Universidad de Costa Rica
Escuela de Matemática

Lo que un estudiante debe saber de Matemática al entrar a la Universidad

Prof. Juan Félix Martínez
Prof. Rolando Murillo
Profa. Julieta Rodríguez
Prof. Alí Sheik

Serie: Cabécar

Edición de 1973
2006

Contenidos

Introducción Joven estudiante:

Le suministraremos una lista de las carreras universitarias que requieren en mayor o menor grado, de los conocimientos, técnicas, destrezas y habilidades que se adquieren en el estudio y la práctica de la Matemática que el colegio ofrece:

1. Matemática
2. Física
3. Química
4. Informática
5. Economía
6. Estadística
7. Administración de negocios
8. Administración pública
9. Ingeniería civil
10. Ingeniería mecánica
11. Ingeniería química
12. Ingeniería industrial
13. Ingeniería eléctrica
13. Ingeniería agrícola
14. Perito topógrafo
15. Arquitectura
16. Agronomía
17. Microbiología
18. Sociología
19. Farmacia
20. Antropología
21. Odontología

Si ya usted dispuso seguir cualquiera de estas carreras y, como es lo natural, no desee atrasos en sus estudios, debe aprobar en el primer semestre de su permanencia en la Universidad, según sea la carrera elegida, uno de estos cursos: MA-1210 Cálculo I, MA-1001 Cálculo I, Matemática elemental.

El éxito o fracaso en tales cursos depende, en gran parte, del aprovechamiento de la Matemática del colegio en todos sus múltiples aspectos.

Ahora bien, en los últimos tiempos el éxito en estos cursos no ha sido todo lo numeroso que la Universidad, en general, y la Escuela de Matemática, en particular, desean.

Por esta razón la Escuela de Matemática le está ofreciendo, a fin de que usted tenga la oportunidad de refrescar algunos de los aspectos de la Matemática del liceo, unas notas sobre la teoría de esta materia, y una colección de ejercicios y problemas que usted puede resolver aplicando los conocimientos adquiridos en el colegio. De este modo tiene usted a mano el material necesario para hacer una revisión de su Matemática del liceo, e iniciar así su Matemática Universitaria con mayor seguridad, y por lo tanto, con mejores posibilidades de éxito.

Como ya se dijo, son muy pocas las notas referentes a la teoría de la Matemática que usted estudió en el liceo que se den aquí, por cuanto esa teoría fue bien desarrollada en el colegio por sus profesores, y puede ser consultada en los cuadernos de apuntes, en las asignaciones que el profesor le proponía y en los textos usados, cada vez que lo juzgue conveniente para la mejor comprensión de los conceptos particulares que se propone revisar.

Es claro que usted puede notar en estos apuntes la ausencia de algunos de los temas o de los tipos de ejercicios estudiados en el colegio. Conviene también que haga una revisión, consultar sus notas, de esos asuntos tratados en el colegio y omitidos aquí. Recuerde que todo lo estudiado en Matemática en el colegio y en la escuela pri-

maria también, tiene su aplicación aquí en la Escuela de Matemática. Más aun recuerde que todo lo estudiado en Matemática en cualquier época, tiene su anterior aplicación en estudios más avanzados.
Estos apuntes representan el primer intento o primer paso de la Escuela Matemática de la Universidad de Costa Rica para ponerse en contacto con sus futuros alumnos. Han sido hechos consultando los programas y los textos de Matemática de segunda enseñanza en uso, así como varios libros, clásicos y modernos, sobre la materia. Se hicieron con la idea de que vengan a constituir algo así como un puente que una dos épocas en los años de estudio de la carrera del profesional que debe recorrer un trecho, grande o pequeño, en la senda de la Matemática.
A este profesional la Escuela de Matemática le desea hoy, como ayer, el mejor de los éxitos en su paso, de uno o varios semestres, por las aulas de la Escuela.

Capítulo 1

Conjuntos

1.1 Algunas nociones sobre conjuntos

Símbolos lógicos utilizados en los razonamientos

	Símbolo	Se lee	Ejemplo
Implicación	$\longrightarrow$	Implica	$p \longrightarrow q$
Equivalente	$\Longleftrightarrow$	Equivalente si y sólo si	$p \Longleftrightarrow q$ p es equivalente a q
Cuantificadores	$\forall$ $\exists$	Para todo Existe al menos	$\forall\, x : P$ Para todo x se tiene la propiedad P $\exists\, x : P$ existe al menos x que tiene la propiedad P

Nociones generales de la teoría de conjuntos

Noción	Notación	Comentario
Conjunto universal o de referencia	E	Conjunto formado por todos los elementos
Pertenencia	$a \in A$	a es un elemento del conjunto A
No pertenencia	$a \notin A$	a no es un elemento del conjunto A
Igualdad de conjuntos	$A = B$	Los conjuntos A y B tienen los mismos elementos
No igualdad de conjuntos	$A \neq B$	Los conjuntos A y B no tienen los mismos elementos
Igualdad	$a = b$	a y b representan el mismo objeto
No igualdad	$a \neq b$	a y b no representan el mismo objeto

Conjunto definido por extensión	$\{a, b, c, d, e\}$	Denota el conjunto cuyos elementos son a, b, c, d, e
Conjunto definido por comprensión	$\{x \in E/P(x)\}$	Denota el conjunto de los elementos de E con la propiedad P
Inclusión impropia	$A \subseteq B$	Todo elemento de A es elemento de B
Inclusión propia	$A \subset B$	$A \subseteq B$ y $A \neq B$ (o sea existen elementos en B que no existen en A)
Conjunto vacío	$\emptyset$	Conjunto que no posee elementos
Intersección	$A \cap B$	Conjunto de elementos comunes a A y B $A \cap B = \{x \in E/x \in A$ y $x \in B\}$
Unión	$A \cup B$	Conjunto de elementos que son de A o de B $A \cup B = \{x \in E/x \in A$ o $x \in B\}$
Complemento	$\complement_E^A$	Si $A \subseteq E$, complemento de A en E es el conjunto de los elementos de E que no están en A
Diferencia	$A \backslash B$	Conjunto de elementos que pertenecen a A y no a B; $A \backslash B = \{x \in E/x \in A$ y $x \notin B\}$
Diferencia simétrica	$A \Delta B$	Conjunto de elementos que pertenecen a A o a B pero no a ambos $A\Delta B = (A \cup B)\backslash(A \cap B) = A\backslash B \cup B\backslash A$
Par Ordenado (Duplo)	(x, y)	Conjunto de dos elementos ordenados
Producto cartesiano	$A \times B$	Conjunto de todos los duplos (x, y) tales que $x \in A$ y $x \in B$
Elementos equivalentes por una relación de equivalencia R definida en A	$x \sim y$ $(x \equiv y)$ (xRy)	Conjunto de todos los $(x, y) \in R$, donde $R \subseteq A \times A$

En el programa de séptimo año se encuentran[1]:

a) Propiedades de inclusión

Reflexividad	$A \subseteq A$		
	$A \subset A$		
Antisimetría	$A \subseteq B$ y $B \subseteq A$	$\longrightarrow$	$A = B$
	$A \subset B$ y $B \subset A$	$\longrightarrow$	$A = B$
Transitividad	$A \subseteq B$ y $B \subseteq C$	$\longrightarrow$	$A \subseteq C$
	$A \subset B$ y $B \subset C$	$\longrightarrow$	$A \subset B$

[1] Se refiere a los programas del M.E.P. de 1973

b) Propiedad de la intersección:

Conmutatividad	$A \cap B = B \cap A$
Asociatividad	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Idempotencia	$A \cap A = A$
Absorción	$A \cap \emptyset = \emptyset$ (El conjunto vacío es asborbente para la intersección)

c) Propiedades de la unión:

Conmutatividad	$A \cup B = B \cup A$
Asociatividad	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
Idempotencia	$A \cup A = A$
Neutro	$A \cup \emptyset = A$. (El conjunto vacío es neutro para la unión).

d) Propiedad de la diferencia:

No conmutativa $\quad A \backslash B \neq B \backslash A$

e) Propiedades de la diferencia simétrica:

Comutatividad	$A \Delta B = B \Delta A$
Asociatividad	$A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$

Nota 1) De la igualdad y de la inclusión de conjuntos se deduce que si A y B son dos conjuntos, entonces $A = B$ si y sólo sí $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

2) Si no hay ambigüedad $\complement_E A$ se puede representar por $\overline{A}$ o A'

Además de las propiedades de las operaciones de conjuntos señaladas en el programa, conviene considerar algunas otras que se tratan corrientemente en los ejercicios que se ven en el séptimo[2] grado. Tales propiedades son:

$\complement_E \complement_E A = A$, $\overline{\overline{A}} = A$, $(A')' = A$.

$\complement_A \emptyset = A$, $\complement_A A = \emptyset$

$A \backslash B = A \cap \overline{B}$, $A \backslash A = \emptyset$, $A \backslash \emptyset = A$, $\emptyset \backslash A = \emptyset$.

$A \cap \overline{A} = \emptyset$, $A \subseteq B \longrightarrow A \cup \complement_B A = B$, $A \subseteq B \Longleftrightarrow A \cap B = A$.

Distributividad

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$

$A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$

Nota

1) Estas cuatro últimas relaciones, en particular las dos primeras, se conocen con el nombre de **Leyes de Morgan**.

2) Algunas de las propiedades presentadas se demuestran en los ejercicios que se dan a continuación.

1.1.1 Ejercicios resueltos

1. ¿Qué se puede decir de los elementos a, b, c, si $\{a\} = \{b, c\}$?

   $\big(\{a\} = \{b, c\} \longrightarrow a = b = c\big)$.

2. ¿Qué se puede decir de los elementos a, b, c, d, e, si $\{a, b\} = \{c, d, e\}$?

   Sugerencia: distinguir dos caso 1) $a = b$ y 2) $a \neq b$

[2] Se refiere a los programas del M.E.P. de 1973

1) $a = b \longrightarrow \{a, b\} = \{a\}$.

Por lo tanto $\big(\{a\} = \{c, d, e\}\big) \longrightarrow a = c = d = e$.

2) $a \neq b$ Se consideran dos subcasos.

1er.

a) Si $(a = c = d) \longrightarrow b = e$

b) Si $(a = c = e) \longrightarrow b = d$

c) Si $(a = d = e) \longrightarrow b = c$

2do.

a) Si $(b = c = d) \longrightarrow a = e$

b) Si $(b = c = e) \longrightarrow a = d$

c) Si $(b = d = e) \longrightarrow a = c$.

3. ¿Qué se puede decir de los conjuntos A, B, C sabiendo que $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ y $C \subseteq A$?

   Mostraremos que los conjuntos A, B, C son iguales, esto es $A = B = C$.

   1er. Mostraremos que $A = B$.

   Se tiene por hipótesis $A \subseteq B$, faltará mostrar que $B \subseteq A$ y por lo tanto $A = B$

   Sea $x \in B \longrightarrow x \in C$ (pues $B \subseteq C$), $\longrightarrow x \in A$ (pues $C \subseteq A$).

   Por lo tanto $x \in A$, $\forall\, x \in B$, luego $B \subseteq A$. Por lo tanto $A = B$.

   2do. Mostraremos $B = C$

   Se tiene por hipótesis $B \subseteq C$, faltará mostrar que $C \subseteq B$ y por lo tanto $B = C$.

   Sea $x \in C \longrightarrow x \in A$ (pues $C \subseteq A$)$\longrightarrow x \in B$ (pues $A \subseteq B$).

   Por lo tanto $x \in B$, $\forall\, x \in C$, luego $C \subseteq B$. Por lo tanto $B = C$.

   Se tiene que $A = B$ y $B = C$, por lo tanto $A = C$, luego $A = B = C$.

4. Mostraremos que $A \cap (A \cap B) = A \cap B$ y que $A \cup (A \cup B) = A \cup B$.

   1er. Mostraremos que $A \cap (A \cap B) = A \cap B$

   Por propiedad asociativa de la intersección se tiene que $A \cap (A \cap B) = (A \cap A) \cap B$

   Ahora bien $A \cap A = A$ (Idempotencia)

   Por lo tanto $A \cap (A \cap B) = A \cap B$.

   2do. Mostraremos que $A \cup (A \cup B) = A \cup B$, por propiedad asociativa de la unión se tiene que $A \cup (A \cup B) = (A \cup A) \cup B$

   Ahora bien $A \cup A = A$ (Idempotencia)

   Por lo tanto $A \cup (A \cup B) = A \cup B$.

   ¿Qué se puede decir de los conjuntos $A \cup (A \cap B)$ y $A \cap (A \cup B)$?

   Por la propiedad distributiva de la unión respecto a la intersección se tiene $A \cup (A \cap B) = (A \cup A) \cap (A \cup B) = A \cap (A \cup B)$.

   Por lo tanto $A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B)$.

5. A y B designan conjuntos cualesquiera.

   a) Demuestre que $A \subseteq B$ es equivalente a $A \cup B = B$

b) Demuestre que $A \subseteq B$ es equivalente a $A \cap B = A$

c) ¿Qué se puede decir de los conjuntos A y B si $A \cup B = B$ y $A \cap B = B$?

a) Hay que demostrar $A \subseteq B \Longleftrightarrow A \cup B = B$.

1er. "($\longrightarrow$)" Se debe probar $A \subseteq B \longrightarrow A \cup B = B$.

En efecto $x \in A \cup B \longrightarrow x \in A$ o $x \in B$, pero como $A \subseteq B$, en todo caso $x \in B$.

Inversamente $x \in B \longrightarrow x \in A \cup B$, luego $A \cup B = B$, por lo tanto $A \subseteq B \longrightarrow A \cup B = B$

2do. "($\Longleftarrow$)" Se debe demostrar $A \cup B = B \longrightarrow A \subseteq B$.

En efecto $x \in A \longrightarrow x \in A \cup B \longrightarrow x \in B$ (pues $A \cup B = B$), luego $A \subseteq B$ (pues $x \in A \longrightarrow x \in B$). Por lo tanto $A \cup B = B \longrightarrow A \subseteq B$.

b) Hay que demostrar $A \subseteq B \Longleftrightarrow A \cap B = A$.

1er. "($\longrightarrow$)"

Se debe probar $A \subseteq B \longrightarrow A \cap B = A$

En efecto $x \in A \cap B \longrightarrow x \in A$

Inversamente, como $A \subseteq B$, $x \in A \longrightarrow x \in A \cap B$, luego $A \cap B = A$, por lo tanto $A \subseteq B \longrightarrow A \cap B = A$.

2do. "($\Longleftarrow$)"

Se debe demostrar $A \cap B = A \longrightarrow A \subseteq B$.

En efecto como $A = A \cap B$, $x \in A \longrightarrow x \in A \cap B$ y como $x \in A \cap B \longrightarrow x \in B$, luego $A \subseteq B$, por lo tanto $A \cap B = A \longrightarrow A \subseteq B$.

c) $A \cup B = B \longrightarrow A \subseteq B$ por a),
$A \cap B = B \longrightarrow B \subseteq A$ por b), es decir $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$, por lo tanto $A = B$.

6. Sean los conjuntos A, B, C tal que $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces $A \subset C$.

   Se tiene que $x \in A \longrightarrow x \in B$ (pues $A \subset B$) y $x \in B \longrightarrow x \in C$ (pues $B \subset C$), luego $x \in A \longrightarrow x \in C$, por lo tanto $A \subset C$.

7. Si A y E son dos conjuntos y $A \subset E$, entonces $A \cap \complement_E A = \emptyset$.

   Se hace esta prueba por contradicción.

   Suponga que existe $x \in A \cap \complement_E A$, entonces $x \in A$ y $x \in \complement_E A$, lo cual implica $x \in A$ y $x \in E$ y $x \notin A$, que es contradictorio, pues la primera y la tercera de estas relaciones no pueden ocurrir simultáneamente. Por lo tanto:
   $$A \cap \complement_E A = \emptyset\,.$$

8. Si A, B, C son conjuntos, $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$ (Una de las leyes de Morgan).

   Debe probarse que:

   a) $A \backslash (B \cup C) \subseteq (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$ y

   b) $(A \backslash B) \cap (A \backslash C) \subseteq A \backslash (B \cup C)$.

   Se tiene:

   a) $x \in A \backslash (B \cup C) \longrightarrow x \in A$ y $x \notin (B \cup C)$, luego $x \notin B$ y $x \notin C$; pero como $x \in A$, entonces $x \in A \backslash B$ y $x \in A \backslash C$, luego $x \in (A - B) \cap (A - C)$, por lo tanto $A \backslash (B \cup C) \subseteq (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$.

   b) $x \in (A \backslash B) \cap (A \backslash C) \longrightarrow x \in A \backslash B$ y $x \in A \backslash C$, luego $x \in A$ y $x \notin B$ y $x \in A$ y $x \notin C$, por consiguiente $x \in A$ y $x \notin (B \cup C)$. Por lo tanto $(A \backslash B) \cap (A \backslash C) \subseteq A \backslash (B \cup C)$.

9. Probar que $A\Delta A = \emptyset$.

   Se tiene $A\Delta A = (A \cup A)\backslash(A \cap A) = A\backslash A = \emptyset$ por definición de diferencia simétrica, idempotencia y definición de diferencia.

10. Probar que $A\Delta\, \emptyset = A$.

    Se tiene $A\Delta\, \emptyset = (A \cup \emptyset)\backslash(A \cap \emptyset) = A\backslash\, \emptyset = A$, (por definición de diferencia simétrica, neutro de la unión, absorbente de la intersección y definición de diferencia).

1.1.2 Ejercicios no resueltos

1. ¿Bajo qué condiciones es cierta cada una de las siguientes afirmaciones?:

   (a) $\complement_F E = \emptyset$
   (b) $E \cup F = F$
   (c) $E \cup F = E \cap F$
   (d) $A \cap B = B$
   (e) $A \cap B = \emptyset$
   (f) $A \cup B = \emptyset$
   (g) $A \times B = A \times A$
   (h) $A \times B = B \times A$
   (i) $A \cup B \neq A$
   (j) $\complement_B A \cup \complement_B C = \complement_B A \cap C$
   (k) $\complement_B A = \emptyset$
   (l) $\complement_A B = A$
   (m) $\big(E \cup B\big) \subset B$
   (n) $\big(A \cup B\big) \cup D \subset D$
   (o) $A \cap A = \emptyset$.

2. Exprese por extensión los siguientes conjuntos:

   (a) $A = \{x \in \mathbb{N}/x = 2k,\ k \in \mathbb{N}\ \wedge\ k < 6\}$
   (b) $B = \{x \in \mathbb{N}/x = 3k,\ k \in \mathbb{N}\ \wedge\ 4 \leq k \leq 8\}$.

3. Si $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{4, 6, 3\}$:

   (a) Exprese por extensión los siguientes conjuntos.

      i. $B \times A$
      ii. $A \times B$
      iii. $A \cap B$
      iv. $A\Delta B$
      v. $A \cup B$
      vi. $\complement_B A$
      vii. $\complement_A B$.

   (b) ¿Son $B \times A$ y $A \times B$ iguales? Si no son diga cuándo pueden ser iguales.
   (c) ¿Son $\complement_B A$ y $\complement_A B$ iguales? Si no son diga cuándo pueden ser iguales.

4. $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

   (a) ¿Cuántos subconjuntos propios tiene el conjunto B?
   (b) ¿Cuántos subconjuntos impropios tiene el conjunto B?
   (c) ¿Cuántos subconjuntos tiene B?

5. Dado el conjunto $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ se pide:

(a) Calcular la unión y la intersección de los subconjuntos de E siguientes:

$A = \{1, 3, 4\}$ $B = \{1, 4, 6\}$ $C = \{1, 3, 5\}$ $D = \{2, 4, 6\}$.

(b) Calcular $\overline{A}$; $\overline{B}$; $\overline{A \cap B}$; $\overline{A \cup B}$.

(c) Comprobar que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ y $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

(d) Comprobar que $(A \cap B) \cup A = A \cap (A \cup B) = A$.

(e) Verificar que los cuatro subconjuntos $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $A \cap B$, $\overline{A \cup B}$ forman una partición de E.

6. Verificar por medio de un ejemplo la distributividad de la unión con respecto a la intersección y la distributividad de la intersección con respecto a la unión. Esto es:

   (a) $(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$

   (b) $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$.

7. Verificar por medio de un ejemplo

   (a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (Asociatividad de la unión).

   (b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (Asociatividad de la intersección).

8. Verificar, por medio de ejemplos, las siguientes relaciones:

   (a) $(A \cup B) \backslash C = (A \backslash C) \cup (B \backslash C)$

   (b) $A \backslash (B \backslash C) = (A \backslash B) \cup (A \cap C)$

   (c) $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \backslash C$

   (d) $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$

   (e) $A \backslash B = A \Delta (A \Delta B)$

   (f) $A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B)$

   (g) $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$

   (h) $A \Delta B = C \longrightarrow A \Delta C = B$

   (i) $A \Delta C = B \Delta C \longrightarrow A = B$

   (j) $\overline{A \Delta B} = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$.

1.2 Conjuntos numéricos

Después del estudio de los elementos de la teoría de conjuntos se trataron en liceo los conjuntos numéricos corrientes:

1. De los números naturales que se representaron por $\mathbb{N}$.

2. De los números enteros que se representaron por $\mathbb{Z}$.

3. De los números racionales que se representaron por $\mathbb{Q}$.

4. De los números reales que se representaron por $\mathbb{R}$.

Se trataron en el séptimo[3] año el conjunto de los números naturales y el conjunto de los números enteros; en el octavo año el conjunto de los números racionales y en el noveno el de los reales.

En el estudio de los números naturales se adquirieron conceptos, entre otros, como los de “múltiplo”, “divisor o factor”, “número primo”, “número compuesto”, “números primos relativos”, “descomponer un número en sus factores primos”, “máximo común divisor”, “mínimo común múltiplo”,etc. Estos conceptos, que se estudiaron referidos a los números naturales, pueden generalizarse a los otros conjuntos numéricos, y son de uso corriente

[3] Se refiere a los programas del M.E.P. de 1973

en todas las ramas de la Matemática.

Al estudiar los conjuntos numéricos en el orden que se siguió en el liceo, puede notarse cómo "operaciones" que no es posible efectuar en un determinado conjunto, puede efectuarse en otro conjunto; o bien como "ecuaciones" que no tienen solución en un determinado conjunto, tienen solución en otro conjunto. Así $x + 5 = 1$ no tiene solución en el conjunto de los números naturales, pero sí en el de los enteros: $x = -4$; $x^2 - 2 = 0$ no tiene solución en el conjunto de los números racionales, pero sí en el de los reales $x = -\sqrt{2}$ y $x = \sqrt{2}$.

Se observó de este modo que el conjunto de los números enteros es una aplicación del conjunto de los números naturales, el conjunto de los números racionales una aplicación del conjunto de los números enteros, y el conjunto de los números reales es un aplicación de los números racionales. En el transcurso del tiempo el hombre fue haciendo estas ampliaciones cada vez que necesitó una mayor libertad en los cálculos. Conviene recordar pues:

a) La cadena de inclusiones: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

b) Que de los conjuntos numéricos estudiados en el que permite mayor libertad en los cálculos, es el de los números reales. Por lo tanto se procede a destacar este conjunto.

Propiedades de las operaciones adición $(+)$ y multiplicación $(\cdot)$ en el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$.

$\forall\, a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$ se tiene:

	Adición	Multiplicación
Cerrada	$a + b \in \mathbb{R}$	$a{\cdot}b \in \mathbb{R}$
Asociativa	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a{\cdot}(b{\cdot}c) = (a{\cdot}b){\cdot}c{\cdot}$
Conmutativa	$a + b = b + a$	$a{\cdot}b = b{\cdot}a$
Elemento neutro	cero 0, tal que $a + 0 = 0 + a = a$	unidad 1, tal que $a{\cdot}1 = 1{\cdot}a = a$
Inverso o simétrico	opuesto $(-a)$, tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$	recíproco a^{-1}, tal que $a \neq 0$ y $a{\cdot}a^{-1} = a^{-1}{\cdot}a = 1$
Distributiva	$a{\cdot}(b + c) = a{\cdot}b + a{\cdot}c$	$(a + b){\cdot}c = a{\cdot}c + b{\cdot}c$

Nota

1. La propiedad 5, inverso o simétrico, permite introducir la operación de "sustracción" (o de "división"), cuyo objeto es deshacer lo que la adición (o la multiplicación) habían hecho.

   Cada número real tiene su opuesto y la suma de un número real y de su opuesto es cero; esto permite definir:

   $$\boxed{a - b = a + (-b),}$$

   donde $(-b)$ es el opuesto de b, con lo cual se facilita la introducción de la "sustracción". Análogamente se define la "división" por medio del recíproco:

   $$\boxed{\frac{a}{b} = a{\cdot}b^{-1} \quad (b \neq 0),}$$

   donde b^{-1} es el recíproco de b.

2. De esas propiedades se deduce también:

   Si $a + b = a + c$, entonces $b = c$
   Si $a{\cdot}b = a{\cdot}c$, $(a \neq 0)$, entonces $b = c$.

Simplificación

Recuérdese ahora cuáles de las propiedades de las operaciones adición y multiplicación en el conjunto de los números reales se cumplen en los otros conjuntos numéricos: en el conjunto de los racionales se cumplen las propiedades $1, 2, 3, 4, 5, 6$, esto es, todas; en el conjunto de los números enteros se cumplen también estas propiedades para la adición y en la multiplicación no se cumple la propiedad 5; en el conjunto de los números naturales se cumplen las propiedades $1, 2, 3, 4$ y 6, no se cumple la propiedad 5.

Respecto a las operaciones "sustracción" y "división" conviene recordar que tienen sus respectivas propiedades, las cuales se dedujeron fácilmente por analogía con las propiedades de la adición y la multiplicación. Así por ejemplo, se vio que la sustracción y la división son cerradas en los conjuntos de los números reales y racionales; la sustracción es cerrada en el conjunto de los números enteros, pero no en el de los naturales, y la división no es cerrada en el conjunto de los números enteros ni en el de los naturales.

Como ejercicio, revise las propiedades de la sustracción y de la división en los diferentes conjuntos numéricos. Conviene tener presente también que los cuatro conjuntos numéricos que se estudiaron en el colegio son "<u>ordenados</u>" y que dados dos números cualesquiera a, b en uno, en cualquiera de esos conjuntos una y sólo una de las relaciones siguientes es cierta:

$$\boxed{a < b \quad \text{o} \quad a = b \quad \text{o} \quad b < a \quad \text{(Ley de tricotomía)}}$$

Recordemos aquí otro concepto de gran importancia relativo a los números reales, el concepto de <u>valor absoluto</u>, de un número real x que se representa por $|x|$, se define:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \ \ x \geq 0 \\ -x & \text{si} \ \ x < 0. \end{cases}$$

Así: $|5| = 5, \quad |0| = 0, \quad |-2| = -(-2) = 2.$
Resulta entonces que el valor absoluto de un número real es <u>positivo</u> o <u>cero</u>. Es importante recordar también las propiedades de las igualdades y de las desigualdades de los números reales. Puede resumirse así:
Igualdades

1) $a = b \Longleftrightarrow a + c = b + c.$

2) $a = b \longrightarrow ac = bc$ y si $ac = bc$, con $c \neq 0 \longrightarrow a = b.$

3) $\forall\, m \in \mathbb{N}$, $a = b \longrightarrow a^m = b^m$ y si $a^m = b^m \longrightarrow a = b$ si m es impar y $|a| = |b|$ si m es par.

4) Si a y b son positivos: $a = b \Longleftrightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b}$ y $\sqrt{a^2} = \sqrt{b^2} \Longleftrightarrow a = b.$

5) $a = a_1, b = b_1, \ldots, r = r_1 \longrightarrow a + b + \cdots + r = a_1 + b_1 + \cdots + r_1.$

Desigualdades

1) $a < b \Longleftrightarrow a + c < b + c.$

2) $a < b \Longleftrightarrow \begin{cases} ac < bc & \text{si} \quad c > 0 \\ ac > bc & \text{si} \quad c < 0. \end{cases}$

3) $\forall\, m \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$,
Si $0 < a < b \longrightarrow a^m < b^m$.
Si $a < b < 0 \longrightarrow \begin{cases} a^m < b^m \text{ si } m \text{ es impar} \\ a^m > b^m \text{ si } m \text{ es par.} \end{cases}$
Si $ab < 0$, nada puede decirse de a^m y b^m.

4) $0 < a < 1 \longrightarrow a^m < a$ y $a > 1 \longrightarrow a^m > a.$

5) Si $a > 0$ y $b > 0$, entonces $a < b \longrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$.

6) $0 < a < 1 \Longleftrightarrow a < \sqrt{a} < 1$

7) $a > 1 \Longleftrightarrow \sqrt{a} < a$

8) $a < a_1, b < b_1, \ldots, r < r_1 \longrightarrow a + b + \cdots + r < a_1 + b_1 + \cdots + r_1$.

1.2.1 Ejercicios sobre temas tratados en los números naturales

Ejercicios resueltos

1) Hallar los divisores de los números 12, 19, 25 y 47.
Solución Los divisores de 12 son: 1, 2, 3, 4, 6 y 12.
Los divisores de 19 son: 1 y 19 (número primo).
Los divisores de 25 son: 1, 5 y 25.
Los divisores de 47 son: 1 y 47 (número primo).

2) Determinar cuáles de los siguientes números son primos 57, 89, 131, 291, 953.
Solución 57 no es primo (tiene más de dos divisores).
89 es primo (tiene dos únicos divisores 1 y 89).
131 es primo (tiene dos únicos divisores 1 y 131).
291 no es primo.
953 es primo.

3) Determinar si son primos relativos los números

(a) 6 y 15 (b) 16 y 21 (c) 23 y 40 (d) 49 y 50 (e) 91 y 143

Solución

a) Los divisores de 6 son 1, 2, 3, 6 y los divisores de 15 son 1, 3, 5, 15. Como además de 1 tienen el divisor común 3, no son primos relativos.

b) Los divisores de 16 son 1, 2, 4, 8, 16 y los divisores de 21 son 1, 3, 7, 21. Como el único divisor común de 16 y 21 es 1, estos números son primos relativos.

c) Primos relativos.

d) Primos relativos.

e) No son primos relativos.

4) Descomponer en sus factores primos los números 84, 101, 720, 1001.

Solución
$$\begin{array}{r|l} 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad 84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7.$$

$\begin{array}{r|l} 101 & 101 \end{array}$ 101 es primo. $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$ $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$.

5) Hallar el máximo común divisor de 2520, 720 y 540.

$$\begin{array}{r|l} 2520 & 2 \\ 1260 & 2 \\ 630 & 2 \\ 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$
$2520 = 2^3{\cdot}3^2{\cdot}5{\cdot}7$

$$\begin{array}{r|l} 720 & 2 \\ 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$
$720 = 2^4{\cdot}3^2{\cdot}5$

$$\begin{array}{r|l} 540 & 2 \\ 270 & 2 \\ 135 & 3 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$
$540 = 2^2{\cdot}3^3{\cdot}5$

El M.C.D $(2520, 720, 540) = 2^2{\cdot}3^2{\cdot}5 = 180$

6) Hallar el mínimo común múltiplo de los números 2520, 720, 540
$2520 = 2^3{\cdot}3^2{\cdot}5{\cdot}7$ $\qquad 720 = 2^4{\cdot}3^2{\cdot}5$ $\qquad 540 = 2^2{\cdot}3^3{\cdot}5$.
El m.c.m. $(2520, 720, 540) = 2^4{\cdot}3^3{\cdot}5{\cdot}7 = 15120$.

1.2.2 Ejercicios no resueltos

1) Determinar si los siguientes números son primos o compuestos: $311, 433, 511, 703, 1259$.

2) Determinar si son primos entre sí (primos relativos).

   (a) 18 y 35
   (b) 31 y 62
   (c) 48 y 49
   (d) 51 y 85
   (e) 33 y 65
   (f) 73 y 90.

3) Calcular el máximo común divisor de:

   (a) $420, 360, 300$
   (b) $1485, 2475, 5445$
   (c) $735, 1029, 1176, 1617$.

4) Calcular el mínimo común múltiplo de:

   (a) $105, 150, 175$
   (b) $52, 65, 169$
   (c) $56, 65, 70, 91$.

Respuestas

1) primo; primo; compuesto; compuesto; primo.

2) (a) primos relativos
   (b) no son primos relativos
   (c) primos relativos
   (d) no son primos relativos
   (e) primos relativos
   (f) primos relativos.

3)

(a) 60 (b) 495 (c) 147.

4) (a) 1050 (b) 3380 (c) $3640.$

1.2.3 Ejercicios sobre propiedades de las operaciones en los conjuntos de los números naturales, enteros, racionales

1) Demuestre que la división no es cerrada en el conjunto de los números naturales, enteros, racionales.

2) Recuerde: un número primo es un número natural que tiene exactamente dos números naturales diferentes como divisores. Demuestre que la adición no es cerrada en el conjunto de los números primos, mediante un contraejemplo.

3) Demuestre que la multiplicación no es cerrada en el conjunto de los números primos, mediante un contraejemplo.

4) Muestre usando las propiedades de la multiplicación y la adición las siguientes igualdades:
a) $-(a+b) = -a-b \quad \forall\, a, b \in \mathbb{Z}$
b) $-(a-b) = -a+b \quad \forall\, a, b \in \mathbb{Z}$.

5) Nombre las propiedades ilustradas en cada uno de los ejemplos siguientes:

(a) $3+7=7+3$
(b) $7{\cdot}42$ es un número natural.
(c) $(x{\cdot}y){\cdot}z = x{\cdot}(z{\cdot}y)$
(d) $12+(3+4) = 12+(4+3)$.

6) Demuestre con un contraejemplo que en el conjunto de los números impares, la adición no es cerrada.

7) En el conjunto de los números enteros, resuelva las siguientes ecuaciones:

(a) $x+3=5$
(b) $3-5x=7$
(c) $-p+6=1$
(d) $-3x=0$.

8) Encuentre el valor de x en la siguiente ecuación; establezca a qué conjunto pertenece dicho valor $\dfrac{11}{2} - x = 3$.

9) Establezca cuales de las siguientes ecuaciones no tienen solución en el conjunto de los números enteros:

(a) $3x = 102$ (b) $2x-1=4$ (c) $x+10=6$.

10) Resuelva:

(a) $\dfrac{1}{2}\Big(1-\dfrac{1}{4}\Big)$
(b) $3\Big(\dfrac{2}{4}-1\Big)$
(c) $-4\Big(3+\dfrac{1}{2}\Big)$
(d) $-\dfrac{1}{5}\Big(\dfrac{7}{8}-\dfrac{1}{6}\Big)$
(e) $\dfrac{0,5-0,11}{0,3}$
(f) $(0,8){\cdot}\dfrac{(0,7+0,3)}{(0,5)}$.

11) Indique cómo se puede obtener el número racional que corresponde al número entero dos, mediante la notación: $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$.

12) En el conjunto de los números racionales resuelva cada una de las siguientes ecuaciones:

(a) $2m + \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$

(b) $3x = 7$

(c) $-2y = 9$

(d) $4z + 2 = -3$

(e) $\frac{1}{2}a - \frac{1}{3} = 4$

(f) $\frac{2}{3-y} = \frac{1}{y+2}$

(g) $\frac{3(x-5)}{2} = \frac{2(3-5x)}{3}$.

13) Encuentre el valor de $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$ si $\frac{3a}{4a+7b} = 5$.

14) Encuentre el valor de $\frac{5y^2 + 2z^2 + 3zy}{2zy}$ sabiendo que $\frac{y}{z} = \frac{2}{5}$.

15) ¿Para qué valores de x se cumple la siguiente igualdad: $\frac{11}{2} - x = 3$?

16) Resuelva la siguiente ecuación y determine a qué conjunto pertenece el valor de x en dicha ecuación: $\frac{1-x}{1+x} = 2$, con $x \neq -1$.

Capítulo 2

Potencias y raíces

Otros conceptos que deben tener muy claros son los relativos a potencias y raíces, porque son de gran uso en todas las ramas de la Matemática. Se resumen estos conceptos de la siguiente manera:

2.1 Potencias

Definición 2.1.1 *Para* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *y* $m, n \in \mathbb{N}$*:*

$$a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a \cdot a}_{m \text{ veces}},$$

con $m \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$.

Convenciones $a^0 = 1 (a \neq 0)$

$a^1 = a$

$a^{-m} = \dfrac{1}{a^m} (a \neq 0)$

Reglas de Cálculo $(a \cdot b \cdot c \cdots)^m = a^m \cdot b^m \cdot c^m \cdots$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}, (b \neq 0)$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, (a \neq 0)$$

Otras propiedades $a = b \Longleftrightarrow a^{2m+1} = b^{2m+1}$

$$|a| = |b| \Longleftrightarrow a^{2m} = b^{2m}$$

$$a > 0 \longrightarrow a^m > 0$$

$$a < 0 \longrightarrow \begin{cases} a^m > 0 & \text{si} \quad \text{m es par} \\ a^m < 0 & \text{si} \quad \text{m es impar.} \end{cases}$$

2.2 Raíces

Definición 2.2.1 *Para* $a, b \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, $b \geq 0$ *y* $m, n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$*:*

$$\sqrt[m]{a} = b \Longleftrightarrow a = b^m.$$

Convención $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$.

Reglas de cálculo

$$\sqrt[m]{a \cdot b \cdots} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} \cdots$$

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}},\ b \neq 0$$

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a^n}$$

$$\sqrt[m]{a^m} = a$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

Reducciones: para $c \in \mathbb{R}$:

$$c\sqrt[m]{a} = \begin{cases} \sqrt[m]{c^m \cdot a} & \text{si} \quad c > 0 \\ -\sqrt[m]{c^m \cdot a} & \text{si} \quad c < 0 \end{cases} \qquad \sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mp]{a^{np}},\ (p \in \mathbb{N}\backslash\{0\}).$$

2.3 Exponentes fraccionarios

Para $a \in \mathbb{R}^+$, $a \geq 0$ y p, $q \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ se tiene:

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Manteniendo las condiciones de esta definición, las leyes de los exponentes enteros positivos son válidas también para los exponentes fraccionarios. Así para a, b, c números reales no negativos y m, n números racionales positivos:

$$(a \cdot b \cdot c \cdots)^m = a^m \cdot b^m \cdot c^m \cdots$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}, \quad b \neq 0$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad a \neq 0$$

$$\left(a^m\right)^n = a^{mn}$$

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}, \quad a \neq 0.$$

Nota Debe recordarse que para todo número real x, x^2 es un número <u>no negativo</u>; por lo tanto $\sqrt{x^2}$ está bien definido: es x o $-x$, pero no ambos.

¿Cuál de ellos es entonces el valor de $\sqrt{x^2}$? Es, de los números x y $-x$, el que es positivo (o cero), entonces:

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases} \qquad \text{o sea } \sqrt{x^2} = |x|.$$

Ejemplos:

$\sqrt{5^2} = |5| = 5,$

$\sqrt{(-5)^2} = |-5| = -(-5) = 5,$

$\sqrt{\left(\sqrt{2} - 1\right)^2} = |\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1,$

$\sqrt{\left(-\left(\sqrt{3}-2\right)\right)^2} = |\sqrt{3}-2| = -\left(\sqrt{3}-2\right) = 2-\sqrt{3}.$

2.4 Ejercicios de potencias

2.4.1 Ejercicios resueltos

1. Calcular:

(a) $5^3 - 3^5$

(b) $4{\cdot}3^4$

(c) $5{\cdot}2^7 - 2{\cdot}5^3$

(d) $\left(2\frac{1}{4}\right)^2$

(e) $\dfrac{7^3-3^4}{3^5-5^7}$

(f) $\dfrac{9^5-27^3}{27^2-3^5}$

(g) $\dfrac{8^4-4^6}{9^7-7^9}$

(h) $\dfrac{4^5-8^3}{8^2-2^5}$.

Solución

(a) $5^3 - 3^5 = 125 - 243 = -118$

(b) $4{\cdot}3^4 = 4{\cdot}81 = 324$

(c) $5{\cdot}2^7 - 2{\cdot}5^3 = 2{\cdot}5\left(2^6-5^2\right) = 10{\cdot}39 = 390$

(d) $\left(2\dfrac{1}{4}\right)^5 = \left(\dfrac{9}{4}\right)^5 = \left(\dfrac{3^2}{2^2}\right)^5 = \dfrac{3^{10}}{2^{10}}$

(e) $\dfrac{7^3-3^4}{3^5-5^3} = \dfrac{343-81}{243-125} = \dfrac{262}{118} = \dfrac{131}{59}$

(f) $\dfrac{9^5-27^3}{27^2-3^5} = \dfrac{3^{10}-3^9}{3^6-3^5} = \dfrac{3^9(3-1)}{3^5(3-1)} = 3^4 = 81$

(g) $\dfrac{8^4-4^6}{9^7-7^9} = \dfrac{2^{12}-2^{12}}{9^7-7^9} = \dfrac{0}{9^7-7^9} = 0$

(h) $\dfrac{4^5-8^3}{8^2-2^5} = \dfrac{2^{10}-2^9}{2^6-2^5} = \dfrac{2^9(2-1)}{2^5(2-1)} = 2^4 = 16.$

2. Calcular:

(a) $x^9{\cdot}x$

(b) $a{\cdot}a^n$

(c) $2^{2+x}{\cdot}2^{3-x}$

(d) $b^{3+n}{\cdot}b^{n-4}$

(e) $(-a)^5{\cdot}a^2$

(f) $a^3{\cdot}(-a)^4$.

Solución

(a) $x^9{\cdot}x = x^{10}$

(b) $a{\cdot}a^n = a^{1+n}$

(c) $2^{2+x}{\cdot}2^{3-x} = 2^5 = 32$

(d) $b^{3+n}{\cdot}b^{n-4} = b^{2n-1}$

(e) $(-a)^5{\cdot}a^2 = -a^5{\cdot}a^2 = -a^7$

(f) $a^3{\cdot}(-a)^4 = a^3{\cdot}a^4 = a^7$.

3. Calcular:

(a) $\dfrac{a^7}{a^3}$, $a \neq 0$

(b) $\dfrac{b^2}{b^5}$, $b \neq 0$

(c) $\dfrac{c^x}{cx}$, $c \neq 0$, $x \neq 0$

(d) $\dfrac{3a^{n+1}}{3a}$, $a \neq 0$

(e) $\dfrac{c^{n+1}}{c^{n+x}}$, $c \neq 0$

(f) $\dfrac{3^{2-n}}{3^{4-n}}$.

Solución

(a) $\dfrac{a^7}{a^3} = a^4$

(b) $\dfrac{b^2}{b^5} = \dfrac{1}{b^3}$

(c) $\dfrac{c^x}{cx} = \dfrac{c^{x-1}}{x}$

(d) $\dfrac{3a^{n+1}}{3a} = a^n$

(e) $\dfrac{c^{n+1}}{c^{n+x}} = c^{1-x}$

(f) $\dfrac{3^{2-n}}{3^{4-n}} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}$.

4. Calcular para a, b, c, x diferente de cero:

(a) $a^3 \cdot a^0$

(b) $b^0 \cdot x^0$

(c) $5 \cdot c^0$

(d) $(5c)^0$

(e) $(a+b)^0$

(f) 1^0

(g) 1^{-1}

(h) x^{-1}

(i) 1^{-x}

(j) $\left(a^{-1}\right)^0$.

Solución

(a) $a^3 \cdot a^0 = a^3$

(b) $b^0 \cdot x^0 = 1 \cdot 1 = 1$

(c) $5 \cdot c^0 = 5 \cdot 1 = 5$

(d) $(5c)^0 = 1$

(e) $(a+b)^0 = 1$

(f) $1^0 = 1$

(g) $1^{-1} = \dfrac{1}{1} = 1$

(h) $x^{-1} = \dfrac{1}{x}$

(i) $1^{-x} = \dfrac{1}{1^x} = \dfrac{1}{1} = 1$

(j) $\left(a^{-1}\right)^0 = 1$.

5. Calcular para a y b diferentes de cero:

(a) $\left(a^{-1}\right)^{-1}$

(b) $\left(a^0\right)^{-1}$

(c) $\left(\frac{a}{b}\right)^0$

(d) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-2}$

(e) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$

(f) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$

(g) $\left(0.75\right)^{-1}$

(h) $4^{-2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$.

