

Índice general

1. Ejercicios de Números Reales	3
Soluciones del Tema No.1: Números Reales	6
2. Ejercicios de Polinomios	13
Soluciones del Tema No.2: Polinomios	17
3. Ejercicios de ecuaciones	29
Soluciones del Tema No.3: Ecuaciones	31
4. Ejercicios de inecuaciones	43
Soluciones del Tema No.4: Inecuaciones	45
5. Ejercicios de funciones	55
Soluciones del Tema No.5: Funciones	61
6. Ejercicios de las funciones exponencial y logaritmo	81
Soluciones del Tema No.6: Funciones exponencial y logaritmo	85
7. Ejercicios de trigonometría	95
Soluciones del Tema No.7: Trigonometría	99
Soluciones de exámenes	110

Capítulo 1

Ejercicios de Números Reales

1. Efectúe las operaciones. Dé el resultado en la forma más simple utilizando notación radical o fraccionaria según corresponda. (No use aproximaciones decimales).

a) $4^3 + 5^2 - 3^2 - 4^0$

b) $\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 - \frac{3}{4}\left(\frac{2}{9}\right)^2$

c) $4 + 5 \cdot 2 - 3 \cdot 2 + 5$

d) $-5(-1) + 3^2 - 4^2 - 7^3$

e) $-3^2 + (4^2 - 5^2) : (2^5 - 3^3)$

f) $9\sqrt{12} - 5\sqrt{27} - 7\sqrt{75}$

g) $\left[2\sqrt{98} - 5\sqrt{50} - 7\sqrt{8}\right] \left[-7\sqrt{2} + \sqrt{242}\right]$

h) $\left|-\frac{1}{5} + 3\right| + \left|-2 + \frac{3}{5}\right| + \left|\frac{-2}{5} - 1\right|$

i) $|\sqrt{7} - 1| + |\sqrt{7} + 1|$

j) $|-2\sqrt{3} - 1| + |\sqrt{3} - 6|$

k) $|5 - \sqrt{2}| + |\sqrt{2} - 3| + |-\sqrt{2} - 1| + |\sqrt{8} - 3|$

l) $|\sqrt{20} - 4| - 2|2 - \sqrt{5}|$

m) $|\sqrt{54} - 8| - 2|5 - \sqrt{24}| + |-\sqrt{6} + 3|$

n) $|e - 1| + |2e + 3| + |e - 3|$

ñ) $|3\pi - 9| + |5 - 2\pi| - \left|\frac{\pi}{2} - 1\right| + \left|4 - \frac{3\pi}{2}\right|$

o) $\sqrt{(5 - \sqrt{2})^2} + 2\sqrt{(\sqrt{2} - 7)^2} + \sqrt{(3 - 2\sqrt{2})^2}$

p) $\sqrt[3]{(3 - \sqrt{2})^6} - \sqrt[3]{(2 - \sqrt{2})^3} + \sqrt{(3 - 5\sqrt{2})^2}$

q) $\sqrt{(2\sqrt{7} - 6)^2} + \sqrt{9\sqrt{49}} + (-3 + \sqrt{343})^2$

r) $\sqrt{(3\sqrt{7} - 8)^2} + \sqrt{25\sqrt{49}} + (-5 + \sqrt{175})^2$

2. Resuelva las ecuaciones en el conjunto que se indica

a) $x - 5 = 1, \mathbb{Z}$

b) $x^2 - 9 = 16, \mathbb{N}$

c) $2x - 1 = 0, \mathbb{Z}$

d) $-4x + 3 = 5x - 2, \mathbb{Q}$

e) $7x - 8 \leq 8, \mathbb{I}$

f) $14x + 3 \leq 6x - 9, \mathbb{Q}$

- g) $5x + 1 \leq 2x - 8, \mathbb{Z}$ h) $5x - 3 \geq x - \frac{1}{2}, \mathbb{Z}$ i) $3x - 2 \leq x + 8, \mathbb{R}$
 j) $\frac{x}{2} - 1 > \frac{x}{6} + \frac{1}{3}, \mathbb{R}$

3. Calcule $A \cap B$ y $A \cup B$ en cada caso. Use notación de intervalo.

- a) $A =] -2, 7], B = [-4, 1]$ b) $A =] -\infty, 2], B = [-1, e]$
 c) $A = [-1, 2] \cup [4, 7], B = [0, 3] \cup [\frac{9}{2}, 8]$
 d) $A = [-2, 1] \cup [\sqrt{10}, 5], B = [0, \frac{1}{2}] \cup [\sqrt[3]{31}, 6]$
 e) $A = [-2, e] \cup [3\pi, +\infty[, B =] -\infty, 2] \cup [e, 3\pi]$
 f) $A = \{x \in \mathbb{R} / x \leq -5 \vee x \geq \sqrt{5}\}, B = \{x \in \mathbb{R} / -\sqrt{26} \leq x \leq 2e + 1\}.$

4. Encuentre la expresión decimal de los siguientes números racionales dados en forma fraccionaria.

- a) $\frac{51}{4}$ b) $-\frac{17}{8}$ c) $\frac{37}{3}$ d) $-\frac{125}{11}$ e) $\frac{499}{165}$.

5. Sea el número racional $r = 21, \bar{5}$.

- a) Calcule $10r$ y $9r$.
 b) Encuentre la forma fraccionaria mas simple de r .

6. Encuentre la expresión fraccionaria mas simple para los números racionales dados en forma decimal.

- a) $-4, 1$ b) $23, 05$ c) $-102, \overline{24}$ d) $4, \overline{25}$ e) $2, \bar{9}$ f) $2, 0\bar{9}$ g) $3, \bar{1}$.

7. Exprese el total de las siguientes sumas infinitas como número racional en forma fraccionaria.

- a) $5, 2 + 0, 02 + 0, 002 + 0, 0002 + 0, 00002 + \dots$
 b) $5 + \frac{4}{100} + \frac{4}{10000} + \frac{4}{1000000} + \dots + \frac{4}{10^{2n}} + \dots, (n \in \mathbb{Z})$
 c) $7 + \frac{3}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \frac{3}{10^5} + \dots + \frac{1}{10^{2n}} + \frac{3}{10^{2n+1}} + \dots, (n \in \mathbb{Z}^+)$
 d) $8 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{10^n}$
 e) $11 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^{2n}}.$

8. Efectúe las siguientes operaciones y exprese el resultado en la forma $a + b\sqrt{c}$, con a, b, c números racionales y c un entero positivo.

- a) $(\sqrt{3} - 5)^2$ b) $\sqrt{28 - 10\sqrt{3}}$

c) $(2\sqrt{7} - 3)^2$

d) $\sqrt{37 - 12\sqrt{7}}.$

9. Encuentre dos números racionales a y b tal que $\sqrt{66 + 40\sqrt{2}} = a\sqrt{2} + b$.
10. Expresé $\sqrt{61 - 28\sqrt{3}}$ como una suma de dos números reales.

Soluciones del Tema No.1: Números Reales

1. Efectúe las operaciones. Dé el resultado en la forma más simple utilizando notación radical o fraccionaria según corresponda. (No use aproximaciones decimales).

$$\begin{array}{ll}
 \text{a)} 4^3 + 5^2 - 3^2 - 4^0 & \text{b)} \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 - \frac{3}{4} \left(\frac{2}{9}\right)^2 \\
 \text{c)} 4 + 5 \cdot 2 - 3 \cdot 2 + 5 & \text{d)} -5(-1) + 3^2 - 4^2 - 7^3 \\
 \text{e)} -3^2 + (4^2 - 5^2) : (2^5 - 3^3) & \text{f)} 9\sqrt{12} - 5\sqrt{27} - 7\sqrt{75} \\
 \text{g)} [2\sqrt{98} - 5\sqrt{50} - 7\sqrt{8}] [-7\sqrt{2} + \sqrt{242}] & \text{h)} \left| -\frac{1}{5} + 3 \right| + \left| -2 + \frac{3}{5} \right| + \left| \frac{-2}{5} - 1 \right| \\
 \text{i)} |\sqrt{7} - 1| + |\sqrt{7} + 1| & \text{j)} |-2\sqrt{3} - 1| + |\sqrt{3} - 6| \\
 \text{k)} |5 - \sqrt{2}| + |\sqrt{2} - 3| + |-\sqrt{2} - 1| + |\sqrt{8} - 3| \\
 \text{l)} |\sqrt{20} - 4| - 2|2 - \sqrt{5}| \\
 \text{m)} |\sqrt{54} - 8| - 2|5 - \sqrt{24}| + |-\sqrt{6} + 3| \\
 \text{n)} |e - 1| + |2e + 3| + |e - 3| \\
 \tilde{\text{n)}} |3\pi - 9| + |5 - 2\pi| - \left| \frac{\pi}{2} - 1 \right| + \left| 4 - \frac{3\pi}{2} \right| \\
 \text{o)} \sqrt{(5 - \sqrt{2})^2} + 2\sqrt{(\sqrt{2} - 7)^2} + \sqrt{(3 - 2\sqrt{2})^2} \\
 \text{p)} \sqrt[3]{(3 - \sqrt{2})^6} - \sqrt[3]{(2 - \sqrt{2})^3} + \sqrt{(3 - 5\sqrt{2})^2} \\
 \text{q)} \sqrt{(2\sqrt{7} - 6)^2} + \sqrt{9\sqrt{49}} + (-3 + \sqrt{343})^2 \\
 \text{r)} \sqrt{(3\sqrt{7} - 8)^2} + \sqrt{25\sqrt{49}} + (-5 + \sqrt{175})^2.
 \end{array}$$

Solución

$$\begin{array}{l}
 \text{a)} 4^3 + 5^2 - 3^2 - 4^0 = 64 + 25 - 9 - 1 = 89 - 10 = 79. \\
 \text{b)} \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 - \frac{3}{4} \left(\frac{2}{9}\right)^2 = \frac{9}{4} + \frac{1}{36} - \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{81} = \frac{9}{4} + \frac{1}{2^2 \cdot 3^2} - \frac{12}{2^2 \cdot 3^4} = \frac{9 \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^2 - 12}{2^2 \cdot 3^4} = \\
 \frac{9 \cdot 81 + 9 - 12}{2^2 \cdot 3^4} = \frac{9 \cdot 81 - 3}{2^2 \cdot 3^4} = \frac{3 \cdot 81 - 1}{2^2 \cdot 3^3} = \frac{243 - 1}{2^2 \cdot 3^3} = \frac{242}{2^2 \cdot 3^3} = \frac{121}{2 \cdot 3^3} = \frac{121}{54}. \\
 \text{c)} 4 + 5 \cdot 2 - 3 \cdot 2 + 5 = 4 + 10 - 6 + 5 = 19 - 6 = 13. \\
 \text{d)} -5(-1) + 3^2 - 4^2 - 7^3 = 5 + 9 - 16 - 343 = 14 - 359 = -345. \\
 \text{e)} -3^2 + (4^2 - 5^2) : (2^5 - 3^3) = -9 + \frac{16 - 25}{32 - 27} = -9 + \frac{-9}{5} = \frac{-45 - 9}{5} = -\frac{54}{5}. \\
 \text{f)} 9\sqrt{12} - 5\sqrt{27} - 7\sqrt{75} = 9\sqrt{2^2 \cdot 3} - 5\sqrt{3^3} - 7\sqrt{5^2 \cdot 3} = 9 \cdot 2\sqrt{3} - 3 \cdot 5\sqrt{3} - 7 \cdot 5\sqrt{3} = 18\sqrt{3} - 15\sqrt{3} - \\
 35\sqrt{3} = -32\sqrt{3}. \\
 \text{g)} [2\sqrt{98} - 5\sqrt{50} - 7\sqrt{8}] [-7\sqrt{2} + \sqrt{242}] = \\
 [2\sqrt{7^2 \cdot 2} - 5\sqrt{5^2 \cdot 2} - 7\sqrt{2^3}] [-7\sqrt{2} + \sqrt{11^2 \cdot 2}] =
 \end{array}$$

$$[2 \cdot 7\sqrt{2} - 5 \cdot 5\sqrt{2} - 7 \cdot 2\sqrt{2}] [-7\sqrt{2} + 11\sqrt{2}] = [14\sqrt{2} - 25\sqrt{2} - 14\sqrt{2}] 4\sqrt{2} = -25\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} = -100 \cdot 2 = -200.$$

$$\text{h)} \left| -\frac{1}{5} + 3 \right| + \left| -2 + \frac{3}{5} \right| + \left| -\frac{2}{5} - 1 \right| = \left| \frac{-1+15}{5} \right| + \left| \frac{-10+3}{5} \right| + \left| \frac{-2-5}{5} \right| = \frac{1}{5}(|14| + |-7| + |-7|) = \frac{1}{5}(14+7+7) = \frac{28}{5}.$$

$$\text{i)} \text{ Como } 7 > 1 \implies \sqrt{7} > 1 \implies \sqrt{7} - 1 > 0 \implies |\sqrt{7} - 1| = \sqrt{7} - 1 \implies |\sqrt{7} - 1| + |\sqrt{7} + 1| = \sqrt{7} - 1 + \sqrt{7} + 1 = 2\sqrt{7}.$$

$$\text{j)} \text{ Como } 36 > 3 \implies \sqrt{36} > \sqrt{3} \implies 6 > \sqrt{3} \implies \sqrt{3} - 6 < 0 \implies |\sqrt{3} - 6| = -(\sqrt{3} - 6), \text{ entonces } |-2\sqrt{3} - 1| + |\sqrt{3} - 6| = -(-2\sqrt{3} - 1) - (\sqrt{3} - 6) = 2\sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} + 6 = \sqrt{3} + 7.$$

$$\text{k)} \text{ Como } 25 > 2 \implies 5 > \sqrt{2} \implies 5 - \sqrt{2} > 0, \text{ además } 9 > 2 \implies 3 > \sqrt{2} \implies \sqrt{2} - 3 < 0, \text{ también } 9 > 8 \implies 3 > \sqrt{8} \implies \sqrt{8} - 3 < 0, \text{ entonces } |5 - \sqrt{2}| + |\sqrt{2} - 3| + |-\sqrt{2} - 1| + |\sqrt{8} - 3| = 5 - \sqrt{2} + -(\sqrt{2} - 3) + -(-\sqrt{2} - 1) + -(\sqrt{8} - 3) = 5 - \sqrt{2} - \sqrt{2} + 3 + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{8} + 3 = 5 - \sqrt{2} - \sqrt{2} + 3 + \sqrt{2} + 1 - 2\sqrt{2} + 3 = -3\sqrt{2} + 12.$$

Nota: Recuerde que $|a| = |-a|$, **y** $|ab| = |a||b|$.

$$\text{l)} |\sqrt{20} - 4| - 2|2 - \sqrt{5}| = |\sqrt{2^2 \cdot 5} - 4| - 2|2 - \sqrt{5}| = |2\sqrt{5} - 4| - 2|2 - \sqrt{5}| = |2(\sqrt{5} - 2)| - 2|2 - \sqrt{5}| = 2|\sqrt{5} - 2| - 2|\sqrt{5} - 2| = 0.$$

$$\text{m)} |\sqrt{54} - 8| - 2|5 - \sqrt{24}| + |-\sqrt{6} + 3| = |\sqrt{9 \cdot 6} - 8| - 2|5 - \sqrt{4 \cdot 6}| + |-\sqrt{6} + 3| = |3\sqrt{6} - 8| - 2|5 - 2\sqrt{6}| + |3 - \sqrt{6}| = -(3\sqrt{6} - 8) - 2(5 - 2\sqrt{6}) + 3 - \sqrt{6} = 8 - 3\sqrt{6} - 10 + 4\sqrt{6} + 3 - \sqrt{6} = 1.$$

$$\text{n)} \text{ Como } 2 < e < 3 \implies |e - 1| = e - 1; |2e + 3| = 2e + 3; |e - 3| = 3 - e, \text{ entonces } |e - 1| + |2e + 3| + |e - 3| = e - 1 + 2e + 3 + 3 - e = 2e + 5.$$

$$\text{ñ)} \text{ Dado que } 3 < \pi < 4 \implies |3\pi - 9| = 3|\pi - 3| = 3(\pi - 3) = 3\pi - 9; |5 - 2\pi| = 2\pi - 5; \left| \frac{\pi}{2} - 1 \right| = \frac{\pi}{2} - 1; \left| 4 - \frac{3\pi}{2} \right| = \frac{3\pi}{2} - 4, \text{ entonces } |3\pi - 9| + |5 - 2\pi| - \left| \frac{\pi}{2} - 1 \right| + \left| 4 - \frac{3\pi}{2} \right| = 3\pi - 9 + 2\pi - 5 - \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) + \frac{3\pi}{2} - 4 = 3\pi - 9 + 2\pi - 5 - \frac{\pi}{2} + 1 + \frac{3\pi}{2} - 4 = 5\pi - 17 + \frac{-\pi + 3\pi}{2} = 5\pi - 17 + \frac{2\pi}{2} = 6\pi - 17.$$

Nota: Recuerde que $\sqrt{a^2} = |a|$.

$$\text{o)} \sqrt{(5 - \sqrt{2})^2} + 2\sqrt{(\sqrt{2} - 7)^2} + \sqrt{(3 - 2\sqrt{2})^2} = |5 - \sqrt{2}| + 2|\sqrt{2} - 7| + |3 - 2\sqrt{2}| = 5 - \sqrt{2} + 2(-(\sqrt{2} - 7)) + (3 - 2\sqrt{2}) = 5 - \sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 14 + 3 - 2\sqrt{2} = -5\sqrt{2} + 22.$$

$$\text{p)} \sqrt[3]{(3 - \sqrt{2})^6} - \sqrt[3]{(2 - \sqrt{2})^3} + \sqrt{(3 - 5\sqrt{2})^2} = (3 - \sqrt{2})^2 - (2 - \sqrt{2}) + |3 - 5\sqrt{2}| = 9 - 6\sqrt{2} + 2 - 2 + \sqrt{2} + -(3 - 5\sqrt{2}) = 9 - 6\sqrt{2} + 2 - 2 + \sqrt{2} - 3 + 5\sqrt{2} = 6.$$

$$\text{q)} \sqrt{(2\sqrt{7} - 6)^2} + \sqrt{9 \cdot 49} + (-3 + \sqrt{343})^2 = |2\sqrt{7} - 6| + 3\sqrt{7} + (-3 + 7\sqrt{7})^2 = 6 - 2\sqrt{7} + 3\sqrt{7} + 9 - 42\sqrt{7} + 343 = 358 - 41\sqrt{7}.$$

$$\text{r)} \sqrt{(3\sqrt{7} - 8)^2} + \sqrt{25 \cdot 49} + (-5 + \sqrt{175})^2 = |3\sqrt{7} - 8| + 5\sqrt{7} + (-5 + 5\sqrt{7})^2 = 8 - 3\sqrt{7} +$$

$$5\sqrt{7} + 25 - 50\sqrt{7} + 175 = 208 - 48\sqrt{7}.$$

2. Resuelva las ecuaciones en el conjunto que se indica.

a) $x - 5 = 1, \mathbb{Z}$

b) $x^2 - 9 = 16, \mathbb{N}$

c) $2x - 1 = 0, \mathbb{Z}$

d) $-4x + 3 = 5x - 2, \mathbb{Q}$

e) $7x - 8 \leq 8, \mathbb{I}$

f) $14x + 3 \leq 6x - 9, \mathbb{Q}$

g) $5x + 1 \leq 2x - 8, \mathbb{Z}$

h) $5x - 3 \geq x - \frac{1}{2}, \mathbb{Z}$

i) $3x - 2 \leq x + 8, \mathbb{R}$

j) $\frac{x}{2} - 1 > \frac{x}{6} + \frac{1}{3}, \mathbb{R}.$

Solución

a) $x - 5 = 1, \mathbb{Z} \implies x = 6$. Como $6 \in \mathbb{Z}$, entonces se tiene $S = \{6\}$.

b) $x^2 - 9 = 16, \mathbb{N} \implies x^2 = 25 \implies x = 5$ o $x = -5$. Como $-5 \notin \mathbb{N}$ y $5 \in \mathbb{N}$ se tiene $S = \{5\}$.

c) $2x - 1 = 0, \mathbb{Z} \implies x = \frac{1}{2}$. Como $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$. No tiene solución en $\mathbb{Z}$.

d) $-4x + 3 = 5x - 2, \mathbb{Q} \implies -9x = -5 \implies x = \frac{5}{9}$. Como $\frac{5}{9} \in \mathbb{Q}$, $S = \{\frac{5}{9}\}$.

e) $7x - 8 \leq 8, \mathbb{I} \implies 7x \leq 16 \implies x \leq \frac{16}{7}$ y $S = \{x \in \mathbb{I} / x \leq \frac{16}{7}\}$.

f) $14x + 3 \leq 6x - 9, \mathbb{Q} \implies 8x \leq -12 \implies x \leq -\frac{3}{2}$, $S = \{x / x \leq -\frac{3}{2}, x \in \mathbb{Q}\}$.

g) $5x + 1 \leq 2x - 8, \mathbb{Z} \implies 3x \leq -9 \implies x \leq -\frac{9}{3} \implies x \leq -3$ y $S = \{\dots, -6, -5, -4, -3\}$, o bien $S = \{x / x \leq -3, x \in \mathbb{Z}\}$.

h) $5x - 3 \geq x - \frac{1}{2}, \mathbb{Z} \implies 4x \geq 3 - \frac{1}{2} \implies 4x \geq \frac{5}{2} \implies x \geq \frac{5}{8}$. $S = \{1, 2, 3, \dots\}$, o bien $S = \{x / x \geq 1, x \in \mathbb{Z}\}$, o bien $S = \mathbb{Z}^+$.

i) $3x - 2 \leq x + 8, \mathbb{R} \implies 2x \leq 10 \implies x \leq 5$. $S = \{x / x \leq 5, x \in \mathbb{R}\}$, o $S =]-\infty, 5]$.

j) $\frac{1}{2}x - 1 > \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}, \mathbb{R} \implies \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}x > 1 + \frac{1}{3} \implies \frac{3x - x}{6} > \frac{3 + 1}{3} \implies \frac{2x}{6} > \frac{4}{3} \implies x > 4$ y $S =]4, \infty[$.

3. Calcule $A \cap B$ y $A \cup B$ en cada caso. Use notación de intervalo.

a) $A =]-2, 7], B = [-4, 1]$

b) $A =]-\infty, 2], B = [-1, e]$

c) $A = [-1, 2] \cup [4, 7], B = [0, 3] \cup [\frac{9}{2}, 8]$

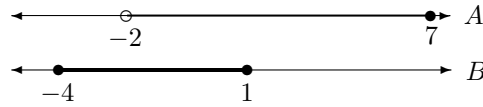
d) $A = [-2, 1] \cup [\sqrt{10}, 5], B = [0, \frac{1}{2}] \cup [\sqrt[3]{31}, 6]$

e) $A = [-2, e] \cup [3\pi, +\infty[, B =]-\infty, 2] \cup [e, 3\pi]$

f) $A = \{x \in \mathbb{R} / x \leq -5 \vee x \geq \sqrt{5}\}, B = \{x \in \mathbb{R} / -\sqrt{26} \leq x \leq 2e + 1\}$.

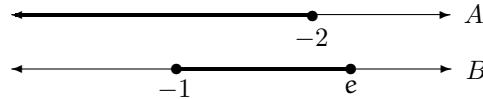
Solución

a) $A =]-2, 7], B = [-4, 1]$.



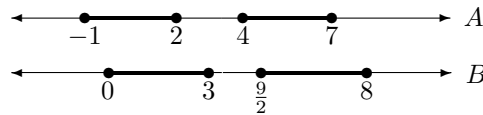
$$A \cup B = [-4, 7], A \cap B =]-2, 1].$$

b) $A =]-\infty, 2], B = [-1, e].$



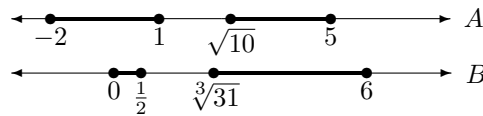
$$A \cup B =]-\infty, e], A \cap B = [-1, 2].$$

c) $A = [-1, 2] \cup [4, 7], B = [0, 3] \cup [\frac{9}{2}, 8].$



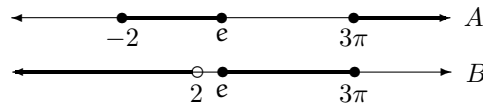
$$A \cup B = [-1, 3] \cup [4, 8], A \cap B = [0, 2] \cup [\frac{9}{2}, 7].$$

d) $A = [-2, 1] \cup [\sqrt{10}, 5], B = [0, \frac{1}{2}] \cup [\sqrt[3]{31}, 6].$



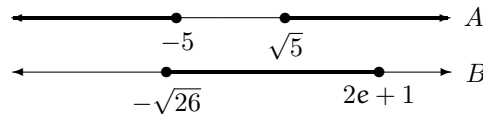
$$A \cup B = [-2, 1] \cup [\sqrt[3]{31}, 6], A \cap B = [0, \frac{1}{2}] \cup [\sqrt{10}, 5].$$

e) $A = [-2, e] \cup [3\pi, +\infty[, B =]-\infty, 2[\cup [e, 3\pi].$



$$A \cup B = \mathbb{R}, A \cap B = [-2, 2[\cup \{e, 3\pi\}.$$

f) $A = \{x \in \mathbb{R} / x \leq -5 \vee x \geq \sqrt{5}\}, B = \{x \in \mathbb{R} / -\sqrt{26} \leq x \leq 2e + 1\}.$



$$A \cup B = \mathbb{R}, A \cap B = [-\sqrt{26}, -5] \cup [\sqrt{5}, 2e + 1].$$

4. Encuentre la expresión decimal de los siguientes números racionales dados en forma fraccionaria.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{51}{4} & \text{b)} -\frac{17}{8} & \text{c)} \frac{37}{3} \\ \text{d)} -\frac{125}{11} & \text{e)} \frac{499}{165}. & \end{array}$$

Solución

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{51}{4} = 12,75 & \text{b)} -\frac{17}{8} = -2,125 & \text{c)} \frac{37}{3} = 12,3333\dots = 12,\overline{3}. \\ \text{d)} -\frac{125}{11} = -11,\overline{36} & \text{e)} \frac{499}{165} = 3,024. & \end{array}$$

5. Sea el número racional $r = 21,\overline{5}$.

a) Calcule $10r$ y $9r$.

b) Encuentre la forma fraccionaria mas simple de r .

Solución

$$\text{a)} 10r = 10(21,\overline{5}) = 215,\overline{5} \implies 10r - r = 215,\overline{5} - 21,\overline{5} \implies 9r = 194.$$

$$\text{b)} 9r = 194, r = \frac{194}{9} \implies 21,\overline{5} = \frac{194}{9}.$$

6. Encuentre la expresión fraccionaria mas simple para los números racionales dados en forma decimal.

$$\begin{array}{lllll} \text{a)} -4,1 & \text{b)} 23,05 & \text{c)} -102,\overline{24} & \text{d)} 4,\overline{25} & \text{e)} 2,\overline{9} \\ \text{f)} 2,0\overline{9} & \text{g)} 3,\overline{1}. & & & \end{array}$$

Solución

$$\text{a)} -4,1 = -\frac{41}{10}.$$

$$\text{b)} 23,05 = \frac{2305}{100} = \frac{461}{20}.$$

$$\begin{aligned} \text{c)} } r = -102,\overline{24} \implies 100r - r = -10122 \implies 99r = -10122 \implies r = -\frac{10122}{99} \implies \\ r = -\frac{3374}{33} \text{ i.e. } -102,\overline{24} = -\frac{3374}{33}. \end{aligned}$$

$$\text{d)} } r = 4,\overline{25} \implies 100r - r = 421 \implies 99r = 421 \implies r = \frac{421}{99} \text{ i.e. } 4,\overline{25} = \frac{421}{99}.$$

$$\text{e)} } r = 2,\overline{9} \implies 10r - r = 27 \implies 9r = 27 \implies r = \frac{27}{9} = 3 \text{ i.e. } 2,\overline{9} = 3.$$

$$\text{f)} } r = 2,0\overline{9} \implies 100r - 10r = 189 \implies 90r = 189 \implies r = \frac{189}{90} = \frac{21}{10} \text{ i.e. } 2,0\overline{9} = \frac{21}{10}.$$

$$\text{g)} } r = 3,\overline{1} \implies 10r - r = 28 \implies 9r = 28 \implies r = \frac{28}{9} \text{ i.e. } 3,\overline{1} = \frac{28}{9}.$$

7. Exprese el total de las siguientes sumas infinitas como número racional en forma fraccionaria:

$$\text{a)} 5,2 + 0,02 + 0,002 + 0,0002 + 0,00002 + \dots$$

- b) $5 + \frac{4}{100} + \frac{4}{10000} + \frac{4}{1000000} + \cdots + \frac{4}{10^{2n}} + \cdots, (n \in \mathbb{Z}^+).$
- c) $7 + \frac{3}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \frac{3}{10^5} + \cdots + \frac{1}{10^{2n}} + \frac{3}{10^{2n+1}} + \cdots, (n \in \mathbb{Z}^+)$
- d) $8 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{10^n}$
- e) $11 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^{2n}}.$

Solución

- a) $r = 5,2 + 0,02 + 0,002 + 0,0002 + 0,00002 + \cdots = 5,222\ldots = 5,\bar{2} \Rightarrow 10r - r = 52, \bar{2} - 5, \bar{2} \Rightarrow 9r = 47 \Rightarrow r = \frac{47}{9}.$
- b) $r = 5 + \frac{4}{100} + \frac{4}{10000} + \frac{4}{1000000} + \cdots + \frac{4}{10^{2n}} + \cdots, (n \in \mathbb{Z}^+)$ y $r = 5 + 0,04 + 0,0004 + 0,000004 + \cdots, 5, \overline{04} = 5,04040404\ldots = 100r - r = 499 \Rightarrow 99r = 499 \Rightarrow r = \frac{499}{99}.$
- c) $r = 7 + \frac{3}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \frac{3}{10^5} + \cdots + \frac{1}{10^{2n}} + \frac{3}{10^{2n+1}} + \cdots = 7,313131\ldots = 7, \overline{31} \Rightarrow 100r - r = 731, \overline{31} - 7, \overline{31} \Rightarrow 99r = 724 \Rightarrow r = \frac{724}{99}.$
- d) $r = 8 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{10^n} = 8 + \frac{5}{10} + \frac{5}{100} + \cdots = 8, \bar{5} \Rightarrow 10r - r = 85, \bar{5} - 8, \bar{5} \Rightarrow 9r = 77 \Rightarrow r = \frac{77}{9}.$
- e) $r = 11 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^{2n}} = 11 + \frac{3}{100} + \frac{3}{10000} + \cdots = 11 + 0,03 + 0,0003 + \cdots = 11, \overline{03} \Rightarrow 100r - r = 1092 \Rightarrow r = \frac{1092}{99} = \frac{364}{33}.$

8. Efectúe las siguientes operaciones y exprese el resultado en la forma $a + b\sqrt{c}$ con a, b, c números racionales y c un entero positivo.

a) $(\sqrt{3} - 5)^2$ b) $\sqrt{28 - 10\sqrt{3}}$ c) $(2\sqrt{7} - 3)^2$ d) $\sqrt{37 - 12\sqrt{7}}.$

Solución

- a) $(\sqrt{3} - 5)^2 = (\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 5(\sqrt{3}) + 5^2 = 3 - 10\sqrt{3} + 25 = 28 - 10\sqrt{3}.$
- b) $\sqrt{28 - 10\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3} - 5)^2} = |\sqrt{3} - 5| = 5 - \sqrt{3}, (\text{ver a}).$
- c) $(2\sqrt{7} - 3)^2 = (2\sqrt{7})^2 - 2(2\sqrt{7})(3) + 3^2 = 28 - 12\sqrt{7} + 9 = 37 - 12\sqrt{7}.$
- d) $\sqrt{37 - 12\sqrt{7}} = \sqrt{(2\sqrt{7} - 3)^2} = |2\sqrt{7} - 3| = 2\sqrt{7} - 3.$

9. Encuentre dos números racionales a y b tal que $\sqrt{66 + 40\sqrt{2}} = a\sqrt{2} + b.$

Solución Dado que $\sqrt{66 + 40\sqrt{2}} = a\sqrt{2} + b \Rightarrow (\sqrt{66 + 40\sqrt{2}})^2 = (a\sqrt{2} + b)^2 \Rightarrow 66 + 40\sqrt{2} = 2a^2 + 2ab\sqrt{2} + b^2$, entonces $2ab = 40, 2ab^2 + b^2 = 66 \Rightarrow ab = 20 \Rightarrow b = \frac{20}{a}$ y $2a^2 + \frac{400}{a^2} = 66 \Rightarrow 2a^4 - 66a^2 + 400 = 0 \Rightarrow a^4 - 33a^2 + 200 = 0 \Rightarrow a^2 - 20 = 0, a^2 = 20 \Rightarrow a = \pm 2\sqrt{5}, a = \pm 5.$ Pero se eliminan las soluciones irracionales $a = \pm 2\sqrt{5}$, por que se busca $a, b \in \mathbb{Q}.$

También se elimina la solución negativa $a = -5$, pues $b = \frac{20}{-5} = -4$ y $\sqrt{66 + 40\sqrt{2}} \neq -5\sqrt{2} - 4$.

Así, $a = 5 \implies b = \frac{20}{5} = 4$; o sea $\sqrt{66 + 40\sqrt{2}} = 5\sqrt{2} + 4$.

10. Expresa $\sqrt{61 - 28\sqrt{3}}$ como una suma de dos números reales.

Solución Suponiendo que $\sqrt{61 - 28\sqrt{3}}$ se escribe como $\sqrt{(a + b\sqrt{3})^2} = |a + b\sqrt{3}|$ tenemos que $61 - 28\sqrt{3} = a^2 + 2ab\sqrt{3} + 3b^2$, entonces $2ab = -28$, $a^2 + 3b^2 = 61 \implies ab = -14 \implies b = \frac{-14}{a}$ y $a^2 + 3\left(\frac{-14}{a}\right)^2 = 61 \implies a^2 + \frac{588}{a^2} = 61 \implies a^4 - 61a^2 + 588 = 0 \implies a^2 = 12$, $a^2 = 49 \implies a = \pm 2\sqrt{3}$, $a = \pm 7$.

Ahora, si $a = \pm 2\sqrt{3} \implies b = -\left(\frac{14}{\pm 2\sqrt{3}}\right) = \mp \frac{7\sqrt{3}}{3}$.

si $a = 2\sqrt{3}$ y $b = -\frac{7\sqrt{3}}{3} \implies a + b\sqrt{3} = 2\sqrt{3} - \frac{7\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = -2\sqrt{3} - 7 < 0 \implies \sqrt{61 - 28\sqrt{3}} \neq 2\sqrt{3} - 7$.

Si $a = -2\sqrt{3}$ y $b = \frac{7\sqrt{3}}{3} \implies a + b\sqrt{3} = -2\sqrt{3} + \frac{7\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = -2\sqrt{3} + 7 = \sqrt{61 - 28\sqrt{3}}$.

Además si $a = \pm 7 \implies b = -\left(\frac{14}{\pm 7}\right) = \mp 2$.

Si $a = 7$ y $b = -2 \implies a + b\sqrt{3} = 7 - 2\sqrt{3} = \sqrt{61 - 28\sqrt{3}}$.

Si $a = -7$ y $b = 2 \implies a + b\sqrt{3} = -7 + 2\sqrt{3} < 0 \implies \sqrt{61 - 28\sqrt{3}} \neq -7 + 2\sqrt{3}$.

Por lo tanto $\sqrt{61 - 28\sqrt{3}} = 7 - 2\sqrt{3}$.

Capítulo 2

Ejercicios de Polinomios

1. Determine el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas:

a) $x^2 - 7x + 8$, $x = -3$.

b) $3x^2 - 4x + 5$, $x = -\frac{4}{3}$.

c) $2x^2a - x^3 + a^2 - x$, $a = 3$, $x = -2$.

d) $(x - 2a)(2x - a)(x - a)$, $x = 4$, $a = -1$.

2. Calcule $\frac{P(a) - P(b)}{a - b}$ en cada caso:

a) $P(x) = x^2 - 1$, $a = \sqrt{3}$, $b = -3$.

b) $P(x) = -x^2 + 3x - 1$, $a = 2\sqrt{2} - 1$, $b = -\sqrt{2} + 2$.

c) $P(x) = x^3 - 2x + 1$, $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{5}{6}$.

d) $P(x) = -2x^2 - x + 3$, $a = 1 + k$, $b = 2 - k$.

3. Simplifique las expresiones. Dé el resultado en forma de polinomio.

a) $-x^2(x - 1)^2 + x^3(2x - 1)^2$.

b) $-x + (-x + 1)^2 - x(x - 2)(x + 2)$.

c) $(-x^2 - 2)^2 + (-3x^2 + 1)^2$.

d) $(2x - 1)^3 - (2x + 1)^3$.

e) $[(x - 1)^2 - (2x + 3)^2 + 3(x - 1)^2]^2$.

f) $(-4a + 2)^3 + (2a - 1)^3 + (-a - 2)^3$.

g) $7x(2x - 5) - 4x(-2x + 3)$.

h) $-(4x - 1)(3x - 2) - (6x - 3)(4 - 2x)$.

i) $(4 - 2a)(2a - 4) - (4a - 2)(2 - 4a)$.

j) $(2x + 3)^2 + (3x - 1) + (-2x - 5)^2$.

k) $(5a^3 - 7)^2 - (3a^3 - 2)^2$.

l) $(\frac{x}{2} - \frac{4}{5})^2 - (\frac{2x}{5} - \frac{3}{2})^2$.

m) $3x(-11 + 2x) - (3x - 5)(3x + 5) + (-9 + 2x)(9 + 2x)$.

n) $[(4x - 1)^2 - (x - 4)^2]^2$.

4. Encuentre los ceros racionales de los polinomios y factorice al máximo:

a) $P(x) = 27x^3 + 36x^2 - 75x - 100$.

b) $P(x) = -5x^3 + 135$.

c) $P(x) = 16x^3 - 60x^2 + 36x + 35.$

e) $P(x) = x^3 - 36x^2 + 251x - 216.$

g) $P(x) = 2x^2 - 7x + 3.$

i) $P(x) = x^3 - 8.$

k) $P(x) = x^3 + x^2 - 17x + 15.$

m) $P(x) = x^2 + 2x + 10.$

o) $P(x) = x^2 + (a - b)x - ab, a, b \in \mathbb{R}.$

d) $P(x) = x^4 + 5x^2 + 4.$

f) $P(x) = x^9 - 36x^6 + 251x^3 - 216.$

h) $P(x) = x^3 - 4x.$

j) $P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 19x + 6.$

l) $P(x) = 24x^3 + 46x^2 + 29x - 6.$

n) $P(x) = x^2 + (a + b)x + ab, a, b \in \mathbb{R}.$

p) $P(x) = (x - 1)^6 - 64.$

5. Factorice al máximo:

a) $(x + 8)^8 + 5(x + 8)^4 + 6.$

c) $(8x^3 - 27) + (8x^2 - 14x + 3).$

e) $(x - 1)^6 + 26(x - 1)^3 - 27.$

g) $4x^4 + 20x^2 + 25.$

i) $x^{2a} - 1, a \in \mathbb{Z}^+.$

k) $(x^2 - 7x + 6)^2 + 10(x^2 - 7x + 6) + 24.$

m) $x^{12} - 2x^6 + 1.$

o) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1.$

q) $x^4(20x^2 + 27x - 14)^5 - (20x^2 + 27x - 14)^5.$

r) $(x - 1)^5 - (x - 1)^4.$

t) $5x^3(8x^3 + 27)^2 + (120x^3 - 1)(8x^3 + 27)^2.$

b) $(x - 6)^2 - 29(x - 6) + 100.$

d) $625x^4 - 81.$

f) $(x - 1)^4 + 5(x - 1)^2 - 36.$

h) $x^2(x + 2)^6 - 5x(x + 2)^6 - 14(x + 2)^6.$

j) $81x^4 - 16.$

l) $(x + 3)^6 + 7(x + 3)^3 - 8.$

n) $x^4 + 8x^2 + 16.$

p) $(x^2 - 3x + 3)^3 + 2(x^2 - 3x + 3)^2 - 3.$

s) $x^{12} - 4096.$

6. Racionalice el denominador y simplifique las siguientes expresiones:

a) $\frac{88\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 5}.$

c) $\frac{x^3 - 125}{3 - \sqrt{x^2 - 16}}.$

e) $\frac{x^2 + 6x + 9}{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 2x - 5}}.$

g) $\frac{2x^2 - 5x - 3}{x\sqrt{x} + \sqrt{27}}.$

b) $\frac{x^2 - 8x + 15}{\sqrt{x + 1} - 2}.$

d) $\frac{111}{2\sqrt{3} - 7}.$

f) $\frac{x^2 - 9x + 20}{2x + 1 - \sqrt{x^2 + 13x + 13}}.$

h) $\frac{x^2 + 5x - 14}{x\sqrt{x} - 2\sqrt{2}}.$

7. Encuentre el cociente y el residuo que se obtiene al efectuar la división $P(x) : Q(x)$

a) $P(x) = -6x^3 + 4x - 1, Q(x) = x^2 - 1.$

- b) $P(x) = 4x^3 - 8x^2 + x - 2$, $Q(x) = x^3 + x + 1$.
- c) $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + x - 1$, $Q(x) = x + 4$.
- d) $P(x) = x^4 - 6x + 8$, $Q(x) = x - 2$.
- e) $P(x) = x^5 - 2x + 1$, $Q(x) = 2x - 1$.
8. Sea $P(x) = kx^{15} - 6kx^{14} + x - 6$ y k un número real.
- a) Determine k (si existe) para que $(x + 1)$ sea factor de $P(x)$.
- b) Determine k (si existe) para que $x = 6$ sea un cero de $P(x)$.
- c) Si $k > 0$, cuáles son los ceros reales de $P(x)$?
- d) Si $k < 0$, cuáles son los ceros reales de $P(x)$?
9. Simplifique las siguientes expresiones:
- a) $\frac{1}{x^2 - 1} + \frac{1}{x^2 + 4x + 3}$.
- b) $\frac{3x}{x^2 - 4} + \frac{1}{x^2 + 4x + 4}$.
- c) $\frac{1}{9x^2 + 12x + 4} + \frac{1}{6x^2 + x - 2} - \frac{4(x + 1)}{18x^3 + 15x^2 - 4x - 4}$.
- d) $\frac{1}{x + 4} - \frac{2x + 1}{x - 2} + \frac{2x^2 - x}{x^2 + 2x - 8}$.
- e) $\frac{1 - x}{x^3 - 8} - \frac{3}{4 - x^2}$.
- f) $\frac{1}{x^4 - x} + \frac{1}{x^5 - x^2} + \frac{1}{x^6 - x^3}$.
10. Considere el polinomio $P(x) = x^2 - kx - k - 1$, con k número real.
- a) Pruebe que $(x - k - 1)$ es factor de $P(x)$.
- b) Usando a) encuentre un valor de k para que $(x - 342)$ sea factor de $P(x)$.
11. Considere el polinomio $P(x) = x^4 - (3 + k)x^3 + (2 + 3k)x^2 - 2kx$.
- a) Verifique que 0 y k son ceros de $P(x)$.
- b) Encuentre todos los ceros de $P(x)$.
- c) Escriba la factorización completa de $P(x)$.
12. Sea $P(x) = 9x^3 - 18x^2 - 25x - 6$.
- a) Pruebe que $-\frac{2}{3}$ es un cero de $P(x)$.
- b) Factorice $P(x)$ en forma completa.
13. Calcule $2P(1 - \sqrt{5}) + 3P(-2\sqrt{5} + 3)$, si $P(x) = x^4 - 3x^2 + 10$.
14. Sea el polinomio $P(x) = kx^{20} - 9kx^{18} + 2x - 6$, con k número real.
- a) Determine si $(x - 3)$, es factor de $P(x)$.

b) Calcule el valor de k para que $(x + 1)$ sea un factor de $P(x)$.

15. Sea $P(x) = -kx^5 + 5(kx)^3 + 2(k^2x)^2$, con k número real:

a) Sin hacer la división, determine si $(x + 2k)$, es factor de $P(x)$.

b) Calcule un valor de k diferente de 0, para que $(x - 1)$ sea factor de $P(x)$.

Sugerencia: Use a).

16. Considere el polinomio $P(x)$. En cada caso encuentre los ceros reales de $P(x)$ y factorícelo en forma completa.

a) $P(x) = -4x^6 + 29x^4 - 21x^2 - 54$.

b) $P(x) = -9x^6 + 58x^4 + 39x^2 - 28$.

Soluciones del Tema No.2: Polinomios

1. Determine el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas:

a) $x^2 - 7x + 8$, $x = -3$.

Solución $(-3)^2 - 7(-3) + 8 = 9 + 21 + 8 = 38$.

b) $3x^2 - 4x + 5$, $x = -\frac{4}{3}$.

Solución $3(-\frac{4}{3})^2 - 4(-\frac{4}{3}) + 5 = 3 \cdot \frac{16}{9} + \frac{16}{3} + 5 = \frac{16}{3} + \frac{16}{3} + 5 = \frac{32}{3} + 5 = \frac{32+15}{3} = \frac{47}{3}$.

c) $2x^2a - x^3 + a^2 - x$, $a = 3$, $x = -2$.

Solución $2(-2)^2 \cdot 3 - (-2)^3 + 3^2 - (-2) = 24 + 8 + 9 + 2 = 43$.

d) $(x - 2a)(2x - a)(x - a)$, $x = 4$, $a = -1$.

Solución $(4 - 2(-1))(2 \cdot 4 - (-1))(4 - (-1)) = (4 + 2)(8 + 1)(4 + 1) = 6 \cdot 9 \cdot 5 = 270$.

2. Calcule $\frac{P(a) - P(b)}{a - b}$ en cada caso:

a) $P(x) = x^2 - 1$, $a = \sqrt{3}$, $b = -3$.

Solución Observe que $P(a) = a^2 - 1$ y $P(b) = b^2 - 1$, entonces:

$$\frac{P(a) - P(b)}{a - b} = \frac{a^2 - 1 - (b^2 - 1)}{a - b} = \frac{a^2 - 1 - b^2 + 1}{a - b} = \frac{a^2 - b^2}{a - b} = \frac{(a - b)(a + b)}{a - b} = a + b = \sqrt{3} - 3.$$

b) $P(x) = -x^2 + 3x - 1$, $a = 2\sqrt{2} - 1$, $b = -\sqrt{2} + 2$.

Solución Como $P(a) = -a^2 + 3a - 1$ y $P(b) = -b^2 + 3b - 1$, se tiene que $\frac{P(a) - P(b)}{a - b} = \frac{-a^2 + 3a - 1 - (-b^2 + 3b - 1)}{a - b} = \frac{-a^2 + 3a - 1 + b^2 - 3b + 1}{a - b} = \frac{-a^2 + b^2 + 3a - 3b}{a - b} = \frac{-(a^2 - b^2) + 3(a - b)}{a - b} = \frac{-(a - b)(a + b) + 3(a - b)}{a - b} = \frac{(a - b)[-(a + b) + 3]}{a - b} = -a - b + 3 = -(2\sqrt{2} - 1) - (-\sqrt{2} + 2) + 3 = -2\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} - 2 + 3 = 2 - \sqrt{2}$.

c) $P(x) = x^3 - 2x + 1$, $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{5}{6}$.

Solución Se tiene que $P(a) = a^3 - 2a + 1$ y $P(b) = b^3 - 2b + 1$, entonces:

$$\begin{aligned} \frac{P(a) - P(b)}{a - b} &= \frac{a^3 - 2a + 1 - (b^3 - 2b + 1)}{a - b} = \frac{a^3 - 2a + 1 - b^3 + 2b - 1}{a - b} = \frac{a^3 - b^3 - 2a + 2b}{a - b} \\ &= \frac{(a^3 - b^3) - 2(a - b)}{a - b} = \frac{(a - b)(a^2 + ab + b^2) - 2(a - b)}{a - b} = \frac{(a - b)(a^2 + ab + b^2 - 2)}{a - b} = \\ a^2 + ab + b^2 - 2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot -\frac{5}{6} + \left(-\frac{5}{6}\right)^2 - 2 = \frac{1}{4} - \frac{5}{12} + \frac{25}{36} - 2 = \frac{9 - 15 + 25 - 72}{36} = -\frac{53}{36}. \end{aligned}$$

d) $P(x) = -2x^2 - x + 3$, $a = 1 + k$, $b = 2 - k$.

Solución Se tiene que $P(a) = -2a^2 - a + 3$ y $P(b) = -2b^2 - b + 3$. Observe que:

$$\begin{aligned}\frac{P(a) - P(b)}{a - b} &= \frac{-2a^2 - a + 3 - (-2b^2 - b + 3)}{a - b} = \frac{-2a^2 - a + 3 + 2b^2 + b - 3}{a - b} = \\ &= \frac{-2(a^2 - b^2) - a + b}{a - b} = \frac{-2(a - b)(a + b) - (a - b)}{a - b} = \frac{(a - b)[-2(a + b) - 1]}{a - b} = \\ &= -2(a + b) - 1 = -2(1 + k + 2 - k) - 1 = -2 \cdot 3 - 1 = -7.\end{aligned}$$

3. Simplifique las expresiones. Dé el resultado en forma de polinomio:

Nota: Recuerde los siguientes resultados:

- a) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
- b) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
- c) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.
- d) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
- e) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.
- f) $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$.
- g) $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$.

a) $-x^2(x - 1)^2 + x^3(2x - 1)^2$.

Solución $-x^2(x^2 - 2x + 1) + x^3(4x^2 - 4x + 1) = -x^4 + 2x^3 - x^2 + 4x^5 - 4x^4 + x^3 = 4x^5 - 5x^4 + 3x^3 - x^2$.

b) $-x + (-x + 1)^2 - x(x - 2)(x + 2)$.

Solución $-x + x^2 - 2x + 1 - x(x^2 - 4) = x^2 - 3x + -x^3 + 4x + 1 = -x^3 + x^2 + x + 1$.

c) $(-x^2 - 2)^2 + (-3x^2 + 1)^2$.

Solución $x^4 + 4x^2 + 4 + 9x^4 - 6x^2 + 1 = 10x^4 - 2x^2 + 5$.

d) $(2x - 1)^3 - (2x + 1)^3$.

Solución $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 - (8x^3 + 12x^2 + 6x + 1) = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 - 8x^3 - 12x^2 - 6x - 1 = -24x^2 - 2$.

e) $[(x - 1)^2 - (2x + 3)^2 + 3(x - 1)^2]^2$.

Solución $[x^2 - 2x + 1 - (4x^2 + 12x + 9) + 3(x^2 - 2x + 1)]^2 =$

$[x^2 - 2x + 1 - 4x^2 - 12x - 9 + 3x^2 - 6x + 3]^2 = [-20x - 5]^2 = 400x^2 + 200x + 25$.

f) $(-4a + 2)^3 + (2a - 1)^3 + (-a - 2)^3$.

Solución $(-64a^3 + 96a^2 - 48a + 8) + (8a^3 - 12a^2 + 6a - 1) - a^3 - 6a^2 - 12a - 8 = -57a^3 + 78a^2 - 54a - 1$.

g) $7x(2x - 5) - 4x(-2x + 3)$.

Solución $14x^2 - 35x + 8x^2 - 12x = 22x^2 - 47x$.

h) $-(4x - 1)(3x - 2) - (6x - 3)(4 - 2x)$.

Solución $-(12x^2 - 8x - 3x + 2) - (24x - 12x^2 - 12 + 6x) = -12x^2 + 11x - 2 + 12x^2 - 30x + 12 = -19x + 10$.

i) $(4 - 2a)(2a - 4) - (4a - 2)(2 - 4a)$.

Solución $-4a^2 + 16a - 16 + 16a^2 - 16a + 4 = 12a^2 - 12$.

j) $(2x + 3)^2 + (3x - 1) + (-2x - 5)^2$.

Solución $4x^2 + 12x + 9 + 3x - 1 + 4x^2 + 20x + 25 = 8x^2 + 35x + 33$.

k) $(5a^3 - 7)^2 - (3a^3 - 2)^2$.

Solución $25a^6 - 70a^3 + 49 - 9a^6 + 12a^3 - 4 = 16a^6 - 58a^3 + 45$.

l) $\left(\frac{x}{2} - \frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{2x}{5} - \frac{3}{2}\right)^2$.

Solución $\left(\frac{5x-8}{10}\right)^2 - \left(\frac{4x-15}{10}\right)^2 = \frac{25x^2 - 80x + 64 - 16x^2 + 120x - 225}{100} = \frac{9x^2 + 40x - 161}{100} = \frac{9}{100}x^2 + \frac{2}{5}x - \frac{161}{100}$.

m) $3x(-11 + 2x) - (3x - 5)(3x + 5) + (-9 + 2x)(9 + 2x)$.

Solución $-33x + 6x^2 - 9x^2 + 25 + 4x^2 - 81 = x^2 - 33x - 56$.

n) $[(4x - 1)^2 - (x - 4)^2]^2$.

Solución $[16x^2 - 8x + 1 - x^2 + 8x - 16]^2 = [15x^2 - 15]^2 = 225x^4 - 450x^2 + 225$.

4. Encuentre los ceros reales de los polinomios y factorice al máximo.

a) $P(x) = 27x^3 + 36x^2 - 75x - 100$.

Solución Agrupando $(27x^3 + 36x^2) - (75x + 100) = 9x^2(3x + 4) - 25(3x + 4) = (9x^2 - 25)(3x + 4) = (3x - 5)(3x + 5)(3x + 4)$.

Los ceros son $-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{4}{3}$.

b) $P(x) = -5x^3 + 135$.

Solución $-5(x^3 - 27) = -5(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$. El cero es 3, pues el polinomio no tiene raíces reales.

c) $P(x) = 16x^3 - 60x^2 + 36x + 35$.

Solución Buscando uno de los ceros se puede evaluar $P(x)$ en $P(-1) = -16 - 60 - 36 + 35 =$

$$-77, p(0) = 35.$$

Como $P(-1) < 0$ y $P(0) > 0$, entonces hay un cero para $P(x)$ tal que $-1 < x < 0$.

$$\text{Probando para } x = -\frac{1}{2} \text{ se tiene } P(-\frac{1}{2}) = 16(-\frac{1}{2})^3 - 60(-\frac{1}{2})^2 + 36(-\frac{1}{2}) + 35 = \\ -\frac{16}{8} - \frac{60}{4} - \frac{36}{2} + 35 = -2 - 15 - 18 + 35 = 0.$$

Por lo tanto uno de los ceros es $-\frac{1}{2}$, entonces $(2x + 1)$ es un factor de $P(x)$. Realizando la división $P(x)/(2x + 1)$, se obtiene que $P(x) = (2x + 1)(8x^2 - 34x + 35)$ y factorizando el segundo factor $P(x) = (2x + 1)(2x - 5)(4x - 7)$. Así los ceros son $-\frac{1}{2}$, $\frac{5}{2}$ y $\frac{7}{4}$.

$$\text{d) } P(x) = x^4 + 5x^2 + 4.$$

Solución Observe que $P(x)$ se puede descomponer para poder agrupar:

$$P(x) = x^4 + 4x^2 + x^2 + 4 = x^2(x^2 + 4) + (x^2 + 4) = (x^2 + 4)(x^2 + 1), \text{ pero estos polinomios no poseen ceros reales.}$$

$$\text{e) } P(x) = x^3 - 36x^2 + 251x - 216.$$

Solución Puede buscarse uno de los ceros evaluando en $P(1) = 1 - 36 + 251 - 216 = 0$, por lo que uno es un cero y $(x - 1)$ es un factor de $P(x)$. Luego dividiendo se encuentra el otro factor por lo que $P(x) = (x - 1)(x^2 - 35x + 216) = (x - 1)(x - 27)(x - 8)$, entonces los ceros son 1, 27, 8.

$$\text{f) } P(x) = x^9 - 36x^6 + 251x^3 - 216.$$

Solución Según el ejercicio anterior sea $x^3 = y$, entonces: $y^3 - 36y^2 + 251y - 216 =$

$$(y - 1)(y - 27)(y - 8) = (x^3 - 1)(x^3 - 27)(x^3 - 8) = \\ (x - 1)(x^2 + x + 1)(x - 3)(x^2 + 3x + 9)(x - 2)(x^2 + 2x + 4).$$

Sólo son ceros 1, 2 y 3, pues los trinomios en esta factorización no poseen raíces reales.

$$\text{g) } P(x) = 2x^2 - 7x + 3.$$

Solución $(2x - 1)(x - 3)$. Los ceros son 3, $\frac{1}{2}$.

$$\text{h) } P(x) = x^3 - 4x.$$

Solución $x(x^2 - 4) = x(x - 2)(x + 2)$. Los ceros son 0, 2, -2.

$$\text{i) } P(x) = x^3 - 8.$$

Solución $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$. El único cero es 2.

$$\text{j) } P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 19x + 6.$$

Solución Observe que algunos de los posibles ceros son: 1, 2, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y sus negativos. Eva-

luando $P(1) = -8$, $P(2) = 0$, entonces $P(x) = (x-2)(3x^2+8x-3) = (3x-1)(x+3)(x-2)$.

Los ceros son 2, -3 , $\frac{1}{3}$.

k) $P(x) = x^3 + x^2 - 17x + 15$.

Solución Para buscar uno de los ceros se puede evaluar $P(1) = 1 + 1 - 17 + 15 = 0$.

Así, $P(x) = (x-1)(x^2+2x-15) = (x-1)(x+5)(x-3)$. Los ceros son 1, 3, -5 .

l) $P(x) = 24x^3 + 46x^2 + 29x - 6$. No tiene solución racional.

m) $P(x) = x^2 + 2x + 10$. El discriminante es negativo. No es factorizable.

n) $P(x) = x^2 + (a+b)x + ab$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Solución $P(x) = x^2 + ax + bx + ab = x(x+a) + b(x+a) = (x+a)(x+b)$.

Los ceros son $-a$, $-b$.

o) $P(x) = x^2 + (a-b)x - ab$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Solución $x^2 + ax - bx - ab = x(x+a) - b(x+a) = (x+a)(x-b)$. Los ceros son $-a$, b .

p) $P(x) = (x-1)^6 - 64$.

