfrac{x}{b} - a\arctan\dfrac{x}{a}\right) + C.$

o') $I = \displaystyle\int \dfrac{8x^2}{(x^3 + 2)^3}dx$

Sea $u = x^3 + 2$, $du = 3x^2dx$ y la integral $I = \dfrac{8}{3}\displaystyle\int \dfrac{du}{u^3} = -\dfrac{4}{3}\dfrac{1}{u^2} + C = -\dfrac{4}{3}\dfrac{1}{(x^3 + 2)^2} + C.$

p') $I = \displaystyle\int \dfrac{x + 2}{x^4 - 1}dx$

Escribamos $\dfrac{1}{x^4 - 1} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x^2 - 1} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x^2 + 1}$, entonces:

$I = \displaystyle\int \left[\dfrac{x}{2(x^2 - 1)} - \dfrac{x}{2(x^2 + 1)} + \dfrac{1}{x^2 - 1} - \dfrac{1}{x^2 + 1}\right]dx =$

$\dfrac{1}{4}\ln|x^2 - 1| - \dfrac{1}{4}\ln|x^2 + 1| + \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x - 1}{x + 1}\right| - \arctan x + C = \dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{(x - 1)^3}{(x^2 + 1)(x + 1)}\right| - \arctan x + C.$

q') $\displaystyle\int \dfrac{x}{x^4 - 1}dx$

Sea $x^2 = u$, $du = 2x\,dx$, entonces $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \dfrac{du}{u^2 - 1} = -\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{1 + u}{1 - u}\right| + C = -\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right| + C.$

r') $\displaystyle\int \dfrac{1 + x}{x(1 + x^2)}dx$

Descomponiendo el integrado $\dfrac{1 + x}{x(1 + x^2)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{bx + c}{1 + x^2}$ tenemos que:

$1 + x = a(1 + x^2) + (bx + c)x = (a + b)x^2 + cx + a \Longrightarrow a = 1,\ b = -1,\ c = 1$, por lo cual $\displaystyle\int \dfrac{1 + x}{x(1 + x^2)}dx =$

$\displaystyle\int \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{1 + x^2} + \dfrac{1}{1 + x^2}\right)dx = -\dfrac{1}{2}\ln(1 + x^2) + \ln|x| + \arctan x + C.$

s') $\displaystyle\int \dfrac{1 + x}{(x - 1)^2}dx$

Sea $u = x - 1$, $x + 1 = u + 2$ y se tiene $\dfrac{1 + x}{(x - 1)^2} = \displaystyle\int \dfrac{u + 2}{u^2}du = \int \left(\dfrac{1}{u} + \dfrac{2}{u^2}\right)du = \ln|u| - \dfrac{2}{u} + C =$

$\ln|x - 1| - \dfrac{2}{x - 1} + C.$

t') $\displaystyle\int \dfrac{x^4}{x^3 - 8}dx$

Derivando tenemos $\dfrac{x^4}{x^3-8} = x + \dfrac{8x}{x^3-8}$ y la expresi¢n $\dfrac{8x}{x^3-8} = \dfrac{a}{x-2} + \dfrac{bx+c}{x^2+2x+4} \iff$ $8x = a(x^2+2x+4) + (bx+c)(x-2) = (a+b)x^2 + (2a-2b+c)x + 4a - 2c.$

Si $x = 2$, $a = \frac{4}{3}$ y $b = -\frac{4}{3}$, $c = \frac{8}{3}$
Finalmente, $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^3-8}dx = \int \Big(x + \frac{4}{3}\frac{1}{x-2} - \frac{2(2x+2)}{3(x^2+2x+4)} + \frac{4}{(x+1)^3+3}\Big)\,dx =$
$\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{4}{3}\ln|x-2| - \dfrac{2}{3}\ln(x^2+2x+4) + \dfrac{4}{\sqrt{3}}\arctan\dfrac{x+1}{\sqrt{3}} + C.$

u') $\displaystyle\int \frac{x^5}{(x^2-1)(x+1)}dx$

Dividiendo los polinomios del integrando tenemos: $\dfrac{x^5}{(x^2-1)(x+1)} =$

$x^2 - x + 2 + \dfrac{-2x^2+x+2}{(x^2-1)(x+1)}$. De esta forma $\dfrac{-2x^2+x+2}{(x^2-1)(x+1)} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{(x+1)^2} + \dfrac{c}{x-1} \iff$
$-2x^2 + x + 2 = a(x^2-1) + b(x-1) + c(x+1)^2 = (a+c)x^2 + (-2a+b)x + a - b - c.$

Si $x = 1$, $c = \frac{1}{4}$, $a = -\frac{9}{4}$, $b = \frac{1}{2}$ y se tiene:
$\displaystyle\int \frac{x^5}{(x^2-1)(x+1)}dx = \int \Big(x^2 + x + 2 + \frac{1}{2(x+1)^2} - \frac{9}{4(x+1)} + \frac{1}{4(x-1)}\Big)\,dx =$
$\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} + 2x - \dfrac{1}{2(x+1)} - \dfrac{9}{4}\ln|x+1| + \dfrac{1}{4}\ln|x-1| + C.$

v') $\displaystyle\int \frac{2x^3-2x^2-2x+1}{x^4-2x^3+x^2}dx$

Descomponiendo el integrando tenemos $\dfrac{2x^3-2x^2-2x+1}{x^4-2x^3+x^2} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x^2} + \dfrac{c}{x-1} + \dfrac{d}{(x-1)^2} \iff 2x^3 -$ $2x^2 - 2x + 1 = ax(x-1)^2 + b(x-1)^2 + cx^2(x-1) + dx^2 =$

$(a+c)x^3 + (-2a+b-c+d)x^2 - (2a+2b)x + b^2.$

Si $x = 1$, $d = -1$ y si $x = 0$, $b = 1$, $a = 0$, $c = 2$.

Se obtiene en definitiva: $\displaystyle\int \frac{2x^3-2x^2-2x+1}{x^4-2x^3+x^2}dx = -\frac{1}{x} + 2\ln|x-1| + \frac{1}{x-1} + C.$

w') $\displaystyle\int \frac{3x^2}{x^4+5x^2+4}dx$

Escribiendo $\dfrac{3x^2}{x^4+5x^2+4} = \dfrac{3u}{u^2+5u+4} = \dfrac{3u}{(u+1)(u+4)} = -\dfrac{1}{u+1} + \dfrac{4}{u+4}$, por lo que:
$\displaystyle\int \frac{3x^2}{x^4+5x^2+4}\,dx = \int \Big(-\frac{1}{x^2+1} + \frac{4}{x^2+4}\Big)\,dx = -\arctan x + 2\arctan\frac{x}{2} + C.$

x') $I = \displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}dx$

Dividiendo tenemos que $\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1} = 1 + \dfrac{2x}{x^2-x+1} = 1 + \dfrac{2x-1}{x^2-x+1} + \dfrac{1}{x^2-x+1}$, con lo cual tenemos
$I = \displaystyle\int \Big(1 + \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{(x-1)^2+\frac{3}{4}}\Big)\,dx = x + \ln(x^2-x+1) + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$

5. Calcule las siguientes integrales:

a) $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$

b) $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$

c) $I = \displaystyle\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}dx$

d) $I = \displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}dx$

e) $I = \displaystyle\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx$

f) $I = \displaystyle\int \frac{x+3}{x^3\sqrt{2x+3}}dx.$

Solución

a) $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$

Dado que $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{3}$, tomamos $n = 6$, es decir $z = (x+1)^{\frac{1}{6}} \Longrightarrow z^6 = x+1$ y $6z^5\,dz = dx$, $z^3 = \sqrt{x+1}$, $z^2 = \sqrt[3]{x+1}$. As obtenemos:

$I = \displaystyle\int \frac{6z^5\,dz}{z^3+z^2} = 6\int \frac{z^3\,dz}{1+z} = 6\int \frac{z^3+1-1}{1+z}\,dz = 6\int (z^2-z+1)dz - 6\int \frac{dz}{1+z} =$

$6\Big(\frac{z^3}{3}-\frac{z^2}{2}+z\Big) - 6\ln|z+1| + C = 3(x+1)^{\frac{1}{2}} - 3(x+1)^{\frac{1}{3}} + 6(x+1)^{\frac{1}{6}} - \ln|(x+1)^{\frac{1}{6}}+1| + C.$

b) $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$

Como $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{3}{2}$, consideramos $n = 2$, i.e. $z = (x+1)^{\frac{1}{2}}$, $z^2 = x+1$, $z^3 = (x+1)^{\frac{3}{2}}$, $2zdz = dx$, entonces:

$I = \displaystyle\int \frac{2zdz}{z+z^3} = 2\int \frac{dz}{1+z^2} = 2\arctan z + C = 2\arctan\sqrt{x+1} + C.$

c) $I = \displaystyle\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}dx$

Sea $x = z^6$, $6z^5dz = dx$, $\sqrt{x} = z^3$, $\sqrt[3]{x} = z^2$, entonces:

$I = \displaystyle\int \frac{z^3-1}{z^2+1}6z^5dz = 6\int \frac{z^8-z^5}{z^2+1}dz = 6\int \Big(z^6-z^4-z^3+z^2+z-1-\frac{z+1}{z^2+1}\Big)dz =$

$6\Big(\frac{z^7}{7}-\frac{z^5}{5}-\frac{z^4}{4}+\frac{z^3}{3}+\frac{z^2}{2}-z-\frac{1}{2}\ln|z^2+1|+\arctan z\Big)+C =$

$\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} - \frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}} - \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{1}{3}} - 6x^{\frac{1}{6}} - 3\ln|\sqrt[3]{x}+1| + \arctan\sqrt[6]{x} + C.$

d) $I = \displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}dx$

Sea $x+1 = z^2$, $(x+1)^2 = z^4$, $2zdz = dx$, entonces:

$I = 2\displaystyle\int \frac{(z+2)z\,dz}{z^4-z}dz = 2\int \frac{z+2}{z^3-1}dz.$

Consideremos la descomposici¢n $\dfrac{z+2}{z^3-1} = \dfrac{a}{z-1}+\dfrac{bz+c}{z^2+z+1} \Longleftrightarrow$

$z+2 = a(z^2+z+1)+(bz+c)(z-1) = (a+b)z^2+(a-b+c)z+a-c.$

Si $z = 1$, $a = 1 \Longrightarrow b = -1$, $c = a-2 = -1$, por lo que:

$I = 2\displaystyle\int \frac{dz}{z-1}dz - 2\int \frac{(2z+1)+1}{z^2+z+1}dz = 2\ln|z-1| - \ln(z^2+z+1) - \int \frac{dz}{(z+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dz =$

$\ln\dfrac{(\sqrt{x+1}-1)^2}{z+2+\sqrt{x+1}} - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\dfrac{2\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{3}} + C.$

e) $I = \displaystyle\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,dx$

Sea $z = \dfrac{x+1}{x-1} = 1 + \dfrac{2}{x-1}$, $3z^2 dz = -\dfrac{2\,dx}{(x-1)^2}$, $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{1}{z^3-1} \iff \dfrac{(x-1)^2}{2} = \dfrac{2}{(z^2-1)^2}$, por lo que $I = -\displaystyle\int z\,3z^2\,dz\,\frac{2}{(z^2-1)^2} = -\int \frac{z^3\,dz}{(z^3-1)^2}$.

Descomponiendo $\dfrac{z^3}{(z-1)^2(z^2+z+1)^2} = \dfrac{a}{z-1} + \dfrac{b}{(z-1)^2} + \dfrac{cz+d}{z^2+z+1} + \dfrac{ez+f}{(z^2+z+1)^2} \iff$

$z^3 = a(z-1)(z^2+z+1)^2 + b(z^2+z+1)^2 + (cz+d)(z-1)^2(z^2+z+1) + (ez+f)(z-1)^2 =$

$(a+c)z^5 + (a+bc-d)z^4 + (a+2b-de)z^3 + (3b-c-2e+f-a)z^2 + (2b+c-d+e-2f-a)z - a+b+d+f.$

Resolviendo el sistema tenemos $a = \frac{1}{9}$, $b = \frac{1}{9}$, $c = -\frac{1}{9}$, $d = -\frac{1}{3}$, $e = \frac{1}{3}$, $f = \frac{1}{3}$, por lo que $I = 6\big(\frac{1}{9}\ln|z-1| - \frac{1}{9}\frac{1}{z-1} - \frac{1}{9}\displaystyle\int \frac{z+3}{z^2+z+1}\,dz + \frac{1}{3}\int \frac{z+1}{(z^2+z+1)^2}\,dz\big)$, pero $\dfrac{z+3}{z^2+z+1} = \dfrac{z+\frac{1}{2}+\frac{5}{2}}{z^2+z+1}$, $\dfrac{z+1}{(z^2+z+1)^2} = \dfrac{z+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{(z^2+z+1)^2}$, con lo cual tenemos:

$I = 6\big(\frac{1}{9}\ln|z-1| - \frac{1}{9}\frac{1}{z-1} - \frac{1}{18}\ln|z^2+z+1| + \frac{\sqrt{3}}{9}\arctan 2z+1\,\sqrt{3} + \frac{1}{9}\frac{z-1}{z^2+z+1}\big) + C = \frac{1}{3}\frac{z^2+z+1}{(z-1)^2} + \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2z+1}{\sqrt{3}} + \frac{2z}{z^3-1} + C$, con $z = \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}$, ya que:

$\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2}\big(\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + \frac{x}{x^2+a^2}\big)$, $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$ (ver ejercicio 2p).

f) $I = \displaystyle\int \frac{x+3}{x^3\sqrt{2x+3}}\,dx$

Sea $z^2 = 2x+3$, $x = \dfrac{z^2-3}{2}$, $x+3 = \dfrac{z^2+3}{2}$, $x^3 = \frac{1}{8}(z^2-3)$, $z\,dz = dx$, entonces $I = 4\displaystyle\int \frac{z^2-3+6}{(z^2-3)^3}\,dz = 4\int \frac{dz}{(z^2-3)^2} + 24\int \frac{dz}{(z^2-a^2)^3}$, pero

$\displaystyle\int \frac{dz}{(z^2-a^2)^n} = \frac{-z}{2(n-1)a^2(z^2-a^2)^{n-1}} - \frac{2n-3}{(2n-2)a^2}\int \frac{dz}{(z^2-a^2)^{n-1}}$, por lo que:

$24\displaystyle\int \frac{dz}{(z^2-3)^3} = 24\frac{-z}{4\cdot 3(z^2-3)^2} - \frac{3\cdot 24}{4\cdot 3}\int \frac{dz}{(z^2-3)^2}$ y tenemos:

$I = -2\displaystyle\int \frac{dz}{(z^2-3)^2} - \frac{2z}{(z^2-3)^2} = -\frac{2z}{(z^2-3)^2} - 2\Big(\frac{-z}{2\cdot 3(z^2-3)} - \frac{1}{4\cdot 3\sqrt{3}}\ln\Big|\frac{z-\sqrt{3}}{z+\sqrt{3}}\Big|\Big) + C =$
$\dfrac{\sqrt{2x+3}}{6x} - \dfrac{\sqrt{2x+3}}{2x^2} - \dfrac{1}{6\sqrt{3}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{3}}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{3}}\right| + C.$

6. Calcule las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \cos^3 dx$

b) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\cos^3 x\,dx$

c) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3(\tfrac{1}{2}x)\cos^5(\tfrac{1}{2}x)\,dx$

d) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 x\,dx.$

e) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\cos^4 x\,dx$

f) $\displaystyle\int \cos^6 3x\,dx$

g) $\int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^6 x}\,dx$

h) $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}x\cos^3\frac{1}{2}x}$

i) $\int \tan^2 5x\,dx$

j) $\int \operatorname{cotg}^4 x\,dx$

k) $\int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^4 x}\,dx$

l) $\int \operatorname{sen}^5 x\sqrt[3]{\cos x}\,dx$

m) $\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{sen} x\cos^3 x}}$

n) $\int \frac{dx}{\sqrt{\tan x}}$.