Solución

(a) $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$

(b) $\left(a^0\right)^{-1} = 1$

(c) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^0 = 1$

(d) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-2} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{a}{b}\right)^2} = \dfrac{1}{\dfrac{a^2}{b^2}} = \dfrac{b^2}{a^2}$

(e) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-4} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^4} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{16}} = 16$

(f) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-2} = \dfrac{2^2}{3^2} = \dfrac{4}{9}$

(g) $\left(0.75\right)^{-1} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^{-1} = \dfrac{4}{3}$

(h) $4^{-2} \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-4} = 2^{-4} \cdot 2^4 = 2^0 = 1$.

6. Calcular:

(a) $2^3\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-3}$

(b) $5^{-2}{\cdot}(0.1)^{-3}$

(c) $25^{-1}{\cdot}(0.2)^{-3}$

(d) $(-1)^{-1}$

(e) $(-1)^{-2}$

(f) $(-1)^{-4}$.

Solución

(a) $2^3\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-3} = (2{\cdot}5)^3 = 10^3 = 1000$

(b) $5^{-2}{\cdot}(0.1)^{-3} = \dfrac{1}{5^2}{\cdot}\left(\dfrac{1}{10}\right)^{-3} = \dfrac{1}{5^2}{\cdot}10^3 = \dfrac{1000}{25} = 40$

(c) $25^{-1}{\cdot}(0.2)^{-3} = 5^{-2}{\cdot}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-3} = \dfrac{1}{5^2}{\cdot}5^3 = 5$

(d) $(-1)^{-1} = -1$

(e) $(-1)^{-2} = \dfrac{1}{(-1)^2} = \dfrac{1}{1} = 1$

(f) $(-1)^{-4} = \dfrac{1}{(-1)^4} = \dfrac{1}{1} = 1.$

7. Calcular:

(a) $\dfrac{4^{-\frac{3}{2}}{\cdot}9^{\frac{3}{2}}}{27^{\frac{2}{3}}}$

(b) $\left(2\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$

(c) $\left(1\dfrac{9}{16}\right)^{-\frac{3}{2}}$

(d) $(16)^{-1.75}$

(e) $(729)^{\frac{2}{3}}$

(f) $(3125)^{0.6}$.

Solución

(a) $\dfrac{4^{-\frac{3}{2}}{\cdot}9^{\frac{3}{2}}}{27^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{\left(2^2\right)^{-\frac{3}{2}}{\cdot}\left(3^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(3^3\right)^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{2^{-3}{\cdot}3^3}{3^2} = \dfrac{3}{8}$

(b) $\left(2\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\dfrac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\dfrac{3^2}{2^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{2}$

(c) $\left(1\dfrac{9}{16}\right)^{-\frac{3}{2}} = \left(\dfrac{25}{16}\right)^{-\frac{3}{2}} = \left(\dfrac{5^2}{2^4}\right)^{-\frac{3}{2}} = \dfrac{5^{-3}}{2^{-6}} = \dfrac{2^6}{5^3} = \dfrac{64}{125}$

(d) $(16)^{-1.75} = \left(2^4\right)^{-1.75} = 2^{-7} = \dfrac{1}{2^7} = \dfrac{1}{128}$

(e) $(729)^{\frac{2}{3}} = \left(3^6\right)^{\frac{2}{3}} = 3^4 = 81$

(f) $(3125)^{0.6} = \left(5^5\right)^{0.6} = 5^3 = 125.$

2.4.2 Ejercicios no resueltos

Calcular:

1. (a)$3^{12} - 9^6$ (b) $(-4x$

2. (a) $\dfrac{8^{-\frac{2}{3}} \cdot 8^{\frac{2}{3}}}{8^{\frac{1}{3}}}$ (b) $\dfrac{\left(10^2\right)^{-2} \cdot \left(10^3\right)^{\frac{1}{6}}}{10^{\frac{1}{2}} \cdot \left(10^4\right)^{\frac{1}{2}}}$ (c) $\dfrac{2^{-2} + 2^{-3}}{2^{-4}}$.

3. (a) $\dfrac{16^{-\frac{5}{4}} \cdot 27^{-\frac{4}{3}}}{9^{-\frac{1}{2}} \cdot 64^{-\frac{4}{3}}}$ (b) $\dfrac{4^{-3} \cdot 3^{-4} \cdot 2^3}{16^{-\frac{3}{4}} \cdot 27^{-\frac{2}{3}} \cdot 81^{-\frac{1}{2}}}$ (c) $\left[16^{-2} \cdot \left(\dfrac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}\right]^4 \cdot \dfrac{4^4}{(-32)^{-5}}$.

4. (a) $\left(\dfrac{5^{-3} p^{-4} q^{-2}}{25^{-2} p^3 q^{-5}}\right)^{-4}$, $p \neq 0$, $q \neq 0$ (b) $\left(\dfrac{8^{-2} x^0 y^{-3}}{4^{-3} x^{-2} y^2}\right)^{-3}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$.

5. (a) $\left(\dfrac{2^{-6} a^{-3} b^0}{64^{-1} a^2 b^{-3}}\right)^{-2}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ (b) $\left[\left(8^6\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot \dfrac{1}{\left(a^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}}\right]^{-1}$, $a \neq 0$.

6. (a) $\left(\dfrac{1}{32}\right)^{-1.2}$ (b) $(243)^{-0.4}$ (c) $\left(\dfrac{81}{256}\right)^{-0.75}$.

7. (a) $\left(\dfrac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\dfrac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}} + (32)^{\frac{3}{5}}$ (b) $3^{-2} - (27)^{-\frac{2}{3}} + (9)^{-\frac{3}{2}}$.

8. (a) $\left(4^{n-1} \cdot 2^{1-2n}\right) \div 8$ (b) $\left(3^{n+2} + 3 \cdot 3^n\right) \div \left(9 \cdot 3^{n+2}\right)$.

2.4.3 Ejercicios de potencias

Resultados.

1. (a) 0 (b) $\dfrac{1}{16x^2}$ (c) $\dfrac{4x^5}{3y^7}$.

2. (a) $\dfrac{1}{2}$ (b) $\dfrac{1}{1000000}$ (c) 6.

3. (a) $\dfrac{8}{27}$ (b) 1 (c) -2^5.

4. (a) $\dfrac{p^{28}}{625q^{12}}$ (b) $\dfrac{y^{15}}{x^6}$.

5. (a) $\dfrac{a^{10}}{b^6}$ (b) $\dfrac{64}{a}$.

6. (a) 64 (b) $\dfrac{1}{9}$ (c) $\dfrac{64}{27}$.

7. (a) 9 (b) $\dfrac{1}{27}$.

8. (a) $\dfrac{1}{16}$ (b) $\dfrac{4}{27}$.

2.5 Ejercicios sobre raíces

Recordar primeramente algunas definiciones.

En $\sqrt[n]{a}$ $\quad a$ es el subradical

n es el índice

$\sqrt{}$ es el símbolo de radical.

Radicales semejantes los que tienen igual índice e igual subradical: $\sqrt[3]{x^2}$; $\quad 5\sqrt[3]{x^2}$.

Radicales homogéneos los que tienen igual índice: $2\sqrt[3]{x^2}$; $\quad \sqrt[3]{x}$.

Nota En los ejercicios de raíces resueltos y en los que se proponen para resolver debe suponerse que todos los números que aparecen bajo el símbolo radical son positivos.

2.5.1 Ejercicios resueltos

1. Calcular (simplificar).

   (a) i. $\sqrt[3]{0.343}$ ii. $\sqrt[4]{128x^7y^3}$ iii. $\sqrt[3]{\sqrt{9a^3}}$.

   (b) i. $\sqrt[4]{\sqrt[6]{25a^2b^{12}}}$ ii. $\sqrt{2^{10}+2^{10}}$ iii. $\sqrt{\dfrac{216h^4k^7}{42h^7k^6}}$.

   Solución

   (a) i. $\sqrt[3]{0.343} = \sqrt[3]{\dfrac{343}{1000}} = \sqrt[3]{\dfrac{7^3}{2^3{\cdot}5^3}} = \dfrac{7}{2{\cdot}5} = \dfrac{7}{10}$

   ii. $\sqrt[4]{128x^7y^3} = \sqrt[4]{2^7x^7y^3} = \sqrt[4]{2^4x^4{\cdot}2^3x^3y^3} = 2x\sqrt[4]{8x^3y^3}$

   iii. $\sqrt[3]{\sqrt{9a^3}} = \sqrt[6]{9a^3}$.

   (b) i. $\sqrt[4]{\sqrt[6]{25a^2b^{12}}} = \sqrt[24]{\left(5ab^6\right)^2} = \sqrt[12]{5ab^6}$

   ii. $\sqrt{2^{10}+2^{10}} = \sqrt{2{\cdot}2^{10}} = 2^5\sqrt{2} = 32\sqrt{2}$

   iii. $\sqrt{\dfrac{216h^4k^7}{42h^7k^6}} = \sqrt{\dfrac{36k}{7h^3}} = \sqrt{\dfrac{36k{\cdot}7h}{7h^3{\cdot}7h}} = \sqrt{\dfrac{36k{\cdot}7h}{7^2h^4}} = \dfrac{6\sqrt{7hk}}{7h^2}$.

2. Calcular:

   (a) $3\sqrt{7x} - 2a\sqrt{7x} + a\sqrt{7x} - \sqrt{7x}$

   (b) i. $2\sqrt{75} + \sqrt{48} - \sqrt{108}$ ii.

(c) $2m\sqrt{3m^2n^3} - 3n\sqrt{3m^4n} + 2m^2n\sqrt{12n}$

(d) $\sqrt{am^3} - \sqrt{a^3m} + \sqrt{4am^3} + \sqrt{4a^3m}$

(e) $2\sqrt[4]{\dfrac{1}{9}} + 3\sqrt[6]{27} - 2\sqrt[4]{144}$

(f) $3\sqrt{ax^3} + 4\sqrt{\dfrac{ax^5}{25}} - \sqrt[4]{\dfrac{a^2x^6}{81}}$.

Solución

Se trata ahora de suma de radicales. Recuérdese que para sumar o restar radicales se requiere que sean semejantes. A veces los radicales propuestos no son semejantes, pero mediante transformaciones apropiadas pueden hacerse semejantes.

(a) $3\sqrt{7x} - 2a\sqrt{7x} + a\sqrt{7x} - \sqrt{7x} = (3 - 2a + a - 1)\sqrt{7x} = (2 - a)\sqrt{7x}$

(b) i) $2\sqrt{75} + \sqrt{48} - \sqrt{108} = 2\sqrt{25\cdot 3} + \sqrt{16\cdot 3} - \sqrt{36\cdot 3} = 10\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$

ii) $\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{54} + 4\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}} = \sqrt[3]{8\cdot 2} - \sqrt[3]{27\cdot 2} - \sqrt[3]{\dfrac{1}{8}\cdot 2} = 2\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{2} = -\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{2}$.

(c) $2m\sqrt{3m^2n^3} - 3n\sqrt{3m^4n} + 2m^2n\sqrt{12n} = 2m\sqrt{m^2n^2\cdot 3n} - 3n\sqrt{m^4\cdot 3n} + 2m^2n\sqrt{4\cdot 3n}$
$= 2m^2n\sqrt{3n} - 3m^2n\sqrt{3n} + 4m^2n\sqrt{3n} = 3m^2n\sqrt{3n}$

(d) $\sqrt{am^3} - \sqrt{a^3m} + \sqrt{4am^3} + \sqrt{4a^3m} = \sqrt{m^2\cdot am} - \sqrt{a^2\cdot am} + \sqrt{4m^2\cdot am} + \sqrt{4a^2\cdot am}$
$= m\sqrt{am} - a\sqrt{am} + 2m\sqrt{am} + 2a\sqrt{am} = (m - a + 2m + 2a)\sqrt{am} = (3m + a)\sqrt{am}$

(e) $2\sqrt[4]{\dfrac{1}{9}} + 3\sqrt[6]{27} - 2\sqrt[4]{144} = 2\sqrt[4]{\left(\dfrac{1}{3}\right)^2} + 3\sqrt[6]{3^3} - 2\sqrt[4]{12^2} = 2\sqrt{\dfrac{1}{3}} + 3\sqrt{3} - 2\sqrt{12} = 2\sqrt{\dfrac{1}{9}\cdot 3} + 3\sqrt{3} - 2\sqrt{4\cdot 3} = \dfrac{2}{3}\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = -\dfrac{1}{3}\sqrt{3}$

(f) $3\sqrt{ax^3} + 4\sqrt{\dfrac{ax^5}{25}} - \sqrt[4]{\dfrac{a^2x^6}{81}} = 3\sqrt{x^2\cdot ax} + 4\sqrt{\dfrac{x^4}{25}\cdot ax} - \sqrt{\dfrac{ax^3}{9}} = 3x\sqrt{ax} + \dfrac{4x^2}{5}\sqrt{ax} - \sqrt{\dfrac{x^2}{9}\cdot ax} = 3x\sqrt{ax} + \dfrac{4x^2}{5}\sqrt{ax} - \dfrac{x}{3}\sqrt{ax} = \left(3x + \dfrac{4x^2}{5} - \dfrac{x}{3}\right)\sqrt{ax} = (\dfrac{8x}{3} + \dfrac{4x^2}{5})\sqrt{ax}$.

3. Calcular

(a) i. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{18}$ ii. $\sqrt{3}\cdot\sqrt{15}$ iii. $2\sqrt{7}\cdot 3\sqrt{14}$

(b) i. $a\sqrt{6a}\cdot\sqrt{15a}$ ii. $2x\sqrt{20x}\cdot 3\sqrt{5x}$ iii. $\sqrt{\dfrac{3}{8}}\cdot\sqrt{2\dfrac{1}{4}}$

(c) i. $4\sqrt{15} \div 2\sqrt{5}$ ii. $\sqrt{45} \div 2\sqrt{5}$ iii. $\sqrt{112} \div \sqrt{\dfrac{7}{2}}$

(d) i. $x\sqrt{a^2x} \div x\sqrt{ax^2}$ ii. $2\sqrt{10a^2} \div \sqrt{20a}$ iii. $a\sqrt{30a} \div \sqrt{\dfrac{5a^2}{6}}$

(e) $\left(\sqrt{20} + \sqrt{80} - \sqrt{45}\right)\cdot\sqrt{5}$

(f) $\left(2\sqrt{5}+3\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{5}-4\sqrt{2}\right)$

(g) i. $\left(2\sqrt{3}-2\right)\left(2\sqrt{3}+2\right)$ ii. (

(h) i. $\left(3\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2$ ii.

(i) i. $3\sqrt[3]{4x^2}\cdot\sqrt{2x}$ ii. $\sqrt{\dfrac{6}{35}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{175}{18}}$

(j) i. $\sqrt[6]{\dfrac{5}{33}}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{66}{25}}$ ii. $\dfrac{3}{5}\sqrt{\dfrac{a}{c}}\cdot\dfrac{10}{3}\sqrt[3]{\dfrac{c}{a}}$

(k) i. $\sqrt[3]{81}\div\sqrt{3}$ ii. $\sqrt[3]{9a^2m}\div\sqrt[4]{3am^2}$

(l) i. $\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{m}{n}}\div\dfrac{2}{9}\sqrt[3]{\dfrac{m}{n}}$ ii. $\left(\sqrt[3]{12}+4\sqrt{18}\right)\div 6\sqrt{2}$

Solución Deben efectuarse algunas multiplicaciones y algunas divisiones. Recordar que para multiplicar o dividir radicales, se requiere que sean homogéneos. Si no lo son, mediante transformaciones apropiadas pueden hacerse homogéneos.

(a) i. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{18}=\sqrt{2\cdot 18}=\sqrt{36}=6$
ii. $\sqrt{3}\cdot\sqrt{15}=\sqrt{45}=\sqrt{9\cdot 5}=3\sqrt{5}$
iii. $2\sqrt{7}\cdot 3\sqrt{14}=2\cdot 3\sqrt{7\cdot 14}=6\sqrt{98}=6\sqrt{49\cdot 2}=42\sqrt{2}$.

(b) i. $a\sqrt{6a}\cdot\sqrt{15a}=a\sqrt{90a^2}=a\sqrt{9a^2\cdot 10}=3a^2\sqrt{10}$
ii. $2x\sqrt{20x}\cdot 3\sqrt{5x}=6x\sqrt{100x^2}=60x^2$
iii. $\sqrt{\dfrac{3}{8}}\cdot\sqrt{2\dfrac{1}{4}}=\sqrt{\dfrac{3}{8}}\cdot\sqrt{\dfrac{9}{4}}=\sqrt{\dfrac{27}{32}}=\sqrt{\dfrac{27\cdot 2}{64}}=\sqrt{\dfrac{9\cdot 3\cdot 2}{64}}=\dfrac{3}{8}\sqrt{6}$.

(c) i. $4\sqrt{15}\div 2\sqrt{5}=\dfrac{4}{2}\sqrt{\dfrac{15}{5}}=2\sqrt{3}$
ii. $\sqrt{45}\div 2\sqrt{5}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{45}{5}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{9}=\dfrac{3}{2}$
iii. $\sqrt{112}\div\sqrt{\dfrac{7}{2}}=\sqrt{\dfrac{112}{\frac{7}{2}}}=\sqrt{\dfrac{224}{7}}=\sqrt{32}=\sqrt{16\cdot 2}=4\sqrt{2}$

(d) i. $x\sqrt{a^2x}\div x\sqrt{ax^2}=\dfrac{x}{x}\sqrt{\dfrac{a^2x}{ax^2}}=\sqrt{\dfrac{ax}{x^2}}=\dfrac{1}{x}\sqrt{ax}$
ii. $2\sqrt{10a^2}\div\sqrt{20a}=\dfrac{2}{1}\sqrt{\dfrac{10a^2}{20a}}=2\sqrt{\dfrac{a}{2}}=2\sqrt{\dfrac{2a}{4}}=\dfrac{2}{2}\sqrt{2a}=\sqrt{2a}$
iii. $a\sqrt{30a}\div\sqrt{\dfrac{5a^2}{6}}=a\sqrt{\dfrac{30a}{\frac{5a^2}{6}}}=a\sqrt{\dfrac{180a}{5a^2}}=a\sqrt{\dfrac{36}{a}}=a\sqrt{\dfrac{36a}{a^2}}=\dfrac{6a}{a}\sqrt{a}=6\sqrt{a}$

(e) $\left(\sqrt{20}+\sqrt{80}-\sqrt{45}\right)\cdot\sqrt{5}=\sqrt{100}+\sqrt{400}-\sqrt{225}=10+20-15=15$

(f) $\left(2\sqrt{5}+3\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{5}-4\sqrt{2}\right)=6\sqrt{5^2}-8\sqrt{10}+9\sqrt{10}-12\sqrt{2^2}=30+\sqrt{10}-24=6+\sqrt{10}$

(g) i. $\left(2\sqrt{3}-2\right)\left(2\sqrt{3}+2\right)=2^2\sqrt{3^2}-2^2=12-4=8$

ii. $\left(3\sqrt{2}+5\sqrt{3}\right)^2=3^2\sqrt{2^2}+2\cdot3\sqrt{2}\cdot5\sqrt{3}+5^2\sqrt{3^2}=18+30\sqrt{6}+75=93+30\sqrt{6}$

(h) i. $\left(3\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2=45-6\sqrt{15}+3=48-6\sqrt{15}$

ii. $\sqrt{10+\sqrt{19}}\cdot\sqrt{10-\sqrt{19}}=\sqrt{\left(10+\sqrt{19}\right)\left(10-\sqrt{19}\right)}=$
$\sqrt{100-19}=\sqrt{81}=9$

(i) i. $2\sqrt[3]{4x^2}\cdot\sqrt{2x}=2\sqrt[6]{\left(4x^2\right)^2}\cdot\sqrt[6]{(2x)^3}=2\sqrt[6]{16x^4}\cdot\sqrt[6]{8x^3}=$
$2\sqrt[6]{128x^7}=2\sqrt[6]{64x^6\cdot2x}=4x\sqrt[6]{2x}$

ii. $\sqrt{\frac{6}{35}}\cdot\sqrt[3]{\frac{175}{18}}=\sqrt{\frac{2\cdot3}{5\cdot7}}\cdot\sqrt[3]{\frac{5^2\cdot7}{2\cdot3^2}}=\sqrt[6]{\left(\frac{2\cdot3}{5\cdot7}\right)^3}\cdot\sqrt[6]{\left(\frac{5^2\cdot7}{2\cdot3^2}\right)^2}=$
$\sqrt[6]{\frac{2^3\cdot3^3}{5^3\cdot7^3}}\cdot\sqrt[6]{\frac{5^4\cdot7^2}{2^2\cdot3^4}}=\sqrt[6]{\frac{2^3\cdot3^3\cdot5^4\cdot7^2}{5^3\cdot7^3\cdot2^2\cdot3^4}}=\sqrt[6]{\frac{2\cdot5}{3\cdot7}}=\sqrt[6]{\frac{10}{21}}$

Cuando los números son altos, es preferible expresarlos en sus factores primos, si dichos números no son primos.

(j) i. $\sqrt[6]{\frac{5}{33}}\cdot\sqrt[4]{\frac{66}{25}}=\sqrt[6]{\frac{5}{3\cdot11}}\cdot\sqrt[4]{\frac{2\cdot3\cdot11}{5^2}}=\sqrt[12]{\frac{5^2\cdot2^3\cdot3^3\cdot11^3}{3^2\cdot11^2\cdot5^6}}=\sqrt[12]{\frac{2^7\cdot3\cdot11}{5^4}}=\sqrt[12]{\frac{264}{625}}$

ii. $\frac{3}{5}\sqrt{\frac{a}{c}}\cdot\frac{10}{3}\sqrt[3]{\frac{c}{a}}=\frac{3}{5}\sqrt[6]{\frac{a^3}{c^3}}\cdot\frac{10}{3}\sqrt[6]{\frac{c^2}{a^2}}=\frac{30}{15}\sqrt[6]{\frac{a^3c^2}{a^2c^3}}=2\sqrt[6]{\frac{a}{c}}=2\sqrt[6]{\frac{ac^5}{c^6}}=\frac{2}{c}\sqrt[6]{ac^5}$

(k) i. $\sqrt[3]{81}\div\sqrt{3}=\sqrt[3]{3^4}\div\sqrt{3}=\sqrt[6]{3^8}\div\sqrt[6]{3^3}=\sqrt[6]{3^5}=\sqrt[6]{243}$

ii. $\sqrt[3]{9a^2m}\div\sqrt[4]{3am^2}=\sqrt[3]{3^2a^2m}\div\sqrt[4]{3am^2}=\sqrt[12]{3^8a^8m^4}\div\sqrt[12]{3^3a^3m^6}=$
$\sqrt[12]{\frac{3^8a^8m^4}{3^3a^3m^6}}=\sqrt[12]{\frac{3^5a^5}{m^2}}=\sqrt[12]{\frac{243a^5m^{10}}{m^{12}}}=\frac{1}{m}\sqrt[12]{243a^5m^{10}}$

(l) i. $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{m}{n}}\div\frac{2}{9}\sqrt[3]{\frac{m}{n}}=\frac{2}{3}\sqrt[6]{\frac{m^3}{n^3}}\div\frac{2}{9}\sqrt[6]{\frac{m^2}{n^2}}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{9}}\sqrt[6]{\frac{\frac{m^3}{n^3}}{\frac{m^2}{n^2}}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{2}\sqrt[6]{\frac{m^3}{n^3}\cdot\frac{n^2}{m^2}}=3\sqrt[6]{\frac{m}{n}}=\frac{3}{n}\sqrt[6]{mn^5}$

ii. $\left(\sqrt[3]{12}+4\sqrt{18}\right)\div6\sqrt{2}=\left(\sqrt[3]{2^2\cdot3}+2^2\sqrt{2\cdot3^2}\right)\div2\cdot3\sqrt{2}=$
$\left(\sqrt[6]{2^4\cdot3^2}+2^2\sqrt[6]{2^3\cdot3^6}\right)\div2\cdot3\sqrt[6]{2^3}=\frac{1}{2\cdot3}\sqrt[6]{2\cdot3^2}+\frac{2^2}{2\cdot3}\sqrt[6]{3^6}=\frac{1}{6}\sqrt[6]{18}+2$

2.5.2 Racionalización de denominadores

A veces es conveniente o necesario transformar expresiones fraccionarias con radicales en el denominador, en otras equivalentes sin radicales en el denominador. Como se sabe, este proceso se conoce con el nombre de **racionalización de denominadores**. Otras veces lo que es conveniente o necesario “racionalizar” es el numerador de la fracción. Se sabe que el valor de una fracción no se altera si se multiplican sus dos términos por un mismo número diferente de cero. El proceso de racionalización sea numerador, sea denominador, es una aplicación de esta propiedad de las fracciones. Sólo se racionalizarán denominadores monomios o binomios con raíces cuadradas.

2.5.3 Ejercicios Resueltos

Racionalizar el denominador de cada fracción.

1. (a) $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ (b) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$ (c) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3\sqrt{6}}$
2. (a) $\dfrac{3x\sqrt{6x}}{\sqrt{12x}}$ (b) $\dfrac{2a+\sqrt{2a}}{2a\sqrt{6a}}$ (c) $\dfrac{4x\sqrt{3}-\sqrt{6x}}{x\sqrt{6x}}$
3. (a) $\dfrac{2}{2+\sqrt{2}}$ (b) $\dfrac{3\sqrt{2}+2}{2\sqrt{2}-1}$ (c) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$
4. (a) $\dfrac{4\sqrt{2x}-3\sqrt{x}}{3\sqrt{2x}+5\sqrt{x}}$ (b) $\dfrac{5\sqrt{2x}+\sqrt{6x}}{5\sqrt{2x}-\sqrt{6x}}$ (c) $\dfrac{a\sqrt{c}-b\sqrt{x}}{a\sqrt{c}+b\sqrt{x}}$

Solución

1. (a) $\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

   (b) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\left(2+\sqrt{3}\right)\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}+3}{2\cdot3}=\dfrac{2\sqrt{3}+3}{6}$

   (c) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3\sqrt{6}}=\dfrac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\sqrt{6}}{3\sqrt{6}\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{18}+\sqrt{12}}{3\cdot6}=\dfrac{\sqrt{9\cdot2}+\sqrt{4\cdot3}}{18}=\dfrac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{18}$

2. (a) $\dfrac{3x\sqrt{6x}}{\sqrt{12x}}=\dfrac{\left(3x\sqrt{6x}\right)\sqrt{12x}}{\sqrt{12x}\sqrt{12x}}=\dfrac{3x\sqrt{72x^2}}{12x}=\dfrac{3x\cdot\sqrt{36x^2\cdot2}}{12x}=\dfrac{3x\cdot6x\sqrt{2}}{12x}=\dfrac{3x\sqrt{2}}{2}$

   (b) $\dfrac{2a+\sqrt{2a}}{2a\sqrt{6a}}=\dfrac{\left(2a+\sqrt{2a}\right)\sqrt{6a}}{2a\sqrt{6a}\sqrt{6a}}=\dfrac{2a\sqrt{6a}+\sqrt{12a^2}}{2a\cdot6a}=\dfrac{2a\sqrt{6a}+\sqrt{4a^2\cdot3}}{12a^2}=$

   $\dfrac{2a\sqrt{6a}+2a\sqrt{3}}{12a^2}=\dfrac{2a\left(\sqrt{6a}+\sqrt{3}\right)}{12a^2}=\dfrac{\sqrt{6a}+\sqrt{3}}{6a}$

   (c) $\dfrac{4x\sqrt{3}-\sqrt{6x}}{x\sqrt{6x}}=\dfrac{\left(4x\sqrt{3}-\sqrt{6x}\right)\sqrt{6x}}{x\sqrt{6x}\sqrt{6x}}=\dfrac{4x\sqrt{18x}-6x}{x\cdot6x}=\dfrac{4x\sqrt{9\cdot2x}-6x}{6x^2}=$

   $\dfrac{12x\sqrt{2x}-6x}{6x^2}=\dfrac{6x\left(2\sqrt{2x}-1\right)}{6x^2}=\dfrac{2\sqrt{2x}-1}{x}.$

   Nota Como se ve en los ejemplos resueltos, para racionalizar un denominador monomio irracional, basta multiplicar ambos términos de la fracción por la parte irracional del denominador.

3. (a) $\dfrac{2}{2+\sqrt{2}}=\dfrac{2\left(2-\sqrt{2}\right)}{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}=\dfrac{2\left(2-\sqrt{2}\right)}{(2)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\dfrac{2\left(2-\sqrt{2}\right)}{4-2}=\dfrac{2\left(2-\sqrt{2}\right)}{2}=2-\sqrt{2}$

(b) $\dfrac{3\sqrt{2}+2}{2\sqrt{2}-1} = \dfrac{\left(3\sqrt{2}+2\right)\left(2\sqrt{2}+1\right)}{\left(2\sqrt{2}-1\right)\left(2\sqrt{2}+1\right)} = \dfrac{6{\cdot}2+3\sqrt{2}+4\sqrt{2}+2}{4{\cdot}2-1} =$

$\dfrac{12+7\sqrt{2}+2}{8-1} = \dfrac{14+7\sqrt{2}}{7} = \dfrac{7\left(2+\sqrt{2}\right)}{7} = 2+\sqrt{2}$

(c) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \dfrac{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)} = \dfrac{5+2\sqrt{15}+3}{5-3} =$

$\dfrac{8+2\sqrt{15}}{2} = \dfrac{2\left(4+\sqrt{15}\right)}{2} = 4+\sqrt{15}$

4. (a) $\dfrac{4\sqrt{2x}-3\sqrt{x}}{3\sqrt{2x}+5\sqrt{x}} = \dfrac{\left(4\sqrt{2x}-3\sqrt{x}\right)\left(3\sqrt{2x}-5\sqrt{x}\right)}{\left(3\sqrt{2x}+5\sqrt{x}\right)\left(3\sqrt{2x}-5\sqrt{x}\right)} =$

$\dfrac{12{\cdot}2x-20\sqrt{2x^2}-9\sqrt{2x^2}+15{\cdot}x}{9{\cdot}2x-25{\cdot}x} = \dfrac{24x-29\sqrt{2x^2}+15x}{18x-25x} =$

$\dfrac{39x-29x\sqrt{2}}{-7x} = \dfrac{x\left(39-29\sqrt{2}\right)}{-7x} = -\dfrac{39-29\sqrt{2}}{7}.$

También puede procederse así:

$\dfrac{4\sqrt{2x}-3\sqrt{x}}{3\sqrt{2x}+5\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x}\left(4\sqrt{2}-3\right)}{\sqrt{x}\left(3\sqrt{2}+5\right)} = \dfrac{4\sqrt{2}-3}{3\sqrt{2}+5} =$

$\dfrac{\left(4\sqrt{2}-3\right)\left(3\sqrt{2}-5\right)}{\left(3\sqrt{2}+5\right)\left(3\sqrt{2}-5\right)} = \dfrac{24-20\sqrt{2}-9\sqrt{2}+15}{18-25} =$

$\dfrac{39-29\sqrt{2}}{-7} = -\dfrac{39-29\sqrt{2}}{7}$

(b) $\dfrac{5\sqrt{2x}+\sqrt{6x}}{5\sqrt{2x}-\sqrt{6x}} = \dfrac{\sqrt{2x}\left(5+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{2x}\left(5-\sqrt{3}\right)} = \dfrac{5+\sqrt{3}}{5-\sqrt{3}} = \dfrac{\left(5+\sqrt{3}\right)\left(5+\sqrt{3}\right)}{\left(5-\sqrt{3}\right)\left(5+\sqrt{3}\right)} =$

$\dfrac{25+10\sqrt{3}+3}{25-3} = \dfrac{28+10\sqrt{3}}{22} = \dfrac{2\left(14+5\sqrt{3}\right)}{22} = \dfrac{14+5\sqrt{3}}{11}$

(c) $\dfrac{a\sqrt{c}-b\sqrt{x}}{a\sqrt{c}+b\sqrt{x}} = \dfrac{\left(a\sqrt{c}-b\sqrt{x}\right)\left(a\sqrt{c}-b\sqrt{x}\right)}{\left(a\sqrt{c}+b\sqrt{x}\right)\left(a\sqrt{c}-b\sqrt{x}\right)} = \dfrac{a^2c-2ab\sqrt{cx}+b^2x}{a^2c-b^2x}.$

Nota Puede observarse en los ejercicios resueltos que si el denominador irracional es la suma de dos números, se multiplican el denominador y el numerador de la fracción por la diferencia de dichos números, y que si el denominador irracional es la diferencia de dos números, entonces se multiplican el denominador y el numerador de la fracción por la suma de esos números. De este modo por el tercer producto notable, queda siempre en el denominador una diferencia de cuadrados. Como se observó al principio, solamente se trataron los dos casos más simples de racionalización de denominadores.

2.5.4 Ejercicios no resueltos

Calcular (simplificar)

1. (a) $\sqrt[4]{0.0256}$ (b) $\sqrt[3]{320a^5b^6}$ (c) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{4x^2}}$
2. (a) $\sqrt[4]{\sqrt[5]{256a^8b^{12}}}$ (b) $\sqrt[3]{3^5+3^5+3^5}$ (c) $\sqrt{\dfrac{147c^3d^3e^3}{98cd^4e^2}}$
3. (a) $2\sqrt{5}+\sqrt{20}-\sqrt{45}$ (b) $\sqrt{48}-2\sqrt[4]{9}+3\sqrt{8}-\sqrt{50}$
4. (a) $3\sqrt[3]{32}+\sqrt[3]{500}-2\sqrt[3]{256}$ (b) $a\sqrt{8a^2b}-\sqrt{18a^4b}+a^2\sqrt{32b}$
5. $2\sqrt{\dfrac{2}{5}}-3\sqrt{\dfrac{1}{10}}-\sqrt{\dfrac{5}{2}}+\sqrt{1000}$
6. $x\sqrt[3]{xy^5}+2y\sqrt[3]{x^4y^2}+3\sqrt[3]{x^4y^5}$
7. $2\sqrt[3]{40x^5}-x\sqrt[3]{135x^2}+\sqrt[3]{625x^5}$
8. $a\sqrt{\dfrac{3b}{2a}}+3b\sqrt{\dfrac{3a}{8b}}-2\sqrt{\dfrac{2ab}{3}}-\sqrt{\dfrac{3ab}{2}}$
9. $10\sqrt{12\dfrac{1}{2}}+7\sqrt{2}-3\sqrt{338}+5\sqrt[4]{4}+4\sqrt{\dfrac{9}{2}}$
10. $12\sqrt{16\dfrac{1}{3}}+5\sqrt{3}-5\sqrt{432}+6\sqrt{\dfrac{100}{3}}+2\sqrt[6]{27}$
11. (a) $2\sqrt{3}\cdot 5\sqrt{15}$ (b) $4\sqrt[5]{3}\cdot\sqrt[5]{81}$ (c) $3\sqrt[3]{16}\cdot 4\sqrt[3]{4}$
12. (a) $a\sqrt{3a^5b^7}\cdot 2b\sqrt{12ab^2}$ (b) $3x\sqrt{5x^9y^3}\cdot y\sqrt{15xy^4}$
13. (a) $2\sqrt{32}\div 3\sqrt{120}$ (b) $\sqrt{15}\div\sqrt{6}$ (c) $5\sqrt{2}\div 2\sqrt{10}$
14. (a) $\sqrt{26x^5y^5z}\div x\sqrt{13x^2yz}$ (b) $\sqrt{28c^6d^6e}\div\sqrt{84c^2de^3}$
15. (a) $\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\cdot\sqrt{3}$ (b) $\left(3\sqrt{6}-4\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\div 6\sqrt{3}$
16. (a) $3\sqrt[6]{3}\cdot\sqrt[6]{6}$ (b) $\sqrt[6]{a^5b^7}\cdot 2\sqrt[3]{a^2b^3}$ (c) $\sqrt{\dfrac{12}{35}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{245}{36}}$

17. (a) $2\sqrt[6]{27} \div 4\sqrt[4]{9}$ (b) $\sqrt[10]{x^5y^2} \div \sqrt[15]{x^3y^{12}}$ (c) $2\sqrt[4]{\dfrac{9x^2}{2}} \div 4\sqrt[3]{\dfrac{3x}{4}}$

18. $\left(3\sqrt{3} + 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[4]{9}\right) \cdot 2\sqrt{3}$

19. $\left(\sqrt[10]{200} - \sqrt[15]{1000}\right) \div \sqrt[6]{10}$

Racionalizar el denominador.

20. (a) $\dfrac{4}{3\sqrt{2}}$ (b) $\dfrac{6a}{5\sqrt{3a}}$ (c) $\dfrac{3x\sqrt{6}}{\sqrt{12x}}$

21. (a) $\dfrac{3x + \sqrt{3x}}{\sqrt{6x}}$ (b) $\dfrac{2\sqrt{5a} - 5a\sqrt{2}}{a\sqrt{10a}}$

22. (a) $\dfrac{12}{3 + \sqrt{5}}$ (b) $\dfrac{4}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$ (c) $\dfrac{6}{3\sqrt{2} + 4}$

23. (a) $\dfrac{\sqrt{7} + \sqrt{5}}{2\sqrt{7} - \sqrt{5}}$ (b) $\dfrac{3\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ (c) $\dfrac{5\sqrt{3} - \sqrt{6}}{2\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

24. (a) $\dfrac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ (b) $\dfrac{a\sqrt{x} + x\sqrt{a}}{x + \sqrt{a}}$ (c) $\dfrac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a\sqrt{b} - b\sqrt{a}}$

Ejercicios sobre raíces.

1. (a) 0.4 (b) $4ab^2\sqrt[3]{5a^2}$ (c) $\sqrt[12]{4x^2}$

2. (a) $\sqrt[5]{4a^2b^3}$ (b) 9 (c) $\dfrac{c^2\sqrt{6de}}{2d}$

3. (a) $\sqrt{5}$
   (b) $2\sqrt{3}+\sqrt{2}$
4. (a) $3\sqrt[3]{4}$
   (b) $3a^2\sqrt{2b}$
5. $\dfrac{48}{5}\sqrt{10}$
6. $6xy\sqrt[3]{xy^2}$
7. $6x\sqrt[3]{5x^2}$
8. $\sqrt{6ab}$
9. $4\sqrt{2}$
10. $-5\sqrt{3}$
11. (a) $30\sqrt{5}$
    (b) 12
    (c) 48
12. (a) $12a^4b^5\sqrt{b}$
    (b) $15x^6y^4\sqrt{3y}$
13. (a) $\dfrac{4}{45}\sqrt{15}$
    (b) $\dfrac{1}{2}\sqrt{10}$
    (c) $\dfrac{1}{2}\sqrt{5}$
14. (a) $y^2\sqrt{2x}$
    (b) $\dfrac{c^2d^2}{3e}\sqrt{3d}$
15. (a) $3\sqrt{6}+6-\sqrt{15}$
    (b) $\dfrac{1}{2}\sqrt{2}-\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{18}\sqrt{6}$
16. (a) $3\sqrt[12]{972}$
    (b) $2ab^2\sqrt[6]{a^3b}$
    (c) $\sqrt[6]{\dfrac{28}{15}}$
17. (a) $\dfrac{1}{2}$
    (b) $\sqrt[10]{\dfrac{x^3}{y^6}}$
    (c) $\dfrac{1}{2}\sqrt[12]{288x^2}$

18. $24 + 4\sqrt[6]{108}$

19. $\sqrt[30]{80} - \sqrt[30]{10}$

Racionalizar el denominador.

20. (a) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ (b) $\dfrac{2\sqrt{3a}}{5}$ (c) $\dfrac{3\sqrt{2x}}{2}$

21. (a) $\dfrac{6x + \sqrt{2}}{2}$ (b) $\dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{5a}}{a}$

22. (a) $9 - 3\sqrt{5}$ (b) $\sqrt{7} + \sqrt{3}$ (c) $9\sqrt{2} - 12$

23. (a) $\dfrac{19 + 3\sqrt{35}}{23}$ (b) $4\sqrt{6} - 9$ (c) $\dfrac{30 - 5\sqrt{6} - 6\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{10}$

24. (a) $\dfrac{a + b - 2\sqrt{ab}}{a - b}$ (b) $\sqrt{ax}$ (c) $\dfrac{\sqrt{ab}}{ab}$.

Capítulo 3

Fracciones

3.1 Ejercicios sobre fracciones

Se supone conocida la teoría relativa a los "números racionales " y en general, la relativa de las expresiones de la forma $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$, donde a y b pueden ser números reales y aún polinomios. Estas expresiones corrientemente se llaman "fracciones".

3.1.1 Ejercicios resueltos

1. Simplificar:

   (a) $\frac{55}{88}$ (b) $\frac{100}{300}$ (c) $\frac{125}{2000}$ (d) $\frac{336}{504}$ (e) $\frac{728}{910}$

   Solución

   (a) $\frac{55}{88} = \frac{5}{8}$ se dividieron por 11 el numerador y el denominador.

   (b) $\frac{100}{300} = \frac{1}{3}$

   (c) $\frac{125}{2000} = \frac{25}{400} = \frac{5}{80} = \frac{1}{16}$

   (d) $\frac{336}{504} = \frac{168}{252} = \frac{84}{126} = \frac{42}{63} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$

   (e) $\frac{728}{910} = \frac{364}{455} = \frac{52}{65} = \frac{4}{5}$

2. Simplificar, si es posible las fracciones:

   (a) $\frac{3{\cdot}5}{3}$ (b) $\frac{4}{2{\cdot}5}$ (c) $\frac{36{\cdot}4}{24{\cdot}14}$ (d) $\frac{3a}{a}$, $a \neq 0$ (e) $\frac{2x}{ax}$, $a \neq 0$, $x \neq 0$.

   Solución

   (a) $\frac{3{\cdot}5}{3} = 5$, numerador y denominador se dividen por 3; a eso equivale la "cancelación" del factor común 3.

(b) $\dfrac{4}{2{\cdot}5} = \dfrac{2}{5}$

(c) $\dfrac{36{\cdot}4}{24{\cdot}14} = \dfrac{3{\cdot}2}{7{\cdot}2} = \dfrac{3}{7}$

(d) $\dfrac{3a}{a} = 3$

(e) $\dfrac{2x}{ax} = \dfrac{2}{a}$

3. Simplificar si es posible, las fracciones:

(a) $\dfrac{7{\cdot}3}{3{\cdot}8}$

(b) $\dfrac{7+3}{3+8}$

(c) $\dfrac{7{\cdot}3}{3+8}$

(d) $\dfrac{3+5}{125}$

(e) $\dfrac{3{\cdot}5}{125}$

(f) $\dfrac{15}{3+5}$

(g) $\dfrac{15}{11+7}$

(h) $\dfrac{ab}{24ab}$

(i) $\dfrac{a+b}{24ab}$

(j) $\dfrac{8a+3b}{24ab}$

En las tres últimas fracciones debe sobrentenderse que los valores de a y b son diferentes de 0. En general, cuando en el denominador de una fracción aparecen números representados por letras los valores que éstas pueden tomar deben ser valores que no hagan igual a cero el denominador.

Solución

(a) $\dfrac{7{\cdot}3}{3{\cdot}8} = \dfrac{7}{8}$

(b) $\dfrac{7+3}{3+8} = \dfrac{10}{11}$. No puede simplificarse, porque no es posible encontrar un número diferente de 1 que divide exactamente ambos términos de la fracción.

(c) $\dfrac{7{\cdot}3}{3+8} = \dfrac{21}{11}$. No puede simplificarse.

(d) $\dfrac{3+5}{125} = \dfrac{8}{125}$. No puede simplificarse.

(e) $\dfrac{3{\cdot}5}{125} = \dfrac{3}{25}$

(f) $\dfrac{15}{3+5} = \dfrac{15}{8}$. No puede simplificarse.

(g) $\dfrac{15}{11+7} = \dfrac{15}{18} = \dfrac{5}{6}$

(h) $\dfrac{ab}{24ab} = \dfrac{1}{24}$

(i) $\dfrac{a+b}{24ab}$. No puede simplificarse.

(j) $\dfrac{8a+3b}{24ab}$. No puede simplificarse.

Nota Para los ejercicios de simplificación que siguen recordar que[1]:

$9x+27=9(x+3)$	por distributividad
$15a^2+6ab=3a(5a+2b)$	
$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+2ab+b^2$	los tres primeros
$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-2ab+b^2$	productos notables
$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$	

4. Simplificar si es posible, las fracciones:

(a) $\dfrac{7+14}{7x}$

(b) $\dfrac{9x+27}{6x}$

(c) $\dfrac{10ax+5a}{25}$

(d) $\dfrac{7a+14ax}{28a}$

(e) $\dfrac{11a+121ax}{22ax-132a}$

(f) $\dfrac{3m+6}{5am+10a}$

(g) $\dfrac{a-2ab+b^2}{a^2-b^2}$

(h) $\dfrac{x^2-9}{x^2+6x+9}$

(i) $\dfrac{18x-12}{9x^2-12x+4}$

(j) $\dfrac{x+2y}{x^2+4xy+4y^2}$.