Solución Sea $y = x-1$, así $y^6 - 64 = (y^3)^2 - 8^2 = (y^3-8)(y^3+8) =$

$$(y-2)(y^2+2y+4)(y+2)(y^2-2y+4) = (x-1-2)[(x-1)^2+2(x-1)+4](x-1+2)[(x-1)^2-2(x-1)+4] = (x-3)(x^2-2x+1+2x-2+4)(x+1)(x^2-2x+1-2x+2+4) = (x-3)(x^2+3)(x+1)(x^2-4x+7).$$

Los ceros son -1 y 3 por que los polinomios $x^2 + 3$ y $x^2 - 4x + 7$ no tienen raíces reales.

5. Factorice al máximo:

a) $(x+8)^8 + 5(x+8)^4 + 6$.

Sea $y = (x+8)^4$, así $y^2 + 5y + 6 = (y+2)(y+3) = [(x+8)^4 + 2][(x+8)^4 + 3]$.

b) $(x-6)^2 - 29(x-6) + 100$.

Sea $y = x-6$, así $y^2 - 29y + 100 = (y-25)(y-4) = [(x-6)-25][(x-6)-4] = (x-31)(x-10)$.

c) $(8x^3 - 27) + (8x^2 - 14x + 3) = (2x-3)(4x^2+6x+9) + (2x-3)(4x-1) = (2x-3)(4x^2+6x+9+4x-1) = (2x-3)(4x^2+10x+8) = 2(2x-3)(2x^2+5x+4)$.

d) $625x^4 - 81 = (25x^2-9)(25x^2+9) = (5x-3)(5x+3)(25x^2+9)$.

e) $(x-1)^6 + 26(x-1)^3 - 27$

Sea $y = (x-1)^3$, así $y^2 + 26y - 27 = (y-1)(y+27) = [(x-1)^3 - 1][(x-1)^3 + 27]$,

entonces $(u^3-1)(u^3+27) = (u-1)(u^2+u+1)(u+3)(u^2-3u+9) =$

$$[(x-1)-1][(x-1)^2+(x-1)+1][(x-1)+3][(x-1)^2-3(x-1)+9] = (x-2)(x^2-x+1)(x+2)(x^2-5x+13).$$

$$\text{f) } (x-1)^4 + 5(x-1)^2 - 36$$

$$\text{Sea } y = (x-1)^2, \text{ entonces } y^2 + 5y - 36 = (y-4)(y+9) = ((x-1)^2-4)[(x-1)^2+9] = (x-1-2)(x-1+2)[(x-1)^2+9] = (x-3)(x+1)(x^2-2x+10).$$

$$\text{g) } 4x^4 + 20x^2 + 25$$

$$\text{Sea } y = x^2, \text{ así } 4y^2 + 20y + 25 = (2y+5)^2 = (2x^2+5)^2.$$

$$\text{h) } x^2(x+2)^6 - 5x(x+2)^6 - 14(x+2)^6 = (x+2)^6(x^2-5x-14) = (x+2)^6(x-7)(x+2) = (x+2)^7(x-7).$$

$$\text{i) } x^{2a} - 1 = (x^a - 1)(x^a + 1) = (x^a + 1)(x-1)(x^{a-1} + \dots + 1).$$

$$\text{j) } 81x^4 - 16 = (9x^2 - 4)(9x^2 + 4) = (3x-2)(3x+2)(9x^2+4).$$

$$\text{k) } (x^2 - 7x + 6)^2 + 10(x^2 - 7x + 6) + 24$$

$$\text{Sea } y = x^2 - 7x + 6, \text{ así } y^2 + 10y + 24 = (y+4)(y+6) = (x^2 - 7x + 6 + 4)(x^2 - 7x + 6 + 6) = (x^2 - 7x + 10)(x^2 - 7x + 12) = (x-2)(x-5)(x-3)(x-4).$$

$$\text{l) } (x+3)^6 + 7(x+3)^3 - 8$$

$$\text{Sea } y = x+3 \text{ y sea } u = y^3, \text{ entonces } u^2 + 7u - 8 = (u-1)(u+8) = (y^3-1)(y^3+8) = (y-1)(y^2+y+1)(y+2)(y^2-2y+4) =$$

$$(x+3-1)[(x+3)^2+x+3+1](x+3+2)[(x+3)^2-2(x+3)+4] =$$

$$(x+2)(x^2+6x+9+x+3+1)(x+5)(x^2+6x+9-2x-6+4) = (x+5)(x+2)(x^2+4x+7)(x^2+7x+13).$$

$$\text{m) } x^{12} - 2x^6 + 1$$

$$\text{Sea } u = x^6, u^2 - 2u + 1 = (u-1)^2 = (x^6-1)^2 = [(x^3-1)(x^3+1)]^2 =$$

$$[(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)]^2 = (x-1)^2(x^2+x+1)^2(x+1)^2(x^2-x+1)^2.$$

$$\text{n) } x^4 + 8x^2 + 16 = (x^2+4)^2.$$

$$\text{o) } x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1. \text{ Observe que este polinomio puede expresarse también como:}$$

$$(x^4 + x^3 + x^2) + (x^3 + x^2 + x) + (x^2 + x + 1) = x^2(x^2 + x + 1) + x(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)^2.$$

$$\text{p) } (x^2 - 3x + 3)^3 + 2(x^2 - 3x + 3)^2 - 3.$$

$$\text{Sea } y = x^2 - 3x + 3, \text{ entonces se tiene: } y^3 + 2y^2 - 3 = (y^3 - 1) + 2(y^2 - 1) = (y-1)(y^2 + y + 1) + 2(y-1)(y+1) = (y-1)[(y^2 + y + 1) + 2(y+1)] = (y-1)(y^2 + 3y + 3) = (x^2 - 3x + 3 - 1)[(x^2 -$$

$$3x+3)^2+3(x^2-3x+3)+3] = (x^2-3x+2)(x^4+9x^2+9-6x^3+6x^2-18x+3x^2-9x+9+3) = (x-1)(x-2)(x^4-6x^3+18x^2-27x+21).$$

$$\mathbf{q)} \quad x^4(20x^2+27x-14)^5 - (20x^2+27x-14)^5 = (20x^2+27x-14)^5(x^4-1) = [(5x-2)(4x+7)]^5(x^2-1)(x^2+1) = (5x-2)^5(4x+7)^5(x-1)(x+1)(x^2+1).$$

$$\mathbf{r)} \quad (x-1)^5 - (x-1)^4 = (x-1)^4(x-1-1) = (x-1)^4(x-2).$$

$$\mathbf{s)} \quad x^{12} - 4096 \text{ se puede expresar de dos formas: } (x^6)^2 - (64)^2 \text{ o } (x^4)^3 - (16)^3.$$

Podría aplicarse diferencia de cuadrados o diferencia de cubos, el procedimiento es más simple si se aplica primero diferencia de cuadrados.

$$\begin{aligned} x^{12} - 4096 &= (x^6)^2 - (64)^2 = (x^6 + 64)(x^6 - 64) \text{ (diferencia de cuadrados)} \\ &= [(x^2)^3 + 4^3][(x^2)^3 - 4^3] = (x^2 + 4)(x^4 - 4x^2 + 16)[(x^2)^3 - 4^3] \text{ (suma de cubos)} \\ &= (x^2 + 4)(x^4 - 4x^2 + 16)(x^2 - 4)(x^4 + 4x^2 + 16) \text{ (diferencia de cubos)} \\ &= (x^2 + 4)(x^4 - 4x^2 + 16)(x-2)(x+2)(x^4 + 4x^2 + 16) \text{ (diferencia de cuadrados)} \\ &= (x^2 + 4)(x^4 - 4x^2 + 16)(x-2)(x+2)(x^2 - 2x + 4)(x^2 + 2x + 4). \end{aligned}$$

$$\text{Por tanto: } x^{12} - 4096 = (x-2)(x+2)(x^2+4)(x^2-2x+4)(x^2+2x+4)(x^4-4x^2+16).$$

$$\begin{aligned} \mathbf{t)} \quad 5x^3(8x^3+27)^2 + (120x^3-1)(8x^3+27)^2 &= (8x^3+27)^2(5x^3+120x^3-1) = \\ (8x^3+27)^2(125x^3-1) &= [(2x)^3+3^3]^2[(5x^3)^3-1^3] = \\ [(2x+3)(4x^2-6x+9)]^2(5x-1)(25x^2+5x+1) &= \\ (2x+3)^2(4x^2-6x+9)^2(5x-1)(25x^2+5x+1). \end{aligned}$$

6. Racionalice el denominador y simplifique las siguientes expresiones:

$$\mathbf{a)} \quad \frac{88\sqrt{3}}{\sqrt{3}-5} \cdot \frac{\sqrt{3}+5}{\sqrt{3}+5} = \frac{264+440\sqrt{3}}{3-25} = \frac{88(3+5\sqrt{3})}{-22} = -4(5\sqrt{3}+3).$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b)} \quad \frac{x^2-8x+15}{\sqrt{x+1}-2} &= \frac{(x-3)(x-5)}{\sqrt{x+1}-2} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2} = \frac{(x-3)(x-5)(\sqrt{x+1}+2)}{(x+1-4)} = \\ \frac{(x-3)(x-5)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)} &= (x-5)(\sqrt{x+1}+2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c)} \quad \frac{x^3-125}{3-\sqrt{x^2-16}} \cdot \frac{3+\sqrt{x^2-16}}{3+\sqrt{x^2-16}} &= \frac{(x-5)(x^2+5x+25)(3+\sqrt{x^2-16})}{(9-(x^2-16))} = \\ \frac{(x-5)(x^2+5x+25)(3+\sqrt{x^2-16})}{(25-x^2)} &= \frac{(x-5)(x^2+5x+25)(3+\sqrt{x^2-16})}{(5-x)(5+x)} = \\ \frac{(x-5)(x^2+5x+25)(3+\sqrt{x^2-16})}{-(x-5)(x+5)} &= -\frac{(x^2+5x+25)(3+\sqrt{x^2-16})}{(x+5)}. \end{aligned}$$

$$\mathbf{d)} \quad \frac{111}{2\sqrt{3}-7} \cdot \frac{2\sqrt{3}+7}{2\sqrt{3}+7} = \frac{111(2\sqrt{3}+7)}{12-49} = -3(2\sqrt{3}+7).$$

$$\begin{aligned}
\text{e)} \quad & \frac{x^2 + 6x + 9}{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 2x - 5}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 2x - 5}}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 2x - 5}} = \\
& \frac{(x+3)^2(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 2x - 5})}{(x^2 + 1 - (x^2 - 2x - 5))} = \frac{(x+3)^2(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 2x - 5})}{2x + 6} = \\
& \frac{(x+3)^2(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 2x - 5})}{2(x+3)} = \frac{(x+3)(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 2x - 5})}{2}. \\
\text{f)} \quad & \frac{x^2 - 9x + 20}{2x + 1 - \sqrt{x^2 + 13x + 13}} \cdot \frac{2x + 1 + \sqrt{x^2 + 13x + 13}}{2x + 1 + \sqrt{x^2 + 13x + 13}} = \\
& \frac{(x-4)(x-5)(2x+1+\sqrt{x^2+13x+13})}{[(2x+1)^2 - (x^2+13x+13)]} = \\
& \frac{(x-4)(x-5)(2x+1+\sqrt{x^2+13x+13})}{(4x^2+4x+1-x^2-13x-13)} = \frac{(x-4)(x-5)(2x+1+\sqrt{x^2+13x+13})}{3x^2-9x-12} = \\
& \frac{(x-4)(x-5)(2x+1+\sqrt{x^2+13x+13})}{3(x^2-3x-4)} = \frac{(x-4)(x-5)(2x+1+\sqrt{x^2+13x+13})}{3(x-4)(x+1)} = \\
& \frac{(x-5)(2x+1+\sqrt{x^2+13x+13})}{3(x+1)}. \\
\text{g)} \quad & \frac{2x^2 - 5x - 3}{x\sqrt{x} + \sqrt{27}} \cdot \frac{x\sqrt{x} - \sqrt{27}}{x\sqrt{x} - \sqrt{27}} = \frac{(2x+1)(x-3)(x\sqrt{x} - \sqrt{27})}{(x^3 - 27)} = \\
& \frac{(2x+1)(x-3)(x\sqrt{x} - \sqrt{27})}{(x-3)(x^2+3x+9)} = \frac{(2x+1)(x\sqrt{x} - \sqrt{27})}{x^2+3x+9}. \\
\text{h)} \quad & \frac{x^2 + 5x - 14}{x\sqrt{x} - 2\sqrt{2}} \cdot \frac{x\sqrt{x} + 2\sqrt{2}}{x\sqrt{x} + 2\sqrt{2}} = \frac{(x+7)(x-2)(x\sqrt{x} + 2\sqrt{2})}{x^3 - 8} = \\
& \frac{(x+7)(x-2)(x\sqrt{x} + 2\sqrt{2})}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{(x+7)(x\sqrt{x} + 2\sqrt{2})}{(x^2+2x+4)}.
\end{aligned}$$

7. Encuentre el cociente y el residuo que se obtiene al efectuar la división $P(x) : Q(x)$.

a) $P(x) = -6x^3 + 4x - 1, Q(x) = x^2 - 1$.

Cociente: $-6x$. **Residuo:** $-2x - 1$.

b) $P(x) = 4x^3 - 8x^2 + x - 2, Q(x) = x^3 + x + 1$.

Cociente: 4. **Residuo:** $-8x^2 - 3x - 6$.

c) $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + x - 1, Q(x) = x + 4$.

Cociente: $2x^2 - x + 5$. **Residuo:** -21 .

d) $P(x) = x^4 - 6x + 8, Q(x) = x - 2$.

Cociente: $x^3 + 2x^2 + 4x + 2$. **Residuo:** 12.

e) $P(x) = x^5 - 2x + 1, Q(x) = 2x - 1$.

Cociente: $\frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{8} + \frac{x}{16} - \frac{31}{32}$. **Residuo:** $\frac{1}{32}$.

8. Sea $P(x) = kx^{15} - 6kx^{14} + x - 6$ y k un número real:

a) Determine k (si existe) para que $(x + 1)$ sea factor de $P(x)$.

Solución Primero, factorizando el polinomio se obtiene:

$kx^{14}(x - 6) + (x - 6) = (x - 6)(kx^{14} + 1)$. Ahora para que $(x + 1)$ sea factor de $P(x)$, $x = -1$ debe ser un cero, por lo tanto al evaluar $P(-1)$ debe igualarse a 0 para hallar k ; es decir $P(-1) = -7(k + 1) = 0 \implies k = -1$.

El valor de k para que $(x + 1)$ sea factor de $P(x)$ es $K = -1$.

b) Determine k (si existe) para que $x = 6$ sea cero de $P(x)$.

Solución Para que $x = 6$ sea cero de $P(x)$, también se requiere que $x - 6$ sea factor del polinomio. Ahora observe que en la factorización de $P(x)$ se tiene que $(x - 6)$ siempre es factor, para cualquier valor de k ; por lo tanto $P(6) = 0$ para todo k .

c) Si $k > 0$, cuáles son los ceros reales de $P(x)$?

Solución Si $k > 0 \implies kx^{14} + 1 > 0$ para todo valor de x , por lo que el factor $(1 + kx^{14})$ no tiene raíces reales, entonces el único cero real de $P(x)$ es 6.

d) Si $k < 0$, cuáles son los ceros reales de $P(x)$?

Solución Si $k < 0$, entonces $1 + kx^{14}$ si tiene raíces reales. Así $1 + kx^{14} = 0 \implies x^{14} = -\frac{1}{k} \implies x = \pm \sqrt[14]{-\frac{1}{k}}$, lo cual tiene sentido si $-\frac{1}{k} > 0$ (por lo que $k < 0$). Luego, si $k < 0$ los ceros reales de $P(x)$ son 6, $\sqrt[14]{-\frac{1}{k}}$ y $-\sqrt[14]{-\frac{1}{k}}$.

9. Simplifique las siguientes expresiones:

$$\text{a) } \frac{1}{x^2 - 1} + \frac{1}{x^2 + 4x + 3} = \frac{1}{(x - 1)(x + 1)} + \frac{1}{(x + 1)(x + 3)} = \frac{(x + 3) + (x - 1)}{(x - 1)(x + 1)(x + 3)} = \frac{2(x + 1)}{(x - 1)(x + 1)(x + 3)} = \frac{2x + 2}{(x - 1)(x + 1)(x + 3)} = \frac{2}{(x - 1)(x + 3)}.$$

$$\text{b) } \frac{3x}{x^2 - 4} + \frac{1}{x^2 + 4x + 4} = \frac{3x}{(x - 2)(x + 2)} + \frac{1}{(x + 2)^2} = \frac{3x(x + 2) + (x - 2)}{(x + 2)^2(x - 2)} = \frac{3x^2 + 7x - 2}{(x + 2)^2(x - 2)}.$$

$$\text{c) } \frac{1}{9x^2 + 12x + 4} + \frac{1}{6x^2 + x - 2} - \frac{4(x + 1)}{18x^3 + 15x^2 - 4x - 4} = \frac{1}{(3x + 2)^2} + \frac{1}{(3x + 2)(2x - 1)} - \frac{4(x + 1)}{(3x + 2)^2(2x - 1)} = \frac{2x - 1 + 3x + 2 - 4x + 4}{(3x + 2)^2(2x - 1)} = \frac{x - 3}{(3x + 2)^2(2x - 1)}.$$

$$\text{d) } \frac{1}{x + 4} - \frac{2x + 1}{x - 2} + \frac{2x^2 - x}{x^2 + 2x - 8} = \frac{x - 2 - (2x + 1)(x + 4) + 2x^2 - x}{(x + 4)(x - 2)} = \frac{x - 2 - 2x^2 - 8x - x - 4 + 2x^2 - x}{(x + 4)(x - 2)} = \frac{-9x - 6}{(x + 4)(x - 2)} = \frac{-3(3x + 2)}{(x + 4)(x - 2)}.$$

$$\text{e) } \frac{1 - x}{x^3 - 8} - \frac{3}{4 - x^2} = \frac{1 - x}{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)} - \frac{3}{(2 - x)(2 + x)} =$$

$$\frac{1-x}{(x-2)(x^2+2x+4)} + \frac{3}{(x-2)(x+2)} = \frac{(1-x)(x+2) + 3(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)(x^2+2x+4)} =$$

$$\frac{x+2-x^2-2x+3x^2+6x+12}{(x-2)(x+2)(x^2+2x+4)} = \frac{2x^2+5x+14}{(x-2)(x+2)(x^2+2x+4)}.$$

$$\text{f) } \frac{1}{x^4-x} + \frac{1}{x^5-x^2} + \frac{1}{x^6-x^3} = \frac{1}{x(x^3-1)} + \frac{1}{x^2(x^3-1)} + \frac{1}{x^3(x^3-1)} = \frac{1 \cdot x^2 + 1 \cdot x + 1}{x^3(x^3-1)} =$$

$$\frac{x^2+x+1}{x^3(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{x^3(x-1)}.$$

10. Considere el polinomio $P(x) = x^2 - kx - k - 1$, con k número real.

a) Pruebe que $(x - k - 1)$ es factor de $P(x)$.

Solución Se debe probar que $k + 1$ es un cero. Así $P(k + 1) = (k + 1)^2 - k(k + 1) - k - 1 = k^2 + 2k + 1 - k^2 - k - k - 1 = 0$.

b) Usando a), encuentre un valor de k para que $(x - 342)$ sea factor de $P(x)$.

Solución Como $(x - k - 1)$ es factor de $P(x)$, se puede hallar el valor de k para que $(x - 342)$ sea ese mismo factor de $P(x)$. Entonces $x - 342 = x - k - 1 \implies k + 1 = 342 \implies k = 341$.

11. Considere el polinomio $P(x) = x^4 - (3 + k)x^3 + (2 + 3k)x^2 - 2kx$.

a) Verifique que 0 y k son ceros de $P(x)$.

Solución Evaluando en $P(x)$ se obtiene que $P(0) = 0$ y

$$P(k) = k^4 - (3 + k)k^3 + (2 + 3k)k^2 - 2k^2 = k^4 - 3k^3 - k^4 + 2k^2 + 3k^3 - 2k^2 = 0.$$

b) Encuentre todos los ceros de $P(x)$.

Solución Para factorizar el polinomio, recuerde que x y $(x - k)$ son factores de $P(x)$. Así $P(x) = x(x^3 - (3 + k)x^2 + (2 + 3k)x - 2k) = x(x - k)(x^2 - 3x + 2) = x(x - k)(x - 1)(x - 2)$.

Por lo tanto los ceros son 0, k , 1, 2.

c) Escriba la factorización completa de $P(x)$.

Solución Ya está en la parte (b).

12. Sea $P(x) = 9x^3 - 18x^2 - 25x - 6$.

a) Pruebe que $-\frac{2}{3}$ es un cero de $P(x)$.

$$\text{b) } P\left(-\frac{2}{3}\right) = 9\left(-\frac{8}{27}\right) - 18\left(\frac{4}{9}\right) - 25\left(-\frac{2}{3}\right) - 6 = -\frac{8}{3} - 8 + \frac{50}{3} - 6 = 0.$$

b) Factorice $P(x)$ en forma completa.

Solución $(x + \frac{2}{3})(9x^2 - 24x - 9)$, esto pues $-\frac{2}{3}$ es un cero, entonces $(3x + 2)(3x + 1)(x - 3)$.

13. Calcule $2P(1 - \sqrt{5}) + 3P(-2\sqrt{5} + 3)$, si $P(x) = x^4 - 3x^2 + 10$.

Solución $2[(1 - \sqrt{5})^4 - 3(1 - \sqrt{5})^2 + 10] + 3[(-2\sqrt{5} + 3)^4 - 3(-2\sqrt{5} + 3)^2 + 10] =$
 $2(56 - 24\sqrt{5} - 3(1 - 2\sqrt{5} + 5) + 10) + 3(1561 - 696\sqrt{5} - 3(9 - 12\sqrt{5} + 20) + 10) =$
 $2[(1 - 4\sqrt{5} + 30 - 20\sqrt{5} + 25) - 3(1 - 2\sqrt{5} + 5) + 10] + 3[(400 - 480\sqrt{5} + 1080 - 216\sqrt{5} + 81) -$
 $3(20 - 12\sqrt{5} + 9) + 10] =$
 $2[56 - 24\sqrt{5} - 3(6 - 2\sqrt{5}) + 10] + 3[1561 - 696\sqrt{5} - 3(29 - 12\sqrt{5}) + 10] =$
 $2(56 - 24\sqrt{5} - 18 + 6\sqrt{5} + 10) + 3(1561 - 696\sqrt{5} - 87 + 36\sqrt{5} + 10) =$
 $2(48 - 18\sqrt{5}) + 3(1484 - 660\sqrt{5}) = 96 - 36\sqrt{5} + 4452 - 1980\sqrt{5} = 4548 - 2016\sqrt{5}.$

14. Sea el polinomio $P(x) = kx^{20} - 9kx^{18} + 2x - 6$, con k número real.

a) $P(3) = k(3)^{20} - 9k(3)^{18} + 2(3) - 6 = 3^{20}k - 3^{20}k + 6 - 6 = 0$, entonces $(x - 3)$ si es factor.
 b) $P(-1) = k(-1)^{20} - 9k(-1)^{18} + 2(-1) - 6 = k - 9k - 8 = -8k - 8$. Para que $(x + 1)$ sea factor de $P(x)$ se necesita que $-8k - 8 = 0 \implies k = -1$.

15. Sea $P(x) = -kx^5 + 5(kx)^3 + 2(k^2x)^2$, con k número real:

a) Sin hacer la división, determine si $(x + 2k)$, es factor de $P(x)$.

Solución $P(-2k) = -k(-2k)^5 + 5k^3(-2k)^3 + 2k^4(-2k)^2 = 32k^6 - 40k^6 + 8k^6 = 0$, por lo que $(x + 2k)$ es un factor.

b) Calcule un valor de k diferente de 0, para que $(x - 1)$ sea factor de $P(x)$.

(Sugerencia: Use a).

Solución Usando la parte a se toma $x + 2k = x - 1 \implies k = -\frac{1}{2}$.

16. a) $P(x) = -4x^6 + 29x^4 - 21x^2 - 54$.

Sea $u = x^2$, entonces $P(x) = -4u^3 + 29u^2 - 21u - 54 = (u + 1)(-4u^2 + 33u - 54) =$

$(u + 1)(-u + 6)(4u - 9) = -(u + 1)(u - 6)(4u - 9)$, entonces

$$P(x) = -(x^2 + 1)(x^2 - 6)(4x^2 - 9) = -(x^2 + 1)(x - \sqrt{6})(x + \sqrt{6})(2x - 3)(2x + 3).$$

Los ceros son: $-\sqrt{6}, \sqrt{6}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}$.

b) $P(x) = -9x^6 + 58x^4 + 39x^2 - 28$.

Sea $u = x^2$, entonces:

$$P(x) = -9u^3 + 58u^2 + 39u - 28 = (u + 1)(-9u^2 + 67u - 28) = (u + 1)(-u + 7)(9u - 4) =$$

$$(x^2 + 1)(-x^2 + 7)(9x^2 - 4) = (x^2 + 1)(\sqrt{7} - x)(\sqrt{7} + x)(3x - 2)(3x + 2).$$

Los ceros son: $\sqrt{7}, -\sqrt{7}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}$.

Capítulo 3

Ejercicios de ecuaciones

1. Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $y^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{1}{3}} - 6 = 0$.

c) $2(3x - 1)^2 + 13(3x - 1) - 7 = 0$.

e) $x^6 + 8x^3 = x^3 + 8$.

g) $4\sqrt{x+3} = x + 6$.

i) $\sqrt{x} + \sqrt{2x-1} = 2$.

k) $\sqrt{x-1} - 2x + 3 = 0$.

m) $x + \frac{4}{x} = 4$.

o) $\frac{1}{x^2 + 4x + 3} = \frac{1}{1 - x^2}$.

p) $\frac{1}{9x^2 + 12x + 4} + \frac{1}{6x^2 + x - 2} = \frac{4(x+1)}{18x^3 + 15x^2 - 4x - 4}$.

b) $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$.

d) $2\left[\frac{x}{x+1}\right]^2 - 5\left[\frac{x}{x+1}\right] + 2 = 0$.

f) $\sqrt[3]{x^4} - 5\sqrt[3]{x^2} + 4 = 0$.

h) $\sqrt{1-5x} = x - 1$.

j) $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x-4} = 0$.

l) $\sqrt{2x-1} + \sqrt{6x+1} = \sqrt{2x+3}$.

n) $\frac{1}{x^2 + 4x + 4} = \frac{3x}{4 - x^2}$.

2. Ecuaciones que involucran valor absoluto.

a) $|2x - 1| = 5$.

c) $|2x^2 - 3x| = -3$.

e) $|x - 3| = 1 - 2x$.

b) $|x - 3a| = a$, con $a > 0$.

d) $|2x^2 + 5x + 2| = 5$.

f) $2|3x - 1| - 1 = 3x$.

3. Encuentre todas las soluciones en $\mathbb{R}$ de las siguientes ecuaciones.

a) $(x - 4)^5 = 2(x - 4)^4$.

c) $[x + 3]^4 - 8[x + 3]^2 + 16 = 0$.

e) $\sqrt{(x-3)^2} - 3 = 2\sqrt{(x-3)^2} - 7$.

g) $3\sqrt{2}x^2 + 7x + \sqrt{2} = 0$.

b) $3\left[\frac{1}{x-1}\right]^2 + 17\left[\frac{1}{x-1}\right] = 6$.

d) $\sqrt{(x-1)^2} = 16$.

f) $\sqrt{x+1} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

h) $(2 + 3x)(4 - x) - 3x(3 - x) = 0$.

$$\text{i)} \frac{1}{4}(x+1) + \frac{1}{6}(-3x+1) + \frac{1}{3}(2x+3) = \frac{1}{4}(4x+1).$$

$$\text{j)} x + 2\sqrt{x} = 15.$$

$$\text{l)} \sqrt{-x} + \sqrt{x+5} = 3.$$

$$\text{n)} (x^3 - 25x + 1)^2 - 2(x^3 - 25x + 1) + 1 = 0.$$

$$\text{o)} |6x - 1| = 26.$$

$$\text{q)} |x^2 - 1| = -8.$$

$$\text{k)} 12x^2 + 7\sqrt{3}x - 2 = 0.$$

$$\text{m)} \sqrt{-x} + 4\sqrt{x+6} = 5\sqrt{5x+18}.$$

$$\text{p)} |x^2 + 1| = 4.$$

$$\text{r)} |x^2 - 6x - 1| = 6.$$

4. Resolver los siguientes problemas:

a) Un prisma rectangular tiene un volumen de 216cm^3 . Determine su área superficial si se sabe que el ancho de la base excede en 2cm a la altura y la longitud en 1cm al doble de la altura.

b) La razón entre los catetos de un triángulo rectángulo es $\frac{4}{3}$. Encuentre la altura sobre la hipotenusa si se sabe que esta mide 26cm . (Sugerencia: Use semejanza de triángulos).

c) En dos triángulos rectángulos semejantes, el cateto mayor de uno excede en 7cm al cateto menor del otro. Los otros dos catetos miden 12cm cada uno. Determine la hipotenusa de cada triángulo.

5. Encuentre las soluciones de los sistemas de ecuaciones:

$$\text{a)} \begin{cases} -7x + 3y = -5 \\ 4x - y = 5 \end{cases}$$

$$\text{b)} \begin{cases} 6x + 4y = -1 \\ 15x + 10y = 4 \end{cases}$$

$$\text{c)} \begin{cases} 4x - 2y = 6 \\ 6x - 3y = 9 \end{cases}$$

$$\text{d)} \begin{cases} 3(x-1)^2 + 6(2y-3)^2 = 162 \\ -4(x-1)^2 + 3(2y-3)^2 = 59 \end{cases}$$

$$\text{e)} \begin{cases} -2(x+1)^3 - (2y+1)^3 = -62 \\ 4(x+1)^3 + 5(2y+1)^3 = 148 \end{cases}$$

$$\text{f)} \begin{cases} 5x - 2y = -11b \\ 3x + y = 22a, \text{ con } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Soluciones del Tema No.3: Ecuaciones

1. Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $y^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{1}{3}} - 6 = 0.$

b) $x^8 - 17x^4 + 16 = 0.$

c) $2(3x - 1)^2 + 13(3x - 1) - 7 = 0.$

d) $2\left[\frac{x}{x+1}\right]^2 - 5\left[\frac{x}{x+1}\right] + 2 = 0.$

e) $x^6 + 8x^3 = x^3 + 8.$

f) $\sqrt[3]{x^4} - 5\sqrt[3]{x^2} + 4 = 0.$

g) $4\sqrt{x+3} = x + 6.$

h) $\sqrt{1-5x} = x - 1.$

i) $\sqrt{x} + \sqrt{2x-1} = 2.$

j) $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x-4} = 0.$

k) $\sqrt{x-1} - 2x + 3 = 0.$

l) $\sqrt{2x-1} + \sqrt{6x+1} = \sqrt{2x+3}.$

m) $x + \frac{4}{x} = 4.$

n) $\frac{1}{x^2 + 4x + 4} = \frac{3x}{4 - x^2}.$

o) $\frac{1}{x^2 + 4x + 3} = \frac{1}{1 - x^2}.$

p) $\frac{1}{9x^2 + 12x + 4} + \frac{1}{6x^2 + x - 2} = \frac{4(x+1)}{18x^3 + 15x^2 - 4x - 4}.$

Solución

a) $y^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{1}{3}} - 6 = 0$

Sea $y^{\frac{1}{3}} = u$, entonces $u^2 - u - 6 = 0 \implies (u - 3)(u + 2) = 0 \implies u = 3, u = -2.$ Si $u = 3 \implies y^{\frac{1}{3}} = 3 \implies y = 27$ y si $u = -2 \implies y^{\frac{1}{3}} = -2 \implies y = -8.$

$S = \{27, -8\}.$

b) $x^8 - 17x^4 + 16 = 0.$

Sea $u = x^4 \implies u^2 - 17u + 16 = 0 \implies (u - 1)(u - 16) = 0 \implies u = 1, u = 16.$ Si $u = 1 \implies x^4 = 1 \implies x = -1, x = 1.$ Si $u = 16 \implies x^4 = 16 \implies x = -2, x = 2.$

$S = \{-1, 1, -2, 2\}.$

c) $2(3x - 1)^2 + 13(3x - 1) - 7 = 0$

Sea $u = 3x - 1$, entonces $2u^2 + 13u - 7 = 0 \implies (2u - 1)(u + 7) = 0 \implies u = \frac{1}{2}, u = -7.$ Si $u = \frac{1}{2} \implies 3x - 1 = \frac{1}{2} \implies x = \frac{1}{2}$ y si $u = -7 \implies 3x - 1 = -7 \implies x = -2.$

$S = \{\frac{1}{2}, -2\}.$

d) $2\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 - 5\left(\frac{x}{x+1}\right) + 2 = 0$

Sea $u = \frac{x}{x+1} \implies 2u^2 - 5u + 2 = 0 \implies (2u - 1)(u - 2) = 0 \implies u = \frac{1}{2}, u = 2.$

$$u = \frac{1}{2} \implies \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2} \implies 2x = x+1 \implies x = 1.$$

$$u = 2 \implies \frac{x}{x+1} = 2 \implies x = 2(x+1) \implies x = 2x+2 \implies -x = 2 \implies x = -2.$$

$$S = \{1, -2\}.$$

$$\text{e) } x^6 + 8x^3 = x^3 + 8 \implies x^6 + 7x^3 - 8 = 0$$

$$\text{Sea } u = x^3 \implies u^2 + 7u - 8 = 0 \implies (u+8)(u-1) = 0 \implies u = -8, u = 1.$$

$$u = -8 \implies x^3 = -8 \implies x = -2.$$

$$u = 1 \implies x^3 = 1 \implies x = 1.$$

$$S = \{-2, 1\}.$$

$$\text{f) } \sqrt[3]{x^4} - 5\sqrt[3]{x^2} + 4 = 0.$$

$$\text{Sea } u = \sqrt[3]{x^2} \text{ y } u^2 = \sqrt[3]{x^4} \implies u^2 - 5u + 4 = 0 \implies (u-4)(u-1) = 0 \implies u = 4, u = 1.$$

$$\text{Si } u = 4 \implies \sqrt[3]{x^2} = 4 \implies x^2 = 64 \implies x = 8 \text{ o } x = -8.$$

$$\text{Si } u = 1 \implies \sqrt[3]{x^2} = 1 \implies x^2 = 1 \implies x = 1 \text{ o } x = -1.$$

$$S = \{-1, 1, -8, 8\}.$$

$$\text{g) } 4\sqrt{x+3} = x+6 \implies (4\sqrt{x+3})^2 = (x+6)^2 \implies 16(x+3) = x^2 + 12x + 36 \implies$$

$$x^2 + 12x + 36 - 16x - 48 = 0 \implies x^2 - 4x - 12 = 0 \implies (x-6)(x+2) = 0 \implies x = 6 \text{ o } x = -2.$$

Prueba

$$x = 6 \implies 4\sqrt{6+3} = 6+6 \implies 4 \cdot 3 = 12 \implies 6 \text{ sí es solución.}$$

$$x = -2 \implies 4\sqrt{-2+3} = -2+6 \implies 4 \cdot 1 = 4 \implies -2 \text{ sí es solución.}$$

$$S = \{-2, 6\}.$$

$$\text{h) } \sqrt{1-5x} = x-1 \implies 1-5x = (x-1)^2 \implies 1-5x = x^2-2x+1 \implies x^2-2x+1-1+5x = 0 \implies$$

$$x^2+3x = 0 \implies x(x+3) = 0 \implies x = 0 \text{ o } x = -3.$$

Prueba

$$x = 0 \implies \sqrt{1-5 \cdot 0} = 0-1 \implies 1 = -1. \text{ Falso: } 0 \text{ no es solución.}$$

$$x = -3 \implies \sqrt{1-5(-3)} = -3-1 \implies 4 = -4. \text{ Falso: } -3 \text{ no es solución.}$$

$$S = \emptyset.$$

$$\text{i) } \sqrt{x} + \sqrt{2x-1} = 2 \implies \sqrt{2x-1} = 2 - \sqrt{x} \implies (\sqrt{2x-1})^2 = (2 - \sqrt{x})^2 \implies$$

$$2x-1 = 4 - 4\sqrt{x} + x \implies x-5 = -4\sqrt{x} \implies (x-5)^2 = (-4\sqrt{x})^2 \implies$$

$$x^2 - 10x + 25 = 16x \implies x^2 - 26x + 25 = 0 \implies (x-1)(x-25) = 0 \implies x = 1 \text{ o } x = 25.$$

Prueba

$$x = 1 \implies \sqrt{1} + \sqrt{2 \cdot 1 - 1} = 2 \implies 1 + 1 = 2 \implies 1 \text{ sí es solución.}$$

$$x = 25 \implies \sqrt{25} + \sqrt{2 \cdot 25 - 1} = 2 \implies 5 + 7 = 2. \text{ Falso 25 no es solución.}$$

$$S = \{1\}.$$

$$\begin{aligned} \text{j) } \sqrt{2x-1} + \sqrt{x-4} = 0 &\implies \sqrt{2x-1} = -\sqrt{x-4} \implies (\sqrt{2x-1})^2 = (-\sqrt{x-4})^2 \implies \\ 2x-1 = x-4 &\implies x = -3 \implies -3. \text{ Pero } -3 \text{ no es solución, porque } \sqrt{2(-3)-1} = \sqrt{-7} \text{ y} \\ \sqrt{-3-4} &= \sqrt{-7}. \end{aligned}$$

$$S = \emptyset.$$

$$\text{k) } \sqrt{x-1} - 2x + 3 = 0 \implies \sqrt{x-1} = 2x - 3 \implies (\sqrt{x-1})^2 = (2x-3)^2 \implies$$

$$x-1 = 4x^2 - 12x + 9 \implies 4x^2 - 13x + 10 = 0 \implies (x-2)(4x-5) = 0 \implies x = 2 \text{ o } x = \frac{5}{4}.$$

Prueba

$$x = 2 \implies \sqrt{2-1} - 2 \cdot 2 + 3 = 0 \implies 1 - 4 + 3 = 0 \implies 2 \text{ sí es solución.}$$

$$x = \frac{5}{4} \implies \sqrt{\frac{5}{4}-1} - 2 \cdot \frac{5}{4} + 3 = 0 \implies \frac{1}{2} - \frac{5}{2} + 3 = 0. \text{ Falso: } \frac{5}{4} \text{ no es solución.}$$

$$S = \{2\}.$$

$$\begin{aligned} \text{l) } \sqrt{2x-1} + \sqrt{6x+1} = \sqrt{2x+3} &\implies (\sqrt{2x-1} + \sqrt{6x+1})^2 = (\sqrt{2x+3})^2 \implies \\ 2x-1 + 2(\sqrt{2x-1})(\sqrt{6x+1}) + 6x+1 &= 2x+3 \implies 2\sqrt{(2x-1)(6x+1)} = 2x+3-8x \implies \\ (2\sqrt{12x^2-4x-1})^2 &= (-6x+3)^2 \implies 4(12x^2-4x-1) = 36x^2-36x+9 \implies 48x^2-16x-4 = \\ 36x^2-36x+9 &\implies 12x^2+20x-13=0 \implies (2x-1)(6x+13)=0 \implies x = -\frac{13}{6} \text{ o } x = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Prueba

$$x = -\frac{13}{6} \text{ no es solución, porque basta con que } \sqrt{2\left(-\frac{13}{6}\right)-1} = \sqrt{-\frac{13}{3}-1} = \sqrt{-\frac{16}{3}}.$$

$$x = \frac{1}{2} \implies \sqrt{2 \cdot \frac{1}{2} - 1} + \sqrt{6 \cdot \frac{1}{2} + 1} = \sqrt{2 \cdot \frac{1}{2} + 3} \implies 0 + 2 = 2 \implies \frac{1}{2} \text{ sí es solución.}$$

$$S = \{\frac{1}{2}\}.$$

$$\text{m) } x + \frac{4}{x} = 4, \text{ con } x \neq 0, \implies x^2 + 4 = 4x \implies x^2 - 4x + 4 = 0 \implies (x-2)^2 = 0 \implies x = 2.$$

$$S = \{2\}.$$

$$\text{n) } \frac{1}{x^2+4x+4} = \frac{3x}{4-x^2}, \text{ con } x \neq 2, x \neq -2 \implies \frac{1}{(x+2)^2} - \frac{3x}{(2-x)(2+x)} = 0 \implies$$

$$\frac{1}{(x+2)^2} + \frac{3x}{(x-2)(x+2)} = 0 \implies \frac{1(x-2) + 3x(x+2)}{(x+2)^2(x-2)} = 0 \implies x-2+3x^2+6x=0$$

$$\implies 3x^2+7x-2=0, \Delta = 7^2-4(3)(-2) = 49+24 = 73.$$

$$x_1 = \frac{-7-\sqrt{73}}{6}, x_2 = \frac{-7+\sqrt{73}}{6}.$$

$$S = \left\{ \frac{-7 - \sqrt{73}}{6}, \frac{-7 + \sqrt{73}}{6} \right\}.$$

$$\begin{aligned} \text{o) } \frac{1}{x^2 + 4x + 3} &= \frac{1}{1 - x^2}, \text{ con } x \neq -3, x \neq -1, x \neq 1. \implies \frac{1}{(x+1)(x+3)} - \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \\ 0 &\implies \frac{1}{(x+1)(x+3)} + \frac{1}{(x-1)(x+1)} = 0 \implies \frac{x-1+x+3}{(x+1)(x-1)(x+3)} = 0 \implies 2x+2=0 \implies \\ x &= -1. \end{aligned}$$

Pero $x \neq -1$, entonces $S = \emptyset$.

$$\begin{aligned} \text{p) } \frac{1}{9x^2 + 12x + 4} + \frac{1}{6x^2 + x - 2} &= \frac{4(x+1)}{18x^3 + 15x^2 - 4x - 4}, \text{ con } x \neq -\frac{2}{3}, x \neq \frac{1}{2} \implies \\ \frac{1}{(3x+2)^2} + \frac{1}{(3x+2)(2x-1)} - \frac{4(x+1)}{(2x-1)(3x+2)^2} &= 0 \implies \frac{2x-1+3x+2-4(x+1)}{(2x-1)(3x+2)^2} = 0 \implies \\ x-3=0 &\implies x=3. \end{aligned}$$

$$S = \{3\}.$$

2. Ecuaciones que involucran valor absoluto.

$$\text{a) } |2x - 1| = 5.$$

$$\text{b) } |x - 3a| = a, \text{ con } a > 0.$$

$$\text{c) } |2x^2 - 3x| = -3.$$

$$\text{d) } |2x^2 + 5x + 2| = 5.$$

$$\text{e) } |x - 3| = 1 - 2x.$$

$$\text{f) } 2|3x - 1| - 1 = 3x.$$

Solución

$$\text{a) } |2x - 1| = 5 \implies 2x - 1 = -5 \text{ o } 2x - 1 = 5 \implies x = -2 \text{ o } x = 3$$

$$S = \{-2, 3\}.$$

$$\text{b) } |x - 3a| = a, \text{ con } a > 0$$

$$x - 3a = -a \text{ o } x - 3a = a \implies x = 2a \text{ o } x = 4a$$

$$S = \{2a, 4a\}.$$

$$\text{c) } |2x^2 - 3x| = -3.$$

Para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple $|2x^2 - 3x| \geq 0$, por lo tanto $S = \emptyset$.

$$\text{d) } |2x^2 + 5x + 2| = 5.$$

$$\text{Caso 1. } 2x^2 + 5x + 2 = -5 \implies 2x^2 + 5x + 7 = 0 \implies \Delta = -31 < 0.$$

Por lo tanto no tiene solución en $\mathbb{R}$.

$$\text{Caso 2. } 2x^2 + 5x + 2 = 5 \implies 2x^2 + 5x - 3 = 0 \implies (2x - 1)(x + 3) \implies x = \frac{1}{2}, x = -3.$$

$$S = \{\frac{1}{2}, -3\}.$$

$$\text{e) } |x - 3| = 1 - 2x. \text{ Por definición } |x - 3| = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x - 3 \geq 0 \implies x \geq 3 \\ -x + 3 & \text{si } x - 3 < 0 \implies x < 3. \end{cases}$$

$$\text{Caso 1. Si } x < 3 \text{ entonces } |x - 3| = -(x - 3) = -x + 3 \implies -x + 3 = 1 - 2x \implies$$

$-x + 2x = 1 - 3 \implies x = -2$. Se cumple que $-2 < 3$, entonces -2 sí es solución.

Caso 2. Si $x \geq 3$ entonces $|x - 3| = x - 3 \implies x - 3 = 1 - 2x \implies 3x = 4 \implies x = \frac{4}{3}$.

Pero $x = \frac{4}{3}$ no cumple $x \geq 3$, por lo tanto $\frac{4}{3}$ no es solución.

$S = \{-2\}$.

$$\text{f) } 2|3x - 1| - 1 = 3x. \text{ Por definición } |3x - 1| = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } 3x - 1 \geq 0 \implies x \geq \frac{1}{3} \\ -3x + 1 & \text{si } 3x - 1 < 0 \implies x < \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Caso 1. Si $x < \frac{1}{3}$, entonces $|3x - 1| = -(3x - 1) = -3x + 1 \implies 2(-3x + 1) - 1 = 3x \implies -6x + 2 - 1 = 3x \implies -9x = -1 \implies x = \frac{1}{9}$.

Se cumple que $\frac{1}{9} < \frac{1}{3}$, entonces $\frac{1}{9}$ sí es solución.

Caso 2. Si $x \geq \frac{1}{3}$, entonces $|3x - 1| = 3x - 1 \implies 2(3x - 1) - 1 = 3x \implies 6x - 2 - 1 = 3x \implies 3x = 3 \implies x = 1$.

Se cumple que $1 > \frac{1}{3}$, entonces 1 sí es solución.

$S = \{\frac{1}{9}, 1\}$.

3. Encuentre todas las soluciones en $\mathbb{R}$ de las siguientes ecuaciones.

a) $(x - 4)^5 = 2(x - 4)^4$.

b) $3\left[\frac{1}{x-1}\right]^2 + 17\left[\frac{1}{x-1}\right] = 6$.

c) $[x + 3]^4 - 8[x + 3]^2 + 16 = 0$.

d) $\sqrt{(x-1)^2} = 16$.

e) $\sqrt{(x-3)^2} - 3 = 2\sqrt{(x-3)^2} - 7$.

f) $\sqrt{x+1} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

g) $3\sqrt{2}x^2 + 7x + \sqrt{2} = 0$.

h) $(2 + 3x)(4 - x) - 3x(3 - x) = 0$.

i) $\frac{1}{4}(x+1) + \frac{1}{6}(-3x+1) + \frac{1}{3}(2x+3) = \frac{1}{4}(4x+1)$.

j) $x + 2\sqrt{x} = 15$.

k) $12x^2 + 7\sqrt{3}x - 2 = 0$.

l) $\sqrt{-x} + \sqrt{x+5} = 3$.

m) $\sqrt{-x} + 4\sqrt{x+6} = 5\sqrt{5x+18}$.

n) $(x^3 - 25x + 1)^2 - 2(x^3 - 25x + 1) + 1 = 0$.

o) $|6x - 1| = 26$.

p) $|x^2 + 1| = 4$.

q) $|x^2 - 1| = -8$.

r) $|x^2 - 6x - 1| = 6$.

Solución

a) $(x-4)^5 = 2(x-4)^4 \implies (x-4)^5 - 2(x-4)^4 \implies (x-4)^4[(x-4)-2] \implies (x-4)^4(x-6) \implies x = 4, x = 6$.

$S = \{4, 6\}$.

b) $3\left(\frac{1}{x-1}\right)^2 + 17\left(\frac{1}{x-1}\right) = 6$.

Sea $u = \frac{1}{x-1} \implies 3u^2 + 17u - 6 = 0 \implies (3u-1)(u+6) = 0 \implies u = \frac{1}{3}, u = -6$.

$$u = \frac{1}{3} \implies \frac{1}{x-1} = \frac{1}{3} \implies 3 = x-1 \implies x = 4.$$

$$u = -6 \implies \frac{1}{x-1} = -6 \implies x-1 = -\frac{1}{6} \implies x = \frac{5}{6}.$$

$$S = \{4, \frac{5}{6}\}.$$

$$c) (x+3)^4 - 8(x+3)^2 + 16 = 0.$$

Sea $y = x+3$ y sea $u = y^2$, entonces $u^2 - 8u + 16 = 0 \implies (u-4)^2 = 0 \implies (y^2-4)^2 = 0 \implies [(y-2)(y+2)]^2 = 0 \implies (x+3-2)^2(x+3+2)^2 = 0 \implies (x+1)^2(x+5)^2 = 0 \implies x = -1, x = -5$

$$S = \{-1, -5\}.$$

$$d) \sqrt{(x-1)^2} = 16 \implies |x-1| = 16 \implies x-1 = 16 \text{ o } x-1 = -16 \implies x = 17 \text{ o } x = -15.$$

$$S = \{17, -15\}.$$

$$e) \sqrt{(x-3)^2} - 3 = 2\sqrt{(x-3)^2} - 7 \implies \sqrt{(x-3)^2} - 2\sqrt{(x-3)^2} = 3-7 \implies -\sqrt{(x-3)^2} = -4 \implies |x-3| = 4 \implies x-3 = -4 \text{ ó } x-3 = 4 \implies x = -1 \text{ ó } x = 7.$$

$$S = \{-1, 7\}.$$

$$f) \sqrt{x+1} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2} \implies \sqrt{x+1} = 2\sqrt{2} \implies x+1 = 8 \implies x = 7.$$

Prueba: $\sqrt{7+1} + \sqrt{2} = \sqrt{8} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$. $S = \{7\}$.

$$g) 3\sqrt{2}x^2 + 7x + \sqrt{2} = 0 \implies \Delta = 7^2 - 4(3\sqrt{2})(\sqrt{2}) = 49 - 24 = 25$$

$$x_1 = \frac{-7-5}{2(3\sqrt{2})} = -\sqrt{2}, x_2 = \frac{-7+5}{2(3\sqrt{2})} = -\frac{\sqrt{2}}{6}.$$

$$S = \{-\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{6}\}.$$

$$h) (2+3x)(4-x) - 3x(3-x) = 0 \implies (8+12x-2x-3x^2) - (9x-3x^2) = 0 \implies$$

$$8+10x-3x^2-9x+3x^2 = 0 \implies x+8 = 0 \implies x = -8.$$

$$S = \{-8\}.$$

$$i) \frac{1}{4}(x+1) + \frac{1}{6}(-3x+1) + \frac{1}{3}(2x+3) = \frac{1}{4}(4x+1) \implies$$

$$\frac{3}{12}(x+1) + \frac{2}{12}(-3x+1) + \frac{4}{12}(2x+3) = \frac{3}{12}(4x+1) \implies 3(x+1) + 2(-3x+1) + 4(2x+3) = 3(4x+1) \implies 3x+3-6x+2+8x+12 = 12x+3 \implies -7x = -14 \implies x = 2.$$

$$S = \{2\}.$$

$$j) x + 2\sqrt{x} = 15 \implies 2\sqrt{x} = 15 - x \implies (2\sqrt{x})^2 = (15-x)^2 \implies 4x = 225 - 30x + x^2 \implies x^2 - 34x + 225 = 0 \implies (x-9)(x-25) = 0 \implies x = 9 \text{ o } x = 25.$$

Prueba:

$$x = 9 \implies 9 + 2\sqrt{9} = 15 \implies 9 + 6 = 15 \implies 9 \text{ sí es solución.}$$

$$x = 25 \implies 25 + 3\sqrt{25} = 15 \implies 25 + 15 = 15. \text{ Falso, 25 no es solución.}$$

$$S=\{9\}.$$

$$k) 12x^2 + 7\sqrt{3} - 2 = 0.$$

Observe que $\Delta = (7\sqrt{3})^2 - 4(12)(-2) = 147 + 96 = 243$, entonces $x_1 = \frac{-7\sqrt{3} - \sqrt{243}}{24} = \frac{-7\sqrt{3} - 9\sqrt{3}}{24} = \frac{-16\sqrt{3}}{24} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $x_2 = \frac{-7\sqrt{3} + 9\sqrt{3}}{24} = \frac{2\sqrt{3}}{24} = \frac{\sqrt{3}}{12}$. $S = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{12}, -\frac{2\sqrt{3}}{3} \right\}$.

$$l) \sqrt{-x} + \sqrt{x+5} = 3 \Rightarrow \sqrt{x+5} = 3 - \sqrt{-x} \Rightarrow (\sqrt{x+5})^2 = (3 - \sqrt{-x})^2 \Rightarrow x+5 = 9 - 6\sqrt{-x} - x \Rightarrow 2x - 4 = -6\sqrt{-x} \Rightarrow 2(x-2) = 2(-3\sqrt{-x}) \Rightarrow (x-2)^2 = (-3\sqrt{-x})^2 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = -9x \Rightarrow x^2 + 5x + 4 = 0 \Rightarrow (x+1)(x+4) = 0 \Rightarrow x = -1, x = -4.$$

Prueba:

$$x = -1 \Rightarrow \sqrt{1} + \sqrt{-1+5} = 3 \Rightarrow 1 + 2 = 3 \Rightarrow -1 \text{ sí es solución.}$$

$$x = -4 \Rightarrow \sqrt{4} + \sqrt{-4+5} = 3 \Rightarrow 2 + 1 = 3 \Rightarrow -4 \text{ sí es solución.}$$

$$S = \{-1, -4\}.$$

$$m) \sqrt{-x} + 4\sqrt{x+6} = 5\sqrt{5x+18} \Rightarrow (\sqrt{-x} + 4\sqrt{x+6})^2 = (5\sqrt{5x+18})^2 \Rightarrow -x + 8\sqrt{-x(x+6)} + 16(x+6) = 25(5x+18) \Rightarrow -x + 16x + 96 + 8\sqrt{-x(x+6)} = 125x + 450 \Rightarrow 8\sqrt{-x(x+6)} = x - 16x + 125x + 450 - 96 \Rightarrow 8\sqrt{-x(x+6)} = 110x + 354 \Rightarrow 8\sqrt{-x(x+6)} = 2(55x + 177) \Rightarrow (4\sqrt{-x(x+6)})^2 = (55x + 177)^2 \Rightarrow -16x(x+6) = 3025x^2 + 19470x + 31329 \Rightarrow -16x^2 - 96x = 3025x^2 + 19470x + 31329 \Rightarrow 3041x^2 + 19566x + 31329 = 0 \Rightarrow x_1 = -3, x_2 = -\frac{10443}{3041}.$$

Al probar en la ecuación se obtiene que la solución es $x = -3$.

$$S = \{-3\}.$$

$$n) (x^3 - 25x + 1)^2 - 2(x^3 - 25x + 1) + 1 = 0.$$

Sea $u = x^3 - 25x + 1$, entonces $u^2 - 2u + 1 = (u-1)^2 = 0 \Rightarrow u = 1 \Rightarrow x^3 - 25x + 1 = 1 \Rightarrow x^3 - 25x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 25) = 0 \Rightarrow x(x-5)(x+5) = 0.$

$$S = \{0, -5, 5\}.$$

$$o) |6x - 1| = 26 \Rightarrow 6x - 1 = -26 \text{ o } 6x - 1 = 26 \Rightarrow x = -\frac{25}{6} \text{ o } x = \frac{9}{2}.$$

$$S = \left\{ -\frac{25}{6}, \frac{9}{2} \right\}.$$

p) $|x^2 + 1| = 4 \Rightarrow x^2 + 1 = 4 \Rightarrow x = -\sqrt{3} \text{ o } x = \sqrt{3}$, por que $x^2 + 1 = -4 \Rightarrow x^2 = -5$ no tiene solución.

$$S = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}.$$

q) $|x^2 - 1| = -8$, no tiene solución pues $|x^2 - 1| \geq 0 \Rightarrow S = \emptyset.$

$$r) |x^2 - 6x - 1| = 6.$$

Caso I : $x^2 - 6x - 1 = 6 \Rightarrow x^2 - 6x - 7 = (x + 1)(x - 7) = 0 \Rightarrow x = -1, x = 7$.

Caso II: $x^2 - 6x - 1 = -6 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = (x - 1)(x - 5) = 0 \Rightarrow x = 1, x = 5$. $S = \{-1, 1, 5, 7\}$.

4. Resolver los siguientes problemas:

a) Un prisma rectangular tiene un volumen de 216cm^3 . Determine su área superficial si se sabe que el ancho de la base excede en 2cm a la altura y la longitud en 1cm al doble de la altura.

Solución Altura = h . Ancho de la base = $a = h + 2$. Longitud de la base = $l = 2h + 1$.

Volumen = $h \cdot a \cdot l = h(h + 2)(2h + 1) = 216 \Rightarrow 2h^3 + 5h^2 + 2h - 216 = 0 \Rightarrow$

$(h - 4)(2h^2 + 13h + 54) = 0 \Rightarrow h = 4$.

Altura = 4cm . Ancho de la base = 6cm . Longitud = 9cm .

Recuerde que el prisma tiene 3 pares de caras. Así rea superficial = $2ha + 2hl + 2al \Rightarrow$ rea superficial = $2(4 \cdot 6) + 2(4 \cdot 9) + 2(6 \cdot 9) = 228\text{cm}$.

b) La razón entre los catetos de un triángulo rectángulo es $\frac{4}{3}$. Encuentre la altura sobre la hipotenusa si se sabe que esta mide 26cm . (Sugerencia: Use semejanza de triángulos).

Solución Catetos: $x, y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{4}{3} \Rightarrow y = \frac{3x}{4}$.

Altura sobre la hipotenusa: a . Hipotenusa: $h = 26$.

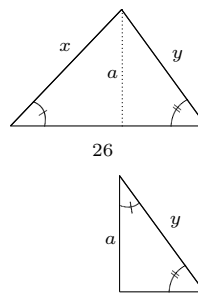
$$h^2 = x^2 + y^2 = x^2 + \left(\frac{3x}{4}\right)^2 = \frac{16x^2 + 9x^2}{16} = \frac{25x^2}{16} \Rightarrow$$

$$h = \frac{5x}{4} \Rightarrow \frac{5x}{4} = 26 \Rightarrow x = 20,8 \text{ y } y = 15,6.$$

Luego, por semejanza de triángulos $\frac{x}{h} = \frac{a}{y} \Rightarrow$

$$a = \frac{(20,8)(15,6)}{26} = 12,48.$$

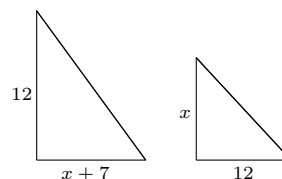
La altura sobre la hipotenusa mide $12,48\text{cm}$.



c) En dos triángulos rectángulos semejantes, el cateto mayor de uno excede en 7cm al cateto menor del otro. Los otros dos catetos miden 12cm cada uno. Determine la hipotenusa de cada triángulo.