Solución

a) $\int \cos^3 dx = \int (1-\operatorname{sen}^2 x)\cos x dx = \int \cos x\,dx - \int \operatorname{sen}^2 x\cos x\,dx = \operatorname{sen} x - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C.$

b) $\int \operatorname{sen}^2 x\cos^3 x dx = \int (\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^4 x)\cos x dx = \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x - \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x + C.$

c) $\int \operatorname{sen}^3(\frac{1}{2}x)\cos^5(\frac{1}{2}x)\,dx = 2\int \operatorname{sen}^3 u\cos^5 u\,du = 2\int (\operatorname{sen}^3 u - \operatorname{sen}^7 u)\cos u\,du =$
$2\left(\frac{1}{4}\operatorname{sen}^4 u - \frac{1}{8}\operatorname{sen}^8 u\right) + C = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^4(\frac{1}{2}x) - \frac{1}{4}\operatorname{sen}^8(\frac{1}{2}x) + C.$

d) $\int \operatorname{sen}^4 x\,dx = \int \operatorname{sen}^2 x(1-\cos^2 x)dx = \int \operatorname{sen}^2 x dx - \frac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2 2x 2x\,dx =$
$\frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)dx - \frac{1}{8}\int \operatorname{sen}^2 2x\,2dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right) - \frac{1}{8}\frac{1}{2}\left(2x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 4x\right) + C =$
$\frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x + C.$

e) $\int \operatorname{sen}^2 x\cos^4 x\,dx = \int (\cos^2 x\operatorname{sen}^2 x)\cos^2 x\,dx = \frac{1}{4}\int \operatorname{sen}^(2x)\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\,dx =$
$\frac{1}{8}\int \frac{1}{2}(1-\cos 4x)(2+\cos 2x)\,dx = \frac{1}{16}\int (1-\cos 4x+\cos 2x-\cos 4x\cos 2x)\,dx =$
$\frac{1}{16}(x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x) - \int (\cos^2 2x - \operatorname{sen}^2 2x)\cos 2x dx =$
$\frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{32}\operatorname{sen} 2x - \int (1-2\operatorname{sen}^2 2x)\cos 2x dx = \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{48}\operatorname{sen}^3 2x + C.$

f) $\int \cos^6 3x\,dx = \int \frac{(1+\cos 6x)^3}{(2)^3}\,dx = \frac{1}{8}\int (1+3\cos 6x+3\cos^2 6x+\cos^3 6x)\,dx =$
$\frac{1}{8}\left[x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 6x + \frac{3}{2}\int (1+\cos 2x)\,dx + \int (1-\operatorname{sen}^2 6x)\cos 6x\,dx\right] =$
$\frac{1}{8}(\frac{5}{2}x + \frac{2}{3}\operatorname{sen} 6x + \frac{1}{8}\operatorname{sen} 12x - \frac{1}{18}\operatorname{sen}^3 6x) + C =$
$\frac{5}{16}x + \frac{1}{12}\operatorname{sen} 6x + \frac{1}{64}\operatorname{sen} 12x - \frac{1}{144}\operatorname{sen}^3 6x + C.$

g) $\int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^6 x}\,dx = \int \operatorname{cotg}^2 x\csc^4 x\,dx = \int \operatorname{cotg}^2 x(1+\operatorname{cotg}^2 x)\csc^2 x\,dx =$
$-\int (\operatorname{cotg}^2 x + \operatorname{cotg}^4 x)(-\csc^2 x\,dx) = -\frac{1}{3}\cot^3 x - \frac{1}{5}\cot^5 x + C.$

h) $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}x\cos^3\frac{1}{2}x} = 2\int \frac{du}{\operatorname{sen} u\cos^3 u} = 2\int \operatorname{cotg} u\sec^4 u\,du = 2\int \frac{1}{\tan u}\sec^2 u(\sec^2 u)\,du =$
$2\int \frac{1}{y}(1+y^2)\,dy = 2\int \frac{dy}{y} + 2\int y\,dy = 2\ln|y| + y^2 + C = 2\ln|\tan u| + \tan^2 u + C =$

$2\ln|\tan\frac{1}{2}x| + \tan^2\frac{1}{2}x + C$.

i) $\int \tan^2 5x\,dx = \int (\sec^2 5x - 1)\,dx = -x + \frac{1}{5}\tan 5x + C$.

j) $\int \operatorname{cotg}^4 x\,dx = \int \operatorname{cotg}^2 x(\csc^2 x - 1)\,dx = \int \operatorname{cotg}^2 x\csc^2 x\,dx - \int \operatorname{cotg}^2 x\,dx =$

$-\frac{1}{3}\operatorname{cotg}^3 x - \int(-1+\csc^2 x)\,dx = -\frac{1}{3}\operatorname{cotg}^3 x + \operatorname{cotg} x + x + C$.

k) $\int \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^4 x}\,dx = \int \operatorname{cotg}^2 x\csc^2 x\,dx = -\frac{1}{3}\operatorname{cotg}^3 x + C$.

l) $I = \int \operatorname{sen}^5 x\sqrt[3]{\cos x}\,dx$

Considerando $u = \cos x$, $du = -\operatorname{sen} x\,dx$, $\operatorname{sen}^2 x = 1 - u^2$, por lo que:

$I = -\int (1-u^2)^2\sqrt[3]{u}\,du = -\int (u^{\frac{1}{3}} - 2u^{\frac{7}{3}} + u^{\frac{12}{3}})\,du = -\frac{3}{4}u^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{5}u^{\frac{10}{3}} - \frac{3}{16}u^{\frac{16}{3}} + C =$

$-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\cos^4 x} + \frac{3}{5}\sqrt[3]{\cos^{10} x} - \frac{3}{16}\sqrt[3]{\cos^{16} x} + C$.

m) $\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{sen} x\cos^3 x}} = \int \frac{\sec^2 x\,dx}{(\tan x)^{\frac{1}{2}}} = 2(\tan x)^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{\tan x} + C$.

n) $\int \frac{dx}{\sqrt{\tan x}}$

Sea $z = \sqrt{\tan x}$, $dz = \frac{\sec^2 x\,dx}{2\sqrt{\tan x}}$, $dx = \frac{2z\,dz}{z^4+1}$, entonces:

$\int \frac{dx}{\sqrt{\tan x}} = \int \frac{2z\,dz}{(z^4+1)z} = 2\int \frac{dz}{z^4+1} = \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\frac{z^2+\sqrt{2}z+1}{z^2-\sqrt{2}z+1} + \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\frac{z\sqrt{2}}{1-z^2} + C =$

$\frac{\sqrt{2}}{4}\ln\frac{\tan x + 1 + \sqrt{2\tan x}}{\tan x + 1 - \sqrt{2\tan x}} + \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\frac{\sqrt{2\tan x}}{1-\tan x} + C$ (ver ejercicio 3f).

7. Calcular las siguientes integrales:

a) $\int \operatorname{sen} 10x\operatorname{sen} 15x\,dx$

b) $\int \operatorname{sen}\frac{1}{3}x\cos\frac{2}{3}x\,dx$

c) $\int \cos x\cos^2 3x\,dx$

d) $\int \operatorname{sen} x\operatorname{sen} 2x\operatorname{sen} 3x\,dx$

e) $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x + \cos x}$

f) $\int \frac{3\operatorname{sen} x + 2\cos x}{2\operatorname{sen} x + 3\operatorname{sen} x}\,dx$

g) $\int \frac{1+\tan x}{1-\tan x}\,dx$

h) $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$

i) $\int \frac{dx}{3\operatorname{sen}^2 x + 5\cos^2 x}$

j) $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x + 3\operatorname{sen} x\cos x - \cos^2 x}$

k) $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x - 5\operatorname{sen} x\cos x}$

l) $\int \frac{\operatorname{sen} x}{(1-\cos x)^3}\,dx$

m) $\int \frac{\cos x\,dx}{\operatorname{sen}^2 x - 6\operatorname{sen} x + 5}$

n) $\int \frac{dx}{(2-\operatorname{sen} x)(3-\operatorname{sen} x)}$

o) $\int \frac{1-\operatorname{sen} x+\cos x}{1+\operatorname{sen} x-\cos x}\,dx$.