Solución

(a) $\dfrac{7+14}{7x}=\dfrac{21}{7x}=\dfrac{3}{x}$

(b) $\dfrac{9x+27}{6x}=\dfrac{3(3x+9)}{6x}=\dfrac{3x+9}{2x}$

(c) $\dfrac{10ax+5a}{25}=\dfrac{5a(2x+1)}{25}=\dfrac{a(2x+1)}{5}$

(d) $\dfrac{7a+14ax}{28a}=\dfrac{7a(1+2x)}{28a}=\dfrac{1+2x}{4}$

(e) $\dfrac{11a+121ax}{22ax-132a}=\dfrac{11a(1+11x)}{22a(x-6)}=\dfrac{1+11x}{2(x-6)}$

(f) $\dfrac{3m+6}{5am+10a}=\dfrac{3(m+2)}{5a(m+2)}=\dfrac{3}{5a}$

(g) $\dfrac{a-2ab+b^2}{a^2-b^2}=\dfrac{(a-b)(a-b)}{(a+b)(a-b)}=\dfrac{a-b}{a+b}$

(h) $\dfrac{x^2-9}{x^2+6x+9}=\dfrac{(x+3)(x-3)}{(x+3)(x+3)}=\dfrac{x-3}{x+3}$

(i) $\dfrac{18x-12}{9x^2-12x+4}=\dfrac{6(3x-2)}{(3x-2)^2}=\dfrac{6}{3x-2}$

[1] Para mayor información revisar Polinomios

(j) $\dfrac{x+2y}{x^2+4xy+4y^2} = \dfrac{x+2y}{(x+2y)^2} = \dfrac{1}{x+2y}$.

Nota Debe recordarse, como se procedió en los ejercicios resueltos, que simplificar una fracción es expresar su valor en los menores términos posibles.

3.1.2 Ejercicios no resueltos

Simplificar, si es posible, las fracciones siguientes:

1. (a) $\dfrac{54}{81}$
   (b) $\dfrac{144}{600}$
   (c) $\dfrac{75}{225}$
   (d) $\dfrac{640}{896}$
   (e) $\dfrac{1144}{1352}$
   (f) $\dfrac{15}{2002}$

2. (a) $\dfrac{2{\cdot}5{\cdot}7{\cdot}99}{3{\cdot}15{\cdot}121}$
   (b) $\dfrac{42mn}{56n}$
   (c) $\dfrac{33xy}{55xyz}$
   (d) $\dfrac{11{\cdot}5a}{7a{\cdot}11ab}$

3. (a) $\dfrac{10+5}{5+18}$
   (b) $\dfrac{10{\cdot}5}{5+18}$
   (c) $\dfrac{10+5}{5{\cdot}18}$
   (d) $\dfrac{pq}{15pq}$

4. (a) $\dfrac{p+q}{15pq}$
   (b) $\dfrac{9m+2n}{18mn}$
   (c) $\dfrac{15x}{5x-10xy}$
   (d) $\dfrac{m+n}{6mn}$

5. (a) $\dfrac{6+18x}{6}$
   (b) $\dfrac{25xy}{20x-10xy}$
   (c) $\dfrac{4ax-12a}{5bx-15b}$
   (d) $\dfrac{12ax+16x}{16cx+24x}$

6. (a) $\dfrac{8a-6}{12a-9}$
   (b) $\dfrac{12x+18y}{14x+21y}$
   (c) $\dfrac{18bx-24cx}{15ab-20ac}$
   (d) $\dfrac{acx+acy}{bcx+bcy}$

7.

(a) $\dfrac{a^2-b^2}{3a+3b}$

(b) $\dfrac{x-3y}{x^2-9y^2}$

(c) $\dfrac{(x+y)^2}{x^2-y^2}$

(d) $\dfrac{4x^2-y^2}{2x+y}$

8. (a) $\dfrac{(a+b)^2}{5a+b}$

   (b) $\dfrac{4-3x}{16-24x+9x^2}$

   (c) $\dfrac{x+1}{x^2+2x+1}$

   (d) $\dfrac{a^2x-b^2x}{(a-b)^2}$

9. (a) $\dfrac{15x^2+6xy}{30xy+12y^2}$

   (b) $\dfrac{5a^2-5ab}{a^2-b^2}$

   (c) $\dfrac{16x^2-24x+9}{12x^2-9x}$

10. (a) $\dfrac{57a^2b^3x^4}{38a^3bx^2}$

    (b) $\dfrac{xy+x}{y^2+y}$

    (c) $\dfrac{4x-8}{x^2+4}$

11. (a) $\dfrac{4a^2+12ab}{6a^3-54ab^2}$

    (b) $\dfrac{12m^2-12m}{18m^3-18m^2}$

    (c) $\dfrac{4a^2x-16x^3}{8ax-16x^2}$

12. (a) $\dfrac{7a^2-28b^2}{14a+28b}$

    (b) $\dfrac{12x^2-27}{6x+9}$

    (c) $\dfrac{8a-4}{16a^2-8a}$

13. (a) $\dfrac{5x+15}{7x-21}$

    (b) $\dfrac{26a^2x^3y}{33bcs}$

    (c) $\dfrac{9a^2b-9ab^2}{36a-36b}$

14. (a) $\dfrac{2a-6a^3}{5-15a^2}$

    (b) $\dfrac{4a^6b^2-8a^5b^3+4a^4b^4}{4a^5b^3-4a^3b^5}$

    (c) $\dfrac{a^2-16x^2}{a^2+2ax}$

3.1.3 Operaciones (Parte primera)

Ejercicios Resueltos

1. Efectuar las operaciones siguientes:

(a) $\frac{3}{7}+\frac{2}{7}$

(b) $\frac{17}{100}+\frac{33}{100}$

(c) $\frac{3}{a}+\frac{5}{a}$

(d) $\frac{x-1}{x}+\frac{2}{x}$

(e) $1+\frac{2}{5}$

(f) $\frac{2}{9}+\frac{4}{9}+\frac{7}{9}$

(g) $23+\frac{4}{7}+\frac{3}{7}$

(h) $\frac{1}{45}+\frac{1}{30}$

(i) $\frac{5}{12}+\frac{19}{60}$

(j) $\frac{11}{51}+\frac{7}{34}+\frac{1}{6}$

(k) $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}$

(l) $\frac{5}{24}+\frac{11}{36}+\frac{17}{60}$.

Solución

(a) $\frac{3}{7}+\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$

(b) $\frac{17}{100}+\frac{33}{100}=\frac{50}{100}=\frac{1}{2}$

(c) $\frac{3}{a}+\frac{5}{a}=\frac{8}{a}$

(d) $\frac{x-1}{x}+\frac{2}{x}=\frac{x-1+2}{x}=\frac{x+1}{x}$

(e) $1+\frac{2}{5}=\frac{5}{5}+\frac{2}{5}=\frac{7}{5}$

(f) $\frac{2}{9}+\frac{4}{9}+\frac{7}{9}=\frac{13}{9}$

(g) $23+\frac{4}{7}+\frac{3}{7}=\frac{161}{7}+\frac{4}{7}+\frac{3}{7}=\frac{168}{7}=24$

(h) $\frac{1}{45}+\frac{1}{30}=\frac{2+3}{90}=\frac{5}{90}=\frac{1}{18}$

$$\begin{array}{r|l} 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} 45=3^2\cdot 5 \\ 30=2\cdot 3\cdot 5 \end{array}\right\} \longrightarrow \text{m.c.m. } =2\cdot 3^2\cdot 5=90.$$

(i) $\frac{5}{12}+\frac{19}{60}=\frac{25+19}{60}=\frac{44}{60}=\frac{11}{15}$

(j) $\frac{11}{51}+\frac{7}{34}+\frac{1}{6}=\frac{22+21+17}{102}=\frac{60}{102}=\frac{10}{17}$

$$\left.\begin{array}{ccc|l} 51 & 34 & 6 & 2 \\ 51 & 17 & 3 & 3 \\ 17 & 17 & 1 & 17 \\ 1 & 1 & 1 & \end{array}\right\} \longrightarrow \text{m.c.m } =102.$$

(k) $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}=\frac{105+63+45+35}{315}=\frac{248}{315}$

(l) $\frac{5}{24}+\frac{11}{36}+\frac{17}{60}=\frac{75+110+102}{360}=\frac{287}{360}$.

2. Efectuar las operaciones siguientes:

(a) $\frac{17}{20}-\frac{9}{20}$

(b) $\frac{14}{15}-\frac{7}{12}$

(c) $6-\frac{4}{9}$

Solución

(a) $\frac{17}{20}-\frac{9}{20}=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$

(b) $\frac{14}{15} - \frac{7}{12} = \frac{56-35}{60} = \frac{21}{60} = \frac{7}{20}$

(c) $6 - \frac{4}{9} = \frac{54}{9} - \frac{4}{9} = \frac{50}{9}$.

3. Efectuar las operaciones siguientes:

(a) $\frac{5}{12}\cdot\frac{6}{11}$

(b) $7\cdot\frac{3}{23}$

(c) $\frac{5}{12}\cdot 8$

(d) $\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{9}{11}$

Solución

(a) $\frac{5}{12}\cdot\frac{6}{11} = \frac{5\cdot 6}{12\cdot 11} = \frac{5}{2\cdot 11} = \frac{5}{22}$

(b) $7\cdot\frac{3}{23} = \frac{7\cdot 3}{23} = \frac{21}{23}$

(c) $\frac{5}{12}\cdot 8 = \frac{5\cdot 8}{12} = \frac{5\cdot 2}{3} = \frac{10}{3}$

(d) $\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{9}{11} = \frac{3\cdot 5\cdot 9}{7\cdot 4\cdot 11} = \frac{135}{308}$

4. Efectuar las operaciones siguientes:

(a) $\frac{3}{5} \div \frac{1}{2}$

(b) $\frac{5}{8} \div 2$

(c) $25 \div \frac{5}{9}$

(d) $\frac{7}{4} \div \frac{7}{4}$

(e) $0 \div \frac{3}{4}$

Solución

(a) $\frac{3}{5} \div \frac{1}{2} = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{1} = \frac{3\cdot 2}{5\cdot 1} = \frac{6}{5}$

(b) $\frac{5}{8} \div 2 = \frac{5}{8}\cdot\frac{1}{2} = \frac{5\cdot 1}{8\cdot 2} = \frac{5}{16}$

(c) $25 \div \frac{5}{9} = 25\cdot\frac{9}{5} = \frac{25\cdot 9}{5} = 5\cdot 9 = 45$

(d) $\frac{7}{4} \div \frac{7}{4} = 1$

(e) $0 \div \frac{3}{4} = 0$

5. Efectuar las operaciones siguientes:

(a) $\left(\frac{a}{3} + \frac{a}{7}\right)\cdot\frac{2}{a}$

(b) $\left(3 + \frac{5}{7}\right) \div \frac{13}{21}$

(c) $\frac{a}{2} \div \left(\frac{7}{a} - \frac{3}{a}\right)$

(d) $\left(\frac{9}{5} - \frac{3}{4}\right)\cdot\left(3 - \frac{7}{5}\right)$

(e) $\left(1 + \frac{1}{a}\right) \div \left(1 - \frac{1}{a}\right)$

(f) $\left(\frac{a+2}{a} - \frac{1}{a}\right)\cdot\frac{a}{a+1}$

Solución En ejercicios de esta clase conviene en general, efectuar primeramente la operación indicada dentro de los paréntesis.

(a) $\left(\frac{a}{3}+\frac{a}{7}\right)\cdot\frac{2}{a}=\frac{7a+3a}{21}\cdot\frac{2}{a}=\frac{10a}{21}\cdot\frac{2}{a}=\frac{20}{21}$

(b) $\left(3+\frac{5}{7}\right)\div\frac{13}{21}=\frac{26}{7}\div\frac{13}{21}=\frac{26}{7}\cdot\frac{21}{13}=\frac{26\cdot21}{7\cdot13}=2\cdot3=6$

(c) $\frac{a}{2}\div\left(\frac{7}{a}-\frac{3}{a}\right)=\frac{a}{2}\div\frac{4}{a}=\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{4}=\frac{a\cdot a}{2\cdot4}=\frac{a^2}{8}$

(d) $\left(\frac{9}{5}-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(3-\frac{7}{5}\right)=\frac{21}{20}\cdot\frac{8}{5}=\frac{21\cdot8}{20\cdot5}=\frac{21\cdot2}{5\cdot5}=\frac{42}{25}$

(e) $\left(1+\frac{1}{a}\right)\div\left(1-\frac{1}{a}\right)=\frac{a+1}{a}\div\frac{a-1}{a}=\frac{a+1}{a}\cdot\frac{a}{a-1}=\frac{(a+1)\cdot a}{a\cdot(a-1)}=\frac{a+1}{a-1}$

(f) $\left(\frac{a+2}{a}-\frac{1}{a}\right)\cdot\frac{a}{a+1}=\frac{a+1}{a}\cdot\frac{a}{a+1}=1.$

Algunos problemas simples:

1. Calcular:

   (a) Los $\frac{3}{5}$ de 565.

   (b) Los $\frac{9}{14}$ de 322.

   (c) Los $\frac{2}{3}$ de los $\frac{4}{5}$ de 285.

   (d) Los $\frac{3}{7}$ de los $\frac{4}{25}$ de 8.

   (e) Los $\frac{5}{14}$ de los $\frac{3}{35}$ de $\frac{7}{9}$.

2. ¿Cuáles son las fracciones cuyo denominador es 24 y que son respectivamente equivalentes a las fracciones?:

   (a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{39}{72}$ (c) $\frac{9}{27}$ (d) $\frac{15}{18}$

3. Hallar una fracción equivalente a $\frac{21}{28}$ y cuyo denominador sea 20.

4. Hallar las fracciones equivalentes a $\frac{65}{39}$, cuyos respectivos numeradores sean 15 y 645.

5. Encontrar todas las fracciones equivalentes a $\frac{40}{56}$ cuyo numerador sea mayor que 50 y el denominador menor que 100.

6. Encontrar una fracción equivalente a $\frac{49}{84}$ y cuyos términos sumen 57.

7. Encontrar una fracción equivalente a $\frac{7}{13}$ y en la cual la diferencia de sus términos sea 48.

8. Ordenar de menor a mayor las fracciones siguientes:

   (a) $\frac{a}{5},\quad \frac{a+2}{5},\quad \frac{a-1}{5},\quad \frac{2a+6}{10}\quad (a\geq 1).$

   (b) $\frac{a}{a},\quad \frac{a+1}{a},\quad \frac{a}{a+1},\quad (a\geq 1).$

(c) $\dfrac{1}{2a+1}$, $\dfrac{2}{4a+1}$, $\dfrac{2}{4a+2}$, $\dfrac{1}{4a+2}$ $(a \geq 1)$.

(d) $\dfrac{a}{a+1}$, $\dfrac{a}{a+2}$, $\dfrac{a+2}{a}$, $\dfrac{a+1}{a}$ $(a \geq 1)$.

9. Sea la fracción $\dfrac{26}{102}$. Si se suma 153 al denominador de esta fracción. ¿Qué número se le debe agregar al numerador para que la fracción conserve su valor?

10. Dos señoras salen de compras llevando entre las dos ₡494. La primera gasta los $\dfrac{3}{7}$ de lo que llevaba y la segunda los $\dfrac{2}{3}$ de lo que llevaba, quedando ambas con la misma suma de dinero después del gasto realizado. ¿Con cuánto salió cada una?

Solución

1. (a) $\dfrac{1}{5}$ de 565 corresponde a $\dfrac{565}{5} \longrightarrow \dfrac{3}{5}$ de $565 = \dfrac{565 \cdot 3}{5} = 339$.

   (b) $\dfrac{9}{14}$ de $322 = \dfrac{322 \cdot 9}{14} = 207$.

   (c) $\dfrac{4}{5}$ de $285 = \dfrac{285 \cdot 4}{5}$ y $\dfrac{2}{3}$ de $\dfrac{285 \cdot 4}{5} = \dfrac{285 \cdot 4 \cdot 2}{5 \cdot 3} = 152$.

   (d) $\dfrac{3}{7}$ de los $\dfrac{4}{25}$ de $8 = \dfrac{8 \cdot 4 \cdot 3}{25 \cdot 7} = \dfrac{96}{175}$.

   (e) $\dfrac{5}{14}$ de $\dfrac{3}{35}$ de $\dfrac{7}{9} = \dfrac{7 \cdot 3 \cdot 5}{9 \cdot 35 \cdot 14} = \dfrac{1}{42}$.

2. (a) $\dfrac{1}{2} = \dfrac{12}{24}$ (Se multiplicó por 12 el denominador y el denominador de $\dfrac{1}{2}$).

   (b) $\dfrac{39}{72} = \dfrac{13}{24}$ (Se dividió por 3 numerador y denominador de $\dfrac{39}{72}$).

   (c) $\dfrac{9}{27} = \dfrac{1}{3} = \dfrac{8}{24}$ (d) $\dfrac{15}{18} = \dfrac{5}{6} = \dfrac{20}{24}$.

3. $\dfrac{21}{28} = \dfrac{3}{4} = \dfrac{15}{20}$

4. $\dfrac{65}{39} = \dfrac{5}{3} = \dfrac{15}{9}$, $\dfrac{65}{39} = \dfrac{5}{3} = \dfrac{645}{387}$

5. $\dfrac{40}{56} = \dfrac{5}{7} = \dfrac{55}{77} = \dfrac{60}{84} = \dfrac{65}{91} = \dfrac{70}{98}$

6. $\dfrac{49}{84} = \dfrac{7}{12} = \dfrac{21}{36}$ (Simplificando $\dfrac{49}{84}$ se obtiene $\dfrac{7}{12}$; la suma de los términos de $\dfrac{7}{12}$ es 19; como se pide que la suma de los términos de la fracción equivalente a $\dfrac{49}{84}$ y por tanto a $\dfrac{7}{12}$ sea $57 = 19 \cdot 3$, basta multiplicar por 3 ambos términos de $\dfrac{7}{12}$).

7. $\dfrac{7}{13} = \dfrac{56}{104}$ (La fracción $\dfrac{7}{13}$ es irreducible; la diferencia de sus términos es 6; como se pide una fracción equivalente en la cual la diferencia de sus términos sea $48 = 6 \cdot 8$, basta multiplicar por 8 ambos términos de $\dfrac{7}{13}$).

8. (a) $\dfrac{a-1}{5} < \dfrac{a}{5} < \dfrac{a+2}{5} < \dfrac{2a+6}{10}$

   (b) $\dfrac{a}{a+1} < \dfrac{a}{a} < \dfrac{a+1}{a}$

   (c) $\dfrac{1}{4a+2} < \dfrac{1}{2a+1} < \dfrac{2}{4a+1}, \qquad \left(\dfrac{1}{2a+1} = \dfrac{2}{4a+2}\right).$

   (d) $\dfrac{a}{a+2} < \dfrac{a}{a+1} < \dfrac{a+1}{a} < \dfrac{a+2}{a}.$

9. Sumando 153 al denominador de $\dfrac{26}{102}$, se obtiene una nueva fracción cuyo denominador 255 es igual a $102 \cdot \dfrac{255}{102}$; entonces, para que la fracción dada conserve su valor, debe multiplicarse también su numerador 26 por $\dfrac{255}{102}$. Resulta $26 \cdot \dfrac{255}{102} = \dfrac{26 \cdot 255}{102} = 65$; luego $\dfrac{26}{102} = \dfrac{65}{255}$. Ahora bien, como $65 - 26 = 39$, finalmente se obtiene la respuesta al problema que es 39.

10. Si la primera señora gasta $\dfrac{3}{7}$ de lo que lleva, le quedan los $\dfrac{4}{7}$ de lo que llevaba; si la segunda gasta $\dfrac{2}{3}$ de lo que llevaba le quedan $\dfrac{1}{3}$ de lo que llevaba. Como ahora ambas tienen la misma suma de dinero, resulta que $\dfrac{1}{3}$ del dinero de la segunda es igual a $\dfrac{4}{7}$ del dinero de la primera. Entonces los $\dfrac{3}{3}$ del dinero de la segunda, es decir el dinero de la segunda, es igual a $3 \cdot \dfrac{4}{7} = \dfrac{12}{7}$ del dinero de la primera. De aquí que $\dfrac{7}{7}$ del dinero de la primera más $\dfrac{12}{7}$ del dinero de la primera es igual a $\dfrac{19}{7}$ del dinero de la primera es igual a ₡494. Por lo tanto:

$$\begin{array}{lll} \dfrac{19}{7} & \text{del dinero} & 1^a = ₡494 \\ \dfrac{1}{7} & \text{del dinero} & 1^a = ₡\dfrac{494}{19} \\ \dfrac{7}{7} & \text{del dinero} & 1^a = ₡\dfrac{494 \cdot 7}{19} = ₡182, \end{array}$$

entonces la 1^a señora salió con ₡182. Como el dinero de la 2^a es los $\dfrac{12}{7}$ del de la 1^a, se debe calcular el valor de los $\dfrac{12}{7}$ de ₡182, esto es $₡\dfrac{182 \cdot 12}{7} = ₡312$. Así, la primera señora salió con ₡182 y la segunda con ₡312.

Notas

1. Los dos últimos problemas se resuelven más fácilmente por álgebra.
2. Si el resultado de una operación de fracciones es también una fracción, ésta debe darse en los menores términos posibles, es decir debe simplificarse, cuando es posible hacerlo. Así se procedió en los ejercicios resueltos.
3. "Números Mixtos" como $1\frac{3}{4}$, $3\frac{2}{5}$, $4\frac{5}{8}$, etc; deben expresarse en forma de fracción $\frac{7}{4}$, $\frac{17}{5}$, $\frac{37}{8}$, etc.

3.1.4 Ejercicios no resueltos

1. Comprobar, mentalmente, los siguientes ejercicios:

   (a)

$\frac{3}{7}+\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$ $\qquad$ $\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{3}{4}$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$ $\qquad$ $1\frac{3}{4}+1\frac{1}{2}=\frac{13}{4}$

(b) $\frac{7}{12}-\frac{1}{8}=\frac{11}{24}$ $\qquad$ $3\frac{1}{3}-\frac{5}{6}=\frac{5}{2}$ $\qquad$ $2-1\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$

(c) $\frac{4}{5}\cdot 1\frac{1}{2}=\frac{6}{5}$ $\qquad$ $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot 1\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ $\qquad$ $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{4}{5}=\frac{2}{3}$

(d) $6\div\frac{1}{2}=12$ $\qquad$ $\frac{4}{15}\div\frac{2}{3}=\frac{2}{5}$ $\qquad$ $\left(1\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)\div 1\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

2. Efectuar las operaciones siguientes:

(a) $\frac{1}{6}+\frac{5}{12}+\frac{7}{18}$ $\qquad$ $2+\frac{3}{14}+\frac{5}{21}+\frac{4}{35}$

(b) $\frac{1}{2}+2\frac{3}{4}+\frac{3}{5}+1\frac{1}{4}$ $\qquad$ $\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{1}{6}+\frac{1}{15}+\frac{7}{10}$

(c) $\frac{11}{18}-\frac{7}{24}$ $\qquad$ $\frac{3}{26}-\frac{4}{39}$ $\qquad$ $2\frac{4}{15}-\frac{7}{10}$

(d) $5\frac{4}{9}-2\frac{3}{4}$ $\qquad$ $\left(\frac{11}{14}-\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{20}$ $\qquad$ $3-\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{6}\right)$

(e) $\frac{6}{7}\cdot\frac{5}{12}$ $\qquad$ $2\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{5}{12}$ $\qquad$ $2\frac{7}{19}\cdot 1\frac{5}{33}\cdot 1\frac{7}{15}\cdot\frac{1}{12}$

(f) $\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{1}{6}$ $\qquad$ $\left(4\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)$

(g) $\frac{3}{5}\div\frac{9}{10}$ $\qquad$ $\frac{1}{36}\div 2\frac{1}{4}$ $\qquad$ $1\frac{2}{5}\div 6\frac{3}{10}$

(h) $\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)\div\frac{4}{15}$ $\qquad$ $\left(9\frac{3}{5}-6\frac{1}{4}\right)\div\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{5}\right)$

3.1.5 Operaciones (Parte segunda)

Ejercicios resueltos

Efectuar las siguientes operaciones:

1. $\dfrac{a+3}{10}+\dfrac{3a+4}{10}+\dfrac{a-2}{10}$
2. $\dfrac{2x+1}{6}+\dfrac{3x-2}{4}$
3. $\dfrac{2}{a^2}+\dfrac{1}{a}+\dfrac{3}{a^3}$
4. $1+\dfrac{a-b}{a+b}$
5. $1-\dfrac{a-b}{a+b}$
6. $\dfrac{r^2-r+6}{r^2-9}-\dfrac{2}{r-3}$
7. $\dfrac{3x+y}{x^2-y^2}-\dfrac{2y}{x^2-xy}-\dfrac{1}{x+y}$
8. $\dfrac{a}{a-2}+\dfrac{a-1}{a+1}-\dfrac{6}{a^2-a-2}$
9. $\dfrac{6x+2y}{x^2-y^2}-\dfrac{2}{x+y}-\dfrac{3}{x-y}$
10. $\dfrac{c^2-cd}{8c+12d}\cdot\dfrac{6c+9d}{cd-d^2}$
11. $\left(a+\dfrac{a}{b+c}\right)\cdot\dfrac{b^2-c^2}{b+c+1}$
12. $\dfrac{x^3-8x^2+16x}{3x^3-12x^2}\div\dfrac{x^2-16}{6x}$
13. $\left(a-b-\dfrac{ab-b^2}{a}\right)\div\dfrac{a^2-b^2}{a}$

Notas Se aconseja revisar polinomios.

Solución

1. $\dfrac{a+3}{10}+\dfrac{3a+4}{10}+\dfrac{a-2}{10}=\dfrac{5a+5}{10}=\dfrac{5(a+1)}{10}=\dfrac{a+1}{2}$
2. $\dfrac{2x+1}{6}+\dfrac{3x-2}{4}=\dfrac{2(2x+1)+3(3x-2)}{12}=\dfrac{4x+2+9x-6}{12}=\dfrac{13x-4}{12}$
3. $\dfrac{2}{a^2}+\dfrac{1}{a}+\dfrac{3}{a^3}=\dfrac{2a+a^2+3}{a^3}$
4. $1+\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{a+b+a-b}{a+b}=\dfrac{2a}{a+b}$
5. $1-\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{a+b-a+b}{a+b}=\dfrac{2b}{a+b}$
6. $\dfrac{r^2-r+6}{r^2-9}-\dfrac{2}{r-3}=\dfrac{r^2-r+6}{(r+3)(r-3)}-\dfrac{2}{r-3}=\dfrac{r^2-r+6-2(r+3)}{(r+3)(r-3)}=$
   $\dfrac{r^2-r+6-2r-6}{(r+3)(r-3)}=\dfrac{r^2-3r}{(r+3)(r-3)}=\dfrac{r(r-3)}{(r+3)(r-3)}=\dfrac{r}{r+3}$
7. $\dfrac{3x+y}{x^2-y^2}-\dfrac{2y}{x^2-xy}-\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{3x+y}{(x+y)(x-y)}-\dfrac{2y}{x(x-y)}-\dfrac{1}{x+y}=$
   $\dfrac{x(3x+y)-2y(x+y)-x(x-y)}{x(x+y)(x-y)}=\dfrac{3x^2+xy-2xy-2y^2-x^2+xy}{x(x+y)(x-y)}=$
   $\dfrac{2x^2-2y^2}{x(x+y)(x-y)}=\dfrac{2(x+y)(x-y)}{x(x+y)(x-y)}=\dfrac{2}{x}$

8. $\dfrac{a}{a-2}+\dfrac{a-1}{a+1}-\dfrac{6}{a^2-a-2}=\dfrac{a}{a-2}+\dfrac{a-1}{a+1}-\dfrac{6}{(a+1)(a-2)}=$
$\dfrac{a(a+1)+(a-1)(a-2)-6}{(a+1)(a-2)}=\dfrac{a^2+a+a^2-2a-a+2-6}{(a+1)(a-2)}=$
$\dfrac{2(a^2-a-2)}{(a+1)(a-2)}=\dfrac{2(a+1)(a-2)}{(a+1)(a-2)}=2$

9. $\dfrac{6x+2y}{x^2-y^2}-\dfrac{2}{x+y}-\dfrac{3}{x-y}=\dfrac{6x+2y}{(x+y)(x-y)}-\dfrac{2}{x+y}-\dfrac{3}{x-y}=$
$\dfrac{6x+2y-2(x-y)-3(x+y)}{(x+y)(x-y)}=\dfrac{6x+2y-2x+2y-3x-3y}{(x+y)(x-y)}=$
$\dfrac{x+y}{(x+y)(x-y)}=\dfrac{1}{x-y}$

10. $\dfrac{c^2-cd}{8c+12d}\cdot\dfrac{6c+9d}{cd-d^2}=\dfrac{c(c-d)\cdot3(2c+3d)}{4(2c+3d)\cdot d(c-d)}=\dfrac{3c}{4d}$

11. $\left(a+\dfrac{a}{b+c}\right)\cdot\dfrac{b^2-c^2}{b+c+1}=\dfrac{a(b+c)+a}{b+c}\cdot\dfrac{(b+c)(b-c)}{b+c+1}=$
$\dfrac{ab+ac+a}{b+c}\cdot\dfrac{(b+c)(b-c)}{b+c+1}=\dfrac{a(b+c+1)\cdot(b+c)(b-c)}{(b+c)(b+c+1)}=a(b-c)$

12. $\dfrac{x^3-8x^2+16x}{3x^3-12x^2}\div\dfrac{x^2-16}{6x}=\dfrac{x(x^2-8x+16)}{3x^2(x-4)}\cdot\dfrac{6x}{(x+4)(x-4)}=$
$\dfrac{x(x-4)(x-4)\cdot6x}{3x^2(x-4)\cdot(x+4)(x-4)}=\dfrac{2}{x+4}$

13. $\left(a-b-\dfrac{ab-b^2}{a}\right)\div\dfrac{a^2-b^2}{a}=\dfrac{a^2-ab-ab+b^2}{a}\div\dfrac{(a+b)(a-b)}{a}=$
$\dfrac{a^2-2ab+b^2}{a}\div\dfrac{(a+b)(a-b)}{a}=\dfrac{(a-b)(a-b)\cdot a}{a\cdot(a+b)(a-b)}=\dfrac{a-b}{a+b}.$

Ejercicios no resueltos

Efectuar las operaciones siguientes:

1. (a) $\dfrac{a}{5}+\dfrac{a}{2}+\dfrac{3a}{10}$
   (b) $\dfrac{4z}{9xy}+\dfrac{5x}{6yz}+\dfrac{2y}{3xz}$
2. (a) $\dfrac{a+3}{6}-\dfrac{2a-4}{8}+\dfrac{a-3}{3}$
   (b) $\dfrac{2x-3y}{xy}+\dfrac{x+3xy}{x^2y}-\dfrac{x+y}{xy^2}$
3. (a) $\dfrac{x^2-2xy-y^2}{xy-y^2}+\dfrac{x+y}{x-y}$
   (b) $\dfrac{1}{p+q}-\dfrac{1}{p-q}-\dfrac{2}{q}$
   (c) $\dfrac{b}{b+1}-\dfrac{2}{b^2-1}+\dfrac{b-3}{b+1}$
   (b) $\dfrac{1}{x+y}-\dfrac{y}{x^2-xy}+\dfrac{2y}{x^2-y^2}$
4.

$$\frac{4x}{x^2-4}-\frac{3x}{x^2-x-2}+\frac{2}{x^2-3x+2}$$

5. $\dfrac{3}{a^2-b^2}-\dfrac{3}{a^2+ab-2b^2}+\dfrac{1}{a^2+3ab+2b^2}$

6. (a) $\dfrac{28x^3}{5ab^2}\cdot\dfrac{10a^2b}{7x^2}$ (b) $\dfrac{x^2-1}{3}\cdot\dfrac{6a}{x+1}$

7. (a) $\dfrac{14r^3}{9s^2t}\div\dfrac{35r}{27st}$ (b) $\dfrac{5x^2}{2z}\cdot\dfrac{yz}{4x}\div\dfrac{15y^2}{8z}$

8. (a) $\dfrac{2ab+2ac}{3b^2-3bc}\cdot\dfrac{b^2-c^2}{b^2+2bc+c^2}$ (b) $\dfrac{3p-q}{2p^2+5pq}\div\dfrac{3p^2-pq}{2pq+5q^2}$

9. $\dfrac{2r^2-5rs}{r^2s^2-25s^4}\cdot\dfrac{2r-10s}{2r^3-5r^2s}\div\dfrac{rt+5st}{r^2st}$

10. (a) $\dfrac{2a}{2b-c}\cdot\left(\dfrac{b+c}{3}-\dfrac{c}{2}\right)$ (b) $\left(x+\dfrac{x}{x-1}\right)\div\left(x-\dfrac{x}{x-1}\right)$

11. $\left(a^2-1\right)\cdot\left(\dfrac{a}{a+1}+\dfrac{a}{a-1}-1\right)$

12. $\left(a+\dfrac{b-a}{1+ab}\right)\div\left(1-\dfrac{1+ab}{ab-a^2}\right)$

13. $\left(\dfrac{x}{x-a}+\dfrac{a}{x+a}\right)\div\left(\dfrac{x}{x-a}-\dfrac{a}{x+a}\right)$

3.1.6 Fracciones Compuestas

Son expresiones como:

(a) $\dfrac{\dfrac{2x}{x-1}}{\dfrac{x^2}{x+1}}$ (b) $\dfrac{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}}{xy}$ (c) $\dfrac{2-\dfrac{7}{r}}{\dfrac{3}{r}}$

(d) $2 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{2}{2 - \cfrac{2}{x^2}}}$ (e) $1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4}}}$,

etc, como se ve son expresiones en las que se combinan varias de las operaciones de fracciones.

Ejercicio Simplificar las fracciones compuestas anteriores.

(a) $\dfrac{\dfrac{2x}{x-1}}{\dfrac{x^2}{x+1}} = \dfrac{2x}{x-1} \cdot \dfrac{x+1}{x^2} = \dfrac{2(x+1)}{x(x-1)}$

(b) $\dfrac{\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}}{xy} = \dfrac{\dfrac{x^2+y^2}{xy}}{xy} = \dfrac{x^2+y^2}{x^2y^2}$

(c) $\dfrac{2 - \dfrac{7}{r}}{\dfrac{3}{r}} = \dfrac{\dfrac{2r-7}{r}}{\dfrac{3}{r}} = \dfrac{2r-7}{3}$

(d) $$2 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{2}{2 - \cfrac{2}{x^2}}} = 2 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{2}{\cfrac{2x^2-2}{x^2}}} = 2 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{2x^2}{2x^2-2}} =$$
$$2 - \cfrac{1}{\cfrac{2x^2-2-2x^2}{2x^2-2}} = 2 - \cfrac{1}{-\cfrac{2}{2x^2-2}} = 2 + \frac{2x^2-2}{2} =$$
$$\frac{4+2x^2-2}{2} = \frac{2x^2+2}{2} = \frac{2(x^2+1)}{2} = x^2+1$$

(e) $$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4}}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{2 + \cfrac{13}{4}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{4}{13}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{30}{13}} = 1 + \frac{13}{30} = \frac{43}{30}.$$

3.1.7 Ejercicios no resueltos

1. (a) $\dfrac{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}}{\dfrac{3}{4} - \dfrac{7}{6}}$ (b) $2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{4}{5}}}$

2. (a) $\dfrac{1 - \dfrac{6d}{2c+3d}}{2 + \dfrac{d}{c-2d}}$ (b) $\dfrac{\dfrac{c+1}{c-1} - \dfrac{c}{c+1}}{\dfrac{4}{c-1} + 3}$

3.

(a) $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$

(b) $\dfrac{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}}{1+\dfrac{a-b}{a+b}}$

4. $\dfrac{\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2-y^2}-\dfrac{x-y}{x+y}}{\dfrac{6x^2y^3}{x^2-y^2}}$

5. $\left(\dfrac{\dfrac{a}{1-x}-\dfrac{a}{1-x}}{\dfrac{1}{x-1}}\right)\cdot\left(\dfrac{4}{3a^2}-\dfrac{3x}{2a^2x}\right).$

Algunos problemas simples

Resolver y probar los siguientes problemas:

1. En una casa de compra y venta se vende un escritorio en ₡1050 con una ganancia que representa los $\frac{2}{5}$ del precio de compra. ¿Cuál fue el precio de compra?
2. Un comerciante compra mercaderías por valor de ₡8700. Vende luego los $\frac{2}{3}$ de lo que compró con un beneficio igual a los $\frac{2}{5}$ del precio total de compra. ¿Cuánto cobro por las mercaderías vendidas?
3. Dividir 126 en dos partes de modo que los $\frac{3}{5}$ de la primera y los $\frac{3}{4}$ de la segunda sean números iguales.
4. Sumándole 43 a los $\frac{2}{3}$ de un número se obtiene los $\frac{5}{6}$ del mismo número. ¿Cuál es éste?
5. La diferencia entre los $\frac{2}{3}$ y los $\frac{3}{5}$ de un número es igual a 20. ¿Cuál es este número?
6. ¿Qué número debe sumarse a cada uno de los términos de la fracción $\frac{51}{27}$ para que resulte equivalente a la fracción $\frac{5}{3}$?
7. Calcular una fracción equivalente a $\frac{3}{7}$ y tal que la diferencia de sus términos sea 80.
8. Encontrar una fracción equivalente a $\frac{5}{12}$ y tal que la diferencia de sus términos sea 63.
9. La suma de dos fracciones es $\frac{13}{30}$, su diferencia $\frac{1}{6}$. ¿Cuáles son estas fracciones?
10. Hallar dos fracciones respectivamente equivalentes a $\frac{2}{5}$ y a $\frac{4}{7}$ en que la suma de los dos términos sea la misma en las dos.
11. Trasformar la fracción $\frac{8}{9}$ en otra equivalente, la más simple posible, de modo que el numerador sea un cuadrado y el denominador un cubo.

Simplificación de fracciones

Respuestas.

1. $\frac{2}{3}$, $\frac{6}{25}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{11}{13}$, no es posible.
2. $\frac{14}{11}$, $\frac{3m}{4}$, $\frac{3}{5z}$, $\frac{5}{7ab}$.
3. No se puede, no se puede, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{15}$.
4. No se puede, no se puede, $\frac{3}{1-2y}$, no se puede.
5. $1+3x$, $\frac{5y}{4-2y}$, $\frac{4a}{5b}$, $\frac{3a+4}{2(2c+3)}$.
6. $\frac{2}{3}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{6x}{5a}$, $\frac{a}{b}$.
7. $\frac{a-b}{3}$, $\frac{1}{x+3y}$, $\frac{x+y}{x-y}$, $2x-y$.
8. $\frac{a+b}{5}$, $\frac{1}{4-3x}$, $\frac{1}{x+1}$, $\frac{x(a+b)}{a-b}$.
9. $\frac{x}{2y}$, $\frac{5a}{a+b}$, $\frac{4x-3}{3x}$.
10. $\frac{3b^2x^2}{2a}$, $\frac{x}{y}$, no se puede.
11. $\frac{2}{3(a-3b)}$, $\frac{2}{3m}$, $\frac{a+2x}{2}$.
12. $\frac{a-2b}{2}$, $2x-3$, $\frac{1}{2a}$.
13. No se puede, no se puede, $\frac{ab}{4}$.
14. $\frac{2a}{5}$, $\frac{a(a-b)}{b(a+b)}$, no se puede.

3.1.8 Operaciones de fracciones (Parte primera)

Respuestas.

1. (a) $\frac{35}{36}$, $\frac{77}{30}$.
   (b) $\frac{51}{10}$, $\frac{82}{45}$.
   (c) $\frac{23}{72}$, $\frac{1}{78}$, $\frac{47}{30}$.
   (d) $\frac{97}{36}$, $\frac{3}{35}$, $\frac{25}{12}$.
   (e) $\frac{5}{14}$, 1, $\frac{1}{3}$.
   (f) $\frac{91}{360}$, $\frac{14}{15}$.
   (g) $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{81}$, $\frac{2}{9}$.
   (h) $\frac{31}{8}$, $\frac{67}{19}$.

3.1.9 Operaciones con fracciones (segunda parte)

Respuestas

1. a, $\dfrac{8z^2 - 15x^2 - 12y^2}{18xyz}$, $-12y^2$.
2. $\dfrac{a}{4}$, $\dfrac{2y-1}{y^2}$.
3. $\dfrac{x}{y}$, $\dfrac{-2p^2}{q(p+q)(p-q)}$.
4. $\dfrac{2b-5}{b-1}$, $\dfrac{1}{x}$.
5. $\dfrac{1}{x+1}$.
6. $\dfrac{1}{a^2-b^2}$.
7. $\dfrac{8ax}{b}$, $2a(x-1)$.
8. $\dfrac{6r^2}{5s}$, $\dfrac{xz}{3y}$.
9. $\dfrac{2a}{3b}$, $\dfrac{q}{p^2}$.
10. $\dfrac{2r}{s(r+5s)^2}$.
11. $\dfrac{a}{3}$, $\dfrac{x}{x-2}$.
12. a^2+1.
13. $\dfrac{ab(a-b)}{ab+1}$.
14. $\dfrac{x^2+2ax-a^2}{x^2+a^2}$.

3.1.10 Fracciones compuestas

Respuestas

1. -2, $\dfrac{74}{29}$.
2. $\dfrac{c-2d}{2c+3d}$, $\dfrac{1}{c+1}$.
3. $x+1$, $\dfrac{2b}{a-b}$.
4. $\dfrac{1}{2xy^2}$.
5. $\dfrac{1}{3a}$.

Capítulo 4

Funciones

Debe recordarse que "Dados dos conjuntos A y B se llama función f de A en B un procedimiento, regla o ley que hace corresponder a cada elemento x de A un único elemento y de B". Se representa $f\colon A \longrightarrow B$, una función f se define entonces a partir de tres objetos:

1. Un conjunto A llamado <u>Dominio</u> (conjunto de partida, fuente) de la función;
2. Un conjunto B llamado <u>Codominio</u> (conjunto de llegada, meta) de la función;
3. El procedimiento, regla o ley que hace corresponder a cada $x \in A$ un único $y \in B$.

El elemento y, frecuentemente representado por $f(x)$, se dice el <u>transformado</u> de x por la función f. También se llama <u>imagen</u> de x mediante f; por ello x se llama <u>pre-imagen</u>. Según la definición de función, cada uno de los elementos del dominio es una pre-imagen, pero no necesariamente cada uno de los elementos del codominio es una imagen. El conjunto de los elementos de B que son imágenes se llama <u>ámbito</u>.

Algunos tipos de funciones

Dada una función f de A en B se dice que es:

<u>Inyectiva</u>	si	$\forall\, y \in B$	existe a lo sumo un	$x \in A$	tal que $y = f(x)$.
<u>Sobreyectiva</u>	si	$\forall\, y \in B$	existe al menos un	$x \in A$	tal que $y = f(x)$.
<u>Biyectiva</u>	si	$\forall\, y \in B$	existe uno y sólo un	$x \in A$	tal que $y = f(x)$.

Nota

1. En la función inyectiva un elemento del codominio cuando es imagen lo es de un sólo elemento del dominio; así a cada dos imágenes iguales corresponden dos pre-imágenes iguales; resulta entonces que en el dominio y en el ámbito de la función hay igual número de elementos.
2. En la función sobreyectiva el codominio y el ámbito de la función son iguales.
3. La función biyectiva es al mismo tiempo inyectiva y sobreyectiva; es mediante esta propiedad que corrientemente se define la función biyectiva. Se sabe que para expresar o presentar funciones de A en B se usan redes de flechas, tablas de valores, fórmulas algebraicas.

Otra definición de función "Conjunto de pares ordenados en el que no hay dos pares diferentes con el primer componente igual".

Ejercicios resueltos

1. Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y $B = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81\}$, decir cuáles de las tablas siguientes representan funciones de A en B.

(a)

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4	9	16	25	36	49	64	81

(b)

1	2	3	2	6	7	4	5	8	9
1	4	16	25	36	49	16	25	64	81

(c)

1	2	3	5	6	7	8	9
1	4	9	25	36	49	81	64

(d)

1	2	3	4	5	6	7	8	9
81	64	49	36	25	16	9	4	1

Respuesta.