Solución Por semejanza de triángulos se tiene que $\frac{12}{x} = \frac{x+7}{12} \Rightarrow 144 = x^2 + 7x \Rightarrow x^2 + 7x - 144 = 0 \Rightarrow (x + 16)(x - 9) = 0 \Rightarrow x = -16 \text{ y } x = 9$.

Si $x = 9\text{cm}$ los catetos miden 12cm y 16cm en un triángulo y 12cm y 9cm en el otro. Por lo tanto por Pitágoras las hipotenusas miden 20cm y 15cm respectivamente.



5. Encuentre las soluciones de los sistemas de ecuaciones:

$$\text{a) } \begin{cases} -7x + 3y = -5 \\ 4x - y = 5. \end{cases}$$

Con el método de sustitución, de la ecuación $4x - y = 5$, se tiene que $y = 4x - 5$ y sustituyendo en la ecuación $-7x + 3y = -5$.

$$-7x + 3(4x - 5) = -5$$

$$-7x + 12x - 15 = -5$$

$$5x = 10$$

$$x = 2.$$

Sustituyendo en la ecuación original tenemos que: $y = 4(2) - 5 = 3$.

La solución es $(2, 3)$.

Aplicando la Regla de Cramer:

El determinante de la matriz de coeficientes es: $|A| = \begin{vmatrix} -7 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = (-7)(-1) - (4)(3) = -5$.

Al reemplazar los coeficientes de x se obtiene: $|A_x| = \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = (-5)(-1) - (5)(3) = -10$.

Al reemplazar los coeficientes de y se obtiene: $|A_y| = \begin{vmatrix} -7 & -5 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = (-7)(5) - (4)(-5) = -15$,

entonces:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-10}{-5} = 2, y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-15}{-5} = 3 \text{ y la solución es } (2, 3).$$

$$\text{b) } \begin{cases} 6x + 4y = -1 \\ 15x + 10y = 4. \end{cases}$$

Usando el método de suma y resta.

Si se quiere despejar la variable x , entonces se debe eliminar la variable y . Dado que el m.c.m de 4 y 10 es 20, entonces se multiplica por 5 y -2 la primera y segunda ecuación respectivamente.

$$\begin{cases} 6x + 4y = -1 \\ 15x + 10y = 4 \end{cases} \begin{vmatrix} 5 \\ -2 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 30x + 20y = -5 \\ -30x - 20y = -8. \end{cases}$$

Nótese que al "sumar" se tiene una relación falsa por lo cual el sistema no tiene solución.

Usando la regla de Cramer se tiene:

$$|A| = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 15 & 10 \end{vmatrix} = 0, \quad |A_x| = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = -26, \quad |A_y| = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 15 & 4 \end{vmatrix} = 39.$$

Dado que $|A| = 0$, pero $|A_x| \neq 0$, $|A_y| \neq 0$, entonces se concluye que el sistema no tiene solución.

$$\text{c) } \begin{cases} 4x - 2y = 6 \\ 6x - 3y = 9. \end{cases}$$

Usando la Regla de Cramer se tiene:

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = -12 + 12 = 0. \quad |A| = 0$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 9 & -3 \end{vmatrix} = -18 + 18 = 0. \quad |A_x| = 0$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 36 - 36 = 0. \quad |A_y| = 0$$

Como $|A| = |A_x| = |A_y| = 0$, entonces tiene infinitas soluciones.

De la primera ecuación se obtiene $y = 2x - 3$.

$$S = \{(x, 2x - 3) \in \mathbb{R}^2 / x \in \mathbb{R}\}.$$

$$\text{d) } \begin{cases} 3(x - 1)^2 + 6(2y - 3)^2 = 162 \\ -4(x - 1)^2 + 3(2y - 3)^2 = 59 \end{cases}$$

$$\text{Sea } u = (x - 1)^2 \text{ y } v = (2y - 3)^2, \text{ entonces el sistema es: } \begin{cases} 3u + 6v = 162 \\ -4u + 3v = 59. \end{cases}$$

Resolviendo por sustitución, de la primera ecuación se tiene que $u = -2v + 54$ y sustituyendo en la segunda tiene:

$$-4(-2v + 54) + 3v = 59$$

$$8v - 216 + 3v = 59$$

$$11v = 275 \implies v = 25,$$

entonces $u = -2(25) + 54 \implies u = 4$. La solución es: $(4, 25) = (u, v)$.

Para encontrar la solución (x, y) se tiene:

$$u = 4 \implies (x - 1)^2 = 4 \implies x = 3 \text{ o } x = -1.$$

$$v = 25 \implies (2y - 3)^2 = 25 \implies y = 4 \text{ o } y = -1.$$

El conjunto de solución es: $\{(3, 4), (3, -1), (-1, 4), (-1, -1)\}$.

$$\text{e) } \begin{cases} -2(x+1)^3 - (2y+1)^3 = -62 \\ 4(x+1)^3 + 5(2y+1)^3 = 148. \end{cases}$$

Sea $u = (x+1)^3$ y $v = (2y+1)^3$ entonces el sistema es:
$$\begin{cases} -2u - v = -62 \\ 4u + 5v = 148. \end{cases}$$

Por Cramer: $|A| = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -10 + 4 = -6.$

$$|A_u| = \begin{vmatrix} -62 & -1 \\ 148 & 5 \end{vmatrix} = -310 + 148 = -162.$$

$$|A_v| = \begin{vmatrix} -2 & -62 \\ 4 & 148 \end{vmatrix} = -296 + 248 = -48.$$

Se tiene que $u = \frac{-162}{-6} = 27$ y $v = \frac{-48}{-6} = 8$, por lo tanto la solución es: $(u, v) = (27, 8).$

Para encontrar la solución (x, y) se tiene $u = 27 \implies (x+1)^3 = 27 \implies x+1 = 3 \implies x = 2$,
 $v = 8 \implies (2y+1)^3 = 8 \implies 2y+1 = 2 \implies y = \frac{1}{2}.$

$$S = \{(2, \frac{1}{2})\}.$$

$$\text{f) } \begin{cases} 5x - 2y = -11b \\ 3x + y = 22a \text{ con } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Por sustitución. De la primera ecuación $5x = 2y - 11b \implies x = \frac{2y - 11b}{5}$ y al sustituir en la segunda ecuación se tiene:

$$3\left(\frac{2y - 11b}{5}\right) + y = 22a \implies 6y - 33b + 5y = 110a \implies 11y = 110a + 33b \implies y = 10a + 3b.$$

$$\text{Por tanto } x = \frac{2(10a + 3b) - 11b}{5} \implies x = 4a - b.$$

La solución es $S = \{(4a - b, 10a + 3b)\}.$

Capítulo 4

Ejercicios de inecuaciones

Capítulo 3. Ejercicios de ecuacionesEjercicios de inecuaciones

1. Encuentre el conjunto de números reales que son solución de las siguientes inecuaciones. Exprese el conjunto solución usando notación de intervalos.

a) $\frac{2}{x+2} < \frac{5}{6+x-x^2}$.

c) $\frac{5x-2b}{a} \leq \frac{10x-8a}{b}$, con $b < 2a < 0$.

e) $x^6 - 1 \leq 0$.

g) $|x^2 - 8x + 11| \leq 4$.

i) $-8x + 4 \leq -10x + 7$.

k) $-4 \leq \frac{3x-1}{2} \leq 5$.

m) $2x(8x-1) \geq (4x-1)^2$.

ñ) $2x + a + 1 \leq 4 - a$, con $a \in \mathbb{R}$.

p) $\frac{x-1}{b} \geq \frac{x+1}{a}$, con $0 < a < b$.

r) $(1-2x)(x-4) > 0$.

t) $x^2 - (a+b)x + ab \leq 0$, con $0 < a < b$.

v) $\frac{x^2-2x+10}{6x^2-11x+4} \leq 0$.

x) $x^3 \leq 8$.

z) $\frac{5}{3x-1} > 0$.

b') $\frac{x^2-2x}{x^2-9} \geq 0$.

d') $\frac{1-x^2+x}{2-x^2+x} \geq 0$.

f') $\frac{2x+1}{x-5} \geq 1$.

b) $(x+1)^3(x+2)^6 \leq (x+1)^4(x+2)^5$.

d) $x^7 - 1 < 0$.

f) $|x^2 - 1| \leq 4$.

h) $\sqrt{(x^2-29)^2} \leq 20$.

j) $3(2x-1) - 2(4x-3) \geq 5(1-2x)$.

l) $-\frac{1}{2} \leq \frac{1-2x}{2} \leq 2$.

n) $\frac{3-3x}{3x-1} \leq 1$.

o) $ax - x \geq 1 - x - a$, con $a \in \mathbb{R}$.

q) $\frac{2x-a}{b} \geq \frac{2x-b}{a}$, con $0 < b < a$.

s) $(x+3)(x+1) \leq 24$.

u) $\frac{x-1}{x+1} > \frac{b}{a}$, con $0 < a < b$.

w) $(2x-x^2-7)(x-\sqrt{5}) < 0$.

y) $x^2 \leq 144$.

a') $(\pi-4)(x+5) \geq 0$.

c') $\frac{x^5-x^3}{2x-1} < 0$.

e') $\frac{2}{x+2} \geq -1$.

g') $|2x-7| \leq 8$.

h') $|5x^2 + 29x - 6| \leq 0.$

i') $|-2x^2 + 9x - 10| > 0.$

j') $|x^2 + x - 72| \leq 0.$

k') $|-x^2 + 10x - 24| < 0.$

l') $\left| \frac{x^2 + 3}{x^2 - 29x + 180} \right| > 0.$

m') $\left| \frac{x^2 - 16}{x^2 + x - 12} \right| \leq 0.$

n') $4 - |2x - 1| \geq 0.$

o') $5|3x - 2| - 1 \geq 4|3x - 2| + 3.$

p') $\left| \frac{2x - 1}{x^2 + 1} \right| \leq 0.$

q') $\left| \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 + 2} \right| \leq -1.$

r') $\left| \frac{2x - 3}{x^2 - 7x + 10} \right| \leq -\sqrt{2}.$

s') $|x^2 - 6x - 1| \leq 6.$

t') $|x^2 + 2x + 4| \geq 2.$

u') $|5x^2 + 3x - 31| \geq 23.$

v') $\frac{x}{x+2} - \frac{x}{x-1} < \frac{-5}{(x-1)(x+2)}.$

w') $|2x^2 - 16x + 27| < 3.$

x') $|2x^2 - 8x - 9| > 15.$

z') $x^2 \geq 81.$

y') $(3x - a)(4x - b) \geq 0$, con $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $(4a - 3b) < 0.$

2. Encuentre el conjunto de solución $\frac{-x^2 + 2x - 10}{x^3 - 8} > 0.$

3. Encuentre el conjunto de solución de:

a) $\frac{1}{9x^2 + 12x + 4} + \frac{1}{6x^2 + x - 2} \geq \frac{4(x+1)}{18x^3 + 15x^2 - 4x - 4}.$

b) $2x(x-3)^8 - (x-3)^7(x+3) \geq 0.$

c) $27x^3 + 36x^2 - 75x - 100 < 0.$

d) $\frac{-8x^3 + 27}{-9x^2 + 6x - 10} > 0.$

e) $(x+2)^6 - 9(x+2)^3 \geq -8.$

f) $\left| \frac{16}{x^2 + 4x - 16} \right| \geq 1.$

4. Encuentre los valores de k para que la ecuación $k(-\frac{1}{2}x^2 + x + 1) + (x^2 - 2x - 1) = 0$ tenga dos soluciones reales distintas.5. Encuentre los valores de k para que la ecuación $kx + (4x^2 + x + 1) = 0$ no tenga soluciones reales.

Soluciones del Tema No.4: Inecuaciones

1. Encuentre el conjunto de números reales que son solución de las siguientes inecuaciones. Exprese el conjunto solución usando notación de intervalos.

Solución

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{2}{x+2} < \frac{5}{6+x-x^2} &\implies \frac{2}{x+2} + \frac{5}{x^2-x-6} < 0 \\ \implies \frac{2}{(x+2)} + \frac{5}{(x+2)(x-3)} < 0 &\implies \frac{2(x-3)+5}{(x+2)(x-3)} < 0 \implies \frac{2x-1}{(x+2)(x-3)} < 0. \\ S =]-\infty, -2[\cup]\frac{1}{2}, 3[. \end{aligned}$$

x	-2	$\frac{1}{2}$	3
$2x-1$	-	-	+
$x+2$	-	+	+
$x-3$	-	-	+
$\frac{2x-1}{(x+2)(x-3)}$	-	+	-

$$\begin{aligned} \text{b) } (x+1)^3(x+2)^6 \leq (x+1)^4(x+2)^5 &\implies (x+1)^3(x+2)^6 - (x+1)^4(x+2)^5 \leq 0 \implies \\ (x+1)^3(x+2)^5 \leq 0. \end{aligned}$$

$$S = [-2, -1].$$

x	-2	-1
$(x+1)^3$	-	-
$(x+2)^5$	-	+
$(x+1)^3(x+2)^5$	+	-

$$\text{c) } \frac{5x-2b}{a} \leq \frac{10x-8a}{b}, \text{ si } b < 2a < 0$$

$$\frac{b(5x-2b)}{a} \geq 10x-8a \implies b(5x-2b) \leq a(10x-8a) \implies 5bx-2b^2 \leq 10ax-8a^2 \implies$$

$$5x(b-2a) \leq 2b^2-8a^2 = 2(b^2-4a^2)$$

$$\text{Note que } (b-2a) < 0, \text{ así } 5x(b-2a) \leq 2(b-2a)(b+2a) \implies x \geq \frac{2(b-2a)(b+2a)}{5(b-2a)} \implies x \geq \frac{2(b+2a)}{5}.$$

$$S: \left[\frac{2(b+2a)}{5}, \infty \right[.$$

$$\text{d) } x^7 - 1 < 0 \implies x^7 < 1 \implies x < \sqrt[7]{1} \implies x < 1.$$

$$S =]-\infty, 1[.$$

$$\text{e)} x^6 - 1 \leq 0 \implies x^6 \leq 1 \implies \sqrt[6]{x^6} \leq \sqrt[6]{1} \implies |x| \leq 1 \implies -1 \leq x \leq 1.$$

$$\mathbf{S} = [-1, 1].$$

$$\text{f)} |x^2 - 1| \leq 4 \implies -4 \leq x^2 - 1 \leq 4.$$

$$\text{Caso I: } x^2 - 1 \geq -4 \implies x^2 \geq -3 \implies S_I = \mathbb{R}, \text{ pues } x^2 \geq 0 \text{ para cualquier } x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Caso II: } x^2 - 1 \leq 4 \implies x^2 \leq 5 \implies \sqrt{x^2} \leq \sqrt{5} \implies |x| \leq \sqrt{5} \implies -\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5} \implies$$

$$S_{II} = [-\sqrt{5}, \sqrt{5}].$$

$$\mathbf{S} = S_I \cap S_{II} = [-\sqrt{5}, \sqrt{5}].$$

$$\text{g)} |x^2 - 8x + 11| \leq 4 \implies -4 \leq x^2 - 8x + 11 \leq 4.$$

$$\text{I Caso: } x^2 - 8x + 11 \geq -4 \implies (x - 5)(x - 3) \geq 0 \implies S_I =]-\infty, 3] \cup [5, \infty[.$$

$$\text{II Caso: } x^2 - 8x + 11 \leq 4 \implies (x - 7)(x - 1) \leq 0 \implies S_{II} = [1, 7].$$

$$\mathbf{S} = S_I \cap S_{II} = [1, 3] \cup [5, 7].$$

$$\text{h)} \sqrt{(x^2 - 29)^2} \leq 20.$$

$$|x^2 - 29| \leq 20 \implies -20 \leq x^2 - 29 \leq 20 \implies 9 \leq x^2 \leq 49.$$

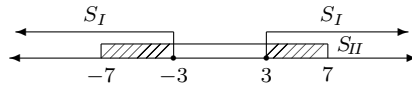
$$\text{I caso: } x^2 \geq 9 \implies (x - 3)(x + 3) \geq 0$$

$$S_I :]-\infty, -3] \cup [3, \infty[.$$

$$\text{II caso: } x^2 \leq 49 \implies (x - 7)(x + 7) \leq 0$$

$$S_{II} : [-7, 7].$$

$$\mathbf{S} = S_I \cap S_{II} = [-7, -3] \cup [3, 7].$$



$$\text{i)} -8x + 4 \leq -10x + 7 \implies 2x - 3 \leq 0 \implies x \leq \frac{3}{2}.$$

$$\mathbf{S} =]-\infty, \frac{3}{2}].$$

$$\text{j)} 3(2x - 1) - 2(4x - 3) \geq 5(1 - 2x) \implies 8x - 2 \geq 0 \implies x > \frac{1}{4}.$$

$$\mathbf{S} = [\frac{1}{4}, +\infty[.$$

$$\text{k)} -4 \leq \frac{3x - 1}{2} \leq 5 \implies -8 \leq 3x - 1 \leq 10 \implies -\frac{7}{3} \leq x \leq \frac{11}{3}.$$

$$\mathbf{S} = [-\frac{7}{3}, \frac{11}{3}].$$

$$\text{l)} -\frac{1}{2} \leq \frac{1 - 2x}{2} \leq 2 \implies -1 \leq 1 - 2x \leq 4 \implies -2 \leq -2x \leq 3 \implies 1 \geq x \geq -\frac{3}{2} \implies -\frac{3}{2} \leq x \leq 1.$$

$$\mathbf{S} = [-\frac{3}{2}, 1].$$

$$\text{m)} 2x(8x - 1) \geq (4x - 1)^2 \implies 2x(8x - 1) - (16x^2 - 8x + 1) \geq 0 \implies 6x - 1 \geq 0 \implies x \geq \frac{1}{6}.$$

$$\mathbf{S} = [\frac{1}{6}, \infty[.$$

n) $\frac{3-3x}{3x-1} \leq 1 \Rightarrow \frac{3-3x}{3x-1} - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{3-3x-(3x-1)}{3x-1} \leq 0 \Rightarrow \frac{-6x+4}{3x-1} \leq 0$, con $x \neq \frac{1}{3}$.
 $S =]-\infty, \frac{1}{3}[\cup]\frac{2}{3}, \infty[$.

x	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$		
$-6x + 4$	$+$	$+$	0	$-$
$3x - 1$	$-$	0	$+$	$+$
$\frac{-6x + 4}{3x - 1}$	$-$	$+$		$-$

ñ) $2x + a + 1 \leq 4 - a$, con $a \in \mathbb{R} \Rightarrow 2x \leq -2a + 3 \Rightarrow x \leq \frac{-2a+3}{2}$.

$S =]-\infty, \frac{-2a+3}{2}]$.

o) $ax - x \geq 1 - x - a$, con $a \in \mathbb{R} \Rightarrow ax \geq 1 - a$.

I Caso $a = 0 \Rightarrow 0 \geq 1 \Rightarrow S_I = \emptyset$.

II Caso $a < 0 \Rightarrow x \leq \frac{1-a}{a} \Rightarrow S_{II} =]-\infty, \frac{1-a}{a}]$.

III Caso $a > 0 \Rightarrow x \geq \frac{1-a}{a} \Rightarrow S_{III} = [\frac{1-a}{a}, \infty[$.

p) $\frac{x-1}{b} \geq \frac{x+1}{a}$, $0 < a < b$.

Dado que a y b son números positivos se tiene $a(x-1) \geq b(x+1) \Rightarrow x(a-b) \geq a+b \Rightarrow$

$x \leq \frac{a+b}{a-b}$, pues $(a-b) < 0$.

$S =]-\infty, \frac{a+b}{a-b}]$.

q) $\frac{2x-a}{b} \geq \frac{2x-b}{a}$ con $0 < b < a$.

$2ax - a^2 \geq 2bx - b^2 \Rightarrow 2x(a-b) \geq a^2 - b^2 \Rightarrow x \geq \frac{a^2-b^2}{2(a-b)}$ pues $a-b > 0 \Rightarrow$

$x \geq \frac{(a-b)(a+b)}{2(a-b)} \Rightarrow x \geq \frac{a+b}{2}$.

$S = [\frac{a+b}{2}, \infty[$.

r) $(1-2x)(x-4) > 0$.

$S =]\frac{1}{2}, 4[$.

s) $(x+3)(x+1) \leq 24 \Rightarrow (x+3)(x+1) - 24 \leq 0 \Rightarrow x^2 + 4x - 21 \leq 0 \Rightarrow (x-3)(x+7) \leq 0$.

$S = [-7, 3]$.

t) $x^2 - (a+b)x + ab \leq 0$, con $0 < a < b \Rightarrow (x-a)(x-b) \leq 0$.

$S = [a, b]$.

u) $\frac{x-1}{x+1} > \frac{b}{a}$, con $0 < a < b \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} - \frac{b}{a} > 0 \Rightarrow \frac{ax-a-bx-b}{a(x+1)} > 0 \Rightarrow \frac{x(a-b)-(a+b)}{x+1} > 0$.

Dado que $a-b < 0$, entonces $\frac{x - (\frac{a+b}{a-b})}{x+1} < 0$. Además $\frac{a+b}{a-b} < -1$.

$$S =]\frac{a+b}{a-b}, -1[.$$

$$v) \frac{x^2 - 2x + 10}{6x^2 - 11x + 4} \leq 0 \implies \frac{x^2 - 2x + 10}{(2x-1)(3x-4)} \leq 0, \text{ con } x \neq \frac{1}{2}, x \neq \frac{4}{3}$$

$x^2 - 2x + 10$ no tiene ceros en $\mathbb{R}$ y se cumple que $x^2 - 2x + 10 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

$$S =]\frac{1}{2}, \frac{4}{3}[.$$

	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{3}$
$x^2 - 2x + 10$	+	+
$2x - 1$	-	+
$3x - 4$	-	-
$\frac{x^2 - 2x + 10}{(2x + 1)(3x - 4)}$	+	-

$$w) (2x - x^2 - 7)(x - \sqrt{5}) < 0$$

$2x - x^2 - 7$ no tiene ceros en $\mathbb{R}$ y se cumple que $2x - x^2 - 7 = -x^2 + 2x - 7 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$S =]\sqrt{5}, \infty[.$$

		$\sqrt{5}$	
$2x - x^2 - 7$		-	-
$x - \sqrt{5}$		-	0
$(2x - x^2 - 7)(x - \sqrt{5})$		+	-

$$x) x^3 \leq 8 \implies x \leq \sqrt[3]{8} \implies x \leq 2.$$

$$S =]-\infty, 2].$$

$$y) x^2 \leq 144 \implies \sqrt{x^2} \leq \sqrt{144} \implies |x| \leq 12 \implies -12 \leq x \leq 12.$$

$$S = [-12, 12].$$

$$z) \frac{5}{3x-1} > 0 \implies 3x-1 > 0 \implies x > \frac{1}{3}.$$

$$S =]\frac{1}{3}, \infty[.$$

$$a') (\pi - 4)(x + 5) \geq 0.$$

$$\text{Dado que } (\pi - 4) < 0 \implies x + 5 \leq 0 \implies x \leq -5.$$

$$S =]-\infty, -5].$$

$$b') \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 9} \geq 0 \implies \frac{x(x-2)}{(x-3)(x+3)} \geq 0, \text{ con } x \neq -3, x \neq 3.$$

	$-\infty$	-3	0	2	3	$+\infty$
x	-	-	0	+	+	+
$x-2$	-	-	-	0	+	+
$x-3$	-	-	-	-	0	+
$x+3$	-	0	+	+	+	+
$\frac{x(x-2)}{x^2-9}$	+	-	+	-	+	+

$$S =]-\infty, -3[\cup]0, 2] \cup]3, \infty[.$$

$$c') \frac{x^5 - x^3}{2x - 1} < 0 \implies \frac{x^3(x-1)(x+1)}{2x-1} < 0.$$

$$S =]-1, 0[\cup]\frac{1}{2}, 1[.$$

	$-\infty$	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
x^3	-	-	0	+	+	+
$x-1$	-	-	-	-	0	+
$x+1$	-	0	+	+	+	+
$2x-1$	-	-	-	0	+	+
$\frac{x^3(x-1)(x+1)}{2x-1}$	+	-	+	-	+	+

$$d') \frac{1-x^2+x}{2-x^2+x} \geq 0 \implies \frac{-(x^2-x-1)}{-(x^2-x-2)} \geq 0 \implies \frac{x^2-x-1}{(x-2)(x+1)} \geq 0 \implies$$

$$\frac{(x+\frac{\sqrt{5}-1}{2})(x-\frac{\sqrt{5}+1}{2})}{(x-2)(x+1)} \geq 0.$$

$$S =]-\infty, -1[\cup [-\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{2}] \cup]2, \infty[.$$

$$e') \frac{2}{x+2} \geq -1 \implies \frac{2}{x+2} + 1 \geq 0 \implies \frac{x+4}{x+2} \geq 0, \text{ con } x \neq -2.$$

$$S =]-\infty, -4] \cup]-2, \infty[.$$

	$-\infty$	-4	-2	$+\infty$
$x+4$	-	0	+	+
$x+2$	-	-	0	+
$\frac{x+4}{x+2}$	+	-	+	+

$$f') \frac{2x+1}{x-5} \geq 1 \implies \frac{2x+1}{x-5} - 1 \geq 0 \implies \frac{x+6}{x-5} \geq 0, \text{ con } x \neq 5.$$

$$S =]-\infty, -6] \cup]5, \infty[.$$

$$g') |2x-7| \leq 8 \implies -8 \leq 2x-7 \leq 8 \implies -1 \leq 2x \leq 15 \implies -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{15}{2}.$$

$$S = [-\frac{1}{2}, \frac{15}{2}].$$

$$h') |5x^2 + 29x - 6| \leq 0 \implies |5x^2 + 29x - 6| = 0.$$

$$S = \{-6, \frac{1}{5}\}.$$

$$i') |-2x^2 + 9x - 10| > 0. \text{ Como } -2x^2 + 9x - 10 = 0 \text{ si } x = 2 \text{ o } x = \frac{5}{2}.$$

$$S = \mathbb{R} \setminus \{2, \frac{5}{2}\}.$$

$$j') |x^2 + x - 72| \leq 0 \implies |x^2 + x - 72| = 0.$$

$$S = \{-9, 8\}.$$

$$k') |-x^2 + 10x - 24| < 0. \quad S = \emptyset.$$

$$l') \left| \frac{x^2+3}{x^2-29x+180} \right| > 0$$

$$x^2+3 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ y } x^2-29x+180 = 0, \text{ si } x = 9 \text{ o } x = 20.$$

$$S = \mathbb{R} \setminus \{9, 20\}.$$

$$m') \left| \frac{x^2-16}{x^2+x-12} \right| \leq 0 \implies \left| \frac{(x-4)(x+4)}{(x-3)(x+4)} \right| \leq 0 \implies \left| \frac{x-4}{x-3} \right| = 0.$$

$$S = \{4\}.$$

$$n') 4 - |2x-1| \geq 0 \implies |2x-1| \leq 4 \implies -4 \leq 2x-1 \leq 4 \implies -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}.$$

$$S = [-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}].$$

$$\text{o') } 5|3x-2|-1 > 4|3x-2|+3 \implies |3x-2| > 4 \implies 3x-2 < -4 \text{ o } 3x-2 > 4 \implies x < -\frac{2}{3} \text{ o } x > 2.$$

$$\mathbf{S} =]-\infty, -\frac{2}{3}[\cup]2, \infty[.$$

$$\text{p') } \left| \frac{2x-1}{x^2+1} \right| \leq 0 \implies |2x-1| \leq 0, \text{ pues } x^2+1 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \implies 2x-1=0 \implies x = \frac{1}{2}.$$

$$\mathbf{S} = \{\frac{1}{2}\}.$$

$$\text{q') } \left| \frac{x^3-2x+1}{x^2+2} \right| \leq -1. \quad \mathbf{S} = \emptyset.$$

$$\text{r') } \left| \frac{2x-3}{x^2-7x+10} \right| \leq -\sqrt{2}. \quad \mathbf{S} = \emptyset.$$

$$\text{s') } |x^2-6x-1| \leq 6 \implies -6 \leq x^2-6x-1 \leq 6.$$

$$\text{I Caso: } x^2-6x-1 \geq -6 \implies (x-5)(x-1) \geq 0.$$

$$S_I =]-\infty, 1] \cup [5, \infty[.$$

$$\text{II Caso: } x^2-6x-1 \leq 6 \implies (x-7)(x+1) \leq 0.$$

$$S_{II} = [-1, 7].$$

$$\mathbf{S} = S_I \cap S_{II} \implies \mathbf{S} = [-1, 1] \cup [5, 7].$$

$$\text{t') } |x^2+2x+4| \geq 2 \implies |(x+1)^2+3| \geq 2 \implies (x+1)^2+3 \geq 2 \implies (x+1)^2 \geq -1.$$

$$\mathbf{S} = \mathbb{R}.$$

$$\text{u') } |5x^2+3x-31| \geq 23 \implies 5x^2+3x-31 \leq -23 \text{ o } 5x^2+3x-31 \geq 23.$$

$$\text{I Caso: } 5x^2+3x-31 \leq -23 \implies (x-1)(5x+8) \leq 0 \implies S_I = [-\frac{8}{5}, 1].$$

$$\text{II Caso: } 5x^2+3x-31 \geq 23 \implies (x-3)(5x+18) \geq 0 \implies S_{II} =]-\infty, -\frac{18}{5}] \cup [3, \infty[.$$

$$\mathbf{S} = S_I \cup S_{II} \implies \mathbf{S} =]-\infty, -\frac{18}{5}] \cup [-\frac{8}{5}, 1] \cup [3, \infty[.$$

$$\text{v') } \frac{x}{x+2} - \frac{x}{x-1} < -\frac{5}{(x-1)(x+2)} \implies \frac{x}{x+2} - \frac{x}{x-1} + \frac{5}{(x-1)(x+2)} < 0 \implies$$

$$\frac{x(x-1)-x(x+2)+5}{(x-1)(x+2)} < 0 \implies \frac{-3x+5}{(x-1)(x+2)} < 0.$$

$$\mathbf{S} =]-2, 1[\cup]\frac{5}{3}, \infty[.$$

$$\text{w') } |2x^2-16x+27| < 3 \implies -3 < 2x^2-16x+27 < 3.$$

$$\text{I Caso: } 2x^2-16x+27 > -3 \implies 2(x-5)(x-3) > 0 \implies S_I =]-\infty, 3[\cup]5, \infty[.$$

$$\text{II Caso: } 2x^2-16x+27 < 3 \implies 2(x-6)(x-2) < 0 \implies S_{II} =]2, 6[.$$

$$\mathbf{S} = S_I \cap S_{II} =]2, 3[\cup]5, 6[.$$

$$\text{x') } |2x^2-8x-9| > 15 \implies 2x^2-8x-9 < -15 \text{ o } 2x^2-8x-9 > 15.$$

$$\text{I Caso: } 2x^2-8x-9 < -15 \implies 2(x-3)(x-1) < 0 \implies S_I =]1, 3[.$$

$$\text{II Caso: } 2x^2-8x-9 > 15 \implies 2(x-6)(x+2) > 0 \implies S_{II} =]-\infty, -2[\cup]6, \infty[.$$

$$\mathbf{S} = S_I \cup S_{II} =]-\infty, -2[\cup]1, 3[\cup]6, \infty[.$$

$$\text{y') } (3x-a)(4x-b) \geq 0 \text{ con } 4a-3b < 0 \implies 4a < 3b \implies \frac{a}{3} < \frac{b}{4}.$$

$$\mathbf{S} =]-\infty, \frac{a}{3}] \cup [\frac{b}{4}, \infty[.$$

	$\frac{a}{3}$		$\frac{b}{4}$	
$3x - a$	-	0	+	+
$4x - b$	-	-	0	+
$(3x - a)(4x - b)$	+	-	+	+

$$z') \quad x^2 \geq 81 \implies \sqrt{x^2} \geq \sqrt{81} \implies |x| \geq 9 \implies x \leq -9 \text{ o } x \geq 9.$$

$$\text{También } x^2 \geq 81 \implies x^2 - 81 \geq 0 \implies (x - 9)(x + 9) \geq 0.$$

$$\text{S: }]-\infty, -9] \cup [9, +\infty[.$$

	$-\infty$	-9	9	$+\infty$
$x + 9$	-	0	+	+
$x - 9$	-	-	0	+
$(x - 9)(x + 9)$	+	-	+	+

2. Encuentre el conjunto de solución $\frac{-x^2 + 2x - 10}{x^3 - 8} > 0$.

$$\text{Solución } \frac{-x^2 + 2x - 10}{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)} > 0.$$

$$\text{Nótese que: } -x^2 + 2x - 10 < 0, \forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{S: }]-\infty, 2[.$$

	$-\infty$	2	$+\infty$
$-x^2 + 2x - 10$	-	-	-
$x - 2$	-	0	+
$x^2 + 2x + 4$	+	+	+
$\frac{-x^2 + 2x - 10}{x^3 - 8}$	+	-	-

3. Encuentre el conjunto de solución de:

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{1}{9x^2 + 12x + 4} + \frac{1}{6x^2 + x - 2} &\geq \frac{4(x + 1)}{18x^3 + 15x^2 - 4x - 4} \implies \\ \frac{1}{(3x + 2)^2} + \frac{1}{(2x - 1)(3x + 2)} &\geq \frac{4(x + 1)}{(2x - 1)(3x + 2)^2} \implies \\ \frac{1}{(3x + 2)^2} + \frac{1}{(2x - 1)(3x + 2)} - \frac{4(x + 1)}{(2x - 1)(3x + 2)^2} &\geq 0 \implies \\ \frac{(2x - 1) + (3x + 2) - 4(x + 1)}{(3x + 2)^2(2x - 1)} &\geq 0 \implies \frac{x - 3}{(3x + 2)^2(2x - 1)} \geq 0, \text{ con } x \neq -\frac{2}{3}, x \neq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Conjunto solución S: }]-\infty, \frac{1}{2}[\cup [3, \infty[- \{-\frac{2}{3}\} =]-\infty, -\frac{2}{3}[\cup]-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}[\cup [3, \infty[.$$

	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	3	$+\infty$
$x-3$	-	-	-	0	+
$(3x+2)^2$	+	+	+	+	+
$2x-1$	-	-	+	+	+
$\frac{x-3}{(3x+2)^2(2x-1)}$	+	+	-	+	+

b) $2x(x-3)^8 - (x-3)^7(x+3) = (x-3)^7 [2x(x-3) - (x+3)] \geq 0 \implies (x-3)^7(2x^2 - 7x - 3) \geq 0$.

Los ceros de $2x^2 - 7x - 3$ son: $\frac{7-\sqrt{73}}{4} = -0,386\dots$, $\frac{7+\sqrt{73}}{4} = 3,886\dots$

La tabla de signos es:

	$-\infty$	$\frac{7-\sqrt{73}}{4}$	3	$\frac{7+\sqrt{73}}{4}$	$+\infty$
$(x-3)^7$	-	-	0	+	+
$(x - \frac{7-\sqrt{73}}{4})$	-	0	+	+	+
$x - \frac{7+\sqrt{73}}{4}$	-	-	-	0	+
$(x-3)^7(2x^2-7x-3)$	-	+	-	+	+

$S: [\frac{7-\sqrt{73}}{4}, 3] \cup [\frac{7+\sqrt{73}}{4}, \infty[.$

c) $27x^3 + 36x^2 - 75x - 100 = 27(x + \frac{5}{3})(x + \frac{4}{3})(x - \frac{5}{3}) < 0$.

	$-\infty$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$+\infty$
$27x^3 + 36x^2 - 75x - 100$	-	+	-	+	+

$S:]-\infty, -\frac{5}{3}[\cup]-\frac{4}{3}, \frac{5}{3}[.$

d) $\frac{-8x^3 + 27}{-9x^2 + 6x - 10} > 0$.

$\frac{-(8x^3 - 27)}{-(9x^2 - 6x + 10)} > 0 \implies \frac{(2x-3)(4x^2+6x+9)}{9x^2-6x+10} > 0$.

Se cumple que $4x^2 + 6x + 9 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ y también

$9x^2 - 6x + 10 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$, entonces $2x - 3 > 0 \implies x > \frac{3}{2}$.

$S:]\frac{3}{2}, \infty[.$

e) $(x+2)^6 - 9(x+2)^3 \geq -8 \implies (x+2)^6 - 9(x+2)^3 + 8 \geq 0$.

Sea $u = (x+2)^3$, $u^2 = (x+2)^6$, entonces $u^2 - 9u + 8 \geq 0 \implies (u-1)(u-8) \geq 0 \implies$

$((x+2)^3 - 1)((x+2)^3 - 8) \geq 0 \implies$

$(x+2-1)((x+2)^2 + (x+2)1 + 1^2)((x+2)-2)((x+2)^2 + (x+2)2 + 2^2) \geq 0 \implies$

$(x+1)(x^2+5x+7)x(x^2+6x+12) \geq 0$.

Se cumple que $x^2 + 5x + 7 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ y también $x^2 + 6x + 12 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Luego $(x+1)x \geq 0$.

$$S:] -\infty, -1] \cup [0, \infty[.$$

	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$
x	$-$	$-$	0	$+$
$x(x+1)$	$+$	$-$	$+$	$+$

$$f) \left| \frac{16}{x^2 + 4x - 16} \right| \geq 1 \implies \frac{16}{|x^2 + 4x - 16|} \geq 1.$$

Para que la expresión de la izquierda esté bien definida se tiene que cumplir $x^2 + 4x - 16 \neq 0$, esto es: $x \neq -2 - 2\sqrt{5} = -6,47214\dots$, $x \neq -2 + 2\sqrt{5} = 2,47214\dots$, entonces:

$$16 \geq |x^2 + 4x - 16| \implies |x^2 + 4x - 16| \leq 16 \text{ y según las propiedades: } -16 \leq x^2 + 4x - 16 \leq 16.$$

$$\text{I Caso: } x^2 + 4x - 16 \geq -16 \implies x^2 + 4x \geq 0 \implies x(x+4) \geq 0.$$

$$S_I =]-\infty, -4] \cup [0, \infty[.$$

$$\text{II Caso: } x^2 + 4x - 16 \leq 16 \implies x^2 + 4x - 32 \leq 0 \implies (x-4)(x+8) \leq 0.$$

$$S_{II} = [-8, 4]$$

$S = S_I \cap S_{II} = \{-2 - 2\sqrt{5}, -2 + 2\sqrt{5}\}$, se tiene que: $-8 < -2 - 2\sqrt{5} < -4 < 0 < -2 + 2\sqrt{5} < 4$ y entonces el conjunto de solución es:

$$S: [-8, -2 - 2\sqrt{5}[\cup] -2 - 2\sqrt{5}, -4] \cup [0, -2 + 2\sqrt{5}[\cup] -2 + 2\sqrt{5}, 4].$$

4. Encuentre los valores de k para que la ecuación: $k(\frac{-x^2}{2} + x + 1) + (x^2 - 2x - 1) = 0$ tenga dos soluciones reales distintas.

Solución Para que tenga dos soluciones reales la ecuación debe ser cuadrática con discriminante positivo. La ecuación se escribe en forma cuadrática $(-\frac{k}{2} + 1)x^2 + (k-2)x + (k-1) = 0$.

Para que sea cuadrática, el coeficiente de x^2 debe ser diferente de 0: $-\frac{k}{2} + 1 \neq 0 \implies k \neq 2$.

$$\text{El discriminante es } \Delta = b^2 - 4ac = (k-2)^2 - 4(-\frac{k}{2} + 1)(k-1) = k^2 - 4k + 4 + 2k^2 - 4k - 2k + 4 = 3k^2 - 10k + 8 = (3k-4)(k-2).$$

$$\text{Se debe resolver } (3k-4)(k-2) \geq 0.$$

La ecuación tiene dos soluciones reales si k pertenece al conjunto $] -\infty, \frac{4}{3}] \cup [2, \infty[.$

5. Encuentre los valores de k para que la ecuación: $kx + (4x^2 + x + 1) = 0$ no tenga soluciones reales.

Solución La ecuación es cuadrática. Se escribe $4x^2 + (k+1)x + 1 = 0$.

Para que no tenga soluciones reales el discriminante debe ser negativo.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (k + 1)^2 - 4(4)(1) \implies k^2 + 2k - 15.$$

Hay que resolver $k^2 + 2k - 15 < 0 \implies (k - 3)(k + 5) < 0$.

Para que la ecuación no tenga soluciones en $\mathbb{R}$, k debe ser un número del conjunto $] -5, 3 [$.

Capítulo 5

Ejercicios de funciones

1. Considere las siguientes relaciones de conjuntos y determine cuáles son funciones:

a) $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, g(x) = x^3$.

b) $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, g(x) = \sqrt{x}$.

c) $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}, g(x) = \sqrt{x}$.

d) $g : A \longrightarrow \mathbb{R}, g(x) = \sqrt{1-x^2}, A = [-1, 1]$.

e) $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{x-2}$.

f) $g : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Z}, g(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

2. Calcule en cada caso: $f(5), f(-2), f(a), f(a+h), \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

a) $f(x) = -3 + 2x$.

b) $f(x) = -2x^2 + 1$.

c) $f(x) = \frac{x-1}{x}$.

d) $f(x) = \sqrt{x-1}$.

e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

f) $f(x) = \frac{1}{4-3x}$.

3. En los siguientes ejercicios se tiene la función real $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Determine en cada caso el dominio máximo:

a) $f(x) = x^2$.

b) $f(x) = x^2 - 4$.

c) $f(x) = 3x - 1$.

d) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 8}$.

e) $f(x) = \sqrt{4 - |x^2 - 5|}$.

f) $f(x) = \sqrt[6]{\frac{x+1}{3x-2}} - 1$.

g) $f(x) = |x - 2|$.

h) $f(x) = |x - 2| + 4$.

i) $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

j) $f(x) = \sqrt{\frac{1-2x}{x+1}}$.

k) $f(x) = \frac{\sqrt[4]{x-2}}{x^2 - 8x + 15}$.

l) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 8}}{x^2 - 6x}$.

m) $f(x) = \frac{5-x}{x+2}$.

n) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 13}$.

4. Sea la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Determine en cada caso el ámbito de f :

a) $f(x) = |x| + 2$.

b) $f(x) = x^2 + 4x - 12$.

c) $f(x) = -x^2 + 8x + 1$.

d) $f(x) = 2x^2 - 9x + 4$.

e) $f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{si } x \leq 3 \\ -x+2 & \text{si } x > 3. \end{cases}$

5. Determine $(f \circ g)(x)$ si:

- a) $f(x) = x + 3$, $g(x) = 2x^2 - 1$. b) $f(x) = -x^2 + 3x + 4$, $g(x) = 3 - 2x$.
- c) $f(x) = 3x + 5$, $g(x) = f(x)$. d) $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$, $g(x) = \frac{x}{x+1}$.
- e) $f(x) = \sqrt{x-1}$, $g(x) = x^2 + 1$.
6. Considere la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x \geq 0 \\ 3x + 2 & \text{si } x < 0. \end{cases}$
- a) Grafique la función dada por $y = f(x)$.
- b) Encuentre la función $y = f^{-1}(x)$. Indique el dominio y el ámbito.
- c) Grafique la función dada por $y = f^{-1}(x)$.
7. Considere la función dada por $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x < 0 \\ -x^2 + 2x & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$
- a) Grafique $y = f(x)$.
- b) Encuentre el dominio y el ámbito de $f(x)$.
- c) Defina la función $g^{-1}(x)$ si el dominio de $g(x)$ es $]-\infty, 1]$ y $g(x) = f(x)$.
8. Determine en cada caso $f^{-1}(x)$.
- a) $f : [3, \infty[\longrightarrow [-1, \infty[$, $f(x) = x^2 - 6x + 8$.
- b) $f :]-\infty, 3] \longrightarrow [-1, \infty[$, $f(x) = x^2 - 6x + 8$.
- c) $f :]-\infty, 4] \longrightarrow]-\infty, 1]$, $f(x) = -x^2 + 8x - 15$.
9. Calcule en cada caso $h^{-1}(x)$. Haga las restricciones correspondientes.
- a) $h : [1, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x^2 - 2x - 8$.
- b) $h :]-\infty, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x^2 - 2x - 8$.
- c) $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \begin{cases} x^2 - 4x - 5 & \text{si } x \leq 2 \\ -3x - 3 & \text{si } x > 2. \end{cases}$
- d) Trace las gráficas de h y h^{-1} en un mismo sistema de coordenadas para cada uno de los ejercicios a), b), c).
10. Para cada una de las funciones indique el ámbito, el conjunto donde es creciente y el conjunto donde es decreciente.
- a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -2x^2 + 5x + 3$.
- b) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 16$.
- c) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4(x-2)(x+1)$.
11. Determine la ecuación de la recta que pasa por A y B si:
- a) $A(1, 3)$, $B(\frac{1}{2}, 5)$. b) $A(-2, \sqrt{2})$, $B(-3, 0)$.
- c) $A(10, 1)$, $B(-5, -2)$. d) $A(10, 3, 8)$, $B(-6, 4, 8)$.

12. Encuentre la ecuación de la recta ℓ_2 que pasa por A y es paralela a ℓ_1 si
- a) $\ell_1 : y = 5x - 4, A(0, 7)$. b) $\ell_1 : y = \frac{1}{3}x - 2, A(6, 4)$.
c) $\ell_1 : y = \sqrt{2}x - 5, A(\sqrt{8}, 1)$. d) $\ell_1 : y = -\sqrt{3}x + \sqrt{7}, A(\sqrt{2}, 0)$.
e) $\ell_1 : y = -3x + 7, A(1 - 2a, 6a - 4)$. f) $\ell_1 : y = (\sqrt{3} - 2)x + 4, A(\sqrt{3} + 2, 2)$.
13. Encuentre la ecuación de la recta ℓ_2 que pasa por A y es perpendicular a ℓ_1 si :
- a) $\ell_1 : y = -3x + 2, A(6, -3)$. b) $\ell_1 : y = \frac{2}{9}x - \frac{1}{2}, A(1, \frac{1}{2})$.
c) $\ell_1 : y = -\frac{7}{5}x, A(3, 1)$. d) $\ell_1 : y = \sqrt{2}x - 6, A(4, \sqrt{2})$.
e) $\ell_1 : y = -\pi^2x - 3, A(-\pi, \frac{\pi^2+1}{\pi})$. f) $\ell_1 : y = \frac{e}{2}x + 1, A(e, 1)$.
14. Cuál es el punto de intersección de las rectas de ecuación $y = -\frac{4}{3}x - 1$ y $y = -\frac{7}{6}x - \frac{3}{2}$.
15. Pruebe que el triángulo ABC cuyos vértices son $A(-1, 6), B(-16, -9)$ y $C(2, 0)$ es rectángulo.
16. Determine la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(a - 2, 13 - 3a)$ y $B(1 - 2b, 6b + 4)$ con a y b números reales.
17. Determine el valor de k para que ℓ_1 y ℓ_2 sean paralelas:
- a) $\ell_1 : y = 3kx - 2, \ell_2 : y = 12x - k$.
b) $\ell_1 : y = 3k^2x - 4kx - 1, \ell_2 : y = kx + 2x - 3k$.
c) $\ell_1 : y = (3k - 2)x - 1, \ell_2 : y = \frac{x}{k} + 6$.
d) $\ell_1 : y = 5k^2x - 8, \ell_2 : y = (-4k - 1)x + 3k$.
18. Determine el valor de k para que ℓ_1 y ℓ_2 sean perpendiculares:
- a) $\ell_1 : y = (k + 2)x - \frac{1}{5}, \ell_2 : y = \frac{1 - k}{4}x + \frac{2}{7}$.
b) $\ell_1 : y = \frac{x}{k - 4} + \sqrt{2}, \ell_2 : y = (k + 2)x - 1$.
c) $\ell_1 : y = x - 5, \ell_2 : y = 3kx - 5x + \sqrt{2}$.
d) $\ell_1 : y = k^2x - 3, \ell_2 : y = x - k$.
19. Grafique la función indicando el valor máximo o mínimo de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:
- a) $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$. b) $f(x) = -3x^2 + 5x - 2$.
c) $f(x) = -2x^2 - 1$. d) $f(x) = 1 - 8x + 16x^2$.
e) $f(x) = (x + 1)^2 + (3x - 1)(x + 1) - 3$.
20. Determine las intersecciones de $f(x) = \frac{1}{3}x - 11$ y $g(x) = x^2 + 2x - 15$. Represente las gráficas en un mismo sistema de ejes.

21. Encuentre la ecuación de la recta que es perpendicular a $y = -\frac{1}{2}x + 3$ y pasa por el punto máximo de $f(x) = 21 + 4x - x^2$.
22. Cuál es el rectángulo de mayor área que se puede construir con un perímetro de 50cm?
23. Un prisma rectangular de 5cm de altura tiene un volumen de 240cm^3 . Cuáles son la dimensiones de la base si se sabe que el largo excede en 2cm al ancho?
24. Compruebe que $f^{-1}(x) = f(x)$ para la función $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$, con $f(x) = \frac{x}{x-1}$.
25. Encuentre la ecuación de la recta ℓ_1 que pasa por el punto máximo de la curva $y = 24 - 2x - x^2$ y es paralela a la recta $\ell_2 : y = -x + 12$.
26. Encuentre la ecuación de la recta ℓ_1 que pasa por el punto mínimo de $y = x^2 - 4x + 1$ y es perpendicular a la recta $\ell_2 : y = 2x + 3$.
27. Encuentre la ecuación de las rectas perpendiculares ℓ_1 y ℓ_2 si ℓ_1 pasa por $A(2, 3)$ y tienen su intersección en el punto $P(1, 2)$.
28. Compruebe que el triángulo con vértices $A(-1, 2)$, $B(4, 7)$, $C(13, -2)$ es un triángulo rectángulo.
29. Sea $g : [1, 4] \longrightarrow \mathbb{R}$ con $g(x) = 4x^2 - 16x + 7$.
 - a) Encuentre la ecuación de la recta ℓ_1 que pasa por $A(1, g(1))$ y $B(4, g(4))$.
 - b) Encuentre la ecuación de la recta ℓ_2 que pasa por $C(2, 1)$ y es paralela a ℓ_1 .
30. Considere la función $f : [2, 7] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -\frac{3}{5}x^2 + 6x - \frac{43}{5}$.
 - a) Encuentre la ecuación de la recta ℓ_1 que pasa por $(2, f(2))$ y $(7, f(7))$.
 - b) Encuentre la ecuación de la recta ℓ_2 paralela a ℓ_1 que pasa por $(\frac{9}{2}, f(\frac{9}{2}))$.
 - c) Determine todos los puntos de intersección de la recta ℓ_2 y la curva $y = f(x)$.
 - d) Represente en una gráfica la curva $y = f(x)$ y las rectas ℓ_1 y ℓ_2 .
31. Encuentre los valores de a y k si se sabe que las funciones $f(x) = (1 - k)x^2 + 3x + 1$ y $g(x) = kx + 3$ tienen intersección en el punto $(a, 7)$.
32. Considere la función $f : [1, 4] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -x^2 + 4x$.
 - a) Encuentre la ecuación de la recta L_1 que pasa por los puntos $(1, f(1))$ y $(4, f(4))$.
 - b) Encuentre la ecuación de la recta L_2 que pasa por $(\frac{5}{2}, f(\frac{5}{2}))$ y es paralela a la recta L_1 .
 - c) Represente en un mismo eje de coordenadas la curva $y = f(x)$ y las rectas L_1 y L_2 .
33. Considere las siguientes funciones de dominio $\mathbb{R}$ definidas por:

$$f(x) = -x^2 + 2x + 8, \quad g(x) = x + 6, \quad h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \notin [-1, 2] \\ g(x) & \text{si } x \in [-1, 2] \end{cases}.$$

a) Encuentre los puntos de intersección de $y = f(x)$ con $y = g(x)$.

b) Represente gráficamente la función $h(x)$.

c) Indique el ámbito de las funciones $f(x)$ y $h(x)$.

34. Determine el dominio máximo de la función definida por:

a) $f(x) = \frac{\sqrt{x+4} + \sqrt{2-x}}{x^2 + 4x - 5}.$

b) $f(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{\sqrt{x-7} - 3}.$

35. Considere las funciones de dominio $\mathbb{R}$ definidas por:

$$h(x) = -x + 1, \quad f(x) = 3k^2x - 10kx + x + 1, \quad g(x) = k^2x - 6kx + x - 6.$$

a) Encuentre la función $(f \circ h)(x)$.

b) Calcule $f(-k + 1)$.

c) Encuentre el valor de k para que las ecuaciones de las rectas $y = f(x)$, $y = g(x)$ sean paralelas.

d) Encuentre el valor de k para que las ecuaciones de las rectas $y = h(x)$, $y = f(x)$ sean perpendiculares.

36. Dada la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x + 5 & \text{si } x < 2 \\ 2x^2 - 8x + 17 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$

a) Calcule $f(3) + f(1)$.

b) Represente gráficamente $y = f(x)$.

c) Encuentre la función $f^{-1}(x)$.

37. Sea la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

Si x_1, x_2 son números reales que cumplen $x_1 \neq x_2$ y $\left|x_1 + \frac{b}{2a}\right| = \left|x_2 + \frac{b}{2a}\right|$.

Pruebe que $f(x_1) = f(x_2)$.

38. Encuentre el máximo dominio real de las funciones:

a) $f(x) = \frac{3}{2\sqrt{x-1}}.$ b) $f(x) = \frac{2\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[6]{4-|x^2-5|}}.$

39. Sean f y g funciones de dominio $\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = 3x - 1, \quad g(x) = -2x + 3.$$

a) Calcule $f^{-1}(x)$ y $g^{-1}(x)$.

b) Encuentre las funciones $(f \circ g)(x)$ y $(f \circ g)^{-1}(x)$.

c) Encuentre $(f^{-1} \circ g^{-1})(x)$ y $(g^{-1} \circ f^{-1})(x)$.

- d) Cuál de las funciones $(f^{-1} \circ g^{-1})(x)$ y $(g^{-1} \circ f^{-1})(x)$ es la inversa de $(f \circ g)(x)$?
40. Indique el máximo dominio de $f(x)$ y represente gráficamente la curva $y = f(x)$ en cada caso. a) $f(x) = |-2x + 4|$.
b) $f(x) = |x^2 + 3x - 10|$.
41. Represente gráficamente la función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si:
- $$g(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x \in]-\infty, -2] \cup [3, +\infty[\\ -x^2 + 2x + 3 & \text{si } x \in]-2, 3[. \end{cases}$$
42. Para las siguientes funciones de dominio $\mathbb{R}$ indique el ámbito, el conjunto donde es decreciente y el conjunto donde es creciente.
- a) $g(x) = -2x^2 + x + 28$.
b) $g(x) = (x + 3)(2 - 5x)$.
c) $g(x) = \begin{cases} -2x + 1 & \text{si } x \leq 3 \\ x - 8 & \text{si } x > 3. \end{cases}$
43. Encuentre la intersección de $y = f(x)$ con $y = g(x)$.
- a) $f(x) = x^2 - x + 3$, $g(x) = -3x - 5$.
b) $f(x) = 9x - 11$, $g(x) = 2x^2 + x - 3$.
c) $f(x) = (3x - 1)(x - 4)$, $g(x) = 11x - 41$.
44. Considere las rectas $l_1 : y = \frac{2}{3}x - 1$, $l_2 : y = -\frac{1}{5}x + \frac{21}{5}$, $l_3 : y = -\frac{3}{2}x + \frac{11}{2}$, calcule el área del triángulo que determinan los tres puntos de intersección de esas rectas.
45. Sea $f(x) = 5 + 4x - x^2$ y sea l_1 la recta que pasa por $(0, f(0))$ y $(6, f(6))$.
- a) Encuentre la ecuación de la recta l_1 .
b) Encuentre la ecuación de la recta l_2 que pasa por $(3, f(3))$ y es paralela a l_1 .
46. Considere la recta l_1 paralela a $l : y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ y que pasa por el punto mínimo de $y = x^2 + 2x - 3$.
- a) Encuentre la ecuación de la recta l_1 .
b) Encuentre la ecuación de la recta l_2 perpendicular a l y que pasa por el punto mínimo de $y = x^2 + 2x - 3$.

Soluciones del Tema No.5: Funciones

1. Considere las siguientes relaciones de conjuntos y determine cuáles son funciones:

a) $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, g(x) = x^3$.

Si es función, puesto que, dado cualquier número natural su cubo es un único número natural.

b) $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, g(x) = \sqrt{x}$.

Como $\sqrt{x}$ no está definida si $x \in \mathbb{Z}^-$, no es función.

c) $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}, g(x) = \sqrt{x}$.

Como $\sqrt{x}$ no es entero para todo número natural, no es función.

d) $g : A \longrightarrow \mathbb{R}, g(x) = \sqrt{1-x^2}, A = [-1, 1]$.

Si es función, dado que si $x \in [-1, 1] \implies x^2 \in [0, 1] \implies 1-x^2 \in [0, 1]$, donde la raíz está definida y tiene como resultado un número real.

e) $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{1}{x-2}$.

Como $g(2)$ no está definida, no es función.

f) $g : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Z}, g(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

Como $\frac{1}{x^2+1}$ no es entero siempre, no es función.