Solución

a) $\int \operatorname{sen} 10x \operatorname{sen} 15x\,dx = \frac{1}{2}\int (\cos 5x - \cos 25x)\,dx = -\frac{1}{50}\operatorname{sen} 25x + \frac{1}{10}\operatorname{sen} 5x + C.$

b) $\int \operatorname{sen}\frac{1}{3}x \cos\frac{2}{3}x\,dx = \frac{1}{2}\int(\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}\frac{1}{3}x)\,dx = -\frac{1}{2}\cos x + \frac{3}{2}\cos\frac{1}{3}x + C.$

c) $\int \cos x \cos^2 3x\,dx = \int \cos x \frac{1}{2}(1+\cos 6x)\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x + \frac{1}{2}\int \cos x \cos 6x\,dx =$

$\frac{1}{2}\operatorname{sen} x + \frac{1}{4}\int(\cos 5x + \cos 7x)\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x + \frac{1}{20}\operatorname{sen} 5x + \dfrac{1}{28}\operatorname{sen} 7x + C.$

d) $\int \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 3x\,dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} x(\cos x - \cos 5x)\,dx = -\frac{1}{8}\cos 2x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{2}(\operatorname{sen} 6x - \operatorname{sen} 4x)\,dx =$ $-\frac{1}{8}\cos 2x + \frac{1}{24}\cos 6x + \frac{1}{16}\cos 4x + C.$

e) $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sen} x + \cos x}$ Sea $u = \tan\frac{1}{2}x$, $\cos x = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$, $dx = \dfrac{2\,du}{1+u^2}$, entonces se tiene que:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x + \cos x} = \int \frac{2\,du}{(1+u^2)\left(\frac{2u}{1+u^2} + \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)} = \int \frac{2\,du}{1+2u-u^2} = 2\int \frac{du}{2-(u-1)^2} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+u-1}{\sqrt{2}-(u-1)}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\tan\frac{1}{2}x + \sqrt{2}-1}{-\tan\frac{1}{2}x + \sqrt{2}+1}\right| + C.$$

f) $I = \int \dfrac{3\operatorname{sen} x + 2\cos x}{2\operatorname{sen} x + 3\operatorname{sen} x}dx = \int \dfrac{3\tan x + 2}{2\tan x + 3}dx = \frac{3}{2}\int \dfrac{2\tan x + 3 + \frac{4}{3} - 3}{2\tan x + 3}dx =$

$\frac{3}{2}\int\left(1 - \dfrac{\frac{5}{3}}{2\tan x + 3}\right)dx = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}\int \dfrac{dx}{2\tan x + 3}$ y si $t = \tan\frac{1}{2}x$ se tiene que:

$I = \frac{3}{2}x + 5\int \dfrac{-(1-t^2)\,dt}{(3t^2-4t+3)(1+t^2)} = \frac{3}{2}x + 5\int \dfrac{(1-t^2)dt}{3(t-\frac{2+\sqrt{13}}{3})(t-\frac{2+\sqrt{13}}{3})(1+t^2)}$. Adems,

$\dfrac{5(1-t^2)}{(3t^2-4t-3)(1+t^2)} = \dfrac{a}{3t-2-\sqrt{13}} + \dfrac{b}{t-\frac{2-\sqrt{13}}{3}} + \dfrac{ct+d}{1+t^2} \Longleftrightarrow$

$5(1-t^2) = a(t-\frac{2-\sqrt{13}}{3})(1+t^2) + b(3t-2-\sqrt{13})(1+t^2) + (ct+d)(3t^2-4t-3).$

Si $t = \frac{2-\sqrt{13}}{3} \Longrightarrow \frac{20\sqrt{13}}{9} - \frac{40}{9} = b(\frac{104}{9} - \frac{5\sqrt{13}}{9}) \Longrightarrow b = -\frac{5}{13}.$

Si $t = \frac{2+\sqrt{13}}{3} \Longrightarrow -\frac{20\sqrt{13}}{9} - \frac{40}{9} = a(\frac{52\sqrt{13}}{3} + \frac{104}{27}) \Longrightarrow a = -\frac{15}{13}.$

As, $5(1-t^2) = (a+3b+3c)t^3 + \left(a(\frac{\sqrt{13}}{3} - \frac{2}{3}) + b(-\sqrt{13}-2) - 4c + 3d\right)t^2 + (a+3b-3c-4d)t +$ $a(\frac{\sqrt{13}}{3} - \frac{2}{3}) + b(-\sqrt{13}-2) - 3d \Longrightarrow c = \frac{10}{13}$ y si $t = 1 \Longrightarrow -4d - \frac{60}{13} = 0 \Longrightarrow d = -\frac{15}{13}$, por lo tanto

$-\frac{15}{13}\int \dfrac{dt}{3t-2-\sqrt{13}} - \frac{5}{13}\int \dfrac{dt}{t-\frac{2-\sqrt{13}}{3}} + \int \dfrac{\frac{10}{13}t - \frac{15}{13}}{1+t^2}dt =$

$-\frac{5}{13}\ln(3t-2-\sqrt{13}) - \frac{5}{13}\ln\left|t - \frac{2-\sqrt{13}}{3}\right| + \frac{5}{13}\int \dfrac{2t}{t^2+1}dt - \frac{15}{13}\int \dfrac{dt}{1+t^2} =$

$-\frac{5}{13}\ln|3t^2-4t-3| + \frac{5}{13}\ln|t^2+1| - \frac{15}{13}\arctan t + C'.$

Finalmente $I = \frac{3}{2}x - \frac{5}{13}\ln\left|\dfrac{3t^2-4t-3}{t^2+1}\right| - \frac{15}{13}\arctan t + C = \frac{12}{13}x - \frac{5}{13}\ln|2\operatorname{sen} x + 3\cos x| + C.$

g) $\displaystyle\int \frac{1+\tan x}{1-\tan x}\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x+\cos x}{\cos x-\operatorname{sen} x}\,dx = -\ln|\cos x-\operatorname{sen} x| + C.$

h) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x} = \int \frac{dt}{(1+t^2)\big(1+\frac{3}{1+t^2}\big)} = \int \frac{dt}{t^2+4} = \arctan \tfrac{1}{2}t + C = \arctan x(\tfrac{1}{2}\tan x) + C$, con $t = \tan \frac{1}{2}x$.

i) $\displaystyle\int \frac{dx}{3\operatorname{sen}^2 x+5\cos^2 x}$ Tomando $t = \tan x$, $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2}$, $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2}$, $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$ tenemos $\displaystyle\int \frac{dx}{3\operatorname{sen}^2 x+5\cos^2 x} = \int \frac{dt}{(1+t^2)\left(\frac{3t^2}{1+t^2}+\frac{5}{1+t^2}\right)} = \int \frac{dt}{3t^2+5} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2+\frac{5}{3}} =$

$\displaystyle\tfrac{1}{3}\sqrt{\tfrac{3}{5}}\arctan \frac{t}{\sqrt{\frac{5}{3}}} + C = \tfrac{1}{\sqrt{15}}\arctan \frac{\tan x}{\sqrt{\frac{5}{3}}} + C.$

j) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x+3\operatorname{sen} x\cos x-\cos^2 x} = \int \frac{dx}{\frac{3}{2}\operatorname{sen} 2x-\cos 2x} = \int \frac{du}{3\operatorname{sen} u-2\cos u} =$

$\displaystyle\int \frac{2dt}{(1+t^2)\big(\frac{6t}{1+t^2}+\frac{2t^2-2}{1+t^2}\big)} = \int \frac{dt}{t^2+3t-1} = -\frac{2}{2\sqrt{13}}\ln\left|\frac{\sqrt{13}+2t+3}{\sqrt{13}-2t-3}\right| + C =$

$\displaystyle\frac{1}{\sqrt{13}}\ln\left|\frac{2\tan x+3-\sqrt{13}}{2\tan x+3+\sqrt{13}}\right| + C$, habiendo considerado las sustituciones $u = 2x$ y luego $t = \tan \frac{1}{2}u$ i.e. $\cos u = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\operatorname{sen} u = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $du = \dfrac{2\,dt}{1+t^2}$.

k) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x-5\operatorname{sen} x\cos x} = \int \frac{2\,dt}{(1+t^2)\big(\frac{4t^2}{(1+t^2)^2}-5\frac{2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}\big)} = \int \frac{2(1+t^2)dt}{t(5t^2+2t-5)} =$

$\displaystyle\int \frac{(1+t^2)dt}{5t\big(t+\frac{1+\sqrt{26}}{5}\big)\big(t+\frac{1-\sqrt{26}}{5}\big)}$, usando la sustituci¢n $t = \tan \frac{1}{2}x$.