Son funciones a) y d).

No es una función b) porque hay un elemento en A con dos imágenes diferentes en B.

No es función c) porque hay un elemento en A sin imágenes en B.

2. Sea la función $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ dada por $f(x) = 2x$. ¿Es inyectiva? ¿Es sobreyectiva?.

   Respuesta.

   Es inyectiva pues $2x = 2x' \longrightarrow x = x'$.

   No es sobreyectiva porque un número impar cualquiera del codominio no es la imagen por f de algún número del dominio.

3. Sea la función $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ dada por $f(x) = x + 1$. ¿Es inyectiva? ¿Es sobreyectiva?

   Respuesta.

   Es inyectiva, pues $x + 1 = x' + 1 \longrightarrow x = x'$.

   No es sobreyectiva porque el elemento 0 del codominio no es imagen de algún elemento del dominio.

4. Establezca todas las funciones posibles de un conjunto unitario de dos elementos. Sean $A = \{a\}$, $B = \{b, c\}$.

   I. $f\colon A \longrightarrow B$, $f(a) = b$.

   II. $g\colon A \longrightarrow B$, $g(a) = c$.

5. Establezca todas las funciones posibles de un conjunto de dos elementos a un conjunto unitario. Sean $A = \{a, b\}$, $B = \{c\}$.

   $f\colon A \longrightarrow B$, $f(a) = c$, $f(b) = c$.

6. Sea la función antecesor definida en el conjunto de los números enteros de 1 a 10. ¿Cuál ha de ser el codominio para que esta función sea sobreyectiva?

   $f\colon x \longrightarrow x - 1$. El codominio debe ser $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ para que la función sea sobreyectiva.

7. Sea $g\colon \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{Z}^+$ una función que asocia al 1 con el 3, el 2 con el 5, el 3 con el 7, el 4 con el 9, el 5 con el 11, y así sucesivamente. Escriba una posible fórmula matemática que corresponda a esta función.

   Respuesta: $f(x) = 2x + 1$.

Otros conceptos que conviene recordar son los siguientes:

1. **Función real de variable real**

   Función cuyo dominio y codominio están en $\mathbb{R}$.

2. **Función inversa**

   Sea la función biyectiva $f\colon A \longrightarrow B$ y sea otra función $g\colon B \longrightarrow A$ tal que $\forall\, y \in B$, $g(y) = x$ cada vez que $\forall\, x \in A$, $f(x) = y$. La función g se llama función inversa de f; se acostumbra escribir $g = f^{-1}$.

3. **Operaciones con funciones**

   Sean las funciones $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

   $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$ (Suma, Resta)

   $(f{\cdot}g)(x) = f(x){\cdot}g(x)$ (Multiplicación)

   $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (División).

   Otra operación es la conocida con el nombre de función compuesta

   Si f es una función de A en B y g una función de B en C, entonces la función compuesta $g \circ f$ es la función de A en C definida por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

4. **Función lineal**

   Es la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = mx{+}b$, $(m, b{\in}\mathbb{R})$. Se llama lineal por cuanto el trazado del gráfico de esa función es una recta. Los números reales fijos m y b se llaman, respectivamente, pendiente e intersección de la recta: pendiente porque mide la inclinación de la recta; intersección porque determina el punto en que la recta corta el eje de las ordenadas. Para dos valores diferentes de la función lineal que es inyectiva, se tiene: $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = m$.

   Condición de paralelismo y perpendicularidad

   Sean las rectas l_1 y l_2 cuyas respectivas pendientes son m_1 y m_2, entonces $l_1 \parallel l_2 \iff m_1 = m_2$, $l_1 \perp l_2 \iff m_1{\cdot}m_2 = -1$.

5. **Funciones iguales**

   Dos funciones son iguales si los tres objetos que las definen, dominio, codominio y ley, son respectivamente iguales.

6. **Función creciente, decreciente**

   Sea $f\colon A \longrightarrow B$ y sean $\forall\, x_1, x_2 \in A$.

   $$\text{Si } x_2 > x_1 \longrightarrow \begin{cases} f(x_2) \geq f(x_1) & f \text{ es creciente} \\ f(x_2) > f(x_1) & f \text{ es estrictamente creciente.} \end{cases}$$

   $$\text{Si } x_2 > x_1 \longrightarrow \begin{cases} f(x_2) \leq f(x_1) & f \text{ es decreciente} \\ f(x_2) < f(x_1) & f \text{ es estrictamente decreciente.} \end{cases}$$

Otros ejercicios resueltos

1. Si $f\colon x \longmapsto 2x$ tiene dominio $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, determine:

   (a) El ámbito de la función.

   (b) El gráfico de la función. Dibuje el trazo del gráfico.

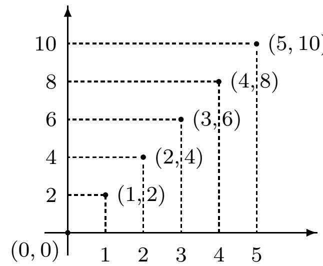
   (c) Si se quiere que la función sea sobreyectiva, ¿cuál necesariamente debe ser el codominio de la función?

Solución

(a) El ámbito es $\{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$.

(b) $G_f = \{(0,0), (1,2), (2,4), (3,6), (4,8), (5,10)\}$.

(c) Si la función se quiere sobreyectiva el codominio debe ser $\{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$.



2. Dar el gráfico de la función $f\colon x \longmapsto x^2 - 6x - 40$ cuyo dominio es el conjunto de enteros comprendidos entre -5 y $+5$, ambos inclusive.

   Solución $G_f = \{(-5, 15), (-4, 0), (-3, -13), (-2, -24), (-1, -33), (0, -40), (1, -45), (2, -48), (3, -49), (4, -48), (5, -45)\}$.

3. Sea $f\colon x \longmapsto x$ y $g\colon x \longmapsto \dfrac{x^2}{x}$. ¿Son f y g la misma función? ¿Por qué?

   Solución f y g no son la misma función, pues f está definida en todo $\mathbb{R}$ mientras que g está definida en $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

4. Diga cuál es el máximo dominio en $\mathbb{R}$ de manera que las siguientes funciones estén bien definidas.

   (a) $f(x) = 2\sqrt{x}$

   (b) $g(x) = \dfrac{1}{x}$

   (c) $h(x) = x$

   (d) $i(x) = \dfrac{|x|}{x}$

   (e) $j(x) = \dfrac{2}{x-2}$

   (f) $k(x) = \dfrac{20}{(x-2)(x-5)}$.

   Solución

   (a) $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

   (b) $\mathbb{R}\backslash\{0\}$

   (c) $\mathbb{R}$

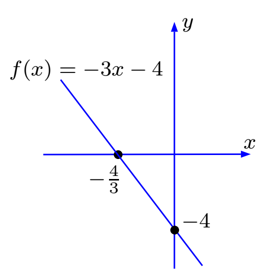
   (d) $\mathbb{R}\backslash\{0\}$

   (e) $\mathbb{R}\backslash\{2\}$

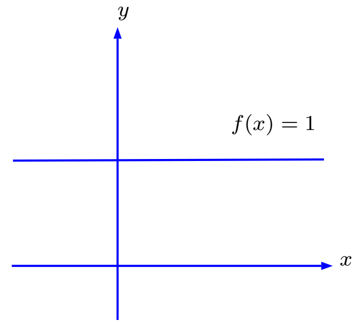
   (f) $\mathbb{R}\backslash\{2, 5\}$.

5. Una función lineal posee una pendiente de magnitud -3, intersección -4. Escriba la fórmula de esa función y trace su gráfico.

   Solución $f(x) = -3x - 4$.



6. Una función lineal posee una pendiente de magnitud 0 y su intersección vale 1. Escribas la fórmula de la función y trace su gráfico. ¿Qué nombre recibe esta función?



Solución $m = 0$, $b = 1$.

$f(x) = mx + b$

$f(x) = 1$.

La función recibe el nombre de función constante e igual a 1.

7. Sea una función lineal tal que $f(0) = 2$ y $m = 7$. Escriba la fórmula de la función.

   Solución $f(0) = m{\cdot}0 + b = 2 \longrightarrow b = 2$, $m = 7$

   $f(x) = 7x + 2$.

8. Hallar las ecuaciones de dos rectas paralelas a otra recta cuya ecuación es $y = -3x + 20$, las cuales intersecan el eje de las y respectivamente en los puntos $(0, 2)$, $(0, -12)$.

   Solución Puesto que son paralelas a $y = -3x + 20$, ambas deben tener pendiente de magnitud igual a -3, además se tiene que $b_1 = 2$, $b_2 = -12$. Luego las ecuaciones serán: $f(x) = -3x + 2$, $g(x) = -3x - 12$.

9. Encontrar la ecuación de la recta perpendicular a la recta cuya ecuación es $3y + 4x = 15$ y además pasa por el punto $(2, 1)$.

   Solución Si $3y + 4x = 15 \longrightarrow y = \dfrac{-4x}{3} + 5$. Ahora bien la nueva magnitud de la pendiente será $m_1 = \dfrac{-1}{m}$, donde $m = -\dfrac{4}{3}$, luego $m = \dfrac{3}{4}$.

   Así tenemos $f(x) = \dfrac{3}{4}x + b$, puesto que el punto $(2, 1)$ está en la recta debe satisfacer que $1 = \dfrac{3}{4}{\cdot}2 + b \longrightarrow b = 1 - \dfrac{3}{2} \longrightarrow b = \dfrac{-1}{2}$. Luego $f(x) = \dfrac{3x}{4} - \dfrac{1}{2}$.

10. Escriba la ecuación de la recta tal que si la x aumenta en 4 unidades la y disminuye en 7 unidades y además dicha recta pasa por el punto $(3, 3)$.

    Solución Si $y = mx + b \longrightarrow y - 7 = m(x + 4) + b$. Además el punto $(3, 3)$ está en la recta.

    $$\begin{cases} 3 = 3m + b & (1) \\ 3 - 7 = m(3 + 4) + b & \\ -4 = m(7) + b & (2) \end{cases}$$

    Luego restando (1) de (2) obtenemos:

    $$\left.\begin{array}{l} -4 = m(7) + b \\ 3 = 3m + b \end{array}\right\} \longrightarrow -7 = 4m \longrightarrow m = -\frac{7}{4}.$$

    De (1) tenemos $3 = 3\left(\dfrac{-7}{4}\right) + b \longrightarrow b = \dfrac{33}{4}$. Luego $f(x) = \dfrac{-7x}{4} + \dfrac{33}{4}$.

11. Determinar el punto en el cual se cortan las rectas perpendiculares cuyas ecuaciones son: $\begin{cases} 3y + 5x = 16 \\ 5y - 3x = 4 \end{cases}$

    Solución Bastaría resolver el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

    $3y + 5x = 16 \longrightarrow y = \dfrac{-5x}{3} + \dfrac{16}{3}$

    $5y - 3x = 4 \longrightarrow y = \dfrac{3}{5}x + \dfrac{4}{5}$.

Luego, $\dfrac{-5x}{3}+\dfrac{16}{3}=\dfrac{3}{5}x+\dfrac{4}{5}\longrightarrow\dfrac{-5x}{3}-\dfrac{3}{5}x=\dfrac{4}{5}-\dfrac{16}{3}\longrightarrow\dfrac{-34}{15}x=\dfrac{-68}{15}\longrightarrow x=2.$
Sustituyendo $x=2$ en cualquiera de las ecuaciones, $3y+5x=16\longrightarrow 3y+10=16\longrightarrow y=2$. Luego el punto de intersección es $(2,2)$.

12. Diga si la función antecesor definida en $\mathbb{Z}$, tal que $x\longmapsto x-1$ es creciente, estrictamente creciente, decreciente, estrictamente decreciente o ninguna de éstas.

    Solución La función antecesor $f(x)=x-1$ es estrictamente creciente, pues es una función lineal de pendiente positiva e igual a 1.

13. Sea la función $f\colon x\longmapsto x^2$ definida $\mathbb{R}$. ¿Cuál intervalo de $\mathbb{R}$ la función es estrictamente creciente y en cuál es estrictamente decreciente?

    Solución

    En $]-\infty,0[$ es estrictamente decreciente.

    En $]0,+\infty[$ es estrictamente creciente.

14. Explique por qué la función $f\colon x\longmapsto x^2$ definida en $\mathbb{R}^+$ es inyectiva pero la misma función definida en $\mathbb{R}$ no es inyectiva.

    La función $f(x)=x^2$ definida en $\mathbb{R}^+$ es inyectiva pues si $x_1>x_2,\ x_1,x_2\in\mathbb{R}^+\longrightarrow f(x_1)>f(x_2)$.

    La función $f(x)=x^2$ no es inyectiva en $\mathbb{R}$ pues si $x_1=-x_2\in\mathbb{R}^+\ x_1\neq 0$, se tiene que $f(x_1)=f(x_2)=x_1^2=x_2^2$. Por ejemplo $x_1=2$, $x_2=-2$ se tiene que $2^2=(-2)^2=4$ esto es 4 es imagen de 2 y -2.

15. Hallar la función inversa de cada una de las siguientes funciones.

    (a) $f(x)=5x+3$
    (b) $f(x)=-\dfrac{3}{2x-7},\ x\neq\dfrac{7}{2}$
    (c) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$, si $x>0$
    (d) $f(x)=mx+5$
    (e) $f(x)=x+\sqrt{3}$
    (f) $f(x)=x$.

    Respuestas.

    (a) $f^{-1}(x)=\dfrac{x-3}{5}$
    (b) $f^{-1}(x)=\dfrac{-3}{2x}+\dfrac{7}{2}$, si $x\neq 0$.
    (c) Si $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ para $x>0\longrightarrow f(x)=1$, luego no es inyectiva para $x>0$, por lo tanto $f(x)$ no posee inversa.
    (d) $f^{-1}(x)=\dfrac{x-5}{m}$, si $m\neq 0$.
    (e) $f^{-1}(x)=x-\sqrt{3}$.
    (f) $f^{-1}(x)=x$.

16. Sean las funciones $g\colon x\longmapsto x^2+2$ y $j\colon x\longmapsto 5x-3$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Hallar las fórmulas de las siguientes funciones:

(a) $g+j$
(b) $j-g$
(c) $j{\cdot}g$
(d) $g{\cdot}j$
(e) $j{\cdot}j$
(f) $g{\cdot}g$
(g) $j\circ j$
(h) $g\circ g$
(i) $j\circ g$
(j) $g\circ j$.

Respuestas

(a) $(g+j)(x)=x^2+5x-1$
(b) $(j-g)(x)=5x-x^2-5$
(c) $j(x){\cdot}g(x)=5x^3-3x^2+10x-6$
(d) $g(x){\cdot}j(x)=5x^3-3x^2+10x-6$
(e) $j(x){\cdot}j(x)=(5x-3)^2=25x^2-30x+9$
(f) $g(x){\cdot}g(x)=x^4+4x^2+4$
(g) $(j\circ j)(x)=25x-18$
(h) $(g\circ g)(x)=x^4+4x^2+6$
(i) $(j\circ g)(x)=5x^2+7$
(j) $(g\circ j)(x)=25x^2-30x+11$.

17. Especifique el dominio en el cual tiene sentido la función cociente $\dfrac{f}{g}$, si f y g son funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ cuyas fórmulas son $f(x)=3x^3$, $g(x)=2x-1$.

Se tiene que $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{3x^3}{2x-1}$ tiene sentido cuando el denominador no se anula. Ahora bien, $2x-1=0\Longleftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$, luego el dominio es $\mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{2}\}$.

18. Encontrar la ecuación de la recta que contiene a los puntos $(0,-1)$ y $(1,0)$.

$f(0)=-1=b$, $a=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\dfrac{-1-0}{0-1}$, luego $f(x)=x-1$.

19. Encontrar la ecuación de la recta paralela a $y=2x+1$ y que contiene al punto $\big(-\frac{3}{2},0\big)$.

$a=2$, magnitud de la pendiente de la recta paralela a $y=2x+1$. Puesto que $f\big(-\frac{b}{a}\big)=0\longrightarrow b=3$, luego $y=2x+3$.

20. Encontrar la ecuación de la recta ortogonal a $y=5x+3$ y que contiene al punto $(5,1)$.

$a=-\dfrac{1}{5}$ (por ser ortogonal a $y=5x+3$), $y=ax+b\longrightarrow 1=\big(-\frac{1}{5}\big)5+b\longrightarrow b=2$, luego $y=-\dfrac{x}{5}+2$.

21. Sea $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ una función lineal. Pruebe que f es tal que $x\longmapsto ax+b$.

(a) Si $b=0\longrightarrow f(x)=ax$ satisface las siguientes propiedades:
$f(\alpha x)=\alpha f(x), \forall\, x,\alpha\in\mathbb{R}$,
$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2), \forall\, x_1,x_2\in\mathbb{R}$.

(b) Si $a\neq 0\longrightarrow f$ es biyectiva
Si $a=0\longrightarrow f$ no es biyectiva.

Prueba.

(a) $f(\alpha x)=a(\alpha x)=\alpha(ax)=\alpha f(x)$
$f(x_1+x_2)=a(x_1+x_2)=ax_1+ax_2=f(x_1)+f(x_2)$.

(b) Si $a\neq 0$.

I. f es inyectiva.

Hay que demostrar que si $f(x_1) = f(x_2) \longrightarrow x_1 = x_2$

$f(x_1) = f(x_2) \Longleftrightarrow ax_1 + b = ax_2 + b \longrightarrow ax_1 = ax_2 \longrightarrow x_1 = x_2$.

II. f es sobreyectiva.

$\forall\, y \in \mathbb{R}, \exists\, x \in \mathbb{R}, x = \dfrac{y-b}{a}$ tal que $f(x) = y$, pues $f(x) = \dfrac{a(y-b)}{a} + b = y$.

De I y II se tiene que f es biyectiva.

Si $a = 0$, se tiene que $f(x_1) = f(x_2) = b$.

$x_1 \neq x_2$, luego f no es inyectiva, por lo tanto f no es biyectiva.

22. Sean las funciones f y g dadas por $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 3x + 5$. Encuéntrese $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$.

Se tiene:

(a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x+5) = (3x+5)^2 - 1 = 9x^2 + 30x + 24$.

(b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 1) = 3(x^2 - 1) + 5 = 3x^2 + 2$.

Nota Si las funciones f y g son inversas una de la otra, entonces:

$f(g(x)) = x$ para toda x del dominio de g

$g(f(x)) = x$ para toda x del dominio de f

Ejercicios no resueltos

Sólo en algunos casos e inmediatamente después del ejercicio se dará la solución.

1. Sea el conjunto $A = \{1, 2\}$ de los dos primeros enteros positivos. Determine las funciones biyectivas de A en A.

2. El mismo problema para $A = \{1, 2, 3\}$.

3. El mismo problema para $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

4. Sea el conjunto $A = \{a, b\}$ y el conjunto $B = \{1, 2, 3\}$. Determinar las funciones inyectivas de A en B.

5. El mismo problema para $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

6. Dibujar el gráfico de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definidas por:

(a) $f(x) = 3x + 2$

(b) $f(x) = 3x - 2$

(c) $f(x) = -\dfrac{1}{3}x + 2$

(d) $f(x) = 2x$

(e) $f(x) = \dfrac{3}{5}$.

7. Si f es una función lineal que contiene los puntos $(5, 2)$ y $(-2, 2)$, demostrar que f es constante. (Basta demostrar, lo cual es inmediato, que su pendiente tiene magnitud cero).

8. Si f es una función lineal que contiene los puntos $(1, 4)$ y $(0, 1)$, determinar si f es estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

9. Encontrar la ecuación de la recta que contiene el punto $(0, 3)$ y cuya pendiente tiene magnitud igual a 2.

10. Sea f una función en $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{2x-1}$. Se pide:

    a) el dominio y el codominio de f

    b) si los números 0, 4 y 7 son imágenes, encontrar las preimágenes correspondientes.

    Respuesta:

    a) Dominio=$\{x \in \mathbb{R}/x \geq \frac{1}{2}\}$ y el Codominio=$\{x \in \mathbb{R}/x \geq 0\}$.

    b) $\frac{1}{2}$, $\frac{17}{2}$, 25.

11. Igual que el anterior pero f definida por $f(x) = x^3 - 1$.

12. Sea la función $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + 2$. Hallar los números del dominio de f que correspondan a los números 10, 3 y 1 del codominio.

13. Una función f cuyo dominio es $\mathbb{Q}$ está definida por $f(x) = 9^x$. Calcular:

    a) $f(1)$, $f(-2)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f(0)$.

    b) ¿Para qué valor de x es $f(x) = 27$?

    Respuesta a) 9, $\frac{1}{81}$, 3, $\frac{1}{3}$, 1.

    b) $\frac{3}{2}$.

14. Sea la función $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 3x + 5$. Calcular:

    a) $f(1)$.
    b) $f(3)$.
    c) $f(0)$.
    d) $f(\sqrt{2}-1)$.
    e) $f(a)$.
    f) $f(-a)$.
    g) $-f(a)$.
    h) $f(a+h)$.
    i) $f(a)+f(h)$.
    j) $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
    k) $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

    Respuesta

    a) 3.
    b) 5.
    c) 5.
    d) $11 + 5\sqrt{2}$.
    e) $a^2 - 3a + 5$.
    f) $a^2 + 3a + 5$.
    g) $-a^2 + 3a - 5$.
    h) $a^2 + 2ah + h^2 - 3a - 3h + 5$.
    i) $a^2 + h^2 - 3(a+h) + 10$.
    j) $2a - 3 + h$.
    k) $2x - 3 + h$.

15. Sea la función f definida por $f(x) = -x^2 + 4$. Determinar:

    a) El dominio y el codominio de la función.

    b) $f(-4)$, $f(-3)$, $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$.

    Conociendo estos valores de $f(x)$, obtenemos nueve puntos de la gráfica de f y trazar esta gráfica.

16. Sean las funciones en $\mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x + 5$ y $f(x) = x^2$. Determinar si tienen función inversa y si la tienen, calcularla.

    Respuesta La primera función es biyectiva, luego tiene función inversa: $f^{-1}(x) = x - 5$. La segunda función no es biyectiva, luego no tiene función inversa.

17. Sea la función definida por $f(x) = 5x - 6$. Como esta función es biyectiva, tiene función inversa. Calcular:

    a) La función inversa.
    b) El dominio y el codominio de las dos funciones.
    c) Mostrar por medio de ejemplos (tres por lo menos), que los números que son pre-imágenes en una de las funciones, son imágenes en la otra, e inversamente.

18. El mismo problema para $f(x) = 2 + \sqrt{x + 4}$.

19. Sean las funciones definidas por $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$ y $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x}}$.

    Mostrar que una es inversa de la otra; calcular el dominio y el codominio de cada una; por medio de ejemplos (tres por lo menos), mostrar que los números del dominio de la una, pertenecen al codominio de la otra e inversamente.

20. Dada la función definida por $f(x) = \dfrac{x + 2}{x - 1}$, mostrar que $f = f^{-1}$.

21. Sean las funciones f y g dadas por $f(x) = 2x^2 + 5$ y $g(x) = 4 - 7x$.

    Calcular $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$.

    Respuesta $98x^2 - 112x + 37$, $-14x^2 - 31$.

22. El mismo problema para $f(x) = 3x^2 + 2$ y $g(x) = \dfrac{1}{3x + 2}$.

23. Por medio de la composición de funciones, mostrar que f y g, definidas como se indica, son funciones inversas una de la otra:

    $f(x) = x^3 + 1$ y $g(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

24. El mismo problema para $f(x) = \sqrt{2x + 1}$ y $g(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}$.

25. Escribir la ecuación de una recta, sabiendo que pasa por el punto $(4, 1)$ y que la magnitud de su pendiente es $\dfrac{2}{3}$.

26. ¿Cuál es la ecuación de una recta cuya pendiente tiene una magnitud de $-\dfrac{5}{7}$; y que pasa por el punto $(-1, -2)$?

27. Determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(3, -4)$ y $(4, -3)$.

28. Escribir la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(5, 0)$ y $(-2, -4)$.

29. Sea la recta cuya ecuación es $4x - y = 5$ y sea $(3, 5)$ un punto exterior a dicha recta. Se pide: la ecuación de la perpendicular a dicha recta por el punto $(3, 5)$ y la ecuación de la paralela a dicha recta por el punto $(3, 5)$.

30. El mismo problema para la recta de ecuación $6x + 5y = 4$ y el punto $(0, 7)$.

    Respuesta $6x + 5y = 35$ y $-5x + 6y = 42$.

Capítulo 5

Polinomios

Recordar que:

1) **Monomio en una o más variables** es una expresión de la forma ax^n, ax^ny^m, donde n, $m \in \mathbb{N}$, a es una constante y x, y son variables.

   Comúnmente se llama a el coeficiente del monomio; x^ny^m la parte literal.

   Grado de un monomio: es la suma de los exponentes de las variables.

   Monomios semejantes: son los que tienen igual la parte literal.

2) **Polinomio** es una suma de monomios no todos semejantes.

   Con frecuencia un polinomio se representa con notaciones como $P(x, y, z)$, para poner en evidencia las diferentes variables, así como el hecho de que un polinomio es una función.

   Grado de un polinomio: es el grado del monomio que tiene el grado más alto.

5.1 Suma y resta de polinomios

Sean $P(x) = 4x^3 - 2x^2 + 5x - 3$, $Q(x) = 2x^3 + 6x - 8$ y $R(x) = 3x^2 - 7x + 6$. Calcular $P(x) + Q(x) - R(x)$.

Se tiene $P(x) + Q(x) - R(x) = (4x^3 - 2x^2 + 5x - 3) + (2x^3 + 6x - 8) - (3x^2 - 7x + 6) =$

$4x^3 - 2x^2 + 5x - 3 + 2x^3 + 6x - 8 - 3x^2 + 7x - 6 = 6x^3 - 5x^2 + 18x - 17.$

Nota Conviene aunque no es necesario, que los polinomios estén ordenados según las potencias crecientes o decrecientes de la variable.

5.2 Multiplicación de polinomios

Notas

1. Para multiplicar dos polinomios se hace el producto de cada término de uno de los polinomios por todos los términos del otro polinomio.

2. Conviene aunque no es necesario, que los polinomios estén ordenados.

   Sean $P(x) = 4x^2 - 3x + 2$ y $Q(x) = 2x^3 - 4x^2 - 5x$. Calcular $P(x) \cdot Q(x)$.

   Se tiene $P(x) \cdot Q(x) = (4x^2 - 3x + 2)(2x^3 - 4x^2 - 5x) =$

   $8x^5 - 16x^4 - 20x^3 - 6x^4 + 12x^3 + 15x^2 + 4x^3 - 8x^2 - 10x = 8x^5 - 22x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 10x.$

5.3 Productos notables

Todos los alumnos saben que son los desarrollos que se presentan a continuación, que es aconsejable saber de memoria y en las cuales las letras $a, b, c, \ldots$ representan indiferentemente números o expresiones algebraicas cualesquiera (en particular monomios o polinomios).

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$(a+b+c+\cdots)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \cdots + 2ab + 2ac + 2bc + \cdots$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$(a+b)(a+c) = a^2 + (b+c)a + bc.$

Nota Se demuestran estos resultados efectuando las multiplicaciones indicadas.

5.3.1 Ejercicios de aplicación

1. $(7ax+3)^2 = (7ax)^2 + 2(7ax)(3) + (3)^2 = 49a^2x^2 + 42ax + 9$
2. $(4ax+xy)^2 = (4ax)^2 + 2(4ax)(xy) + (xy)^2 = 16a^2x^2 + 8ax^2y + x^2y^2$
3. $(8a-3b^2)^2 = 64a^2 - 48ab^2 + 9b^4$
4. $(3a^2-5ab)^2 = 9a^4 - 30a^3b + 25a^2b^2$
5. $(6ax+5)(6ax-5) = 36a^2x^2 - 25$
6. $(1-7am)(1+7am) = 1 - 49a^2m^2$
7. $(3a+4b+5c)^2 = (3a)^2 + (4b)^2 + (5c)^2 + 2(3a)(4b) + 2(3a)(5c) + 2(4b)(5c) = 9a^2 + 16b^2 + 25c^2 + 24ab + 30ac + 40bc$
8. $(5m-2n-6r)^2 = (5m)^2 + (-2n)^2 + (-6r)^2 + 2(5m)(-2n) + 2(5m)(-6r) + 2(-2n)(-6r) = 25m^2 + 4n^2 + 36r^2 - 20mn - 60mr + 24nr$
9. $(2x+4z)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2(4z) + 3(2x)(4z)^2 + (4z)^3 = 8x^3 + 48x^2z + 96xz^2 + 64z^3$
10. $(5x^2+1)^3 = 125x^6 + 75x^4 + 15x^2 + 1$
11. $(2c-7n)^3 = 8c^3 - 84c^2n + 294cn^2 - 343n^3$
12. $(3xy^2-5)^3 = 27x^3y^6 - 135x^2y^4 + 225xy^2 - 125$
13. $27x^3 + 1 = (3x)^3 + (1)^3 = (3x+1)(9x^2 - 3x + 1)$
14. $125a^3 + 8m^3 = (5a)^3 + (2m)^3 = (5a+2m)(25a^2 - 10am + 4m^2)$
15. $64x^3 - 27 = (4x)^3 - (3)^3 = (4x-3)(16x^2 + 12x + 9)$
16. $343a^3 - 8n^6 = (7a)^3 - (2n^2)^3 = (7a - 2n^2)(49a^2 + 14an^2 + 4n^4)$
17. $(m+5)(m+3) = (m)^2 + (5+3)m + 3{\cdot}5 = m^2 + 8m + 15$
18. $(x+7)(x+2) = x^2 + 9x + 14$
19. $(k-3)(k-5) = k^2 - 8k + 15$

20. $(a-6)(a-10) = a^2 - 16a + 60$

21. $(x+7)(x-8) = x^2 - x - 56$

22. $(3m+2)(3m+5) = (3m)^2 + (2+5)(3m) + (2)(5) = 9m^2 + 21m + 10$

23. $(4x+3y)(4x-5y) = (4x)^2 + (3y-5y)(4x) + (3y)(-5y) = 16x^2 - 8xy - 15y^2$.

5.4 División de polinomios

Nota Sigue el mismo patrón de la división aritmética: dividir, multiplicar - restar; entre nosotros los latinos la multiplicación y la resta se hacen mentalmente, los sajones escriben el producto y luego restan. Esta es la forma de la división de polinomios. Se propone una división aritmética primeramente, y luego siguiendo el mismo patrón se efectúa la división de un polinomio por otro polinomio.

$$
\begin{array}{r|l}
156294 & 457 \\ \cline{2-2}
1919 & 342 \\
0914 & \\
000 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
156294 & 457 \\ \cline{2-2}
-1371 & 342 \\ \cline{1-1}
1919 & \\
-1828 & \\ \cline{1-1}
00914 & \\
-914 & \\ \cline{1-1}
000 &
\end{array}
$$

Sean $P(x) = 15x^3 + 38x^2 + 24x$ y $Q(x) = 5x^2 + 6x$. Calcular $P(x) \div Q(x)$.

$$
\begin{array}{r|l}
15x^3 + 38x^2 + 24x & 5x^2 + 6x \\ \cline{2-2}
-15x^3 \mp 18x^2 & 3x + 4 \\ \cline{1-1}
20x^2 + 24x & \\
-20x^2 \mp 24x & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Entonces, $P(x) \div Q(x) = 3x + 4$.

Nota Deben estar ordenados los polinomios dividendo y divisor de la misma manera. En caso contrario, si bien la división en general puede efectuarse, se complica y alarga demasiado.

Otros ejemplos

1. Sean $P(x) = 4x^4 - 9x^2 + 6x - 1$ y $Q(x) = 2x^2 + 3x - 1$, calcular $P(x) \div Q(x)$.

$$
\begin{array}{r|l}
4x^4 + 0x^3 - 9x^2 + 6x - 1 & 2x^2 + 3x - 1 \\ \cline{2-2}
-4x^4 \mp 6x^3 \pm 2x^2 & 2x^2 - 3x + 1 \\ \cline{1-1}
-6x^3 - 7x^2 + 6x & \\
\pm 6x^3 \pm 9x^2 \mp 3x & \\ \cline{1-1}
2x^2 + 3x - 1 & \\
-2x^2 \mp 3x \pm 1 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Entonces, $P(x) \div Q(x) = 2x^2 - 3x + 1$.

2. Sean $P(x) = 5x^3 - 2x^2 + 4$ y $Q(x) = x^2 - 2x + 1$. Calcular $P(x) \div Q(x)$.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
5x^3 - & 2x^2 & +\ 0x & +4 & x^2 - 2x + 1 \\ \cline{5-5}
-\,5x^3 \pm & 10x^2 & \mp\ 5x & & 5x + \ 8 \\ \cline{1-4}
& 8x^2 & -\ 5x & +4 & \\
& -\ 8x^2 & \pm 16x & \mp 8 & \\ \cline{2-4}
& & 11x & -4 &
\end{array}
$$

Entonces, $P(x) \div Q(x) = 5x + 8 + \dfrac{11x - 4}{x^2 - 2x + 1}$.

3. Sean $P(x, y) = 2x^4 - 13x^3y + 31x^2y^2 - 35xy^3 + 24y^4$ y $Q(x, y) = 2x^2 - 3xy + 4y^2$. Calcular $P(x, y) \div Q(x, y)$.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
2x^4 & -13x^3y & +31x^2y^2 & -35xy^3 & +24y^4 & 2x^2 - 3xy + 4y^2 \\ \cline{6-6}
-\,2x^4 & \pm\ 3x^3y & \mp\ 4x^2y^2 & & & x^2 \ -5xy + 6y^2 \\ \cline{1-5}
& -\,10x^3y & +27x^2y^2 & -35xy^3 & & \\
& \pm\,10x^3y & \mp 15x^2y^2 & \pm 20xy^3 & & \\ \cline{2-5}
& & 12x^2y^2 & -15xy^3 & +24y^4 & \\
& & -\,12x^2y^2 & \pm 18xy^3 & \mp 24y^4 & \\ \cline{3-5}
& & & 3xy^3 & &
\end{array}
$$

$P(x, y) \div Q(x, y) = x^2 - 5xy + 6y^2 + \dfrac{3xy^3}{x^2 - 5xy + 6y^2}$

5.5 Factorización de polinomios

Factorizar un polinomio es expresarlo como el producto de otros polinomios. Es un proceso de extrema utilidad en el cálculo algebraico, pues se aplica todo el tiempo que se estudie matemática.

Recuérdese los métodos de factorización siguiente:

5.5.1 Por factor común

1) Sea $P(x) = 18x^4 - 30x^3 + 12x^2$; se tiene $P(x) = 6x^2(3x^2 - 5x + 2)$.

2) Sea $P(x, y) = 45x^3y^2 - 63x^4y^3 + 9x^2y^4$; se tiene $P(x, y) = 9x^2y^2(5x - 7x^2y + y^2)$.

Nota Se procura que el factor común sea el mayor posible.

5.5.2 Por productos notables

1) Si $P(x) = 9x^2 + 6x + 1$, se tiene $P(x) = (3x + 1)^2$.

2) Si $P(x) = 25x^2 - 20x + 4$, se tiene $P(x) = (5x - 2)^2$.

3) Si $P(x) = 9x^2 - 4$, se tiene $P(x) = (3x + 2)(3x - 2)$.

4) Si $P(x) = 25x^2 - 36y^2$, se tiene $P(x) = (5x - 6y)(5x + 6y)$.

5) Si $P(x, y, z) = 4x^2 + 9y^2 + z^2 + 12xy + 4xz + 6yz$, se tiene $P(x, y, z) = (2x + 3y + z)^2$.

6) Si $P(x, y, z) = 25x^2 + 16y^2 + 9z^2 + 40xy - 30xz - 24yz$, se tiene $P(x, y, z) = (5x + 4y - 3z)^2$.

7) Si $P(x) = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$, se tiene $P(x) = (2x + 1)^3$.

8) Si $P(x) = 125x^3 - 300x^2 + 240x - 64$, se tiene $P(x) = (5x - 4)^3$.

9) Si $P(x) = 27x^3 + 125$, se tiene $P(x) = (3x + 5)(9x^2 - 15x + 25)$.

10) Si $P(x) = 1 - 512x^3$, se tiene $P(x) = (1 - 8x)(1 + 8x + 64x^2)$.

11) Si $P(x) = x^2 + 12x + 27$, se tiene $P(x) = (x + 9)(x + 3)$.

12) Si $P(x) = 25x^2 - 15x - 18$, se tiene $P(x) = (5x + 3)(5x - 6)$.

5.5.3 Por grupos (caso de un factor común polinomio)

1) Si $P(x, y) = 3x + xy - 3y - y^2$, se tiene $P(x, y) = x(3 + y) - y(3 + y) = (3 + y)(x - y)$.

2) Si $P(x, y) = x^3 - x^2y + xy^2 - y^3$, se tiene $P(x, y) = x^2(x - y) + y^2(x - y) = (x - y)(x^2 + y^2)$.

3) Si $P(x, y) = 4x^2 - y^2 - 2x + y$, se tienen $P(x, y) = (2x + y)(2x - y) - (2x - y) = (2x - y)\,[(2x + y) - 1\,] = (2x - y)(2x + y - 1)$.

5.5.4 Método de completar un cuadrado (Aplicación de productos notables)

1) Si $P(x) = x^2 + 6x + 8$, se tiene:
$P(x) = x^2 + 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2 + 8 = x^2 + 6x + 9 - 9 + 8 = (x + 3)^2 - 1 =$
$(x + 3 + 1)(x + 3 - 1) = (x + 4)(x + 2)$.

Nota: Para aplicar este método se requiere que el coeficiente de x^2 sea 1.

2) Si $P(x) = x^2 - 3x - 70$, se tiene:
$P(x) = x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 70 = x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} - 70 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{289}{4} = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{17}{2}\right)^2 =$
$\left(x - \frac{3}{2} + \frac{17}{2}\right)^2 \left(x - \frac{3}{2} - \frac{17}{2}\right)^2 = (x + 7)(x - 10)$.

3) Si $P(x) = 6x^2 + 7x - 20$, se tiene:
$P(x) = 6\left(x^2 + \frac{7x}{6} - \frac{20}{6}\right) = 6\left[x^2 + \frac{7}{6}x + \left(\frac{\frac{7}{6}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\frac{7}{6}}{2}\right)^2 - \frac{20}{6}\right] = 6\left[x^2 + \frac{7}{6}x + \left(\frac{7}{12}\right)^2 - \left(\frac{7}{12}\right)^2 - \frac{20}{6}\right] =$
$6\left[\left(x + \frac{7}{12}\right)^2 - \frac{49}{144} - \frac{20}{6}\right] =$
$6\left[\left(x + \frac{7}{12}\right)^2 - \frac{529}{144}\right] = 6\left[\left(x + \frac{7}{12}\right)^2 - \left(\frac{23}{12}\right)^2\right] =$
$6\left[\left(x + \frac{7}{12} + \frac{23}{12}\right)\left(x + \frac{7}{12} - \frac{23}{12}\right)\right] = 6\left(x + \frac{30}{12}\right)\left(x - \frac{16}{12}\right) =$
$6\left(x + \frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{4}{3}\right) = 2\left(x + \frac{5}{2}\right) \cdot 3\left(x - \frac{4}{3}\right) = (2x + 5)(3x - 4)$.

Nota Los polinomios factorizados por este método pueden factorizarse por otros métodos. Hay sin embargo algunos polinomios que sólo se pueden factorizar completando un cuadrado.

Ejemplos

1) Si $P(x) = 4x^4 + 8x^2 + 9$, se tiene:
$P(x) = 4x^4 + 8x^2 + 4x^2 - 4x^2 + 9 = 4x^4 + 12x^2 + 9 - 4x^2 = (2x^2 + 3)^2 - 4x^2 = (2x^2 + 3 + 2x)(2x^2 + 3 - 2x) = (2x^2 + 2x + 3)(2x^2 - 2x + 3)$.

2) Si $P(x) = 9x^4 - 16x^2 + 4$, se tiene:
$P(x) = 9x^4 - 16x^2 + 4x^2 - 4x^2 + 4 = 9x^4 - 12x^2 + 4 - 4x^2 =$
$(3x^2 - 2)^2 - 4x^2 = (3x^2 - 2 + 2x)(3x^2 - 2 - 2x) = (3x^2 + 2x - 2)(3x^2 - 2x - 2)$.

3) Si $P(x) = x^4 - 14x^2 + 1$, se tiene:
$P(x) = x^4 - 14x^2 + 16x^2 - 16x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 16x^2 = (x^2+1)^2 - (4x)^2 = (x^2+4x+1)(x^2-4x+1)$.

4) Si $P(x, y) = x^4 + 4y^4$, se tiene:
$P(x, y) = x^4 + 4x^2y^2 - 4x^2y^2 + 4y^4 = x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 - 4x^2y^2 = (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2 =$ $(x^2 + 2xy + 2y^2)(x^2 - 2xy + 2y^2)$.

5.5.5 Por medio del cero de un polinomio con una variable

Definición 5.5.1 *Se dice que $a \in \mathbb{R}$ es un cero del polinomio $P(x)$ si y sólo si $P(a) = 0$.*

Ejemplo Dado $P(x) = x^3 - 7x + 6$, se tiene $P(-3) = (-3)^3 - 7(-3) + 6 = 0$; entonces -3 es un cero de $P(x)$. También son ceros de $P(x)$, 1 y 2, porque $P(1) = 0$ y $P(2) = 0$; en cambio 0 no es un cero de $P(x)$, pues $P(0) = 6$.

Aplicación a la factorización. Cuando un cero de un polinomio con una variable se conoce, es posible factorizar el polinomio (por grupos).

Ejemplos

1) Sea $P(x) = 6x^2 - 7x - 10$; se obtiene por ensayos $P(2) = 6{\cdot}2^2 - 7{\cdot}2 - 10 = 0$, entonces $P(x) = P(x) - P(2)$. Por consiguiente puede escribirse:
$P(x) = 6x^2 - 7x - 10 - (6{\cdot}2^2 - 7{\cdot}2 - 10) = 6x^2 - 6{\cdot}2^2 - 7x + 7{\cdot}2 = 6(x^2 - 2^2) - 7(x - 2) =$ $6(x + 2)(x - 2) - 7(x - 2) = (x - 2)\,[\,6(x + 2) - 7\,] = (x - 2)\,[\,6x + 12 - 7\,] = (x - 2)(6x + 5)$.

2) Sea $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2$, como $P(1) = 1^3 - 3{\cdot}1^2 + 2 = 0$, se tiene:
$P(x) = x^3 - 3x^2 + 2 - (1^3 - 3{\cdot}1^2 + 2) = x^3 - 1^3 - 3x^2 + 3{\cdot}1^2 = x^3 - 1^3 - 3(x^2 - 1^2) = (x-1)(x^2 + x +$ $1) - 3(x+1)(x-1) = (x-1)\,[\,x^2+x+1-3(x+1)\,] = (x-1)\,[\,x^2+x+1-3x-3\,] = (x-1)(x^2-2x-2)$.

Nota Es claro que éste método se ensaya sólo cuando con los métodos anteriores no ha sido posible factorizar el polinomio.

3) Sea $P(x) = 6x^3 + 5x^2 - 3x - 2$. $P(-1) = 6(-1)^3 + 5(-1)^2 - 3(-1) - 2 = 0$.
$P(x) = 6(x^3 - (-1)^3) + 5(x^2 - (-1)^2) - 3(x - (-1)) = 6(x^3 + 1^3) + 5(x^2 - 1^2) - 3(x + 1) =$ $6(x + 1)(x^2 - x + 1) + 5(x + 1)(x - 1) - 3(x + 1) = (x + 1)\,[\,6(x^2 - x + 1) + 5(x - 1) - 3\,] =$ $(x + 1)\,[\,6x^2 - 6x + 6 + 5x - 5 - 3\,] = (x + 1)(6x^2 - x - 2)$.

Nota Con estos últimos resultados puede recordarse el Teorema del factor.

Teorema 5.5.1 Teorema del factor
Un polinomio $P(x)$ tiene un factor $(x - a)$ si y sólo si $P(a) = 0$.