2. Calcule en cada caso: $f(5), f(-2), f(a), f(a+h), \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

a) $f(x) = -3 + 2x$.

$$f(5) = -3 + 2 \cdot 5 = -3 + 10 = 7, f(-2) = -3 + 2 \cdot (-2) = -3 + -4 = -7.$$

$$f(a) = -3 + 2 \cdot a, f(a+h) = -3 + 2(a+h) = -3 + 2a + 2h,$$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{-3+2a+2h+3-2a}{h} = \frac{2h}{h} = 2.$$

b) $f(x) = -2x^2 + 1$.

$$f(5) = -2 \cdot (5)^2 + 1 = -2 \cdot 25 + 1 = -49, f(-2) = -2 \cdot (-2)^2 + 1 = -2 \cdot 4 + 1 = -7. f(a) = -2a^2 + 1,$$

$$f(a+h) = -2(a+h)^2 + 1 = -2(a^2 + 2ah + h^2) + 1 = -2a^2 - 4ah - 2h^2 + 1,$$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{-2a^2 - 4ah - 2h^2 + 1 + 2a^2 - 1}{h} = \frac{-4ah - 2h^2}{h} = -4a - 2h = -2(2a + h).$$

c) $f(x) = \frac{x-1}{x}$.

$$f(5) = \frac{5-1}{5} = \frac{4}{5}, f(-2) = \frac{-2-1}{-2} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}.$$

$$f(a) = \frac{a-1}{a}, f(a+h) = \frac{a+h-1}{a+h},$$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\frac{a+h-1}{a+h} - \frac{a-1}{a}}{h} = \frac{\frac{a(a+h-1) - (a+h)(a-1)}{a(a+h)}}{h} =$$

$$\frac{a^2 + ah - a - a^2 + a - ah + h}{ha(a+h)} = \frac{h}{ha(a+h)} = \frac{1}{a(a+h)}.$$

d) $f(x) = \sqrt{x-1}$.

$$f(5) = \sqrt{5-1} = \sqrt{4} = 2, f(-2) = \sqrt{-2-1} = \sqrt{-3}, \text{ no está definida.}$$

$$f(a) = \sqrt{a-1}, f(a+h) = \sqrt{a+h-1},$$

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{\sqrt{a+h-1} - \sqrt{a-1}}{h} \cdot \frac{\sqrt{a+h-1} + \sqrt{a-1}}{\sqrt{a+h-1} + \sqrt{a-1}} = \\ &= \frac{a+h-1 - a+1}{h(\sqrt{a+h-1} + \sqrt{a-1})} = \frac{h}{h(\sqrt{a+h-1} + \sqrt{a-1})} = \frac{1}{\sqrt{a+h-1} + \sqrt{a-1}}. \end{aligned}$$

e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

$$f(5) = \frac{1}{\sqrt{5}}, f(-2) = \frac{1}{\sqrt{-2}}, \text{ no está definida, } f(a) = \frac{1}{\sqrt{a}}, f(a+h) = \frac{1}{\sqrt{a+h}}.$$

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{\frac{1}{\sqrt{a+h}} - \frac{1}{\sqrt{a}}}{h} = \frac{\frac{\sqrt{a} - \sqrt{a+h}}{\sqrt{a(a+h)}}}{h} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{a+h}}{h\sqrt{a(a+h)}} \cdot \frac{\sqrt{a} + \sqrt{a+h}}{\sqrt{a} + \sqrt{a+h}} = \\ &= \frac{a - a - h}{h\sqrt{a(a+h)}(\sqrt{a} + \sqrt{a+h})} = \frac{-h}{h\sqrt{a(a+h)}(\sqrt{a} + \sqrt{a+h})} = \\ &= \frac{-1}{\sqrt{a(a+h)}(\sqrt{a} + \sqrt{a+h})}. \end{aligned}$$

f) $f(x) = \frac{1}{4-3x}$.

$$f(5) = \frac{1}{4-3(5)} = \frac{1}{4-15} = \frac{1}{-11} = -\frac{1}{11}, f(-2) = \frac{1}{4-3(-2)} = \frac{1}{4+6} = \frac{1}{10}.$$

$$f(a) = \frac{1}{4-3a}, f(a+h) = \frac{1}{4-3(a+h)} = \frac{1}{4-3a-3h}.$$

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{\frac{1}{4-3a-3h} - \frac{1}{4-3a}}{h} = \frac{\frac{4-3a-4+3a+3h}{(4-3a-3h)(4-3a)}}{h} = \\ &= \frac{3h}{h(4-3a-3h)(4-3a)} = \frac{3}{(4-3a-3h)(4-3a)}. \end{aligned}$$

3. En los siguientes ejercicios se tiene la función real $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

Determine en cada caso el dominio máximo:

a) $\mathbb{R}$.

b) $\mathbb{R}$.

c) $\mathbb{R}$.

d) $x^2 + 2x - 8 \geq 0 \implies (x-2)(x+4) \geq 0 \implies \text{Dominio: }]-\infty, -4] \cup [2, \infty[.$

e) $4 - |x^2 - 5| \geq 0 \implies |x^2 - 5| \leq 4 \implies -4 \leq x^2 - 5 \leq 4 \implies 1 \leq x^2 \leq 9 \implies 1 \leq |x| \leq 3.$

$$|x| \geq 1 \implies x \leq -1 \text{ o } x \geq 1.$$

$$|x| \leq 3 \implies -3 \leq x \leq 3.$$

Dominio: $[-3, -1] \cup [1, 3].$



$$f) \frac{x+1}{3x-2} - 1 \geq 0 \implies \frac{x+1-(3x-2)}{3x-2} \geq 0 \implies \frac{-2x+3}{3x-2} \geq 0 \implies \text{Dominio: } \left] \frac{2}{3}, \frac{3}{2} \right[.$$

g) $\mathbb{R}$.h) $\mathbb{R}$.i) $\mathbb{R}$.

$$j) \frac{1-2x}{x+1} \geq 0 \text{ con } x+1 \neq 0 \implies \text{Dominio: }]-1, \frac{1}{2}].$$

k) Se deben cumplir dos condiciones :

$$i) x-2 \geq 0.$$

$$ii) x^2 - 8x + 15 \neq 0.$$

$$\text{Como } x \geq 2 \text{ y } x \neq 5, x \neq 3 \implies \text{Dominio: } [2, \infty[\setminus \{3, 5\} = [2, 3[\cup]3, 5[\cup]5, \infty[.$$

l) Se debe cumplir dos condiciones:

$$i) x^2 - 6x + 8 \geq 0 \implies x \in]-\infty, 2] \cup [4, \infty[.$$

$$ii) x^2 - 6x \neq 0 \implies x \neq 6, x \neq 0.$$

$$\text{Dominio: }]-\infty, 0[\cup]0, 2] \cup [4, 6[\cup]6, \infty[.$$

$$m) D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}.$$

$$n) x^2 + 4x + 13 > 0. D = \mathbb{R}.$$

4. Sea la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Determine en cada caso el ámbito de f :

$$a) |x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \implies |x| + 2 \geq 2, \forall x \in \mathbb{R} \implies f(x) \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Ámbito} = [2, \infty[.$$

$$b) \text{ El vértice es } V = (-2, -16) \text{ y es cóncava hacia arriba. Ámbito} = [-16, \infty[.$$

$$c) \text{ El vértice es } V = (4, 17) \text{ y es cóncava hacia abajo. Ámbito} =]-\infty, 17].$$

$$d) \text{ El vértice es } V = \left(\frac{9}{4}, -\frac{49}{8}\right) \text{ y es cóncava hacia arriba. Ámbito} =]-\frac{49}{8}, \infty[.$$

$$e) x \leq 3 \implies x-2 \leq 1 \text{ y } x > 3 \implies -x < -3 \implies -x+2 < -1. \text{ Ámbito} =]-\infty, 1].$$

5. Determine $(f \circ g)(x)$ si:

$$a) f(x) = x+3, g(x) = 2x^2-1 \implies (f \circ g)x = f(g(x)) = f(2x^2-1) = 2x^2-1+3 = 2x^2+2.$$

$$b) f(x) = -x^2+3x+4, g(x) = 3-2x \implies (f \circ g)x = f(g(x)) = f(3-2x) =$$

$$-(3-2x)^2+3(3-2x)+4 = -9+12x-4x^2+9-6x+4 = -4x^2+6x+4.$$

$$c) f(x) = 3x+5, g(x) = f(x) \implies (f \circ g)x = f(g(x)) = f(f(x)) = f(3x+5) = 3(3x+5)+5 = 9x+15+5 = 9x+20.$$

$$d) f(x) = \frac{x-1}{x+2}, g(x) = \frac{x}{x+1} \implies (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x}{x+1}\right) =$$

$$\frac{\frac{x}{x+1}-1}{\frac{x}{x+1}+2} = \frac{\frac{-1}{x+1}}{\frac{3x+2}{x+1}} = \frac{-1}{3x+2}.$$

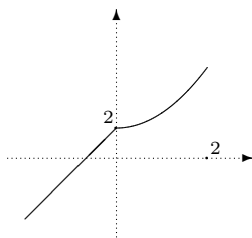
$$e) f(x) = \sqrt{x-1}, g(x) = x^2+1 \implies (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2+1) = \sqrt{x^2+1-1} = \sqrt{x^2} = |x|.$$

6. Considere la función $f(x) = \begin{cases} x^2+2 & \text{si } x \geq 0 \\ 3x+2 & \text{si } x < 0. \end{cases}$

- a) Grafique la función dada por $y = f(x)$.
- b) Encuentre la función $y = f^{-1}(x)$. Indique el dominio y el ámbito.
- c) Grafique la función dada por $y = f^{-1}(x)$.

Solución

a)

b) Sea $y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y)$.

$$\text{Luego si } x \geq 0, x^2 + 2 = y \Rightarrow x^2 = y - 2 \Rightarrow |x| = \sqrt{y - 2} \Rightarrow x = \sqrt{y - 2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x - 2}.$$

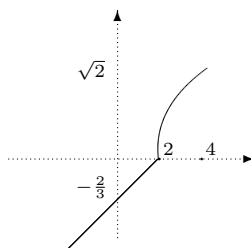
$$\text{Ahora, si } x < 0, 3x + 2 = y \Rightarrow 3x = y - 2 \Rightarrow x = \frac{y - 2}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x - 2}{3}.$$

Dominio Observe que como $y = \sqrt{x - 2}$,

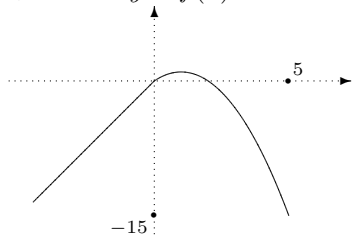
$$x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2.$$

$$\text{Así } f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x - 2} & \text{si } x \geq 2 \\ \frac{1}{3}(x - 2) & \text{si } x < 2. \end{cases}$$

c)



7. Considere la función dada por $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x < 0 \\ -x^2 + 2x & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

a) Gráfico $y = f(x)$.b) Dominio: $\mathbb{R}$. Ámbito: $]-\infty, 1]$.c) El dominio de $g(x)$ es $]-\infty, 1]$ y $g(x) = f(x)$,

$$\text{entonces: } g(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x < 0 \\ -x^2 + 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

La inversa de $y = 3x$ es $y = \frac{1}{3}x$.La inversa de $y = -x^2 + 2x$, se debe resolver $x^2 - 2x + y = 0$.

$$\Delta = 4 - 4(1)(y) \Rightarrow \Delta = 4 - 4y \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{1 - y} \Rightarrow x = \frac{2 \pm 2\sqrt{1 - y}}{2} \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{1 - y}.$$

Dado que $0 \leq x \leq 1$, entonces $x = 1 - \sqrt{1 - y}$.

$$g^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x & \text{si } x < 0 \\ 1 - \sqrt{1 - x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

8. Determine en cada caso $f^{-1}(x)$.

a) $f : [3, \infty[\rightarrow [-1, \infty[, f(x) = x^2 - 6x + 8.$

b) $f :]-\infty, 3] \rightarrow [-1, \infty[, f(x) = x^2 - 6x + 8.$

c) $f :]-\infty, 4] \longrightarrow]-\infty, 1], f(x) = -x^2 + 8x - 15.$

Solución

a) Despejar x en la ecuación $y = x^2 - 6x + 8 \implies x^2 - 6x + 8 - y = 0, a = 1, b = -6, c = 8 - y,$

$$\Delta = 36 - 4(1)(8 - y) \implies \Delta = 4 + 4y \implies \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{1 + y},$$

$$x = \frac{6 \pm 2\sqrt{1 + y}}{2} = 3 \pm \sqrt{1 + y}.$$

Como $\sqrt{1 + y} \geq 0$ y $x \geq 3$, entonces $x = 3 + \sqrt{1 + y}.$

$$f^{-1} : [-1, \infty[\longrightarrow [3, \infty[\implies f^{-1}(x) = 3 + \sqrt{1 + x}.$$

b) Despejar x en la ecuación $y = x^2 - 6x + 8 \implies x = 3 \pm \sqrt{1 + y}.$

Dado que $\sqrt{1 + y} \geq 0$ y $x \leq 3$, entonces $x = 3 - \sqrt{1 + y}.$

$$f^{-1} : [-1, \infty[\longrightarrow]-\infty, 3] \implies f^{-1}(x) = 3 - \sqrt{1 + x}.$$

c) Dada $y = -x^2 + 8x - 15$. Despejar x en $x^2 - 8x + 15 + y = 0, a = 1, b = -8, c = 15 + y.$

$$\Delta = (-8)^2 - 4(1)(15 + y) \implies \Delta = 4 - 4y \implies \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{1 - y}.$$

$$x = \frac{8 \pm 2\sqrt{1 - y}}{2} = 4 \pm \sqrt{1 - y}.$$

Dado que $\sqrt{1 - y} \geq 0$ y $x \leq 4$, entonces $x = 4 - \sqrt{1 - y}.$

Así, $f^{-1} :]-\infty, 1] \longrightarrow]-\infty, 4] \implies f^{-1}(x) = 4 - \sqrt{1 - x}.$

9. Calcule en cada caso $h^{-1}(x)$. Haga las restricciones correspondientes.

a) $h : [1, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}, h(x) = x^2 - 2x - 8.$

b) $h :]-\infty, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, h(x) = x^2 - 2x - 8.$

c) $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, h(x) = \begin{cases} x^2 - 4x - 5 & \text{si } x \leq 2 \\ -3x - 3 & \text{si } x > 2. \end{cases}$

d) Trace las gráficas de h y h^{-1} en un mismo sistema de coordenadas para cada uno de los ejercicios a), b), c).

Solución

a) Despejar x de la ecuación $x^2 - 2x - 8 = y \implies x^2 - 2x - 8 - y = 0 \implies a = 1, b = -2, c = -8 - y.$

$$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(-8 - y) = 36 + 4y \implies \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{9 + y}, x = \frac{2 \pm 2\sqrt{9 + y}}{2} = 1 \pm \sqrt{9 + y}.$$

Dado que $\sqrt{9 + y} \geq 0$ y $x \geq 1 \implies x = 1 + \sqrt{9 + y} \implies h^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x + 9}.$

Pero $x + 9 \geq 0 \implies x \geq -9$, entonces $h^{-1} : [-9, \infty[\rightarrow [1, \infty[, h^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x + 9}.$

b) Despejar x en la ecuación $y = x^2 - 2x - 8 \implies x = 1 \pm \sqrt{9 + y}.$

Dado que $\sqrt{9 + y} \geq 0$ y $x \leq 1 \implies x = 1 - \sqrt{9 + y} \implies h^{-1} = 1 - \sqrt{x + 9}.$

Luego $h^{-1} : [-9, \infty[\rightarrow]-\infty, 1], h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x + 9}.$

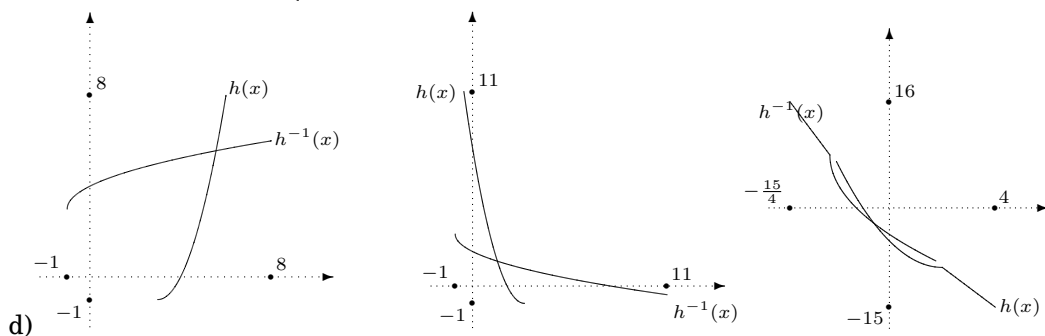
c) Despejar x en $x^2 - 4x - 5 = y \Rightarrow x^2 - 4x - 5 - y = 0$, $a = 1$, $b = -4$, $c = -5 - y$.

$$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(-5 - y) \Rightarrow \Delta = 4y + 36 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{y+9} \Rightarrow x = \frac{4 \pm 2\sqrt{y+9}}{2} = 2 \pm \sqrt{y+9}.$$

Dado que $\sqrt{y+9} \geq 0$ y $x \leq 2$, entonces $x = 2 - \sqrt{y+9}$. Así, $h^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x+9}$, si $x \geq -9$.

La inversa de $y = -3x - 3$ si $x > 2$ es: $y = \frac{-x-3}{3}$ si $x < -9$.

$$h^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h^{-1}(x) = \begin{cases} 2 - \sqrt{x+9} & \text{si } x \geq -9 \\ -\frac{1}{3}(x+3) & \text{si } x < -9. \end{cases}$$



10. Para cada una de las funciones indique el ámbito, el conjunto donde es creciente y el conjunto donde es decreciente.

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -2x^2 + 5x + 3$.

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 16$.

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4(x-2)(x+1)$.

Solución

a) El vértice de $f(x) = -2x^2 + 5x + 3$ es $V = (\frac{5}{4}, \frac{49}{8})$ y como $a = -2$, es cóncava hacia abajo (tiene un punto máximo).

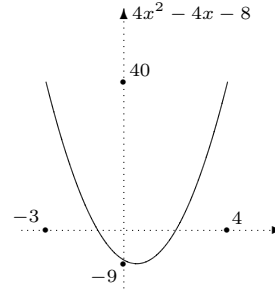
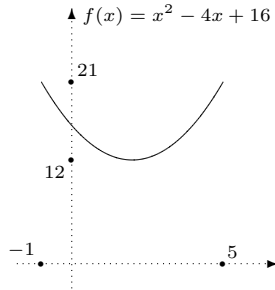
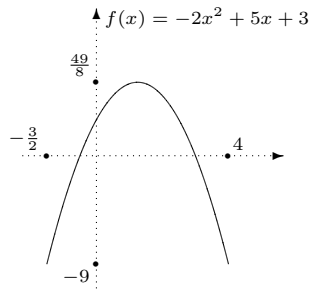
El ámbito es $]-\infty, \frac{49}{8}];$ es creciente en $]-\infty, \frac{5}{4}];$ es decreciente en $[\frac{5}{4}, \infty[.$

b) $f(x) = x^2 - 4x + 16$. $V = (2, 12)$ y es cóncava hacia arriba (punto mínimo).

Ámbito= $[12, \infty[;$ creciente en $]2, \infty[;$ decreciente en $]-\infty, 2[.$

c) $f(x) = 4(x-2)(x+1) = 4x^2 - 4x - 8$. $V = (\frac{1}{2}, -9)$ y cóncava hacia arriba (punto mínimo).

Ámbito= $[-9, \infty[;$ creciente en $]-\frac{1}{2}, \infty[;$ decreciente en $]-\infty, \frac{1}{2}].$



11. Determine la ecuación de la recta que pasa por A y B si:

a) $A(1, 3), B(\frac{1}{2}, 5), m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 3}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{2}{-\frac{1}{2}} = -4.$

$y = -4x + b \Rightarrow 3 = -4 \cdot 1 + b \Rightarrow b = 7 \Rightarrow y = -4x + 7.$

b) $A(-2, \sqrt{2}), B(-3, 0), m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - \sqrt{2}}{-3 - (-2)} = \frac{-\sqrt{2}}{-1} = \sqrt{2}.$

$y = \sqrt{2}x + b \Rightarrow 0 = -3\sqrt{2} + b \Rightarrow b = 3\sqrt{2} \Rightarrow y = \sqrt{2}x + 3\sqrt{2}.$

c) $A(10, 1), B(-5, -2), m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2 - 1}{-5 - 10} = \frac{-3}{-15} = \frac{1}{5}.$

$y = \frac{1}{5}x + b \Rightarrow 1 = \frac{10}{5} + b \Rightarrow b = -1 \Rightarrow y = \frac{1}{5}x - 1.$

d) $A(10, 3, 8), B(-6, 4, 8), m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8 - 8}{-6 - 10} = 0.$

$y = b \Rightarrow b = 8 \Rightarrow y = 8.$

12. Encuentre la ecuación de la recta ℓ_2 que pasa por A y es paralela a ℓ_1 si:

a) $\ell_1 : y = 5x - 4, A(0, 7).$

$m = 5 \Rightarrow y = 5x + b \Rightarrow 7 = 5 \cdot 0 + b \Rightarrow b = 7 \Rightarrow \ell_2 : y = 5x + 7.$

b) $\ell_1 : y = \frac{1}{3}x - 2 ; A(6, 4).$

$m = \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + b \Rightarrow 4 = \frac{1}{3} \cdot 6 + b \Rightarrow 4 - 2 = b \Rightarrow b = 2 \Rightarrow \ell_2 : y = \frac{1}{3}x + 2.$

c) $\ell_1 : y = \sqrt{2}x - 5, A(\sqrt{8}, 1).$

$m = \sqrt{2} \Rightarrow y = \sqrt{2}x + b \Rightarrow 1 = \sqrt{2}\sqrt{8} + b \Rightarrow 1 = 4 + b \Rightarrow b = -3 \Rightarrow \ell_2 : y = \sqrt{2}x - 3.$

d) $\ell_1 : y = -\sqrt{3}x + \sqrt{7}, A(\sqrt{2}, 0).$

$m = -\sqrt{3} \Rightarrow y = -\sqrt{3}x + b \Rightarrow 0 = -\sqrt{3}\sqrt{2} + b \Rightarrow b = \sqrt{6} \Rightarrow \ell_2 : y = -\sqrt{3}x + \sqrt{6}.$

e) $\ell_1 : y = -3x + 7, A(1 - 2a, 6a - 4).$

$m = -3 \Rightarrow y = -3x + b \Rightarrow 6a - 4 = -3(1 - 2a) + b \Rightarrow 6a - 4 + 3 - 6a = b \Rightarrow b = -1 \Rightarrow$

$\ell_2 : y = -3x - 1.$

f) $\ell_1 : y = (\sqrt{3} - 2)x + 4, A(\sqrt{3} + 2, 2).$

$m = \sqrt{3} - 2 \Rightarrow y = (\sqrt{3} - 2)x + b \Rightarrow 2 = (\sqrt{3} - 2)(\sqrt{3} + 2) + b \Rightarrow 2 = 3 - 4 + b \Rightarrow b =$

$3 \Rightarrow \ell_2 : y = (\sqrt{3} - 2)x + 3.$

13. Encuentre la ecuación de la recta ℓ_2 que pasa por A y es perpendicular a ℓ_1 si:

a) $\ell_1 : y = -3x + 2, A(6, -3).$

$$m = -\frac{1}{-3} = \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + b \Rightarrow -3 = \frac{1}{3} \cdot 6 + b \Rightarrow -3 = 2 + b \Rightarrow b = -5 \Rightarrow \ell_2 : y = \frac{1}{3}x - 5.$$

b) $\ell_1 : y = \frac{2}{9}x - \frac{1}{2}, A(1, \frac{1}{2}).$

$$m = -\frac{1}{\frac{2}{9}} = -\frac{9}{2} \Rightarrow y = -\frac{9}{2}x + b \Rightarrow \frac{1}{2} = -\frac{9}{2} \cdot 1 + b \Rightarrow b = \frac{10}{2} = 5 \Rightarrow \ell_2 : y = -\frac{9}{2}x + 5.$$

c) $\ell_1 : y = -\frac{7}{5}x, A(3, 1).$

$$m = -\frac{1}{-\frac{7}{5}} = \frac{5}{7} \Rightarrow y = \frac{5}{7}x + b \Rightarrow 1 = 3 \cdot \frac{5}{7} + b \Rightarrow b = 1 - \frac{15}{7} = -\frac{8}{7} \Rightarrow \ell_2 : y = \frac{5}{7}x - \frac{8}{7}.$$

d) $\ell_1 : y = \sqrt{2}x - 6, A(4, \sqrt{2}).$

$$m = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + b \Rightarrow \sqrt{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 4 + b \Rightarrow b = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow \ell_2 : y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + 3\sqrt{2}.$$

e) $\ell_1 : y = -\pi^2x - 3, A(-\pi, \frac{\pi^2+1}{\pi}).$

$$m = -\frac{1}{\pi^2} = \frac{1}{\pi^2} \Rightarrow y = \frac{1}{\pi^2}x + b \Rightarrow \frac{\pi^2+1}{\pi} = \frac{1}{\pi^2} \cdot -\pi + b \Rightarrow b = \frac{\pi^2+1}{\pi} + \frac{1}{\pi} = \frac{\pi^2+2}{\pi} \Rightarrow \ell_2 : y = \frac{1}{\pi^2}x + \frac{\pi^2+2}{\pi}.$$

f) $\ell_1 : y = \frac{e}{2}x + 1, A(e, 1).$

$$m = -\frac{1}{\frac{e}{2}} = -\frac{2}{e} \Rightarrow y = -\frac{2}{e}x + b \Rightarrow 1 = -\frac{2}{e} \cdot e + b \Rightarrow b = 1 + 2 = 3 \Rightarrow \ell_2 : y = -\frac{2}{e}x + 3.$$

14. ¿Cuál es el punto de intersección de las rectas de ecuación $y = -\frac{4}{3}x - 1$ y $y = -\frac{7}{6}x - \frac{3}{2}$.

Solución El punto de intersección es donde ambas rectas se cortan, es decir, donde para un mismo valor de x corresponde un mismo para y . Se debe entonces resolver la ecuación $-\frac{4}{3}x - 1 = -\frac{7}{6}x - \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{4}{3}x - \frac{7}{6}x = \frac{3}{2} - 1 \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 3$.

Para encontrar el valor de y , se sustituye $x = 3$ en cualquiera de las ecuaciones de las rectas, pues el valor es el mismo; así $y = -\frac{4}{3} \cdot 3 - 1 = -5$. Luego el punto de intersección es $(3, -5)$.

15. Pruebe que el triángulo ABC cuyos vértices son $A(-1, 6), B(-16, -9)$ y $C(2, 0)$ es rectángulo.

Solución Sean $\overleftrightarrow{AB} = \ell_1 : y = m_1x + b_1$, $\overleftrightarrow{AC} = \ell_2 : y = m_2x + b_2$, $\overleftrightarrow{BC} = \ell_3 : y = m_3x + b_3$.

$$m_1 = \frac{-9 - 6}{-16 - (-1)} = \frac{15}{15} = 1.$$

$$m_2 = \frac{0 - 6}{2 - (-1)} = \frac{-6}{3} = -2.$$

$$m_3 = \frac{0 - (-9)}{2 - (-16)} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}.$$

Observe que $m_2 \cdot m_3 = -1 \implies \ell_2 \perp \ell_3 \implies m \angle ACB = 90^\circ \therefore \triangle ABC$ es rectángulo.

16. Determine la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(a-2, 13-3a)$ y $B(1-2b, 6b+4)$ con a y b números reales.

Solución Sea $\overleftrightarrow{AB} = l : y = mx + B$.

$$m = \frac{6b+4-(13-3a)}{1-2b-(a-2)} = \frac{6b+4-13+3a}{1-2b-a+2} = \frac{6b+3a-9}{-2b-a+3} = \frac{-3(-2b-a+3)}{-2b-a+3} = -3 \implies y = -3x + B \implies 6b+4 = -3(1-2b) + B \implies B = 6b+4+3-6b = 7 \implies l : y = -3x + 7.$$

17. Determine el valor de k para que ℓ_1 y ℓ_2 sean paralelas:

a) $\ell_1 : y = 3kx - 2, \ell_2 : y = 12x - k$.

b) $\ell_1 : y = 3k^2x - 4kx - 1, \ell_2 : y = kx + 2x - 3k$.

c) $\ell_1 : y = (3k-2)x - 1, \ell_2 : y = \frac{x}{k} + 6$.

d) $\ell_1 : y = 5k^2x - 8, \ell_2 : y = (-4k-1)x + 3k$.

Solución Recuerde que para que ℓ_1 y ℓ_2 sean paralelas, deben tener la misma pendiente.

Así: $3k = 12 \implies k = 4$.

b) $3k^2 - 4k = k + 2 \implies 3k^2 - 5k - 2 = 0 \implies (3k+1)(k-2) = 0 \implies k = 2$ o $k = -\frac{1}{3}$.

c) $3k - 2 = \frac{1}{k} \implies 3k^2 - 2k - 1 = 0 \implies (3k+1)(k-1) = 0 \implies k = -\frac{1}{3}$ o $k = 1$.

d) $5k^2 = -4k - 1 \implies 5k^2 + 4k + 1 = 0$, como $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 5 \cdot 1 = 16 - 20 = -4 < 0$ no hay solución.

18. Determine el valor de k para que ℓ_1 y ℓ_2 sean perpendiculares:

a) $\ell_1 : y = (k+2)x - \frac{1}{5}, \ell_2 : y = \frac{1-k}{4}x + \frac{2}{7}$.

b) $\ell_1 : y = \frac{x}{k-4} + \sqrt{2}, \ell_2 : y = (k+2)x - 1$.

c) $\ell_1 : y = x - 5, \ell_2 : y = 3kx - 5x + \sqrt{2}$.

d) $\ell_1 : y = k^2x - 3, \ell_2 : y = x - k$.

Solución Recuerde que para que $\ell_1 \perp \ell_2$, debe darse que $m_1 \cdot m_2 = -1$. Luego:

a) $m_1 = k+2, m_2 = \frac{1-k}{4}, m_1 \cdot m_2 = -1 \implies (k+2) \frac{(1-k)}{4} = -1 \implies k^2 + k - 2 = 4 \implies k^2 + k - 6 = 0 \implies (k+3)(k-2) = 0 \implies k = -3$ o $k = 2$.

b) $m_1 = \frac{1}{k-4}, m_2 = k+2, m_1 \cdot m_2 = -1 \implies \frac{k+2}{k-4} = -1 \implies k+2 = -k+4 \implies 2k = 2 \implies k = 1$.

c) $m_1 = 1, m_2 = 3k-5, m_1 \cdot m_2 = -1 \implies 3k-5 = -1 \implies 3k = 4 \implies k = \frac{4}{3}$.

d) $m_1 = k^2, m_2 = 1, m_1 \cdot m_2 = -1 \implies k^2 = -1$ y no tiene solución.

19. Grafique la función indicando el valor máximo o mínimo de $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$:

a) $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$.

b) $f(x) = -3x^2 + 5x - 2$.

c) $f(x) = -2x^2 - 1$.

d) $f(x) = 1 - 8x + 16x^2$.

e) $f(x) = (x+1)^2 + (3x-1)(x+1) - 3$.

Solución

a) $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$. Como $a = 2 > 0$ la función es cóncava hacia arriba y alcanza un valor mínimo. $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9$. Luego $V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right) = \left(\frac{5}{4}, -\frac{9}{8}\right)$.

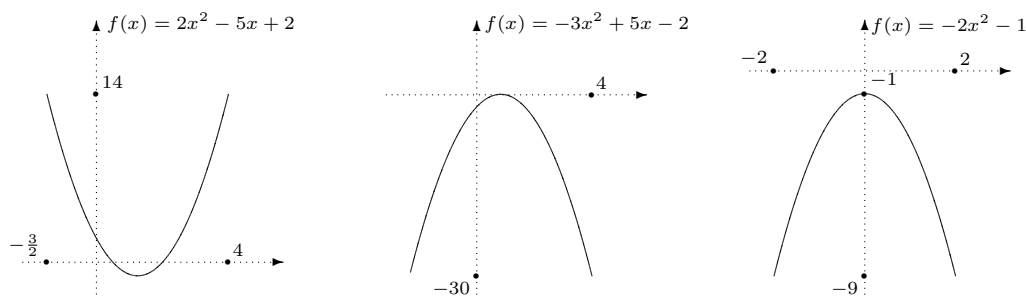
Por lo tanto, en $x = \frac{5}{4}$ la función alcanza un valor mínimo que es $y = -\frac{9}{8}$.

b) $f(x) = -3x^2 + 5x - 2$. Como $a = -3 < 0$ la función es cóncava hacia abajo y alcanza un valor máximo. $\Delta = 5^2 - 4(-3)(-2) = 1$. Luego $V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right) = \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{12}\right)$.

Por lo tanto, en $x = \frac{5}{6}$ la función alcanza un valor máximo que es $y = \frac{1}{12}$.

c) $f(x) = -2x^2 - 1$. Como $a = -2 < 0$ la función es cóncava hacia abajo y alcanza un valor máximo. $\Delta = -4(-2)(-1) = -8$. Luego $V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right) = (0, -1)$.

Por lo tanto, en $x = 0$ la función alcanza su valor máximo que es $y = -1$

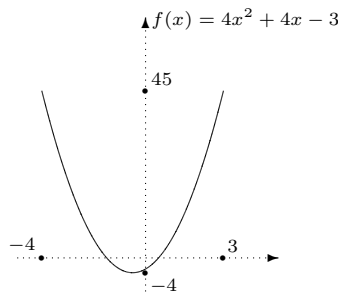
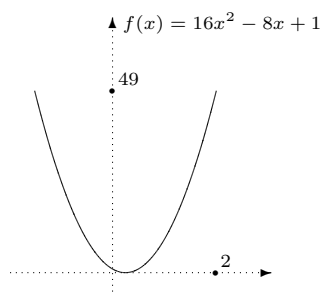


d) $f(x) = 1 - 8x + 16x^2$. Como $a = 16 > 0$ la función es cóncava hacia arriba y alcanza un valor mínimo. $\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 0$. Luego $V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right) = \left(\frac{1}{4}, 0\right)$.

Por lo tanto, en $x = \frac{1}{4}$ la función alcanza su valor mínimo que es $y = 0$.

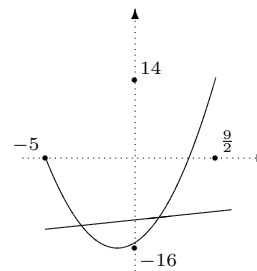
e) $f(x) = (x+1)^2 + (3x-1)(x+1) - 3 = x^2 + 2x + 1 + 3x^2 + 2x - 1 - 3 \implies f(x) = 4x^2 + 4x - 3$.

Como $a = 4 > 0$ la función es cóncava hacia arriba y alcanza un valor mínimo. $\Delta = 4^2 - 4(4)(-3) = 64$, luego $V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right) = \left(-\frac{1}{2}, -4\right)$. Por lo tanto, en $x = -\frac{1}{2}$ la función alcanza un valor mínimo que es $y = -4$.



20. Determine las intersecciones de $f(x) = \frac{1}{3}x - 11$ y $g(x) = x^2 + 2x - 15$.
Represente las gráficas en un mismo sistema de ejes.

Solución Resolver $\frac{1}{3}x - 11 = x^2 + 2x - 15 \Rightarrow x^2 + \frac{5}{3}x - 4 = 0 \Rightarrow (x + 3)(3x - 4) = 0 \Rightarrow x = -3, x = \frac{4}{3}$. Luego, los puntos de intersección son $(\frac{4}{3}, -\frac{95}{9})$ y $(-3, -12)$, evaluando los valores de x en cualquiera de las funciones.



21. Encuentre la ecuación de la recta que es perpendicular a $y = -\frac{1}{2}x + 3$ y pasa por el punto máximo de $f(x) = 21 + 4x - x^2$.

Solución Sea $\ell_1 : y = mx + b \Rightarrow m = -\frac{1}{-\frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow y = 2x + b$.

Ahora, $f(x) = 21 + 4x - x^2$, el eje de simetría es: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-2} = 2 \Rightarrow$ el máximo es: $f(2) = 21 + 4 \cdot 2 - 4 = 25 \Rightarrow 25 = 2 \cdot 2 + b \Rightarrow b = 21 \Rightarrow y = 2x + 21$.

22. ¿Cuál es el rectángulo de mayor área que se puede construir con un perímetro de 50cm?

Solución Sea x : ancho, y : largo, entonces $x + y = 25$, entonces $y = 25 - x$ y el área es $xy = x(25 - x)$. Sea $f(x)$: el área del rectángulo si x es el ancho, entonces $f(x) = -x^2 + 25x$. El vértice da el punto máximo y $V = (12,5, 156,25)$. El ancho es 12,5cm y el largo es 12,5cm. El área máxima es de 156,25cm².

23. Un prisma rectangular de 5cm de altura tiene un volumen de 240cm³. ¿Cuáles son las dimensiones de la base si se sabe que el largo excede en 2cm al ancho?

Solución Si el ancho es x , entonces el largo es $x + 2$ y el volumen está dado por $V = x(x + 2) \cdot 5$. Se debe resolver $x(x + 2) \cdot 5 = 240 \Rightarrow x^2 + 2x - 48 = 0 \Rightarrow x = -8$ y $x = 6$, pero $x = -8$ no puede ser la medida del ancho. Así, las dimensiones de la base son 6cm de ancho y 8cm de largo.

24. Compruebe que $f^{-1}(x) = f(x)$ para la función $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$, con $f(x) = \frac{x}{x-1}$.

Solución $f(x) = \frac{x}{x-1} \implies (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1} - 1} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x - (x-1)}{x-1}} = \frac{x}{x-1} = f(x)$. Luego, como $f(f(x)) = x$ y además $f(f^{-1}(x)) = x \implies f(f(x)) = f(f^{-1}(x)) \implies f(x) = f^{-1}(x)$.

25. Encuentre la ecuación de la recta ℓ_1 que pasa por el punto máximo de la curva

$y = 24 - 2x - x^2$ y es paralela a la recta $\ell_2 : y = -x + 12$.

Solución El punto máximo de $y = 24 - 2x - x^2$ es $V = (-1, 25)$ y $m = -1$, $y = -x + b \implies 25 = -(-1) + b \implies b = 24$, y la ecuación es $y = -x + 24$.

26. Encuentre la ecuación de la recta ℓ_1 que pasa por el punto mínimo de $y = x^2 - 4x + 1$ y es perpendicular a la recta $\ell_2 : y = 2x + 3$.

Solución El punto mínimo de $y = x^2 - 4x + 1$ es $V = (2, -3)$ y $m = -\frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}x + b \implies -3 = -\frac{1}{2} \cdot 2 + b \implies b = -2$ y la ecuación es $y = -\frac{1}{2}x - 2$.

27. Encuentre la ecuación de las rectas perpendiculares ℓ_1 y ℓ_2 si ℓ_1 pasa por $A(2, 3)$ y tienen su intersección en el punto $P(1, 2)$.

Solución ℓ_1 pasa por $A(2, 3)$ y $P(1, 2)$, así $m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 2}{2 - 1} = 1 \implies y = x + b \implies b = 3 - 2 = 1$, por lo que la ecuación es $\ell_1 : y = x + 1$. Ahora, ℓ_2 es perpendicular a ℓ_1 , entonces su pendiente es $m_2 = -1$ y pasa por $P(1, 2) \implies b = y - mx = 2 - (-1)(1) = 3$. La ecuación es $\ell_2 : y = -x + 3$.

28. Compruebe que el triángulo con vértices $A(-1, 2)$, $B(4, 7)$, $C(13, -2)$ es rectángulo.

Solución $A(-1, 2)$, $B(4, 7)$, $C(13, -2)$. Sean $\overleftrightarrow{AB} = \ell_1 : y = m_1x + b_1$, $\overleftrightarrow{AC} = \ell_2 : y = m_2x + b_2$, $\overleftrightarrow{BC} = \ell_3 : y = m_3x + b_3$.

$$m_1 = \frac{7 - 2}{4 - (-1)} = \frac{5}{5} = 1.$$

$$m_2 = \frac{-2 - 2}{13 - (-1)} = \frac{-4}{14} = -\frac{2}{7}.$$

$$m_3 = \frac{-2 - 7}{13 - 4} = -\frac{9}{9} = -1.$$

Note que $m_1 \cdot m_3 = -1 \implies \ell_1 \perp \ell_3 \implies m \angle ABC = 90^\circ$, o sea el triángulo $\triangle ABC$ es rectángulo.

29. Sea $g : [1, 4] \longrightarrow \mathbb{R}$ con $g(x) = 4x^2 - 16x + 7$.

a) Encuentre la ecuación de la recta ℓ_1 que pasa por $A(1, g(1))$ y $B(4, g(4))$.

b) Encuentre la ecuación de la recta ℓ_2 que pasa por $C(2, 1)$ y es paralela a ℓ_1 .

Solución

$$\text{a) } g(1) = 4 \cdot 1^2 - 16 \cdot 1 + 7 = -5 \implies A = (1, -5), g(4) = 4 \cdot 4^2 - 16 \cdot 4 + 7 = 7 \implies B = (4, 7).$$

$$\text{Sea } \ell_1 : y = m_1 x + b_1 \implies m_1 = \frac{7 - (-5)}{4 - 1} = \frac{12}{3} = 4 \implies y = 4x + b_1 \implies -5 = 4 \cdot 1 + b_1 \implies b_1 = -9 \implies \ell_1 : y = 4x - 9.$$

$$\text{b) Sea } \ell_2 : y = m_2 x + b_2, \text{ por ser } \ell_2 \text{ paralela a } \ell_1, m_2 = m_1 \implies y = 4x + b_2 \implies 1 = 4 \cdot 2 + b_2 \implies b_2 = -7 \implies \ell_2 : y = 4x - 7.$$

30. Considere la función $f : [2, 7] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -\frac{3}{5}x^2 + 6x - \frac{43}{5}$.

a) Encuentre la ecuación de la recta ℓ_1 que pasa por $(2, f(2))$ y $(7, f(7))$.

b) Encuentre la ecuación de la recta ℓ_2 paralela a ℓ_1 que pasa por $(\frac{9}{2}, f(\frac{9}{2}))$.

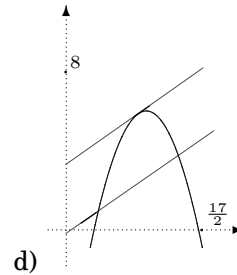
c) Determine todos los puntos de intersección de la recta ℓ_2 y la curva $y = f(x)$.

d) Represente en una gráfica la curva $y = f(x)$ y las rectas ℓ_1 y ℓ_2 .

Solución

a) Sea $\ell_1 : y = m_1 x + b_1$.

$$(2, f(2)) = \left(2, -\frac{3}{5} \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 - \frac{43}{5}\right) = (2, 1), (7, f(7)) = \left(7, -\frac{3}{5} \cdot 7^2 + 6 \cdot 7 - \frac{43}{5}\right) = (7, 4) \implies m_1 = \frac{4 - 1}{7 - 2} = \frac{3}{5} \implies y = \frac{3}{5}x + b_1 \implies 1 = \frac{3}{5} \cdot 2 + b_1 = -\frac{1}{5} \implies \ell_1 : y = \frac{3}{5}x - \frac{1}{5}.$$



b) Sea $\ell_2 : y = m_2 x + b_2, m_2 = m_1 = \frac{3}{5} \implies$

$$y = \frac{3}{5}x + b_2.$$

$$\left(\frac{9}{2}, f\left(\frac{9}{2}\right)\right) = \left(\frac{9}{2}, -\frac{3}{5} \cdot \left(\frac{9}{2}\right)^2 + 6 \cdot \frac{9}{2} - \frac{43}{5}\right) = \left(\frac{9}{2}, \frac{25}{4}\right).$$

$$\frac{25}{4} = \frac{3}{5} \cdot \frac{9}{2} + b_2 \implies b_2 = \frac{25}{4} - \frac{27}{10} = \frac{71}{20} \implies$$

$$\ell_2 : y = \frac{3}{5}x + \frac{71}{20}.$$

$$\text{c) } \frac{3}{5}x + \frac{71}{20} = -\frac{3}{5}x^2 + 6x - \frac{43}{5} \implies$$

$$12x + 71 = -12x^2 + 120x - 172 \implies$$

$$12x^2 - 108x + 243 = 0 \implies 4x^2 - 36x + 81 = 0$$

$$\implies (2x - 9)^2 = 0 \implies x = \frac{9}{2}.$$

31. Encuentre los valores de a y k , si se sabe que las funciones $f(x) = (1 - k)x^2 + 3x + 1$ y

$g(x) = kx + 3$ tienen intersección en el punto $(a, 7)$.

Solución $f(x) = (1 - k)x^2 + 3x + 1$ y $g(x) = kx + 3$.

Intersección en $(a, 7)$, así $g(a) = 7$, entonces $ka + 3 = 7 \implies k = \frac{4}{a}$, con $a \cdot k \neq 0$, pero también $f(a) = 7$, por lo que $(1 - \frac{4}{a})a^2 + 3a + 1 = 7 \implies a^2 - 4a + 3a - 6 = 0 \implies a^2 - a - 6 = 0 \implies (a - 3)(a + 2) = 0 \implies$ si $a = -2 \implies k = -2$ y si $a = 3 \implies k = \frac{4}{3}$.

32. Considere la función $f : [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -x^2 + 4x$.

a) Encuentre la ecuación de la recta L_1 que pasa por los puntos $(1, f(1))$ y $(4, f(4))$.

b) Encuentre la ecuación de la recta L_2 que pasa por $(\frac{5}{2}, f(\frac{5}{2}))$ y es paralela a la recta L_1 .

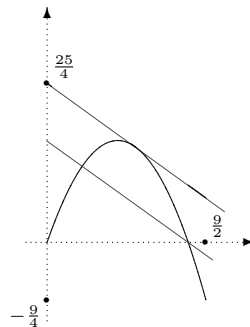
c) Represente en un mismo eje de coordenadas la curva $y = f(x)$ y las rectas L_1 y L_2 .

Solución

a) Encuentre la ecuación de la recta L_1 que pasa por los puntos $(1, f(1))$ y $(4, f(4))$.

Sea $L_1 : y = m_1x + b_1 \implies (1, f(1)) = (1, -1^2 + 4 \cdot 1) = (1, 3)$ y $(4, f(4)) = (4, -4^2 + 4 \cdot 4) = (4, 0)$.

$m_1 = \frac{3-0}{1-4} = -1 \implies y = -x + b_1 \implies 0 = -4 + b_1 \implies b_1 = 4$ i.e. $L_1 : y = -x + 4$.



b) Encuentre la ecuación de la recta L_2 que pasa por $(\frac{5}{2}, f(\frac{5}{2}))$ y es paralela a la recta L_1 .

Sea $L_2 : y = m_2x + b_2$ y $m_1 = m_2 = -1 \implies$

$y = -x + b_2$.

$(\frac{5}{2}, f(\frac{5}{2})) = (\frac{5}{2}, -(\frac{5}{2})^2 + 4 \cdot \frac{5}{2}) = (\frac{5}{2}, \frac{15}{4}) \implies$

$\frac{15}{4} = -\frac{5}{2} + b_2 \implies b_2 = \frac{25}{4}$ i.e. $L_2 : y = -x + \frac{25}{4}$.

c) Represente en un mismo eje de coordenadas la curva $y = f(x)$ y las rectas L_1 y L_2 .

33. Considere las siguientes funciones de dominio $\mathbb{R}$ definidas por:

$$f(x) = -x^2 + 2x + 8, \quad g(x) = x + 6, \quad h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \notin [-1, 2] \\ g(x) & \text{si } x \in [-1, 2] \end{cases}$$

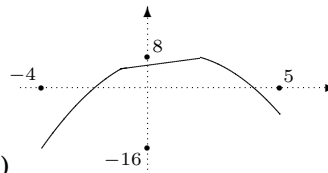
a) Encuentre los puntos de intersección de $y = f(x)$ con $y = g(x)$. Además $g(-1) = 5$,

$$g(2) = 8$$

b) Represente gráficamente la función $h(x)$.

c) Indique el ámbito de las funciones $f(x)$ y $h(x)$.

Solución



a) Resolver $-x^2 + 2x + 8 = x + 6 \implies x^2 - x - 2 =$

$$0 \implies x = -1, x = 2.$$

Además $g(-1) = 5, g(2) = 8$.

Los puntos de intersección son $(-1, 5)$ y $(2, 8)$.

c) Ámbito de $f(x) :]-\infty, 9]$ y Ámbito de $h(x) :]-\infty, 8]$.

34. Determine el dominio máximo de la función definida por:

a) $f(x) = \frac{\sqrt{x+4} + \sqrt{2-x}}{x^2 + 4x - 5}$.

b) $f(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{\sqrt{x-7} - 3}$.

Solución

a) $x \in D_f$ si cumple: $x + 4 \geq 0, 2 - x \geq 0, x^2 + 4x - 5 \neq 0$, entonces $x \geq -4, x \leq 2, x \neq 1, x \neq -5 \implies D_f = [-4, 2] \setminus \{1, -5\} = [-4, 1[\cup]1, 2]$.

b) $x \in D_f$ si cumple: $x - 7 \geq 0$ y $\sqrt{x-7} - 3 \neq 0$, entonces $x \geq 7$ y $\sqrt{x-7} \neq 3 \implies x - 7 \neq 9 \implies x \neq 16$. Así, $D_f = [7, 16[\cup]16, \infty[$.

35. Considere las funciones de dominio $\mathbb{R}$ definidas por:

$$h(x) = -x + 1, \quad f(x) = 3k^2x - 10kx + x + 1, \quad g(x) = k^2x - 6kx + x - 6.$$

a) Encuentre la función $(f \circ h)(x)$.

b) Calcule $f(-k + 1)$.

c) Encuentre el valor de k para que las ecuaciones de las rectas $y = f(x)$, $y = g(x)$ sean paralelas.

d) Encuentre el valor de k para que las ecuaciones de las rectas $y = h(x)$, $y = f(x)$ sean perpendiculares.

Solución

a) $(f \circ h)(x) = f(h(x)) = f(-x + 1) \implies 3k^2(-x + 1) - 10k(-x + 1) + (-x + 1) + 1 \implies$

$$(-3k^2 + 10k - 1)x + (3k^2 - 10k + 2).$$

$$b) f(-k+1) = 3k^2(-k+1) - 10k(-k+1) + (-k+1) + 1 \implies -3k^3 + 13k^2 - 11k + 2.$$

c) m_1 pendiente de $y = f(x)$ y m_2 pendiente de $y = g(x)$.

$$m_1 = 3k^2 - 10k + 1, m_2 = k^2 - 6k + 1, \text{ entonces } m_1 = m_2 \implies 3k^2 - 10k + 1 = k^2 - 6k + 1 \implies 2k^2 - 4k = 0 \implies k(k-2) = 0 \implies k = 2 \text{ o } k = 0.$$

$$d) m_3 \text{ pendiente de } h(x), m_3 = -1, m_1 = 3k^2 - 10k + 1 \implies m_1 \cdot m_3 = -1 \implies$$

$$3k^2 - 10k + 1 = 1 \implies k(3k - 10) = 0 \implies k = \frac{10}{3} \text{ o } k = 0.$$

36. Dada la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x + 5 & \text{si } x < 2 \\ 2x^2 - 8x + 17 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$

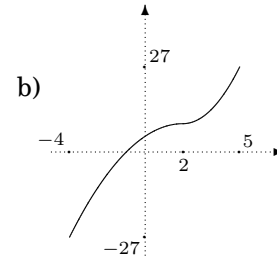
a) Calcule $f(3) + f(1)$.

b) Represente gráficamente $y = f(x)$.

c) Encuentre la función $f^{-1}(x)$.

Solución

$$a) f(3) + f(1) = [2 \cdot 3^2 - 8 \cdot 3 + 17] + [-1^2 + 4 \cdot 1 + 5] = 11 + 8 = 19.$$



$$c) \text{ Despejar } x \text{ en } y = -x^2 + 4x + 5 \text{ con } x < 2 \implies x^2 - 4x - 5 + y = 0.$$

$$\Delta = 36 - 4y \implies \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{9-y} \implies x = \frac{4 \pm 2\sqrt{9-y}}{2} = 2 \pm \sqrt{9-y}.$$

$$\text{Dado que } x < 2, \text{ entonces } x = 2 - \sqrt{9-y}, \text{ donde } 9-y > 0 \implies y < 9.$$

$$\text{Despejar } x \text{ en } y = 2x^2 - 8x + 17 \text{ con } x \geq 2 \implies 2x^2 - 8x + 17 - y = 0.$$

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 2(17-y) = 8y - 72 \implies \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2y-18} \implies x = \frac{8 \pm 2\sqrt{2y-18}}{4} = \frac{4 \pm \sqrt{2y-18}}{2} = 2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{2y-18}.$$

$$\text{Dado que } x \geq 2, \text{ entonces } x = \frac{4 + \sqrt{2y-18}}{2}, \text{ donde } 2y - 18 \geq 0 \implies y \geq 9.$$

$$\text{Así } f^{-1}(x) = \begin{cases} 2 - \sqrt{9-x} & \text{si } x < 9 \\ \frac{4 + \sqrt{2x-18}}{2} & \text{si } x \geq 9. \end{cases}$$

37. Sea la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Si x_1, x_2 son números reales que cumplen $x_1 \neq x_2$ y $\left|x_1 + \frac{b}{2a}\right| = \left|x_2 + \frac{b}{2a}\right|$, pruebe que $f(x_1) = f(x_2)$.

Solución Si $x_1 \neq x_2$ se puede suponer que $x_1 < x_2$ y por lo tanto $x_1 + \frac{b}{2a} < x_2 + \frac{b}{2a} \implies x_1 + \frac{b}{2a} \neq x_2 + \frac{b}{2a}$.

Dado que $|x_1 + \frac{b}{2a}| = |x_2 + \frac{b}{2a}|$, entonces $x_1 + \frac{b}{2a} = -(x_2 + \frac{b}{2a})$, de donde se sigue que $x_1 = -x_2 - \frac{b}{a}$, luego $f(x_1) = f(-x_2 - \frac{b}{a}) = a(-x_2 - \frac{b}{a})^2 + b(-x_2 - \frac{b}{a}) + c \Rightarrow$
 $a\left(x_2^2 + \frac{2x_2b}{a} + \frac{b^2}{a^2}\right) + \left(-bx_2 - \frac{b^2}{a} + c\right) \Rightarrow ax_2^2 + 2x_2b + \frac{b^2}{a} - bx_2 - \frac{b^2}{a} + c \Rightarrow$
 $ax_2^2 + bx_2 + c = f(x_2).$

Se cumple que $f(x_1) = f(x_2)$.

38. Encuentre el máximo dominio real de las funciones:

a) $f(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}-1}$ b) $f(x) = \frac{2\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[6]{4-|x^2-5|}}.$

Solución

a) Si $x \in D_f$ se cumple $x \geq 0$ y $2\sqrt{x}-1 \neq 0$, entonces $x \geq 0$ y $2\sqrt{x} \neq 1 \Rightarrow 4x \neq 1 \Rightarrow x \neq \frac{1}{4}$, entonces $D_f = [0, \frac{1}{4} [\cup] \frac{1}{4}, \infty [$.

b) Si $x \in D_f$ se cumple $4 - |x^2 - 5| > 0$, entonces $|x^2 - 5| < 4 \Rightarrow -4 < x^2 - 5 < 4 \Rightarrow 1 < x^2 < 9 \Rightarrow 1 < |x| < 3$.

$|x| > 1 \Rightarrow x < -1$ o $x > 1$ y $|x| < 3 \Rightarrow -3 < x < 3$. Dominio $D_f =] -3, -1 [\cup] 1, 3 [$.

39. Sean f y g funciones de dominio $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x - 1$, $g(x) = -2x + 3$.

a) Calcule $f^{-1}(x)$ y $g^{-1}(x)$.

b) Encuentre las funciones $(f \circ g)(x)$ y $(f \circ g)^{-1}(x)$.

c) Encuentre $(f^{-1} \circ g^{-1})(x)$ y $(g^{-1} \circ f^{-1})(x)$.

d) ¿Cuál de las funciones $(f^{-1} \circ g^{-1})(x)$ y $(g^{-1} \circ f^{-1})(x)$ es la inversa de $(f \circ g)(x)$?

Solución Despejando x en la ecuación $y = 3x - 1$ se obtiene $x = \frac{y+1}{3}$, entonces:

a) $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3}$. Así mismo, para $g(x)$ se tiene $y = -2x + 3 \Rightarrow \frac{y-3}{-2} = x \Rightarrow x = \frac{-y+3}{2}$, entonces $g^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g^{-1}(x) = \frac{-x+3}{2}$.

b) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(-2x + 3) = 3(-2x + 3) - 1 = -6x + 8$.

Luego para hallar la inversa despejamos x en la ecuación $y = -6x + 8 \Rightarrow x = \frac{y-8}{-6} \Rightarrow (f \circ g)^{-1}(x) = \frac{-x+8}{6}$.

c) $(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = f^{-1}(g^{-1}(x)) = f^{-1}\left(\frac{-x+3}{2}\right) = \frac{\frac{-x+3}{2}+1}{3} = \frac{-x+3+2}{6} = \frac{-x+5}{6}$.

$(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = g^{-1}(f^{-1}(x)) = g^{-1}\left(\frac{x+1}{3}\right) = \frac{\left(\frac{x+1}{3}\right)+3}{2} = \frac{-x-1+9}{6} = \frac{-x+8}{6}$.

d) La función inversa de $(f \circ g)(x)$ es $(g^{-1} \circ f^{-1})(x)$.

40. Indique el máximo dominio de $f(x)$ y represente gráficamente la curva $y = f(x)$ en cada

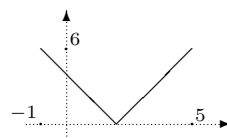
caso.

a) $f(x) = |-2x + 4|$

b) $f(x) = |x^2 + 3x - 10|$.

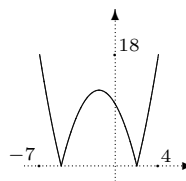
Solución

a) Dominio: $\mathbb{R} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -2x + 4 & \text{si } x < 2 \\ 2x - 4 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$



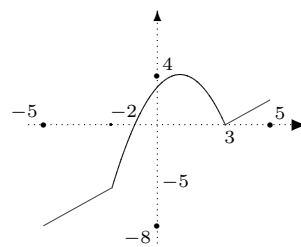
b) Dominio: $\mathbb{R} \Rightarrow$

$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 3x + 10 & \text{si } x \in [-5, 2] \\ x^2 + 3x - 10 & \text{si } x \notin [-5, 2]. \end{cases}$



41. Represente gráficamente la función $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, si:

$g(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x \in]-\infty, -2] \cup [3, \infty[\\ -x^2 + 2x + 3 & \text{si } x \in]-2, 3[. \end{cases}$



Solución

42. Para las siguientes funciones de dominio $\mathbb{R}$ indique el ámbito, el conjunto donde es decreciente y el conjunto donde es creciente.

a) $g(x) = -2x^2 + x + 28$

b) $g(x) = (x + 3)(2 - 5x) = -5x^2 - 13x + 6$.

c) $g(x) = \begin{cases} -2x + 1 & \text{si } x \leq 3 \\ x - 8 & \text{si } x > 3. \end{cases}$

Solución

a) $V = (\frac{1}{4}, \frac{225}{8})$, cóncava hacia abajo. Ámbito = $]-\infty, \frac{225}{8}];$

creciente en $]-\infty, \frac{1}{4}];$ decreciente en $]\frac{1}{4}, \infty[.$

b) $V = (-\frac{13}{10}, \frac{289}{20})$, cóncava hacia abajo. Ámbito = $]-\infty, \frac{289}{20}];$

creciente en $]-\infty, -\frac{13}{10}];$ decreciente = $]-\frac{13}{10}, \infty[.$

c) Ámbito = $]-5, \infty[;$ creciente en $]\frac{3}{2}, \infty[;$ decreciente = $]-\infty, \frac{3}{2}].$ El punto $(3, -5)$ es un mínimo.