Por otro lado, $\dfrac{1+t^2}{t(5t^2+2t-5)} = \dfrac{a}{t}\,\dfrac{b}{5t+1+\sqrt{26}} + \dfrac{c}{t+\frac{1-\sqrt{26}}{5}}$

$\iff 1+t^2 = a(5t^2+2t-5) + bt(t+\frac{1-\sqrt{26}}{5}) + ct(5t+1+\sqrt{26}).$

Si $t = -\frac{1-\sqrt{26}}{5} \Longrightarrow \frac{52}{25} - \frac{2\sqrt{26}}{25} = c(\frac{52}{5} - \frac{2\sqrt{26}}{2}) \Longrightarrow c = \frac{1}{5}.$

Si $t = -\frac{1+\sqrt{26}}{25} \Longrightarrow \frac{2\sqrt{26}}{25} + \frac{52}{25} = b(\frac{2\sqrt{26}}{25} + \frac{52}{25}) \Longrightarrow b = 1.$

Si $t = 0$, $1 = -5a \Longrightarrow a = -\frac{1}{5}$. Finalmente:

$\displaystyle I = \int \frac{(1+t^2)dt}{5t(t+\frac{1+\sqrt{26}}{5})(t+\frac{1-\sqrt{26}}{5})} = -\tfrac{1}{5}\ln t + \tfrac{1}{5}\ln(5t+1+\sqrt{26}) + \tfrac{1}{5}\ln(t+\tfrac{1-\sqrt{26}}{5}) + C =$

$\displaystyle\tfrac{1}{5}\ln\left|\frac{5t^2+2t-5}{t}\right| + C = \tfrac{1}{5}\ln\left|\frac{\frac{5t^2-5}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{t}{1+t^2}}\right| + C = \tfrac{1}{5}\ln\left|\frac{\operatorname{sen} x-5\cos x}{\frac{1}{2}\operatorname{sen} x}\right| + C =$

$\displaystyle\tfrac{1}{5}\ln\left|\frac{\tan x-5}{\tan x}\right| + C'.$

l) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{(1-\cos x)^3}\,dx = -\frac{1}{2}\frac{1}{(1-\cos x)^2} + C.$

m) $\displaystyle I = \int \frac{\cos x\,dx}{\operatorname{sen}^2 x - 6\operatorname{sen} x + 5}$

Sea $\operatorname{sen} x = u$, $du = \cos x\,dx$, entonces $\displaystyle I = \int \frac{du}{u^2-6u+5} = \int \frac{du}{(u-5)(u-1)} =$

$\displaystyle \tfrac{1}{4}\int \Big(\frac{1}{u-5} - \frac{1}{u-1}\Big)\,du = \tfrac{1}{4}\ln\left|\frac{u-5}{u-1}\right| + C = \tfrac{1}{4}\ln\left|\frac{\operatorname{sen} x-5}{\operatorname{sen} x-1}\right| + C.$

n) $\displaystyle I = \int \frac{dx}{(2-\operatorname{sen} x)(3-\operatorname{sen} x)}$

Sea $t = \tan\frac{1}{2}x$, $\displaystyle dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\displaystyle 2-\operatorname{sen} x = \frac{2+2t^2-2t}{1+t^2}$, $\displaystyle 3-\operatorname{sen} x = \frac{3+3t^2-2t}{1+t^2}$, por lo que:

$\displaystyle I = \int \frac{(1+t^2)2dt}{(t^2-t+1)(3t^2-2t+3)}$. As tenemos que $\displaystyle \frac{2(1+t^2)}{(t^2-t+1)(3t^2-2t+3)} =$

$\displaystyle \frac{at+b}{t^2-t+1} + \frac{ct+d}{3t^2-2t+3} \Longleftrightarrow 2+2t^2 = (at+b)(3t^2-2t+3) + (ct+d)(t^2-t+1) =$

$(3a+c)t^3+(3b-c+d-2a)t^2+(3a-2b+c-d)t+3b+d$, por lo que $c=-3a$, $3b-c=2$, $3b+d=2 \Longrightarrow b=2$,

$a=0$, $c=0$, $d=-4$.

Finalmente, $\displaystyle I = \int \frac{2dt}{t^2-t+1} - \int \frac{4dt}{3t^2-2t+3} = 2\int \frac{dt}{(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} - \frac{4}{3}\int \frac{dt}{(t-\frac{1}{3})^2+\frac{8}{5}} =$

$\displaystyle \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}} - \sqrt{2}\arctan\frac{3t-1}{2\sqrt{2}} + C = \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan\frac{x}{2}-1}{\sqrt{3}} - \sqrt{2}\arctan\frac{3\tan\frac{x}{2}-1}{2\sqrt{2}} + C.$

o) Usando la sustituci¢n $u = \tan\frac{1}{2}x$, tenemos $\displaystyle \operatorname{sen} x = \frac{2u}{1+u^2}$, $\displaystyle \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, $\displaystyle dx = \frac{2du}{1+u^2}$.

$\displaystyle \int \frac{1-\operatorname{sen} x+\cos x}{1+\operatorname{sen} x-\cos x}\,dx = \int \Big(-1 + \frac{2}{1+\operatorname{sen} x-\cos x}\Big)\,dx$. Por otro lado:

$$\int \frac{2dx}{1+\operatorname{sen} x-\cos x} = \int \frac{\frac{4du}{1+u^2}}{1+\frac{2u}{1+u^2}-\frac{1-u^2}{1+u^2}} = \int \frac{4du}{1+u^2+2u-1+u^2} = \int \frac{2du}{u^2+u} =$$

$$\int \frac{2du}{u(u+1)} = 2\int \Big(-\frac{1}{u+1}+\frac{1}{u}\Big)\,du = 2(\ln|u| - \ln|u+1|) = 2\ln\Big|\frac{u}{u+1}\Big| + C =$$

$\displaystyle 2\ln\left|\frac{\tan\frac{1}{2}x}{\tan\frac{1}{2}x+1}\right| + C$, es decir $\displaystyle \int \frac{1-\operatorname{sen} x+\cos x}{1+\operatorname{sen} x-\cos x}\,dx = -x + 2\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}+1}\right| + C.$

Ejercicios adicionales de Cálculo Integral Prof. Jorge Poltronieri

1. Sea f definida y continua en $[a,b]$, tal que $f(a+b-x) = f(x)$. Verificar que $\int_a^b xf(x)dx = \frac{1}{2}(a+b)\int_a^b f(x)dx$.

2. Sea $\alpha(x)$ una función derivable en $[a,b]$ y sea f una función continua en $[a,\alpha(x)]$, para $x \in [a,b]$. Consideremos $F(x) = \int_a^{\alpha(x)} f(t)dt$, verificar que $F'(x) = f(\alpha(x))\alpha'(x)$.

3. Asumiendo conocidas la propiedad de la función $x \longmapsto e^x$, determinar una función continua ϕ tal que $1 + \int_0^x \phi(t)e^t dt = (1+x^2)e^x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Lo mismo para $3 + \int_0^x \phi(t)e^t dt = (1+x^2)e^x$.

4. Si $\phi(x) = \int_x^{2x} \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt$, calcular los valores de x tales que $\phi'(x) = 0$.

5. Sea f una función continua, monótona, con una derivada continua en $[a,b]$. Verificar (integrado por partes) que si g es una función continua en $[a,b]$, existe z tal que

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(a)\int_a^z g(t)dt + f(b)\int_z^b g(t)dt.$$

6. Sea f una función continua en $[0,1]$, recuerde que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) = \int_0^1 f(x)dx$.

   a) Establecer que $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+n^2} = \frac{\pi}{4}$.

   b) Calcular $\lim_{n\to\infty} \frac{1^\alpha + 2^\alpha + 3^\alpha + \cdots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}$, si $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq -1$.

7. Calcular $\lim_{x\to 0}[\frac{1}{x}\int_0^x \sqrt{3t^2+9}\,dt]$.

8. Demostrar que $\log n < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \log n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

9. Calcular $\int \sqrt{1+x^2}dx$.

10. Calcular $F(y) = \int_0^{y^2} |x-y|dx$, con $y \in \mathbb{R}$.

11. Sea f una función es positiva y continua en $[0,+\infty[$, sea $a > 0$, $h > 0$ y sea F una primitiva de f. Verificar que $\frac{F(a+h)-F(a)}{2\sqrt{a+h}} \leq \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{a+h}} f(t^2)dt \leq \frac{F(a+h)-F(a)}{2\sqrt{a}}$.

Soluciones de ejercicios adicionales de Cálculo Integral

1. Sea f definida y continua en $[a,b]$, tal que $f(a+b-x)=f(x)$. Verificar que $\int_a^b xf(x)dx = \frac{1}{2}(a+b)\int_a^b f(x)dx$.