Es posible entonces, si se conoce a, cero de $P(x)$, obtener $P(x) \div (x - a) = Q(x)$ y expresar luego:

$$P(x) = (x - a){\cdot}Q(x).$$

Así, en el último ejemplo $P(x) = 6x^3 + 5x^2 - 3x - 2$, $P(-1) = 0$, entonces:

$$(6x^3 + 5x^2 - 3x - 2) \div (x + 1) = 6x^2 - x - 2, \text{ luego } P(x) = (x + 1)(6x^2 - x - 2).$$

5.5.6 Factorizar un polinomio en más de dos factores

Esto es posible cuando los polinomios que resultan en una factorización, admiten a su vez nuevas factorizaciones. En general, cuando se pide la factorización de un polinomio, ésta debe hacerse en el mayor número posible de factores polinomios.

Ejemplos

1) Factorizar $P(x,y) = x^3y - xy^3$. Se tiene $P(x,y) = xy(x^2 - y^2) =$
   $xy(x+y)(x-y)$.

2) Factorizar $P(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$. Se tiene $P(x) = x^2(x+1) - 4(x+1) = (x+1)(x^2-4) =$ $(x+1)(x+2)(x-2)$.

3) Factorizar $P(x) = 48x^5 - 24x^3 + 3x$. Se tiene $P(x) = 3x(16x^4 - 8x^2 + 1) =$
   $3x(4x^2-1)(4x^2-1) = 3x(2x+1)(2x-1)(2x+1)(2x-1) =$
   $3x(2x+1)^2(2x-1)^2$.

4) Factorizar $P(x) = x^6 - 64$. Se tiene $P(x) = (x^3+8)(x^3-8) =$
   $(x+2)(x^2-2x+4)(x-2)(x^2+2x+4) =$
   $(x+2)(x-2)(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$.

5) Factorizar $P(x) = x^4 + 4x^3 - 8x - 32$. Se tiene $P(x) = x^3(x+4) - 8(x+4) = (x+4)(x^3-8) =$ $(x+4)(x-2)(x^2+2x+4)$.

Estos últimos ejemplos recuerdan que después de haber factorizado un polinomio debe investigarse si los polinomios (factores) obtenidos admiten nuevas factorizaciones.

5.5.7 Ejercicios no resueltos

Nota Cuando aparecen diferentes clases de paréntesis, todos los cuales se emplean para expresar o indicar operaciones a efectuar, generalmente se opera de adentro hacia afuera.

1) Efectuar las operaciones siguientes:
   1) $(12xy^2 + 3x^2y - 4x^3) + (-10xy^2 - 3x^2y - x^3)$ R=$2xy^2 - 5x^3$
   2) $3x^2 - (4x^2 - 2x)$ R=$-x^2 + 2x$
   3) $(4a^2 + 4ab - 7b^2) - (a^2 + 7ab - 2b^2)$ R=$3a^2 - 3ab - 5b^2$
   4) $(x^4 - x^2 + 1) - (x^4 + 2x^2 + 1) + (3x^4 - 3x^2 - 2)$ R=$3x^4 - 6x^2 - 2$
   5) $4a - [\,a - (2a+b)\,]$ R=$5a + b$
   6) $[(6x+7) - (-2x+4)\,] - (-2x-8)$ R=$10x + 11$
   7) $3x - 4y - \{x - (x+y) - [(-2x+y) - x\,] - 3y\}$ R=y
   8) $(3a - 4b) - \{[\,a - (2a+b)\,] - a\}$ R=$5a - 3b$
   9) $\left(\frac{9}{4}x - \frac{3}{2}y\right) + \left(\frac{4}{3}x - \frac{19}{6}y\right) - \left(\frac{25}{12}x - \frac{11}{3}y\right)$ R=$\frac{3}{2}x - y$
   10) $\frac{47}{6}a + \left[\left(\frac{9}{4}x - \frac{3}{2}b\right) - \left(\frac{15}{2}a + 3x\right)\right] + \left(\frac{3}{2}b - \frac{1}{4}x\right)$ R=$\frac{1}{3}a - x$
   11) $2x - (3x - 2y) - [\,-2x + y - (2y - x)\,]$ R=$3y$
   12) $7a + [\,-a - (-5a + 4x) + 3x\,] - (6a - x)$ R=$5a$.

2) Efectuar las operaciones siguientes:

1) $(x+3)(2x-5)$ R=$2x^2+x-15$

2) $(x^2-2x-2)(x+2x^2-4)$ R=$2x^4-3x^3-10x^2+6x+8$

3) $(x^4+2x^2y^2+4y^4)(x^2-2y^2)$ R=x^6-8y^6

4) $(6r-2s-4t)(6r+2s-4t)$ R=$36r^2-48rt-4s^2+16t^2$

5) $(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$ R=$x^4+x^2y^2+y^4$

6) $(5a^2+ab-3b^2)(3a^2-2ab+b^2)$

R=$15a^4-7a^3b-6a^2b^2+7ab^3-3b^4$

7) $\left(\frac{5}{2}a^2+3ax-\frac{7}{3}x^2\right)\left(2a^2-ax-\frac{x^2}{2}\right)$

R=$5a^4-\frac{7}{2}a^3x-\frac{107}{12}a^2x^2+\frac{5}{6}ax^3+\frac{7}{6}x^4$

8) $\left(\frac{2}{3}x+\frac{3}{2}y-\frac{7}{3}\right)\left(\frac{1}{2}x-\frac{10}{3}y+\frac{3}{2}\right)$

R=$\frac{1}{3}x^2-\frac{53}{36}xy-\frac{1}{6}x-5y^2+\frac{361}{36}y-\frac{7}{2}$

9) $5a(3a-2b-2c)+2b(5a-3b+5c)+10c(a-b)$ R=$15a^2-6b^2$

10) $(2x-1)(3x+5)(x+1)$ R=$6x^3+13x^2+2x-5$.

3) Es claro que en los ejercicios de éste grupo 3) pueden efectuarse por multiplicación propiamente dicha, o por las reglas de los productos notables.

1) $(7x+2y)^2$ R=$49x^2+28xy+4y^2$

2) $(4r-s)^2$ R=$16r^2-8rs+s^2$

3) $(5r+t)(5r-t)$ R=$25r^2-t^2$

4) $(8a^2-3b^2)^2$ R=$64a^4+48a^2b^2+9b^4$

5) $(2a-3cd)^2$ R=$4a^2-12acd+9c^2d^2$

6) $(5a^2-2c)(5a^2+2c)$ R=$25a^4-4c^2$

7) $(a+2b+5)^2$ R=$a^2+4b^2+25+4ab+10a+20b$

8) $(a^2+a-2)^2$ R=$a^4-3a^2+4+2a^3-4a$

9) $(2x^2-3xy-5y^2)^2$ R=$4x^4-11x^2y^2+25y^4-12x^3y+30xy^3$

10) $(1-3xy+4x^2y^2)^2$ R=$1+17x^2y^2+16x^4y^4-6xy-24x^3y^3$

11) $[(a+b)+2]\,[(a+b)-2]$ R=$a^2+2ab+b^2-4$

12) $(a^2+a+1)(a^2+a-1)$ R=$a^4+2a^3+a^2-1$.

(Nótese que los ejercicios 11 y 12 son del mismo tipo, sólo que en uno se destaca la suma de dos términos y en el otro no).

13) $[\,c+(a-1)\,]\,[\,c-(a-1)\,]$ R=c^2-a^2+2a-1

14) $(x+z-3)(x-z+3)$ R=x^2-z^2+6z-9

15) $[(a+b)+(c+d)\,]\,[(a+b)-(c+d)\,]$

R=$a^2+2ab+b^2-c^2-2cd-d^2$

16) $[(m+n)-(x-y)\,]\,[(m+n)+(x-y)\,]$

R=$m^2 + 2mn + n^2 - x^2 + 2xy - y^2$

17) $(2x + 5)^3$ R=$8x^3 + 60x^2 + 150x + 125$

18) $(4x - y)^3$ R=$64x^3 - 48x^2y + 12xy^2 - y^3$

19) $(6ab + 1)^3$ R=$216a^3b^3 + 108a^2b^2 + 18ab + 1$

20) $(1 - 3x^2y)^3$ R=$1 - 9x^2y + 27x^4y^2 - 27x^6y^3$

21) $(5x^2 - 3xy)^3$ R=$125x^6 + 225x^5y + 135x^4y^2 + 27x^3y^3$

22) $(7m^3n - 2mn^3)^3$ R=$343m^9n^3 - 294m^7n^5 + 84m^5n^7 - 8m^3n^9$

23) $(3x + 2)(9x^2 - 6x + 4)$ R=$27x^3 + 8$

24) $(1 - x)(1 + x + x^2)$ R=$1 - x^3$

25) $(5ab + c)(25a^2b^2 - 5abc + c^2)$ R=$125a^3b^3 + c^3$

26) $(2x^2 - y)(4x^4 + 2x^2y + y^2)$ R=$8x^6 - y^3$

27) $(4x^3 + 3)(16x^6 - 12x^3 + 9)$ R=$64x^9 + 27$

28) $(6a - 5a^2b)(36a^2 - 30a^3b + 25a^4b^2)$ R=$216a^3 - 125a^6b^3$

29) $(x + 5)(x + 2)$ R=$x^2 + 7x + 10$

30) $(x - 7)(x - 9)$ R=$x^2 - 16x + 63$

31) $(x + 6)(x - 2)$ R=$x^2 + 4x - 12$

32) $(x + 9)(x - 10)$ R=$x^2 - x - 90$

33) $(3x + 5)(3x + 1)$ R=$9x^2 + 18x + 5$

34) $(7x + 5)(7x - 1)$ R=$49x^2 + 28x - 5$

35) $(5a - 2b)(5a - b)$ R=$25a^2 - 15ab + 2b^2$

36) $(4m + 3n)(4m - 9n)$ R=$16m^2 - 24mn - 27n^2$

37) $(9c + 11d)(9c - 13d)$ R=$81c^2 - 18cd - 143d^2$.

4) Efectuar las operaciones siguientes:

1) $(2x^2 - x - 3) \div (x + 1)$ R=$2x - 3$

2) $(3x^2 + 2x - 5) \div (3x + 5)$ R=$x - 1$

3) $(x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16) \div (x + 2)$ R=$x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

4) $(2a^4 - 13a^3b + 31a^2b^2 - 38ab^3 + 24b^4) \div (2a^2 - 3ab + 4b^2)$

R=$a^2 - 5ab + 6b^2$

5) $(a^5b^5 - 8a^4b^4 - 7a^3b^3 + 54a^2b^2 + 60ab) \div (a^2b^3 - 2ab^2 - 4b)$

R=$a^3b^2 - 6a^2b - 15a$

6) $(x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 3x + 18) \div (x^2 + 3x - 6)$ R=$x^2 - x - 3$

7) $(18x^5 - 26x^3 + 50x^2 - 28x + 10) \div (3x^3 + 2x^2 - 4x + 5)$

R=$6x^2 - 4x + 2$

8) $(m^6 - 6m^4 + 5m^2 - 1) \div (m^3 + 2m^2 - m - 1)$

R=$m^3 - 2m^2 - m - 1$

9) $(5x^3 - 2x^2 + 3x - 4) \div (x^2 - 2x + 1)$ R=$5x + 8 + \dfrac{14x - 12}{x^2 - 2x + 1}$

10) $(2x^4 + x^3 + 6x^2 + 3x + 6) \div (x^2 - x + 2)$

R=$2x^2 + 3x + 5 + \dfrac{2x-4}{x^2-x+2}$.

5) Factorizar las expresiones siguientes.

Nota Como todo ejercicio de factorización puede ser comprobado y conviene que sea comprobado, sólo se da la solución de la tercera parte de los ejercicios propuestos.

1) $12x^2 - 18x^4 - 24x^6$
2) $8x^4 - 12x^3 - 16x^2$
3) $42x^4y^6 + 56x^5y^4 - 28x^6y^3$
4) $192a^4x^6 - 144a^5x^4$
5) $51m^4n^2 - 68m^3n^4 - 85m^2n^6$
6) $182x^5y^6 - 455x^3y^3$.

Respuesta

3) $14x^4y^3(3y^3 + 4xy - 2x^2)$
6) $91x^3y^3(2x^2y^3 - 5)$.

6) Factorizar las expresiones siguientes.

1) $9x^2 + 12x + 4$
2) $49 + 168y + 144y^2$
3) $121a^2 + 22ab + b^2$
4) $16x^2 - 40xy + 25y^2$
5) $81x^2 - 126x - 49$
6) $100h^2 - 140hk + 49k^2$
7) $25a^2b^2 - 81$
8) $64x^2 - 9y^2z^2$
9) $36x^2y^2 - 25z^2$
10) $x^2 + y^2 + 9 + 2xy + 6x + 6y$
11) $9x^2 + 4y^2 + z^2 + 12xy - 6xz - 4yz$
12) $25x^2 + 9y^2 + 16z^2 - 30xy - 40xz + 24yz$
13) $x^3 - 6x^2 + 12x + 8$
14) $64x^3 + 144x^2y + 108xy^2 + 27y^3$
15) $729x^3y^3 + 243x^2y^2 + 27xy + 1$
16) $8 - 60xy + 150x^2y^2 - 125x^3y^3$
17) $27m^3 - 108m^2n + 144mn^2 - 64n^3$
18) $125x^6 - 75x^4 + 15x^2 - 1$
19) $27x^3 + 8y^3$
20) $a^3b^3 + 1$
21) $125a^6 + 343x^3$
22) $512a^3 - 729c^3$
23) $343x^3 - 8y^3$
24) $m^6n^3 - 1$
25) $x^2 + 7x + 10$
26) $x^2 + 12x + 27$

27) $m^2 + 20m + 99$
28) $x^2 - 11x + 30$
29) $a^2 - 13a + 40$
30) $y^2 - 21y + 68$
31) $r^2 + 7r - 30$
32) $m^2 - 3m - 88$
33) $a^2 - a - 90$
34) $4x^2 + 8x + 3$
35) $25x^2 - 20x - 12$
36) $36x^2 - 24x - 5$
37) $9x^2 + 9xy + 2y^2$
38) $36x^2 - 12xy - 35y^2$
39) $25a^2 - 5ab - 42b^2$.

Respuesta

3) $(11a + b)^2$
6) $(10h - 7k)^2$
9) $(6xy + 5z)(6xy - 5z)$
12) $(5x - 3y - 4z)^2$
15) $(9xy + 1)^3$
18) $(5x^2 - 1)^3$
21) $(5a^2 + 7x)(25a^4 - 35a^2x + 49x^2)$
24) $(m^2n - 1)(m^4n^2 + m^2n + 1)$
27) $(m + 9)(m + 11)$
30) $(y - 4)(y - 17)$
33) $(a - 10)(a + 9)$
36) $(6x + 1)(6x - 5)$
39) $(5a + 6b)(5a - 7b)$.

7) Factorizar las expresiones siguientes.

1) $x^3 - 4x^2 + 2x + 4$
2) $x^3 - 4x^2 - 5x + 14$
3) $x^3 - 7x^2 + 25x - 39$
4) $x^3 - 2x^2 + 2x - 1$
5) $x^3 + 4x^2 + 12x + 9$
6) $x^3 - x^2 - 13x - 3$.

Respuesta

3) $(x - 3)(x^2 - 4x + 13)$
6) $(x + 3)(x^2 - 4x - 1)$.

8) Factorizar las expresiones siguientes (Ejercicios varios, sin clasificar, y en general las factorizaciones constarán de más de dos factores).

1) $6x^4y^3 - 84x^3y^2 + 294x^2y$
2) $16x^4 - 8x^2 + 1$
3) $2a^5 - 36a^3 - 162a$
4) $m^3 + m^2 - 4m - 4$
5) $x^3 - 2x^2 - 3x$
6) $3a^9b - 6a^5b^5 + 3ab^4$
7) $3x^4 - 27x^3 + 81x^2 - 81x$
8) $1000x^3 + 1200x^4 + 480x^5 + 64x^6$
9) $256a^4 - 576a^5 + 432a^6 - 108a^3$
10) $x^4 + x^3 - x^2 - x$

11) $x^5 + 3x^4 - 16x - 48$
12) $27x^3 + 18x^2 - 3x - 2$
13) $16a^4 - 8a^3x + 54ax^3 - 27x^4$
14) $32x^5 - 8x^3y^2 - 4x^2y^3 + y^5$
15) $27x^5 - 108x^3 - 125x^2 + 500$
16) $4a^2b^2 - 4b^2 - a^2 + 1$
17) $x^2y^2 - y^2 + x^2 - 1$
18) $x^2y^2 - y^2 - x^2 - 1$
19) $12x^3 - 3a^2x - 4mx^2 + a^2m$
20) $192x^7 - 3x$
21) $ab^3x^2 - a^2b^2x^2 + ab^2x^3 - a^2bx^3$
22) $x^8 + 2x^5 + x^2$
23) $16x^4 + 72x^3 + 2xy^3 + 9y^3$
24) $x^4 - 5x^2 + 4$
25) $x^3 + 3x^2 - x - 3$
26) $5x^4 - 5x^3 - 30x^2$
27) $3x^3 - 6x^2 - 72x$
28) $36x^4 + 84x^3 + 40x^2$
29) $6x^5 - 42x^3 + 54x$
30) $5x^{10} + 20x^2$
31) $x^3 + 3x^2 + 4$
32) $x^3 - 7x - 6$
33) $2x^3 + 3x^2 - 3x - 2$
34) $2x^3 - 11x^2 + 17x - 6$
35) $2x^3 - 3x^2 - 17x + 30$
36) $6x^3 + 11x^2 - 4x - 4$
37) $x^4 - 2x^2 + 1$
38) $x^6 - 2x^3 + 1$
39) $64x^6 + 16x^3y^3 + y^6$
40) $2x^5y - 8x^3y^3 + 36xy^5$
41) $a^4 - 8a^2 + 16$
42) $a^5 - 18a^3 + 81a$
43) $x^8 - 64x^2$
44) $150a^6 - 24a^2$
45) $37x^5 - 333x^3$.

Respuesta

3) $2a(a+3)^2(a-3)^2$
6) $3ab(a^2+b^2)^2(a+b)^2(a-b)^2$
9) $4a^4(4-3a)^3$
12) $(3x+1)(3x-1)(3x+2)$
15) $(x+2)(x-2)(3x-5)(9x^2+15x+25)$
18) $(x+1)(x-1)(y+1)(y-1)$
21) $abx^2(b-a)(b+x)$
24) $(x+2)(x-2)(x+1)(x-1)$
27) $3x(x+4)(x-6)$
30) $5x^2(x^4+2x^2+2)(x^4-2x^2+2)$
33) $(x-1)(x+2)(2x+1)$
36) $(x+2)(2x+1)(3x-2)$
39) $(2x+y)^2(4x^2-2xy+y^2)^2$
42) $a(a+3)^2(a-3)^2$
45) $37x^3(x+3)(x-3)$.

Capítulo 6

Ecuaciones

Nota Se supone conocida la teoría relativa a las ecuaciones, la cual fue estudiada a través de todos los años cursados en la segunda enseñanza.

6.1 Ecuaciones de primer grado con una incógnita

Ya se sabe que en una ecuación de primer grado con una incógnita puede llevarse a la forma $ax+b=0$, en la cual x es la incógnita y los coeficientes a y b son independientes de la incógnita. Sólo se recordarán las ecuaciones en las cuales a y b son números, es decir las ecuaciones numéricas.

Resolución Sea la ecuación $ax+b=0$, donde a y b son números. Se tiene $ax=-b$.

Si $a \neq 0$, $x = -\dfrac{b}{a}$ (Solución única).

Si $a = 0$, la ecuación se escribe $0{\cdot}x = -b$.

Luego, cualquiera que sea el valor de x, el primer miembro $0{\cdot}x = 0$. Dos casos pueden presentarse entonces:

$b = 0$: todo número es solución. (Indeterminación).

$b \neq 0$: ningún número es solución. (Imposibilidad).

Ejemplos

1) Resolver la ecuación $\dfrac{2}{3}x - \dfrac{x}{5} = \dfrac{x}{10} + \dfrac{11}{6}$.

El mínimo denominador común es 30. Luego:

$$30\left(\frac{2}{3}x - \frac{x}{5}\right) = 30\left(\frac{x}{10} + \frac{11}{6}\right)$$

$$20x - 6x = 3x + 55 \longrightarrow 20x - 6x - 3x = 55 \longrightarrow 11x = 55 \longrightarrow x = \frac{55}{11} = 5.$$

Se escribe $S = \{5\}$.

2) Resolver la ecuación $2(3x-4) - x = 3(x-2) + 2x - 2$.

De inmediato se tiene:

$$\begin{aligned} 6x - 8 - x &= 3x - 6 + 2x - 2 \\ 6x - x - 3x - 2x &= -6 - 2 + 8 \\ 0{\cdot}x &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto todo número real es solución. Se escribe $\boxed{S = \mathbb{R}.}$

Ecuaciones como ésta, comúnmente se llaman indeterminadas.

3) Resolver la ecuación $2(3x-5)-x=3(x-1)+2x-1$.

De inmediato se tiene:

$$\begin{aligned} 6x-10-x &= 3x-3+2x-1 \\ 6x-x-3x-2x &= -1-3+10 \\ 0{\cdot}x &= 6 \end{aligned}$$

Por lo tanto ningún número real es solución. Se escribe $\boxed{S=\emptyset.}$

4) Resolver la ecuación $\dfrac{3}{x+1}+2=\dfrac{2x}{x-1}$, $x\neq -1$, $x\neq 1$.

Condiciones como la anterior ($x\neq \pm 1$), si no se dan expresamente, deben sobrentenderse. Se tiene sucesivamente:

Mínimo común denominador $(x+1)(x-1)$, entonces:

$$\begin{aligned} (x+1)(x-1)\left(\frac{3}{x+1}+2\right) &= (x+1)(x-1)\left(\frac{2x}{x+1}\right) \\ 3(x-1)+2(x+1)(x-1) &= 2x(x+1) \\ 3x-3+2x^2-2 &= 2x^2+2x \\ 3x+2x^2-2x^2-2x &= 3+2 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Como este valor no es ninguno de los excluidos, resulta que $S=\{5\}$.

5) Resolver la ecuación $\dfrac{x+2}{x-1}-\dfrac{x+3}{x-2}=\dfrac{-3}{(x-1)(x-2)}$.

La existencia de las fracciones propuestas demanda que $x\neq 1$ y $x\neq 2$. Se tiene sucesivamente:

Mínimo común denominador $(x-1)(x-2)$.

$$\begin{aligned} (x-1)(x-2)\left(\frac{x+2}{x-1}-\frac{x+3}{x-2}\right) &= (x-1)(x-2)\left[\frac{-3}{(x-1)(x-2)}\right] \\ (x+2)(x-2)-(x+3)(x-1) &= -3 \\ x^2-4-(x^2-x+3x-3) &= -3 \\ x^2-4-x^2+x-3x+3 &= -3 \\ x^2-x^2+x-3x &= -3+4-3 \\ -2x &= -2 \\ x &= 1. \end{aligned}$$

Como este valor es uno de los excluidos, resulta que $S=\emptyset$.

Como toda ecuación puede ser probada no se darán las soluciones de las ecuaciones que se propongan. Se recuerda la prueba de una ecuación en la siguiente:

$$\frac{3x-5}{x+2}+\frac{7x-10}{x+1}+\frac{x+99}{x^2+3x+2}=10$$

que también puede escribirse:

$$\frac{3x-5}{x+2}+\frac{7x-10}{x+1}+\frac{x+99}{(x+2)(x+1)}=10$$

Se sobrentiende que $x \neq -2$, $x \neq -1$.
Mínimo común denominador $(x+2)(x+1)$.
Multiplicando ambos miembros por $(x+2)(x+1)$:

$$\begin{aligned}(3x-5)(x+1)+(7x-10)(x+2)+x+99 &= 10(x+2)(x+1)\\ 3x^2-2x-5+7x^2+4x-20+x+99 &= 10x^2+30x+20\\ -27x &= -54\\ x &= 2\end{aligned}$$

Raíz o solución admisible.

Prueba
$$\frac{3{\cdot}2-5}{2+2}+\frac{7{\cdot}2-10}{2+1}+\frac{2+99}{2^2+3{\cdot}2+2}=\frac{1}{4}+\frac{4}{3}+\frac{101}{12}=\frac{3+16+101}{12}=\frac{120}{12}=10$$
que es el segundo miembro. Por lo tanto $S=\{2\}$.

6.2 Ecuaciones de segundo grado con una incógnita

Ya se sabe que una ecuación de segundo grado con una incógnita puede llevarse a la forma:

$$ax^2+bx+c=0, \qquad (a \neq 0).$$

Se debe recordar que para resolver estas ecuaciones se usa la fórmula:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

En esta fórmula la expresión b^2-4ac se llama discriminante y se representa con Δ; es decir $\Delta=b^2-4ac$. Se tiene:

$$\text{Si}\begin{cases}\Delta<0 & \text{no hay raíces}\\ \Delta=0 & \text{una raíz (doble)} \quad x=-\dfrac{b}{2a}\\ \Delta>0 & \text{dos raíces} \quad x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}.\end{cases}$$

También puede resolverse una ecuación de segundo grado (y de grado superior al segundo) mediante la factorización del primer miembro. Este método se recordará resolviendo algunos ejemplos.

6.2.1 Ejercicios resueltos

Resolver las ecuaciones siguientes:

1) $2x^2-7x-15=0$.
2) $x^2+8x+16=0$.
3) $9x^2-4=0$.
4) $8x^2+24x=0$.

Se tiene, aplicando la fórmula dada:

1) $2x^2-7x-15=0$.
$\Delta=(-7)^2-4(2)(-15)=49+120=169 \longrightarrow \sqrt{\Delta}=\sqrt{169}=13$.
$x=\dfrac{7\pm 13}{2{\cdot}2}\longrightarrow x_1=\dfrac{7+13}{4}=\dfrac{20}{4}=5$, $x_2=\dfrac{7-13}{4}=-\dfrac{6}{4}=-\dfrac{3}{2}$, $S=\left\{-\dfrac{3}{2},5\right\}$.

2) $x^2+8x+16=0$.
$\Delta=8^2-4(1)(16)=64-64=0 \longrightarrow x=\dfrac{-8}{2{\cdot}1}=-4$, $S=\{-4\}$.

3) $9x^2 - 4 = 0$.

$\Delta = 0^2 - 4(9)(-4) = 144 \longrightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{144} = 12$, $x = \dfrac{0 \pm 12}{2{\cdot}9} \longrightarrow x_1 = \dfrac{12}{18} = \dfrac{2}{3}$, $x_2 = \dfrac{-12}{18} = -\dfrac{2}{3}$.
$S = \left\{-\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right\}$.

4) $8x^2 + 24x = 0$.

$\Delta = 24^2 - 4(8)(0) = 24^2 \longrightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{24^2} = 24$. $x = \dfrac{-24 \pm 24}{2{\cdot}8} \longrightarrow x_1 = \dfrac{-24+24}{16} = 0$,
$x_2 = \dfrac{-24-24}{16} = -\dfrac{48}{16} = -3$. $S = \{-3, 0\}$.

Las dos últimas ecuaciones, que por carecer de uno de las términos se llaman incompletas, más frecuentemente se resuelven de la manera siguiente:

3) $9x^2 - 4 = 0$.

$(3x+2)(3x-2) = 0$, $3x + 2 = 0$ ó $3x - 2 = 0$.
$x_1 = -\dfrac{2}{3}$, $x_2 = \dfrac{2}{3}$, $S = \left\{-\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right\}$.

4) $8x^2 + 24x = 0$.

$x(8x + 24) = 0$, $x = 0$, ó $8x + 24 = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = -\dfrac{24}{8} = -3$, $S = \{-3, 0\}$, es decir:

a) Se factoriza el primer miembro.

b) Como resulta entonces que el producto de dos factores es igual a cero, se aplica luego el teorema siguiente:

Teorema 6.2.1 *Si $ab = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$.*

c) Se iguala pues cada factor $a = 0$, lo que permite obtener de inmediato las raíces o soluciones de la ecuación.

En general este es el método que se sigue para resolver una ecuación de segundo grado por factorización; además, puesto que el teorema citado se puede aplicar al caso de más de dos factores éste es el único método con que contamos nosotros para resolver ecuaciones de grado superior al segundo.

Resolver las ecuaciones siguientes:

1) $x^2 - 3x - 70 = 0$.

2) $2x^2 + 9x - 5 = 0$.

3) $x^3 + 3x^2 - 2x - 6 = 0$.

4) $x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 2 = 0$.

Se tiene:

1) $x^2 - 3x - 70 = 0 \longrightarrow (x+7)(x-10) = 0$.

$x + 7 = 0 \longrightarrow x_1 = -7$, $x - 10 = 0 \longrightarrow x_2 = 10$, $S = \{-7, 10\}$.

2) $2x^2 + 9x - 5 = 0 \longrightarrow (x+5)(2x-1) = 0$.

$x + 5 = 0 \longrightarrow x_1 = -5$, $2x - 1 = 0 \longrightarrow x_2 = \dfrac{1}{2}$, $S = \left\{-5, \dfrac{1}{2}\right\}$.

3) $x^3+3x^2-2x-6 = 0 \longrightarrow x^2(x+3)-2(x+3) = 0 \longrightarrow (x+3)(x^2-2) = 0 \longrightarrow (x+3)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) = 0$.

$x+3 = 0 \longrightarrow x_1 = -3$, $x+\sqrt{2} = 0 \longrightarrow x_2 = -\sqrt{2}$, $x-\sqrt{2} = 0 \longrightarrow x_3 = \sqrt{2}$. $S = \left\{-3, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}$.

4) $x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 2 = 0.$

Como no se sabe factorizar el primer miembro de esta ecuación, no se puede resolver. Como curiosidad:

$$S = \left\{ -1 - \sqrt{3}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, -1 + \sqrt{3}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}$$

A) Resolver y probar las ecuaciones de primer grado siguientes:

1) $3(9x - 4) - 31 = 146$

2) $38 - 1.4(5 - 8x) = 30.4$

3) $\dfrac{5}{x-3} = \dfrac{3}{5-x}$

4) $\dfrac{5x-4}{4x-5} = \dfrac{4}{5}$

5) $\dfrac{5x^2 - 19x - 6}{7x^2 - 29x + 6} = \dfrac{5}{7}$

6) $(4x - 11)^2 + (3x + 23)^2 = (5x + 10)^2$

7) $\dfrac{9}{x} - \dfrac{15}{2} = \dfrac{7}{x} - \dfrac{2x-1}{3} + \dfrac{4x+1}{6}$

8) $\dfrac{4x - 0.7}{0.5} - \dfrac{7x - 0.9}{3} + 5 = \dfrac{9x + 0.8}{0.7}$

9) $\dfrac{3x-1}{0.5} - \dfrac{7x+1}{1.2} + \dfrac{2x-1}{11} = 3$

10) $\dfrac{\frac{5}{3} - \frac{3}{2}x}{\frac{7}{8} - \frac{2}{3}x} = \dfrac{3x - \frac{7}{3}}{\frac{4}{3}x - \frac{1}{2}}$

11) $\dfrac{3x^{10} - 2x^7}{6x} + \dfrac{7x^8 - 3x^7}{3x+1} = \dfrac{1}{2}x^9 + \dfrac{6x^{10} - x^9}{3x^3}$

12) $\dfrac{3x-11}{x-5} + \dfrac{2x-9}{x-3} - \dfrac{3x-19}{x^2 - 8x + 15} = 5$

13) $\dfrac{2}{x-1} + \dfrac{3}{x-2} = \dfrac{20}{4x-7}$

14) $\dfrac{4(x+8)}{2x+3} - \dfrac{x+9}{x+2} = \dfrac{x+7}{x+1}$

15) $\dfrac{2}{2x-5} - \dfrac{9}{3x-5} + \dfrac{4}{2x-15} = 0$

16) $4\left\{4\left[4\left(4x-3\right)-3\right]-3\right\}-3=1$

17) $\dfrac{1}{3}\left\{\dfrac{1}{3}\left[\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3}x-2\right)-2\right]-2\right\}-2=0.$

B) Resolver y probar las ecuaciones de segundo grado siguientes:

1) $3x^2 - 2x - 85 = 0$

2) $10x^2 - 11x + 3 = 0$

3) $\dfrac{2x}{x+2} + \dfrac{x+2}{2x} = 2$

4) $\dfrac{x}{x+1} + \dfrac{x}{x+4} = 1$

5) $\dfrac{x^2 - 3x - 1}{x^2 - x - 2} = \dfrac{x+1}{x+2}$

6) $x + \dfrac{1}{x-3} = 5$

7) $\dfrac{7x - 40}{x^2 - 10x + 24} = \dfrac{15}{2x-9}$

8) $\left(\dfrac{5+x}{5-x}\right)^2 = \dfrac{x+8}{x-8}$

9) $\dfrac{5x-24}{x+2} - \dfrac{12-7x}{2x+1} = 6$

10) $\dfrac{3}{x-2} + \dfrac{4}{x-3} + \dfrac{6}{x-7} = 0$

11) $\dfrac{5x-9}{x+1}-\dfrac{39-8x}{12}=\dfrac{3}{4}(x-1)$

12) $\dfrac{x-1}{3}-\dfrac{7x-10}{12}=\dfrac{5x-6}{2x+2}-\dfrac{3x+2}{8}$

13) $\dfrac{x+1}{x-3}-\dfrac{5x+2}{x+3}-\dfrac{x^2-3}{x^2-9}=0$

14) $\dfrac{x+1}{3x+2}=\dfrac{2x-3}{3x-2}-1-\dfrac{36}{4-9x^2}$

15) $\dfrac{2x^2-1}{x-3}=x+3+\dfrac{17}{x-3}$.

6.2.2 Sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

El siguiente es un ejemplo de una ecuación de primer grado con dos incógnitas, x, y: $2x+5y-3=0$.

Se sabe que el conjunto solución de esta ecuación es el conjunto de todos los pares ordenados (x,y) de números reales que satisfacen la ecuación.

Así, por ejemplo $(4,-1)$ pertenece al conjunto solución ya que $2\cdot 4+5\cdot(-1)-3=0$ es verdadero.

Otros pares ordenados que satisfacen la ecuación propuesta son:

$$\left(0,\frac{3}{5}\right)\quad\left(\frac{3}{2},0\right)\quad(-1,1)\quad(-6,3)\quad(-11,5)$$

como puede verificarse con facilidad.

Probablemente se recuerde que el conjunto solución de la ecuación considerada, y en general de toda ecuación de primer grado con dos incógnitas, es un conjunto infinito de pares ordenados.

6.2.3 Sistemas de Ecuaciones

Se recordará que dos ecuaciones como

$$2x-3y-12=0 \qquad \text{y} \qquad 3x+y-7=0,$$

constituyen un sistema de ecuaciones, si un mismo par ordenado es solución de cada una de ellas. Se escribe en este caso:

$$\begin{cases} 2x-3y-12=0\\ 3x+y-7=0. \end{cases}$$

Resolver un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, es encontrar el par ordenado solución común de ambas ecuaciones.

De los varios métodos que existen para resolver estos sistemas, sólo se recordarán aquí el de **sustitución** y el de **suma o resta**.

6.2.4 Sustitución

Sea

$$\begin{cases} 2x-3y-12=0 & (E_1)\\ 3x+y-7=0 & (E_2) \end{cases}$$

De la ecuación (E_2) se obtiene $y=7-3x$. Sustituyendo en la ecuación (E_1):

$2x-3(7-3x)-12=0\longrightarrow 2x-21+9x-12=0\longrightarrow 2x+9x=21+12$

$\longrightarrow 11x=33\longrightarrow x=3.$

Sustituyendo el valor de x, $y=7-3(3)=7-9=-2$, resulta entonces: $x=3$, $y=-2$. Luego, $S=\{(3,-2)\}$.

Resolver:

$$\begin{cases} 6x + 5y = 16 & (E_1) \\ 5x - 12y = -19 & (E_2). \end{cases}$$

De la ecuación (E_1), $6x = 16 - 5y$, $x = \dfrac{16-5y}{6}$. Sustituyendo en la ecuación (E_2), $5\left(\dfrac{16-5y}{6}\right) - 12y = -19 \longrightarrow \dfrac{80-25y}{6} - 12y = -19$, luego $80 - 25y - 72y = -114 \longrightarrow -97y = -194 \longrightarrow y = 2$.

Sustituyendo el valor de y, $x = \dfrac{16 - 5{\cdot}2}{6} = \dfrac{16-10}{6} = \dfrac{6}{6} = 1$. Así, $x = 1$, $y = 2$, luego $S = \{(1, 2)\}$.

6.2.5 Suma o Resta

$$\begin{cases} 2x + 5y = -4 & (E_1) \\ 4x + 3y = 6 & (E_2) \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{r|r} 2x + 5y = -4 & 2 \\ 4x + 3y = \ \ 6 & -1 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} 4x + 10y = -8 \\ -\,4x - \ 3y \ = -6 \end{cases}$$
$$\overline{\qquad 7y = -14 \qquad}$$
$$y = -2.$$

Sustituyendo en (E_1) el valor de y, $2x + 5(-2) = -4 \longrightarrow 2x - 10 = -4 \longrightarrow 2x = 6 \longrightarrow x = 3$, entonces $x = 3$, $y = -2$, luego $S = \{(3, -2)\}$.

Resolver:

$$\begin{cases} 7x - 5y - 3 = 0 & (E_1) \\ -8x + 7y - 3 = 0 & (E_2) \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{r|l} 7x - 5y - 3 = 0 & 7 \\ -8x + 7y - 3 = 0 & 5 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} 49x - 35y = 21 \\ -40x + 35y = 15 \end{cases}$$
$$\overline{\qquad 9x = 36 \qquad}$$
$$x = 4.$$

Sustituyendo en (E_2) el valor de x, $-8(4) + 7y - 3 = 0 \longrightarrow -32 + 7y - 3 = 0 \longrightarrow 7y = 35 \longrightarrow y = 5$, entonces: $x = 4$, $y = 5$. Luego $S = \{(4, 5)\}$.

Resolver:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 6 & (E_1) \\ -4x + 6y = -6. & (E_2) \end{cases}$$

Por sustitución se obtiene sucesivamente:

En (E_1): $x = \dfrac{6+3y}{2}$.

Sustituyendo en (E_2): $-4\left(\dfrac{6+3y}{2}\right) + 6y = -6 \longrightarrow -2(6+3y) + 6y = -6$, $-12 - 6y + 6y = -6 \longrightarrow$

$-6y+6y=-6+12 \longrightarrow 0=6$, lo cual es **falso**.

Situaciones como ésta ocurren cuando las ecuaciones propuestas en el sistema no tienen soluciones comunes, es decir no forman sistema. Se dice de estas ecuaciones que son incompatibles.

Resolver:

$$\begin{cases} 3x-y=8 & (E_1) \\ 6x-2y=16. & (E_2) \end{cases}$$

Multiplicando por 2 la ecuación (E_1) y por suma se obtiene:

$$\left\{ \begin{array}{r|l} 3x-y=8 & 2 \\ 6x-2y=16 & \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} 6x-2y=16 \\ -6x+2y=-16 \end{cases}$$
$$\overline{\qquad 0=0. \qquad}$$

Lo cual es evidentemente cierto, pero no da una solución determinada.

Situaciones como esta otra ocurren cuando en el sistema propuesto no hay en realidad dos ecuaciones, sino una sola tomada en dos formas diferentes. En tal caso, como se trata de una sola ecuación no hay una solución única sino una infinidad de soluciones.

Resolver y probar los siguientes sistemas

1) $\begin{cases} 3x-2y=11 \\ 2x+3y=16. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 5x-7y=2 \\ 7x-9y=10. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 7x-9y+6=0 \\ 11x-12y-12=0. \end{cases}$

4) $\begin{cases} 9x+13y-75=0 \\ 12x-41y+75=0. \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dfrac{x-7}{3}+\dfrac{y-5}{2}=7 \\ \dfrac{x-7}{2}+\dfrac{y-5}{3}=8. \end{cases}$

6) $\begin{cases} \dfrac{5x-7y-1}{7x-5y+8}=0 \\ \dfrac{3x-4y+3}{4x-5y+2}=1. \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dfrac{3x-4}{5}+\dfrac{4y-5}{3}=3(x-y) \\ \dfrac{5x+2}{3}-\dfrac{7y-3}{4}=2(x-y). \end{cases}$

8) $\begin{cases} \dfrac{5x+7y+2}{3}-\dfrac{3x+4y-7}{4}=x \\ \dfrac{7x+3y+4}{4}-\dfrac{6x+5y+7}{5}=y. \end{cases}$

9) $\begin{cases} 8x-6y=21 \\ x-\dfrac{3y}{4}=\dfrac{9}{2}. \end{cases}$

10) $\begin{cases} 6x-12y=3 \\ -x+2y=-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Capítulo 7

Desigualdades

Conviene también revisar la resolución de las inecuaciones estudiadas en el liceo.

Los principios de la resolución de las inecuaciones, derivados de las desigualdades en general, son los siguientes:

1) No se altera una inecuación al sumar (o restar) a ambos miembros números iguales.

2) No se altera una inecuación al multiplicar (o dividir) ambos miembros por números iguales **positivos**.

3) Cambia el sentido de una inecuación al multiplicar (o dividir) ambos miembros por números iguales **negativos**.

7.1 Inecuaciones de primer grado

$\boxed{\text{Resolver } 5x-4<2x+8}$.

Se tiene

$$
\begin{aligned}
5x-4 &< 2x+8 && \text{(desigualdad propuesta)}\\
(5x-4)+(4-2x) &< (2x+8)+(4-2x) && \text{(principio 1)}\\
5x-4+4-2x &< 2x+8+4-2x &&\\
3x &< 12 &&\\
\frac{1}{3}(3x) &< \frac{1}{3}(12) && \text{(principio 2)}\\
x &< 4. &&
\end{aligned}
$$

El conjunto de solución S es el conjunto de los números reales que son menores que 4. Puede escribirse $S = \{x \in \mathbb{R}/x < 4\}$.

Puede observarse que el principio 1 permite transportar términos como se hace en las ecuaciones, y el principio 2, despejar la variable también como se hace en las ecuaciones.

$\boxed{\text{Resolver } \frac{2x}{3}+\frac{3}{4}<\frac{5x}{6}-\frac{1}{4}}$.

Multiplicando ambos miembros por 12 (principio 2), resulta:

$$12\Big(\frac{2x}{3}+\frac{3}{4}\Big) < 12\Big(\frac{5x}{6}-\frac{1}{4}\Big)$$

$$8x+9 < 10x-3.$$

Transportando términos:

$$8x-10x < -3-9$$

$$-2x < -12$$

Multiplicando ambos miembros por $-\frac{1}{2}$ (principio 3) resulta:

$$-\frac{1}{2}(-2x) > -\frac{1}{2}(-12) \longrightarrow x > 6.$$

Luego $S = \{x \in \mathbb{R}/x > 6\}$.

Nota La primera de las inecuaciones resueltas se satisface para todo valor real de x menor que 4 y no satisface para algún valor real de x igual o mayor que 4; la segunda se satisface para todo valor real de x mayor que 6, y no se satisface para algún valor real de x igual o menor que 6.

$\boxed{\text{Resolver } \dfrac{x+4}{3} - \dfrac{x-4}{5} \geq 2 + \dfrac{3x-1}{15}}$.

Se tiene sucesivamente:

$$\begin{aligned}
15\left(\frac{x+4}{3} - \frac{x-4}{5}\right) &\geq 15\left(2 + \frac{3x-1}{15}\right)\\
5(x+4) - 3(x-4) &\geq 30 + (3x-1)\\
5x + 20 - 3x + 12 &\geq 30 + 3x - 1\\
5x - 3x - 3x &\geq 30 - 1 - 20 - 12\\
-x &\geq -3\\
-1(-x) &\leq -1(-3)\\
x &\leq 3.
\end{aligned}$$

Luego, $S = \{x \in \mathbb{R}/x \leq 3\}$.

7.2 Sistema de inecuaciones

Se dice que varias inecuaciones forman un sistema si deben verificarse simultáneamente. Por tanto la solución de un sistema de inecuaciones es toda solución común a las inecuaciones del sistema.

Para resolver un sistema de inecuaciones se resuelve cada inecuación por separado y se toma luego la intersección de las soluciones. Esta intersección es la solución del sistema.