43. Encuentre la intersección de $y = f(x)$ con $y = g(x)$.

a) $f(x) = x^2 - x + 3, g(x) = -3x - 5.$

b) $f(x) = 9x - 11, g(x) = 2x^2 + x - 3$.

c) $f(x) = (3x - 1)(x - 4), g(x) = 11x - 41$.

Solución

a) $x^2 - x + 3 = -3x - 5 \implies x^2 + 2x + 8 = 0, \Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 4 - 32 = -28 < 0 \implies$ no tiene solución. Esto implica que las rectas $y = f(x)$ con $y = g(x)$ no se intersecan.

b) $9x - 11 = 2x^2 + x - 3 \implies 2x^2 - 8x + 8 = 0 \implies x^2 - 4x + 4 = 0 \implies (x - 2)^2 = 0 \implies x = 2,$
 $f(2) = 9 \cdot 2 - 11 = 7 \implies$ el punto de intersección es $(2, 7)$.

c) $f(x) = g(x) \implies 3x^2 - 13x + 4 = 11x - 41 \implies 3x^2 - 24x + 45 = 0 \implies x^2 - 8x + 15 = 0 \implies$
 $(x - 3)(x - 5) = 0 \implies x = 3$ o $x = 5$.

$g(3) = 11 \cdot 3 - 41 = -8$ y $g(5) = 11 \cdot 5 - 41 = 14 \implies$ los puntos de intersección son: $(3, -8)$ y $(5, 14)$.

44. Considere las rectas $\ell_1 : y = \frac{2}{3}x - 1, \ell_2 : y = -\frac{1}{5}x + \frac{21}{5}, \ell_3 : y = -\frac{3}{2}x + \frac{11}{2}$.

Calcule el área del triángulo que determinan los tres puntos de intersección de esas rectas.

Solución $\ell_1 \cap \ell_2 = (6, 3) = A, \ell_1 \cap \ell_3 = (3, 1) = B, \ell_2 \cap \ell_3 = (1, 4) = C$.

Ahora, $\frac{2}{3}x - 1 = -\frac{1}{5}x + \frac{21}{5} \implies \frac{13}{15}x = \frac{26}{5} \implies x = 6$; además $y = \frac{2}{3} \cdot 6 - 1 = 3 \implies A = (6, 3)$.

Luego, $\frac{2}{3}x - 1 = -\frac{3}{2}x + \frac{11}{2} \implies \frac{13}{6}x = \frac{13}{2} \implies x = 3$; así $y = \frac{2}{3} \cdot 3 - 1 = 1 \implies B = (3, 1)$.

También, $-\frac{1}{5}x + \frac{21}{5} = -\frac{3}{2}x + \frac{11}{2} \implies \frac{13}{10}x = \frac{13}{10} \implies x = 1$; entonces $y = -\frac{1}{5} \cdot 1 + \frac{21}{5} = 4 \implies C = (1, 4)$.

Por otra parte, observe $m_1 = \frac{2}{3}$ y $m_3 = -\frac{3}{2}$ por lo que $m_1 \cdot m_3 = -1 \implies \ell_1 \perp \ell_3$, entonces el triángulo es rectángulo y su ángulo recto está en B , pues $B = \ell_1 \cap \ell_3$.

Los catetos son AB y BC , entonces se tiene que el Area = $\frac{1}{2}d(A, B) \cdot (B, C)$.

Así $d(A, B) = \sqrt{(6-3)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{13}$ y $d(B, C) = \sqrt{(3-1)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{13}$.

Por lo tanto, el área es $\frac{\sqrt{13} \cdot \sqrt{13}}{2} = \frac{13}{2}$ unidades².

45. Sea $f(x) = 5 + 4x - x^2$ y sea l_1 la recta que pasa por $(0, f(0))$ y $(6, f(6))$.

a) Encuentre la ecuación de la recta l_1 .

b) Encuentre la ecuación de la recta ℓ_2 que pasa por $(3, f(3))$ y es paralela a l_1 .

Solución

a) Sea $\ell_1 : y = m_1x + b_1, (0, f(0)) = (0, 5)$ y $(6, f(6)) = (6, 5 + 4 \cdot 6 - 36) = (6, -7) \implies m_1 =$
 $\frac{-7-5}{6-0} = -\frac{12}{6} = -2 \implies y = -2x + b_1 \implies 5 = -2 \cdot 0 + b_1 \implies b_1 = 5 \therefore \ell_1 : y = -2x + 5$.

b) Sea $\ell_2 : y = m_2x + b_2$, como $m_2 = m_1 = -2 \implies y = -2x + b_2$.

$$(3, f(3)) = (3, 5 + 4 \cdot 3 - 3^2) = (3, 8) \implies 8 = -2 \cdot 3 + b_2 \implies b_2 = 14. \therefore \ell_2 : y = -2x + 14.$$

46. Considere la recta l_1 paralela a $l : y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ y que pasa por el punto mínimo de $y = x^2 + 2x - 3$.

a) Encuentre la ecuación de la recta l_1 .

b) Encuentre la ecuación de la recta ℓ_2 perpendicular a l y que pasa por el punto mínimo de $y = x^2 + 2x - 3$.

Solución

a) Sea $\ell_1 : y = m_1x + b_1 \implies m_1 = \frac{1}{2}$. El eje de simetría de $y = x^2 + 2x - 3$ es $x = -\frac{2}{2} = -1$ y el vértice es $V(-1, (-1)^2 + 2(-1) - 3) = (-1, -4) \implies -4 = \frac{1}{2} \cdot -1 + b_1 \implies b_1 = -\frac{7}{2}$
 $\therefore \ell_1 : y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$.

b) Sea $\ell_2 : y = m_2x + b_2$, $m_2 = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2 \implies y = -2x + b_2$. $V(-1, -4) \implies -4 = -2(-1) + b_2 \implies b_2 = -6 \therefore \ell_2 : y = -2x - 6$.

Capítulo 6

Ejercicios de las funciones exponencial y logaritmo

1. Usando calculadora, efectúe:

- a) $2^2 + 2^{-4}$. b) $(0, 37)^{\sqrt{2}}$. c) $-3^5 + 2^7 - 5^3$.
d) $-7^{12} + (-7)^{10} - 3^4$. e) $(-0, 25)^{\sqrt{3}} + (7, 16)^e - 5^{2,21}$.
f) $30^{21,2} - 18^{23,4} + \pi^e$.

2. Calcule $f(0)$, $f(k+1)$, $f(k)+1$, $(f \circ f)(-2)$ en cada caso:

- a) $f(x) = 3^x$. b) $f(x) = 3^x + x^3$. c) $f(x) = 2^{x^2-x-6}$.
d) $f(x) = \log_2(x+3)$. e) $f(x) = \ln(1-4x)$. f) $f(x) = \ln\left(\frac{2x-1}{x-2}\right)$.

3. Considere las funciones que se definen seguidamente. Encuentre el máximo dominio real y trace la gráfica.

- a) $f(x) = 2^x$. b) $f(x) = 3^{x-1}$. c) $f(x) = 3^x - 1$.
d) $f(x) = 2(3)^x$. e) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3}$. f) $f(x) = e^{2x}$.
g) $f(x) = e^{|-x+3|}$. h) $f(x) = \log_2(x-3)$. i) $f(x) = \log_2 x - 3$.
j) $f(x) = \ln(x+1)$. k) $f(x) = -\ln(x-1)$. l) $f(x) = \ln\left(\frac{1}{x+2}\right)$.

4. Resolver las siguientes ecuaciones:

- a) $2^x \cdot 2^{3x-1} = 2^7$. b) $2^{2x-5} = 128$.
c) $7^{x+2} = 343$. d) $\log x = 2$.
e) $\log_3 x = 4$. f) $\log_8 x = -\frac{1}{3}$.
g) $\log_6 x = -2,5$. h) $\log_x 81 = 4$.
i) $\log_x 8 = \frac{3}{5}$. j) $2^{x^2-2x-15} = 1$.

- k) $\log(2x + 5) = \log(x + 2) + \log(x + 4)$. l) $\log_2(x - 2) + \log_2(x - 3) = 1$.
- m) $\log_3(2x - 3) + \log_3(x + 3) = 4$. n) $\log_2(x^2 + 4) - \log_2(x + 2) = \log_2(8x - 16)$.
- o) $\ln x + \ln(x - 1) = \ln 2$. p) $\frac{\log(16 - x^2)}{\log(3x - 4)} = 2$.
- q) $5^{x-3} = 4^{2x+5}$. r) $10^{5-3x} = 2^{7-2x}$.
- s) $x^2 - 4xe^{a+b} + 3e^{2a+2b} = 0$. t) $e^{6x} - 3e^{3x} = 28$.

5. Resolver las siguientes inecuaciones

- a) $5^{x-3} > 25$. b) $2^{x^2-2x-15} > 1$.
- c) $10^{5-3x} < 2^{7-2x}$. d) $e^{|x|} > 1$.
- e) $\ln x > 1$. f) $\log_{0,5}(x - 1) > 0$.
- g) $\log(2x + 5) < \log(x + 2) + \log(x + 4)$. h) $\log_{0,4}(2x - 3) > 1$.

6. Una población de 1000 individuos empieza su crecimiento siguiendo la ecuación dada por $N = 1000e^{0,2t}$, donde N es el número de individuos t meses después.

- a) Calcule cuántos individuos habrá a los 2 meses, 6 meses, 2 años.
- b) Determine dentro de cuántos meses habrá aproximadamente 1500, 2000 y 3000 individuos.

7. Un material radiactivo se coloca en un reactor nuclear. Debido a la desintegración, la cantidad A de mg presente, t años después, está dada por $A(t) = 80(2^{-(t/2)})$.

- a) Calcule el número de mg que quedan 10 años después.
- b) Calcule el número de años en que se desintegra el 50 % de la cantidad inicial.

8. El número de individuos N de una población está dado por $N(t) = 5000e^{0,24t}$, donde t es el tiempo dado en años.

- a) Calcule para qué valor de t , se tiene 60000 individuos.
- b) ¿Cuántos individuos habrá dentro de 20 años?

9. En cierto circuito eléctrico, la corriente i está dada por $i = (1,59)e^{-2t}$, donde t es el tiempo en segundos.

- a) ¿Para qué valores de t es $i = 1,00A$?
- b) Calcule la corriente cuando $t = 50$ segundos.

10. La cantidad g de cierta sustancia radioactiva remanente después de t años está dada por $g = 100(0,90)^t$.

- a) Después de cuántos años habrá 50mg de sustancia.
- b) Calcule la cantidad de sustancia radioactiva remanente cuando $t = 8$ años.
11. El estroncio 90 decae de acuerdo con la ecuación: $N = N_o e^{-0,028t}$, donde N es la cantidad presente después de t años y N_o es la cantidad original. Cuando $N_o = 1000g$. Hallar el valor de t para que la cantidad presente sea 400g.
12. Un medicamento se elimina del organismo a través de la orina. La dosis inicial es de 10mg y la cantidad en el cuerpo, t horas después, está dada por $A(t) = 10(0,8)^t$.
 - a) Calcule la cantidad de fármaco restante en el organismo 8 horas después de la ingestión inicial.
 - b) ¿Qué porcentaje del medicamento que está aún en el organismo se elimina cada hora?
13. Si $R(t) = 20000e^{0,037t}$, donde t son los años, calcule:
 - a) $R(0)$
 - b) $R(10)$
 - c) $R(5)$.
14. Si $A(t) = Me^{t/b}$, M y b son constantes. Calcule t_o tal que $A(t_o) = 2M$.
15. Sea $N(t) = 651e^{0,02t}$ la fórmula mediante la cual se puede aproximar la población N de un país t años más tarde. Suponiendo que en 1980 dicho país tenía una población de 651 millones, ¿cuál será la población en 1995?
16. Encuentre el máximo dominio real de la función $f(x)$ en cada caso.
 - a) $f(x) = \frac{3}{2 \ln x + 1}$
 - b) $f(x) = \log_2 |x + 4|$
 - c) $f(x) = |\log_2 (x + 4)|$.
17. Para las siguientes funciones indique el máximo dominio, construya la gráfica de $y = f(x)$, indique el ámbito y señale los intervalos de crecimiento.
 - a) $f(x) = 1 + 2^x$.
 - b) $f(x) = -3 + 2^x$.
 - c) $f(x) = 4 - 3^x$.
 - d) $f(x) = \log_2 (1 - x)$.
 - e) $f(x) = 1 + \log_2 x$.
 - f) $f(x) = 1 - \log_2 x$.
18. Resuelva las siguientes ecuaciones:
 - a) $2^{2x} - 12 \cdot 2^x + 32 = 0$.
 - b) $3^{2x} + 3^{x+1} = 4$.
 - c) $2^{x-1} = 3^{4x+1}$.
 - d) $3^{x^2-x-2} = 81$.
 - e) $\log_3 (2x + 1) + \log_3 (19x + 5) = 6$.
 - f) $e^{-8x} + 2e^{-5x} - 35e^{-2x} = 0$.
 - g) $\log_3 (4x + 1) - 1 = \log_3 (x + 2)$.

19. Considere la función $g(x) = \log_{[\frac{1}{2}]}(x + 1)$.
- a) Calcule el dominio de $g(x)$.
 - b) Represente gráficamente la curva $y = g(x)$.
 - c) Resuelva la desigualdad $g(x) > 2$.
20. Represente gráficamente $y = h(x)$ si $h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $h(x) = 2^{|x|}$.
21. Si $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, con $g(x) = -2^x$ y $f(x) = |x - 1|$, represente gráficamente la curva $y = h(x)$, si $(g \circ f)(x) = h(x)$.

Soluciones del Tema No.6: Funciones exponencial y logaritmo

1. Usando calculadora, efectúe:

Solución

- a) $\frac{65}{16}$. b) 0,245101. c) -240.
 d) -13558812033. e) No es un numero real. f) 2,041615³¹.

2. Calcule $f(0)$, $f(k+1)$, $f(k)+1$, $(f \circ f)(-2)$ en cada caso:

Solución

a) $f(x) = 3^x$.

$$f(0) = 3^0 = 1, \quad f(k+1) = 3^{k+1}, \quad f(k)+1 = 3^k + 1, \quad (f \circ f)(-2) = f(f(-2)) = f(3^{-2}) = f\left(\frac{1}{9}\right) = 3^{\frac{1}{9}} = \sqrt[9]{3}.$$

b) $f(x) = 3^x + x^3$.

$$f(0) = 3^0 + 0^3 = 1, \quad f(k+1) = 3^{k+1} + (k+1)^3, \quad f(k)+1 = 3^k + k^3 + 1,$$

$$(f \circ f)(-2) = f(f(-2)) = f(3^{-2} + (-2)^3) = f\left(\frac{1}{9} - 8\right) = f\left(-\frac{71}{9}\right) = 3^{-\frac{71}{9}} + \left(-\frac{71}{9}\right)^3 = \sqrt[9]{\frac{1}{3^{71}}} - \frac{357911}{729} = \frac{1}{3^7} \sqrt[9]{\frac{1}{3^8}} - \frac{357911}{729} = \frac{\sqrt[9]{3}}{6561} - \frac{357911}{729}.$$

c) $f(x) = 2^{x^2-x-6}$.

$$f(0) = 2^{-6} = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}, \quad f(k+1) = 2^{(k+1)^2-(k+1)-6} = 2^{k^2+2k+1-k-1-6} = 2^{k^2+k-6},$$

$$f(k)+1 = 2^{k^2-k-6} + 1, \quad (f \circ f)(-2) = f(f(-2)) = f(2^{(-2)^2-(-2)-6}) = f(2^0) = f(1) = 2^{1-1-6} = 2^{-6} = \frac{1}{64}.$$

d) $f(x) = \log_2(x+3)$. $f(0) = \log_2(3)$, $f(k+1) = \log_2(k+1+3) = \log_2(k+4)$, $f(k)+1 = \log_2(k+3)+1$, $(f \circ f)(-2) = f(f(-2)) = f(\log_2(-2+3)) = f(\log_2 1) = f(0) = \log_2 3$.

e) $f(x) = \ln(1-4x)$.

$$f(0) = \ln 1 = 0, \quad f(k+1) = \ln(1-4(k+1)) = \ln(-4k-3), \quad f(k)+1 = \ln(1-4k)+1,$$

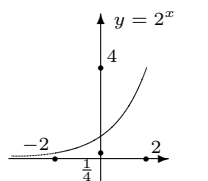
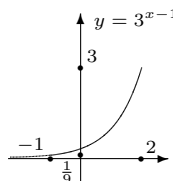
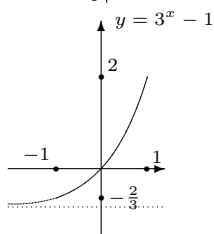
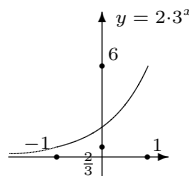
$$(f \circ f)(-2) = f(f(-2)) = f(\ln(1-4(-2))) = f(\ln 9) = \ln(1-4 \ln 9) \notin \mathbb{R}.$$

f) $f(x) = \ln\left(\frac{2x-1}{x-2}\right)$.

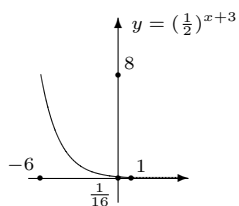
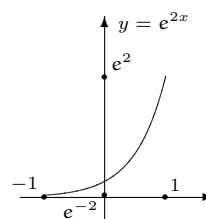
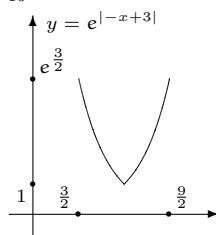
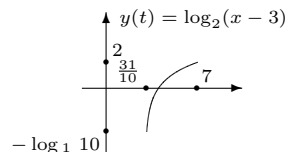
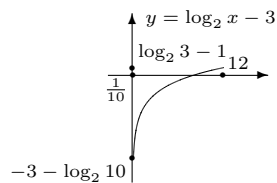
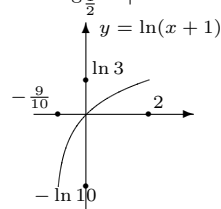
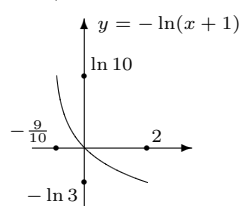
$$f(0) = \ln\left(\frac{-1}{-2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2, \quad f(k+1) = \ln\left(\frac{2(k+1)-1}{k+1-2}\right) = \ln\left(\frac{2k+1}{k-1}\right),$$

$$f(k)+1 = \ln\left(\frac{2k-1}{k-2}\right) + 1, \quad (f \circ f)(-2) = f(f(-2)) = f\left(\ln\left(\frac{2(-2)-1}{-2-2}\right)\right) = f\left(\ln\left(\frac{5}{4}\right)\right) = \ln\left(\frac{2 \ln\left(\frac{5}{4}\right)-1}{\ln\left(\frac{5}{4}\right)-1}\right) = -0,338609265.$$

3. Considere las funciones que se definen seguidamente. Encuentre el máximo dominio real y trace la gráfica.

a) $D = \mathbb{R}$ b) $D = \mathbb{R}$ c) $D = \mathbb{R}$ d) $D = \mathbb{R}$ e) $D = \mathbb{R}$,

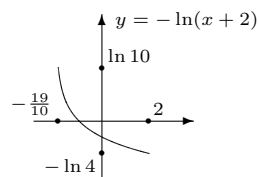
$$f(x) = 2^{-x-3}$$

f) $D = \mathbb{R}$ g) $D = \mathbb{R}$ h) $D =]3, +\infty[$ i) $D =]0, +\infty[$ j) $D =]-1, +\infty[$ k) $D =]-1, +\infty[$ 

$$l) \frac{1}{x+2} > 0 \iff$$

$$x > -2 \implies$$

$$D =]-2, \infty[$$



4. Resolver las siguientes ecuaciones:

Solución

$$a) 2^x \cdot 2^{3x-1} = 2^7 \implies 2^{x+3x-1} = 2^7 \implies 2^{4x-1} = 2^7 \implies 4x-1 = 7 \implies 4x = 8 \implies x = 2.$$

$$b) 2^{2x-5} = 128 \implies 2^{2x-5} = 2^7 \implies 2x-5 = 7 \implies 2x = 12 \implies x = 6.$$

c) $7^{x+2} = 343 \Rightarrow 7^{x+2} = 7^3 \Rightarrow x+2 = 3 \Rightarrow x = 1.$

d) $\log x = 2 \Rightarrow 10^2 = x \Rightarrow 100 = x.$

e) $\log_3 x = 4 \Rightarrow 3^4 = x \Rightarrow x = 81.$

f) $\log_8 x = -\frac{1}{3} \Rightarrow 8^{-\frac{1}{3}} = x \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$

g) $\log_6 x = -2,5 \Rightarrow 6^{-2,5} = x \Rightarrow x = 0,0113.$

h) $\log_x 81 = 4 \Rightarrow x^4 = 81 \Rightarrow x = \sqrt[4]{81} \Rightarrow x = 3.$

i) $\log_x 8 = \frac{3}{5} \Rightarrow x^{\frac{3}{5}} = 8 \Rightarrow x = 8^{\frac{5}{3}} \Rightarrow x = 32.$

j) $2^{x^2-2x-15} = 1 \Rightarrow 2^{x^2-2x-15} = 2^0 \Rightarrow x^2 - 2x - 15 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-5) = 0 \Rightarrow x = -3, x = 5 \Rightarrow S : \{-3, 5\}.$

k) $\log(2x+5) = \log(x+2) + \log(x+4) \Rightarrow \log(2x+5) = \log[(x+2)(x+4)] \Rightarrow \log(2x+5) = \log(x^2+6x+8) \Rightarrow 2x+5 = x^2+6x+8 \Rightarrow 0 = x^2+4x+3 \Rightarrow (x+3)(x+1) = 0 \Rightarrow x = -3, x = -1 \Rightarrow S : \{-1\}, \text{ porque } D =]-2, \infty[\text{ y } -3 < -2, \text{ por lo que } -3 \notin D.$

l) $\log_2(x-2) + \log_2(x-3) = 1 \Rightarrow \log_2[(x-2)(x-3)] = \log_2 2 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 2 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow (x-4)(x-1) = 0 \Rightarrow x = 4 \text{ y } x = 1 \Rightarrow S : \{4\}, \text{ pues } D =]3, \infty[\text{ y } 1 < 3, \text{ por lo que } 1 \notin D.$

m) $\log_3(2x-3) + \log_3(x+3) = 4 \Rightarrow \log_3[(2x-3)(x+3)] = \log_3 3^4 \Rightarrow 2x^2+3x-9 = 81 \Rightarrow 2x^2+3x-90 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2-4ac = 9-4(2)(-90) = 729 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 27 \Rightarrow x_1 = 6 \text{ y } x_2 = -\frac{15}{2}, \text{ pero } D =]\frac{3}{2}, \infty[\text{ y } -\frac{15}{2} < \frac{3}{2}, \text{ por lo que } -\frac{15}{2} \notin D \Rightarrow S : \{6\}.$

n) $\log_2(x^2+4) - \log_2(x+2) = \log_2(8x-16) \Rightarrow \log_2\left(\frac{x^2+4}{x+2}\right) = \log_2(8x-16) \Rightarrow x^2+4 = 8(x-2)(x+2) \Rightarrow x^2+4 = 8(x^2-4) \Rightarrow x^2+4 = 8x^2-32 \Rightarrow 7x^2-36 = 0 \Rightarrow 7x^2 = 36 \Rightarrow x^2 = \frac{36}{7} \Rightarrow x = \frac{6\sqrt{7}}{7} \text{ y } x = -\frac{6\sqrt{7}}{7}, \text{ pero } D =]2, \infty[\text{ y } -\frac{6\sqrt{7}}{7} < 2, \text{ por lo que } -\frac{6\sqrt{7}}{7} \notin D \Rightarrow S : \left\{\frac{6\sqrt{7}}{7}\right\}.$

o) $\ln x + \ln(x-1) = \ln 2 \Rightarrow \ln[x(x-1)] = \ln 2 \Rightarrow x^2 - x = 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ y } x = -1 \Rightarrow S : \{2\}, \text{ pues } -1 \notin D =]1, \infty[.$

p) $\frac{\log(16-x^2)}{\log(3x-4)} = 2 \Rightarrow \log(16-x^2) = \log(3x-4)^2 \Rightarrow 16-x^2 = 9x^2-24x+16 \Rightarrow$

$10x^2-24x = 0 \Rightarrow 2x(5x-12) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ y } x = \frac{12}{5} \Rightarrow S : \{\frac{12}{5}\}, \text{ pues } 0 \notin D =]\frac{4}{3}, 4[.$

q) $5^{x-3} = 4^{2x+5} \Rightarrow (x-3)\log 5 = (2x+5)\log 4 \Rightarrow x\log 5 - 3\log 5 = 2x\log 4 + 5\log 4 \Rightarrow x\log 5 - 2x\log 4 = 5\log 4 + 3\log 5 \Rightarrow x(\log 5 - \log 16) = \log 1024 + \log 125 \Rightarrow x = \frac{\log(1024 \cdot 125)}{\log(\frac{5}{16})} \Rightarrow x = -10,1103 \Rightarrow S : \{-10,1103\}.$

$$\begin{aligned}
 \text{r)} \quad 10^{5-3x} &= 2^{7-2x} \implies (5-3x) \log 10 = (7-2x) \log 2 \implies 5-3x = 7 \log 2 - 2x \log 2 \implies \\
 -3x + 2x \log 2 &= \log 2^7 - 5 \implies x(2 \log 2 - 3) = \log 2^7 - 5 \implies x = \frac{\log 2^7 - 5}{\log 2^2 - 3} \implies \\
 x &= \frac{\log 128 - 5}{\log 4 - 3} \implies S : \left\{ \frac{\log 128 - 5}{\log 4 - 3} \right\}. \\
 \text{s)} \quad x^2 - 4xe^{a+b} + 3e^{2a+2b} &= 0 \implies x^2 - 4xe^{a+b} + 3e^{2(a+b)} = 0 \implies (x - 3e^{a+b})(x - e^{a+b}) = 0 \implies \\
 x &= 3e^{a+b} \text{ y } x = e^{a+b} \implies S : \{3e^{a+b}, e^{a+b}\}. \\
 \text{t)} \quad e^{6x} - 3e^{3x} &= 28 \implies e^{3x} = u, u^2 - 3u - 28 = 0 \implies (u+4)(u-7) = 0 \implies u = -4, \\
 u = 7 &\implies e^{3x} = -4 \text{ (no tiene solución) y } e^{3x} = 7 \implies x = \frac{\ln 7}{3} \implies S : \left\{ \frac{\ln 7}{3} \right\}.
 \end{aligned}$$

5. Resolver las siguientes inecuaciones.

$$\text{a)} \quad 5^{x-3} > 25 = 5^2 \iff x-3 > 2 \iff x > 5.$$

$$\text{b)} \quad 2^{x^2-2x-15} > 1 = 2^0 \iff x^2 - 2x - 15 > 0 \iff (x-5)(x+3) > 0 \iff x < -3 \text{ o } x > 5.$$

$$\text{c)} \quad 10^{5-3x} < 2^{7-2x} \iff \log_2 10^{5-3x} < \log_2 2^{7-2x} \iff (5-3x) \log_2 10 < 7-2x \iff$$

$$5 \log_2 10 < (3 \log_2 10 - 2)x + 7 \iff 5 \log_2 (5 \cdot 2) > (3 \log_2 (5 \cdot 2) - 2)x + 7 \iff$$

$$5 \log_2 5 + 5 \log_2 2 - 7 > (3 \log_2 5 + 3 \log_2 2 - 2)x \iff 5 \log_2 5 - 2 > (3 \log_2 5 + 3 - 2)x =$$

$$(3 \log_2 5 + 1)x \iff x < \frac{5 \log_2 5 - 2}{3 \log_2 5 + 1}.$$

$$\text{d)} \quad e^{|x|} > 1.$$

$$\text{Si } x \geq 0 \implies e^{|x|} = e^x > 1 \iff x > \ln 1 = 0.$$

$$\text{Si } x < 0 \implies e^{|x|} = e^{-x} > 1 \iff -x > \ln 1 = 0 \iff x < 0.$$

$$\text{Finalmente, } e^{|x|} > 1 \iff x > 0.$$

$$\text{e)} \quad \ln x > 1 \iff e^{\ln x} > e^1 \iff x > e.$$

$$\text{f)} \quad \log_{0,5}(x-1) > 0.$$

El dominio máximo de $f(x) = \log_{0,5}(x-1)$ es $]1, \infty[$, entonces $\log_{0,5}(x-1) > 0 \implies \log_{0,5}(x-1) > \log_{0,5} 1 \implies x-1 < 1$, pues $f(x)$ es decreciente ya que la base es menor que 1, entonces se tiene que $x < 2 \implies S :]1, 2[$.

$$\text{g)} \quad \text{Se debe tener que } x > -\frac{5}{2}, x > -2, x > -4 \text{ i.e. } x > -2, \text{ entonces}$$

$$\log(2x+5) < \log(x+2) + \log(x+4) = \log(x+2)(x+4) \implies 2x+5 < x^2 + 6x + 8 \iff$$

$$x^2 + 4x + 3 > 0 \iff (x+3)(x+1) > 0 \iff x > -1 \text{ o } x < -3, \text{ por lo que la solución es } x > -1,$$

$$\text{dado que ya se tiene } x > -2 \implies S :]-2, \infty[.$$

$$\text{h)} \quad \log_{0,4}(2x-3) > 1.$$

El dominio máximo de $g(x) = \log_{0,4}(2x-3)$ es $]\frac{3}{2}, \infty[$, entonces $\log_{0,4}(2x-3) > 1 \implies$

$\log_{0,4}(2x - 3) > \log_{0,4} 0,4 \implies 2x - 3 < 0,4$, pues $g(x)$ es decreciente ya que la base es menor que 1, entonces $x < \frac{3+0,4}{2} \implies x < 1,7 \implies x < \frac{17}{10} \implies S :] \frac{3}{2}, \frac{17}{10} [$.

6. Una población de 1000 individuos empieza su crecimiento siguiendo la ecuación dada por $N = 1000e^{0,2t}$, donde N es el número de individuos t meses después.

a) Calcule cuántos individuos habrá a los 2 meses, 6 meses, 2 años.

b) Determine dentro de cuántos meses habrá aproximadamente 1500, 2000 y 3000 individuos.

Solución Sea $N = 1000e^{0,2t}$ y $N_0 = 1000$.

a) Si $t = 2 \implies N = 1000e^{0,2(2)} \implies N = 1492$.

Si $t = 6 \implies N = 1000e^{0,2(6)} \implies N = 3320$.

Si $t = 24 \implies N = 1000e^{0,2(24)} \implies N = 121510$.

b) Si $N = 1500 \implies 1500 = 1000e^{0,2t} \implies 1,5 = e^{0,2t} \implies \log_e 1,5 = 0,2t \implies$

$\ln 1,5 = 0,2t \implies 2,027 = t$.

Si $N = 2000 \implies 2000 = 1000e^{0,2t} \implies 2 = e^{0,2t} \implies \ln 2 = 0,2t \implies t = 3,4657$.

Si $N = 3000 \implies 3 = e^{0,2t} \implies \ln 3 = 0,2t \implies t = 5,493$.

7. Un material radiactivo se coloca en un reactor nuclear. Debido a la desintegración, la cantidad A de mg presente, t años después, está dada por $A(t) = 80(2^{-(t/2)})$.

a) Calcule el número de mg que quedan 10 años después.

b) Calcule el número de años en que se desintegra el 50 % de la cantidad inicial.

Solución Sea $A(t) = 80(2^{-\frac{t}{2}})$.

a) $t = 10 \implies A(10) = 80(2^{-5}) = 2,5$.

b) Observe que la cantidad inicial se determina con $t = 0 \implies A(0) = 80$, por lo que 50 % es 40. Así, $40 = 80(2^{-\frac{t}{2}}) \implies \frac{1}{2} = 2^{-\frac{t}{2}} \implies 2^{-1} = 2^{-\frac{t}{2}} \implies -1 = -\frac{t}{2} \implies t = 2$.

8. El número de individuos N de una población está dado por $N(t) = 5000e^{0,24t}$, donde t es el tiempo dado en años.

a) Calcule para qué valor de t , se tiene 60000 individuos.

b) ¿Cuántos individuos habrá dentro de 20 años?

Solución Sea $N(t) = 5000e^{(0,24)t}$.

a) $60000 = 5000e^{0,24t} \implies 12 = e^{0,24t} \implies \ln 12 = 0,24t \implies 2,48 = 0,24t \implies t = 10,353$.

b) $N(20) = 5000e^{0,24(20)} = 5000e^{4,8} \implies N(20) = 607552,08$.

9. En cierto circuito eléctrico, la corriente i está dada por $i = (1,59)e^{-2t}$, donde t es el tiempo

en segundos.

a) ¿Para qué valores de t es $i = 1,00A$?

b) Calcule la corriente cuando $t = 50$ segundos.

Solución Sea $i = (1,59)e^{-2t}$.

$$a) (1,59)e^{-2t} = 1 \implies e^{-2t} = \frac{1}{1,59} \implies e^{2t} = 1,59 \implies 2t = \ln 1,59 \implies t = \frac{\ln 1,59}{2} = 0,2319.$$

$$b) t = 50 \implies i = (1,59)e^{-100} \implies i = 5,91 \times 10^{-44}.$$

10. La cantidad g de cierta sustancia radioactiva remanente después de t años está dada por $g = 100(0,90)^t$.

a) Después de cuántos años habrá 50mg de sustancia.

b) Calcule la cantidad de sustancia radioactiva remanente cuando $t = 8$ años.

Solución Sea $g = 100(0,90)^t$.

$$a) 50 = 100(0,90)^t \implies \frac{1}{2} = 0,90^t \implies \log \frac{1}{2} = t \log 0,90 \implies t = \frac{\log 0,5}{\log 0,9} = 6,5788.$$

$$b) t = 8 \implies g = 100(0,90)^8 \implies g = 43,046.$$

11. El estroncio 90 decae de acuerdo con la ecuación: $N = N_0 e^{-0,028t}$, donde N es la cantidad presente después de t años y N_0 es la cantidad original. Cuando $N_0 = 1000g$. Hallar el valor de t para que la cantidad presente sea 400g.

Solución Sea $N = N_0 e^{-(0,028t)}$.

$$400 = 1000e^{-0,028t} \implies 0,4 = e^{-0,028t} \implies \ln 0,4 = -0,028t \implies -0,9163 = -0,028t \implies t = 32,725.$$

12. Un medicamento se elimina del organismo a través de la orina. La dosis inicial es de 10mg y la cantidad en el cuerpo, t horas después, está dada por $A(t) = 10(0,8)^t$.

a) Calcule la cantidad de fármaco restante en el organismo 8 horas después de la ingestión inicial.

b) ¿Qué porcentaje del medicamento que está aún en el organismo se elimina cada hora?

Solución Sea $A(t) = 10(0,8)^t$.

$$a) t = 8 \implies A(8) = 10(0,8)^8 = 1,677.$$

$$b) \frac{A(t) - A(t+1)}{A(t)} 100 = \frac{10(0,8)^t - 10(0,8)^{t+1}}{10(0,8)^t} 100 = \frac{10(0,8)^t(1 - 0,8)}{10(0,8)^t} 100 = 20\%.$$

13. Si $R(t) = 20000e^{0,037t}$, donde t son los años, calcule:

a) $R(0)$.

b) $R(10)$.

c) $R(5)$.

Solución Sea $R(t) = 20000e^{0,037t}$.

a) $R(0) = 20000$.

b) $R(10) = 20000e^{0,37} = 28954,69$.

c) $R(5) = 20000e^{0,185} = 24064,36$.

14. Si $A(t) = Me^{t/b}$, M y b son constantes. Calcule t_0 tal que $A(t_0) = 2M$.

Solución Sea $A(t) = Me^{\frac{t}{b}}$.

Si $A(t_0) = 2M \Rightarrow e^{\frac{t_0}{b}} = 2 \Rightarrow \frac{t_0}{b} = \ln 2 \Rightarrow t_0 = 0,6931b$.

15. Sea $N(t) = 651e^{0,02t}$ la fórmula mediante la cual se puede aproximar la población N de un país t años más tarde. Suponiendo que en 1980 dicho país tenía una población de 651 millones, ¿cuál será la población en 1995?

Solución Sea $N(t) = 651e^{(0,02)t}$. Observe que $N(0) = 651$ y esto es en 1980, luego para 1995 (15 años después) se tendrá:

$N(15) = 651e^{(0,02)(15)} = 878,76$ millones.

16. Encuentre el máximo dominio real de la función $f(x)$ en cada caso.

a) $f(x) = \frac{3}{2\ln x + 1}$.

Se debe cumplir $x > 0$ y $2\ln x + 1 \neq 0 \Rightarrow 2\ln x \neq -1 \Rightarrow \ln x \neq -\frac{1}{2} \Rightarrow x \neq e^{-\frac{1}{2}}$.

Dominio: $]0, \infty[\setminus \{e^{-\frac{1}{2}}\}$.

b) $f(x) = \log_2 |x + 4|$.

$|x + 4| \neq 0 \Rightarrow x \neq -4 \Rightarrow$ Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$.

c) $f(x) = |\log_2(x + 4)|$.

$x + 4 > 0 \Rightarrow x > -4 \Rightarrow$ Dominio: $] -4, \infty[$.

17. Para las siguientes funciones indique el máximo dominio, construya la gráfica de $y = f(x)$, indique el ámbito y señale los intervalos de crecimiento.

a) $f(x) = 1 + 2^x$.

b) $f(x) = -3 + 2^x$.

c) $f(x) = 4 - 3^x$.

d) $f(x) = \log_2(1 - x)$.

e) $f(x) = 1 + \log_2 x$.

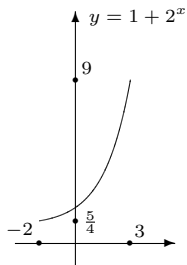
f) $f(x) = 1 - \log_2 x$.

Solución

a) $D = \mathbb{R}$

Ámbito = $]1, \infty[$

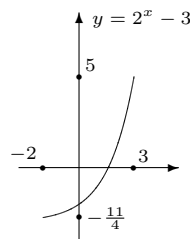
Crece $\forall x \in \mathbb{R}$



b) $D = \mathbb{R}$

Ámbito = $] -3, \infty[$

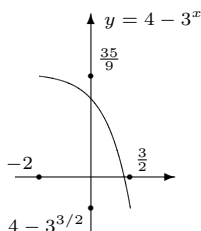
Crece $\forall x \in \mathbb{R}$



c) $D = \mathbb{R}$

Ámbito = $] -\infty, 4[$

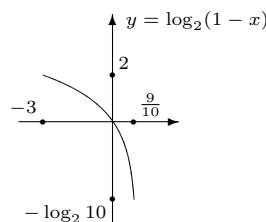
Decrece $\forall x \in \mathbb{R}$



d) $D =] -\infty, 1[$

Ámbito = $\mathbb{R}$

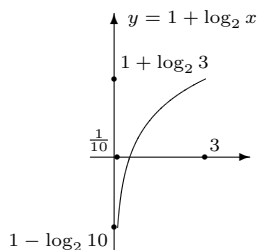
Decrece $\forall x \in D$



e) $D =]0, +\infty[$

Ámbito = $\mathbb{R}$

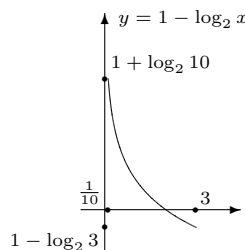
Crece $\forall x \in D$



f) $D =]0, +\infty[$

Ámbito = $\mathbb{R}$

Decrece $\forall x \in D$



18. Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $2^{2x} - 12 \cdot 2^x + 32 = 0$.

b) $3^{2x} + 3^{x+1} = 4$.

c) $2^{x-1} = 3^{4x+1}$.

d) $3^{x^2-x-2} = 81$.

e) $\log_3(2x+1) + \log_3(19x+5) = 6$.

f) $e^{-8x} + 2e^{-5x} - 35e^{-2x} = 0$.

g) $\log_3(4x+1) - 1 = \log_3(x+2)$.

Solución

a) $2^{2x} - 12 \cdot 2^x + 32 = 0$.

Sea $u = 2^x \implies u^2 - 12u + 32 = 0 \implies u = 8$ y $u = 4 \implies 2^{x^2} = 8$ y $2^{x^2} = 4 \implies 2^x = 2^3$ y $2^x = 2^2 \implies x = 3$ y $x = 2$.

b) $3^{2x} + 3^{x+1} = 4 \implies 3^{2x} - 3 \cdot 3^x - 4 = 0 \implies (3^x + 1)(3^x - 4) = 0 \implies 3^x = -1$ (no tiene solución) y $3^x = 4 \implies x = \log_3 4$.

c) $2^{x-1} = 3^{4x+1} \implies (x-1)\log 2 = (4x+1)\log 3 \implies x\log 2 - \log 2 = 4x\log 3 + \log 3 \implies x(4\log 3 - \log 2) = -(\log 2 + \log 3) \implies x = \frac{-\log 6}{4\log 3 - \log 2}$.

d) $3^{x^2-x-2} = 81 = 3^4 \implies x^2 - x - 2 = 4 \implies x^2 - x - 6 = 0 \implies x = 3$ y $x = -2 \implies S = \{-2, 3\}$.

e) $\log_3(2x+1) + \log_3(19x+5) = 6 \implies \log_3(2x+1)(19x+5) = \log_3 3^6 \implies 38x^2 + 29x + 5 = 729 \implies 38x^2 + 29x - 724 = 0 \implies x = 4 \text{ y } x = -4,76$, pero observe que esta ecuación tiene sentido en $]-\frac{5}{19}, \infty[$, por lo que $S = \{4\}$.

f) $e^{-8x} + 2e^{-5x} - 35e^{-2x} = 0 \implies e^{-2x}(e^{-6x} + 2e^{-3x} - 35) = 0$. Ahora, como $e^{-2x} \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, entonces $e^{-6x} + 2e^{-3x} - 35 = 0$. Sea $u = e^{-3x} \implies u^2 + 2u - 35 = 0 \implies u = 5 \text{ y } u = -7 \implies e^{-3x} = 5 \text{ y } e^{-3x} = -7$ (no tiene solución) $\implies -3x = \ln 5 \implies x = -\frac{\ln 5}{3} \implies S = \left\{-\frac{\ln 5}{3}\right\}$.

g) $\log_3(4x+1) - 1 = \log_3(x+2)$. Observe que se debe tener $x > -\frac{1}{4}$.

Ahora, $\log_3(4x+1) - \log_3 3 = \log_3(x+2) \implies \log_3\left(\frac{4x+1}{3}\right) = \log_3(x+2) \implies 4x+1 = 3(x+2) \implies 4x-3x = 6-1 \implies x = 5 \implies S = \{5\}$.

19. Considere la función $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$.

a) Calcule el dominio de $g(x)$.

b) Represente gráficamente la curva $y = g(x)$.

c) Resuelva la desigualdad $g(x) > 2$.

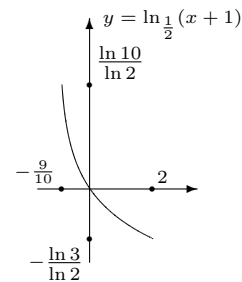
Solución

a) Dominio: $]-1, \infty[$.

b) Note que $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) = -\log_2(x+1)$

c) $g(x) > 2 \implies \log_{\frac{1}{2}}(x+1) > 2 \implies x+1 < \left(\frac{1}{2}\right)^2 \implies x < \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 \implies x < -\frac{3}{4}$.

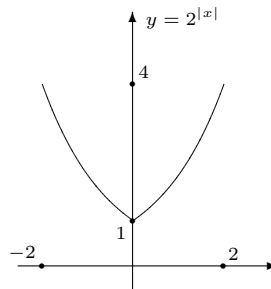
Como el dominio es $]-1, \infty[$, la solución es $]-1, -\frac{3}{4}[$.



20. Represente gráficamente $y = h(x)$ si $h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $h(x) = 2^{|x|}$.

Solución

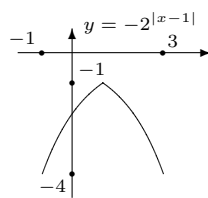
$y = 2^{|x|}$.



21. Si $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, con $g(x) = -2^x$ y $f(x) = |x-1|$, represente gráficamente la curva $y = h(x)$, si $(g \circ f)(x) = h(x)$.

Solución

$$y = h(x) = g(f(x)) = g(|x - 1|) = -2^{|x-1|}.$$



Capítulo 7

Ejercicios de trigonometría

1. Exprese en grados las siguientes medidas de ángulos dados en radianes.
a) $\frac{4\pi}{6}$. b) $-\frac{5\pi}{12}$. c) $\frac{8\pi}{7}$. d) $-\frac{6\pi}{5}$.
e) $\frac{5\pi}{12}$. f) $\frac{11\pi}{3}$. g) $-\frac{3\pi}{5}$. h) $\frac{\pi}{30}$.
2. Encuentre una expresión en grados y minutos para las siguientes medidas dadas en radianes. Use calculadora.
a) 5. b) 8, 2. c) -2, 86.
d) 0, 41. e) -7, 4. f) $\frac{4}{3}$.
3. Exprese en radianes las siguientes medidas de ángulos dadas en grados.
a) 18^0 . b) 45^0 . c) -18^0 .
d) 432^0 . e) -135^0 . f) $[\frac{15}{7}]^0$.
4. Encuentre una forma decimal en radianes para las siguientes medidas de ángulos dados en grados. Use calculadora.
a) $20^030'$. b) $70^048'$. c) $15^045'$. d) $80^028'$.
5. Si α es un ángulo agudo, determine en cada caso el valor de las otras razones trigonométricas.
a) $\sin \alpha = 0, 2$. b) $\tan \alpha = 0, 32$. c) $\cot \alpha = 3$.
d) $\cos \alpha = 0, 8$. e) $\sec \alpha = \frac{13}{12}$. f) $\csc \alpha = 5$.
6. Un ángulo central de una circunferencia de radio 15cm intercepta a un arco de longitud 10π . Halle la medida en grados del ángulo.

7. En un triángulo rectángulo un ángulo mide 70° y el cateto adyacente al ángulo menor mide 5cm . Halle las medidas de los otros lados del triángulo.
8. En un triángulo rectángulo los catetos miden $1,6\text{cm}$ y 3cm . Halle las medidas en grados y radianes de los ángulos agudos.
9. Encuentre la medida del ángulo agudo que determina la recta dada por: $\sqrt{3}x - 3y + 1 = 0$ y el eje y .
10. Considere el triángulo ABC cuyos vértices son los puntos de intersección de las rectas $y = 2x + 5$, $y = -\frac{1}{2}x$, $y = 12x - 25$. Calcule las medidas de los ángulos internos del triángulo.
11. A una distancia de 1000 pies sobre un terreno horizontal, el ángulo de elevación a la parte más alta de un edificio de 45 pisos es de $40^\circ 10'$. ¿Qué altura tiene este edificio?
12. Desde un avión que vuela sobre una autopista en línea recta a 500m de altura se miden en el mismo instante los ángulos de depresión a los extremos de un puente y resultan ser 20° y 32° . ¿Cuál es la longitud del puente?
13. Calcule el valor de las seis funciones trigonométricas para el ángulo α en el IV cuadrante si su lado terminal es perpendicular a la recta cuya ecuación es $3x - 4y - \pi = 0$.
14. Calcule los valores de las funciones trigonométricas para un ángulo en el III cuadrante si su lado terminal es paralelo a la recta dada por la ecuación $15x - 8y - 1 = 0$.
15. Represente gráficamente cada función. Indique el ámbito, amplitud, período y corrimiento de fase en cada caso.

a) $y = 2 \sin \left[x - \frac{\pi}{3} \right]$. b) $y = -3 \cos x$. c) $y = 2 \cos \left[x + \frac{\pi}{6} \right]$. d) $y = 3 \cos \left[2x + \frac{\pi}{2} \right]$.
16. Considere la función $f : \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$.

a) Determine el ámbito de $f(x)$.

b) Encuentre el intervalo donde f es creciente.

c) Encuentre el intervalo donde f es decreciente.
17. Pruebe las siguientes identidades:

a) $(\tan x - \cot x) \tan(2x) = -2$. c) $\frac{1}{1 - \sin x} + \frac{1}{1 + \sin x} = 2 + 2 \tan^2 x$. e) $\frac{\cot^2 x}{\csc x + 1} = \frac{1 - \sin x}{\sin x}$. g) $\frac{\cos x}{1 - \sin x} + \frac{1 - \sin x}{\cos x} = 2 \sec x$.	b) $\frac{2 \cot(2x)}{\cos x - \sin x} = \csc x + \sec x$. d) $\sin^2 x + \sin^2(90^\circ - x) = 1$. f) $\sec x - \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \tan x$. h) $\frac{1 + \cos(2x)}{\sin(2x)} = \cot x$.
---	---

i) $\frac{\tan x - \sec x}{\sin^3 x} = \frac{\sec}{1 + \cos x}.$

18. Si se sabe que $x = 5 \sin u$, encuentre una expresión para:

a) $\sqrt{\frac{25 - x^2}{x^2}}.$

b) $x\sqrt{25 - x^2}.$

19. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $2 \sin^2 x - 3 \cos x - 3 = 0.$

b) $2 \sin^2 x + 3\sqrt{3} \cos x - 5 = 0.$

c) $\tan^2 x + 2 \tan x - 8 = 0.$

d) $2 \cos^2 x - \sin(2x) = 0.$

e) $2 \sin^2 x + \sqrt{3} \cos x + 1 = 0.$

f) $(\sin x + \cos x)^2 = 2.$

g) $\cos(2x) + \cos x = 0.$

h) $\tan^2 x \cos x = \cos x.$

i) $\sin(2x) = \sin x.$

j) $2 \sin^2 x = \sqrt{2} \cos x.$

20. Sean $\tan \beta = -2, 4$ y $\sin \alpha = 0, 6$ con β y α ángulos en el *IV* y *II* cuadrante respectivamente. Determine el valor exacto de:

a) $\sin(\alpha + \beta).$

b) $\cos(\alpha + \beta).$

c) $\tan(2\alpha).$

d) $\sin(2\alpha).$

e) El cuadrante donde se localiza $\alpha + \beta$.

21. Sean α un ángulo del *II* cuadrante y β un ángulo del *III* cuadrante. Si $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ y $\sin \beta = -\frac{8}{17}$. Determine el valor exacto de:

a) $\sin(\alpha + \beta).$

b) $\cos(\alpha + \beta).$

c) $\tan(\alpha + \beta).$

d) $\sin(\alpha - \beta).$

e) $\cos(\alpha - \beta).$

f) $\tan(\alpha - \beta).$

g) $\sin(2\alpha).$

h) $\cos(2\alpha).$

i) $\tan(2\alpha).$

j) ¿Cuál es el cuadrante donde se localiza $(\alpha + \beta)$, $(\alpha - \beta)$ y (2α) ?

22. Sean $\tan \beta = \frac{2}{5}$ y $\cos \alpha = -\frac{1}{4}$ con β y α ángulos en el *I* y *II* cuadrantes respectivamente. Calcule el valor exacto de:

a) $\sin(\alpha + \beta).$

b) $\cos(\alpha + \beta).$

c) $\tan(\alpha + \beta).$

d) $\sin(\alpha - \beta).$

e) $\cos(\alpha - \beta).$

f) $\tan(\alpha - \beta).$

g) $\sin(2\alpha).$

h) $\cos(2\alpha).$

i) $\tan(2\alpha).$

23. Encuentre el valor exacto de:

a) $\arccos \left[\sin \frac{3\pi}{4} \right].$

b) $\sin \left[\arcsin \frac{5}{6} + \arccos \frac{5}{9} \right]$.

c) $\sin \left[\arccos \left[-\frac{1}{2} \right] + \arctan(\sqrt{3}) \right]$.

24. Encontrar en cada caso una expresión algebraica en x .

a) $\tan \left[\arcsin \frac{x}{2} \right]$.

b) $\cos(2 \arcsin x)$.

c) $\sin(2 \arccos x)$.

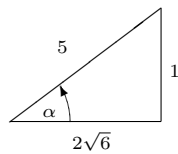
d) $\sin(2 \arctan x)$.

e) $\tan(\operatorname{arcsec} x)$.

Soluciones del Tema No.7: Trigonometría

1. a) $\frac{4\pi}{6} = \frac{4\pi}{6} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 120^\circ$.
 b) $-\frac{5\pi}{12} = -\frac{5\pi}{12} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = -75^\circ$.
 c) $\frac{8\pi}{7} = \frac{8\pi}{7} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{1440^\circ}{7}$.
 d) $-\frac{6\pi}{5} = -\frac{6\pi}{5} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = -216^\circ$.
 e) $\frac{5\pi}{12} = \frac{5\pi}{12} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 75^\circ$.
 f) $\frac{11\pi}{3} = \frac{11\pi}{3} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 660^\circ$.
 g) $-\frac{3\pi}{5} = -\frac{3\pi}{5} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = -108^\circ$.
 h) $\frac{\pi}{30} = \frac{\pi}{30} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 6^\circ$.
2. a) $5 = 5 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 286^\circ 28' 44''$.
 b) $8,2 = 8,2 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 469^\circ 49' 31''$.
 c) $-2,86 = -2,86 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = -163^\circ 51' 57''$.
 d) $0,41 = 0,41 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 23^\circ 29' 28''$.
 e) $-7,4 = -7,4 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = -423^\circ 59' 19''$.
 f) $\frac{4}{3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 76^\circ 23' 39''$.
3. a) $18^\circ = 18^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{10}$.
 b) $45^\circ = 45^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{4}$.
 c) $-18^\circ = -18^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = -\frac{\pi}{10}$.
 d) $432^\circ = 432^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{12\pi}{5}$.
 e) $-135^\circ = -135^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = -\frac{3\pi}{4}$.
 f) $[\frac{15}{7}]^\circ = [\frac{15}{7}]^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{84}$.
4. a) $20^\circ 30' = (20,5)^\circ = (20,5) \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = 0,3578$.
 b) $70^\circ 48' = (70,8)^\circ = (70,8) \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = 1,2357$.
 c) $15^\circ 45' = (15,75)^\circ = (15,75) \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = 0,2749$.
 d) $80^\circ 28' = (\frac{1207}{15})^\circ = (\frac{1207}{15}) \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = 1,4044$.

5. a) $\sin \alpha = 0,2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$



$$\sin \alpha = \frac{1}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

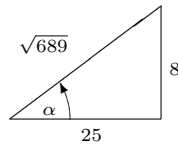
$$\tan \alpha = \frac{1}{2\sqrt{6}}$$

$$\csc \alpha = \frac{5}{1}$$

$$\sec \alpha = \frac{5}{2\sqrt{6}}$$

$$\cot \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{1}$$

b) $\tan \alpha = 0,32 = \frac{8}{25}$



$$\sin \alpha = \frac{8}{\sqrt{689}}$$

$$\cos \alpha = \frac{25}{\sqrt{689}}$$

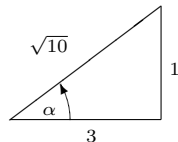
$$\tan \alpha = \frac{8}{25}$$

$$\csc \alpha = \frac{\sqrt{689}}{8}$$

$$\sec \alpha = \frac{\sqrt{689}}{25}$$

$$\cot \alpha = \frac{25}{8}$$

c) $\cot \alpha = 3 = \frac{3}{1}$



$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

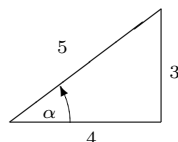
$$\tan \alpha = \frac{1}{3}$$

$$\csc \alpha = \frac{\sqrt{10}}{1}$$

$$\sec \alpha = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

$$\cot \alpha = \frac{3}{1}$$

d) $\cos \alpha = 0,8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$



$$\sin \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5}$$

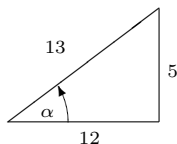
$$\tan \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\csc \alpha = \frac{5}{3}$$

$$\sec \alpha = \frac{5}{4}$$

$$\cot \alpha = \frac{4}{3}$$

e) $\sec \alpha = \frac{13}{12}$



$$\sin \alpha = \frac{5}{13}$$

$$\cos \alpha = \frac{12}{13}$$

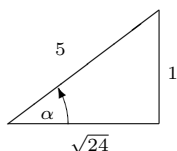
$$\tan \alpha = \frac{5}{12}$$

$$\csc \alpha = \frac{13}{5}$$

$$\sec \alpha = \frac{13}{12}$$

$$\cot \alpha = \frac{12}{5}$$

f) $\csc \alpha = 5$



$$\sin \alpha = \frac{1}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{24}}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{24}}$$

$$\csc \alpha = \frac{5}{1}$$

$$\sec \alpha = \frac{5}{\sqrt{24}}$$

$$\cot \alpha = \frac{\sqrt{24}}{1}$$

6. α : medida del ángulo en radianes.

s : longitud del arco.

r : radio del círculo.

$$\alpha = \frac{r}{s} = \frac{10\pi}{15} = \frac{2\pi}{3} \text{ en grados: } \alpha = 120^\circ.$$

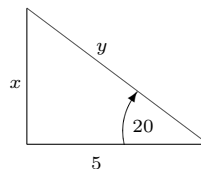
7. El otro ángulo mide $90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$. El lado que mide 5cm es el opuesto al ángulo menor.