   Solución Efectuando el cambio de variable $u=a+b-x$ se tiene:
   $\int_a^b xf(x)dx = -\int_b^a (a+b-u)f(a+b-u)du = \int_a^b (a+b-u)f(a+b-u)du =$
   $(a+b)\int_a^b f(a+b-u)du - \int_a^b f(a+b-u)udu = (a+b)\int_a^b f(a+b-x)dx - \int_a^b f(a+b-x)xdx =$
   $(a+b)\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f(x)xdx \Longrightarrow 2\int_a^b xf(x)dx = (a+b)\int_a^b f(x)dx \Longrightarrow$
   $\int_a^b xf(x)dx = \frac{1}{2}(a+b)\int_a^b f(x)dx.$

2. Sea $\alpha(x)$ una función derivable en $[a,b]$ y sea f una función continua en $[a,\alpha(x)]$, para $x\in[a,b]$. Consideremos $F(x)=\int_a^{\alpha(x)} f(t)dt$, verificar que $F'(x)=f(\alpha(x))\alpha'(x)$.

   Solución Sea $g(x)=\int_a^x f(t)dt$, entonces $F(x)=g(\alpha(x))$, por lo que $F'(x)=g'(\alpha(x))\alpha'(x)$, pero $g'(x)=f(x)$ y $F'(x)=f(\alpha(x))\alpha'(x)$.

3. Asumiendo conocidas la propiedad de la función $x\longmapsto \mathrm{e}^x$, determinar una función continua ϕ tal que $1+\int_0^x \phi(t)\mathrm{e}^t dt = (1+x^2)\mathrm{e}^x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Lo mismo para $3+\int_0^x \phi(t)\mathrm{e}^t dt = (1+x^2)\mathrm{e}^x$.

   Solución Si ϕ existe se tiene que $\phi(x)\mathrm{e}^x=(1+x^2)\mathrm{e}^x+2x\mathrm{e}^x$, o sea $\phi(x)=(x+1)^2$.
   Verifiquemos que $(x+1)^2$ es una solución. En efecto $1+\int_0^x \phi(t)\mathrm{e}^t dt = a+\Big[(1+x^2)\mathrm{e}^x\Big]_0^x = \mathrm{e}^x(1+x^2)$.
   En el segundo caso, repitiendo el proceso se llega a que $2=0$, resultado que es imposible, por lo tanto no existe solución.

4. Si $\phi(x)=\int_x^{2x}\frac{\operatorname{sen} t}{t}dt$, calcular los valores de x tales que $\phi'(x)=0$.

   Solución Sabemos que $\phi'(x)=\frac{\operatorname{sen}2x-\operatorname{sen}x}{x}$, con $x\neq 0$, o sea $\operatorname{sen}x(2\cos x-1)=0$ que se cumple para $x=k\pi$, $x=\pm\frac{1}{3}\pi+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

5. Sea f una función continua, monótona, con una derivada continua en $[a,b]$. Verificar (integrado por partes) que si g es una función continua en $[a,b]$, existe z tal que

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(a)\int_a^z g(t)dt + f(b)\int_z^b g(t)dt.$$

   Solución Sea $G(x)=\int_a^x g(t)dt$, entonces $\int_a^b f(t)g(t)dt = \big[f(t)G(t)\big]_a^b - \int_a^b f'(t)G(t)dt$. Por otro lado, como f es monótona, resulta que $f'(t)$ tiene signo constante y se puede aplicar el teorema de la media, es decir que $\int_a^b f'(t)G(t)dt = G(z)\int_a^b f'(t)dt = f(b)G(z) - f(a)G(z)$ con $z \in [a,b]$. Así, $\int_a^b f(t)g(t)dt = f(b)G(b) - f(b)G(z) + f(a)G(z) = f(b)[\int_a^b g(t)dt - \int_a^z g(t)dt] + f(a)\int_a^z g(t)dt = f(b)\int_z^b g(t)dt + f(a)\int_a^z g(t)dt$.

6. Sea f una función continua en $[0,1]$, recuerde que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) = \int_0^1 f(x)dx$.

   a) Establecer que $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+n^2} = \frac{\pi}{4}$.

   b) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^\alpha + 2^\alpha + 3^\alpha + \cdots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}$, si $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq -1$.

   Solución

a) Observamos que $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+n^2} = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}} \longrightarrow \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, cuando $n \to \infty$.

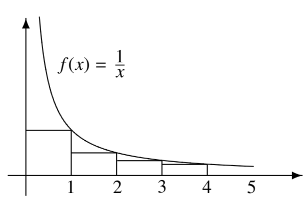
b) Notemos que $\frac{1^\alpha + 2^\alpha + 3^\alpha + \cdots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}} = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} (\frac{k}{n})^\alpha \longrightarrow \int_0^1 x^\alpha dx = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}$.

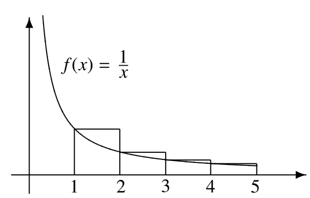
7. Calcular $\lim\limits_{x\to 0}[\frac{1}{x}\int_0^x \sqrt{3t^2+9}\,dt]$.

   Solución Sea $F(x) = \int_0^x \sqrt{3t^2+9}\,dt$, $F'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{F(x)-F(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^x \sqrt{3t^2+9}\,dt = 3$.

8. Demostrar que $\log n < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \log n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

   Solución Para $k \leq x \leq k+1$, se tiene que $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{k+1}$, entonces $\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} > \int_k^{k+1} \frac{dx}{x+1}$, o sea $\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} > \frac{1}{k+1}$, $\forall k = 1,\ldots,n-1$. Así, $\int_1^2 \frac{dx}{x} > \frac{1}{2}$, $\int_2^3 \frac{dx}{x} > \frac{1}{3}, \ldots, \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x} > \frac{1}{n} \Longrightarrow 1 + \int_1^n \frac{dx}{x} = 1 + \log n > 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.





   De igual manera, $k \leq x \leq k+1 \Longrightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$, por lo que $\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} < \frac{1}{k}$, $\forall k = 1,\ldots,n-1$, o sea $\int_1^2 \frac{dx}{x} < 1$, $\int_2^3 \frac{dx}{x} < \frac{1}{2}, \ldots, \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x} < \frac{1}{n-1} \Longrightarrow \int_1^n \frac{dx}{x} = \log n < 1 + \cdots + \frac{1}{n-1}$ y también $\log n < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}$.

9. Calcular $\int \sqrt{1+x^2}dx$.

   Solución Sea $x = \operatorname{sh} t$, entonces $dx = \operatorname{ch} t dt$, $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$. Por otro lado, se tiene que $\operatorname{ch} 2t =$

$\operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh}^2 t = 2\operatorname{ch}^2 t - 1 \Longrightarrow \operatorname{ch}^2 t = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{ch} 2t)$ y la integral se transforma en $I = \int (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{ch} 2t)dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2t + C$. Como $x = \operatorname{sh} t$, $\operatorname{sh} 2t = 2\operatorname{ch} t \operatorname{sh} t = 2x\sqrt{1+x^2}$, por lo que $I = \frac{1}{2}\operatorname{arcsh} x + \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + C = \frac{1}{2}[\log(x + \sqrt{1+x^2}) + x\sqrt{1+x^2}] + C$.

10. Calcular $F(y) = \displaystyle\int_0^{y^2} |x - y| dx$, con $y \in \mathbb{R}$.

    Solución Si $1 \leq y \Longrightarrow y \leq y^2$, $F(y) = \displaystyle\int_0^{y} (y - x)dx + \int_y^{y^2} (x - y)dx = \frac{1}{2}y^4 - y^3 + y^2 = \frac{1}{2}y^2(y+1)(y-2)$.

    Si $0 \leq y < 1$, $\displaystyle\int_0^{y^2} (y - x)dx = y^3 - \frac{1}{2}y^4 = -\frac{1}{2}y^3(y-2)$.

    Si $y \leq 0 \Longrightarrow y \leq 0 \leq x \leq y^2 \Longrightarrow F(y) = \displaystyle\int_0^{y^2} (x - y)dx = \frac{1}{2}y^4 - y^3 = \frac{1}{2}y^3(y-2)$.

    En resumen $\begin{cases} \frac{1}{2}y^4 - y^3 + y^2 & \text{si } y > 1 \\ y^3 - \frac{1}{2}y^4 & \text{si } y \in [0,1] \\ \frac{1}{2}y^4 - y^3 & \text{si } y < 0. \end{cases}$

11. Sea f una función es positiva y continua en $[0, +\infty[$, sea $a > 0$, $h > 0$ y sea F una primitiva de f. Verificar que $\dfrac{F(a+h) - F(a)}{2\sqrt{a+h}} \leq \displaystyle\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{a+h}} f(t^2)dt \leq \dfrac{F(a+h) - F(a)}{2\sqrt{a}}$.