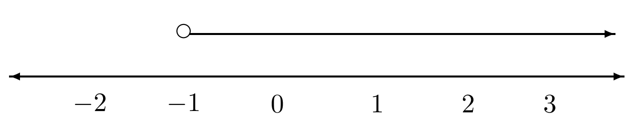
Ejemplo 1 Resolver:

$$\begin{cases} 6x + 3 > 2x - 1 & (I_1)\\ \dfrac{x}{2} + 2 > x + \dfrac{1}{4} & (I_2) \end{cases}$$

Resolución de (I_1):

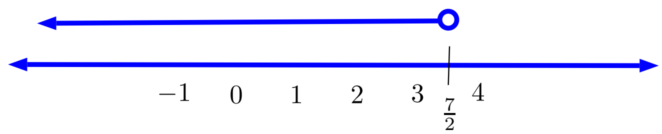
$$\begin{aligned}
6x + 3 &> 2x - 1\\
6x - 2x &> -1 - 3\\
4x &> -4\\
x &> -1.
\end{aligned}$$

Puede representar la solución de (I_1) de la manera siguiente:



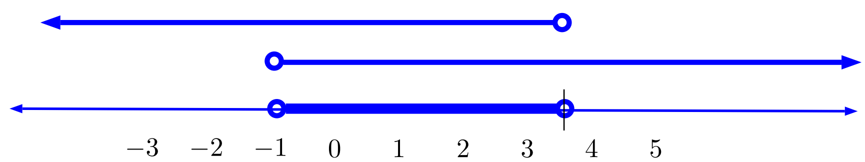
Resolución de (I_2):
$$\begin{aligned}
\frac{x}{2}+2 &> x+\frac{1}{4}\\
4\left(\frac{x}{2}+2\right) &> 4\left(x+\frac{1}{4}\right)\\
2x+8 &> 4x+1\\
2x-4x &> 1-8\\
-2x &> -7\\
-1(-2x) &< -1(-7)\\
x &< \frac{7}{2}.
\end{aligned}$$

Puede representar la solución de (I_2) de la manera siguiente:



Luego la solución del sistema propuesto la constituye el conjunto de números reales mayores que -1 y menores que $\frac{7}{2}$.

Esto es $S=\left\{x\in\mathbb{R}/-1<x<\dfrac{7}{2}\right\}$



Ejemplo 2 Resolver:

$$\begin{cases} 2(2x-3)<2x+4 & (I_1)\\ \dfrac{x}{2}+1<\dfrac{2x+9}{6} & (I_2)\end{cases}$$

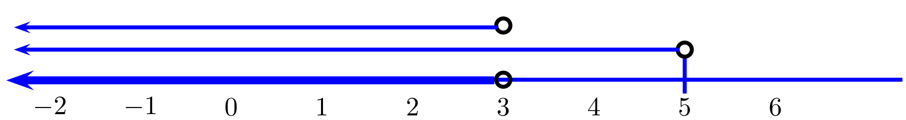
Resolución de (I_1): $4x-6<2x+4 \longrightarrow 4x-2x<4+6$

$2x<10 \longrightarrow x<5.$

Resolución de (I_2): $6\left(\dfrac{x}{2}+1\right)<6\left(\dfrac{2x+9}{6}\right)$

$3x+6<2x+9 \longrightarrow 3x-2x<9-6 \longrightarrow x<3.$

Luego, $S=\{x\in\mathbb{R}/x<3\}$.



Ejemplo 3 Resolver:

$$\begin{cases} \dfrac{3x}{2}-\dfrac{7}{3}<\dfrac{x}{6}+3 & (I_1)\\ \dfrac{3x}{4}-\dfrac{1}{2}<\dfrac{2x}{5}+\dfrac{5}{4} & (I_2)\end{cases}$$

Resolución de (I_1): $6\left(\frac{3x}{2}-\frac{7}{3}\right)<6\left(\frac{x}{6}+3\right)$

$$\begin{aligned} 9x-14&<x+18\\ 9x-x&<18+14\\ 8x&<32\\ x&<4. \end{aligned}$$

Resolución de (I_2): $20\left(\frac{3x}{4}-\frac{1}{2}\right)>20\left(\frac{2x}{5}+\frac{5}{4}\right)$

$$\begin{aligned} 15x-10&>8x+25\\ 15x-8x&>25+10\\ 7x&>35\\ x&>5. \end{aligned}$$

La solución del sistema es el conjunto de números reales menores que 4 y mayores que 5. Como tal conjunto es vacío se tiene $S=\emptyset$.

7.3 Inecuaciones de segundo grado

$\boxed{\text{Resolver } x^2-3x+2<0}$.

Se factoriza el primer miembro y se analiza el signo de cada uno de los factores. Resulta $(x-2)(x-1)<0$.

Como el producto de esos dos factores es menor que cero, es decir negativo, uno de ellos es positivo y el otro negativo. Esto es:

$$\begin{cases} x-2>0\\ x-1<0 \end{cases} \text{o bien} \begin{cases} x-2<0\\ x-1>0. \end{cases}$$

En ambos casos se trata de un sistema de inecuaciones. Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x-2>0 \longrightarrow x>2\\ x-1<0 \longrightarrow x<1 \end{array}\right\} \longrightarrow S_1=\emptyset$$
$$\left.\begin{array}{l} x-2<0 \longrightarrow x<2\\ x-1>0 \longrightarrow x>1 \end{array}\right\} \longrightarrow S_2=\{x\in\mathbb{R}/1<x<2\}.$$

Por tanto la solución de la inecuación propuesta es: $S=\{x\in\mathbb{R}/1<x<2\}$.

$\boxed{\text{Resolver } x^2-2x-24>0}$.

Procediendo como en el ejercicio anterior $(x-6)(x+4)>0$.

En este caso ambos factores son negativos o ambos factores son positivos. Luego:

$$\begin{cases} x-6<0\\ x+4<0 \end{cases} \text{o bien} \begin{cases} x-6>0\\ x+4<0. \end{cases}$$

Luego:

$$\left.\begin{array}{l} x-6<0 \longrightarrow \ x<6\\ x+4<0 \longrightarrow x<-4 \end{array}\right\} \longrightarrow S_1=\{x\in\mathbb{R}/x<-4\},$$
$$\left.\begin{array}{l} x-6>0 \longrightarrow \ x>6\\ x+4>0 \longrightarrow x>-4 \end{array}\right\} \longrightarrow S_2=\{x\in\mathbb{R}/x>6\}.$$

Por tanto $S=\{x\in\mathbb{R}/x<-4 \text{ ó } x>6\}$.

$\boxed{\text{Resolver } x^2+5x+6=(x+2)(x+3)\geq 0.}$

$$\left.\begin{array}{l} x+2\geq 0 \longrightarrow x\geq -2 \\ x+3\geq 0 \longrightarrow x\geq -3 \end{array}\right\} \longrightarrow S_1=\{x\in\mathbb{R}/x\geq -2\}$$
$$\left.\begin{array}{l} x+2\leq 0 \longrightarrow x\leq -2 \\ x+3\leq 0 \longrightarrow x\leq -3 \end{array}\right\} \longrightarrow S_2=\{x\in\mathbb{R}/x\leq -3\}.$$

Luego $S=\{x\in\mathbb{R}/x\leq -3 \text{ ó } x\geq -2\}$.

$\boxed{\text{Resolver } 4x^2+4x+1=(2x+1)^2<0.}$

Se sabe que el cuadrado de un número real es positivo o cero. Por tanto no existe número real x que satisfaga la desigualdad propuesta. Luego, $S=\emptyset$.

$\boxed{\text{Resolver } x^2-6x+9\geq 0}$

$x^2-6x+9=(x-3)^2\geq 0$. Como el cuadrado de un número real es positivo o cero, cualquier número real x satisface la desigualdad propuesta. Luego $S=\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Resolver } x^2+4x+4=(x+2)^2>0.}$

$S=\mathbb{R}\backslash\{-2\}$.

$\boxed{\text{Resolver } x^2+4x+4\leq 0.}$

$x^2+4x+4=(x+2)^2\leq 0$, $S=\{-2\}$.

7.4 Algo más sobre inecuaciones

Resolver: $\dfrac{2x+3}{x-1}>1, \quad (x\neq 1)$.

Se sabe que no altera una inecuación cuando se multiplican sus dos miembros por un mismo número positivo y que se invierte su sentido cuando se multiplican sus dos miembros por un mismo número negativo. Entonces para multiplicar ambos miembros de una inecuación por un mismo número, es absolutamente necesario conocer el signo de este número.

Esta es la razón por la cual no se puede suprimir el denominador de la inecuación propuesta multiplicando ambos miembros por $x-1$, porque no se conoce el signo de esta expresión. Debe recordarse que en general esta es la razón por la cual, cuando los denominadores de las inecuaciones contienen la incógnita, no se pueden suprimir como se suprimen los denominadores de las ecuaciones.

Volviendo a la inecuación propuesta, se procede del modo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{2x+3}{x-1}&>1 \\ \frac{2x+3}{x-1}-1&>0 \quad \text{todos los términos se llevan al primer miembro} \\ \frac{2x+3-(x-1)}{x-1}&>0 \quad \text{se efectúan las operaciones en el primer miembro} \\ \frac{2x+3-x+1}{x-1}&>0 \\ \frac{x+4}{x-1}&>0 \end{aligned}$$

Se hacen ahora en la fracción que forma el primer miembro de la inecuación un estudio del signo del numerador y del denominador, para que dicha fracción sea positiva.

$$\begin{cases} x+4<0 \\ x-1<0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x+4>0 \\ x-1>0 \end{cases}$$

Resulta:

$$\left.\begin{array}{l} x+4<0 \longrightarrow x<-4 \\ x-1<0 \longrightarrow \ x<1 \end{array}\right\} \longrightarrow S_1=\{x\in\mathbb{R}/x<-4\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x+4>0 \longrightarrow x>-4 \\ x-1>0 \longrightarrow \ x>1. \end{array}\right\} \longrightarrow S_2=\{x\in\mathbb{R}/x>1\}.$$

Luego, $S=\{x\in\mathbb{R}/x<-4 \text{ ó } x>1\}$.

$$\boxed{\text{Resolver } \frac{2x^2}{2x+1}<x-1,\ x\neq-\tfrac{1}{2}.}$$

$$\begin{aligned} \frac{2x^2}{2x+1}&<x-1 \\ \frac{2x^2}{2x+1}-x+1&<0 \\ \frac{2x^2-x(2x+1)+(2x+1)}{2x+1}&<0 \\ \frac{2x^2-2x^2-x+2x+1}{2x+1}&<0 \\ \frac{x+1}{2x+1}&<0. \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l} x+1>0 \ \longrightarrow x>-1 \\ 2x+1<0 \longrightarrow x<-\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \longrightarrow S_1=\left\{x\in\mathbb{R}/-1<x<-\tfrac{1}{2}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x+1<0 \ \longrightarrow x<-1 \\ 2x+1>0 \longrightarrow x>-\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \longrightarrow S_2=\emptyset\,.$$

Luego, $S=\left\{x\in\mathbb{R}/-1<x<-\tfrac{1}{2}\right\}$.

Ejercicios no resueltos

A. Resolver las inecuaciones que se dan a continuación, y probar luego valores que las satisfacen y valores que no las satisfacen; dos al menos en cada caso.

1) $2x+7>5x-8, \quad \dfrac{4x+3}{3}>x+2$

2) $x+\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{3}-\dfrac{x}{4}>\dfrac{x}{5}+83$

3) $x-\left\{\dfrac{3}{5}x+\left[4x-\left(\dfrac{3}{2}x+\dfrac{21}{10}\right)\right]\right\}>0$

4) $\dfrac{7}{2}+\dfrac{5(1-x)}{4}<\dfrac{3x-4}{5}, \quad \dfrac{2}{3}x-\dfrac{3}{2}x+3x<15$

5) $2(x+3)>3(x-1), \quad \dfrac{x}{4}+\dfrac{2}{3}<\dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{6}$

6) $\dfrac{4x+10}{9} + 5 + \dfrac{2}{3}x < \dfrac{7}{6}x + 3x$

7) $\dfrac{2x-1}{3} - \dfrac{x+6}{4} < \dfrac{x-3}{12}$.

B. Resolver los sistemas:

1) $\begin{cases} \dfrac{3x}{4} - 5 > 7 \\ \dfrac{x}{2} + 3 > x - 9 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x - 4 > 3x + 6 \\ 2x - 7 > 3x - 15 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{3} > 13 - \dfrac{x}{4} \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{x}{4} < 12 - \dfrac{x}{6} \end{cases}$

4) $\begin{cases} 5(1-2x) < 12 - \dfrac{4x+3}{2} \\ 1 + x < \dfrac{8-x}{3} - \dfrac{2-x}{4} \end{cases}$

C. Resolver las inecuaciones.

1) $x^2 - 7x + 12 > 0, \quad x^2 + x - 2 \leq 0$

2) $x^2 + 10x + 25 \geq 0, \quad x^2 - 12x + 36 < 0$

3) $\dfrac{3x-1}{x+2} < 1,\ x \neq -2$

4) $\dfrac{x^2+3x}{x+1} > x - 1,\ x \neq -1$

5) $2x^2 + 5x - 3 \geq 0, \quad x^2 - 2x - 8 < 0$

6) $16x^2 - 8x + 1 > 0, \quad 4x^2 + 12x + 9 \leq 0$

7) $\dfrac{5x-2}{2x+1} + 1 < \dfrac{x}{2x+1},\ x \neq -\frac{1}{2}$.

Capítulo 8

Logaritmos

Debe recordarse que dado un número real a mayor que cero y diferente de uno $(a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1)$, existe una función f de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^+$ tal que $f\colon x \longmapsto a^x$, llamada función exponencial de base a, que tiene las siguientes propiedades: continua, biyectiva, creciente si $a > 1$ y decreciente si $a < 1$.

Como la función exponencial es biyectiva, posee función inversa, la cual se conoce con el nombre de función logarítmica.

Definición 8.0.1 *Se dice que y es el logaritmo de x en base a, es decir $y = \log_a x$, si $a^y = x$ para todo $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$.*

Según la definición anterior, puede afirmarse que:

$$\text{Si } a^y = x, \quad \text{entonces} \quad y = \log_a x.$$

8.1 Propiedades de los logaritmos

Para todo $a > 0$, $a \neq 1$, M, $N \in \mathbb{R}^+$:

1) $\log_a 1 = 0$.
2) $\log_a a = 1$.
3) $\log_a a^n = n$.
4) $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$.
5) $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$
6) $\log_a M^n = n \log_a M$.
7) $\log_a \sqrt[n]{M} = \dfrac{\log_a M}{n}$.

8.1.1 Ejercicios resueltos

A. Expresar en notación exponencial.

1) $\log_8 64 = 2$. 2) $\log_3 \dfrac{1}{9} = -2$. 3) $\log_4 \dfrac{1}{128} = -3.5$.

Respuesta

1) $8^2 = 64$. 2) $3^{-2} = \dfrac{1}{9}$. 3) $4^{-3.5} = \dfrac{1}{128}$.

B. Expresar en notación logarítmica.

1) $64 = 4^3$. 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$. 3) $(\sqrt{3})^4 = 9$.

Respuesta

1) $\log_4 64 = 3$. 2) $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$. 3) $\log_{\sqrt{3}} 9 = 4$.

C. Calcular el valor de x en cada una de las siguientes expresiones.

1) a. $\log_6 x = 3$. b. $\log_8 x = \frac{5}{3}$. c. $\log_{\frac{9}{4}} x = -\frac{5}{2}$.

2) a. $\log_x 729 = 6$. b. $\log_x 8 = \frac{3}{4}$. c. $\log_x \frac{1}{27} = -3$.

3) a. $\log_{16} 32 = x$. b. $\log_5 625 = x$. c. $\log_{\frac{1}{125}} 625 = x$.

Respuesta

1) a. $x = 6^3 = 216 \longrightarrow x = 216$.
b. $x = 8^{\frac{5}{3}} = (2^3)^{\frac{5}{3}} = 2^5 = 32 \longrightarrow x = 32$.
c. $x = \left(\frac{9}{4}\right)^{-\frac{5}{2}} = \left[\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]^{\frac{-5}{2}} = \left[\frac{3}{2}\right]^{-5} = \frac{3^{-5}}{2^{-5}} = \frac{2^5}{3^5} = \frac{32}{243} \longrightarrow x = \frac{32}{243}$.

2) a. $x^6 = 729 \longrightarrow (x^6)^{\frac{1}{6}} = (3^6)^{\frac{1}{6}} \longrightarrow x = 3$.
b. $x^{\frac{3}{4}} = 8 \longrightarrow x^{\frac{3}{4}} = 2^3 \longrightarrow (x^{\frac{3}{4}})^{\frac{4}{3}} = (2^3)^{\frac{4}{3}} \longrightarrow x = 2^4 \longrightarrow x = 16$.
c. $x^{-3} = \frac{1}{27} \longrightarrow x^{-3} = \frac{1}{3^3} \longrightarrow x^{-3} = 3^{-3} \longrightarrow x = 3$.

3) a. $16^x = 32 \longrightarrow (2^4)^x = 2^5 \longrightarrow 2^{4x} = 2^5 \longrightarrow 4x = 5 \longrightarrow x = \frac{5}{4}$.
b. $5^x = 625 \longrightarrow 5^x = 5^4 \longrightarrow x = 4$.
c. $\left(\frac{1}{125}\right)^x = 625 \longrightarrow \left(\frac{1}{5^3}\right)^x = 5^4 \longrightarrow (5^{-3})^x = 5^4 \longrightarrow 5^{-3x} = 5^4 \longrightarrow -3x = 4 \longrightarrow x = -\frac{4}{3}$.

El conjunto de los logaritmos obtenidos con una misma base constituyen un sistema de logaritmos. Todo número positivo diferente de 1 puede servir como base de un sistema; no obstante, tradicionalmente sólo se han usado dos sistemas: el de base $\mathrm{e} = 2.718\ldots$ (logaritmos naturales) y el de base 10 (logaritmos decimales). En la actualidad se usan también los logaritmos de base 2.

Los logaritmos naturales se expresan con $\ln$; los logaritmos decimales con $\log$; así $\ln 20 = 2.99573$; $\log 20 = 1.30103$, son respectivamente el logaritmo natural de 20, y el logaritmo decimal de 20.

8.2 Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

8.2.1 Exponenciales

Resolver: $4^{3x} = 8^{x+3} \longrightarrow (2^2)^{3x} = (2^3)^{x+3} \longrightarrow 2^{6x} = 2^{3x+9} \longrightarrow 6x = 3x + 9 \longrightarrow 3x = 9 \longrightarrow \boxed{x = 3}$.

Resolver: $9^{x+3} = 27^{x-1} \longrightarrow (3^2)^{x+3} = (3^3)^{x-1} \longrightarrow 3^{2x+6} = 3^{3x-3} \longrightarrow 2x+6 = 3x-3 \longrightarrow -x = -9 \longrightarrow \boxed{x = 9}$.

8.2.2 Logarítmicas

Resolver: $\log_2(x-1)+\log_2(x+1) = \log_2 8$

$$\begin{aligned}\log_2(x-1)(x+1) &= \log_2 8\\(x-1)(x+1) &= 8\\x^2-1 &= 8\\x^2-9 &= 0\\(x-3)(x+3) &= 0.\end{aligned}$$

Si $x+3=0 \longrightarrow x=-3$ y si $x-3=0 \longrightarrow x=3$. Debe ser probado cada uno de estos valores.

Para $x=-3$ se obtiene:

$$\log_2(-3-1)+\log_2(-3+1) = \log_2(-4)+\log_2(-2).$$

Como no están definidos los logaritmos de números negativos, esta solución es inadmisible.

Para $x=3$, se obtiene:

$$\log_2(3-1)+\log_2(3+1) = \log_2 2+\log_2 4 = \log_2 2{\cdot}4 = \log_2 8,$$

que es el segundo miembro de la ecuación propuesta.

Luego, $S=\{3\}$.

Resolver: $\log_3(5x+2)+\log_3(x-2) = 4$.

$$\begin{aligned}\log_3(5x+2)+\log_3(x-2) &= 4\\\log_3(5x+2)(x-2) &= 4\\(5x+2)(x-2) &= 3^4\\5x^2-10x+2x-4 &= 81\\5x^2-8x-85 &= 0.\end{aligned}$$

Resolviendo esta ecuación se obtiene $x=5$, $x=-\frac{17}{5}$.

Probando estos valores se ve que sólo el primero es admisible. Luego: $S=\{5\}$.

Resolver: $\log_2(x+5)-\log_2(x+2) = 2$.

$$\begin{aligned}\log_2(x+5)-\log_2(x+2) &= 2\\\log_2\left(\frac{x+5}{x+2}\right) &= 2\\\frac{x+5}{x+2} &= 2^2\\\frac{x+5}{x+2} &= 4\\x+5 &= 4x+8\\-3x &= 3\\x &= -1.\end{aligned}$$

Probando este valor se ve que satisface la ecuación. Luego, $S=\{-1\}$.

Resolver: $\log(3x+2) = \log(x-4)+1$.

$$\begin{aligned}
\log(3x+2) &= \log(x-4)+1\\
\log(3x+2) - \log(x-4) &= 1\\
\log\left(\frac{3x+2}{x-4}\right) &= 1\\
\frac{3x+2}{x-4} &= 10^1 = 10\\
3x+2 &= 10x-40\\
-7x &= -42\\
x &= 6.
\end{aligned}$$

Valor que satisface la ecuación propuesta. Luego, $S = \{6\}$.

Resolver: $\log(x^2+75) - \log(x-24) = 2$.

$$\begin{aligned}
\log(x^2+75) - \log(x-24) &= 2\\
\log\frac{x^2+75}{x-24} &= 2\\
\frac{x^2+75}{x-24} &= 10^2 = 100\\
x^2+75 &= 100x-2400\\
x^2 - 100x + 2475 &= 0.
\end{aligned}$$

Resolviendo esta ecuación se obtiene $x = 55$, $x = 45$. Probando estos valores se ve que ambos satisfacen la ecuación dada. Por tanto $S = \{45, 55\}$.

Sólo se han presentado en esta revisión de logaritmos, ejercicios muy simples. Por esta razón en los ejercicios que se dejan para práctica, que son tan simples como los resueltos, no se dan los resultados, a fin de que cada alumno los compruebe por su propia cuenta.

Ejercicios no resueltos

Resolver y probar los ejercicios siguientes:

A. Expresar en notación exponencial.

1) $\log_3 81 = 4$, $\quad \log_4 8 = 1.5$, $\quad \log_{10} 0.001 = -3$.

2) $\log_{27} 81 = \frac{4}{3}$, $\quad \log_{16} 128 = 1.75$, $\quad \log_4 \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$.

B. Expresar en notación logarítmica.

1) $4^3 = 64$, $\quad 27^{\frac{2}{3}} = 9$, $\quad \left(\frac{4}{49}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{7}{2}$.

2) $\left(\frac{1}{32}\right)^{-\frac{1}{2}} = 64$, $\quad 1024^{0.6} = 64$, $\quad 729^{\frac{2}{3}} = 81$.

C. Calcular el valor de x en cada una de las expresiones siguientes:

1) a) $\log_3 x = 4$ b) $\log_2 x = 7$ c) $\log_5 x = 3$ d) $\log_7 x = 2$.

2) a) $\log_3 81 = x$ b) $\log_5 125 = x$ c) $\log_7 343 = x$ d) $\log_2 64 = x$.

3) a) $\log_x 9 = 2$ b) $\log_x 216 = 3$ c) $\log_x 729 = 3$ d) $\log_x 128 = 7$.

4) a) $\log_9 x = \frac{1}{2}$ b) $\log_{125} x = \frac{1}{3}$ c) $\log_{32} x = \frac{2}{5}$ d) $\log_{27} x = \frac{2}{3}$.

5) a) $\log_{16} 4 = x$ b) $\log_{81} 3 = x$ c) $\log_{125} 25 = x$ d) $\log_{64} 8 = x$.

6) a) $\log_x 8 = \frac{3}{2}$ b) $\log_x 9 = \frac{2}{3}$ c) $\log_x 8 = \frac{3}{5}$ d) $\log_x 32 = \frac{5}{6}$.

D. Resolver las ecuaciones.

1) $2^{2x-5} = 128$, $3^{x-8} = \dfrac{81}{3^x}$

2) $3^x \cdot 3^{2x-3} = 3^5 \cdot 3^{4-x}$, $4^6 \cdot 2^{2(3x-1)} = 4^{2x+7}$

3) $2^{x-1} = (0.5)^{2x-5}$, $4^{3x-1} = (0.5)^{x-5}$

4) $\sqrt{5^{11-x}} = 5^{8-x}$, $\sqrt[3]{6^{x+2}} = \sqrt{6^{x-3}}$

5) $\log_2(x-1) + \log_2(x+2) = 2$

6) $\log_3(x+2) + \log_3(x+4) = 1$

7) $\log_5(2x+4) - \log_5(x-1) = 1$

8) $\log_2(3x+1) - \log_2(x-3) = 3$

9) $\log x + \log(x-9) = 1$

10) $\log(x+2) - \log(4x+3) + \log x = 0$

11) $\log(3x+5) + \log(x+5) = 3$

12) $\log(x+2) + \log(x-1) = 1$.

Capítulo 9

Geometría

Sólo se revisarán algunos de los aspectos de la geometría estudiada en el colegio, mediante ejercicios o problemas numéricos referentes a los diversos temas tratados.

9.1 Problemas sobre ángulos, triángulos, cuadriláteros, polígonos, ...

9.1.1 Problemas resueltos

1) Calcular la medida de dos ángulos complementarios si la medida de uno de ellos es los $\frac{2}{3}$ de la del otro.

   Sabemos que **dos ángulos son complementarios si la suma de sus medidas es** $90°$. Por tanto:

$$\begin{aligned} \text{Medida de un ángulo} &= x. \\ \text{Medida del otro ángulo} &= \frac{2x}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + \frac{2x}{3} &= 90° \\ 3x + 2x &= 270 \\ 5x &= 270 \\ x &= 54. \end{aligned}$$

   Luego:

$$\begin{aligned} \text{Medida de un ángulo} &= 54°. \\ \text{Medida del otro ángulo} &= \frac{54°\cdot 2}{3} = 36°. \end{aligned}$$

   Prueba:

$$54° + 36° = 90°.$$

2) Hallar la medida de dos ángulos suplementarios, sabiendo que la del mayor excede en $26°$ a la del menor.

   Sabemos que **dos ángulos son suplementarios si la suma de sus medidas es** $180°$. Por tanto:

$$\begin{aligned} \text{Medida del ángulo mayor} &= x. \\ \text{Medida del ángulo menor} &= x - 26°. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + x - 26 &= 180° \\ 2x &= 206° \\ x &= 103° \end{aligned}$$

   Luego:

$$\begin{aligned} \text{Medida del ángulo mayor} &= 103°. \\ \text{Medida del ángulo menor} &= 103° - 26° = 77°. \end{aligned}$$

3) Alrededor de un punto en un plano se trazan cuatro ángulos cuyas medidas son proporcionales a los números 3, 5, 7 y 9. Calcular sus medidas respectivas.

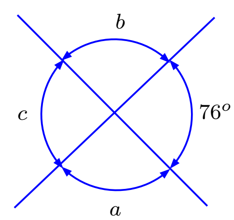
Sabemos que la medida de los ángulos alrededor de un punto en un plano equivale a la medida de un perígono, éste es $360°$. Luego, designando las medidas respectivas de esos ángulos con $3x$, $5x$, $7x$, $9x$ se tiene:

$$\begin{aligned} 3x+5x+7x+9x &= 360 \\ 24x &= 360 \\ x &= 15. \end{aligned}$$

Por tanto los ángulos miden:

$$\begin{aligned} 3{\cdot}15° &= 45°. \\ 5{\cdot}15° &= 75°. \\ 7{\cdot}15° &= 105°. \\ 9{\cdot}15° &= 135°. \end{aligned}$$

4) Uno de los cuatro ángulos formados al intersecarse dos rectas tiene una medida de $76°$. Hállese la medida de los otros tres ángulos.



La figura correspondiente muestra cuatro ángulos, dos a dos opuestos por el vértice. Se sabe que dos ángulos opuestos por el vértice son congruentes y que los ángulos alrededor de un punto en un plano forman un perígono. Luego:

$$c = 76° \ \text{ y } \ a = b = \frac{360° - 2{\cdot}76°}{2} = \frac{360° - 152°}{2} = \frac{208°}{2} = 104°.$$

5) Uno de los ángulos de un triángulo mide $75°$. ¿Cuánto mide cada uno de los otros dos si el menor de ellos mide $25°$ menos que el otro?

Se sabe que **la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es** $180°$. Luego:

$$\begin{aligned} &\text{Medida del ángulo menor} = x. \\ &\text{Medida del ángulo mayor} = x + 25. \end{aligned}$$

Entonces:

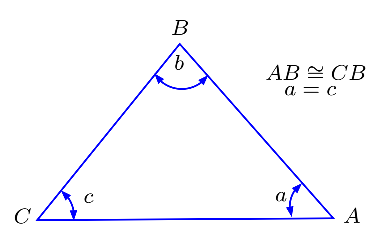
$$\begin{aligned} 75 + x + x + 25 &= 180 \\ 2x &= 80 \\ x &= 40. \end{aligned}$$

Esto es:

$$\begin{aligned} &\text{Medida del ángulo menor} = 40°. \\ &\text{Medida del ángulo mayor} = 40° + 25° = 65°. \end{aligned}$$

6) El ángulo del vértice de un triángulo isósceles mide $50°$. Hállese la medida de cada uno de los ángulos de la base.

Se sabe que **el triángulo isósceles es el que tiene dos lados congruentes**. En un triángulo isósceles, en particular se llaman: **vértice** a la intersección de los lados congruentes y **base** al lado desigual. Además, lo ángulos opuestos a los lados congruentes, son congruentes.



Entonces, volviendo al problema, de inmediato se tiene:

$$a = c = \frac{180° - b}{2} = \frac{180° - 50°}{2} = \frac{130}{2} = 65°,$$

es decir la medida de cada uno de los ángulos de la base es $65°$.

7) Calcular la medida de cada uno de los ángulos internos de un triángulo isósceles, si la medida del ángulo del vértice es el triple de la de un ángulo de la base.

Se tiene:

$$\begin{aligned} &\text{Medida de cada ángulo de la base} = x. \\ &\text{Medida del ángulo del vértice} \quad = 3x. \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} x + x + 3x &= 180 \\ 5x &= 180 \\ x &= 36. \end{aligned}$$

Por lo tanto cada uno de los ángulos de la base mide $36°$ y el del vértice $108°$.

8) Calcular la medida de cada uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo sabiendo que la medida de uno de ellos excede en $22°$ a la del otro.

Se sabe que **las medidas de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo suman** $90°$, por tanto:

$$\begin{aligned} &\text{Medida ángulo menor} = x. \\ &\text{Medida ángulo mayor} = x + 22. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + x + 22 &= 90 \\ 2x &= 68 \\ x &= 34. \end{aligned}$$

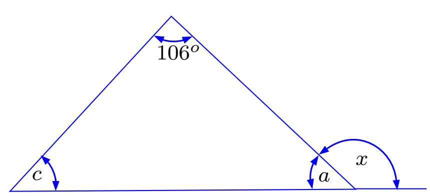
Esto es: los ángulos miden $34°$ y $56°$ respectivamente.

9) El ángulo del vértice de un triángulo isósceles mide $106°$. Hállese la medida del ángulo externo formado por uno de los lados congruentes y la base prolongada.

Se sabe que la medida de un ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los ángulos internos no adyacentes.

$a = c = \dfrac{180° - 106°}{2} = \dfrac{74}{2} = 37°.$

$x = 106° + 37° = 143°.$



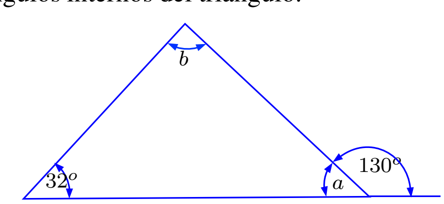
10) Uno de los ángulos externos de un triángulo mide $130°$ y uno de los ángulos internos no adyacentes al anterior mide $32°$. Hállese la medida de los otros ángulos internos del triángulo.

Trazando la figura se ve de inmediato:

$b = 130° - 32° = 98°.$

$a = 180° - 130° = 50°.$

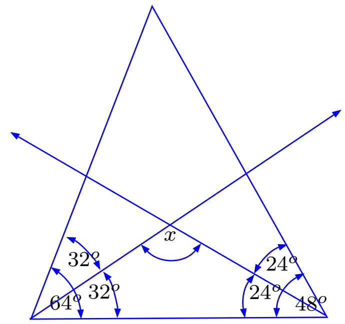
Así los otros dos ángulos internos miden $98°$ el mayor y $50°$ el menor.



11) Dos de los ángulos de un triángulo miden $64°$ y $48°$ respectivamente.

Calcular la medida del ángulo mayor formado por las bisectrices de estos ángulos.

Se sabe que **la bisectriz de un ángulo es el rayo que lo divide en dos ángulos congruentes**, entonces trazando la figura se ve:



$x = 180° - (32° + 24°) = 180° - 56° = 124°.$

Esto es que el ángulo mayor formado por las bisectrices de los dos ángulos internos dados miden $124°$.

12) El perímetro de un triángulo isósceles mide 34 cm y la longitud de la base es los $\frac{5}{6}$ de la longitud de uno de los lados iguales. Hallar la medida de cada uno de los lados.

$$\text{Longitud del lado igual} = x.$$
$$\text{Longitud de la base} = \frac{5x}{6}.$$

Luego:

$$\begin{aligned} x + x + \frac{5x}{6} &= 34 \\ 17x &= 204 \\ x &= 12. \end{aligned}$$

Por tanto los lados del triángulo miden dos de ellos 12 cm cada uno y el tercero 10 cm.

13) Las medidas de los lados de un triángulo están expresadas por tres números pares consecutivos. Sabiendo que la longitud del perímetro es 138 cm. Halle la medida de cada lado.

$$\text{Medida del lado menor} = x.$$
$$\text{Medida del lado mediano} = x + 2.$$
$$\text{Medida del lado mayor} = x + 4.$$

Luego:

$$\begin{aligned} x + x + 2 + x + 4 &= 138 \\ 3x &= 132 \\ x &= 44. \end{aligned}$$

Por tanto los lados miden: 44 cm, 46 cm y 48 cm respectivamente.

14) ¿Cuál es la suma de las medidas de los ángulos internos de un pentágono? ¿Cuál es la suma de las medidas de los ángulos externos?

Recuérdese que si un polígono convexo tiene n lados:

La suma de las medidas de los ángulos internos= 2 ángulos rectos $\cdot(n-2) = 180°(n-2)$.

La suma de las medidas de los ángulos externos= 4 ángulos rectos=360°.

Por tanto:

La suma de las medidas de los ángulos internos de un pentágono:

$$180°(5-2) = 180° \cdot 3 = 540°.$$

La suma de las medidas de los ángulos externos de un pentágono: $360°$.

Así las medidas de los ángulos internos de un pentágono suman $540°$ y la de los externos $360°$.

15) El mismo problema anterior para un hexágono.

La suma de las medidas de los ángulos internos de un hexágono:

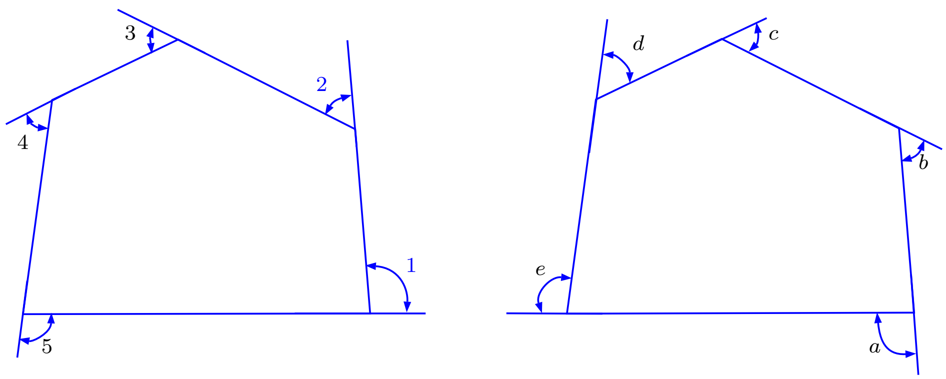
$$180°(6-2) = 180°{\cdot}4 = 720°.$$

La suma de las medidas de los ángulos externos de un hexágono: $360°$.

Es decir que las medidas de los ángulos internos de un hexágono suman $720°$ y las de los ángulos externos es $360°$.

Nota Respecto a los ángulos externos de un polígono.

$P_1 \cong P_2$; obsérvese que los ángulos externos pueden obtenerse de dos maneras diferentes.



16) ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos internos de un pentágono regular?

Se sabe que **un polígono regular es equiángulo y equilátero**, luego:

Medida del ángulo interno de un pentágono regular:

$$\frac{180°{\cdot}(5-2)}{5} = \frac{180°{\cdot}3}{5} = 108°.$$

Esto es cada ángulo interno de un pentágono regular mide $108°$.

17) Calcular la medida de cada ángulo interno y la de cada ángulo externo de un octágono regular.

Medida del ángulo interno de un octógono regular: $\dfrac{180°{\cdot}(8-2)}{8} = \dfrac{180°{\cdot}6}{8} = 135°.$

Medida del ángulo externo de un octógono regular: $\dfrac{360°}{8} = 45°.$

Así el ángulo interno de un octógono regular mide $135°$ y el externo $45°$.

18) El ángulo interno de un polígono regular mide $1\frac{3}{4}$ rectos. Hállese el número de lados del polígono.

Número de lados del polígono : n.

$$1\frac{3}{4} \text{ rectos} = \frac{7}{4}{\cdot}90° = \frac{315°}{2},$$

entonces:

$$\begin{aligned} \frac{180(n-2)}{n} &= \frac{315}{2} \\ 360(n-2) &= 315n \\ 360n - 720 &= 315n \\ 45n &= 720 \\ n &= \frac{720}{45} = 16. \end{aligned}$$

Así el número de lados del polígono es 16.

19) Las medidas del ángulo en el centro del ángulo interno y del ángulo externo de un polígono regular suman $192°$. Dígase el número de lados del polígono.

$$\begin{aligned}
&\text{Número de lados del polígono} : n\\
&\text{Medida del ángulo del centro} : \frac{360°}{n}.\\
&\text{Medida del ángulo interno} : \frac{180°(n-2)}{n}.\\
&\text{Medida del ángulo externo} : \frac{360°}{n}.
\end{aligned}$$

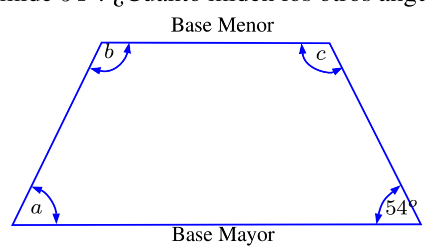
Luego:

$$\begin{aligned}
\frac{360°}{n} + \frac{180°(n-2)}{n} + \frac{360°}{n} &= 192\\
360 + 180(n-2) + 360 &= 192n\\
360 + 180n - 360 + 360 &= 192n\\
-12n &= -360\\
n &= 30.
\end{aligned}$$

Por tanto el número de lados del polígono es 30.

20) Uno de los ángulos internos de un trapecio isósceles mide $54°$. ¿Cuánto miden los otros ángulos internos?

El trapecio isósceles es el que tiene congruentes sus lados no paralelos. En un trapecio isósceles son congruentes los ángulos internos formados en la base mayor y también son congruentes los ángulos internos formados en la base menor.



Por tanto:

$$\begin{aligned}
a &= 54°\\
b = c &= \frac{180°\cdot(4-2) - 2\cdot 54°}{2} = \frac{180°\cdot 2 - 2\cdot 54°}{2} = \frac{2(180° - 54°)}{2}\\
&= 180° - 54° = 126°,
\end{aligned}$$

entonces hay un ángulo que mide $54°$ y dos que miden $126°$ cada uno.

9.1.2 Problemas no resueltos

1. Calcular las medidas de dos ángulos complementarios sabiendo que la medida de uno de ellos es los $\frac{4}{5}$ de la del otro.
2. Hállese el ángulo cuya medida es la mitad de la de su complemento.
3. Calcular dos ángulos complementarios cuyas medidas respectivas difieran en $12°$.
4. Hallar dos ángulos suplementarios sabiendo que la medida de uno es los $\frac{7}{8}$ de la del otro.
5. Calcular dos ángulos suplementarios sabiendo que $\frac{1}{3}$ de la medida de uno es igual a $\frac{1}{2}$ de la medida del otro.

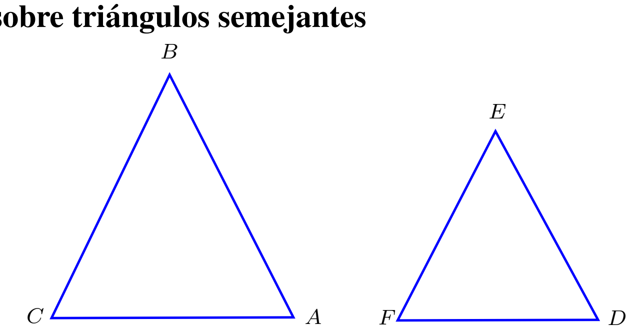
6. Encontrar dos ángulos suplementarios sabiendo que la medida de uno excede en $48°$ a la del otro.
7. Alrededor de un punto de un plano se trazan tres ángulos tales que la medida de uno de ellos es $\frac{1}{2}$ de la suma de las medidas de los otros, las cuales son proporcionales a los números 5 y 7. ¿Cuánto mide cada ángulo?
8. Las medidas de dos de los ángulos internos de un triángulo son respectivamente $56°$ y $64°$. Dígase cuál es la medida del tercero.
9. Uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo mide $27°$. Dígase cuál es la medida del otro ángulo agudo.
10. Dígase cuál es la medida de cada uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, si la medida de uno de ellos es $\frac{1}{5}$ de la del otro.
11. La medida de uno de los ángulos internos de un triángulo es el doble de la del ángulo menor y un tercio de la del ángulo mayor. Hallar la medida de cada uno de los ángulos internos de este triángulo.
12. La medida de cada uno de los ángulos de la base de un triángulo isósceles es los $\frac{2}{5}$ de la del vértice. Calcular la medida de los ángulos de este triángulo.
13. Las medidas de dos de los ángulos internos de un triángulo suman $124°$ y su diferencia es de $8°$. Hállense las medidas de los ángulos internos y de los ángulos externos de este triángulo.
14. Dígase cuánto suman las medidas de los ángulos internos de un icoságono (polígono de 20 lados).
15. ¿En qué polígono la suma de las medidas de los ángulos internos es $5040°$? Si este polígono es regular, dígase cuál es la medida del ángulo interior y cuál es la del ángulo exterior.
16. Calcular el número de lados del polígono en el cual la suma de las medidas de los ángulos internos es:

    a) $4140°$. b) $7020°$.
17. Dígase cuántos lados tiene un polígono regular cuyo ángulo interno mide:

    a) $144°$. b) $165°$. c) $170°$.
18. Hállese el número de lados y la suma de las medidas de los ángulos internos del polígono regular cuyo ángulo externo mide:

    a) $24°$. b) $20°$. c) $5°$.
19. Las medidas de los ángulos internos, externos y central de un polígono regular suman $200°$. Determinar el número de lados del polígono.
20. La suma de las medidas de los ángulos internos y externos de un polígono regular es $1980°$. Dígase cuál es el número de lados de ese polígono y cuál es la medida del ángulo interno y del ángulo externo.

9.2 Problemas sobre triángulos semejantes



$$\Delta ABC \sim \Delta DEF \Longleftrightarrow \begin{cases} \angle A \cong \angle D, \quad \angle B \cong \angle E, \quad \angle C \cong \angle F \\ \dfrac{d(AB)}{d(DE)} = \dfrac{d(BC)}{d(EF)} = \dfrac{d(CA)}{d(FD)}. \end{cases}$$

Casos de semejanza de triángulos:

1) $\angle A \cong \angle D, \angle B \cong \angle E \longrightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$.
2) $\angle A \cong \angle D, \dfrac{d(AB)}{d(DE)} = \dfrac{d(AC)}{d(DF)} \longrightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$.
3) $\dfrac{d(AB)}{d(DE)} = \dfrac{d(BC)}{d(EF)} = \dfrac{d(CA)}{d(FD)} \longrightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$.

9.2.1 Problemas resueltos

1) Los lados de un triángulo miden 8 cm, 12 cm y 16 cm respectivamente. Otro triángulo semejante al anterior tiene por medida de su lado menor 6 cm. ¿Cuánto miden los otros dos lados de este segundo triángulo?