Sean x el otro cateto y y la hipotenusa.

$$\tan 20^\circ = \frac{x}{5} \Rightarrow x = 5 \cdot \tan 20^\circ = 1,82\text{cm}.$$

$$\cos 20^\circ = \frac{5}{y} \Rightarrow y = \frac{5}{\cos 20^\circ} \Rightarrow y = 5,32\text{cm}.$$

Los otros lados miden $1,82\text{cm}$ y $5,32\text{cm}$.

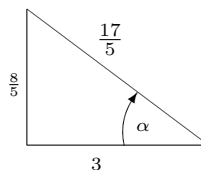


8. Sea α la medida del ángulo opuesto al cateto que mide $1,6\text{cm}$, entonces:

$$\tan \alpha = \frac{1,6}{3} = \frac{8}{15} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1} \frac{8}{15} \approx 28^\circ 4' 21'' \text{ y en radianes } \alpha \approx 0,489957.$$

El otro ángulo es $90^\circ - \alpha = 61^\circ 55' 39''$ y en radianes $\frac{\pi}{2} -$

$$\alpha \approx 1,080839.$$



9. Dado que $\sqrt{3}x - 3y + 1 = 0 \Rightarrow 3y = \sqrt{3}x + 1 \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}x + 1}{3}$.

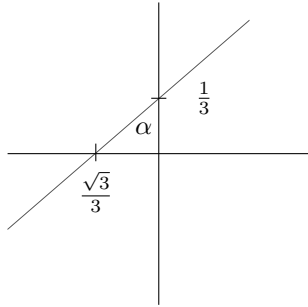
Intersección con el eje x .

$$\text{Si } y = 0, \text{ entonces se tiene } \frac{\sqrt{3}x + 1}{3} = 0 \Rightarrow \sqrt{3}x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Intersección con el eje y .

$$\text{Si } x = 0, \text{ entonces se tiene } \sqrt{3}x - 3y + 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{3} \cdot 0 - 3y + 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{3}.$$

La recta pasa por $(0, \frac{1}{3})$ y $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0)$



El ángulo α cumple que:

$$\tan \alpha = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{1}{3}} = \sqrt{3}, \text{ entonces } \alpha = \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}.$$

10. Sean $l_1: y = 2x + 5$, $l_2: y = -\frac{1}{2}x$, $l_3: y = 12x - 25$: l_1 y l_2 son rectas perpendiculares, entonces el triángulo es rectángulo con ángulo recto en $A = l_1 \cap l_2$.

Para encontrar A : $2x + 5 = -\frac{1}{2}x \Rightarrow 4x + 10 = -x \Rightarrow 5x = -10 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow A = (-2, 1)$.

Sea $B = l_1 \cap l_3$, entonces $2x + 5 = 12x - 25 \Rightarrow -10x = -30 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = 11 \Rightarrow B = (3, 11)$.

Sea $C = l_2 \cap l_3$, entonces $-\frac{1}{2}x = 12x - 25 \Rightarrow -x = 24x - 50 \Rightarrow -25x = -50 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow C = (2, -1)$. El triángulo tiene vértices:

$$A = (-2, 1) \quad B = (3, 11) \quad C = (2, -1).$$

$$d(A, B) = \sqrt{(3 - (-2))^2 + (11 - 1)^2} = \sqrt{125}$$

$$d(A, C) = \sqrt{(2 - (-2))^2 + (-1 - 1)^2} = \sqrt{20}$$

$$d(B, C) = \sqrt{(2 - 3)^2 + (-1 - 11)^2} = \sqrt{145}.$$

Los catetos miden $\sqrt{125}$ y $\sqrt{20}$. La hipotenusa mide $\sqrt{145}$.

Sea α el ángulo opuesto al cateto de medida $\sqrt{125}$ y β el ángulo opuesto al cateto de medida $\sqrt{20}$. Se cumple que:

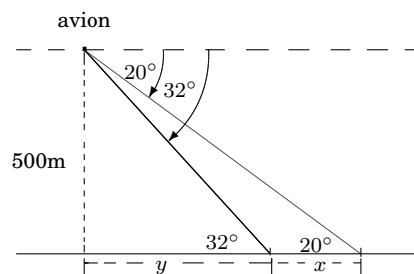
$$\tan \alpha = \frac{\sqrt{125}}{\sqrt{20}} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1} \frac{\sqrt{125}}{\sqrt{20}} \Rightarrow \alpha = 68^\circ 11' 55''.$$

$$\tan \beta = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{125}} \Rightarrow \beta = \tan^{-1} \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{125}} \Rightarrow \beta = 21^\circ 48' 5''.$$

Los ángulos miden $68^\circ 11' 55''$, $21^\circ 48' 5''$ y 90° .

11. Sea x la altura del edificio, se cumple que $\tan(40^\circ 10') = \frac{x}{1000} \Rightarrow x = 1000 \tan(40^\circ 10') \Rightarrow x = 844,07$ pies. La altura es de 844,07 pies.

$$\begin{aligned}
 12. \quad \tan 32^\circ &= \frac{500}{y} \Rightarrow y = \frac{500}{\tan 32^\circ} \\
 \tan 20^\circ &= \frac{500}{x+y} \Rightarrow x+y = \frac{500}{\tan 20^\circ} \Rightarrow \\
 x &= \frac{500}{\tan 20^\circ} - y \Rightarrow x = \frac{500}{\tan 20^\circ} - \frac{500}{\tan 32^\circ} \Rightarrow \\
 x &= 573,57m. \text{ La longitud es } 573,57m.
 \end{aligned}$$



13. La recta que contiene el lado terminal tiene la forma $y = mx$ pues pasa por $(0,0)$. Además es perpendicular a $y = \frac{3}{4}x - \frac{\pi}{4}$, entonces $m = -\frac{4}{3}$. La recta es $y = -\frac{4}{3}x$ y como el ángulo está en el IV cuadrante, si $x = 3$ se tiene el punto $P(3, -4)$ en el lado terminal, con $c = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$.

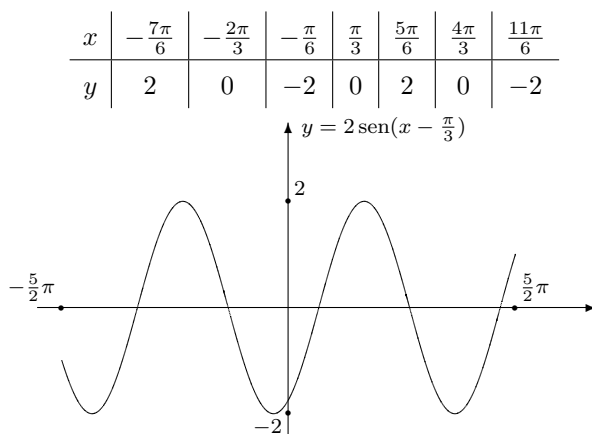
$$\begin{aligned}
 \sin \alpha &= -\frac{4}{5} & \cos \alpha &= \frac{3}{5} & \tan \alpha &= -\frac{4}{3} \\
 \csc \alpha &= -\frac{5}{4} & \sec \alpha &= \frac{5}{3} & \cot \alpha &= -\frac{3}{4}.
 \end{aligned}$$

14. La recta $y = mx$ que contiene el lado terminal, es paralela a la recta $y = \frac{15}{8}x - \frac{1}{8}$, entonces la ecuación de la recta es $y = \frac{15}{8}x$ y un punto en el tercer cuadrante es $(-8, 15)$, donde $c = \sqrt{(-8)^2 + (15)^2} = 17$. Así tenemos:

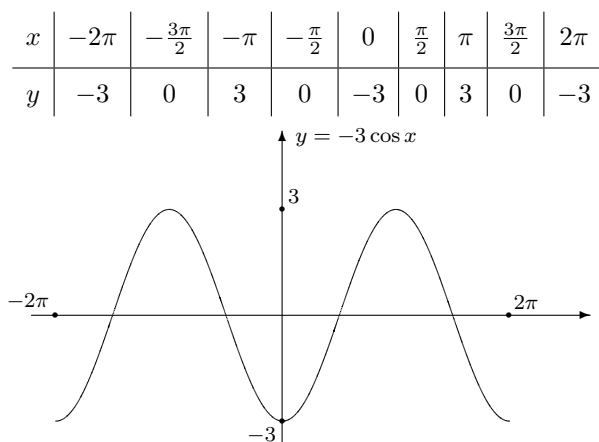
$$\begin{aligned}
 \sin \alpha &= -\frac{15}{17} & \csc \alpha &= -\frac{17}{15} & \cos \alpha &= -\frac{8}{17} \\
 \sec \alpha &= -\frac{17}{8} & \tan \alpha &= \frac{15}{8} & \cot \alpha &= \frac{8}{15}.
 \end{aligned}$$

15. Represente gráficamente cada función. Indique el ámbito, amplitud, período y corrimiento de fase en cada caso. Recuerde que si el argumento de la función se escribe de la forma $\omega x + \phi_o$, el corrimiento de fase es $\frac{\phi_o}{\omega}$.

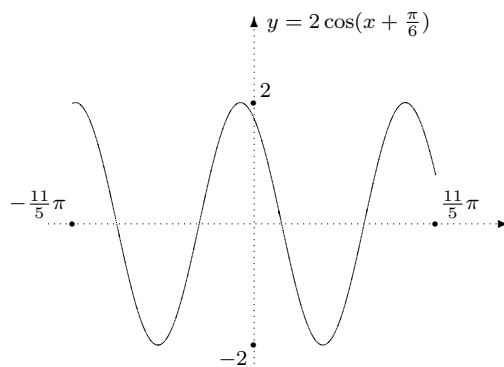
a) $y = 2 \sin(x - \frac{\pi}{3})$, ámbito = $[-2, 2]$, amplitud = 2, periodo 2π , corrimiento $-\frac{\pi}{3}$.



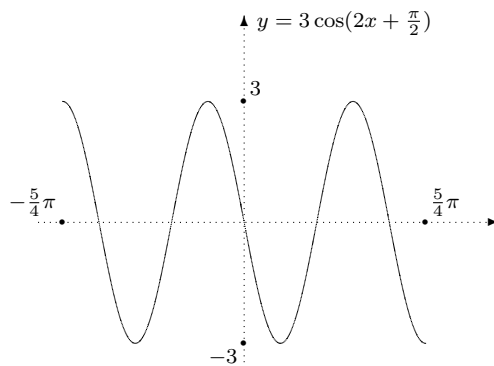
b) $y = -3 \cos x$, ámbito= $[-3, 3]$, amplitud= 3, periodo 2π , corrimiento 0.



c) $y = -2 \cos(x + \frac{\pi}{6})$, ámbito= $[-2, 2]$, amplitud= 2, periodo 2π , corrimiento $\frac{\pi}{6}$.



d) $y = 3 \cos(2x + \frac{\pi}{2})$, ámbito= $[-3, 3]$, amplitud= 3, periodo π , corrimiento $\frac{\pi}{4}$.

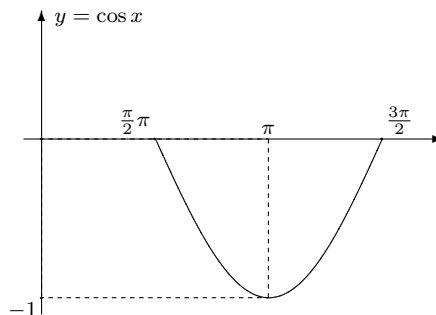


16. $y = \cos x$

a) ámbito $f(x): [-1, 0]$

b) creciente $]\pi, \frac{3\pi}{2}[$

c) decreciente $]\frac{\pi}{2}, \pi[$.



17. Identidades

a) $(\tan x - \cot x) \tan(2x) = -2$.

$$(\tan x - \cot x) \tan(2x) = (\tan x - \cot x) \left(\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \right) = \frac{2 \tan^2 x - 2 \tan x \cdot \cot x}{1 - \tan^2 x} =$$

$$\frac{2 \tan^2 x - 2}{1 - \tan^2 x} = -\frac{2(1 - \tan^2 x)}{1 - \tan^2 x} = -2.$$

b) $\frac{2 \cot(2x)}{\cos x - \sin x} = \csc x + \sec x$

$$\frac{2 \cot(2x)}{\cos x - \sin x} \cdot \frac{\cos x + \sin x}{\cos x + \sin x} = \frac{2 \cot 2x (\cos x + \sin x)}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{2 \left[\frac{1 - \tan^2 x}{2 \tan x} \right] [\cos x + \sin x]}{\cos^2 x - \sin^2 x} =$$

$$\frac{\frac{2 - \sec^2 x}{\tan x} [\cos x + \sin x]}{\cos^2 x - 1 + \cos^2 x} = \frac{\frac{2 \cos^2 x - 1}{\cos^2 x} \cdot \frac{\cos x}{\cos x} [\cos x + \sin x]}{2 \cos^2 x - 1} = \frac{[2 \cos^2 x - 1] [\cos x + \sin x]}{\cos x \sin x (2 \cos^2 x - 1)} =$$

$$\frac{\cos x}{\cos x \sin x} + \frac{\sin x}{\cos x \sin x} = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = \csc x + \sec x.$$

c) $\frac{1}{1 - \sin x} + \frac{1}{1 + \sin x} = 2 + 2 \tan^2 x$

$$\frac{1}{1 - \sin x} + \frac{1}{1 + \sin x} = \frac{1 + \sin x + 1 - \sin x}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} = \frac{2}{(1 - \sin^2 x)} = \frac{2}{\cos^2 x} = 2 \cdot \sec^2 x =$$

$$2(1 + \tan^2 x) = 2 + 2 \tan^2 x.$$

d) $\sin^2 x + \sin^2(90^\circ - x) = 1$

$$\sin^2 x + \sin^2(90^\circ - x) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

e) $\frac{\cot^2 x}{\csc x + 1} = \frac{1 - \sin x}{\sin x}$

$$\frac{\cot^2 x}{\csc x + 1} = \frac{\csc^2 x - 1}{\csc x + 1} = \frac{(\csc x - 1)(\csc x + 1)}{\csc x + 1} = \csc x - 1 = \frac{1}{\sin x} - 1 = \frac{1 - \sin x}{\sin x}.$$

f) $\sec x - \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \tan x$

$$\sec x - \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{\sec x(1 + \sin x) - \cos x}{1 + \sin x} = \frac{\sec x + \tan x - \cos x}{1 + \sin x} = \frac{\frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x} - \cos x}{1 + \sin x} =$$

$$\frac{\frac{1 + \sin x - \cos^2 x}{\cos x}}{1 + \sin x} = \frac{1 + \sin x - \cos^2 x}{\cos x(1 + \sin x)} = \frac{1 + \sin x - (1 - \sin^2 x)}{\cos x(1 + \sin x)} = \frac{\sin x + \sin^2 x}{\cos x(1 + \sin x)} =$$

$$\frac{\sin x(1 + \sin x)}{\cos x(1 + \sin x)} = \tan x.$$

$$\begin{aligned}
 g) \quad & \frac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x} + \frac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x} = 2 \sec x. \\
 & \frac{\cos^2 x + (1 - \operatorname{sen} x)(1 - \operatorname{sen} x)}{(1 - \operatorname{sen} x)(\cos x)} = \frac{\cos^2 x + 1 - 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x}{(1 - \operatorname{sen} x)(\cos x)} = \frac{1 + 1 - 2 \operatorname{sen} x}{(1 - \operatorname{sen} x)(\cos x)} = \\
 & \frac{2 - 2 \operatorname{sen} x}{(1 - \operatorname{sen} x) \cos x} = \frac{2(1 - \operatorname{sen} x)}{(1 - \operatorname{sen} x)(\cos x)} = 2 \sec x. \\
 h) \quad & \frac{1 + \cos(2x)}{\operatorname{sen}(2x)} = \frac{1 + [\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x]}{2 \operatorname{sen} x \cos x} = \frac{1 + \cos^2 x - 1 + \operatorname{sen}^2 x}{2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x} = \frac{2 \cos^2 x}{2 \operatorname{sen} x \cos x} = \\
 & \frac{(\cos x)(\cos x)}{\operatorname{sen} x \cos x} = \cot x. \\
 i) \quad & \frac{\tan x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^3 x} = \frac{\sec x}{1 + \cos x}. \\
 & \frac{\tan x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^3 x} = \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^3 x} = \frac{\frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \cos x}{\cos x}}{\operatorname{sen}^3 x} = \frac{\operatorname{sen} x \left(\frac{1 - \cos x}{\cos x} \right)}{\operatorname{sen}^3 x} = \\
 & \frac{\operatorname{sen} x (1 - \cos x)}{\operatorname{sen}^3 x \cdot \cos x} = \frac{(1 - \cos x)}{\operatorname{sen}^2 x \cos x} = \frac{1 - \cos x}{(1 - \cos^2 x) \cos x} = \frac{1 - \cos x}{(1 - \cos x)(1 + \cos x) \cos x} = \frac{\sec x}{1 + \cos x}
 \end{aligned}$$

$$18. \quad x = 5 \operatorname{sen} u$$

$$\begin{aligned}
 a) \quad & \sqrt{\frac{25 - x^2}{x^2}} = \sqrt{\frac{25 - (5 \operatorname{sen} u)^2}{(5 \operatorname{sen} u)^2}} = \sqrt{\frac{25 - 25 \operatorname{sen}^2 u}{25 \operatorname{sen}^2 u}} = \sqrt{\frac{25(1 - \operatorname{sen}^2 u)}{25 \operatorname{sen}^2 u}} = \sqrt{\frac{\cos^2 u}{\operatorname{sen}^2 u}} = \sqrt{\cot^2 u} = \\
 & \cot u. \\
 b) \quad & x \sqrt{25 - x^2} = 5 \operatorname{sen} u \sqrt{25 - (5 \operatorname{sen} u)^2} = 5 \operatorname{sen} u \sqrt{25 - 25 \operatorname{sen}^2 u} = 5 \operatorname{sen} u \sqrt{25(1 - \operatorname{sen}^2 u)} = \\
 & 25 \operatorname{sen} u \sqrt{\cos^2 u} = 25 \operatorname{sen} u \cdot \cos u.
 \end{aligned}$$

19. Resolver las siguientes ecuaciones:

$$a) \quad 2 \operatorname{sen}^2 x - 3 \cos x - 3 = 2(1 - \cos^2 x) - 3 \cos x - 3 = 2 - 2 \cos^2 x - 3 \cos x - 3 = -2 \cos^2 x - 3 \cos x - 1 = \\
 -(2 \cos^2 x + 3 \cos x + 1) = 0.$$

$$\text{Sea } u = \cos x \implies 2u^2 + 3u + 1 = 0 \implies u = -\frac{1}{2} \text{ o } u = -1.$$

$$\text{Si } u = -\frac{1}{2} \implies \cos x = -\frac{1}{2} \implies x = \frac{2\pi}{3} \text{ o } x = \frac{4\pi}{3}.$$

$$\text{Si } u = -1 \implies \cos x = -1 \implies x = \pi.$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} / x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$b) \quad 2 \operatorname{sen}^2 x + 3\sqrt{3} \cos x - 5 = 0. \text{ Se tiene que } \operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x, \text{ entonces sustituyendo tenemos:}$$

$$2(1 - \cos^2 x) + 3\sqrt{3} \cos x - 5 = 2 - 2 \cos^2 x + 3\sqrt{3} \cos x - 5 = -2 \cos^2 x + 3\sqrt{3} \cos x - 3 = 0.$$

$$\text{Sea } u = \cos x \implies -2u^2 + 3\sqrt{3}u - 3 = 0 \implies u = \sqrt{3} \text{ o } u = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Si } u = \sqrt{3} \implies \cos x = \sqrt{3} \text{ no tiene solución.}$$

$$\text{Si } u = \frac{\sqrt{3}}{2} \implies \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \implies x = \frac{\pi}{6} \text{ o } x = \frac{11\pi}{6}.$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} / x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$c) \quad \tan^2 x + 2 \tan x - 8 = (\tan x + 4)(\tan x - 2) = 0 \implies \tan x = -4 \implies x = \tan^{-1}(-4) \implies x =$$

$$-1,32581 \text{ o } \tan x = 2 \implies x = \tan^{-1}(2) \implies x = 1,10714.$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} / x = -1,32581 + k\pi, x = 1,10714 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$d) \quad 2\cos^2 x - \sin(2x) = 2\cos^2 x - 2\sin x \cdot \cos x = 2\cos x(\cos x - \sin x) = 0 \implies \cos x = 0 \text{ o } \cos x = \sin x.$$

$$\text{Si } \cos x = 0 \implies x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Si } \cos x = \sin x \implies \tan x = 1 \implies x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} / x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$e) \quad 2\sin^2 x + \sqrt{3}\cos x + 1 = 2(1 - \cos^2 x) + \sqrt{3}\cos x + 1 = 2 - 2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x + 1 = -2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x + 3 = (2\cos x + \sqrt{3})(\cos x - \sqrt{3}) = 0 \implies \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \implies x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ o } x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

La ecuación $\cos x = \sqrt{3}$ no tiene solución.

$$S = \{x \in \mathbb{R} / x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$f) \quad (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 2 \implies \sin^2 x + 2\sin x \cos x + 1 - \sin^2 x = 2 \implies 2\sin x \cos x = 2 - 1 \implies \sin 2x = 1 \implies 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \implies x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} / x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$g) \quad \cos 2x + \cos x = \cos^2 x - \sin^2 x + \cos x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) + \cos x = \cos^2 x - 1 + \cos^2 x + \cos x = 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0.$$

$$\text{Sea } u = \cos x \implies 2u^2 + u + 1 = 0 \implies u = \frac{1}{2} \text{ o } u = -1.$$

$$\text{Si } u = \frac{1}{2} \implies \cos x = \frac{1}{2} \implies x = \frac{\pi}{3} \text{ o } x = \frac{5\pi}{3}.$$

$$\text{Si } u = -1 \implies \cos x = -1 \implies x = \pi.$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} / x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$h) \quad \tan^2 x \cos x = \cos x \implies \tan^2 x \cos x - \cos x = \cos x(\tan^2 x - 1) = 0 \implies \tan^2 x = 1 \text{ o } \cos x = 0 \implies \tan x = 1 \text{ o } \tan x = -1 \text{ o } \cos x = 0.$$

$$\text{Si } \cos x = 0 \implies x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Si } \tan x = 1 \implies x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Si } \tan x = -1 \implies x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} / x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$i) \quad \sin 2x = \sin x \implies 2\sin x \cos x - \sin x = \sin x(2\cos x - 1) = 0 \iff \sin x = 0 \text{ o } \cos x = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Si } \sin x = 0 \implies x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Si } \cos x = \frac{1}{2} \implies x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ o } x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi.$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} / x = k\pi, x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$j) \quad 2 \sin^2 x = \sqrt{2} \cos x \implies 2 - 2 \cos^2 x = \sqrt{2} \cos x \implies 2 \cos^2 x + \sqrt{2} \cos x - 2 = 0 \implies \cos x = \frac{-\sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}}{4} = -\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

La ecuación $\cos x = -\sqrt{2}$ no tiene solución.

$$\text{Si } \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \implies x = \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \text{ Nota: Recordemos que } -\frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}.$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} / x = \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

20. Sea $\tan \beta = -2,4$ y $\sin \alpha = 0,6$, con α y β ángulos situados en el *IV* y *II* cuadrante respectivamente.

Determine el valor exacto de:

a) $\sin(\alpha + \beta)$.

b) $\cos(\alpha + \beta)$.

c) $\tan(2\alpha)$.

d) $\sin(2\alpha)$.

e) El cuadrante donde se localiza $\alpha + \beta$.

Solución $\tan \beta = -2,4 = -\frac{24}{10} = -\frac{12}{5}$, $\sin \beta = -\frac{12}{13}$ y $\cos \beta = \frac{5}{13}$ (β en el *IV* cuadrante).

$$\sin \alpha = 0,6 \implies \sin \alpha = \frac{3}{5} \text{ (}\alpha \text{ en el II cuadrante)} \cos \alpha = -\frac{4}{5} \text{ y } \tan \alpha = -\frac{3}{4}.$$

	α	β
seno	$\frac{3}{5}$	$-\frac{12}{13}$
coseno	$-\frac{4}{5}$	$\frac{5}{13}$
tangente	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{12}{5}$

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{13} - \frac{12}{13} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{15 + 48}{65} = \frac{63}{65}.$$

$$\cos(\alpha + \beta) = -\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13} - \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{12}{13}\right) = -\frac{20}{65} + \frac{36}{65} = \frac{16}{65}.$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)}{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^2} = -\frac{24}{7}.$$

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \left(\frac{3}{5}\right) \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}.$$

Dado que $\sin(\alpha + \beta) > 0$ y $\cos(\alpha + \beta) > 0$, entonces $\alpha + \beta$ está en el *I* cuadrante.

21. Si α está en el *II* cuadrante y $\sin \alpha = \frac{5}{13}$, entonces $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$ y $\tan \alpha = -\frac{5}{12}$.

Si β está en el *III* cuadrante y $\sin \beta = -\frac{8}{17}$, entonces $\cos \beta = -\frac{15}{17}$ y $\tan \beta = \frac{8}{15}$.

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \frac{5}{13} \cdot \left(-\frac{15}{17}\right) + \left(-\frac{8}{17}\right) \cdot \left(-\frac{12}{13}\right) = \frac{21}{221}.$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \left(-\frac{12}{13}\right) \cdot \left(-\frac{15}{17}\right) - \left(\frac{5}{13}\right) \cdot \left(-\frac{8}{17}\right) = \frac{220}{221}.$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{-\frac{5}{12} + \frac{8}{15}}{1 - \frac{5}{12} \cdot \frac{8}{15}} = \frac{21}{220}.$$

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \frac{5}{13} \cdot \left(-\frac{15}{17}\right) - \left(-\frac{8}{17}\right) \cdot \left(-\frac{12}{13}\right) = -\frac{171}{221}.$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \left(-\frac{12}{13}\right) \cdot \left(-\frac{15}{17}\right) + \left(-\frac{8}{17}\right) \cdot \left(\frac{5}{13}\right) = \frac{140}{221}.$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{-\frac{5}{12} - \frac{8}{15}}{1 - \frac{5}{12} \cdot \frac{8}{15}} = -\frac{171}{140}.$$

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{5}{13} \cdot \left(-\frac{12}{13}\right) = -\frac{120}{169}.$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = \left(-\frac{12}{13}\right)^2 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{119}{169}.$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2 \cdot \left(-\frac{5}{12}\right)}{1 - \left(-\frac{5}{12}\right)^2} = -\frac{120}{119}.$$

El ángulo $\alpha + \beta$ está en el I cuadrante, pues $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) > 0$ y $\cos(\alpha + \beta) > 0$.

El ángulo $\alpha - \beta$ está en el IV cuadrante, pues $\operatorname{sen}(\alpha - \beta) < 0$ y $\cos(\alpha - \beta) > 0$.

El ángulo 2α está en el IV cuadrante, pues $\operatorname{sen} 2\alpha < 0$ y $\cos 2\alpha > 0$.

22. Si α está en el II cuadrante y $\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$, entonces $\cos \alpha = -\frac{1}{4}$ y $\tan \alpha = -\sqrt{15}$.

Si β está en el I cuadrante y $\operatorname{sen} \beta = \frac{2}{\sqrt{29}}$, entonces $\cos \beta = \frac{5}{\sqrt{29}}$ y $\tan \beta = \frac{2}{5}$.

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{15}}{4} \cdot \frac{5}{\sqrt{29}} + \frac{2}{\sqrt{29}} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{5\sqrt{435}}{116} - \frac{\sqrt{29}}{58}.$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{5}{\sqrt{29}} - \frac{2}{\sqrt{29}} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = -\frac{5\sqrt{29}}{116} - \frac{\sqrt{435}}{58}.$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{-\sqrt{15} + \frac{2}{5}}{1 - \left(-\sqrt{15}\right) \cdot \frac{2}{5}} = \frac{29\sqrt{15}}{35} - \frac{32}{7}.$$

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \frac{\sqrt{15}}{4} \cdot \frac{5}{\sqrt{29}} - \frac{2}{\sqrt{29}} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{29}}{58} + \frac{5\sqrt{435}}{116}.$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{5}{\sqrt{29}} + \frac{2}{\sqrt{29}} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{\sqrt{435}}{58} - \frac{5\sqrt{29}}{116}.$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{-\sqrt{15} - \frac{2}{5}}{1 + \left(-\sqrt{15}\right) \cdot \frac{2}{5}} = \frac{29\sqrt{15}}{35} + \frac{32}{7}.$$

$$\operatorname{sen}(2\alpha) = 2 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{\sqrt{15}}{8}.$$

$$\cos(2\alpha) = \left(-\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2 = -\frac{7}{8}.$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2(-\sqrt{15})}{1 - (-\sqrt{15})^2} = \frac{\sqrt{15}}{7}.$$

23. Encuentre el valor exacto de:

a) $\arccos\left(\sin \frac{3\pi}{4}\right) = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, pues $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) $\sin\left[\arcsin \frac{5}{6} + \arccos \frac{5}{9}\right] = \sin \arcsin \frac{5}{6} \cos \arccos \frac{5}{9} + \cos \arcsin \frac{5}{6} \sin \arccos \frac{5}{9} = \frac{5}{6} \frac{5}{9} + \sqrt{1 - \sin^2 \arcsin \frac{5}{6}} \sqrt{1 - \cos^2 \arccos \frac{5}{9}} = \frac{5}{6} \frac{5}{9} + \sqrt{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{5}{9}\right)^2} = \frac{5}{6} \frac{5}{9} + \frac{\sqrt{11}}{6} \frac{2\sqrt{14}}{9} = \frac{25}{54} + \frac{\sqrt{154}}{27}.$

c) $\sin\left[\arccos\left[-\frac{1}{2}\right] + \arctan(\sqrt{3})\right] = \sin\left[\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = \sin \pi = 0.$

24. Encontrar en cada caso una expresión algebraica en x .

a) $\tan\left[\arcsin \frac{x}{2}\right].$

Sea $\alpha = \arcsin \frac{x}{2} \implies \sin \alpha = \frac{x}{2}$, entonces

$$\tan \arcsin \frac{x}{2} = \tan \alpha = \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}.$$

b) $\cos(2 \arcsin x).$

Sea $\alpha = 2 \arcsin x \implies x = \sin \frac{\alpha}{2}$, entonces

$$\cos(2 \arcsin x) = \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 = 2(1-x^2) - 1 = 1 - 2x^2.$$

c) $\sin(2 \arccos x).$

Sea $\alpha = 2 \arccos x \implies x = \cos \frac{\alpha}{2}$, entonces

$$\sin(2 \arccos x) = \sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 2x\sqrt{1-x^2}.$$

d) $\sin(2 \arctan x).$

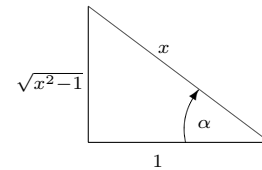
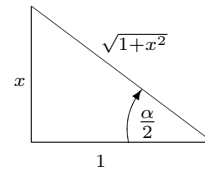
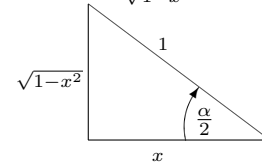
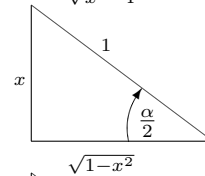
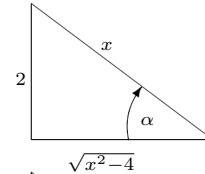
Sea $\alpha = 2 \arctan x \implies x = \tan \frac{\alpha}{2}$, entonces

$$\begin{aligned} \sin(2 \arctan x) &= \sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \\ 2 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} &= \frac{2x}{1+x^2}. \end{aligned}$$

e) $\tan(\operatorname{arcsec} x).$

Sea $\alpha = \operatorname{arcsec} x \implies x = \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$, entonces

$$\tan(\operatorname{arcsec} x) = \tan \alpha = \sqrt{x^2 - 1}.$$



Soluciones de exámenes**UNIVERSIDAD DE COSTA RICA.****FACULTAD DE CIENCIAS.****ESCUELA DE MATEMÁTICA.****MATERIA: MA-0125.****MATEMÁTICA ELEMENTAL.****I ciclo de 1999****I Examen Parcial.****Duración: 3 Horas.****10 de abril de 1999****85 puntos**

I PARTE. Conteste las siguientes preguntas en esta hoja de examen. Presente los cálculos necesarios.

1. Calcule el valor numérico de $P(x) = -x^2 + \sqrt{2}x + 1$ en $x = -3\sqrt{2} + 2$.
2. Factorice en forma completa el polinomio $P(x) = 64x^6 - 1$.
3. Simplifique el número $\sqrt{(-6 + 2\sqrt{3})^2 + (-\sqrt{3} - 2)^2}$ y exprese el resultado en notación radical.
4. Racionalice y simplifique la expresión $\frac{x^2 + 12x + 20}{\sqrt{x + 11} - 1}$.
5. Encuentre la solución de la ecuación $(x - 1)^5 - (x - 1)^4 = 0$.
6. Encuentre todos los números reales que satisfacen: $|x - 4| = 3 - 2x$.
7. Encuentre la expresión fraccionaria más simple de $3, \overline{21}$.
8. Exprese $A \cap B$ en notación de intervalo si $A = \left] \sqrt{3}, \frac{39}{5} \right[\cup \left[\frac{5\pi}{2}, 10 \right[$ y $B = [-1, \sqrt[5]{30}] \cup \left[\frac{39}{5}, 8 \right[$.
9. Resuelva la ecuación $[x^3 - 1]^2 + 29[x^3 - 1] + 28 = 0$.
10. Encuentre el residuo que se obtiene de efectuar $(x^{23} + 8x^{20} + 6x^2 - 7)/(x + 2)$.

II PARTE. Desarrollo. Las siguientes preguntas las debe contestar en su cuaderno de examen en forma completa.

1. Considere el polinomio $P(x) = -3x^3 + 8x^2 + 147x - 392$.
 - a) Encuentre el cociente y el residuo de dividir $P(x)$ entre $Q(x)$, si $Q(x) = 3x^2 + 13x - 56$.
 - b) Resuelva la ecuación $P(x) = 0$.
 - c) Factorice el máximo $P(x)$.
2. Resuelva en $\mathbb{R}$ la ecuación $\sqrt{5 - x} = 5 - \sqrt{-x}$.
3. Encuentre todos los números reales que son solución de $\frac{3x}{x^2 - 4} + \frac{6}{x + 2} = 1$.

Solución I Examen Parcial I ciclo de 1999.

I PARTE. Conteste las siguientes preguntas en esta hoja de examen. Presente los cálculos necesarios.

1. Calcule el valor numérico de $P(x) = -x^2 + \sqrt{2}x + 1$ en $x = -3\sqrt{2} + 2$.

Solución $P(-3\sqrt{2} + 2) = -(-3\sqrt{2} + 2)^2 + \sqrt{2}(-3\sqrt{2} + 2) + 1 =$
 $-[18 - 12\sqrt{2} + 4] + (-6 + 2\sqrt{2}) + 1 = -22 + 12\sqrt{2} - 6 + 2\sqrt{2} + 1 = 14\sqrt{2} - 27.$

2. Factorice en forma completa el polinomio $P(x) = 64x^6 - 1$.

Solución $P(x) = (2x)^6 - 1 = (8x^3)^2 - 1^2 = (8x^3 - 1)(8x^3 + 1) =$
 $(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)(2x + 1)(4x^2 - 2x + 1).$

3. Simplifique el número $\sqrt{(-6 + 2\sqrt{3})^2 + (-\sqrt{3} - 2)^2}$ y exprese el resultado en notación radical.

Solución $\sqrt{(-6 + 2\sqrt{3})^2 + (-\sqrt{3} - 2)^2} = |-6 + 2\sqrt{3}| + (3 + 4\sqrt{3} + 4) =$
 $-(-6 + 2\sqrt{3}) + (3 + 4\sqrt{3} + 4) = 6 - 2\sqrt{3} + 7 + 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 13.$

4. Racionalice y simplifique la expresión $\frac{x^2 + 12x + 20}{\sqrt{x + 11} - 1}$.

Solución $\frac{x^2 + 12x + 20}{\sqrt{x + 11} - 1} = \frac{(x + 2)(x + 10)(\sqrt{x + 11} + 1)}{x + 11 - 1} = (x + 2)(\sqrt{x + 11} + 1).$

5. Encuentre la solución de la ecuación $(x - 1)^5 - (x - 1)^4 = 0$.

Solución $(x - 1)^4 [x - 1 - 1] = 0 \implies (x - 1)^4(x - 2) = 0 \implies x = 1, x = 2 \implies S = \{1, 2\}.$

6. Encuentre todos los números reales que satisfacen: $|x - 4| = 3 - 2x$.

Solución

I Caso: $x < 4 \implies -x + 4 = 3 - 2x \implies x = -1 \implies S_I = \{-1\}.$

II Caso: $x \geq 4 \implies x - 4 = 3 - 2x \implies 3x = 7 \implies x = \frac{7}{3} < 4 \implies S_{II} = \emptyset.$

$S = \{-1\}.$

7. Encuentre la expresión fraccionaria más simple de $3, \overline{21}$.

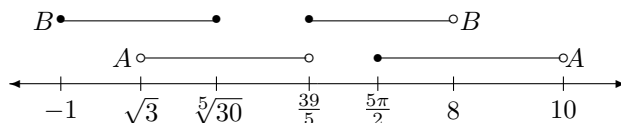
Solución $x = 3, \overline{21}$

Se tiene que $100x = 321, \overline{21} \implies 99x = 318 \implies x = \frac{318}{99} \implies x = \frac{106}{33}.$

Por lo tanto $3, \overline{21} = \frac{106}{33}.$

8. Exprese $A \cap B$ en notación de intervalo si

$$A = \left] \sqrt{3}, \frac{39}{5} \right[\cup \left[\frac{5\pi}{2}, 10 \right[\quad \text{y} \quad B = \left[-1, \sqrt[5]{30} \right] \cup \left[\frac{39}{5}, 8 \right[.$$

Solución

$$A \cap B =]\sqrt{3}, \sqrt[5]{30}] \cup \left[\frac{5\pi}{2}, 8\right[.$$

9. Resuelva la ecuación $[x^3 - 1]^2 + 29[x^3 - 1] + 28 = 0$.

Solución Sea $u = x^3 - 1 \Rightarrow u^2 + 29u + 28 = 0 \Rightarrow (u + 1)(u + 28) = 0 \Rightarrow u = -1, u = -28$.

Si $u = -1 \Rightarrow x^3 - 1 = -1 \Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$.

Si $u = -28 \Rightarrow x^3 - 1 = -28 \Rightarrow x^3 = -27 \Rightarrow x = -3$.

$S = \{-3, 0\}$.

10. Encuentre el residuo que se obtiene de efectuar $(x^{23} + 8x^{20} + 6x^2 - 7) \div (x + 2)$.

Solución Si $P(x) = x^{23} + 8x^{20} + 6x^2 - 7$, entonces el residuo es $P(-2)$.

$$P(-2) = (-2)^{23} + 8(-2)^{20} + 6(-2)^2 - 7 \Rightarrow P(-2) = -2^{23} + 2^3 \cdot 2^{20} + 24 - 7 \Rightarrow$$

$$P(-2) = -2^{23} + 2^{23} + 17 = 17. \text{ Por lo tanto el residuo es } 17.$$

II PARTE. Desarrollo. Las siguientes preguntas las debe contestar en su cuaderno de examen en forma completa.

1. Considere el polinomio $P(x) = -3x^3 + 8x^2 + 147x - 392$.

- a) Encuentre el cociente y el residuo de dividir $P(x)$ entre $Q(x)$, si $Q(x) = 3x^2 + 13x - 56$.

Solución $-3x^3 + 8x^2 + 147x - 392$	$3x^2 + 13x - 56$
$3x^3 + 13x^2 - 56x$	$-x + 7$
$21x^2 + 91x - 392$	
$-21x^2 - 91x + 392$	
0	

El cociente es $S(x) = -x + 7$ y el residuo es 0.

- b) Resuelva la ecuación $P(x) = 0$.

Solución Dado que el residuo de $P(x) \div Q(x)$ es 0, entonces $P(x) = S(x) \cdot Q(x)$.

$$P(x) = (3x^2 + 13x - 56)(-x + 7).$$

La ecuación $P(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 13x - 56 = 0$ ó $-x + 7 = 0 \Rightarrow x = -7, x = \frac{8}{3}, x = 7$.

$S = \{-7, \frac{8}{3}, 7\}$.

c) Factorice el máximo $P(x)$.

Solución Como $P(x)$ tiene tres ceros: $-7, \frac{8}{3}, 7$ entonces:

$$P(x) = 3(x+7)(x-\frac{8}{3})(x-7) \implies P(x) = 3(x+7)(3x-8)(x-7).$$

2. Resuelva en $\mathbb{R}$ la ecuación $\sqrt{5-x} = 5 - \sqrt{-x}$.

$$\begin{aligned} \textbf{Solución} \quad \sqrt{5-x} = 5 - \sqrt{-x} &\implies (\sqrt{5-x})^2 = (5 - \sqrt{-x})^2 \implies 5-x = 25 - 10\sqrt{-x} - x \implies \\ 10\sqrt{-x} = 20 &\implies \sqrt{-x} = 2 \implies (\sqrt{-x})^2 = 2^2 \implies -x = 4 \implies x = -4. \end{aligned}$$

$$\text{Prueba: } \sqrt{5-(-4)} = 5 - \sqrt{-(-4)} \implies \sqrt{9} = 5 - 2 \implies 3 = 3.$$

Por lo tanto: $S = \{-4\}$.

3. Encuentre todos los números reales que son solución de $\frac{3x}{x^2-4} + \frac{6}{x+2} = 1$.

$$\begin{aligned} \textbf{Solución} \quad \frac{3x}{x^2-4} + \frac{6}{x+2} = 1 &\implies \frac{3x}{(x-2)(x+2)} + \frac{6}{x+2} = 1 \implies \frac{3x+6(x-2)}{(x-2)(x+2)} = 1, \text{ con} \\ x \neq \pm 2 &\implies 3x+6(x-2) = (x-2)(x+2) \implies 3x+6x-12 = x^2-4 \implies 0 = x^2-9x+8 \implies \\ 0 = (x-1)(x-8) &\implies x = 1, x = 8. \text{ Por lo tanto } S = \{1, 8\}. \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA.
FACULTAD DE CIENCIAS.
ESCUELA DE MATEMÁTICA.
MATERIA: MA-0125.

II ciclo de 1999
II Examen Parcial.
Duración: 3 Horas.
MATEMÁTICA ELEMENTAL.

1. Considere la función $f(x) = -x^2 + 4x$.
 - a) Encuentre la ecuación de la recta ℓ_1 que corta a la función $f(x)$ en $x = -1$ y que pasa por el punto $\left(\frac{1}{3}, 3\right)$.
 - b) Encuentre la ecuación de la recta ℓ_2 que paralela a ℓ_1 y que pasa por el punto máximo de $f(x)$.
2. Determine el dominio máximo de $h(x)$ en cada caso.
 - a) $h(x) = \sqrt{0, 2^x - 25}$.
 - b) $h(x) = \frac{\sqrt{x-5}}{x^2 - 4x - 21}$.
3. Encuentre el conjunto solución de las siguientes ecuaciones.
 - a) $e^{-8x} - 10 = 3e^{-4x}$.
 - b) $2^{x+1} - 3^{x-2} = 0$.
4. Considere la función $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2} & \text{si } x \geq 1 \\ -x + 3 & \text{si } x < 1. \end{cases}$
 - a) Calcule $f(-1) + f(2)$.
 - b) Grafique la función $f(x)$.
 - c) Encuentre la función inversa $f^{-1}(x)$.
5. Considere las funciones $g(x) = -2(1-x)(5-x)$ y $h(x) = -x - 4$. Determinar:
 - a) El ámbito de la función $g(x)$.
 - b) Intervalos de crecimiento.
 - c) Los puntos de intersección de $g(x)$ con $h(x)$.
 - d) El ámbito de la función $f(x)$ definido por $f(x) = \begin{cases} h(x) & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 6] \\ g(x) & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 6]. \end{cases}$
6. Sea $g(x) = \log_{\left(\frac{1}{2}\right)}(x+1)$.
 - a) Encuentre el dominio de $g(x)$.
 - b) Grafique la función $g(x)$.
 - c) Determine la solución de $g(x) > 2$.

Solución II Examen Parcial II ciclo de 1999.

1. $f(x) = -x^2 + 4x$.

a) $f(-1) = -(-1)^2 + 4(-1) = -5$.

ℓ_1 pasa por $(-1, -5)$ y $(\frac{1}{3}, 3)$, $\ell_1 : m_1x + b_1$.

$$m_1 = \frac{-5 - 3}{-1 - \frac{1}{3}} = \frac{-8}{-\frac{4}{3}} = 6, m_1 = 6.$$

$b_1 = -5 - 6(-1) = 1$, $\ell_1 : y = 6x + 1$.

b) $\ell_2 : y = m_2x + b_2$, $\ell_2 \parallel \ell_1 \implies m_2 = m_1 = 6$ y $b_2 = y - m_2x$.

El punto máximo de $f(x) = -x^2 + 4x$ es el vértice.

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2(-1)} = 2, f(2) = -2^2 + 4 \cdot 2 = 4.$$

ℓ_2 pasa por $V=(2, 4)$, $b_2 = 4 - 6(2) = -8$, $\ell_2 : y = 6x - 8$.

2. Dominio máximo de $h(x)$.

a) $h(x) = \sqrt{0, 2^x - 25} \implies 0, 2^x - 25 > 0 \implies 0, 2^x > 25 \implies (\frac{1}{5})^x > 25 \implies 5^{-x} > 5^2 \implies -x > 2 \implies x < -2$.

Dominio máximo: $] -\infty, -2[$.

b) $h(x) = \frac{\sqrt{x-5}}{x^2-4x-21}$.

Las condiciones que se deben cumplir son: $x - 5 > 0 \implies x > 5$ y $x^2 - 4x - 21 \neq 0 \implies x \neq 7$, $x \neq -3$.

Dominio máximo: $] 5, \infty [\setminus \{7\}$.

3. Conjunto solución.

a) $e^{-8x} - 10 = 3e^{-4x} \implies e^{-8x} - 3e^{-4x} - 10 = 0$.

Sea $u = e^{-4x} \implies u^2 - 3u - 10 = 0 \implies u = 5, u = -2 \implies e^{-4x} = 5$ y $e^{-4x} = -2$.

$$e^{-4x} = 5 \implies -4x = \ln 5 \implies x = -\frac{\ln 5}{4}.$$

$e^{-4x} = -2$ no tiene solución.

$S = \{-\frac{\ln 5}{4}\}$.

b) $2^{x+1} - 3^{x-2} = 0 \implies 2^{x+1} = 3^{x-2} \implies \log(2^{x+1}) = \log(3^{x-2}) \implies (x+1)\log 2 = (x-2)\log 3 \implies x\log 2 + \log 2 = x\log 3 - 2\log 3 \implies x(\log 2 - \log 3) = -\log 2 - 2\log 3 \implies x = \frac{-\log 2 - 2\log 3}{\log 2 - \log 3} = 7,1285\dots$

$S = \{\frac{-\log 2 - 2\log 3}{\log 2 - \log 3}\}$.

$$4. \quad f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2} & \text{si } x \geq 1 \\ -x + 3 & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

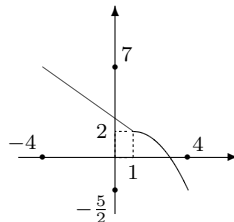
$$a) \quad f(-1) = -(-1) + 3 \Rightarrow f(-1) = 4. \quad f(2) = -\frac{1}{2} \cdot 2^2 + 2 + \frac{3}{2} \Rightarrow f(2) = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Así, } f(-1) + f(2) = 4 + \frac{3}{2} = \frac{11}{2}.$$

$$b) \quad y = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}.$$

Vértice: $V=(1, 2)$. Pasa por $(3, 0)$, $(4, -\frac{5}{2})$.

$y = -x + 3$ pasa por $(-2, 5)$, $(-1, 4)$, $(0, 3)$.



c) Si $x \geq 1$, hay que despejar x en $-\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2} = y$.

Se debe resolver $-\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2} - y = 0$, ($a = -\frac{1}{2}$, $b = 1$, $c = \frac{3}{2} - y$).

$$\Delta = (1)^2 - 4(-\frac{1}{2})(\frac{3}{2} - y) = 4 - 2y, \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{4 - 2y}.$$

$$\text{Así, } x = \frac{-1 \pm \sqrt{4 - 2y}}{2(-\frac{1}{2})} = 1 \pm \sqrt{4 - 2y}.$$

Dado que $x \geq 1$ y $\sqrt{4 - 2y} \geq 0$, entonces $x = 1 + \sqrt{4 - 2y}$.

Por otra parte, si $x < 1$ al despejar x en $y = -x + 3$ se obtiene $x = -y + 3$.

Nótese además que $x \geq 1 \Rightarrow y \leq 2$ y $x < 1 \Rightarrow y > 2$.

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt{4 - 2y} & \text{si } x \leq 2 \\ -x + 3 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

5. Determinar:

$$a) \quad g(x) = -2(1 - x)(5 - x) = -2x^2 + 12x - 10.$$

El vértice es $V=(3, 8)$ y es cóncava hacia abajo, entonces el ámbito es $]-\infty, 8[$.

b) Es creciente en $]-\infty, 3[$ y decreciente en $]3, \infty[$

c) Resolver $h(x) = g(x)$.

$$-x - 4 = -2x^2 + 12x - 10 \Rightarrow 2x^2 - 13x + 6 = 0 \Rightarrow x = 6 \text{ y } x = \frac{1}{2}, \text{ entonces: } h(6) = g(6) = -10$$

$$\text{y } h(\frac{1}{2}) = g(\frac{1}{2}) = -\frac{9}{2}.$$

Los puntos de intersección son $(6, -10)$ y $(\frac{1}{2}, -\frac{9}{2})$.

$$d) \quad f(x) = \begin{cases} h(x) & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 6] \\ g(x) & \text{si } x \notin [\frac{1}{2}, 6]. \end{cases}$$

$$\text{Si } x \in [\frac{1}{2}, 6] \Rightarrow \frac{1}{2} < x < 6 \Rightarrow -6 < -x < -\frac{1}{2} \Rightarrow -6 - 4 < -x - 4 < -\frac{1}{2} - 4 \Rightarrow -10 < f(x) < -\frac{9}{2}.$$

$$\text{Si } x < \frac{1}{2} \Rightarrow -2x^2 + 12x - 10 < -\frac{9}{2}.$$

Si $x > 6 \implies -2x^2 + 12x - 10 < -10$.

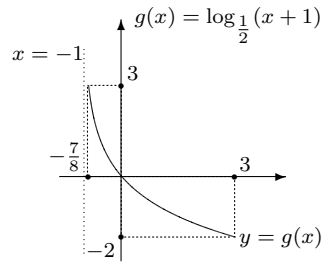
El ámbito es $]-\infty, -\frac{9}{2}]$.

6. $g(x) = \log_{(\frac{1}{2})}(x+1)$.

a) $x+1 > 0 \implies x > -1 \implies \text{Dominio: }]-1, \infty[$.

b)

x	3	1	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{7}{8}$
y	-2	-1	0	1	2	3



c) $g(x) > 2$.

De la gráfica se puede ver que $g(x) > 2$ si $x < -\frac{3}{4}$ y $x \in \text{Dominio} =]-1, \infty[$.

También se puede resolver: $\log_{(\frac{1}{2})}(x+1) > 2 \implies x+1 < (\frac{1}{2})^2 \implies x < (\frac{1}{2})^2 - 1 \implies x < -\frac{3}{4}$.

Dado que el dominio cumple $x > -1$, entonces $-1 < x < -\frac{3}{4}$.

$S =]-1, -\frac{3}{4}[$.

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

19 de junio de 1999
Duración 3 horas
Puntos: 70

MA-0125 MATEMÁTICA ELEMENTAL
—III Examen Parcial—I Ciclo 1999

1. Verifique la identidad $\sec x - \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \tan x$. (8pt)
2. Encuentre todos los números reales que son solución de la ecuación:
 $2 \cos^2 x + 3\sqrt{3} \sin x + 4 = 0$. (8pt)
3. Calcule el valor exacto de $\sin(3\alpha)$, si $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ y $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$. (8pt)
4. Represente gráficamente la curva $y = f(x)$, si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con
 $f(x) = 3 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$. (8pt)
5. Considere la función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con $g(x) = \sin x + \cos x$.
 - a) Verifique la identidad $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x)$. (5pt)
 - b) Encuentre el ámbito de la función $g(x)$. (3pt)
 - c) Encuentre todos los números que son solución de la ecuación $g(x) = -\sqrt{2}$. (6pt)
6. Encuentre una expresión algebraica en términos de x para $\sin\left[\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right]$. (6pt)
7. Sea β un ángulo en el tercer cuadrante cuyo lado terminal es perpendicular a la recta de la ecuación $5x + 12y - 1 = 0$. Calcule el valor de las seis funciones trigonométricas en β . (8pt)
8. Desde un avión que vuela sobre una autopista en línea recta a 500m de altura se miden en le mismo instante los ángulos de depresión a los extremos de un puente y resultan ser 20° y 32° . ¿Cuál es la longitud del puente? (10pt)

— Solución III Examen Parcial—I Ciclo 1999

1. Verifique la identidad $\sec x - \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \tan x$.

Solución $\sec x - \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{1}{\cos x} - \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{(1 + \sin x) - \cos x \cos x}{\cos x(1 + \sin x)} =$
 $\frac{1 + \sin x - \cos^2 x}{\cos x(1 + \sin x)} = \frac{1 + \sin x - (1 - \sin^2 x)}{\cos x(1 + \sin x)} = \frac{1 + \sin x - 1 + \sin^2 x}{\cos x(1 + \sin x)} = \frac{\sin x + \sin^2 x}{\cos x(1 + \sin x)} =$
 $\frac{\sin x(1 + \sin x)}{\cos x(1 + \sin x)} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x.$

2. Encuentre todos los números reales que son solución de la ecuación:

$$2 \cos^2 x + 3\sqrt{3} \sin x + 4 = 0.$$

Solución Como $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, la ecuación es $2(1 - \sin^2 x) + 3\sqrt{3} \sin x + 4 = 0$ y entonces $-2 \sin^2 x + 3\sqrt{3} \sin x + 6 = 0 \implies -2 \sin^2 x + 3\sqrt{3} \sin x + 6 = 0$.

Se sustituye $u = \sin x$ y se tiene una ecuación cuadrática: $-2u^2 + 3\sqrt{3}u + 6 = 0$.

El discriminante es $\Delta = (3\sqrt{3})^2 - 4(-2)(6) = 9(3) + 48 = 75$. Si $\Delta = 75$, entonces $\sqrt{\Delta} = \sqrt{75} = \sqrt{5^2 \cdot 3} = 5\sqrt{3}$ y se tienen dos soluciones: $u_1 = \frac{-3\sqrt{3} - 5\sqrt{3}}{-4} = \frac{-8\sqrt{3}}{-4} = 2\sqrt{3}$, $u_2 = \frac{-3\sqrt{3} + 5\sqrt{3}}{-4} = \frac{2\sqrt{3}}{-4} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Como $u = \sin x$, entonces $\sin x = 2\sqrt{3}$, esta ecuación no tiene solución pues $2\sqrt{3} > 1$ y $\sin x \in [-1, 1]$. También $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Como $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\sin x < 0$, si el ángulo está en el III ó IV cuadrante, entonces $x = \pi + \frac{\pi}{3}$ ó $x = 2\pi - \frac{\pi}{3}$ y $x = \frac{4\pi}{3}$ ó $x = \frac{5\pi}{3}$.

Como además seno tiene período 2π , se tiene:

$$S = \{x \in \mathbb{R} / x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \text{ ó } x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

3. Calcule el valor exacto de $\sin(3\alpha)$, si $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ y $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$.

Solución Se sabe que $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, por lo que $\sin^2 \alpha + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \implies \sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} \implies \sin^2 \alpha = \frac{16}{25}$. Como $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$, entonces α está en el IV cuadrante y $\sin \alpha < 0 \implies \sin \alpha = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$.

Para calcular $\sin(3\alpha)$ se utiliza $3\alpha = \alpha + 2\alpha$, de donde se tiene $\sin(\alpha + 2\alpha) = \sin \alpha \cos(2\alpha) + \sin(2\alpha) \cos \alpha$.

Queda por calcular $\cos(2\alpha)$ y $\sin(2\alpha)$.

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \left(\frac{3}{5}\right)^2 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = -\frac{7}{25},$$

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot -\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = -\frac{24}{25},$$

$$\text{entonces } \sin(3\alpha) = \sin(\alpha + 2\alpha) = -\frac{4}{5} \cdot -\frac{7}{25} + -\frac{24}{25} \cdot \frac{3}{5} = \frac{28}{125} - \frac{72}{125} = -\frac{44}{125},$$

$$\operatorname{sen}(3\alpha) = -\frac{44}{125}.$$

4. Represente gráficamente la curva $y = f(x)$, si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con $f(x) = 3 \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Solución Dominio: $\mathbb{R}$, Ámbito: $[-3, 3]$, pues $-1 \leq \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1 \Rightarrow -3 \leq 3 \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 3$,
 $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -3 \leq f(x) \leq 3, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) \in [-3, 3]$.

Amplitud: 3, Período: 2π .

Punto de la gráfica $y = f(x)$. $y = -3 \Rightarrow 3 \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -3 \Rightarrow \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -1 \Rightarrow$
 $x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = -\frac{5\pi}{6}$.

Pasa por $\left(-\frac{5\pi}{6}, -3\right)$. $y = 0$, $\operatorname{sen} u = 0$, si $u = -\pi, u = 0, u = \pi$, entonces $f(x) = 0 \Rightarrow$
 $3 \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow x + \frac{\pi}{3} = -\pi \Rightarrow x = -\pi - \frac{\pi}{3} = -\frac{4\pi}{3}$.

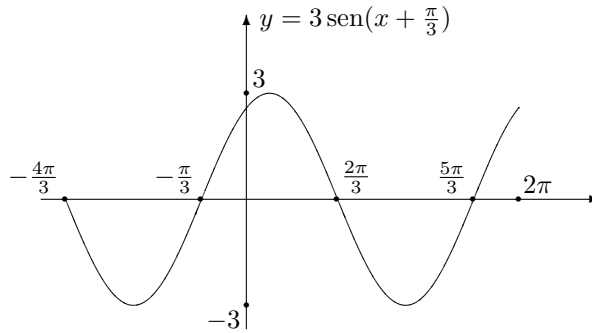
$x + \frac{\pi}{3} = 0 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3}, x + \frac{\pi}{3} = \pi \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$.