    Solución Consideremos $\displaystyle\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{a+h}} f(t^2)dt$ y sea $t^2 = u$, entonces $2tdt = du$, $dt = \dfrac{du}{2\sqrt{u}}$. Así $\displaystyle\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{a+h}} f(t^2)dt = \int_a^{a+h} \frac{f(u)}{2\sqrt{u}}du$, pero como f es positiva $\dfrac{f(u)}{\sqrt{a+h}} \leq \dfrac{f(u)}{\sqrt{u}} \leq \dfrac{f(u)}{\sqrt{a}}$ e integrando se obtiene el resultado.

Exámenes Prof. Pedro Rodríguez

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA **II ciclo 1999**
FACULTAD DE CIENCIAS **Sábado 9 de octubre de 1999**
ESCUELA DE MATEMATICA **Duración 3 horas**

I EXAMEN PARCIAL — MA1001 CALCULO I

1. Calcule los siguientes límites: (40 puntos)

   a) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{16}}{x-4}$.

   b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^{\frac{5}{8}}+x^{\frac{1}{3}}+7}{x^{\frac{8}{3}}+3x+\sqrt{2}}$.

   c) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^4-3x^2-4}{\sqrt{x^2-2x+1}-3}$.

   d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x-\operatorname{sen} x}{x^2}$.

2. Use la definición de derivada para calcular $f'(x)$, si $f(x) = \cos 3x$. (10 puntos)

3. Calcule la derivada de las funciones definidas a continuación, no es necesaria la simplificación de los resultados.

   a) $f(x) = (x+1)^8(x^2+2x)$

   b) $g(x) = x^{-2}\operatorname{sen}^2(x^3)$

   c) $h(x) = \cos^2 \sqrt[3]{x^4+1}$

   d) $j(x) = \left(\dfrac{4x}{x+1}\right)^{-2}$.

4. Hallar el valor de c para que la función definida por: (10 puntos)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}^2 3x}{x^2} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ c & \text{si} \quad x = 0, \end{cases}$$

   sea continua en $\mathbb{R}$.

5. Determine los puntos de la parábola $y = x^2 - 7x + 3$, por los cuales pasa una recta tangente, paralela a la recta cuya ecuación es $5x + y - 3 = 0$. (10 puntos)

6. a) Dada la ecuación $x^2 + 2xy - 3y^2 = 0$, determine la ecuación de la recta normal a su gráfico en el punto $(1, 1)$. (5 puntos)

   b) Determine los puntos de intersección entre la curva y su recta normal en $(1, 1)$. (5 puntos)

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA **II ciclo 1999**
FACULTAD DE CIENCIAS **Miércoles 13 de octubre de 1999**
ESCUELA DE MATEMATICA **Duración 3 horas**

REPOSICION I EXAMEN PARCIAL — MA1001 CALCULO I

1. Calcule los siguientes límites: (40 puntos)

   a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+x+3}-3}{3x^3-5x^2-4}$

   b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+x+\operatorname{sen} x}{2x}$

   c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x}$

   d) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{1+\cos x}{x-\pi}$ (Haga $\alpha = x-\pi$).

2. Sea $f(x)$ la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

   a) Muestre usando la definición de derivada que $f'(0) = 0$. (10 puntos)

   b) ¿Qué puede usted afirmar respecto de la continuidad de f en $x = 0$? Justifique su respuesta.(5 puntos)

3. Use la definición de derivada para calcular $f'(x)$, si $f(x) = \dfrac{x+1}{x-3}$. (10 puntos)

4. Calcule la derivada de cada una de las funciones definidas a continuación, no es necesaria la simplificación de los resultados.

   a) $f(x) = \sqrt{x+1}\,\operatorname{tg} x$

   b) $g(x) = \dfrac{x^2-1}{x+3}$

   c) $h(x) = \operatorname{sen}^3(5x^2)$.

5. Determine los valores de b y c, para que la parábola $y = x^2+bx+c$ tenga a $y = x$ como tangente en el punto $(1,1)$. (10 puntos)

6. Dada la relación $xy^3 - x^5y^2 = 4$, calcule y' hasta despejarla en términos de x, y.

   (10 puntos)

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA **II ciclo 1999**

FACULTAD DE CIENCIAS **Sábado 6 de noviembre de 1999**

ESCUELA DE MATEMATICA **Duración 3 horas**

II EXAMEN PARCIAL — MA1001 CALCULO I

1. Calcule la derivada de las siguientes funciones: (10 puntos)

   a) $f(x) = \operatorname{sen}^3 2x \cos^2 3x$ b) $g(x) = \displaystyle\int_{\operatorname{sen}\frac{\pi}{x}}^{\cos^2 x} \sqrt{1-t^2}\,dt.$

2. Use la definición de integral indefinida para demostrar la siguiente igualdad:
   $\displaystyle\int \frac{(x^2-x+3)dx}{(x+1)^2} = x + \frac{1}{x+1} + c.$ (10 puntos)

3. Calcule las siguientes integrales: (10 puntos)

   a) $\displaystyle\int_1^8 \frac{x^2-x+3}{\sqrt{x}}dx$ b) $\displaystyle\int \frac{tdt}{\sqrt{2t^2+1}}.$

4. a) Enuncie correctamente el teorema del valor medio. (6 puntos)

   b) Aplíquelo para probar la siguiente desigualdad: (4 puntos)

   $|\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a| \leq |b-a|$, para todo a y b en $\mathbb{R}$.

5. Un cohete lanzado en forma vertical es rastreado por una estación de radar localizada a 3 km de la plataforma de lanzamiento. ¿Cuál es la velocidad vertical del cohete en el instante en que su distancia a la estación de radar es 5 km y tal distancia crece a razón de 5000 km/h? (15 puntos)

6. Un recipiente rectangular para almacenamiento, con la parte superior abierta, debe tener un volumen de $10m^3$. El largo de su base es el doble se su ancho. Si el material para la base cuesta mil colones el metro cuadrado y el de los costados seiscientos colones el metro cuadrado, determine el costo del recipiente más barato.

   (15 puntos)

7. Mediante sumas de Riemann determine el área de la región comprendida por la gráfica $f(x) = x^2$ y el eje x entre $x = 0$ y $x = 2$. (10 puntos)

8. Considere la función definida por $f(x) = \dfrac{2+x-x^2}{(x-1)^2}$.

   a) Verifique que $f'(x) = \dfrac{x-5}{(x-1)^3}$ y $f''(x) = \dfrac{2(7-x)}{(x-1)^4}$. (4 puntos)

   b) Haga el estudio completo, el cuadro de variación y el gráfico de f. (16 puntos)

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA **II ciclo 1999**
FACULTAD DE CIENCIAS **Miércoles 17 de noviembre de 1999**
ESCUELA DE MATEMATICA **Duración 3 horas**

REPOSICION II EXAMEN PARCIAL — MA1001 CALCULO I

1. Calcule la derivada de las siguientes funciones: (10 puntos)

   a) $y = \ln\left|\dfrac{\cos x}{\cos x - 1}\right|$ b) $y = \ln(\ln x^2)$.

2. Calcule las siguientes integrales: (20 puntos)

   a) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen}^2 x}dx$ b) $\displaystyle\int_{-a}^{a}(a - |x|)dx$ c) $\displaystyle\int_0^3 x\sqrt{3 - x}dx$ d) $\displaystyle\int \frac{(x + 3)dx}{x^2 + 6x + 7}$.

3. Determine si el teorema de Rolle es aplicable a la función dada en el intervalo indicado: $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x + 2}$, $x \in [-1, 3]$.

   Si es aplicable, calcule el valor de c correspondiente. (10 puntos)

4. a) Calcule $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{i}{n}\right) \frac{1}{n}$. (5 puntos)

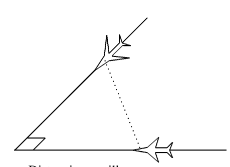
   b) Escriba la integral definida que corresponde al límite dado en a). (5 puntos)

5. Una página rectangular ha de tener 24 pulgadas cuadradas de texto, con márgenes superior e inferior de $1,5$ pulgadas y laterales de una pulgada. ¿Qué dimensiones de la página requieren la mínima cantidad de papel? (15 puntos)

6. Un contralor observa dos aviones que vuelan en trayectoria perpendiculares y a la misma altura. Uno de ellos dista 150 millas y se mueve a 450 millas/hora, el otro está a 200 millas y se desplaza a 600 millas/hora.

   a) ¿A qué ritmo decrece la distancia entre ellos? (10 pts)

   b) ¿De cuánto tiempo dispone el contralor para modificar la trayectoria de uno de ellos? (5 pts)

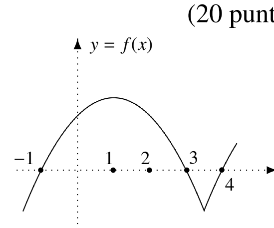


7. Sabiendo que el gráfico adjunto corresponde a f', entonces: (20 puntos)

   a) Determine los intervalos en los cuales f es creciente.

   b)Determine los x tal que $f(x)$ es máximo o mínimo.

   c) Determine las primeras componentes de los puntos de inflexión.



d) Si $f(-1)$ y $f(5)$ son de igual signo y $f(-1)$ y $f(3)$ son de signo opuesto; ¿Qué puede usted afirmar respecto del número de ceros de f?