   Sean x, y respectivamente los lados mayor y mediano de este segundo triángulo; por consiguiente:

$$\frac{x}{16} = \frac{6}{8} \qquad \frac{y}{12} = \frac{6}{8}$$
$$8x = 96 \qquad 8y = 72$$
$$x = 12 \qquad y = 9.$$

   Esto es, los otros lados del segundo triángulo miden 12 cm el mayor y 9 cm el mediano.

2) Calcular el perímetro de un triángulo sabiendo que el lado menor mide 8 cm y que es semejante a otro triángulo cuyos lados miden 28 cm, 35 cm y 49 cm.

   Recordar que **los perímetros de dos triángulos semejantes son proporcionales a sus lados homólogos (correspondientes) y a dos rectas homólogas cualesquiera**. Luego, llamando p el perímetro pedido, se tiene:

$$\frac{p}{28+35+49} = \frac{8}{28}$$
$$\frac{p}{112} = \frac{8}{28}$$
$$28p = 896$$
$$p = 32.$$

   Entonces el perímetro pedido mide 32 cm.

3) Las bases de dos triángulos semejantes tienen por medidas 24 cm y 30 cm respectivamente. Calcular la medida de la altura del triángulo menor si la medida de la altura del otro triángulo es 35 cm.

   Los lados homólogos de dos triángulos semejantes son proporcionales a dos rectas homólogas cualesquiera. Luego como las alturas respectivas de dos triángulos semejantes son rectas homólogas, se tiene, llamando x la altura pedida:

$$\frac{x}{35} = \frac{24}{30}$$
$$30x = 840$$
$$x = 28.$$

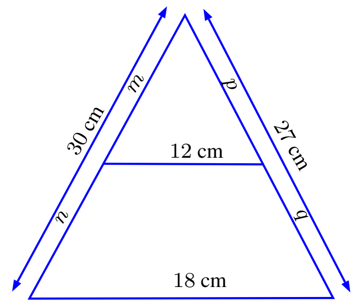
Así la medida de la altura del triángulo menor es 28 cm.

4) Los lados de un triángulo miden 30 cm, 27 cm y 18 cm. Un segmento paralelo al lado de 18 cm y que tiene sus extremos en los otros lados mide 12 cm. Calcular las medidas de los segmentos determinados por el segmento paralelo.

En la figura adjunta puede observarse cómo el segmento paralelo al lado de 18 cm del triángulo propuesto, determina un nuevo triángulo semejante al primero. Así mismo cuáles son los segmentos a calcular.

Se tiene:

$$\frac{m}{30} = \frac{12}{18} \qquad \frac{p}{27} = \frac{12}{18}$$
$$18m = 360 \qquad 18p = 324$$
$$m = 20 \qquad p = 18$$
$$n = 30 - 20 \qquad q = 27 - 18$$
$$n = 10 \qquad q = 9.$$



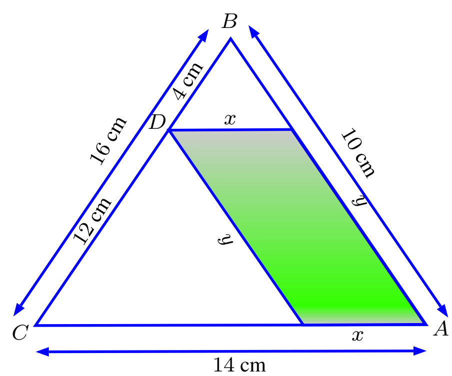
Entonces el segmento paralelo determina segmentos que miden 20 cm y 10 cm sobre el lado de 30 cm; 18 cm y 9 cm sobre el lado de 27 cm.

5) En un triángulo ABC se tiene $AB = 10$ cm, $BC = 16$ cm y $AC = 14$ cm. Se traza por un punto D de $\overline{BC}$, tal que $DB = 4$ cm, paralelas a los otros lados. Calcular el perímetro del paralelogramo obtenido.

En la figura adjunta se ve que:

$$1) \quad \frac{x}{14} = \frac{4}{16} \qquad 2) \quad \frac{y}{10} = \frac{12}{16}$$
$$16x = 56 \qquad 16y = 120$$
$$x = 3.5 \qquad y = 7.5.$$

Por tanto el perímetro del paralelogramo obtenido mide:
$3.5 + 3.5 + 7.5 + 7.5 = 22$ cm

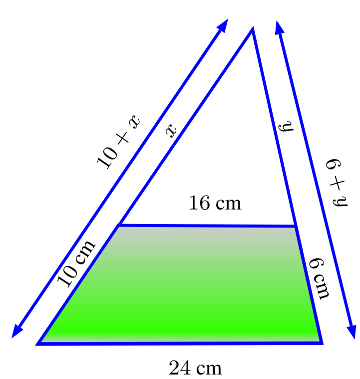


6) Las bases de un trapecio miden respectivamente 24 cm y 16 cm, y los lados no paralelos miden respectivamente 6 cm y 10 cm. Calcular los lados triángulo obtenido prolongando los lados no paralelos del trapecio hasta su intersección.

En la figura adjunta se tiene:

$$\frac{x}{10 + x} = \frac{16}{24} \qquad \frac{y}{6 + y} = \frac{16}{24}$$
$$24x = 160 + 16x \qquad 24y = 96 + 16y$$
$$8x = 160 \qquad 8y = 96$$
$$x = 20 \qquad y = 12.$$

Los lados del triángulo obtenido miden respectivamente 16 cm, 12 cm y 20 cm.



9.2.2 Problemas no resueltos

1. Los lados de un triángulo miden 10 cm, 12 cm y 18 cm respectivamente. El lado menor de otro triángulo semejante al anterior mide 25 cm. Calcular la medida de los otros dos lados de este segundo triángulo.
2. Hállese el perímetro de un triángulo sabiendo que el lado mayor mide 40 cm y que es semejante a otro triángulo cuyos lados miden 15 cm, 24 cm y 30 cm.
3. Las bases de dos triángulos semejantes tienen por medidas respectivas 12 cm y 18 cm. Calcular la medida de la altura del triángulo menor, sabiendo que la medida de la altura del otro triángulo mide 30 cm.
4. Los lados de un triángulo miden respectivamente 30 cm, 36 cm y 12 cm. Calcular las medidas respectivas de los lados de otro triángulo semejante al primero, cuyo perímetro mide 117 cm.
5. Una recta paralela a un lado de un triángulo determina en otro lado del mismo, segmentos cuyas medidas respectivas son 25 cm y 17 cm. Encontrar la medida de los segmentos que determina en el tercer lado que mide 63 cm.
6. Dos lados de un triángulo miden 54 cm y 63 cm, respectivamente; a 36 cm del vértice común se marca un punto sobre el primer lado. Dígase a qué distancia del mismo vértice hay que marcar otro punto sobre el segundo lado, para que el segmento que determinan los dos puntos marcados sea paralelo al tercer lado.
7. Los lados de un triángulo miden respectivamente 30 cm, 42 cm y 48 cm; a 10 cm del vértice común a los dos primeros lados, se marca sobre el primer lado un punto, y por este punto se trazan segmentos a los otros dos lados. Dígase cuál es la medida del perímetro del paralelogramo resultante.
8. Las bases de un trapecio tienen por medidas respectivas 30 cm y 24 cm; su altura mide 18 cm. Dígase cuánto mide la altura de cada uno de los dos triángulos obtenidos prolongando los lados no paralelos del trapecio, hasta su punto de intersección.
9. En un trapecio isósceles sus bases miden respectivamente 18 cm y 30 cm; su altura mide 6 cm. Calcular la medida de la altura del triángulo limitado por la base menor y las prolongaciones de los lados no paralelos.
10. Un poste vertical de 7.5 m de alto proyecta una sombra de 10 m. ¿Cuál es la altura de un árbol que en el mismo instante proyecta una sombra de 28.8 m?

9.3 Problemas sobre relaciones en el triángulo

9.3.1 Relaciones en el triángulo rectángulo

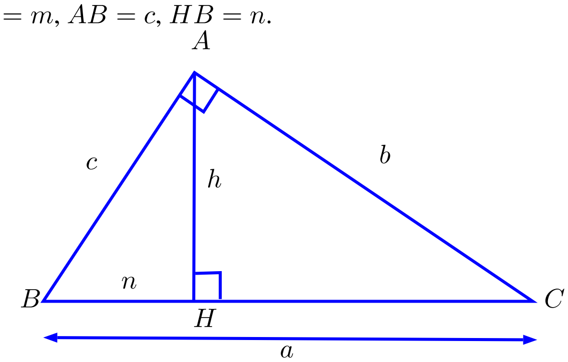
Sea un triángulo ABC, rectángulo en A.
Se define: $BC = a$, $AC = b$, $AH = h$, $HC = m$, $AB = c$, $HB = n$.
De la semejanza de los triángulos HAB y ACB, resulta:

$$\frac{c}{a} = \frac{n}{c}.$$

o sea:

$$\boxed{c^2 = an} \qquad (1)$$

$$\boxed{b^2 = am} \qquad (2)$$



Sumando ordenadamente (1) y (2):

$$b^2 + c^2 = am + an = a(m+n) = a \cdot a = a^2,$$

o sea:

Teorema de Pitágoras

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2.}$$

De la semejanza de los triángulos HAB y HCA, resulta:

$$\frac{h}{m} = \frac{n}{h},$$

o sea:

$$\boxed{h^2 = mn.}$$

Multiplicando ordenadamente (1) y (2):

$$b^2c^2 = am \cdot an = a^2mn = a^2h^2,$$

de donde:

$$\boxed{bc = ah.}$$

9.3.2 Relaciones en triángulos cualesquiera

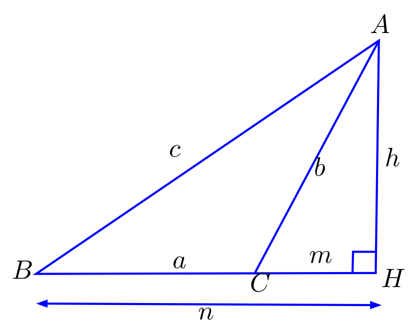
Sea un triángulo ABC en el cual el ángulo en B es agudo y el ángulo en C es obtuso.
Se define $BC = a$, $AC = b$, $AH = h$,
$HC = m$, $AB = c$, $HB = n$.

El lado opuesto a un ángulo agudo es:

$$b^2 = h^2 + m^2 = (c^2 - n^2) + (n-a)^2 = a^2 + c^2 - 2an,$$

es decir:

$$\boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2an.}$$



El lado opuesto del ángulo obtuso es:

$$c^2 = h^2 + n^2 = (b^2 - m^2) + (a+m)^2 = a^2 + b^2 + 2am,$$

es decir:

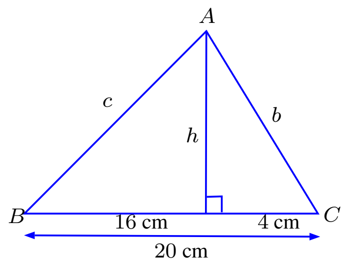
$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 + 2am.}$$

9.3.3 Problemas Resueltos

1. Sea el triángulo ABC rectángulo en A. Si las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa miden respectivamente 4 cm y 16 cm, dígase cuánto miden la altura sobre la hipotenusa y los catetos de ABC.

Altura: $h^2 = 16{\cdot}4 = 64,.$
$$h = \sqrt{64} = 8$$

Catetos: $b^2 = 20{\cdot}4 = 80,$
$$b = \sqrt{80} = 4\sqrt{5},$$
$$c^2 = 20{\cdot}16 = 320,$$
$$c = \sqrt{320} = 8\sqrt{5},$$



entonces la altura mide 8 cm y los catetos $4\sqrt{5}$ cm y $8\sqrt{5}$ cm.

2. Sea el triángulo ABC rectángulo en A. Si la altura sobre la hipotenusa mide 6 cm y las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa difieren en 16 cm, dígase cuánto mide cada una de estas proyecciones.
   Designando una de las proyecciones con x, la otra es $x + 16$, entonces inmediatamente se tiene:
$$\begin{aligned} x(x+16) &= 6^2 \\ x^2 + 16x &= 36 \\ x^2 + 16x - 36 &= 0 \\ (x+18)(x-2) &= 0, \end{aligned}$$
   $x = -18$, $x = 2$, luego las proyecciones miden 2 cm y $(2 + 16 = 18)$ cm.

3. Dadas las respectivas medidas de los catetos de un triángulo rectángulo 20 cm y 15 cm, dígase cuánto miden la hipotenusa y la altura sobre la hipotenusa.
   Llamando a la longitud de la hipotenusa y h la de la altura, de inmediato se tiene:
$$\begin{aligned} &a^2 = 20^2 + 15^2 = 400 + 225 = 625 \longrightarrow a = \sqrt{625} = 25, \\ &25{\cdot}h = 20{\cdot}15 \longrightarrow 25h = 300 \longrightarrow h = 12, \end{aligned}$$
   es decir la hipotenusa mide 25 cm y la altura 12 cm.

4. Dos triángulos rectángulos son semejantes; los catetos de uno de ellos miden 15 cm y 36 cm respectivamente y la hipotenusa del segundo mide 91 cm. Hallar la hipotenusa del primero y los catetos del segundo.
   Se representa por:
   x la hipotenusa del primero,
   y cateto menor del segundo,
   z cateto mayor del segundo, entonces:
   (a) $x^2 = 15^2 + 36^2 = 225 + 1296 = 1521 \longrightarrow x = \sqrt{1521} = 39.$
   (b) $\dfrac{y}{15} = \dfrac{91}{39} \longrightarrow y = \dfrac{15{\cdot}91}{39} \longrightarrow y = 35,$
   $\dfrac{z}{36} = \dfrac{91}{39} \longrightarrow z = \dfrac{36{\cdot}91}{39} \longrightarrow z = 84.$

   Por consiguiente la hipotenusa del primer triángulo rectángulo mide 39 cm y los catetos del segundo 35 cm y 84 cm.

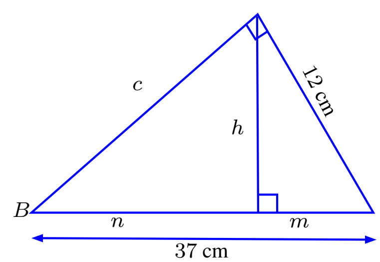
5. En un triángulo rectángulo el perímetro mide 40 cm y uno de los catetos 8 cm. Calcular las longitudes de la hipotenusa y del otro cateto del triángulo dado.
   Puesto que el perímetro mide 40 cm y uno de los catetos mide 8 cm, las medidas de la hipotenusa y del

otro cateto suman 32 cm, entonces, llamando x la medida de la hipotenusa, la de ese otro cateto es $32-x$. Luego, por Pitágoras, se tiene:

$$\begin{aligned} 8^2+(32-x)^2 &= x^2. \\ 64+1024-64x+x^2 &= x^2. \\ -64x &= -1088. \\ x &= 17. \end{aligned}$$

Por consiguiente la hipotenusa mide 17 cm y el cateto pedido $32-17=15$ cm.

6. En un triángulo rectángulo, dadas las medidas de la hipotenusa 37 cm y de un cateto 12 cm, se piden las medidas de la altura sobre la hipotenusa; del otro cateto; de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa. Se tiene:
   (a) $c^2+12^2=37^2$,
   $c^2=37^2-12^2=1369-144=1225$,
   $c=\sqrt{1225}=35$.



   (b) $12^2=37{\cdot}m$,
   $m=\dfrac{12^2}{37}=\dfrac{144}{37}$,
   $35^2=37{\cdot}n$,
   $n=\dfrac{35^2}{37}=\dfrac{1225}{37}$
   (c) $h^2=\dfrac{144}{37}{\cdot}\dfrac{1225}{37}=\dfrac{144{\cdot}1225}{37^2}$,
   $h=\sqrt{\dfrac{144{\cdot}1225}{37^2}}=\dfrac{12{\cdot}35}{37}=\dfrac{420}{37}$, es decir la altura sobre la hipotenusa mide $\dfrac{420}{37}$ cm; el cateto 35 cm y las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa $\dfrac{144}{37}$ cm y $\dfrac{1225}{37}$ cm.

7. Los lados de un triángulo miden respectivamente 10 cm, 17 cm y 21 cm. Si se traza la altura sobre el lado mayor, dígase cuánto mide esa altura y cuánto mide cada uno de los segmentos que la altura determina en dicho lado.

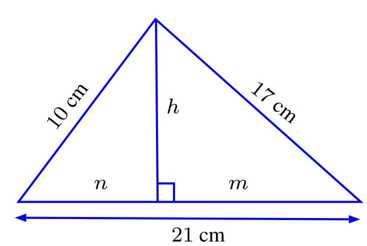
   Nota Debe determinarse previamente si el triángulo dado es o no es rectángulo. Recuérdese que si a, b y c son las menores medidas de los lados de un triángulo tales que $a>b$ y $a>c$, se tiene:

   (a) $a^2=b^2+c^2 \longrightarrow$ al lado a se opone un ángulo recto,
   (b) $a^2<b^2+c^2 \longrightarrow$ al lado a se opone un ángulo agudo,
   (c) $a^2>b^2+c^2 \longrightarrow$ al lado a se opone un ángulo obtuso.

   En el triángulo dado puede hacerse $a=21$ cm, $b=17$ cm y $c=10$ cm; además pueden representarse por h, m y n las medidas de la altura y de los segmentos del lado mayor, respectivamente. Resulta:

   (a) Como $21^2\neq 17^2+10^2$, el triángulo **no es rectángulo**.
   (b) El lado que mide 10 cm se opone a un ángulo agudo, luego:

$$\begin{aligned} 10^2 &= 21^2+17^2-2{\cdot}21{\cdot}m \\ 100 &= 441+289-42m \\ 42m &= 630 \\ m &= 15. \end{aligned}$$



El lado que mide 17 cm se opone también a un ángulo agudo, luego:

$$\begin{aligned} 17^2 &= 21^2 + 10^2 - 2{\cdot}21{\cdot}n \\ 289 &= 441 + 100 - 42n \\ 42n &= 252 \\ n &= 6. \end{aligned}$$

(c) $h^2 + 6^2 = 10^2$
$h^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$
$h = \sqrt{64} = 8.$

La altura mide 8 cm y los segmentos 15 cm y los segmentos del lado mayor 6 cm respectivamente.

8. Los lados de un triángulo tienen las siguientes medidas respectivas 25 cm, 29 cm y 36 cm. Hállese la medida de la altura sobre el lado de 36 cm.

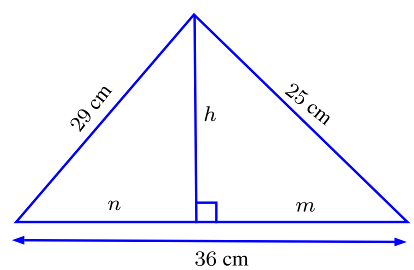
   Nótese que aunque sólo se pida la medida de la altura sobre el tercer lado, este problema es como el anterior. Se procede entonces a calcular:

   1) Si el triángulo es o no es rectángulo.

   2) Uno cualquiera de los segmentos que la altura determina en el tercer lado.

   3) La medida de la altura.

   Resulta:



   (a) Como $36^2 \neq 29^2 + 25^2$, el triángulo dado no es rectángulo.

   (b) $$\begin{aligned} 25^2 &= 36^2 + 29^2 - 2{\cdot}36{\cdot}n \\ 625 &= 1296 + 841 - 72n \\ 72n &= 1512 \\ n &= 21. \end{aligned}$$

   (c) $h^2 + 21^2 = 29^2$
   $h^2 = 29^2 - 21^2 = 841 - 441 = 400$
   $h = \sqrt{400} = 20,$

   entonces la altura del triángulo propuesto sobre el tercer lado mide 20 cm.

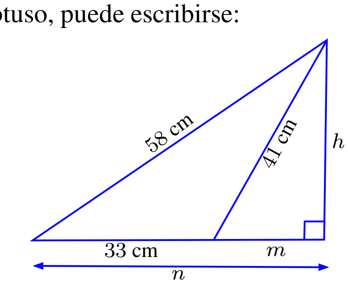
9. Los lados de un triángulo miden respectivamente 58 cm, 41 cm y 33 cm. Calcular las medidas respectivas de la altura sobre el tercer lado y las de los segmentos que la altura determina en el tercer lado.

   Se tiene:

   (a) $58^2 \neq 41^2 + 33^2$ el triángulo no es rectángulo.

   (b) Como el lado que mide 58 cm se opone a un ángulo obtuso, puede escribirse:

$$\begin{aligned} 58^2 &= 33^2 + 41^2 + 2{\cdot}33{\cdot}m \\ 3364 &= 1089 + 1681 + 66m \\ -66m &= -594 \\ m &= 9. \end{aligned}$$



Como el lado que mide 41 cm se opone a un ángulo agudo, puede escribirse:

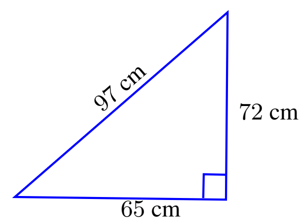
$$\begin{aligned} 41^2 &= 58^2 + 33^2 - 2{\cdot}33{\cdot}n \\ 1681 &= 3364 + 1089 - 66n \\ 66n &= 2772 \\ n &= 42. \end{aligned}$$

(c) $h^2 + 9^2 = 41^2$
$h^2 = 41^2 - 9^2 = 1681 - 81 = 1600$
$h = \sqrt{1600}$
$h = 40.$

Por consiguiente la altura del triángulo propuesto sobre el lado de 33 cm mide 40 cm y los segmentos que la altura determina sobre este lado (proyecciones de los otros dos lados) miden 42 cm y 9 cm.

10. Los lados de un triángulo miden 97 cm, 72 cm y 65 cm. Calcular la altura sobre el lado que mide 65 cm.

Se tiene: $97^2 = 72^2 + 65^2$, entonces el triángulo es rectángulo y la altura es el cateto que mide 72 cm.



11. Los lados de un triángulo miden respectivamente 73 cm, 50 cm y 41 cm. Calcular:

(a) las medidas respectivas de altura y segmentos sobre el lado que mide 41 cm,

(b) las medidas respectivas de altura y segmentos sobre el lado que mide 73 cm.

Se tiene $73^2 \neq 50^2 + 41^2$, entonces el triángulo no rectángulo. Se tiene que $73^2 = 50^2 + 41^2 + 2{\cdot}41{\cdot}m$. De aquí se obtiene $m = 14$. Además:

$$50^2 = 73^2 + 41^2 - 2{\cdot}41{\cdot}n$$

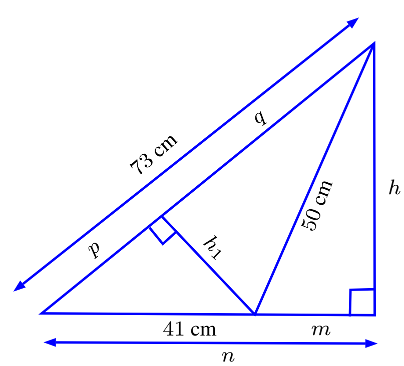
y se obtiene $n = 55$. Dado que:

$$h^2 + m^2 = 50^2,$$

se tiene que $h = 48$. Por otro lado:

$$41^2 = 73^2 + 50^2 - 2{\cdot}73{\cdot}q \longrightarrow q = \frac{3074}{73},$$

$$50^2 = 73^2 + 41^2 - 2{\cdot}73{\cdot}p \longrightarrow p = \frac{2255}{73}.$$



Finalmente, $h_1^2 + \left(\frac{2255}{73}\right)^2 = 41^2 \longrightarrow h_1 = \frac{1968}{73}$, entonces:

(a) La altura sobre el lado menor mide 48 cm y las proyecciones sobre este lado miden 14 cm y 55 cm.

(b) La medida de la altura sobre el lado mayor es $\frac{1968}{73}$ cm y las proyecciones sobre este lado miden $\frac{3074}{73}$ cm y $\frac{2255}{73}$ cm.

9.3.4 Problemas no resueltos

1. Los catetos de un triángulo rectángulo miden respectivamente 7 cm y 24 cm. Calcular lo que miden la hipotenusa, las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa y la altura sobre la hipotenusa.

2. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 5 cm y la altura sobre la hipotenusa 2 cm. Calcular lo que miden los catetos y sus proyecciones sobre la hipotenusa.

3. Un cateto de un triángulo rectángulo mide 15 cm y la altura sobre la hipotenusa 12 cm. Dígase cuánto miden la hipotenusa, el otro cateto y las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.

4. Las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa en un triángulo rectángulo miden 36 cm y 64 cm, respectivamente. Calcular lo que miden la hipotenusa, los catetos y la altura sobre la hipotenusa.

5. Uno de los catetos de un triángulo rectángulo mide 15 cm y su proyección sobre la hipotenusa mide 9 cm. Calcular la medida de la hipotenusa.

6. La suma de las medidas de los catetos de un triángulo rectángulo es 31 cm. Si se aumenta la medida del menor en 8 cm y se disminuye la del mayor en 4 cm, se obtiene otro triángulo rectángulo en el cual la hipotenusa tiene igual medida que la del triángulo primero. Calcular las medidas respectivas de los lados de los dos triángulos rectángulos.

7. Calcular la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo en el cual un cateto mide 12 cm y el perímetro 84 cm.

8. Calcular las medidas de los lados de un triángulo rectángulo, de modo que la medida de la hipotenusa difiera en 3 cm a la de uno de los catetos y en 24 cm a la del otro.

9. Sabiendo que en un triángulo rectángulo la medida de la altura sobre la hipotenusa es 24 cm y la diferencia de las medidas de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa es 14 cm. Calcular las medidas de los lados del triángulo.

10. Calcular la medida de cada uno de los catetos de un triángulo rectángulo sabiendo que la del uno excede en 8 cm a la del otro y que la medida de la hipotenusa es 40 cm.

11. La base de un triángulo isósceles mide 48 cm y cada uno de los lados iguales 51 cm. Calcular la medida de la altura. (Debe recordarse en este problema que en un triángulo isósceles, en particular se llaman: **base**, el lado no congruente; **altura**, la trazada sobre la base. Además que esta altura divide el ángulo del vértice en dos ángulos congruentes y la base en dos segmentos también congruentes).

12. Calcular la medida del lado opuesto a uno de los ángulos agudos de un triángulo sabiendo que los otros dos lados miden 61 cm y 56 cm y la proyección del primero sobre el segundo 11 cm.

13. Calcular la medida del lado opuesto al ángulo obtuso de un triángulo obtusángulo, si los otros dos lados miden 15 cm y 28 cm y la proyección del primero sobre el segundo 12 cm.

14. Los lados de un triángulo miden 89 cm, 82 cm y 57 cm. Calcular la medida de la altura sobre el lado que mide 57 cm, y las medidas de los segmentos que la altura determina sobre este lado.

15. Los lados de un triángulo miden 85 cm, 39 cm y 62 cm. Calcular la medida de la altura: sobre el tercero de los lados y la de cada una de las proyecciones sobre este lado.

16. Los lados de un triángulo miden 51 cm, 52 cm y 53 cm. Calcular la medida de la altura sobre el lado que mide 52 cm.

17. Los lados de un triángulo miden 97 cm, 78 cm y 35 cm. Calcular la medida de la altura sobre el lado que mide 35 cm.

18. Los lados de un triángulo miden 65 cm, 16 cm y 63 cm. Calcular la medida de la altura sobre el lado que mide 16 cm.

19. Cada uno de los lados de un triángulo equilátero mide 10 cm. Calcular la medida de una cualquiera de las alturas.

20. En un triángulo rectángulo isósceles, la base mide 20 cm. Calcular la medida de la altura.

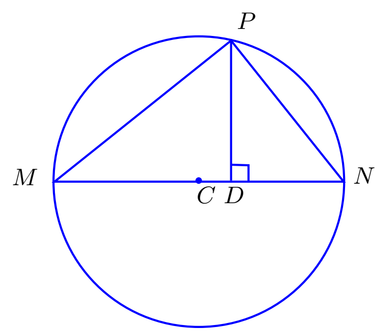
9.3.5 Problemas sobre relaciones en la circunferencia

Deben recordarse los siguientes resultados:

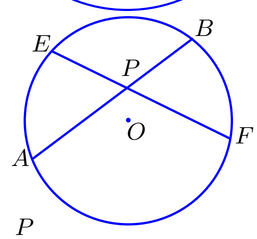
En la figura adjunta: $PD^2 = MD{\cdot}DN$.

Si desde un punto de la circunferencia se traza una perpendicular a un diámetro, esta perpendicular es media proporcional entre los segmentos determinados en el diámetro. También:

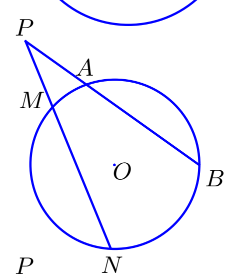
$$MP^2 = MN{\cdot}MD; \quad NP^2 = MN{\cdot}DN.$$



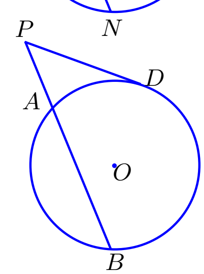
En la figura adjunta: $PA{\cdot}PB = PE{\cdot}PF$.
Si dos cuerdas se cortan en una misma circunferencia, el producto de las longitudes de los segmentos de una de ellas es igual al producto de las longitudes de los segmentos de la otra.



En la figura adjunta: $PB{\cdot}PA = PN{\cdot}PM$.
Si desde un punto exterior a una circunferencia se traza a ésta dos secantes, la longitud de una de ellas por la longitud de su segmento externo es igual a la longitud de la otra secante por la longitud de su segmento externo.



En la figura adjunta: $PD^2 = PB{\cdot}PA$.
Si desde un punto exterior a una circunferencia se trazan a éstas una tangente y una secante, la tangente es media proporcional entre la secante y su segmento externo.

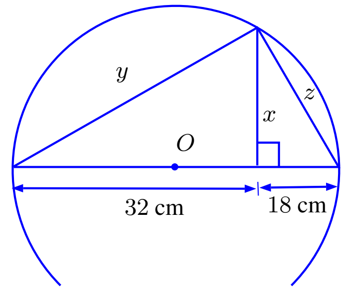


9.3.6 Problemas resueltos

1. Por un punto de una circunferencia se traza un segmento perpendicular a un diámetro. Dígase cuánto mide este segmento si determina en el diámetro segmentos que miden 32 cm y 18 cm. Dígase también cuánto mide cada una de las cuerdas que van del extremo del segmento perpendicular, sobre la circunferencia, a cada uno de los extremos del diámetro.

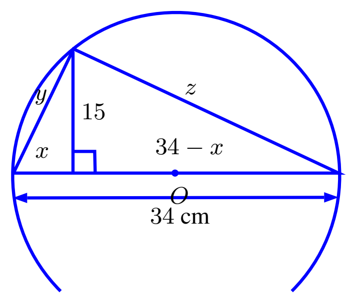
En la figura adjunta: $x^2 = 32{\cdot}18 = 576$,

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{576} = 24 \\ y^2 &= (32+18){\cdot}32 = 50{\cdot}32 = 1600 \\ y &= \sqrt{1600} = 40 \\ z^2 &= (32+18){\cdot}18 = 50{\cdot}18 = 900 \\ z &= \sqrt{900} = 30, \end{aligned}$$



entonces el segmento perpendicular mide 24 cm y las cuerdas 40 cm y 30 cm.

2. La distancia de un punto de una circunferencia a un diámetro de la misma mide 15 cm. Sabiendo que el diámetro mide 34 cm, hállense las medidas respectivas de las cuerdas que van de ese punto a cada uno de los extremos del diámetro.



En la figura adjunta se ve que $15^2 = x(34-x)$.

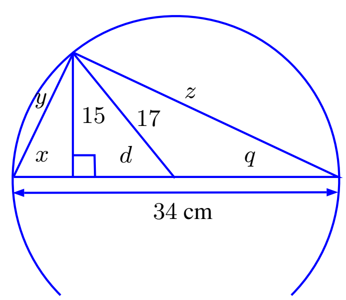
$$34x - x^2 = 225$$
$$x^2 - 34x + 225 = 0$$
$$(x-9)(x-25) = 0 \longrightarrow x_1 = 9, \quad x_2 = 25.$$

Ambas soluciones son admisibles, entonces como en la figura x representa el segmento menor se toma $x = 9$ y $34 - x = 25$. Luego $y^2 = 9{\cdot}34 \longrightarrow y = 3\sqrt{34}$ y $z^2 = 25{\cdot}34 \longrightarrow z = 5\sqrt{34}$.

Así las cuerdas miden $3\sqrt{34}$ cm y $5\sqrt{34}$ cm, o sea aproximadamente 17.49 cm y 29.15 cm.

Nota Obsérvese que este problema puede resolverse con sólo aplicaciones del teorema de Pitágoras.

$$\begin{aligned} d^2 + 15^2 &= 17^2 \\ d^2 = 17^2 - 15^2 &= 289 - 225 = 64 \\ d &= \sqrt{64} = 8 \\ p &= 17 - 8 = 9 \\ q &= 17 + 8 = 25, \end{aligned}$$

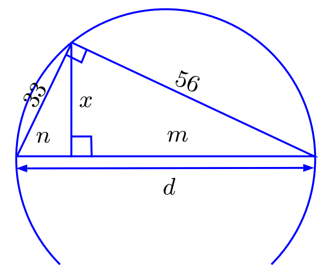


$$y^2 = 15^2 + 9^2 = 225 + 81 = 306 \longrightarrow y = \sqrt{306} = \sqrt{9{\cdot}34} = \boxed{3\sqrt{34}\text{ cm}}$$

$$z^2 = 15^2 + 25^2 = 225 + 625 = 850 \longrightarrow z = \sqrt{850} = \sqrt{25{\cdot}34} = \boxed{5\sqrt{34}\text{ cm.}}$$

3. En una circunferencia, dos cuerdas trazadas de un mismo punto de la circunferencia a los extremos del mismo diámetro miden la una 56 cm y la otra 33 cm. ¿A qué distancia de ese diámetro está dicho punto?

Se tiene la figura adjunta. Recuérdese que un triángulo **inscrito** en una semicircunferencia es rectángulo. Luego:



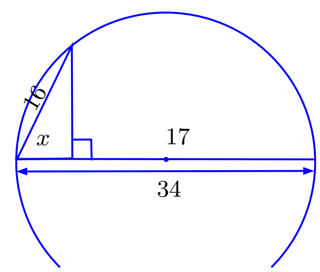
a) $d^2 = 33^2 + 56^2 = 1089 + 3136 = 4225 \longrightarrow$
$d = \sqrt{4225} = 65$.

b) $33^2 = 65{\cdot}n \longrightarrow$ $n = \dfrac{33^2}{65}$ | $56^2 = 65{\cdot}m \longrightarrow$ $m = \dfrac{56^2}{65}$.

c) $x = \dfrac{33^2}{65}{\cdot}\dfrac{56^2}{65} = \dfrac{33^2{\cdot}56^2}{65^2} \longrightarrow x = \sqrt{\dfrac{33^2{\cdot}56^2}{65^2}} = \dfrac{33{\cdot}56}{65} = \dfrac{1848}{65}$, es decir esa distancia es $\dfrac{33{\cdot}56}{65}$ cm, o sea 28.43 cm aproximadamente.

4. En una circunferencia cuyo radio mide 17 cm se traza una cuerda que mide 16 cm por uno de los extremos de un diámetro. Hallar la medida de la proyección de esa cuerda sobre el diámetro.

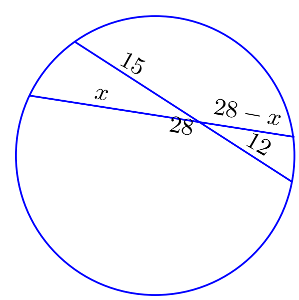
Resulta que $34{\cdot}x = 16^2 = 256 \longrightarrow x = \dfrac{256}{34} = \dfrac{128}{17}$.
La proyección de la cuerda sobre el diámetro mide $\dfrac{128}{17}$ cm.



5. En dos cuerdas que se cortan, los segmentos de la una miden respectivamente 15 cm y 12 cm. Si la otra cuerda mide 28 cm, dígase cuánto mide cada uno de sus segmentos.

Se tiene

$$x(28 - x) = 15{\cdot}12 \longrightarrow$$
$$28x - x^2 = 180 \longrightarrow$$
$$x^2 - 28x + 180 = 0 \longrightarrow$$
$$(x - 18)(x - 10) = 0 \longrightarrow$$
$$x_1 = 18,\ x_2 = 10.$$

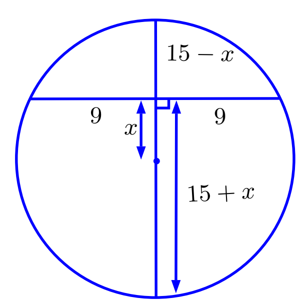


Las dos soluciones son admisibles; se toma según la figura $x = 18$, segmento mayor; $28 - x = 28 - 18 = 10$, segmento menor, entonces los segmentos de la segunda cuerda miden 18 cm y 10 cm.

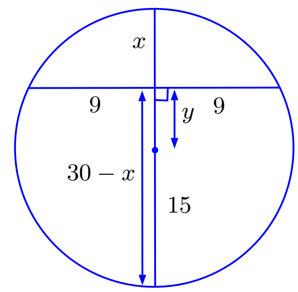
6. ¿A qué distancia del centro de una circunferencia cuyo radio mide 15 cm se encuentra una cuerda que mide 18 cm?

Se tiene $(15 + x)(15 - x) = 9{\cdot}9 \longrightarrow$
$225 - x^2 = 81 \longrightarrow x^2 - 144 = 0 \longrightarrow$
$(x - 12)(x + 12) = 0 \longrightarrow$
$x_1 = 12,\ x_2 = -12$.

Solución admisible $x = 12$, luego la cuerda está a 12 cm del centro de la circunferencia.

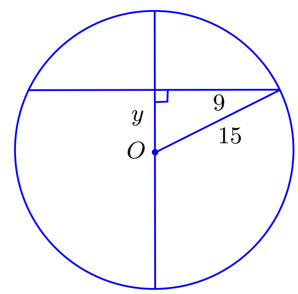


Nota Este problema puede también puede resolverse en las dos formas siguientes.



(a) Distancia $= y$

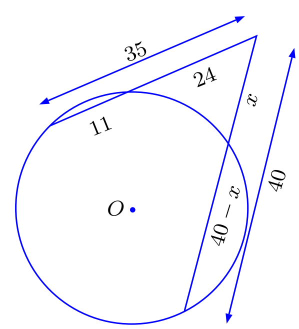
$x(30-x) = 9{\cdot}9 \longrightarrow$
$30x - x^2 = 81 \longrightarrow$
$x^2 - 30x + 81 = 0 \longrightarrow$
$(x-3)(x-27) = 0 \longrightarrow$
$x = 3$, ó $x = 27$.
Las dos soluciones son admisibles; se toma la primera según la figura, entonces $y = 15 - 3 = \boxed{12 \text{ cm}}$.



(b) Distancia $= y$

$y^2 + 9^2 = 15^2 \longrightarrow$
$y^2 = 15^2 - 9^2 = 225 - 81 = 144 \longrightarrow$
$y = \sqrt{144} = 12$,
entonces $\boxed{y = 12 \text{ cm}}$.

7. Desde un punto exterior a una circunferencia se trazan dos secantes: el segmento interno de la primera secante mide 11 cm y el externo 24 cm. Si la segunda secante mide 40 cm, ¿cuánto mide cada uno de sus segmentos?

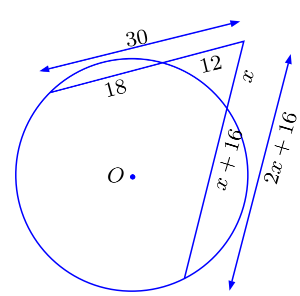


Se tiene:

$$\begin{aligned} 40{\cdot}x &= 35{\cdot}24 \\ 40x &= 840 \\ x &= \frac{840}{40} \\ x &= 21, \end{aligned}$$

entonces los segmentos de la segunda secante miden 21 cm el externo y $40-21 = 19$ cm el interno.

8. Desde un punto exterior a una circunferencia se trazan dos secantes, los segmentos de una de ellas miden 18 cm el interno y 12 cm el externo ¿Cuánto mide la otra secante y sus dos segmentos, si la medida del segmento interno excede en 16 a la del externo?



Se tiene:

$$\begin{aligned} x(2x+16) &= 30{\cdot}12 \\ 2x^2 + 16x &= 360 \\ 2x^2 + 16x - 360 &= 0 \\ x^2 + 8x - 180 &= 0 \\ (x-10)(x+18) &= 0, \end{aligned}$$

$x - 10 = 0$ ó $x + 18 = 0 \longrightarrow x_1 = 10$, $x_2 = -18$.

Sólo es admisible $x = 10$, luego $x = 10$; $x + 16 = 26$; $2x + 16 = 36$. Así, la segunda secante mide 36 cm y sus segmentos 10 cm el externo y 26 cm el interno.

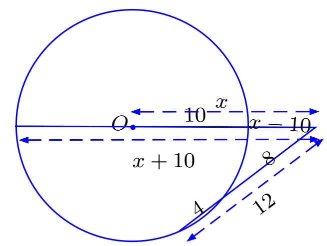
9. ¿A qué distancia del centro de una circunferencia cuyo radio mide 10 cm, se debe trazar una secante de modo que su segmento interno mida 4 cm y su segmento externo 8 cm?

Se tiene: $(x+10)(x-10) = 12{\cdot}8$

$$x^2 - 100 = 96$$
$$x^2 - 196 = 0$$
$$(x+14)(x-14) = 0,$$

$x + 14 = 0$ ó $x - 14 = 0 \longrightarrow$

$x_1 = -14$, $x_2 = 14$.



Sólo es admisible $x = 14$, luego esa secante se debe trazar a 14 cm del centro de la circunferencia dada.

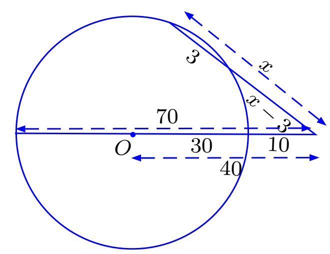
10. Por un punto que dista 40 cm del centro de una circunferencia, cuyo radio mide 30 cm se traza una secante, la cual determina una cuerda que mide 3 cm. Hállese la medida de la secante.

Se tiene: $x(x-3) = 70{\cdot}10$

$$x^2 - 3x = 700$$
$$x^2 - 3x - 700 = 0$$
$$(x-28)(x+25) = 0,$$

$x - 28 = 0$ ó $x + 25 = 0 \longrightarrow$

$x_1 = 28$, $x_2 = -25$.

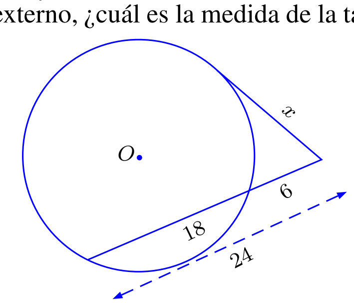


Sólo es admisible $x = 28$. luego la secante mide 28 cm.

11. Por un punto exterior a una circunferencia se trazan una tangente y una secante a dicha circunferencia. Si los segmentos de la secante miden 18 cm el interno y 6 cm el externo, ¿cuál es la medida de la tangente?

Resulta que:

$$x^2 = 6{\cdot}24$$
$$x^2 = 144$$
$$x = \sqrt{144} = 12.$$

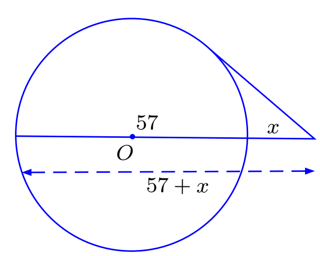


Por tanto la tangente mide 12 cm.

12. El diámetro de una circunferencia mide 57 cm. ¿Qué distancia es necesario prolongar este diámetro, para que la tangente trazada por el extremo de la prolongación mida 38 cm?
Se tiene que:

$$x(57+x) = 38^2$$
$$57x + x^2 = 1444$$
$$x^2 + 57x - 1444 = 0$$
$$(x-19)(x+76) = 0,$$

$x - 19 = 0$ ó $x + 76 = 0 \longrightarrow x_1 = 19$, $x_2 = -76$.



Sólo es admisible $x = 19$, entonces es necesario prolongar el diámetro en 19 cm.

9.3.7 Problemas no resueltos

1. Por un punto de una circunferencia se trazan

   (a) un segmento perpendicular a un diámetro;

(b) dos cuerdas, una a cada uno de los extremos de ese mismo diámetro.

Si ese segmento determina en el diámetro segmentos que miden 48 cm y 12 cm respectivamente, ¿cuánto miden el segmento perpendicular y las cuerdas?