Pasa por los puntos $\left(-\frac{4\pi}{3}, 0\right), \left(-\frac{\pi}{3}, 0\right), \left(\frac{2\pi}{3}, 0\right)$,

$y = 3 \Rightarrow 3 \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 3 \Rightarrow \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Rightarrow x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$.

Pasa por el punto $\left(\frac{\pi}{6}, 3\right)$.

x	$-\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{8\pi}{3}$
$f(x)$	0	-3	0	3	0	-3	0	3	0



5. Considere la función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con $g(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$.

a) Verifique la identidad $\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\operatorname{sen} x + \cos x)$.

b) Encuentre el ámbito de la función $g(x)$.

c) Encuentre todos los números que son solución de la ecuación $g(x) = -\sqrt{2}$.

Solución

$$\text{a) } \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x).$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4} = (\sin x) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + (\cos x) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} [\sin x + \cos x].$$

$$\text{b) } g(x) = \sin x + \cos x. \text{ De acuerdo con a) } \frac{2}{\sqrt{2}} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x + \cos x \implies \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x + \cos x \implies g(x) = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

$$\text{Se cumple } -1 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \implies -\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2} \implies -\sqrt{2} \leq g(x) \leq \sqrt{2} \implies \text{Ámbito} = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}].$$

$$\text{c) } g(x) = -\sqrt{2}, \text{ como } g(x) = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \implies \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \implies \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \implies x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} \implies x = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}, \text{ por tanto:}$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} / x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

6. Encuentre una expresión algebraica en términos de x para $\sin\left[\frac{\pi}{2} - \arcsen x\right]$.

Solución Sea $\alpha = \arcsen x$, con $x \in [-1, 1]$, entonces $\sin \alpha = x$ y $\cos^2 \alpha = 1 - x^2$, $\cos \alpha = \sqrt{1 - x^2}$.

$$\text{Además, } \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arcsen x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \frac{\pi}{2} \cos \alpha - \sin \alpha \cos \frac{\pi}{2} = \sqrt{1 - x^2} - x \cdot 0 = \sqrt{1 - x^2}.$$

7. Sea β un ángulo en el tercer cuadrante cuyo lado terminal es perpendicular a la recta de la ecuación $5x + 12y - 1 = 0$. Calcule el valor de las seis funciones trigonométricas en β .

Solución $5x + 12y - 1 = 0 \iff y = -\frac{5}{12}x + \frac{1}{12}$. La recta que contiene al lado terminal de β pasa por $(0, 0)$ y tiene pendiente $m = \frac{12}{5}$, por lo que su ecuación es $y = \frac{12}{5}x$.

Si $P = (x, y)$ es un punto de la recta en el lado terminal de β , entonces $x < 0$ pues β está en el III cuadrante.

Considérese $x = -5$, entonces $y = \frac{12}{5}(-5) = -12$, $P = (-5, -12)$. Sea $c = \sqrt{(-5)^2 + (-12)^2} = 13$ y se tiene que:

$$\sin \beta = -\frac{12}{13}, \csc \beta = -\frac{13}{12}, \cos \beta = -\frac{5}{13}, \sec \beta = -\frac{13}{5}, \tan \beta = \frac{12}{5}, \cot \beta = \frac{5}{12}.$$

8. Desde un avión que vuela sobre una autopista en línea recta a 500m de altura se miden en le mismo instante los ángulos de depresión a los extremos de un puente y resultan ser 20° y 32° . ¿Cuál es la longitud del puente?

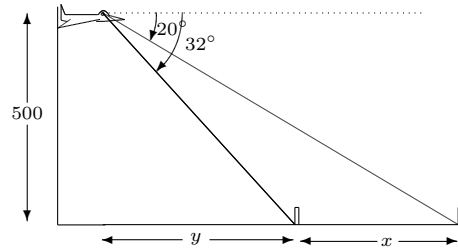
Solución Sea x la longitud del puente, entonces

$$\tan 32^\circ = \frac{500}{y}, y = \frac{500}{\tan 32^\circ}, \tan 20^\circ = \frac{500}{x+y},$$

$$x+y = \frac{500}{\tan 20^\circ}, x = \frac{500}{\tan 20^\circ} - y =$$

$$\frac{500}{\tan 20^\circ} - \frac{500}{\tan 32^\circ} = 573,57m.$$

La longitud del puente es 573,57 metros.



UNIVERSIDAD DE COSTA RICA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

30 de junio de 1999
Duración 3 horas
Puntos: 70

MA-0125 MATEMÁTICA ELEMENTAL
—Reposición III Examen Parcial—I Ciclo 1999

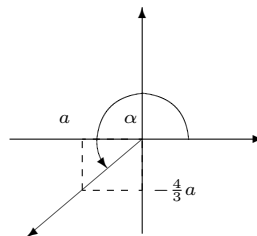
1. Encuentre el valor exacto de las seis funciones trigonométricas para el ángulo α en el tercer cuadrante si todo punto $P\left(a, \frac{4a}{3}\right)$ está en la recta que contiene al lado terminal de α . (7pts.)
2. Encuentre todos los números reales que son solución de:
 - a) $2 \sin^2 x + 8 \cos x + 4\sqrt{3} = \sqrt{3} \cos x + 2$ (6pts.)
 - b) $\sin(2x) + \sin x = \frac{1}{2} + \cos x$ (6pts.)
 - c) $3 \arccos(4x - 1) = \pi$. (5pts.)
3. Verifique las siguientes identidades:
 - a) $\frac{\cot x - \cos x}{\cos^3 x} = \frac{\csc x}{1 + \sin x}$. (5pts.)
 - b) $\frac{\sin^2(2x)}{(1 + \cos^2(2x))^2} = \sec^2 x - 1$. (5pts.)
4. Desde un punto a 15 metros sobre el suelo, el ángulo de depresión a la base de un edificio es 20° y el ángulo de elevación a la parte más alta de ese edificio es 55° . Encuentre la altura del edificio. (8pts.)
5. Calcule las medidas en radianes de los ángulos internos del triángulo cuyos vértices son $A(0, 0)$, $B(-\sqrt{3}, -3)$ y $C(-\sqrt{3}, 0)$. (5pts.)
6. Sea α un ángulo del II cuadrante y β un ángulo del III cuadrante. Si $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ y $\cos \beta = -\frac{8}{17}$ determine:
 - a) el valor exacto de $\sin(\alpha + \beta)$, (5pts.)
 - b) el valor exacto de $\cos(\alpha - \beta)$. (4pts.)
7. Determine una expresión algebraica de variable x para $\cos(2 \arctan x)$. (6pts.)
8. Dada la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con $f(x) = -2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$. Represente gráficamente la curva $y = f(x)$. (8pts.)

—Solución III Examen Parcial (Reposición)—I Ciclo 1999

1. Encuentre el valor exacto de las seis funciones trigonométricas para el ángulo α en el tercer cuadrante si todo punto $P\left(a, \frac{4a}{3}\right)$ está en la recta que contiene al lado terminal de α .

Solución Sea C = distancia de $P\left(a, \frac{4a}{3}\right)$ al punto $(0, 0)$, $C = \sqrt{a^2 + \left(\frac{4a}{3}\right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{16a^2}{9}} = \sqrt{\frac{25a^2}{9}} = \frac{5|a|}{3}$.

Dado que α está en el tercer cuadrante entonces se cumple $a < 0$, $|a| = -a$ y $C = -\frac{5a}{3}$.



$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{\frac{4a}{3}}{-\frac{5a}{3}} = -\frac{4}{5} & \cos \alpha &= \frac{a}{-\frac{5a}{3}} = -\frac{3}{5} & \tan \alpha &= \frac{\frac{4a}{3}}{a} = \frac{4}{3} \\ \sec \alpha &= -\frac{5}{3} & \csc \alpha &= -\frac{5}{4} & \cot \alpha &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

2. Encuentre todos los números reales que son solución de:

a) $2 \sin^2 x + 8 \cos x + 4\sqrt{3} = \sqrt{3} \cos x + 2$

b) $\sin(2x) + \sin x = \frac{1}{2} + \cos x$

c) $3 \arccos(4x - 1) = \pi$.

Solución

a) $2 \sin^2 x + 8 \cos x + 4\sqrt{3} = \sqrt{3} \cos x + 2 \implies 2(1 - \cos^2 x) + 8 \cos x - \sqrt{3} \cos x + 4\sqrt{3} - 2 = 0$

$2 - 2 \cos^2 x + 8 \cos x - \sqrt{3} \cos x + 4\sqrt{3} - 2 = 0 \implies -2 \cos^2 x + (8 - \sqrt{3}) \cos x + 4\sqrt{3} = 0$.

Sea $u = \cos x$, se tiene la ecuación cuadrática $-2u^2 + (8 - \sqrt{3})u + 4\sqrt{3} = 0$.

Dado que $a = -2$, $b = 8 - \sqrt{3}$, $c = 4\sqrt{3}$, $\Delta = (8 - \sqrt{3})^2 - 4(-2)(4\sqrt{3}) = 8^2 - 16\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 + 32\sqrt{3} = 8^2 + 16\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = (8 + \sqrt{3})^2 \implies \sqrt{\Delta} = 8 + \sqrt{3}$.

Hay dos soluciones:

$$u_1 = \frac{-(8 - \sqrt{3}) - (8 + \sqrt{3})}{2(-2)} = \frac{-16}{-4} = 4, \quad u_2 = \frac{-(8 - \sqrt{3}) + (8 + \sqrt{3})}{2(-2)} = \frac{2\sqrt{3}}{-4} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$u = \cos x \implies \cos x = -4 \implies$ no tiene solución. Si $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \implies x = \frac{5\pi}{6}$ o $x = \frac{7\pi}{6}$, dado que el coseno tiene período 2π , entonces $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ o $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$.

$$S = \{x \in \mathbb{R} / x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}.$$

b) $\sin(2x) + \sin x = \frac{1}{2} + \cos x \implies 2 \sin x \cos x + \sin x = \frac{1 + 2 \cos x}{2} \implies \sin x(2 \cos x + 1) = \frac{1 + 2 \cos x}{2} \implies 2 \sin x(2 \cos x + 1) = 2 \cos x + 1 \implies 2 \sin x(2 \cos x + 1) - (2 \cos x + 1) = 0$, o sea

$$(2 \cos x + 1)(2 \sin x - 1) = 0 \implies 2 \cos x + 1 = 0 \text{ o } 2 \sin x - 1 = 0.$$

$$\text{Si } 2 \cos x + 1 = 0 \implies \cos x = -\frac{1}{2} \implies x = \frac{2\pi}{3} \text{ o } x = \frac{4\pi}{3}.$$

$$\text{Si } 2 \sin x - 1 = 0 \implies \sin x = \frac{1}{2} \implies x = \frac{\pi}{6} \text{ o } x = \frac{5\pi}{6}.$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} / \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$\text{c) } 3 \arccos(4x - 1) = \pi \implies \arccos(4x - 1) = \frac{\pi}{3} \implies 4x - 1 = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \implies 4x = \frac{3}{2} \implies x = \frac{3}{8}.$$

3. Verifique las siguientes identidades:

$$\text{a) } \frac{\cot x - \cos x}{\cos^3 x} = \frac{\csc x}{1 + \sin x}.$$

$$\text{b) } \frac{\sin^2(2x)}{(1 + \cos^2(2x))^2} = \sec^2 x - 1.$$

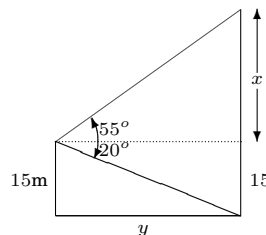
Solución

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{\cot x - \cos x}{\cos^3 x} &= \frac{\frac{\cos x}{\sin x} - \cos x}{\cos^3 x} = \frac{\frac{\cos x - \cos x \sin x}{\sin x}}{\cos^3 x} = \frac{\cos x - \cos x \sin x}{\sin x \cos^3 x} = \\ &= \frac{\cos x(1 - \sin x)}{\sin x \cos^3 x} = \frac{1 - \sin x}{\sin x \cos^2 x} = \frac{1 - \sin x}{\sin x(1 - \sin^2 x)} = \frac{1 - \sin x}{\sin x(1 - \sin x)(1 + \sin x)} = \\ &= \frac{1}{\sin x(1 + \sin x)} = \frac{1}{\sin x} \frac{1}{1 + \sin x} = \frac{\csc x}{1 + \sin x}. \end{aligned}$$

$$\text{b) } \frac{\sin^2(2x)}{[1 + \cos(2x)]^2} = \frac{[2 \sin x \cos x]^2}{[1 + \cos^2 x - \sin^2 x]^2} = \frac{4 \sin^2 x \cos^2 x}{[2 \cos^2 x]^2} = \frac{4 \sin^2 x \cos^2 x}{4 \cos^4 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x = \sec^2 x - 1.$$

4. Desde un punto a 15 metros sobre el suelo, el ángulo de depresión a la base de un edificio es 20° y el ángulo de elevación a la parte más alta de ese edificio es 55° . Encuentre la altura del edificio.

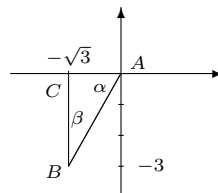
Solución altura $= x + 15$, $\tan 20^\circ = \frac{15}{y} \implies y = \frac{15}{\tan 20^\circ}$,
 $\tan 55^\circ = \frac{x}{y} \implies y \tan 55^\circ = x \implies \frac{15}{\tan 20^\circ} \tan 55^\circ = x \implies \frac{15 \tan 55^\circ}{\tan 20^\circ} = x \implies 58,8571 = x \implies \text{altura} = 58,8571 + 15 = 73,8571$. La altura del edificio es 73,8571 metros.



5. Calcule las medidas en radianes de los ángulos internos del triángulo cuyos vértices son

$$A(0, 0), B(-\sqrt{3}, -3) \text{ y } C(-\sqrt{3}, 0).$$

Solución Sean α y β los ángulos agudos del triángulo, $\tan \alpha = \frac{3}{\sqrt{3}}$, $\tan \beta = \frac{\sqrt{3}}{3} \implies \alpha = \tan^{-1}(\sqrt{3})$, $\beta = \tan^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{3})$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{6}$. Los ángulos agudos miden $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{6}$ el ángulo en el vértice C mide $\frac{\pi}{2}$.



6. Sea α un ángulo del II cuadrante y β un ángulo del III cuadrante. Si $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ y $\cos \beta = -\frac{8}{17}$ determine:

a) el valor exacto de $\sin(\alpha + \beta)$,

b) valor exacto de $\cos(\alpha - \beta)$.

Solución Sean α' y β' los ángulos de referencia de α y

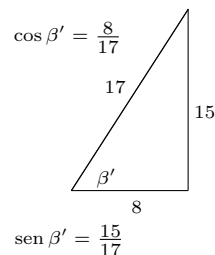
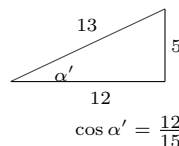
β respectivamente.

$$\text{Si } \sin \alpha' = \frac{5}{13} \implies \cos \alpha' = \frac{12}{13} \text{ y si } \cos \beta' = \frac{8}{17} \implies \sin \alpha' = \frac{5}{13} \quad \cos \beta' = \frac{8}{17}$$

$$\sin \beta' = \frac{15}{17}.$$

α está en el II cuadrante entonces $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$,

β está en el III cuadrante entonces $\sin \beta = -\frac{15}{17}$,



En resumen:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha = \frac{5}{13} \frac{-8}{17} + \frac{-15}{17} \frac{-12}{13} = \frac{140}{221}.$$

El valor exacto es $\sin(\alpha + \beta) = \frac{140}{221}$.

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \frac{-12}{13} \frac{-8}{17} + \frac{5}{13} \frac{-15}{17} = \frac{21}{221}.$$

El valor de exacto es $\cos(\alpha - \beta) = \frac{21}{221}$.

	α	β
seno	$\frac{5}{13}$	$-\frac{15}{17}$
coseno	$-\frac{12}{13}$	$-\frac{8}{17}$

7. Determine una expresión algebraica de variable x para $\cos(2 \arctan x)$.

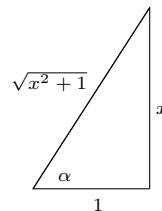
Solución Sea $\alpha = \arctan x \implies \tan \alpha = x \implies \tan \alpha =$

$$\frac{x}{1} \implies \sin \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}, \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Por tanto $\cos(2 \arctan x) = \cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha =$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right)^2 - \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right)^2 = \frac{1 - x^2}{1 + x^2},$$

$$\cos(2 \arctan x) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}.$$



8. Dada la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con $f(x) = -2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$. Represente gráficamente la curva $y = f(x)$.

Solución $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Dominio: $\mathbb{R}$. Ámbito: $-1 \leq \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1 \implies -2(1) \leq -2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \leq -2(-1) \implies -2 \leq -2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 2 \implies -2 \leq f(x) \leq 2$. Ámbito: $[-2, 2]$.

Amplitud: $|-2| = 2$. **Período** $= \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Puntos de la gráfica $y = f(x)$.

$$y = -2 \Rightarrow -2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -2 \Rightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Rightarrow 2x + \frac{\pi}{3} = 0 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{6}.$$

Pasa por $\left(-\frac{\pi}{6}, -2\right)$

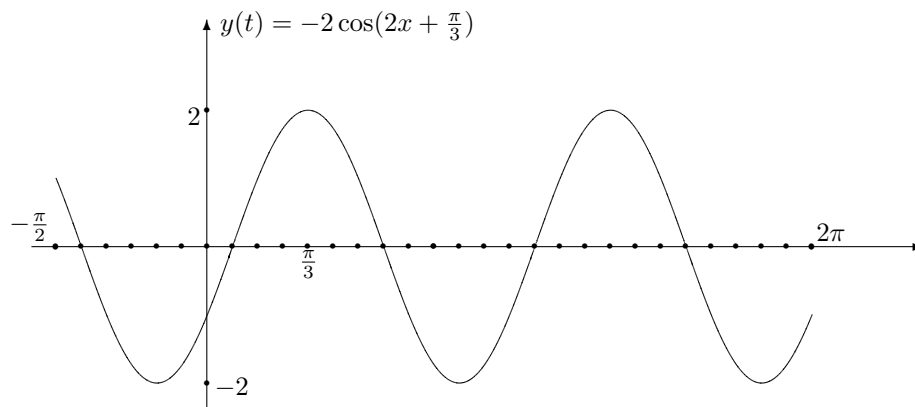
$$y = 0 \Rightarrow -2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} \text{ o } 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{7\pi}{12}.$$

Pasa por $\left(\frac{\pi}{12}, 0\right)$ y $\left(\frac{7\pi}{12}, 0\right)$.

$$y = 2 \Rightarrow -2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 2 \Rightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -1 \Rightarrow 2x + \frac{\pi}{3} = \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}.$$

Pasa por $\left(\frac{\pi}{3}, 2\right)$.

x	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{13\pi}{12}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{19\pi}{12}$
$f(x)$	-2	0	2	0	-2	0	2	0



UNIVERSIDAD DE COSTA RICA.

FACULTAD DE CIENCIAS.

ESCUELA DE MATEMÁTICA.

MATERIA: MA-0125.

MATEMÁTICA ELEMENTAL.

II ciclo de 1999

I Examen Parcial.

Duración: 3 Horas.

18 de setiembre de 1999

60 puntos

1. Simplifique el número $\frac{1}{9} [3\sqrt{12} - 5\sqrt{18}]^2 - \sqrt{(3\sqrt{24} - 18)^2}$ y expreselo utilizando notación radical. (6pt)
2. Encuentre dos números enteros a, b tal que $\sqrt{66 - 40\sqrt{2}} = a\sqrt{2} + b$. (6pt)
3. Encuentre los valores de k para que la ecuación $k\left(-\frac{1}{2}x^2 + x + 1\right) + (x^2 - 2x - 1) = 0$ no tenga soluciones en $\mathbb{R}$. (8pt)
4. Resuelva en $\mathbb{R}$ la ecuación $6x - \sqrt{3x + 5} = 35$. (8pt)
5. Encuentre el conjunto de números reales que son solución de $|6x^2 - 15| \leq 9$. (8pt)
6. Sea $P(x) = 9x^3 - 18x^2 - 25x - 6$.
 - a) Pruebe que $(3x + 1)$ es un factor de $P(x)$. (4pt)
 - b) Factorice en forma completa $P(x)$. (4pt)
 - c) Determine todas las soluciones reales de $P(-2x + 5) = 0$. (3pt)
7. Encuentre el conjunto de solución de $\frac{(3 - 2x)(x + 4)}{(x - 2)} \geq -20$. (7pt)
8. Encuentre el conjunto de solución de $\frac{2x - a}{b} \geq \frac{2x - b}{a}$, si $0 > b > a$. (6pt)

Solución del I Examen Parcial II ciclo de 1999.

1. Simplifique el número $\frac{1}{9} [3\sqrt{12} - 5\sqrt{18}]^2 - \sqrt{(3\sqrt{24} - 18)^2}$ y exprese utilizando notación radical.

Solución $\frac{1}{9} [3\sqrt{12} - 5\sqrt{18}]^2 - \sqrt{(3\sqrt{24} - 18)^2} = \frac{1}{9} [108 - 30\sqrt{216} + 450] - |3\sqrt{24} - 18| =$
 $\frac{1}{9} [558 - 180\sqrt{6}] - (18 - 3\sqrt{24}) = 62 - 20\sqrt{6} - 18 + 6\sqrt{6} = 44 - 14\sqrt{6}.$

2. Encuentre dos números enteros a, b tal que $\sqrt{66 - 40\sqrt{2}} = a\sqrt{2} + b$.

Solución $\sqrt{66 - 40\sqrt{2}} = a\sqrt{2} + b \implies (\sqrt{66 - 40\sqrt{2}})^2 = (a\sqrt{2} + b)^2 \implies$

$$66 - 40\sqrt{2} = 2a^2 + 2ab\sqrt{2} + b^2$$

$$2ab = -40 \implies ab = -20 \implies b = \frac{-20}{a}$$

$$2a^2 + b^2 = 66 \implies 2a^2 + \left(\frac{-20}{a}\right)^2 = 66 \implies 2a^2 + \frac{400}{a^2} = 66 \implies 2a^4 + 400 = 66a^2 \implies a^4 + 200 = 33a^2.$$

$$\text{Sea } u = a^2 \implies u^2 - 33u + 200 = 0 \implies \Delta = 289 \implies \sqrt{\Delta} = 17.$$

$$\text{Entonces } u_1 = 8 \implies a^2 = 8 \text{ y } u_2 = 25 \implies a^2 = 25.$$

$$\text{Dado que } a \in \mathbb{Z} \text{ entonces } a = 5 \text{ ó } a = -5.$$

$$\text{Entonces } b = -4 \text{ ó } b = 4 \text{ y como } 5\sqrt{2} - 4 > 0 \text{ y } -5\sqrt{2} + 4 < 0, \text{ se tiene que } a = 5 \text{ y } b = -4.$$

3. Encuentre los valores de k para que la ecuación $k\left(-\frac{1}{2}x^2 + x + 1\right) + (x^2 - 2x - 1) = 0$ no tenga soluciones en $\mathbb{R}$.

Solución $k\left(-\frac{1}{2}x^2 + x + 1\right) + (x^2 - 2x - 1) = 0 \implies \left(-\frac{1}{2}k + 1\right)x^2 + (k - 2)x + (k - 1) = 0 \implies$

$$\Delta = (k - 2)^2 - 4\left(-\frac{1}{2}k + 1\right)(k - 1) = k^2 - 4k + 4 + 2k^2 - 2k - 4k + 4 \implies$$

$$\Delta = 3k^2 - 10k + 8 = (3k - 4)(k - 2).$$

La ecuación no tiene soluciones en $\mathbb{R}$ si $\Delta < 0$ esto

$$\text{es } (3k - 4)(k - 2) < 0.$$

$$\Delta < 0 \text{ si } k \in \left] \frac{4}{3}, 2 \right[.$$

k	$\frac{4}{3}$		2	
$3k - 4$	-	0	+	+
$k - 2$	-	-	0	+
	+	-	+	

4. Resuelva en $\mathbb{R}$ la ecuación $6x - \sqrt{3x + 5} = 35$.

Solución $6x - \sqrt{3x + 5} = 35 \implies 6x - 35 = \sqrt{3x + 5} \implies (6x - 35)^2 = (\sqrt{3x + 5})^2 \implies$

$$36x^2 - 420x + 1225 = 3x + 5 \implies 36x^2 - 420x + 1225 = 3x + 5 \implies 36x^2 - 420 - 3x + 1225 - 5 =$$

$$0 \implies 36x^2 - 423x + 1220 = 0 \implies \Delta = 3249 \implies \sqrt{\Delta} = 57.$$

$$\text{Tenemos } x_1 = \frac{423 - 57}{72} = \frac{366}{72} = \frac{61}{12} \text{ y } x_2 = \frac{423 + 57}{72} = \frac{480}{72} = \frac{20}{3}.$$

Prueba: $x = \frac{61}{12} \Rightarrow \frac{61}{2} - \frac{9}{2} = \frac{52}{2} = 26 \neq 35$, por lo tanto $\frac{61}{12}$ no es solución.

$x = \frac{20}{3} \Rightarrow 40 - 5 = 35$, por lo tanto $\frac{20}{3}$ sí es solución.

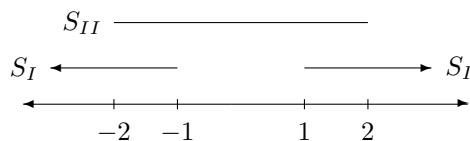
Por lo tanto $S = \{\frac{20}{3}\}$.

5. Encuentre el conjunto de números reales que son solución de $|6x^2 - 15| \leq 9$.

Solución $|6x^2 - 15| \leq 9 \Rightarrow -9 \leq 6x^2 - 15 \leq 9$.

I Caso: $6x^2 - 15 \geq -9 \Rightarrow 6x^2 - 6 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow (x - 1)(x + 1) \geq 0 \Rightarrow S_I :]-\infty, -1] \cup [1, \infty[$.

II Caso: $6x^2 - 15 \leq 9 \Rightarrow 6x^2 \leq 24 \Rightarrow x^2 - 4 \leq 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 2) \leq 0 \Rightarrow S_{II} : [-2, 2]$.



$$S = S_I \cap S_{II} = [-2, -1] \cup [1, 2].$$

6. Sea $P(x) = 9x^3 - 18x^2 - 25x - 6$.

a) Pruebe que $(3x + 1)$ es un factor de $P(x)$.

Solución	$9x^3 - 18x^2 - 25x - 6$	$3x + 1$	$P(x) \div (3x + 1)$ tiene residuo 0.
	$-9x^3 - 3x^2$	$3x^2 - 7x - 6$	$P(x) = (3x + 1)(3x^2 - 7x - 6)$.
	$-21x^2 - 25x - 6$		
	$21x^2 + 7x$		
	$-18x - 6$		
	$18x + 6$		
	0		

b) Factorice en forma completa $P(x)$.

Solución $P(x) = (3x + 1)(3x^2 - 7x - 6) = (3x + 1)(3x + 2)(x - 3)$.

c) Determine todas las soluciones reales de $P(-2x + 5) = 0$.

Solución Ceros de $P(x) : -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 3$. Tenemos: $P(-2x + 5) = 0$.

Si $-2x + 5 = -\frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{8}{3}$.

Si $-2x + 5 = -\frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{17}{6}$.

Si $-2x + 5 = 3 \Rightarrow x = 1$.

7. Encuentre el conjunto de solución de $\frac{(3 - 2x)(x + 4)}{(x - 2)} \geq -20$.

Solución $\frac{(3-2x)(x+4)}{(x-2)} \geq -20 \implies$

$$\frac{(3-2x)(x+4)}{(x-2)} + 20 \geq 0 \implies$$

$$\frac{3x+12-2x^2-8x+20x-40}{x-2} \geq 0 \implies$$

x	2	$\frac{7}{2}$	4	
$-2x+7$	+	+	0	-
$x-4$	-	-	-	+
$x-2$	-	0	+	+
	+	-	+	-

$$\frac{-2x^2+15x-28}{x-2} \geq 0 \implies \frac{(-2x+7)(x-4)}{x-2} \geq 0. \text{ S: }]-\infty, 2[\cup \left[\frac{7}{2}, 4\right].$$

8. Encuentre el conjunto de solución de $\frac{2x-a}{b} \geq \frac{2x-b}{a}$, si $0 > b > a$.

Solución $\frac{2x-a}{b} \geq \frac{2x-b}{a} \implies a(2x-a) \geq b(2x-b)$, con a y b positivos.

$$2ax - a^2 \geq 2bx - b^2 \implies x(2a-2b) \geq a^2 - b^2 \quad \text{con } a-b < 0.$$

$$x \leq \frac{a^2 - b^2}{2(a-b)} \implies x \leq \frac{(a-b)(a+b)}{2(a-b)} \implies x \leq \frac{a+b}{2} \implies \text{S: }]-\infty, \frac{a+b}{2}].$$

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

20 de junio de 1998
Duración 3 horas
Puntos: 76

MA-0125 MATEMÁTICA ELEMENTAL
—III Examen Parcial—I Ciclo 1998

1. Encuentre los valores de las seis funciones trigonométricas para el ángulo α en el III cuadrante, si su lado terminal es perpendicular a la recta cuya ecuación es $8x + 15y - 45 = 0$. (12pt)
2. Dada la función $f(x) = -2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ con dominio $\mathbb{R}$,
 - a) indique la amplitud y el ámbito de $f(x)$. (4pt)
 - b) represente gráficamente $y = f(x)$. (8pt)
3. Encuentre todos los números reales que son solución de $\sin^2 x + 0,5 \cos x = 0,5$. (10pt)
4. Pruebe la siguiente identidad $\frac{\cot x - \cos x}{\cos^3 x} = \frac{\csc x}{1 + \sin x}$. (10pt)
5. Encuentre el valor exacto de $\sin\left[\arcsin\left(\frac{4}{5}\right) + \arccos\left(\frac{5}{13}\right)\right]$. (8pt)
6. Si α es un ángulo del II cuadrante, β un ángulo del III cuadrante, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{7}$ y $\tan \beta = \frac{5}{3}$, encuentre el valor exacto de:
 - a) $\sin(\alpha - \beta)$ (6pt)
 - b) $\cos(2\alpha)$. (6pt)
7. Desde la azotea de un edificio que da al mar, un observador ve un bote navegando directamente hacia el edificio. Si el observador está a 100 pies sobre el nivel del mar y el ángulo de depresión cambia de 25° a 40° durante el periodo de observación, calcule la distancia aproximada que recorre el bote. (12pt)

Solución III Examen Parcial—I Ciclo 1998

1. Encuentre los valores de las seis funciones trigonométricas para el ángulo α en el III cuadrante, si su lado terminal es perpendicular a la recta cuya ecuación es $8x + 15y - 45 = 0$.

Solución $8x + 15y - 45 = 0 \iff y = -\frac{8x}{15} + 3$. La recta que contiene el lado terminal pasa por $(0, 0)$ y tiene pendiente $\frac{15}{8}$ por lo que su ecuación es $y = \frac{15}{8}x$.

Si $P(x, y)$ está en el lado terminal del ángulo, entonces $x < 0$ pues el ángulo está en el III cuadrante.

Tómese $x = -8 \implies y = -15 \implies P = (-8, -15)$. Sea c la distancia de $P(-8, -15)$ a $(0, 0)$, entonces $c = \sqrt{(-8)^2 + (-15)^2} = 17$. Por lo tanto, $\sin \alpha = -\frac{15}{17}$, $\cos \alpha = -\frac{8}{17}$, $\tan \alpha = \frac{-15}{-8} = \frac{15}{8}$, $\csc \alpha = -\frac{17}{15}$, $\sec \alpha = -\frac{17}{8}$, $\cot \alpha = \frac{8}{15}$.

2. Dada la función $f(x) = -2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ con dominio $\mathbb{R}$,

a) indique la amplitud y el ámbito de $f(x)$.

b) represente gráficamente $y = f(x)$.

Solución $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Dominio: $\mathbb{R}$. **Ámbito:** $-1 \leq \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1 \implies -2(1) \leq -2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \leq -2(-1) \implies -2 \leq -2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 2 \implies -2 \leq f(x) \leq 2$. **Ámbito:** $[-2, 2]$.

Amplitud: $|-2| = 2$. **Período** $= \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Puntos de la gráfica $y = f(x)$.

$$y = -2 \implies -2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -2 \implies \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \implies 2x + \frac{\pi}{3} = 0 \implies x = -\frac{\pi}{6}.$$

Pasa por $\left(-\frac{\pi}{6}, -2\right)$

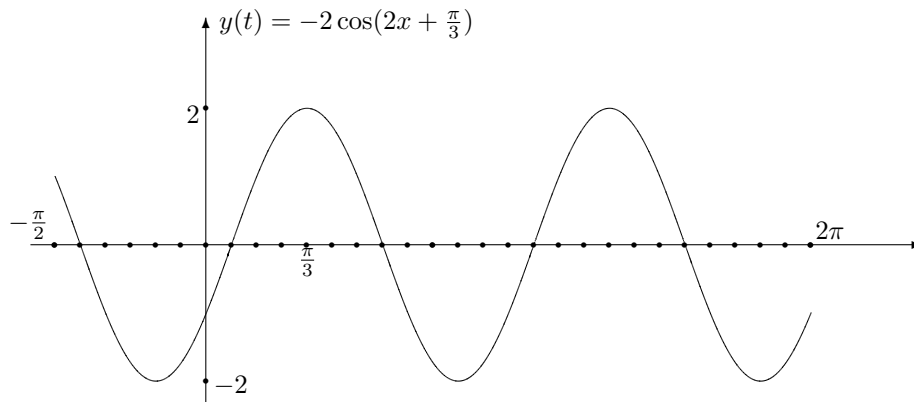
$$y = 0 \implies -2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \implies \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \implies 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \implies x = \frac{\pi}{12} \text{ o } 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} \implies x = \frac{7\pi}{12}.$$

Pasa por $\left(\frac{\pi}{12}, 0\right)$ y $\left(\frac{7\pi}{12}, 0\right)$.

$$y = 2 \implies -2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 2 \implies \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -1 \implies 2x + \frac{\pi}{3} = \pi \implies x = \frac{\pi}{3}.$$

Pasa por $\left(\frac{\pi}{3}, 2\right)$.

x	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{13\pi}{12}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{19\pi}{12}$
$f(x)$	-2	0	2	0	-2	0	2	0



3. Encuentre todos los números reales que son solución de $\sin^2 x + 0,5 \cos x = 0,5$.

Solución $\sin^2 x + 0,5 \cos x = 0,5 \implies 1 - \cos^2 x + 0,5 \cos x - 0,5 = 0 \implies -\cos^2 x + 0,5 \cos x + 0,5 = 0$. Al sustituir $u = \cos x$ se tiene la ecuación cuadrática $-u^2 + 0,5u + 0,5 = 0$. El discriminante es $\Delta = (0,5)^2 - 4(-1)(0,5) = 2,25$ y $\sqrt{\Delta} = 1,5$. Hay dos soluciones, $u_1 = \frac{-0,5 - 1,5}{2(-1)} = 1$, $u_2 = \frac{-0,5 + 1,5}{2(-1)} = -0,5$.

Si $u = 1$, entonces $\cos x = 1$, $x = 0$ y si $u = -0,5$, entonces $\cos x = -0,5$ y $x = \pi$.

$$S = \{x \in \mathbb{R} / x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

4. Pruebe la siguiente identidad $\frac{\cot x - \cos x}{\cos^3 x} = \frac{\csc x}{1 + \sin x}$.

Solución $\frac{\cot x - \cos x}{\cos^3 x} = \frac{\frac{\cos x}{\sin x} - \cos x}{\cos^3 x} = \frac{\frac{\cos x - \cos x \sin x}{\sin x}}{\cos^3 x} = \frac{\cos x - \cos x \sin x}{\sin x \cos^3 x} = \frac{\cos x(1 - \sin x)}{\sin x(1 - \sin^2 x) \cos x} = \frac{(1 - \sin x)}{\sin x(1 - \sin x)(1 + \sin x)} = \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{1}{1 + \sin x} = \csc x \frac{1}{1 + \sin x} = \frac{\csc x}{1 + \sin x}$.

5. Encuentre el valor exacto de $\sin \left[\arcsin\left(\frac{4}{5}\right) + \arccos\left(\frac{5}{13}\right) \right]$.

Solución Sea $\alpha = \arcsin\left(\frac{4}{5}\right) \implies \sin \alpha = \frac{4}{5} \implies \cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} \implies \cos \alpha = \frac{3}{5}$.

Sea $\beta = \arccos\left(\frac{5}{13}\right) \implies \cos \beta = \frac{5}{13} \implies \sin \beta = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} \implies \sin \beta = \sqrt{\frac{144}{169}} \implies \sin \beta = \frac{12}{13}$,

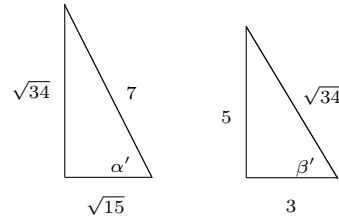
por lo tanto:

$$\sin \left[\arcsin\left(\frac{4}{5}\right) + \arccos\left(\frac{5}{13}\right) \right] = \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13} + \frac{12}{13} \cdot \frac{3}{5} = \frac{56}{65}.$$

6. Si α es un ángulo del II cuadrante, β un ángulo del III cuadrante, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{7}$ y $\tan \beta = \frac{5}{3}$, encuentre el valor exacto de:

a) $\sin(\alpha - \beta)$ b) $\cos(2\alpha)$.

Solución Sean α' y β' los ángulos de referencia de α y β , entonces $\cos \alpha' = \frac{\sqrt{15}}{7}$ y $\tan \beta' = \frac{5}{3}$, entonces $\sin \alpha' = \frac{\sqrt{34}}{7}$, $\sin \beta' = \frac{5}{\sqrt{34}}$, $\cos \beta' = \frac{3}{\sqrt{34}}$. Dado que α está en el II cuadrante, entonces $\sin \alpha > 0$ por lo cual $\sin \alpha = \frac{\sqrt{34}}{7}$.



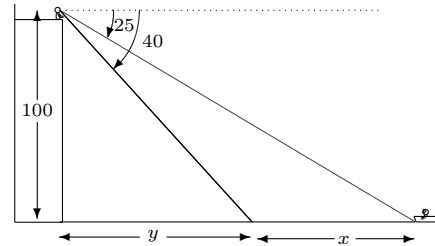
Por otro lado β está en el III cuadrante y $\sin \beta = -\frac{5}{\sqrt{34}}$, $\cos \beta = -\frac{3}{\sqrt{34}}$, pues $\sin \beta < 0$ y $\cos \beta < 0$, con β en el III cuadrante, entonces: $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha = \frac{\sqrt{34}}{7} \cdot \frac{-3}{\sqrt{34}} - \frac{-5}{\sqrt{34}} \cdot \frac{-\sqrt{15}}{7} = -\frac{3}{7} - \frac{5\sqrt{15}}{7\sqrt{34}} = -\frac{3\sqrt{34} + 5\sqrt{15}}{7\sqrt{34}}$.

También $\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \left(-\frac{\sqrt{15}}{7}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{34}}{7}\right)^2 = \frac{15}{49} - \frac{34}{49} = -\frac{19}{49}$.

7. Desde la azotea de un edificio que da al mar, un observador ve un bote navegando directamente hacia el edificio. Si el observador está a 100 pies sobre el nivel del mar y el ángulo de depresión cambia de 25° a 40° durante el periodo de observación, calcule la distancia aproximada que recorre el bote.

Solución Sea x la distancia recorrida por el bote $\tan 40^\circ = \frac{100}{y} \Rightarrow y = \frac{100}{\tan 40^\circ}$, $\tan 25^\circ = \frac{100}{x+y} \Rightarrow x+y = \frac{100}{\tan 25^\circ} \Rightarrow x = \frac{100}{\tan 25^\circ} - y \Rightarrow x = \frac{100}{\tan 25^\circ} - \frac{100}{\tan 40^\circ} = 95,2753 \text{ pies.}$

El bote ha recorrido 95,2753 pies.



UNIVERSIDAD DE COSTA RICA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

21 de noviembre de 1998
Duración 3 horas
Puntos: 70

MA-0125 MATEMÁTICA ELEMENTAL
— III Examen Parcial— II Ciclo 1998

1. Compruebe la identidad $\frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x} + \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x} = 2 \csc x$. (5pt)
2. Calcule el valor exacto de $\operatorname{sen}(\alpha - \frac{\pi}{2})$, si $\cos \alpha = \frac{2}{5}$. (5pt)
3. En un triángulo rectángulo un ángulo mide 65° y el cateto adyacente el ángulo menor mide 7cm. Halle las medidas de los otros lados del triángulo. (5pt)
4. Calcule el valor exacto de $\tan(2\alpha)$, si $\cos \alpha = \frac{8}{17}$ y $\operatorname{sen} \alpha < 0$. (5pt)
5. Encuentre la medida en grados del ángulo agudo que determine la recta de ecuación $\sqrt{3}x - 3y + 6 = 0$, con el eje x . (5pt)
6. Resuelva la ecuación $2 \operatorname{sen} \cos x = -\frac{1}{2}$, si $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq -\frac{\pi}{4}$. (5pt)
7. Encuentre el conjunto donde la función $g: [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \cos x$, es creciente. (5pt)
8. Calcule el valor exacto de $\cos(\alpha - \beta)$, si $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$ y $\operatorname{sen} \beta = -\frac{8}{17}$, con α y β ángulos en el II y III cuadrantes respectivamente. (5pt)
9. Encuentre todas las soluciones reales de $5\sqrt{3} \operatorname{sen} x + 8 = 2 \cos^2 x$. (10pt)
10. Represente gráficamente la curva $y = f(x)$, si $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, con $f(x) = -2 \operatorname{sen}(4x + \frac{\pi}{2})$. (10pt)
11. Desde un punto a 12m de altura sobre el suelo, el ángulo de elevación a la punta de un edificio es de $50^\circ 25'$ y el ángulo de depresión a la base del mismo es de 32° . Calcule la altura del edificio. (10pt)

— Solución III Examen Parcial— II Ciclo 1998

1. Compruebe la identidad $\frac{\sin x}{1 - \cos x} + \frac{1 - \cos x}{\sin x} = 2 \csc x$.

Solución
$$\frac{\sin x \sin x + (1 - \cos x)^2}{(1 - \cos x) \sin x} = \frac{\sin^2 x + 1 - 2 \cos x + \cos^2 x}{(1 - \cos x) \sin x} =$$

$$\frac{(\sin^2 x + \cos^2 x) + 1 - 2 \cos x}{(1 - \cos x) \sin x} = \frac{1 + 1 - 2 \cos x}{(1 - \cos x) \sin x} = \frac{2}{\sin x} = 2 \csc x.$$

2. Calcule el valor exacto de $\sin(\alpha - \frac{\pi}{2})$, si $\cos \alpha = \frac{2}{5}$.

Solución $\sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) = \sin \alpha \cos \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2} \cos \alpha = \sin \alpha \cdot 0 - (1)(\frac{2}{5}) = -\frac{2}{5}.$

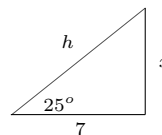
3. En un triángulo rectángulo un ángulo mide 65° y el cateto adyacente el ángulo menor mide 7cm. Halle las medidas de los otros lados del triángulo.

Solución Los ángulos agudos miden 65° y 25° . El cateto adyacente al ángulo de 25° mide 7cm. Sea x la medida del otro cateto y de la hipotenusa.

$$\tan 25^\circ = \frac{x}{7} \implies x = 7 \tan 25^\circ = 3,2642$$

$$\cos 25^\circ = \frac{7}{h} \implies h = \frac{7}{\cos 25^\circ} = 7,7236.$$

El otro cateto mide 3,2642cm y la hipotenusa 7,7236cm.



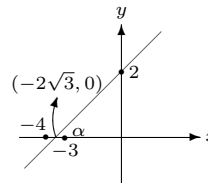
4. Calcule el valor exacto de $\tan(2\alpha)$, si $\cos \alpha = \frac{8}{17}$ y $\sin \alpha < 0$.

Solución Si $\cos \alpha$, entonces $(\frac{8}{17})^2 + \sin^2 \alpha = 1 \implies \sin^2 \alpha = \frac{225}{289} \implies |\sin \alpha| = \frac{15}{17}$. Como $\sin \alpha < 0$, entonces $\tan \alpha = -\frac{15}{8}$, por tanto $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2(-\frac{15}{8})}{1 - (-\frac{15}{8})^2} = \frac{240}{161}.$

5. Encuentre la medida en grados del ángulo agudo que determine la recta de ecuación $3x - 3y + 6 = 0$, con el eje x .

Solución Tenemos que $\sqrt{3}x - 3y + 6 \iff y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2$, la recta corta al eje x en los puntos $(-2\sqrt{3}, 0)$ y $(0, 2)$. Así:

$\tan \alpha = \frac{2}{2\sqrt{3}}, \alpha = \tan^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{3}), \alpha = \frac{\pi}{6}$. El ángulo agudo que determina la recta con el eje x es $\frac{\pi}{6}$.



6. Resuelva la ecuación $2 \sin \cos x = -\frac{1}{2}$, si $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq -\frac{\pi}{4}$.

Solución Se tiene que $2 \sin x \cos x = -\frac{1}{2} \implies \sin(2x) = -\frac{1}{2}.$

Por otro lado, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq -\frac{\pi}{4} \implies -\pi \leq 2x \leq -\frac{\pi}{2}$ y el ángulo $2x$ está en el III cuadrante.

Como $\sin(-\frac{5\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$, entonces $2x = -\frac{5\pi}{6} \implies x = -\frac{5\pi}{12}$. $S = \{-\frac{5\pi}{12}\}.$

7. Encuentre el conjunto donde la función $g : [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \cos x$, es creciente.

Solución En el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, $g(x) = 0$, si $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$.

Tiene un valor máximo en $x = 0$, pues $g(0) = 1$ y un valor mínimo en $x = \pi$, pues $g(\pi) = -1$.

Por lo tanto $g(x)$ es creciente en $]-\frac{\pi}{2}, 0[$ y en $]\pi, \frac{3\pi}{2}[$.

8. Calcule el valor exacto de $\cos(\alpha - \beta)$, si $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$ y $\sin \beta = -\frac{8}{17}$, con α y β ángulos en el II y III cuadrantes respectivamente.

Solución Sea α' y β' los ángulos de referencia de α y β , entonces $\cos(\alpha') = \frac{5}{13}$ y $\sin(\beta') = \frac{8}{17}$.

Hay que encontrar $\sin(\alpha')$ y $\cos(\beta')$. Se cumple que $\cos^2(\alpha') + \sin^2(\alpha') = 1$, por lo tanto:

$$(\frac{5}{13})^2 + \sin^2(\alpha') = 1, \text{ por lo que } \sin(\alpha') = \frac{12}{13}.$$

También se puede cumplir que $\sin^2(\beta') + \cos^2(\beta') = 1$ y entonces $(\frac{8}{17})^2 + \cos^2(\beta') = 1 \implies \cos(\beta') = \frac{15}{17}$.

α en el II cuadrante y $\sin(\alpha') = \frac{12}{13} \implies \sin(\alpha) = \frac{12}{13}$, β en el III cuadrante y $\cos(\beta') = \frac{15}{17} \implies \cos(\beta) = -\frac{15}{17}$.

En resumen

ángulo	α	β
sen	$\frac{12}{13}$	$-\frac{8}{17}$
cos	$-\frac{5}{13}$	$-\frac{15}{17}$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = -\frac{5}{13} \cdot (-\frac{15}{17}) + \frac{12}{13} \cdot (-\frac{8}{17}) = -\frac{21}{221}, \cos(\alpha - \beta) = -\frac{21}{221}.$$

9. Encuentre todas las soluciones reales de $5\sqrt{3}\sin x + 8 = 2\cos^2 x$.

Solución Se tiene que $5\sqrt{3}\sin x + 8 = 2(1 - \sin^2 x)$, $5\sqrt{3}\sin x + 8 - 2 + 2\sin^2 x = 0$, es decir $2\sin^2 x + 5\sqrt{3}\sin x + 6 = 0$.

Sustituyendo $\sin x = u$, se tiene la ecuación cuadrática $2u^2 + 5\sqrt{3}u + 6 = 0$. El discriminante es $\Delta = (-5\sqrt{3})^2 - 4(2)(6) = 27 > 0$. Hay dos soluciones que son $u_1 = \frac{-5\sqrt{3} - \sqrt{27}}{2(2)} = \frac{-5\sqrt{3} - 3\sqrt{3}}{4} = -2\sqrt{3}$, $u_2 = \frac{-5\sqrt{3} + \sqrt{27}}{2(2)} = \frac{-5\sqrt{3} + 3\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Si $u = -2\sqrt{3} \implies \sin x = -2\sqrt{3}$, que no tiene solución. Si $u = -\frac{\sqrt{3}}{2} \implies \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \implies x = \frac{4\pi}{3}$ ó $x = \frac{5\pi}{3}$.

Considerando que el período del seno es 2π , entonces:

$$S = \{x \in \mathbb{R} / x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \text{ ó } x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

10. Represente gráficamente la curva $y = f(x)$, si $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, con $f(x) = -2\sin(4x + \frac{\pi}{2})$.

Solución Dominio: $\mathbb{R}$, Ámbito: $\sin(4x + \frac{\pi}{2}) \in [-1, 1], \forall x \in \mathbb{R} \implies -\sin(4x + \frac{\pi}{2}) \in [-2, 2]$,

$\forall x \in \mathbb{R} \implies \text{Ámbito} = [-2, 2]$. **Amplitud:** $|-2| = 2$. **Período:** $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

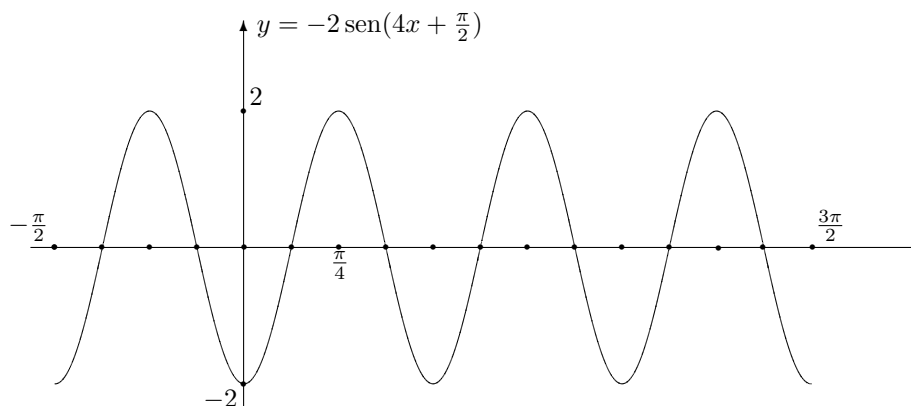
Puntos de la gráfica $y = f(x)$.

$y = -2 \implies -2 \sin(4x + \frac{\pi}{2}) = -2 \implies \sin(4x + \frac{\pi}{2}) = 1 \implies 4x + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \implies x = 0$ y la suma pasa por $(0, -2)$.

$y = 0 \implies -2 \sin(4x + \frac{\pi}{2}) = 0 \implies \sin(4x + \frac{\pi}{2}) = 0 \implies 4x + \frac{\pi}{2} = \pi \implies x = \frac{\pi}{8}$. Pasa por $(-\frac{\pi}{8}, 0)$ y $(\frac{\pi}{8}, 0)$.

$y = 2 \implies -2 \sin(4x + \frac{\pi}{2}) = 2 \implies \sin(4x + \frac{\pi}{2}) = -1 \implies 4x + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \implies x = \frac{\pi}{4}$. Pasa por $(\frac{\pi}{4}, 2)$.

x	$-\frac{3\pi}{8}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{8}$	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$
$f(x)$	0	2	0	-2	0	2	0	-2	0	2



11. Desde un punto a 12m de altura sobre el suelo, el ángulo de elevación a la punta de un edificio es de $50^\circ 25'$ y el ángulo de depresión a la base del mismo es de 32° . Calcule la altura del edificio.

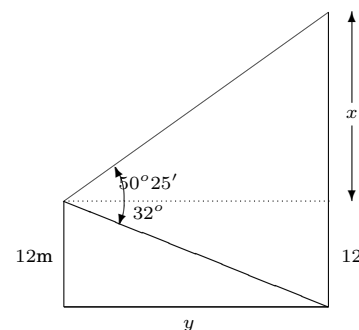
Solución Altura de edificio = $x + 12$, $\tan 32^\circ = \frac{12}{y} \implies$

$$y = \frac{12}{\tan 32^\circ}, \tan 32^\circ = \frac{12}{y} \implies y = \frac{12}{\tan 32^\circ},$$

$$\tan(50^\circ 25') = \frac{x}{y} \implies y \tan(50^\circ 25') = x \implies$$

$$x = \frac{12 \tan(50^\circ 25')}{\tan(32^\circ)}.$$

La altura del edificio es $\frac{12 \tan(50^\circ 25')}{\tan(32^\circ)} + 12 = 35,2274\text{m}$.



UNIVERSIDAD DE COSTA RICA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

28 de junio de 1997
Duración 3 horas
Puntos: 70

MA-0125 MATEMÁTICA ELEMENTAL
—III Examen Parcial—I Ciclo 1997

I Parte. Conteste las siguientes preguntas en esta hoja de examen. Presente los cálculos necesarios en cada ejercicio. (5pt c/u).

1. Encuentre el ámbito de la función definida por $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con $f(x) = -\frac{5 \operatorname{sen}(8x)}{4}$.
2. Determine el valor de x , si $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $-\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{2}$.
3. Verifique la identidad $[\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - x)]^2 = 1 + \operatorname{sen}(2x)$.
4. Calcule el valor exacto de $\cos(2\alpha)$, si $\operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{7}$ y $\cos \alpha < 0$.
5. Encuentre todos los números reales que son solución de la ecuación $2 \cos(-x) = 1$.
6. Calcule el valor exacto de $\operatorname{sen}(\arcsen \frac{5}{6} + \arccos \frac{5}{9})$.
7. Encuentre el conjunto donde la función $g : [0, \frac{5\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ con $g(x) = \operatorname{sen} x$, es creciente.
8. Calcule el valor exacto de $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$, si $\operatorname{sen} \alpha = \frac{5}{13}$ y $\operatorname{sen} \beta = -\frac{8}{17}$, con α y β ángulos en el II y III cuadrantes respectivamente.

II Parte. Desarrollo. Las siguientes preguntas las debe contestar en su cuaderno de examen en forma completa.

1. Encuentre todas las soluciones reales de $2 \cos x = 9 \tan x + 6 \sec x$. (10pt)
2. Represente gráficamente la curva $y = f(x)$, si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con $f(x) = 2 \cos(-4x + \pi)$. (10pt)
3. Desde el tope de un risco a 587m sobre el nivel del mar, los ángulos de depresión de dos botes alineados respectivamente son 15° y 25° . Encuentre la distancia entre los botes. (10pt)

— Solución III Examen parcial I ciclo 1997 —

1. Encuentre el ámbito de la función definida por $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con $f(x) = -\frac{5 \operatorname{sen}(8x)}{4}$.

Solución Si $f(x) = -\frac{5}{4} \operatorname{sen}(8x)$ hay que considerar que para todo $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sen}(8x) \in [-1, 1]$, esto es $-1 \leq \operatorname{sen}(8x) \leq 1$, entonces $-\frac{5}{4}(-1) \geq -\frac{5}{4} \operatorname{sen}(8x) \geq -\frac{5}{4} \cdot 1 \Rightarrow \frac{5}{4} \geq \frac{-5 \operatorname{sen}(8x)}{4} \geq -\frac{5}{4} \Rightarrow f(x) \in [-\frac{5}{4}, \frac{5}{4}]$, $\forall x \in \mathbb{R}$. El ámbito es $[-\frac{5}{4}, \frac{5}{4}]$.

2. Determine el valor de x si $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $-\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{2}$.

Solución Si $-\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{2}$ entonces x está en el tercer cuadrante, como $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ el valor en el tercer cuadrante en "notación negativa" es $-\pi + \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}$, que cumple $\operatorname{sen}(-\frac{2\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. $S = \{-\frac{2\pi}{3}\}$.

3. Verifique la identidad $[\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - x)]^2 = 1 + \operatorname{sen}(2x)$.

Solución Se tiene que $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$, entonces $[\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - x)]^2 = [\operatorname{sen} x + \cos x]^2 = \operatorname{sen}^2 x + 2 \operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x + 2 \operatorname{sen} x \cos x = 1 + 2 \operatorname{sen} x \cos x = 1 + \operatorname{sen}(2x)$.

4. Calcule el valor exacto de $\cos(2\alpha)$, si $\operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{7}$ y $\cos \alpha < 0$.

Solución Si $\operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{7}$, entonces $(\frac{3}{7})^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{49} = \frac{40}{49} \Rightarrow |\cos \alpha| = \frac{\sqrt{40}}{7}$.

Dado que $\cos \alpha < 0 \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{\sqrt{40}}{7}$ y $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \operatorname{sen}^2(\alpha) = (-\frac{\sqrt{40}}{7})^2 - (\frac{3}{7})^2 \Rightarrow \cos(2\alpha) = \frac{40}{49} - \frac{9}{49} = \frac{31}{49}$.

5. Encuentre todos los números reales que son solución de la ecuación $2 \cos(-x) = 1$.

Solución La función coseno es par, esto es $\cos(-x) = \cos x$, entonces $2 \cos(-x) = 1 \Rightarrow 2 \cos x = 1 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$ o $x = \frac{5\pi}{3}$.

$S = \{x \in \mathbb{R} / x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

6. Calcule el valor exacto de $\operatorname{sen}(\operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{5}{6} + \operatorname{arc} \cos \frac{5}{9})$.