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA **II ciclo 1999**
FACULTAD DE CIENCIAS **Jueves 2 de diciembre de 1999**
ESCUELA DE MATEMATICA **Duración 3 horas**

III EXAMEN PARCIAL — MA1001 CALCULO I

1. Calcule la derivada de las siguientes funciones y simplifique al máximo el resultado:

   a) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} + \arctan x$ (20 puntos)

   b) $g(x) = x(\operatorname{arcsen} x)^2 - 2x + 2\sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen} x$.

2. Calcule el área de la región comprendida por las curvas de: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ y $g(x) = x^2 - 4x$. (15 puntos)

3. Hallar el volumen del sólido generado al girar la región acotada por los gráficos de $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 1$ en torno al eje y. (15 puntos)

4. Calcule las siguientes integrales: (50 puntos)

   a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$

   b) $\displaystyle\int_{0}^{2} x^2\sqrt{x+2}\,dx$

   d) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x-3}}$

   d) $\displaystyle\int \frac{\ln(\ln x)}{x}\,dx$

   e) $\displaystyle\int \frac{\cos x\,dx}{\operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen} x - 3}$.

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA **II ciclo 1999**
FACULTAD DE CIENCIAS **Lunes 6 de diciembre de 1999**
ESCUELA DE MATEMATICA **Duración 3 horas**

REPOSICION III EXAMEN PARCIAL — MA1001 CALCULO I

1. Calcule la derivada de las siguientes funciones: (15 puntos)

   a) $y = \arctan(\ln x) + \ln(\arctan x)$

   b) $y = x^{\cos x^2}$

   c) $y = \arccos \mathrm{e}^x$.

2. Calcule $\dfrac{dy}{dx}$, si $\ln(x^2y) = x\mathrm{e}^y$. (5 puntos)

3. Calcule el área de la región comprendida por las curvas $y = 2 - x^2$ y $y = -x$.
   (15 puntos)

4. Determine el volumen del sólido que se obtiene al rotar alrededor de la recta $x = 6$, la región comprendida por $y = 6 - x$, $y = 0$, $y = 4$, $x = 0$. (15 puntos)

5. Calcule las siguientes integrales: (50 puntos)

   a) $\displaystyle\int \frac{x^2 + 5x + 7}{x + 3}\,dx$

   b) $\displaystyle\int \frac{x}{\mathrm{e}^x}\,dx$

   c) $\displaystyle\int_1^2 x^2 \sqrt{x - 1}\,dx$

   d) $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x}{\tan(\tan x + 1)}\,dx$

   e) $\displaystyle\int \frac{1 + x}{1 + \sqrt{x}}\,dx$.

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA **II ciclo 1999**
FACULTAD DE CIENCIAS **Miércoles 8 de diciembre de 1999**
ESCUELA DE MATEMATICA **Duración 3 horas**

EXAMEN DE AMPLIACION — MA-1001 CALCULO I

1. Calcule los siguientes límites: (10 puntos)

   a) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\operatorname{sen} x}{\tan x}$.

2. Calcule y' si: (24 puntos)

   a) $y = x\sqrt{2x+1}\cos e^x$ b)$y = x^{\cos x}$

   c) $\ln(x^3y^2) = x^2e^{2y}$.

3. Calcule las siguientes integrales: (40 puntos)

   a) $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{1+x^6}$ b) $\displaystyle\int \frac{\ln x^4}{x}dx$

   c) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\ln x)dx$ d) $\displaystyle\int \frac{\arctan 3x}{1+9x^2}dx$.

4. Calcule el área de la región comprendida por las curvas $y = x^2$, $y = -\frac{3}{2}x$ y la recta $x = 2$.
   (13 puntos)

5. Determine los intervalos en los cuales la función siguiente es creciente o decreciente y es cóncava hacia arriba o es cóncava hacia abajo. (13 puntos)

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 8x + 5.$$

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMATICA

II ciclo 1999
Jueves 3 de febrero de 1999
Duración 3 horas
Valor: 100 puntos

EXAMEN DE SUFICIENCIA — MA-1001 CALCULO I

1. Calcule los siguientes límites: (18 puntos)

   a) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^3-9x^2+26x-24}{3-\sqrt{5+x}}$

   b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x^2}{\operatorname{sen}\pi x}$

   c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-2x}{x^2+1}$.

2. Calcule y' en cada caso: (18 puntos)

   a) $y = \arctan(\ln x) + \ln(\arctan x)$

   b) $(x+y)^2(2x+y)^3 = 1$

   c) $y = \sqrt{x^2+1} - \ln \dfrac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}$.

3. Determine el punto de la parábola $y = x^2 - 7x + 3$, por el cual pasa una recta tangente paralela la recta cuya ecuación es $5x + y - 3 = 0$. (8 puntos)

4. Se llama ventana de Norman, a la formada por un semicírculo unido a un rectángulo. Hallar las dimensiones de una ventana de Norman que tenga 16 metros de perímetro, cuya área sea máxima. (12 puntos)

5. Calcule el volumen del sólido que se obtiene al rotar alrededor de la recta $x = 6$, la región comprendida por $y = 6 - x$, $y = 0$, $y = 4$, $x = 0$. (12 puntos)

6. Calcule las siguientes integrales: (32 puntos)

   a) $\displaystyle\int \frac{x}{e^x}\,dx$

   b) $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x}{\tan(\tan x + 1)}\,dx$

   c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}\,dx$

   d) $\displaystyle\int (x+1)\sqrt{x^2+2x+2}\,dx$.

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA **II ciclo 1999**

FACULTAD DE CIENCIAS **Miércoles 8 de diciembre de 1999**

ESCUELA DE MATEMATICA **Duración 3 horas**

EXAMEN DE SUFICIENCIA — MA-1001 CALCULO I

1. Calcule los siguientes límites: (10 puntos)

   a) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{3-\sqrt{5+x}}{x^3-3x^2-5x+4}$ b) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-\operatorname{sen}2x}{x+\operatorname{sen}3x}$.

2. Calcule $f'(x)$ si: (10 puntos)

   a) $f(x) = \dfrac{x \arcsen x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln\sqrt{1-x^2}$

   b) $f(x) = x^{2\operatorname{sen}x}$.

3. Use la definición de derivada para calcular $f'(x)$, si $f(x) = \dfrac{x+4}{x-1}$. (10 puntos)

4. Si $f(x) = x^3 - x^2 + x$, demuestre que existe un número c tal que $f(c) = 10$.

   (10 puntos)

5. Calcule las siguientes integrales: (10 puntos)

   a) $\displaystyle\int_0^3 x\sqrt{3-x}\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^1 x \arcsen x^2 dx$ c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+1}}$

   d) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-4}$ e) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+1}$.

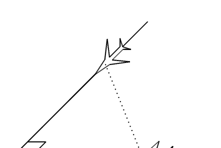
6. Considere la región comprendida por las curvas de $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$. Determine el volumen del sólido que se obtiene al girar tal región alrededor de la recta $y = 4$. (10 puntos)

7. Una página rectangular ha de tener 24 pulgadas cuadradas de texto, con márgenes superior e inferior de 1,5 pulgadas y laterales de una pulgada. ¿Qué dimensiones de la página requieren la mínima cantidad de papel? (10 puntos)

8. Un controlador observa dos aviones que vuelan en trayectorias perpendiculares y a la misma altura. Uno de ellos dista 150 millas y se mueve a 450 millas/hora, el otro está a 200 millas y se desplaza a 600 millas/hora.

   a) ¿A qué ritmo decrece la distancia entre ellos? (10 pts)

   b) ¿De cuánto tiempo dispone el controlador para modificar la trayectoria de uno de ellos? (5 pts)



Distancia en millas