Solución Nótese que $\operatorname{arc} \operatorname{sen} u = \alpha \iff \operatorname{sen} \alpha = u \iff \cos \alpha = \sqrt{1 - u^2} \iff \cos(\operatorname{arc} \operatorname{sen} u) = \sqrt{1 - u^2}$. También si $\operatorname{arc} \cos v = \beta \iff \cos \beta = v \iff \operatorname{sen} \beta = \sqrt{1 - v^2} \iff \operatorname{sen}(\operatorname{arc} \cos v) = \sqrt{1 - v^2}$, entonces:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{5}{6} + \operatorname{arc} \cos \frac{5}{9}) &= \operatorname{sen}(\operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{5}{6}) \cos(\operatorname{arc} \cos \frac{5}{9}) + \operatorname{sen}(\operatorname{arc} \cos \frac{5}{9}) \cos(\operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{5}{6}) = \\ \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{9} + \sqrt{1 - (\frac{5}{6})^2} \cdot \sqrt{1 - (\frac{5}{9})^2} &= \frac{25}{54} + \sqrt{\frac{56}{81}} \sqrt{\frac{11}{36}} = \frac{25}{54} + \frac{2\sqrt{14}\sqrt{11}}{9 \cdot 6} = \frac{25}{54} + \frac{\sqrt{154}}{27} = \frac{25 + 2\sqrt{154}}{54}. \end{aligned}$$

7. Encuentre el conjunto donde la función $g : [0, \frac{5\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ con $g(x) = \operatorname{sen} x$, es creciente.

Solución La función $g(x) = \sin x$, con dominio $[0, \frac{5\pi}{2}]$, alcanza el valor máximo $y = 1$ en $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{5\pi}{2}$. El valor numérico es $y = -1$ en $x = \frac{3\pi}{2}$. También $g(0) = 0$. Entonces es creciente en $]0, \frac{\pi}{2}[$ y $]\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}[$.

8. Calcule el valor exacto de $\sin(\alpha + \beta)$ si $\sin \alpha = \frac{5}{13}$ y $\sin \beta = -\frac{8}{17}$ con α y β ángulos en el II y III cuadrantes respectivamente.

Solución $\sin \alpha = \frac{5}{13} \iff (\frac{5}{13})^2 + \cos^2 \alpha = 1 \iff \cos^2 \alpha = \frac{144}{169} \iff |\cos \alpha| = \frac{12}{13}$. Como α está en el II cuadrante, entonces $\cos \alpha < 0$, esto es $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$.

$\sin \beta = -\frac{8}{17} \iff (-\frac{8}{17})^2 + \cos^2 \beta = 1 \iff \cos^2 \beta = \frac{225}{289} \iff |\cos \beta| = \frac{15}{17}$. Como β está en el III cuadrante, entonces $\cos \beta < 0$ y $\cos \beta = -\frac{15}{17}$.

El valor exacto de $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha = \frac{5}{13} \cdot (-\frac{15}{17}) + (-\frac{8}{17}) \cdot (-\frac{12}{13}) = -\frac{75}{221} + \frac{96}{221} = \frac{21}{221}$.

II Parte. Desarrollo. Las siguientes preguntas las debe contestar en su cuaderno de examen en forma completa.

1. Encuentre todas las soluciones reales de $2 \cos x = 9 \tan x + 6 \sec x$.

Solución $2 \cos x = 9 \tan x + 6 \sec x \implies 2 \cos x = \frac{9 \sin x}{\cos x} + 6 \frac{1}{\cos x}$, con $\cos x \neq 0$,

$$2 \cos^2 x = 9 \sin x + 6 \implies 2(1 - \sin^2 x) = 9 \sin x + 6 \implies 2 - 2 \sin^2 x - 9 \sin x - 6 = 0 \implies -2 \sin^2 x - 9 \sin x - 4 = 0 \implies 2 \sin^2 x + 9 \sin x + 4 = 0.$$

Si $\sin x = u$ la ecuación es $2u^2 + 9u + 4 = 0$. El discriminante es $\Delta = 9^2 - 4(2)(4) = 49 \implies \sqrt{\Delta} = 7$. Hay dos soluciones: $u_1 = \frac{-9-7}{4} = -4$ y $u_2 = \frac{-9+7}{4} = -\frac{1}{2}$.

Como $u = \sin x$ entonces $\sin x = -4$ que no tiene solución. También $\sin x = -\frac{1}{2} \implies x = \frac{7\pi}{6}$ o $x = \frac{11\pi}{6}$. $S = \{x \in \mathbb{R} / x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

2. Represente gráficamente la curva $y = f(x)$, si $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, con $f(x) = 2 \cos(-4x + \pi)$.

Solución $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2 \cos(-4x + \pi)$.

Dominio: $\mathbb{R}$, Ámbito: se cumple que $\cos(-4x + \pi) \in [-1, 1]$, entonces el ámbito es $[-2, 2]$.

Amplitud: 2. Período = $\frac{2\pi}{|-4|} = \frac{\pi}{2}$

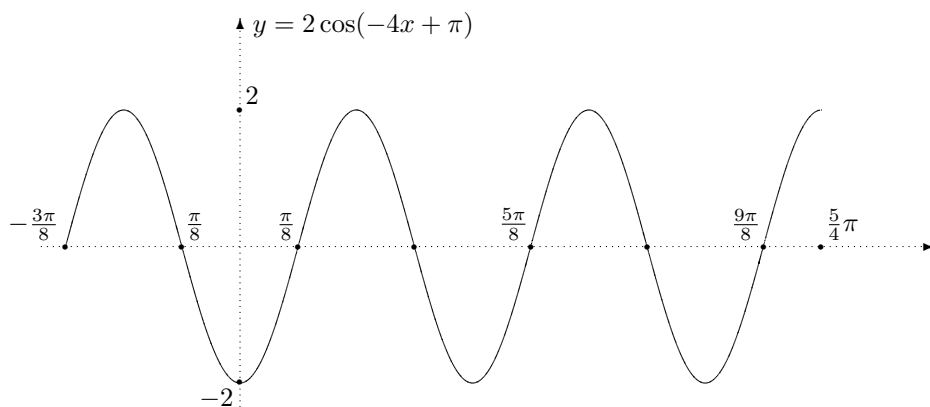
Puntos de la gráfica $y = f(x)$.

$y = 2 \implies 2 \cos(-4x + \pi) = 2 \implies \cos(-4x + \pi) = 1 \implies -4x + \pi = 0 \implies x = \frac{\pi}{4}$. Pasa por $(\frac{\pi}{4}, 2)$.

$y = 0 \implies 2 \cos(-4x + \pi) = 0 \implies -4x + \pi = \frac{\pi}{2}$ o $-4x + \pi = \frac{3\pi}{2} \implies x = \frac{\pi}{8}$ o $x = -\frac{\pi}{8}$. Pasa

por $(\frac{\pi}{8}, 0)$ y $(-\frac{\pi}{8}, 0)$. $y = -2 \implies 2 \cos(-4x + \pi) = -2 \implies \cos(-4x + \pi) = -1 \implies -4x + \pi = \pi \implies x = 0$. Pasa por $(0, -2)$.

x	$-\frac{3\pi}{8}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{8}$	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$
$f(x)$	0	2	0	-2	0	2	0	-2	0	2



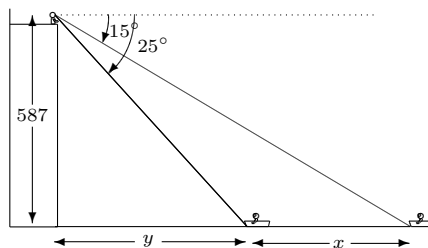
3. Desde el tope de un risco a $587m$ sobre el nivel del mar, los ángulos de depresión de dos botes alineados respectivamente son 15° y 25° . Encuentre la distancia entre los botes.

Solución $\tan 25^\circ = \frac{587}{y}$, $y = \frac{587}{\tan 25^\circ}$.

$$\tan 15^\circ = \frac{587}{x+y}, \quad x+y = \frac{587}{\tan 15^\circ},$$

$$x = \frac{587}{\tan 15^\circ} - \frac{587}{\tan 25^\circ} = 931,89.$$

La distancia es $931,89m$.



UNIVERSIDAD DE COSTA RICA.
FACULTAD DE CIENCIAS.
ESCUELA DE MATEMÁTICA.
MATERIA: MA-0125.
MATEMÁTICA ELEMENTAL.

II ciclo de 2002
I Examen Parcial.
Duración: 3 Horas.
21 de setiembre del 2002
65 puntos

I Parte: Conteste las siguientes preguntas en esta hoja. Presente los cálculos necesarios. (5 puntos cada uno).

1. Si $P(x) = 3x(x - 1)$ calcule $\frac{P(-4 + h) - P(-4)}{h}$.
2. Racionalice el denominador y simplifique la expresión $\frac{(x + 3)^2 - 16x^2}{\sqrt{2x - 1} - \sqrt{x}}$.
3. Encuentre el residuo que se obtiene de efectuar $(x^{23} + 8x^{20} + 6x^2 - 7) \div (x + 2)$.
4. Encuentre el conjunto de números reales que son solución de $\frac{x}{x-1} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2 - x}$.
5. Efectúe y exprese en la forma más simple usando notación radical:

$$\left[\sqrt{|1 - 2\sqrt{5}|} \right]^3 + |\sqrt{45} - 6|.$$

6. Encuentre todos los números reales que son solución de $3\sqrt{(15x - 13)} + \sqrt{7} = \sqrt{112}$.
7. Encuentre todos los números reales que son solución de la ecuación $|2x^2 - 21| = 15$.
8. Efectúe las operaciones y dé el resultado en forma de polinomio:

$$(-x - 5)^2 + 3(x + 2) - 2(-x + 3)^2.$$

II Parte: Las siguientes preguntas las debe contestar en su cuaderno de examen en forma completa.

1. Sea $P(x) = 2x^4 + 10x^3 - 36x^2 - 40x + 112$.
 - a) Calcule el coeficiente y el residuo que se obtiene de $P(x) \div (x^2 - 4)$. (4pts)
 - b) Factorice en forma completa $P(x)$. (5pts)
 - c) Resuelva la ecuación $P(x) = -3(x - 2)^2(x + 7)$. (4pts)
2. Encuentre todos los números reales con solución de la ecuación: (7pts)

$$(3x - 1)^8 = 15(3x - 1)^4 + 16.$$

3. Si k es un número real, resuelva el sistema de ecuaciones: (5pts)

$$\begin{cases} 4x - 15y = -7k - 4 \\ 6x - 35y = -23k - 6. \end{cases}$$

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA.
FACULTAD DE CIENCIAS.
ESCUELA DE MATEMÁTICA.
MATERIA: MA-0125.
MATEMÁTICA ELEMENTAL.

I ciclo de 2002
I Examen Parcial.
Duración: 3 Horas.
04 de mayo del 2002
60 puntos

I Parte: Conteste las siguientes preguntas. Presente los cálculos necesarios. (5 puntos cada una).

1. Efectúe y exprese en la forma más simple:

$$2|3\sqrt{5} - 9| - 3| - \sqrt{20} - 2| + |\sqrt[4]{25} - 2|.$$

Solución $2(-3\sqrt{5} + 9) - 3(\sqrt{20} + 2) + \sqrt{5} - 2 = -6\sqrt{5} + 18 - 3\sqrt{20} - 6 + \sqrt{5} - 2 = -6\sqrt{5} + 18 - 6\sqrt{5} - 6 + \sqrt{5} - 2 = -11\sqrt{5} + 10.$

2. Encuentre el conjunto de números reales que son solución de $\frac{-2x^2 - 3}{3x - 2} = -1.$

Solución $\frac{-2x^2 - 3}{3x - 2} = -1 \implies \frac{-2x^2 - 3}{3x - 2} + 1 = 0 \implies \frac{-2x^2 - 3 + 3x - 2}{3x - 2} = 0, x \neq \frac{2}{3} \implies \frac{-2x^2 + 3x - 5}{3x - 2} = 0 \implies -2x^2 + 3x - 5 = 0.$

$\Delta = 3^2 - 4(-2)(-5) = 9 - 40 = -31 < 0$, no tiene solución.

3. Efectúe la operación y dé el resultado en la forma más simple utilizando notación radical:

$$\sqrt{(2\sqrt{3} - 5)^2} + \sqrt[3]{(3 - 4\sqrt{3})^3} + \sqrt[5]{(\sqrt{3} - 2)^{10}}.$$

Solución $\sqrt{(2\sqrt{3} - 5)^2} + \sqrt[3]{(3 - 4\sqrt{3})^3} + \sqrt[5]{(\sqrt{3} - 2)^{10}} =$
 $|2\sqrt{3} - 5| + 3 - 4\sqrt{3} + (\sqrt{3} - 2)^2 =$
 $-2\sqrt{3} + 5 + 3 - 4\sqrt{3} + 3 - 4\sqrt{3} + 4 = -10\sqrt{3} + 15.$

4. Efectúe la operación y exprese el resultado final sin radicales en el denominador:

$$\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2} - 4} + \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}.$$

Solución $\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2} - 4} + \frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{2} + (2 - \sqrt{2})(3\sqrt{2} - 4)}{(3\sqrt{2} - 4)(\sqrt{2})} =$
 $\frac{2 + 6\sqrt{2} - 8 - 6 + 4\sqrt{2}}{3 \cdot 2 - 4\sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{2} - 12}{2(3 - 2\sqrt{2})} = \frac{5\sqrt{2} - 6}{3 - \sqrt{2}} =$
 $\frac{(5\sqrt{2} - 6)(3 + 2\sqrt{2})}{(3 - 2\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2})} = \frac{15\sqrt{2} + 20 - 18 - 12\sqrt{2}}{9 - 8} = \frac{3\sqrt{2} + 2}{1} = 3\sqrt{2} + 2.$

5. Si $P(x) = -x^4 + 3x^2$, calcule $P(\sqrt{3} - 2)$.

Solución $P(\sqrt{3} - 2) = -(\sqrt{3} - 2)^4 + 3(\sqrt{3} - 2)^2$

$$(\sqrt{3} - 2)^2 = 3 - 4\sqrt{3} + 4 = 7 - 4\sqrt{3}$$

$$(\sqrt{3} - 2)^4 = [(\sqrt{3} - 2)^2]^2 = (7 - 4\sqrt{3})^2 = 49 - 56\sqrt{3} + 48 = 97 - 56\sqrt{3}.$$

$$\text{Entonces } P(\sqrt{3} - 2) = -(97 - 56\sqrt{3}) + 3(7 - 4\sqrt{3}) = -97 + 56\sqrt{3} + 21 - 12\sqrt{3} = 44\sqrt{3} - 76.$$

6. Encuentre todos los números reales que son solución de $5 - 3|x - 1| = -4$.

Solución $5 - 3|x - 1| = -4 \implies -3|x - 1| = -4 - 5 \implies -3|x - 1| = -9 \implies |x - 1| = 3 \implies$

• $x - 1 = -3 \implies x = -2$

• $x - 1 = 3 \implies x = 4.$

$$S = \{-2, 4\}.$$

7. Encuentre todos los números reales que son solución de la ecuación:

$$\frac{(x^2 + x - 3)^2 - 9}{x^2 + 4x + 3} = 0.$$

Solución $\frac{(x^2 + x - 3)^2 - 3^2}{(x + 1)(x + 3)} = 0 \quad x \neq -1, x \neq -3$

$$\frac{(x^2 + x - 3 - 3)(x^2 + x - 3 + 3)}{(x + 1)(x + 3)} = 0 \implies \frac{(x^2 + x - 6)(x^2 + x)}{(x + 1)(x + 3)} = 0 \implies$$

$$\frac{(x + 3)(x - 2)x(x + 1)}{(x + 1)(x + 3)} = 0 \implies x - 2 = 0, \quad x = 0, \text{ o sea } x = 2, \quad x = 0: S = \{0, 2\}.$$

8. Factorice en forma completa el polinomio $9(x - 5)^3 - x^2(x - 5)^3$.

Solución $9(x - 5)^3 - x^2(x - 5)^3 = (x - 5)^3(9 - x^2) = (x - 5)^3(3 - x)(3 + x).$

II Parte. Las siguientes preguntas las debe contestar en el cuaderno de examen en forma completa.

1. Determine todos los números reales que son solución de $4\sqrt{1-x} - \sqrt{-3x} = 5$. (5 pts).

Solución

$$4\sqrt{1-x} - \sqrt{-3x} = 5 \implies 4\sqrt{1-x} = \sqrt{-3x} + 5 \implies (4\sqrt{1-x})^2 = (\sqrt{-3x} + 5)^2 \implies 16(1-x) =$$

$$(\sqrt{-3x})^2 + 10\sqrt{-3x} + 5^2 \implies 16 - 16x = -3x + 10\sqrt{-3x} + 25 \implies$$

$$16 - 16x + 3x - 25 = 10\sqrt{-3x} \implies -13x - 9 = 10\sqrt{-3x} \implies (-13x - 9)^2 = (10\sqrt{-3x})^2 \implies$$

$$169x^2 + 234x + 81 = -300x \implies 169x^2 + 534x + 81 = 0 \implies x_1 = -\frac{27}{169}, \quad x_2 = -3.$$

Prueba:

$$x = -\frac{27}{169}, \quad 4\sqrt{1 - \frac{27}{169}} - \sqrt{-3 \cdot -\frac{27}{169}} = 5 \implies 4\sqrt{\frac{196}{169}} - \sqrt{\frac{81}{169}} = 5 \implies 4 \cdot \frac{14}{13} - \frac{9}{13} = 5 \implies$$

$\frac{56}{13} - \frac{9}{13} = 5$, esto es falso, por lo tanto $-\frac{27}{169}$ no es solución.

$x = -3$, $4\sqrt{1-3} - \sqrt{-3-3} = 5 \implies 4\sqrt{4} - \sqrt{9} = 5 \implies 8 - 3 = 5 \implies 5 = 5$, esto es verdadero, por lo tanto -3 sí es solución. $S = \{-3\}$.

2. Encuentre el conjunto de todos los números reales que son solución de

$$x(x-7)^7 + 18(x-7)^6 = 0. \quad (5 \text{ pts}).$$

Solución $x(x-7)^7 + 18(x-7)^6 = 0 \implies (x-7)^6 [x(x-7) + 18] = 0 \implies$

$(x-7)^6(x^2 - 7x + 18) = 0$, esto es: $(x-7)^6 = 0 \implies x-7 = 0 \implies x = 7$.

$x^2 - 7x + 18 = 0$, $\Delta = -23$ no tiene solución. $S = \{7\}$.

3. Sea $P(x) = 4x^3 + x + 5$.

- a) Resuelva la ecuación $P(x) = 0$. (4 pts).

Solución $P(x) = 0$, -1 es un cero: $P(-1) = 4(-1)^3 + -1 + 5 = -4 - 1 + 5 = 0$.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 4 & 0 & 1 & 5 \\ & & -4 & 4 & -5 \\ \hline -1 & 4 & -4 & 5 & 0 \end{array}$$

$$P(x) = (x+1)(4x^2 - 4x + 5) = 0,$$

$$x+1 = 0 \implies x = -1$$

$4x^2 - 4x + 5 = 0$ no tiene solución ya que $\Delta = -64$. $S = \{-1\}$.

- b) Factorice en forma completa $P(x)$. (2 pts).

Solución $(x+1)(4x^2 - 4x + 5)$

- c) Resuelva la ecuación $P(x) = 13(x+1)$. (4 pts).

Solución $P(x) = 13(x+1) \implies (x+1)(4x^2 - 4x + 5) = 13(x+1) \implies$

$$(x+1)(4x^2 - 4x + 5 - 13) = 0 \implies (x+1)(4x^2 - 4x - 8) = 0 \implies$$

$$4(x+1)(x^2 - x - 2) = 0 \implies 4(x+1)(x+1)(x-2) = 0 \implies 4(x+1)^2(x-2) = 0 \implies$$

$$x+1 = 0, x-2 = 0 \implies x = -1, x = 2. S = \{-1, 2\}.$$

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA.
FACULTAD DE CIENCIAS.
ESCUELA DE MATEMÁTICA.
MATERIA: MA-0125.
MATEMÁTICA ELEMENTAL.

II CICLO DE 2002
II EXAMEN PARCIAL.
DURACIÓN: 3 HORAS
26 de octubre del 2002
70 PUNTOS

No se aceptarán reclamos de exámenes que contengan partes escritas con lápiz.

I Parte: Conteste las siguientes preguntas. Presente los cálculos necesarios en cada ejercicio. (5 puntos cada uno)

- Determine el conjunto de los números reales que son solución de $-2x^2 + 4x - 20 < 0$.
- Encuentre el dominio máximo de la función $g(x) = \sqrt[6]{7 - |3x - 1|}$.
- Calcule $(h \circ g)(x)$ si $h(x) = -x^2 + 3x - 1$ y $g(x - 4) = 3 - 2x$.
- Encuentre las ecuaciones de las rectas ℓ_1 y ℓ_2 si se intersecan perpendicularmente en el punto $P = (6, -2)$ y la recta ℓ_1 corta al eje x en 9.
- Encuentre el conjunto de números reales que son solución de $(3x - a)(4x - b) \geq 0$, con $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $4a - 3b < 0$.
- Determine el valor de k para que ℓ_1 y ℓ_2 sean perpendiculares, si $\ell_1 : y = \frac{x}{k-4} + \sqrt{2}$ y $\ell_2 : y = (k+2)x - 1$.
- Encuentre todos los números reales que son solución de $\left|3x - \frac{2}{3}\right| \geq \frac{7}{3}$.
- Si $f(x) = 5 + 4x - x^2$ encuentre la ecuación de la recta que pasa por $(2, f(2))$ y $(-1, f(-1))$.

II Parte

- Encuentre todos los números reales que son solución de $|2x^2 - 16x + 27| \leq 3$. (8 pts)
- Sean las funciones de dominio y codominio $\mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = -2x^2 + 10x - \frac{9}{2}, \quad g(x) = 2x - 1, \quad h(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right] \\ f(x) & \text{si } x \notin \left[\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right]. \end{cases}$$

- Represente gráficamente la función $h(x)$. (7 pts)
- Encuentre el ámbito de $f(x)$ y $h(x)$. (4 pts)
- Indique el conjunto donde la función $f(x)$ es creciente. (2 pts)
- Indique el conjunto donde la función $h(x)$ es creciente. (2 pts)

3. Encuentre el conjunto de todos los números reales que son solución de

$$2x(x-3)^9 - (x-3)^8(x+4) \geq 0.$$

(7 pts)

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA.
FACULTAD DE CIENCIAS.
ESCUELA DE MATEMÁTICA.
MATERIA: MA-0125.
MATEMÁTICA ELEMENTAL.

II CICLO DE 2002
EXAMEN DE AMPLIACIÓN.
DURACIÓN: 3 HORAS
9 de diciembre del 2002
100 PUNTOS

Este es un examen de desarrollo. Debe realizar todos los procedimientos en su cuaderno de examen. No se aceptarán reclamos de exámenes que contengan partes escritas con lápiz.

1. Encuentre el conjunto de todos los números reales que son solución de:

- a) $3 - 4 \sin^2 x = 0.$ (6 puntos)
 b) $\sqrt{5 - 3x} - \sqrt{x + \frac{16}{3}} = \sqrt{3}.$ (8 puntos)
 c) $\frac{3e^{-4x} + 10}{e^{-8x}} = 1.$ (6 puntos)
 d) $-9(x - 5)^3(x + 1) \geq (x - 5)^3(x + 1)^3.$ (8 puntos)

2. Encuentre el dominio máximo de la función:

- a) $h(x) = \frac{2\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[6]{4-|x^2-5|}}.$ (6 puntos)
 b) $f(x) = \frac{3}{2\ln(x)+1}.$ (5 puntos)
 c) $g(x) = \frac{2+3\sqrt{2}}{1+\tan x}.$ (5 puntos)

3. Considere la función $g(x) = \log_{0,5}(-2x + 1).$

- a) Indique el máximo dominio y ámbito de la función. (5 puntos)
 b) Defina en **forma completa** la función $g^{-1}(x).$ (5 puntos)
 c) Represente en un mismo gráfico $y = g(x)$ y $g^{-1}(x).$ (8 puntos)

4. Calcule el valor exacto de $\sin \alpha$, $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$, $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$ si α es un ángulo en posición estandar en el IV cuadrante y su lado terminal es perpendicular a la recta $4y - 3x + 2\pi = 0.$ (7 puntos)

5. Considere las funciones de dominio $\mathbb{R}$:

$$g(x) = -(1-x)(5-x), \quad h(x) = -x + 5, \quad f(x) = \begin{cases} h(x) & \text{si } x \in [2, 5] \\ g(x) & \text{si } x \notin [2, 5]. \end{cases}$$

- a) Represente gráficamente la función $f(x).$ (7 puntos)
 b) Indique el conjunto donde la función $g(x)$ es decreciente. (3 puntos)

- c) Indique el ámbito de la función $g(x)$. (3 puntos)
6. Considere el polinomio $P(x) = -3x^3 + 8x^2 + 147x - 392$.
- a) Calcule el valor exacto de $P(\sqrt{2} - 1)$. (4 puntos)
- b) Encuentre el cociente y el residuo de dividir $P(x)$ entre $Q(x)$, si
 $Q(x) = 3x^2 + 13x - 56$. (5 puntos)
- c) Resuelva la ecuación $P(x) = 0$. (5 puntos)
- d) Factorice al máximo el polinomio $P(x)$. (4 puntos)

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA.
FACULTAD DE CIENCIAS.
ESCUELA DE MATEMÁTICA.
MATERIA: MA-0125.
MATEMÁTICA ELEMENTAL.

II CICLO DE 2002
EXAMEN DE SUFICIENCIA.
DURACIÓN: 3 HORAS
30 de noviembre del 2002
80 PUNTOS

Este es un examen de desarrollo. Debe realizar todos los procedimientos en su cuaderno de examen. No se aceptarán reclamos de exámenes que contengan partes escritas con lápiz.

1. Considere el polinomio $P(x) = -3x^3 + 8x^2 + 147x - 392$.
 - a) Calcule el valor exacto de $P(\sqrt{2} - 1)$. (4 puntos)
 - b) Encuentre el cociente y el residuo de dividir $P(x)$ entre $Q(x)$ si $Q(x) = 3x^2 + 13x - 56$. (5 puntos)
 - c) Resuelva la ecuación $P(x) = 0$. (5 puntos)
 - d) Factorice al máximo el polinomio $P(x)$. (4 puntos)
2. Encuentre el conjunto de números reales que son solución de:
 - a) $4^x - 6 \cdot 2^{x+1} + 32 = 0$. (5 puntos)
 - b) $3\sqrt{3-x} - \sqrt{x+7} = \sqrt{20}$. (5 puntos)
 - c) $2\cos^2 x - \sin(2x) = 0$. (5 puntos)
 - d) $\frac{x}{x^2-1} + \frac{3x}{x+1} \leq \frac{1-x}{-3x+3}$. (5 puntos)
3. Considere las funciones de domino $\mathbb{R}$:

$$g(x) = -(1-x)(5-x) \quad h(x) = -x + 5 \quad f(x) = \begin{cases} h(x) & \text{si } x \in [2, 5] \\ g(x) & \text{si } x \notin [2, 5] \end{cases}$$

- a) Represente gráficamente la función $f(x)$. (7 puntos)
 - b) Indique el conjunto donde la función $g(x)$ es decreciente. (3 puntos)
 - c) Indique el ámbito de la función $g(x)$. (3 puntos)
4. Sea $h :]-\infty, 2[\rightarrow \mathbb{R}$ y $h(x) = 1 + \log_2(2-x)$.
 - a) Defina en forma completa la función $h^{-1}(x)$. (4 puntos)
 - b) Represente un mismo gráfico $y = h(x)$ y $y = h^{-1}(x)$. (7 puntos)
 - c) Encuentre el conjunto $S = \{x \in \mathbb{R} / h(x) \leq 0\}$. (2 puntos)

5. Si $\sin^2 \alpha = \frac{25}{169}$, $\cos^2 \beta = \frac{64}{289}$, α es un ángulo del *III* cuadrante y β un ángulo del *IV* cuadrante.

Calcule $\sin(\alpha - \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$, $\tan(2\alpha)$. (6 puntos)

6. Determine el máximo dominio de las siguientes funciones:

a) $g(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 3}}{x^2 - 3x + 2}$. (5 puntos)

b) $h(x) = \ln\left(\frac{x-7}{x}\right)$. (5 puntos)

Tarea Número 1, II ciclo 2002

1. Efectúe y exprese en notación radical:

$$\sqrt[4]{(4\sqrt{2}-13)^4} + \sqrt[3]{(3\sqrt{2}-5)^6} - \sqrt[5]{(2\sqrt{2}+1)^5}.$$

2. Efectúe y exprese en notación radical:

$$(3\sqrt{5}-4)(2-\sqrt{5}) - (\sqrt{2}-\sqrt{7})(\sqrt{2}+\sqrt{7}) - \left(\sqrt{3-\sqrt{125}}\right)^4.$$

3. Resuelva la siguiente ecuación en el conjunto de los números naturales:

$$x^2 - 6 = 10.$$

4. Si

$$A = [-\sqrt{18}, -2] \cup \{0\} \cup [\sqrt{5}, +\infty[$$

y

$$B = \{x \in \mathbb{R} / -\frac{2\pi}{3} \leq x < 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} / 16 < 2x \leq 20\}$$

encuentre $A \cup B$ y $A \cap B$. Expréselos en notación de intervalo.

5. Encuentre dos números racionales
- a
- y
- b
- tales que
- $\sqrt{64+32\sqrt{3}} = a\sqrt{3} + b$
- .

6. Encuentre un número racional
- Γ
- expresado en forma fraccionaria que cumpla:

$$\Gamma = 1 + \frac{3}{10} + \frac{7}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{7}{10000} + \cdots + \frac{3}{10^{2n-1}} + \frac{7}{10^{2n}} + \cdots, \quad \text{con } n \in \mathbb{N}.$$

7. Dé el resultado en la forma más simple utilizando notación radical (no use aproximaciones decimales):

$$2|\sqrt{343} - \sqrt{20}| - |\sqrt[5]{32} - \sqrt{5}| + \frac{1}{2}|2\sqrt[6]{125} - \sqrt{112}|.$$

8. Efectúe la operación y exprese el resultado final sin radicales en el denominador:

$$\frac{\sqrt{12}}{4-\sqrt{3}} - \frac{2\sqrt{3}+5}{\sqrt{12}}.$$

9. Efectúe la operación
- $\left(\sqrt[3]{\frac{54}{125}} - \sqrt[3]{16}\right) \div \frac{3}{5}\sqrt[3]{2}$
- .

10. Sean
- a, b, c
- números reales que cumplen
- $2a + b \leq -3c + b \leq \frac{5}{2}b$
- .

Exprese sin usar valor absoluto en la forma más simple el número que se obtiene de $2|4a - 3b| - |b + 2c| - 5|4a + 6c|$.

Tarea Número 2, II ciclo 2002

1. Efectúe las operaciones indicadas y exprese el resultado en forma de polinomio:
 $(3c + 1)(2c^2 + 5)(c^3 + 4)$.
2. Factorice el polinomio $P(x)$ y halle los ceros, si $P(x) = 6x^4 - 11x^3 - 51x^2 - 6x + 8$.
3. Halle el cociente y residuo al efectuar $P(x) \div Q(x)$, con $P(x) = 6x^4 - 11x^3 - 51x^2 - 6x + 8$ y $Q(x) = 6x^2 + x - 1$.
4. Simplifique la siguiente expresión $\frac{P(x+h) - P(x)}{h}$, con $P(x) = x^2 - 7x$.
5. Racionalice los denominadores y simplifique la expresión $\frac{x^3 + 2x - 33}{2\sqrt{x-1} - \sqrt{8}}$.
6. Halle el valor de k para que el siguiente polinomio tenga una sola raíz real:
 $P(x) = 4x^2 + (k+3)x + k$.
7. Considere el siguiente polinomio $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2kx^2 - 3kx - 20x + 20k$.
 - a) Verifique que -4 es cero de $P(x)$.
 - b) Halle todos los ceros de $P(x)$.
 - c) Factorice $P(x)$.
8. Simplifique la expresión $\frac{3x}{x^3 - 8} - \frac{1}{2(x^2 - 4)} + \frac{-2x}{(x+2)(x^2 + 2x + 4)}$.
9. Factorice el forma completa el polinomio $(4x - 3)^6 + (4x - 3)^4(5x - 12)(x - 2)$.
10. Sea $B(x) = x^3 - 4x^2 - 4x + 16$ y $A(x) = x^2 - 4$.
 - a) Pruebe que $A(x)$ es factor de $B(x)$.
 - b) Factorice $B(x)$ en forma completa.
 - c) Factorice el polinomio $P(x) = [B(x)^3] - 27(x-4)^3(x+4)^3$.

Tarea Número 3, II ciclo 2002

Determine el conjunto solución de las siguientes ecuaciones:

1. $3(x-7)^2 - 5(-x+2)^2 - 3(-x-1)^2 + (x-1)(x+6) = -619.$
2. $x^2 + \sqrt{3}x - 3 = 0.$
3. $2(x+5)^{\frac{2}{3}} - (x+5)^{\frac{1}{3}} = 3.$
4. $\frac{7}{x^2-4} + \frac{2}{x^2-3x+2} = \frac{4}{x^2+x-2}.$
5. $\sqrt{4x-1} + \sqrt{2x+3} = 1.$
6. $|6x^2 + 8x - 19| = 21.$
7. $x(2x-1)^5 + (1-2x)^4(x^2-10x-70) = 0.$
8. $\sqrt{(x^2-20)^2} = 16.$
9. Encuentre las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} 2x - 5y = 10, \\ 4x + 3y = 7. \end{cases}$$
10. Resuelva el siguiente problema:

En una bolsa hay 230 colones en monedas de 5, 25 y 50 colones. Si el número de monedas de 5 colones es igual al doble del número de monedas de 25 colones menos 2, determine la cantidad de monedas de cada clase que hay en la bolsa.

Tarea número 4, II ciclo 2002

Determine el conjunto solución de las siguientes inecuaciones:

1. $\frac{6x-1}{2} \geq \frac{-3x+1}{3} - \frac{x^2-9}{(x-3)(x+3)}.$
2. $\frac{x-2}{5} - \frac{x+3}{2} > \sqrt{5} + \frac{x}{10}.$
3. $\frac{5x+2}{x-3} > \frac{x-7}{x^2-x-6}.$
4. $\frac{3x-1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} \leq \frac{3}{4}.$
5. $\frac{-2x}{x^2-4x+16} + \frac{1}{x-4} > \frac{-2x^2-17x+12}{x^3+64}.$
6. $|6x^2+8x-19| \leq 21.$
7. $\sqrt{\left(\frac{3x-4}{2x+1}\right)^2} \leq 2.$
8. $2ax - a^2 \geq 2xb - b^2$ tal que $0 > b > a.$
9. $x(2x+5)^7(x-2)^2 - (2x+5)^6(x-2)^2(x^2+14x-14) \leq 0.$
10. Encuentre los valores k (reales) para que la ecuación $x(x+2k-1) = 5-4k$ tenga dos soluciones reales distintas.

Tarea Número 5, II ciclo 2002

1. Sea $f: [-3, 6] \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = x^2 - 2x - 8$, ℓ_1 la recta que pasa por los puntos $(-3, f(-3))$ y $(6, f(6))$, ℓ_2 la recta perpendicular a ℓ_1 que pasa por el punto mínimo de $y = f(x)$.
 - a) Encuentre las ecuaciones de ℓ_1 y ℓ_2 .
 - b) Represente en un mismo eje de coordenadas las rectas ℓ_1 y ℓ_2 .
2. Encuentre las ecuaciones de las rectas ℓ_1 y ℓ_2 si se intersecan perpendicularmente en el punto $P = (6, -2)$ y la recta ℓ_1 corta al eje x en 9.
3. Determine el dominio máximo de la función definida por $f(x) = \frac{3\sqrt[4]{x-1} - \sqrt[3]{1-2x}}{7x - x^2}$.
4. Calcule $(f \circ g)(x)$, si $f(x) = -2x^2 + x - 5$ y $g(x+2) = -3x + 5$.
5. Determine todos los valores posibles de k para que la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (kx)^2 - 3kx - 9x^2 + 6$ sea cóncava hacia abajo.
6. Sean las funciones de dominio $\mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{7}{2}$ y $g(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{41}{6}$.
 - a) Determine los puntos de intersección de $y = f(x)$ con $y = g(x)$.
 - b) Indique el ámbito de $f(x)$ y $g(x)$.
7. Sea la función $h(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{7}{2} & \text{si } x \in [-4, 2] \\ -\frac{2}{3}x + \frac{41}{6} & \text{si } x \in]-\infty, -4[\end{cases}$.
Represente gráficamente la función $h(x)$ e indique su ámbito.
8. Encuentre el dominio máximo de la función $g(x) = \sqrt[6]{5 - |3x - 2|}$.
9. Calcule $\frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$, si $f(x) = \frac{-3x}{2x-1}$.
10. Sean las rectas $\ell_1: y = 3kx - 2x + 6$ y $\ell_2: y = 2kx + x$.
 - a) Determine el valor de k si las rectas son paralelas.
 - b) Determine el valor de k si las rectas son perpendiculares.

Tarea Número 6, II ciclo 2002

1. Encuentre el conjunto de solución de todos los números reales que son solución de la ecuación $\log_{\frac{1}{2}}(3x+4) + \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{4} - \frac{1}{12}\right) = -1$.

Solución

$$\log_{\frac{1}{2}}\left[(3x+4)\left(\frac{x}{4} - \frac{1}{12}\right)\right] = -1 \implies \log_{\frac{1}{2}}\left[\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{3}\right] = -1 \implies \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \implies \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{3} = 2 \implies \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{7}{3} = 0 \implies x = \frac{4}{3}, x = -\frac{7}{3}.$$

Prueba

$$x = \frac{4}{3} \implies \log_{\frac{1}{2}}\left(3 \cdot \frac{4}{3} + 4\right) + \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{\frac{4}{3}}{4} - \frac{1}{12}\right) = -1 \implies \log_{\frac{1}{2}}(8) + \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}\right) = -1 \implies$$

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(8 \cdot \frac{1}{4}\right) = -1 \implies \log_{\frac{1}{2}}(2) = -1 \text{ Verdadero.}$$

$$x = -\frac{7}{3} \implies \log_{\frac{1}{2}}\left(3 \cdot -\frac{7}{3} + 4\right) + \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{-\frac{7}{3}}{4} - \frac{1}{12}\right) = -1 \implies \log_{\frac{1}{2}}(-3) + \log_{\frac{1}{2}}\left(-\frac{2}{3}\right) = -1$$

No está definido, $-\frac{7}{3}$ no es solución.

El conjunto de solución es $S = \{\frac{4}{3}\}$.

2. Considere la función $g: \mathbb{R} \rightarrow]-\infty, 4[$ definida $g(x) = 4 - \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Defina en forma completa la función $g^{-1}(x)$. Represente en un mismo sistema de ejes las funciones $g(x)$, $g^{-1}(x)$ y $h(x)$, si $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $h(x) = x$.

Solución $g(x) = 4 - \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Para hallar la función $g^{-1}(x)$ hacemos $y =$

$$4 - \left(\frac{1}{2}\right)^x \implies \left(\frac{1}{2}\right)^x = 4 - y \implies$$

$$x = \log_{\frac{1}{2}}(4 - y); \text{ esto es } g^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{2}}(4 - x),$$

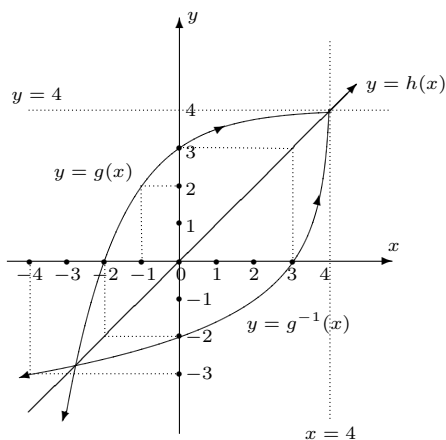
donde $g^{-1}:]-\infty, 4[\rightarrow \mathbb{R}$.

x	-3	-2	-1	0	1
$g(x)$	-4	0	2	3	$\frac{7}{2}$

x	-4	0	2	3	$\frac{7}{2}$
$g^{-1}(x)$	-3	-2	-1	0	1

$x = 4$: asíntota vertical de $g^{-1}(x)$.

$y = 4$: asíntota horizontal de $g(x)$.



3. Encuentre el conjunto de números reales que son solución de $8^{2x+\frac{2}{3}} + 7 \cdot 8^x = 30$.

Solución

$$8^{2x} \cdot 8^{\frac{2}{3}} + 7 \cdot 8^x = 30 \implies 4(8^x)^2 + 7 \cdot 8^x - 30 = 0.$$

Sea $u = 8^x$, entonces se tiene $4u^2 + 7u - 30 = 0$.

$$\Delta = 529 \implies \sqrt{\Delta} = 23, u = \frac{-7 \pm 23}{8} \implies u_1 = -\frac{15}{4} \text{ y } u_2 = 2.$$

$$u = 8^x \implies 8^x = -\frac{15}{4} \text{ no tiene solución.}$$

$$u = 8^x \implies 8^x = 2 \implies 2^{3x} = 2 \implies 3x = 1 \implies x = \frac{1}{3}, S = \left\{ \frac{1}{3} \right\}.$$

4. Considere la función definida por $g(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x+1)$.

a) Calcule el máximo dominio de $g(x)$.

b) Represente gráficamente $y = g(x)$ en su dominio máximo.

Solución

a) $x+1 > 0 \implies x > -1$, Dominio máximo = $] -1, \infty [$.

b) $y = \log_{\frac{1}{3}}(x+1) \implies \left(\frac{1}{3}\right)^y = x+1 \implies \left(\frac{1}{3}\right)^y - 1 = x$.

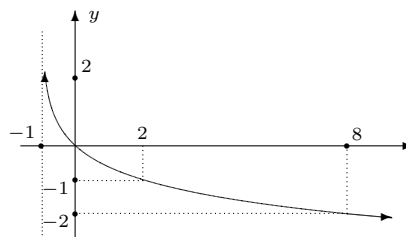
$$y = -2 \implies x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - 1 = 8.$$

$$y = -1 \implies x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} - 1 = 2.$$

$$y = 0 \implies x = \left(\frac{1}{3}\right)^0 - 1 = 0.$$

$$y = 1 \implies x = \left(\frac{1}{3}\right)^1 - 1 = -\frac{2}{3}.$$

x	8	2	0	$-\frac{2}{3}$
y	-2	-1	0	1



5. Determine el dominio máximo de la función $h(x) = \frac{\log_2(x^2 - 4)}{2 - \log_4(25 - x^2)}$.

i) $x^2 - 4 > 0 \implies (x-2)(x+2) > 0$.

	-2	2
$x-2$	-	+
$x+2$	+	-
$(x-2)(x+2)$	+	+

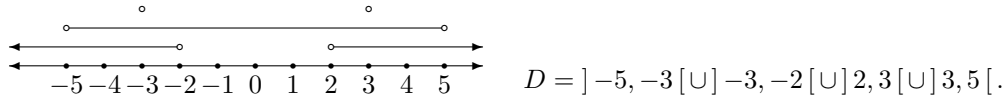
$$x \in] -\infty, -2[\cup] 2, +\infty [.$$

ii) $25 - x^2 > 0 \implies (5-x)(5+x) > 0$.

	-5	5
$5+x$	-	+
$5-x$	+	-
$(5-x)(5+x)$	+	+

$$x \in] -5, 5 [.$$

$$\text{iii) } 2 - \log_4(25 - x^2) \neq 0 \implies \log_4(25 - x^2) \neq 2 \implies 25 - x^2 \neq 16 \implies x^2 \neq 9 \implies x \neq \pm 3.$$



6. Determine el dominio máximo de la función $h(x) = \sqrt{125 - 0,2^x}$.

$$125 - 0,2^x \geq 0$$

$$0,2^x \leq \left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$$

$$-0,2^x \geq -125$$

$$0,2^x \leq 0,2^{-3}$$

$$0,2^x \leq 125$$

$$x \geq -3 \text{ (} f(x) = 0,2^x \text{ es decreciente).}$$

$$0,2^x \leq 5^3$$

$$D : [-3, \infty[.$$

7. Encuentre el conjunto de solución de la ecuación $6^{4-3x} - 6^{1-3x} = 46440$.

$$6^4 \cdot 6^{-3x} - 6^1 \cdot 6^{-3x} = 46440$$

$$6^{-3x} = 36$$

$$6^{-3x}(6^4 - 6^1) = 46440$$

$$6^{-3x} = 6^2$$

$$6^{-3x}(1296 - 6) = 46440$$

$$-3x = 2$$

$$6^{-3x} \cdot 1290 = 46440$$

$$x = -\frac{2}{3}$$

$$6^{-3x} = \frac{46440}{1290}$$

$$S = \left\{-\frac{2}{3}\right\}.$$

8. Sea $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $g(x) = 2 - 4^{|x-1|}$.

a) Determine los puntos de intersección de $y = g(x)$ con los ejes.

b) Calcule $g(\frac{5}{2})$ y $g(-\frac{1}{2})$.

c) Represente gráficamente la función e indique el ámbito.

d) Encuentre el conjunto $S = \{x \in \mathbb{R} / -2 \leq g(x) \leq 1\}$.

Solución

a) $y = 0$ (eje x).

$$x - 1 = -\frac{1}{2} \implies x = \frac{1}{2}.$$

$$2 - 4^{|x-1|} = 0$$

Corta al eje x en $(\frac{3}{2}, 0)$ y $(\frac{1}{2}, 0)$.

$$4^{|x-1|} = 2$$

$x = 0$ (eje y).

$$4^{|x-1|} = 4^{\frac{1}{2}}$$

$$g(0) = 2 - 4^{|0-1|} = 2 - 4 = -2.$$

$$|x - 1| = \frac{1}{2} \implies$$

Corta al eje y en $(0, -2)$.

$$x - 1 = \frac{1}{2} \implies x = \frac{3}{2}$$

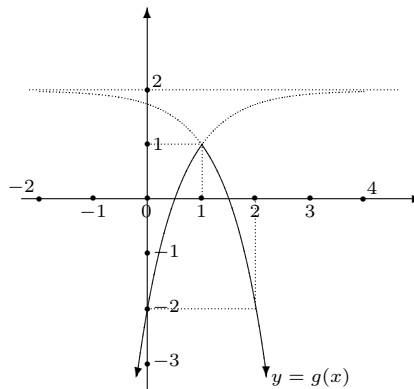
- b) $g\left(\frac{5}{2}\right) = 2 - 4^{\left|\frac{5}{2}-1\right|} = 2 - 4^{\frac{3}{2}} = -6$, pasa por $\left(\frac{5}{2}, -6\right)$.

$g\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 - 4^{\left|-\frac{1}{2}-1\right|} = 2 - 4^{\frac{3}{2}} = -6$,
pasa por $\left(-\frac{1}{2}, -6\right)$.

c) $g(x) = \begin{cases} 2 - 4^{x-1} & \text{si } x \geq 1 \\ 2 - 4^{1-x} & \text{si } x < 1. \end{cases}$

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$g(x)$	-62	-14	-2	1	-2	-14	-62

d) $S = [0, 2]$.



9. Sea $h:]-\infty, 2[\longrightarrow \mathbb{R}$ y $h(x) = 1 + \log_2(2 - x)$. Defina en forma completa la función $h^{-1}(x)$.
Represente en un mismo gráfico $y = h(x)$ y $y = h^{-1}(x)$.

Solución $h(x) = 1 + \log_2(2 - x) \implies y = 1 + \log_2(2 - x) \implies y - 1 = \log_2(2 - x) \implies$

$2^{y-1} = 2 - x \implies x = 2 - 2^{y-1} \implies$
 $y = 2 - 2^{x-1}.$

$h^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow]-\infty, 2[$,

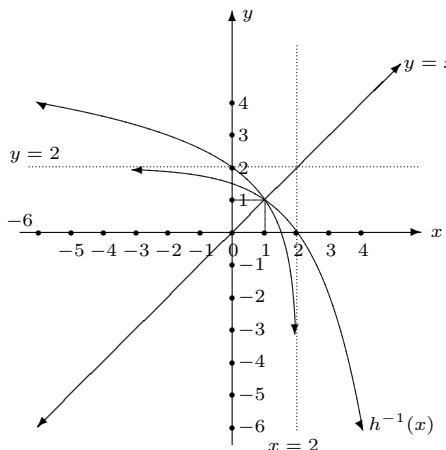
$h^{-1}(x) = 2 - 2^{x-1}.$

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$h^{-1}(x)$	$\frac{15}{8}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{3}{2}$	1	0	-2	-6

x	$\frac{15}{8}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{3}{2}$	1	0	-2	-6
$h(x)$	-2	-1	0	1	2	3	4

$x = 2$ es asíntota de $h(x)$.

$y = 2$ es asíntota de $h^{-1}(x)$.



10. Determine la solución exacta de la ecuación $7 \cdot 3^{x-1} = 5 \cdot 2^{x+1}$.

Solución

$\log(7 \cdot 3^{x-1}) = \log(5 \cdot 2^{x+1}) \implies \log 7 + \log 3^{x-1} = \log 5 + \log 2^{x+1} \implies$

$\log 7 + (x-1) \log 3 = \log 5 + (x+1) \log 2 \implies \log 7 + x \log 3 - \log 3 = \log 5 + x \log 2 + \log 2 \implies$

$x \log 3 - x \log 2 = \log 5 + \log 2 + \log 3 - \log 7 \implies x(\log 3 - \log 2) = \log 5 + \log 2 + \log 3 - \log 7 \implies$

$$x = \frac{\log 5 + \log 2 + \log 3 - \log 7}{\log 3 - \log 2} \implies x = \frac{\log(\frac{5 \cdot 2 \cdot 3}{7})}{\log(\frac{3}{2})} \implies x = \frac{\log(\frac{30}{7})}{\log(\frac{3}{2})}.$$

$$S = \left\{ \frac{\log(\frac{30}{7})}{\log(\frac{3}{2})} \right\}$$

Tarea Número 7, II ciclo 2002

1. Encuentre el conjunto de solución de la ecuación $\sin(6x) + \sin(3x) = 0$.

Solución Sea $u = 3x$, $2u = 6x$.

$$\sin(2u) + \sin(u) = 0 \implies 2 \sin u \cos u + \sin u = 0 \implies \sin u(2 \cos u + 1) = 0$$

$$\sin u = 0 \implies u = 0 + 2k\pi, u = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$2 \cos u + 1 = 0 \implies \cos u = -\frac{1}{2} \implies u = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, u = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\bullet u = 0 + 2k\pi \implies 3x = 0 + 2k\pi \implies x = 0 + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\bullet u = \pi + 2k\pi \implies 3x = \pi + 2k\pi \implies x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\bullet u = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \implies 3x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \implies x = \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\bullet u = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \implies 3x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \implies x = \frac{4\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

2. Calcule $\sin(2\alpha)$, $\cos(2\alpha)$, $\tan(2\alpha)$ si $P = (-7, 24)$ es un punto en el lado terminal del ángulo en posición estándar de α .

Solución $C = \sqrt{(-7)^2 + 24^2} \implies 25$.

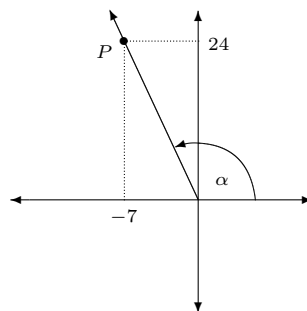
$$\sin \alpha = \frac{24}{25}, \cos \alpha = -\frac{7}{25}, \tan \alpha = -\frac{24}{7}.$$

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{24}{25} \cdot \frac{-7}{25} \implies \sin(2\alpha) = -\frac{336}{625}.$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \left(-\frac{7}{25}\right)^2 - \left(\frac{24}{25}\right)^2 = \frac{49 - 576}{625} = -\frac{527}{625} \implies \cos(2\alpha) = -\frac{527}{625}.$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{\sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)} = \frac{-\frac{336}{625}}{-\frac{527}{625}} = \frac{336}{527} \implies \tan(2\alpha) = \frac{336}{527}.$$

$$\text{Otra forma } \tan(2\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \frac{-24}{7}}{1 - \left(\frac{-24}{7}\right)^2} = \frac{-\frac{48}{7}}{-\frac{527}{49}} = \frac{336}{527}.$$



3. Verifique la identidad $\sin(a - b) + \sin(a + b) = 2 \sin a \cos b$.

Solución

$$\sin(a - b) + \sin(a + b) = 2 \sin a \cos b$$

$$\sin a \cos b - \sin b \cos a + \sin a \cos b + \sin b \cos a =$$

$$\sin a \cos b + \sin a \cos b = 2 \sin a \cos b.$$

4. Considere la función $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con $h(x) = \cos x - \sqrt{3} \sin x$.

- a) Encuentre el conjunto de números reales que son solución de $h(x) = 0$.
 b) Encuentre el conjunto de números reales que son solución de $h(x) = -2$.
 c) Encuentre el ámbito de la función de $h(x)$.

Solución $h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad h(x) = \cos x - \sqrt{3} \sin x$

$$h(x) = 2 \left(\frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sqrt{3} \sin x \right)$$

$$h(x) = 2 \left(\sin \frac{\pi}{6} \cos x - \cos \frac{\pi}{6} \sin x \right)$$

$$h(x) = 2 \sin \left(\frac{\pi}{6} - x \right).$$

a) $h(x) = 0 \implies 2 \sin \left(\frac{\pi}{6} - x \right) = 0 \implies \sin \left(\frac{\pi}{6} - x \right) = 0 \implies$

$$\frac{\pi}{6} - x = 0 + 2k\pi \implies x = \frac{\pi}{6} - 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{6} - x = \pi + 2k\pi \implies x = -\frac{5\pi}{6} - 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

b) $h(x) = -2 \implies 2 \sin \left(\frac{\pi}{6} - x \right) = -2 \implies \sin \left(\frac{\pi}{6} - x \right) = -1 \implies \frac{\pi}{6} - x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \implies x = -\frac{4\pi}{3} + 2k\pi.$

$$S = \{ x \in \mathbb{R} / x = -\frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$$

c) $[-2, 2] = \text{Ámbito}.$

5. Encuentre el valor exacto de $\sin(\frac{\pi}{12})$, $\cos(\frac{\pi}{12})$, $\tan(\frac{\pi}{12})$.

Solución Se tiene que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$.

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \implies$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \implies$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}.$$

6. Si $\sin^2 \alpha = \frac{25}{169}$, $\cos^2 \beta = \frac{64}{289}$, α es un ángulo del III cuadrante y β un ángulo del IV cuadrante, calcule $\sin(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$, $\tan(\alpha + \beta)$.

Solución Como α está en III cuadrante entonces $\sin \alpha < 0$ y $\cos \alpha < 0 \implies \sin \alpha = \frac{-5}{13}$ y $\cos \alpha = \frac{-12}{13}$.

Como β está en IV cuadrante entonces $\sin \beta < 0$ y $\cos \beta > 0 \implies \cos \beta = \frac{8}{17}$ y $\sin \beta = \frac{-15}{17}$.

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha + \beta) &= \frac{-5}{13} \cdot \frac{8}{17} + \frac{-15}{17} \cdot \frac{-12}{13} = \frac{-40 + 180}{221} = \frac{140}{221}. \\ \cos(\alpha + \beta) &= \frac{-12}{13} \cdot \frac{8}{17} - \frac{-5}{13} \cdot \frac{-15}{17} = \frac{-96 - 75}{221} = -\frac{171}{221}. \\ \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\frac{140}{221}}{-\frac{171}{221}} = -\frac{140}{171}.\end{aligned}$$

7. Verifique la identidad $\frac{1 + \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} = \frac{\operatorname{sen} \theta}{1 - \cos \theta}$.

Solución

$$\frac{1 + \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} = \frac{(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)}{\operatorname{sen} \theta (1 - \cos \theta)} = \frac{1 - \cos^2 \theta}{\operatorname{sen} \theta (1 - \cos \theta)} = \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{\operatorname{sen} \theta (1 - \cos \theta)} = \frac{\operatorname{sen} \theta}{1 - \cos \theta}.$$

8. Verifique la identidad $\frac{1 - \sec^2 \alpha}{1 - \csc^2 \alpha} = \tan^4 \alpha$.

Solución

$$\frac{1 - \sec^2 \alpha}{1 - \csc^2 \alpha} = \frac{1 - (1 + \tan^2 \alpha)}{1 - (1 + \cot^2 \alpha)} = \frac{-\tan^2 \alpha}{-\cot^2 \alpha} = \frac{\frac{\tan^2 \alpha}{1}}{\frac{1}{\tan^2 \alpha}} = \tan^4 \alpha.$$

9. Encuentre todos los números reales que son solución de la ecuación $2 \operatorname{sen}^2 x + 3\sqrt{2} \cos x + 2 = 0$.

Solución $2(1 - \cos^2 x) + 3\sqrt{2} \cos x + 2 = 0$

$$-2 \cos^2 x + 3\sqrt{2} \cos x + 4 = 0$$

$$u = \cos x, -2u^2 + 3\sqrt{2}u + 4 = 0$$

$$\Delta = (3\sqrt{2})^2 - 4(-2)(4) = 18 + 32 = 50 \implies \sqrt{\Delta} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

$$u = \frac{-3\sqrt{2} \pm 5\sqrt{2}}{-4} \implies u_1 = \frac{2\sqrt{2}}{-4} = \frac{-\sqrt{2}}{2}, u_2 = \frac{-8\sqrt{2}}{-4} = 2\sqrt{2}, \cos x = 2\sqrt{2} \text{ no tiene solución.}$$

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \implies x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} / x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

10. El asta de una bandera está en la esquina de la azotea de un edificio de 112 pies de altura. Desde un punto P situado en el mismo plano horizontal que la base del edificio, el ángulo de elevación de la línea visual a la base del asta es $33^\circ 42'$ y el ángulo de elevación de la visual a la punta del asta es $37^\circ 30'$. Encuentre la altura del asta.

x : altura del asta.

$$\tan 33^\circ 42' = \frac{112}{y} \Rightarrow y = \frac{112}{\tan 33^\circ 42'}$$

$$\tan 37^\circ 30' = \frac{x + 112}{y} \Rightarrow y \tan 37^\circ 30' = x + 112$$

$$\Rightarrow \frac{112}{\tan 33^\circ 42'} \tan 37^\circ 30' - 112 = x$$

$$\Rightarrow 112 \left(\frac{\tan 37^\circ 30'}{\tan 33^\circ 42'} - 1 \right) = x \Rightarrow 16,8625 = x.$$

La altura del asta de la bandera es 16,8625 pies.