2. La distancia de un punto de una circunferencia a un diámetro de la misma es 28 cm. ¿Cuánto mide cada una de las cuerdas que va de ese punto a cada uno de los extremos del diámetro, si la medida de este es 70 cm?

3. De un mismo punto de una circunferencia se trazan a cada uno de los extremos del mismo diámetro, cuerdas cuyas respectivas medidas son 45 cm y 28 cm. ¿A qué distancia del diámetro está dicho punto?

4. Por un punto de una circunferencia se trazan un diámetro y una cuerda. Si el diámetro mide 30 cm y la cuerda 10 cm, ¿a qué distancia del diámetro está el otro extremo de la cuerda?

5. Dos cuerdas se cortan en un círculo, la longitud de una de ellas es 44 cm y las longitudes de los dos segmentos de la otra son 24 cm y 16 cm. Hallar las longitudes de los dos segmentos de la primera cuerda.

6. En un círculo una cuerda que mide 48 cm está a 7 cm del centro. ¿Cuánto mide el radio del círculo?

7. Dos cuerdas se cortan en un círculo, los segmentos de una de ellas miden 42 cm y 12 cm respectivamente. ¿Cuál es la medida de la otra cuerda y la de cada uno de sus segmentos, si la de uno de ellos excede en 10 cm a la del otro?

8. En un círculo se trazan dos cuerdas, la primera mide 30 cm y la segunda, que divide la primera en dos segmentos iguales, mide 34 cm. Calcular la medida de los segmentos de la segunda.

9. Dos cuerdas se cortan en un círculo, en la primera los segmentos miden 27 cm y 16 cm respectivamente y en la segunda la medida de uno de los segmentos es los $\frac{3}{4}$ de la del otro. ¿Cuál es la medida de esta segunda cuerda?

10. Desde un punto exterior a una circunferencia se trazan a ésta dos secantes, los segmentos de la primera miden 18 cm el interno y 24 cm el externo. Si el segmento interno de la otra secante mide 27 cm, ¿cuánto mide el segmento externo y cuánto la secante entera?

11. Desde un punto exterior a una circunferencia se trazan dos secantes, los segmentos interno y externo de la primera tienen igual medida y los de la segunda miden el interno 7 cm y el externo 18 cm. Hállese la medida de la primera secante.

12. Desde un punto exterior a una circunferencia se trazan a ésta dos secantes, los segmentos de una de ellas miden 13 cm el interno y 15 cm el externo. ¿Cuánto mide la segunda secante si la medida del segmento interno excede en 11 cm a la del externo?

13. ¿A qué distancia del centro de una circunferencia cuyo diámetro mide 12 cm, se debe trazar una secante para que sus segmentos midan 6 cm el interno y 10 cm el externo?

14. Desde un punto exterior a una circunferencia se trazan a ésta una tangente y una secante cuyos segmentos miden 30 cm el interno y 24 cm el externo. Hallar la longitud de la tangente.

15. Desde un punto exterior a una circunferencia se trazan a ésta, una tangente que mide 42 cm y una secante cuyo segmento interno mide 35 cm. ¿Cuánto mide esta secante?

16. El radio de una circunferencia mide 20 cm. Calcular la longitud en que debe prolongarse el diámetro de esta circunferencia, para que la tangente trazada por el extremo de la prolongación mida 15 cm.
17. Se prolonga en una longitud de 4 cm diámetro de una circunferencia y por el extremo de la prolongación se traza una tangente que mide 8 cm. Calcular el radio de la circunferencia.
18. A 29 cm del centro de una circunferencia se traza a ella una tangente cuya medida excede en 1 cm a la del radio de la circunferencia. Calcular la medida de la tangente.
19. Se prolonga el diámetro de una circunferencia en una longitud de 49 cm, y por el extremo de la prolongación se traza una tangente a esa circunferencia. Sabiendo que la medida de la tangente excede en 15 cm al triple de la medida del radio, ¿cuánto miden el radio y la tangente?
20. Se prolonga el diámetro de una circunferencia de modo que la tangente trazada por el extremo de la prolongación tenga una medida doble que la de dicha prolongación. ¿Cuánto mide la tangente?

Respuestas

1) Problemas sobre ángulos

1. $40°$ y $50°$.
2. $30°$.
3. $51°$ y $39°$.
4. $84°$ y $96°$.
5. $108°$ y $72°$.
6. $114°$ y $66°$.
7. $100°$, $120°$ y $140°$.
8. $60°$.
9. $63°$.
10. $15°$ y $75°$.
11. $20°$, $40°$ y $120°$.
12. $40°$, $40°$ y $100°$.
13. $56°$, $58°$ y $66°$ los internos, $124°$, $58°$ y $114°$ los externos.
14. $3240°$.
15. 30 lados; $168°$ ángulo interno; $12°$ ángulo externo.
16. a) 25. b) 41.
17. a) 10. b) 24. c) 36.
18. a) 15, $2340°$. b) 18, $2880°$. c) 72, $12600°$.
19. 18.
20. 11, $\dfrac{1620°}{11}$ y $\dfrac{360°}{11}$.

2) Problemas sobre triángulos semejantes

1. 30 cm y 45 cm.
2. 92 cm.
3. 20 cm.
4. 45 cm, 54 cm y 18 cm.
5. 25.5 cm; 37.5 cm.
6. 42 cm.
7. 88 cm.
8. 72 cm y 90 cm.
9. 9 cm.
10. 21.6 cm.

3) Problemas sobre relaciones en el triángulo

1. 25 cm; $\frac{49}{25}$ cm; $\frac{576}{25}$ cm; $\frac{168}{25}$ cm.
2. $2\sqrt{5}$ cm, $\sqrt{5}$ cm; 4 cm, 1 cm .
3. 25 cm; 20 cm; 9 cm; 16 cm.
4. 100 cm; 80 cm; 60 cm; 48 cm.
5. 25 cm.
6. Catetos 7 cm, 24 cm;
   hipotenusa 25 cm.
   Catetos 15 cm, 20 cm;
   hipotenusa 25 cm.
7. 37 cm.
8. 15 cm, 36 cm y 39 cm.
9. 30 cm, 40 cm y 50 cm.
10. 24 cm y 32 cm.
11. 45 cm.
12. 75 cm.
13. 41 cm.
14. 80 cm; 39 cm y 18 cm.
15. 36 cm; 15 cm y 77 cm.
16. 45 cm.
17. 72 cm.
18. 53 cm.
19. $5\sqrt{3}$ cm.
20. 10 cm.

4) Problemas sobre relaciones en la circunferencia

1. 24 cm; $24\sqrt{5}$ cm; $12\sqrt{5}$ cm.
2. $28\sqrt{5}$ cm y $14\sqrt{5}$ cm.
3. $\frac{1260}{53}$ cm.
4. $\frac{20\sqrt{2}}{3}$ cm.
5. 32 cm; 12 cm.
6. 25 cm.
7. 18 cm y 28 cm.
8. 9 cm y 25 cm.
9. 42 cm.
10. 21 cm y 48 cm.
11. 30 cm.
12. 35 cm.
13. 14 cm.
14. 36 cm.
15. 63 cm.
16. 5 cm.
17. 6 cm.
18. 21 cm.
19. 16 cm; 63 cm.
20. 28 cm.

Capítulo 10

Trigonometría

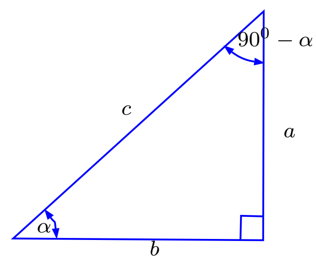
10.1 Trigonometría

Debe recordarse que en un triángulo rectángulo, se tiene:

$$\operatorname{sen}\ \alpha = \frac{a}{c}. \qquad \cot\alpha = \frac{b}{a}.$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}. \qquad \sec\alpha = \frac{c}{b}.$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b}. \qquad \csc\alpha = \frac{c}{a}.$$



Así las medidas respectivas de a y b son 20 y 21 centímetros, se tiene:
$c^2 = 20^2 + 21^2 = 400 + 441 = 841 \longrightarrow c = \sqrt{841} = 29$, entonces:

$$\operatorname{sen}\ \alpha = \frac{20}{29}, \qquad \cot\alpha = \frac{21}{20},$$

$$\cos\alpha = \frac{21}{29}, \qquad \sec\alpha = \frac{29}{21},$$

$$\tan\alpha = \frac{20}{21}, \qquad \csc\alpha = \frac{29}{20}.$$

Puede verse que:

1) $\operatorname{sen}(90° - \alpha) = \cos\alpha, \qquad \cos(90° - \alpha) = \operatorname{sen}\ \alpha,$
$\tan(90° - \alpha) = \cot\alpha, \qquad \cot(90° - \alpha) = \tan\alpha,$
$\sec(90° - \alpha) = \csc\alpha, \qquad \csc(90° - \alpha) = \sec\alpha.$

2) $\dfrac{\operatorname{sen}\ \alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha. \qquad \dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\ \alpha} = \cot\alpha.$

$\csc\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\ \alpha}. \qquad \operatorname{sen}\ \alpha = \dfrac{1}{\csc\alpha}.$

$\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}. \qquad \cos\alpha = \dfrac{1}{\sec\alpha}.$

$\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha}. \qquad \tan\alpha = \dfrac{1}{\cot\alpha}.$

3) $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \qquad \sec^2\alpha - \tan^2\alpha = 1. \qquad \csc^2\alpha - \cot^2\alpha = 1.$

Nota De las igualdades dadas en 2) y 3) se derivan de inmediato otras que se pueden calcular mentalmente.

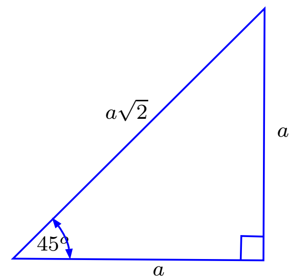
$\operatorname{sen}\ \alpha = \cos\alpha \tan\alpha;$ $\cos\alpha = \operatorname{sen}\ \alpha \cot\alpha;$ $\csc\alpha \operatorname{sen}\ \alpha = 1;$

$\sec\alpha\cos\alpha = 1;$ $\cot\alpha\tan\alpha = 1;$ $\operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha;$

$\cos^2\alpha = 1 - \operatorname{sen}^2\alpha;$ $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha;$ $\sec^2\alpha - 1 = \tan^2\alpha$, etc.

Es posible calcular el valor de cada una de estas razones de ciertos ángulos particulares mediante consideraciones geométricas. Se tiene que:

Para $45°$:



$$\operatorname{sen}\ 45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

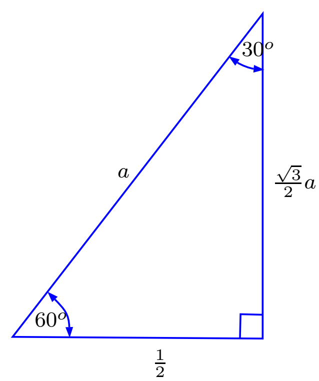
$$\cos 45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\tan 45° = \frac{a}{a} = 1,$$

$$\cot 45° = \frac{a}{a} = 1,$$

$$\sec 45° = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}, \qquad \csc 45° = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}.$$

Para $60°$:



$$\operatorname{sen}\ 60° = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos 60° = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{1}} = \frac{1}{2},$$

$$\tan 60° = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3},$$

$$\cot 60° = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \qquad \sec 60° = \frac{\frac{a}{1}}{\frac{a}{2}} = 2,$$

$$\csc 60° = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Para $30°$:

Puesto que $30° = 90° - 60°$:

$$\operatorname{sen}\ 30° = \cos 60° = \frac{1}{2}, \qquad \cot 30° = \tan 60° = \sqrt{3},$$

$$\cos 30° = \operatorname{sen}\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \sec 30° = \csc 60° = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\tan 30° = \cot 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}, \qquad \csc 30° = \sec 60° = 2.$$

Para otros ángulos agudos, si se desea calcular este tipo de razones, sólo se dispone de los métodos gráficos, los cuales requieren una regla graduada, un transportador, muy buena vista, buen pulso, mucha paciencia, etc. Estas razones o relaciones se llaman aquí **funciones trigonométricas**. No se analizará este concepto, de modo que puede suponerse por ahora que se trata de un nombre solamente.

Las definiciones dadas se refieren a las funciones trigonométricas de los ángulos agudos. Recordemos que estos conceptos se generalizan con las consideraciones siguientes.

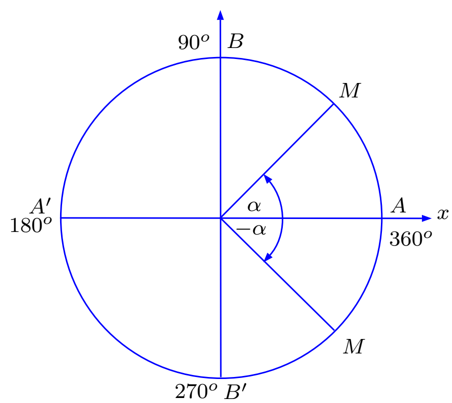
1. **Círculo Trigonométrico**

   Círculo de radio 1 cuyo centro se coloca en el origen de un sistema de ejes coordenados rectangulares.

2. **Ángulos positivos y ángulos negativos de cualquier magnitud**

   Los ángulos se miden a partir del radio que está sobre la parte positiva del eje x. Se dice que son positivos si se miden en sentido opuesto al del movimiento de las agujas del reloj y negativos si se miden en el mismo sentido.

   En cualquier sentido en que se tome, un ángulo representa la magnitud del giro que el radio recorre al pasar de su posición inicial, parte positiva del eje x a su posición final. Además como el radio puede dar cualquier número de vueltas completas antes de llegar a su posición final, puede notarse que en trigonometría se consideran ángulos de cualquier magnitud.



3. **Unidades de medida para los ángulos**

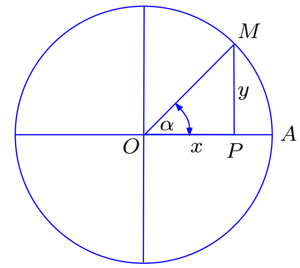
   Grado ángulo central cuyos lados interceptan un arco igual a $\dfrac{1}{360}$ de la circunferencia.

   Radián ángulo central cuyos lados interceptan un arco que tiene una longitud igual a la medida del radio del círculo.

   Estas dos unidades pueden relacionarse. Para ello téngase en cuenta que hay $360°$ en la circunferencia y que el radio se puede llevar 2π veces a lo largo de la circunferencia; por lo tanto una circunferencia abarca un ángulo central de 2π radianes. Luego 2π radianes$= 360°$ o bien simplificado π radianes$= 180°$.

   Esta relación permite pasar de radianes a grados y de grados a radianes.

4. **Funciones trigonométricas de un ángulo cualquiera**



   Sea $M(x, y)$ un punto de la circunferencia del círculo trigonométrico y sea α la medida del ángulo formado por la parte positiva del eje x y el radio OM. Se define:

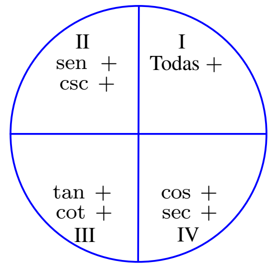
   $\cos\alpha = x$ (abscisa de M),

   $\text{sen }\alpha = y$ (ordenada de M),

   $\tan\alpha = \dfrac{\text{sen }\alpha}{\cos\alpha}$, $(\cos\alpha \neq 0)$, $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\text{sen }\alpha}$, $(\text{sen }\alpha \neq 0)$,

   $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$, $(\cos\alpha \neq 0)$, $\csc\alpha = \dfrac{1}{\text{sen }\alpha}$, $(\text{sen }\alpha \neq 0)$.

Dado que la abscisa y la ordenada de un punto pueden ser positivas o negativas, según el cuadrante, se tiene:



Un ángulo cuyo lado terminal coincide con algunos de los ejes coordenados se llama **ángulo cuadrantal**.

Los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos cuadrantales son:

α	sen α	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	cot α	sec α	csc α
$0°$	0	1	0	no def.	1	no def.
$90°$	1	0	no def.	0	no def.	1
$180°$	0	-1	0	no def.	-1	no def.
$270°$	-1	0	no def.	0	no def.	-1
$360°$	0	1	0	no def.	1	no def.

Debe observarse que un incremento de $360°$ en la medida de un ángulo deja sin cambio la posición del radio final; por tanto los valores de x, y no varían. Luego

$$\cos(\alpha + n{\cdot}360°) = \cos\alpha \quad \text{y} \quad \text{sen}\,(\alpha + n{\cdot}360°) = \text{sen}\ \alpha, \quad \text{con}\ \ n \in \mathbb{Z}.$$

Puede verse que también que la figura adjunta es simétrica respecto al eje x y simétrica también respecto al eje y. Por lo tanto:

$\text{sen}\,(180° - \alpha) = \text{sen}\,(\alpha)$

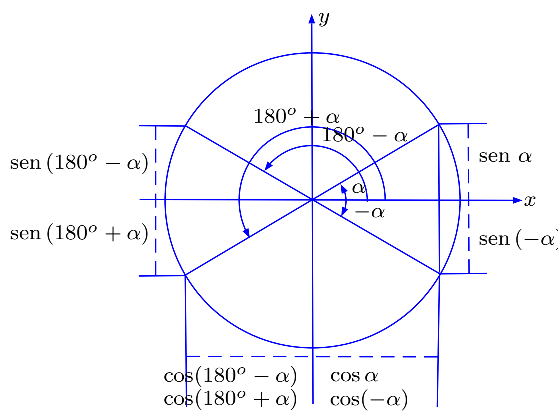
$\text{sen}\,(180° + \alpha) = -\,\text{sen}\ \alpha$

$\text{sen}\,(-\alpha) = -\,\text{sen}\ \alpha$

$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$

$\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha.$



Para las demás funciones se aplican las definiciones correspondientes. Por ejemplo:

$$\sec(180° - \alpha) = \frac{1}{\cos(180° - \alpha)} = \frac{1}{-\cos\alpha} = -\frac{1}{\cos\alpha} = -\sec\alpha.$$

$$\tan(180° + \alpha) = \frac{\text{sen}\,(180° + \alpha)}{\cos(180° + \alpha)} = \frac{-\,\text{sen}\ \alpha}{-\cos\alpha} = +\frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha.$$

$$\csc(-\alpha) = \frac{1}{\text{sen}\,(-\alpha)} = \frac{1}{-\,\text{sen}\ \alpha} = -\frac{1}{\text{sen}\ \alpha} = -\csc\alpha.$$

Estas relaciones permiten expresar los valores de las funciones trigonométricas de ángulos de los cuadrantes II, III y IV por medio de los valores de las funciones trigonométricas de ángulos del primer cuadrante.

Ejemplos Calcular sen $210°$.

Se tiene sucesivamente: $\text{sen}\ 210° = \text{sen}\,(180° + 30°) = -\,\text{sen}\ 30° = -\frac{1}{2}.$

Calcular $\tan 240°$.

$\tan 240° = \dfrac{\text{sen } 240°}{\cos 240°} = \dfrac{\text{sen}\,(180° + 60°)}{\cos(180° + 60°)} = \dfrac{-\text{ sen } 60°}{-\cos 60°} = \dfrac{\frac{-\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$

Calcular $\cot(-30°)$.

$\cot(-30°) = \dfrac{\cos(-30°)}{\text{sen}\,(-30°)} = \dfrac{\cos 30°}{-\text{ sen } 30°} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}.$

Calcular $\cos 720°$.

$\cos 720° = \cos 2(360°) = \cos 360° = 1.$

Calcular $\sec 120°$.

$\sec 120° = \dfrac{1}{\cos 120°} = \dfrac{1}{(\cos 180° - 60°)} = \dfrac{1}{-\cos 60°} = \dfrac{1}{-\frac{1}{2}} = -2.$

Calcular sen $13470°$.

$\text{sen } 13470° = \text{sen } (150° + 37{\cdot}360°) = \text{sen } 150° = \text{sen } (180° - 30°) = \text{sen } 30° = \dfrac{1}{2}.$

10.2 Ejercicios resueltos 1

Probar las identidades siguientes:

1. $\dfrac{\text{sen } \alpha \cot^2 \alpha}{\cos \alpha} = \dfrac{1}{\tan \alpha}.$

   $\dfrac{\text{sen } \alpha \cot^2 \alpha}{\cos \alpha} = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}{\cdot}\dfrac{1}{\tan^2 \alpha} = \tan \alpha{\cdot}\dfrac{1}{\tan^2 \alpha} = \dfrac{1}{\tan \alpha}.$

2. $\cot \alpha \sec \alpha \,\text{sen } \alpha = 1.$

   $\cot \alpha \sec \alpha \,\text{sen } \alpha = \dfrac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha}{\cdot}\dfrac{1}{\cos \alpha}{\cdot}\,\text{sen } \alpha = 1.$

3. $\dfrac{\sec^2 \alpha \cot \alpha}{\csc^2 \alpha} = \tan \alpha.$

   $\dfrac{\sec^2 \alpha \cot \alpha}{\csc^2 \alpha} = \dfrac{\frac{1}{\cos^2 \alpha}{\cdot}\dfrac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha}}{\dfrac{1}{\text{sen}^{2} \alpha}} = \dfrac{\cos \alpha \,\text{sen}^{2} \alpha}{\cos^2 \alpha \,\text{sen } \alpha} = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha.$

4. $\sec^2 \alpha \csc^2 \alpha = \sec^2 \alpha + \csc^2 \alpha.$

   Tomando ahora el segundo miembro:

   $\sec^2 \alpha + \csc^2 \alpha = \dfrac{1}{\cos^2 \alpha} + \dfrac{1}{\text{sen}^{2} \alpha} = \dfrac{\text{sen}^{2} \alpha + \cos^2 \alpha}{\text{sen}^{2} \alpha \cos^2 \alpha} = \dfrac{1}{\text{sen}^{2} \alpha \cos^2 \alpha} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\csc^2 \alpha}{\cdot}\dfrac{1}{\sec^2 \alpha}} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\sec^2 \alpha \csc^2 \alpha}} =$

   $\sec^2 \alpha \csc^2 \alpha.$

5. $2\cot^2 \alpha + \cot^4 \alpha = \csc^4 \alpha - 1.$

   $\csc^4 - 1 = (\csc^2 \alpha + 1)(\csc^2 \alpha - 1) = (\cot^2 \alpha + 1 + 1)\cot^2 \alpha =$

   $(\cot^2 \alpha + 2)\cot^2 \alpha = \cot^4 \alpha + 2\cot^2 \alpha = 2\cot^2 \alpha + \cot^4 \alpha.$

6. $\cos \theta = \sec \theta - \tan \theta \,\text{sen } \theta.$

   $\sec \theta - \tan \theta \,\text{sen } \theta = \dfrac{1}{\cos \theta} - \dfrac{\text{sen } \theta}{\cos \theta}{\cdot}\,\text{sen } \theta = \dfrac{1}{\cos \theta} - \dfrac{\text{sen}^{2} \theta}{\cos \theta} = \dfrac{1 - \text{sen}^{2} \theta}{\cos \theta} = \dfrac{\cos^2 \theta}{\cos \theta} = \cos \theta.$

   En las identidades 1, 2 y 3 el primer miembro se transformó en el segundo; en las identidades 4, 5 y 6 el segundo miembro se transformó en el primero. También es posible probar una identidad, reduciendo por aparte cada uno de los miembros a una misma forma.

7. $\operatorname{sen} A(1+\tan A)+\cos A(1+\cot A)=\sec A+\csc A.$

   Primer miembro:

   $\operatorname{sen} A(1+\tan A)+\cos A(1+\cot A)=$

   $\operatorname{sen} A\left(1+\dfrac{\operatorname{sen} A}{\cos A}\right)+\cos A\left(1+\dfrac{\cos A}{\operatorname{sen} A}\right)=$

   $\operatorname{sen} A+\dfrac{\operatorname{sen}^2 A}{\cos A}+\cos A+\dfrac{\cos^2 A}{\operatorname{sen} A}=$

   $\dfrac{\operatorname{sen}^2 A\cos A+\operatorname{sen}^3 A+\operatorname{sen} A\cos^2 A+\cos^3 A}{\cos A\operatorname{sen} A}=$

   $\dfrac{\operatorname{sen}^2 A(\cos A+\operatorname{sen} A)+\cos^2 A(\operatorname{sen} A+\cos A)}{\cos A\operatorname{sen} A}=$

   $\dfrac{(\operatorname{sen} A+\cos A)(\operatorname{sen}^2 A+\cos^2 A)}{\cos A\operatorname{sen} A}=\dfrac{\operatorname{sen} A+\cos A}{\cos A\operatorname{sen} A}.$

   Segundo miembro:

   $\sec A+\csc A=\dfrac{1}{\cos A}+\dfrac{1}{\operatorname{sen} A}=\dfrac{\operatorname{sen} A+\cos A}{\cos A\operatorname{sen} A}.$

8. $\dfrac{\operatorname{sen}(180^\circ-A)}{-\tan(90^\circ-A)}\cdot\dfrac{\cos(-A)}{\tan(180^\circ+A)}\cdot\dfrac{\cot(90^\circ-A)}{\operatorname{sen}(-A)}=\operatorname{sen} A.$

   $\dfrac{\operatorname{sen} A}{-\cot A}\cdot\dfrac{\cos A}{\tan A}\cdot\dfrac{\tan A}{-\operatorname{sen} A}=\dfrac{\operatorname{sen} A\cos A\tan A}{\cot A\tan A\operatorname{sen} A}=\dfrac{\cos A}{\cot A}=\dfrac{\cos A}{\dfrac{\cos A}{\operatorname{sen} A}}=$

   $\dfrac{\cos A\operatorname{sen} A}{\cos A}=\operatorname{sen} A.$

9. $\cos^2(90^\circ-\alpha)-\operatorname{sen}(180^\circ-\alpha)\operatorname{sen}(-\alpha)=2\operatorname{sen}^2\alpha.$

   $\operatorname{sen}^2\alpha-(\operatorname{sen}\alpha\cdot(-\operatorname{sen}\alpha))\operatorname{sen}^2\alpha-(-\operatorname{sen}^2\alpha)=\operatorname{sen}^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha=2\operatorname{sen}^2\alpha.$

Deben recordarse también las fórmulas que se presentan a continuación.

1. **Fórmulas Trigonométricas de la suma y la diferencia de dos ángulos**

   $\operatorname{sen}(\alpha\pm\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\operatorname{sen}\beta.$

   $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta.$

   $\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}.$

   $\cot(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cot\beta\mp1}{\cot\beta\pm\cot\alpha}.$

2. **Fórmulas Trigonométricas del ángulo doble**

   $\operatorname{sen} 2\alpha=2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha.$

   $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha.$

   $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}.$

   $\cot 2\alpha=\dfrac{\cot^2\alpha-1}{2\cot\alpha}.$

3. **Fórmulas Trigonométricas del ángulo medio**

   $\left|\operatorname{sen}\dfrac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}.$

   $\left|\cos\dfrac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}.$

   $\left|\tan\dfrac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.$

   $\left|\cot\dfrac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}.$

10.3 Ejercicios resueltos 2

(a) Calcular el valor de $\cos 15°$.

$\cos 15° = \cos(60° - 45°) = \cos 60° \cdot \cos 45° + \text{sen } 60° \cdot \text{sen } 45° = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

(b) Calcular el valor de $\text{sen } 75°$.

$\text{sen } 75° = \text{sen }(45° + 30°) = \text{sen } 45° \cdot \cos 30° + \cos 45° \cdot \text{sen } 30° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

¿Porqué estos resultados son iguales?

(c) Dados $\text{sen } \alpha = \frac{4}{5}$, donde α es un ángulo del primer cuadrante y $\cos \beta = -\frac{12}{13}$, donde β es un ángulo del segundo cuadrante.

Calcular $\text{sen }(\alpha + \beta), \tan(\alpha + \beta)$ y a qué cuadrante pertenece $\alpha + \beta$.

$\text{sen }(\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \cos \beta + \cos \alpha \,\text{sen } \beta$.

Se necesita calcular $\cos \alpha$ y $\text{sen } \beta$.

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$
$$\frac{16}{25} + \cos^2 \alpha = 1,$$
$$\cos^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25},$$
$$\cos^2 \alpha = \frac{9}{25},$$
$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{9}{25}},$$
$$\cos \alpha = \frac{3}{5}.$$

Como α es del primer cuadrante $\cos \alpha$ es positivo.

$$\text{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta = 1,$$
$$\text{sen}^2 \beta + \frac{144}{169} = 1,$$
$$\text{sen}^2 \beta = 1 - \frac{144}{169},$$
$$\text{sen}^2 \beta = \frac{25}{169},$$
$$\text{sen } \beta = \sqrt{\frac{25}{169}},$$
$$\text{sen } \beta = \frac{5}{13}.$$

Como β es del segundo cuadrante $\text{sen } \beta$ es positivo.

$\text{sen }(\alpha + \beta) = \frac{4}{5}\left(-\frac{12}{13}\right) + \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{13} = -\frac{48}{65} + \frac{15}{65} = -\frac{33}{65}$.

$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$.

Se necesita calcular $\tan \alpha$ y $\tan \beta$.

$$\tan \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

$$\tan\beta = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta} = \frac{\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}} = -\frac{5}{12}$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\frac{4}{3}+\left(-\frac{5}{12}\right)}{1-\frac{4}{3}\left(-\frac{5}{12}\right)} = \frac{\frac{4}{3}-\frac{5}{12}}{1+\frac{20}{36}} = \frac{\frac{16-5}{12}}{\frac{36+20}{36}} = \frac{\frac{11}{12}}{\frac{56}{36}} = \frac{11{\cdot}36}{12{\cdot}56} = \frac{11{\cdot}3}{56} = \frac{33}{56}.$$

Dado que $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$ es negativo y $\tan(\alpha+\beta)$ es positivo, $\alpha+\beta$ pertenece al tercer cuadrante.

(d) Calcular $\operatorname{sen}\frac{45°}{2}$ y $\cos\frac{45°}{2}$.

$$\operatorname{sen}\frac{45°}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos 45°}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

$$\cos\frac{45°}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos 45°}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

Nota Si se conoce el valor de $\frac{\alpha}{2}$ el signo del valor absoluto se elimina y el valor de la función de $\frac{\alpha}{2}$ se toma con $+$ ó $-$ según el cuadrante en que quede dicho ángulo.

(e) Dado $\operatorname{sen}\alpha = \frac{4}{5}$, α agudo, calcular $\operatorname{sen}2\alpha$, $\cos 2\alpha$ y $\tan 2\alpha$.

$\operatorname{sen}2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$.

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$. Se necesita calcular previamente $\cos\alpha$.

Se tiene:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad \cos^2\alpha = \frac{9}{25}$$

$$\frac{16}{25} + \cos^2\alpha = 1 \qquad \cos\alpha = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

$$\operatorname{sen}2\alpha = 2{\cdot}\frac{4}{5}{\cdot}\frac{3}{5} = \frac{24}{25} \qquad \tan 2\alpha = \frac{\frac{24}{25}}{-\frac{7}{25}} = -\frac{24}{7}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}.$$

Nota Cuando en la medida de un ángulo no se da la unidad, se sobrentiende **radianes**. Así cuando se dice que un ángulo mide 4, $0,75$, $\frac{\pi}{3}$, etc, se sobrentiende "cuatro radianes", "setenta y cinco centésimos de radián", "un tercio de π radianes", etc.

10.3.1 Ejercicios resueltos

1. Expresar en grados: $\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}, -\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{3}$.

   Respuesta

$$\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{4}{\cdot}180° = 45°.$$

$$-\frac{\pi}{6} = \frac{180°}{6} = -30°.$$

$$\frac{3}{4}\pi = \frac{3}{4}{\cdot}180° = 135°.$$

$$-\frac{3}{2}\pi = -\frac{3{\cdot}180°}{2} = -270°.$$

$$\frac{7}{3}\pi = \frac{7}{3}{\cdot}180° = 420°.$$

2. Probar la identidad siguiente.

(a) $\dfrac{\cos x \cot x}{\cot x - \cos x} = \dfrac{\cot x + \cos x}{\cos x \cot x}$.

Primer miembro:

$$\frac{\cos x \cdot \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - \cos x} = \frac{\dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x}}{\dfrac{\cos x - \cos x \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}} = \frac{\cos^2 x}{\cos x - \cos x \operatorname{sen} x} =$$

$$\frac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{\cos x(1 - \operatorname{sen} x)} = \frac{(1 + \operatorname{sen} x)(1 - \operatorname{sen} x)}{\cos x(1 - \operatorname{sen} x)} = \frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x}.$$

Segundo miembro:

$$\frac{\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} + \cos x}{\cos x \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} = \frac{\dfrac{\cos x + \cos x \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}}{\dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x}} = \frac{\cos x + \cos x \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} =$$

$$\frac{\cos x(1 + \operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x}.$$

(b) $\dfrac{1 + \sec x}{\operatorname{sen} x + \tan x} = \csc x$.

$$\frac{1 + \dfrac{1}{\cos x}}{\operatorname{sen} x + \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} = \frac{\dfrac{\cos x + 1}{\cos x}}{\dfrac{\cos x \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x}{\cos x}} = \frac{\cos x + 1}{\operatorname{sen} x(\cos x + 1)} = \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \csc x.$$

(c) $\dfrac{1 + \cos t}{\operatorname{sen} t} + \dfrac{\operatorname{sen} t}{1 + \cos t} = 2 \csc t$.

$$\frac{(1 + \cos t)^2 + \operatorname{sen}^2 t}{\operatorname{sen} t(1 + \cos t)} = \frac{1 + 2\cos t + \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}{\operatorname{sen} t(1 + \cos t)} =$$

$$\frac{1 + 2\cos t + 1}{\operatorname{sen} t(1 + \cos t)} = \frac{2 + 2\cos t}{\operatorname{sen} t(1 + \cos t)} = \frac{2(1 + \cos t)}{\operatorname{sen} t(1 + \cos t)} = \frac{2}{\operatorname{sen} t} = 2 \csc t.$$

(d) $\dfrac{\sec^2 u - 1}{\sec^2 u} = \operatorname{sen}^2 u$.

$$\frac{\sec^2 u - 1}{\sec^2 u} = 1 - \frac{1}{\sec^2 u} = 1 - \cos^2 u = \operatorname{sen}^2 u.$$

(e) $\dfrac{\operatorname{sen} A}{1 - \cos A} = \cot A + \csc A$.

$$\frac{\operatorname{sen} A}{1 - \cos A} = \frac{\operatorname{sen} A(1 + \cos A)}{(1 - \cos A)(1 + \cos A)} = \frac{\operatorname{sen} A(1 + \cos A)}{1 - \cos^2 A} =$$

$$\frac{\operatorname{sen} A(1 + \cos A)}{\operatorname{sen}^2 A} = \frac{1 + \cos A}{\operatorname{sen} A} = \frac{1}{\operatorname{sen} A} + \frac{\cos A}{\operatorname{sen} A} = \csc A + \cot A = \cot A + \csc A.$$

(f) $\dfrac{\cot x}{\csc x + 1} = \dfrac{\csc x - 1}{\cot x}$.

$$\frac{\cot x}{\csc x + 1} = \frac{\cot x(\csc x - 1)}{(\csc x + 1)(\csc x - 1)} = \frac{\cot x(\csc x - 1)}{\csc^2 x - 1} =$$

$$\frac{\cot x(\csc x - 1)}{\cot^2 x} = \frac{\csc x - 1}{\cot x}.$$

Nota Observar el artificio empleado en la prueba de las identidades (e) y (f) que recuerda la racionalización de un denominador binomio irracional.

(g) $\sec^2 x - \tan^2 x = 1$.

$\dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1 - \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 1.$

(h) $\cot 2A + \tan A = \csc 2A$.

$\cot 2A + \tan A = \dfrac{\cos 2A}{\text{sen } 2A} + \dfrac{\text{sen } A}{\cos A} = \dfrac{\cos 2A \cos A + \text{sen } 2A \,\text{sen } A}{\text{sen } 2A \cos A} = \dfrac{\cos(2A - A)}{\text{sen } 2A \cos A} = \dfrac{\cos A}{\text{sen } 2A \cos A} =$
$\dfrac{1}{\text{sen } 2A} = \csc 2A.$

(i) $\cos 4\theta \cos\theta + \text{sen } 4\theta \,\text{sen } \theta = \cos 2\theta \cos\theta - \text{sen } 2\theta \,\text{sen } \theta$.

$\cos 4\theta \cos\theta + \text{sen } 4\theta \,\text{sen } \theta = \cos(4\theta - \theta) = \cos 3\theta = \cos(2\theta + \theta) =$
$\cos 2\theta \cos\theta - \text{sen } 2\theta \,\text{sen } \theta.$

(j) $\dfrac{1}{\tan 3A - \tan A} - \dfrac{1}{\cot 3A - \cot A} = \cot 2A.$

$\dfrac{1}{\dfrac{1}{\cot 3A} - \dfrac{1}{\cot A}} - \dfrac{1}{\cot 3A - \cot A} =$

$\dfrac{1}{\dfrac{\cot A - \cot 3A}{\cot 3A \cot A}} - \dfrac{1}{\cot 3A - \cot A} =$

$\dfrac{\cot 3A \cot A}{\cot A - \cot 3A} - \dfrac{1}{\cot 3A - \cot A} =$

$\dfrac{\cot 3A \cot A + 1}{\cot A - \cot 3A} = \dfrac{1 + \cot 3A \cot A}{\cot A - \cot 3A} = \cot(3A - A) = \cot 2A.$

Nota Se aplicó la fórmula $\cot(\alpha \pm \beta) = \dfrac{1 \mp \cot\alpha \cot\beta}{\cot\beta \pm \cot\alpha}$, para el caso de la diferencia con $\alpha = 3A$ y $\beta = A$.

(k) $\dfrac{\text{sen }(\alpha+\beta) + \text{sen }(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)} = \tan\alpha.$

$\dfrac{\text{sen } \alpha \cos\beta + \cos\alpha \,\text{sen } \beta + \text{sen } \alpha \cos\beta - \cos\alpha \,\text{sen } \beta}{\cos\alpha \cos\beta - \text{sen } \alpha \,\text{sen } \beta + \cos\alpha \cos\beta + \text{sen } \alpha \,\text{sen } \beta} =$

$\dfrac{2 \,\text{sen } \alpha \cos\beta}{2 \cos\alpha \cos\beta} = \dfrac{\text{sen } \alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha.$

(l) $\dfrac{\text{sen }(x+y)}{\text{sen }(x-y)} = \dfrac{\tan x + \tan y}{\tan x - \tan y}.$

$\dfrac{\text{sen } x \cos y + \cos x \,\text{sen } y}{\text{sen } x \cos y - \cos x \,\text{sen } y} = \dfrac{\dfrac{\text{sen } x \cos y + \cos x \,\text{sen } y}{\cos x \cos y}}{\dfrac{\text{sen } x \cos y - \cos x \,\text{sen } y}{\cos x \cos y}} =$

$\dfrac{\dfrac{\text{sen } x}{\cos x} + \dfrac{\text{sen } y}{\cos y}}{\dfrac{\text{sen } x}{\cos x} - \dfrac{\text{sen } y}{\cos y}} = \dfrac{\tan x + \tan y}{\tan x - \tan y}.$

(m) $\tan(45° + \theta) = \dfrac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta}.$

$\tan(45° + \theta) = \dfrac{\tan 45° + \tan\theta}{1 - \tan 45° \tan\theta} = \dfrac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta}.$

(n) $\dfrac{\text{sen } 6x}{\text{sen } 2x} - \dfrac{\cos 6x}{\cos 2x} = 2.$

$$\frac{\operatorname{sen}\,6x\cos 2x-\cos 6x\operatorname{sen}\,2x}{\operatorname{sen}\,2x\cos 2x}=\frac{\operatorname{sen}\,(6x-2x)}{\operatorname{sen}\,2x\cos 2x}=\frac{\operatorname{sen}\,4x}{\operatorname{sen}\,2x\cos 2x}=$$
$$\frac{\operatorname{sen}\,2(2x)}{\operatorname{sen}\,2x\cos 2x}=\frac{2\operatorname{sen}\,2x\cos 2x}{\operatorname{sen}\,2x\cos 2x}=2.$$

(o) $\dfrac{\operatorname{sen}\,\alpha+\operatorname{sen}\,2\alpha}{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha}=\tan\alpha.$

$$\frac{\operatorname{sen}\,\alpha+2\operatorname{sen}\,\alpha\cos\alpha}{1+\cos\alpha+\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}=\frac{\operatorname{sen}\,\alpha+2\operatorname{sen}\,\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha+2\cos^2\alpha}=$$
$$\frac{\operatorname{sen}\,\alpha(1+2\cos\alpha)}{\cos\alpha(1+2\cos\alpha)}=\frac{\operatorname{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha.$$

(p) $\dfrac{2}{\tan\dfrac{x}{2}+\cot\dfrac{x}{2}}=\operatorname{sen}\,x.$

$$\frac{2}{\dfrac{\operatorname{sen}\,\dfrac{x}{2}}{\cos\dfrac{x}{2}}+\dfrac{\cos\dfrac{x}{2}}{\operatorname{sen}\,\dfrac{x}{2}}}=\frac{2}{\dfrac{\operatorname{sen}^2\dfrac{x}{2}+\cos^2\dfrac{x}{2}}{\operatorname{sen}\,\dfrac{x}{2}\,\cos\dfrac{x}{2}}}=\frac{\dfrac{2}{1}}{\dfrac{1}{\operatorname{sen}\,\dfrac{x}{2}\,\cos\dfrac{x}{2}}}=$$
$$2\operatorname{sen}\,\frac{x}{2}\,\cos\frac{x}{2}=\operatorname{sen}\,2\left(\frac{x}{2}\right)=\operatorname{sen}\,x.$$

(q) $\cot\dfrac{\alpha}{2}-\tan\dfrac{\alpha}{2}=2\cot\alpha.$

$$\frac{\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\operatorname{sen}\,\dfrac{\alpha}{2}}-\frac{\operatorname{sen}\,\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}=\frac{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-\operatorname{sen}^2\dfrac{\alpha}{2}}{\operatorname{sen}\,\dfrac{\alpha}{2}\,\cos\dfrac{\alpha}{2}}=\frac{\cos 2\dfrac{\alpha}{2}}{\dfrac{\operatorname{sen}\,2\dfrac{\alpha}{2}}{2}}=\frac{\cos\alpha}{\dfrac{\operatorname{sen}\,\alpha}{2}}=$$
$$\frac{2\cos\alpha}{\operatorname{sen}\,\alpha}=2\cot\alpha.$$

(r) $\dfrac{2\tan\dfrac{x}{2}}{1+\tan^2\dfrac{x}{2}}=\operatorname{sen}\,x.$

$$\frac{\dfrac{2\operatorname{sen}\,\dfrac{x}{2}}{\cos\dfrac{x}{2}}}{\sec^2\dfrac{x}{2}}=\frac{\dfrac{2\operatorname{sen}\,\dfrac{x}{2}}{\cos\dfrac{x}{2}}}{\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x}{2}}}=\frac{2\operatorname{sen}\,\dfrac{x}{2}\,\cos^2\dfrac{x}{2}}{\cos\dfrac{x}{2}}=2\operatorname{sen}\,\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=$$
$$\operatorname{sen}\,2\left(\frac{x}{2}\right)=\operatorname{sen}\,x.$$

(s) $\left(\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x\right)^2+4\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x=1.$

$$\cos^4 x-2\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x+\operatorname{sen}^4 x+4\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x=$$
$$\cos^4 x+2\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x+\operatorname{sen}^4 x=\left(\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x\right)^2=(1)^2=1.$$

(t) $\tan 2\alpha-\sec\alpha\operatorname{sen}\,\alpha=\tan\alpha\sec^2\alpha.$

$$\frac{\operatorname{sen}\,2\alpha}{\cos 2\alpha}-\frac{1}{\cos\alpha}\cdot\operatorname{sen}\,\alpha=\frac{\operatorname{sen}\,2\alpha}{\cos 2\alpha}-\frac{\operatorname{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}=$$
$$\frac{\operatorname{sen}\,2\alpha\cos\alpha-\cos 2\alpha\operatorname{sen}\,\alpha}{\cos\alpha\cos 2\alpha}=\frac{\operatorname{sen}\,(2\alpha-\alpha)}{\cos\alpha\cos 2\alpha}=\frac{\operatorname{sen}\,\alpha}{\cos\alpha\cos 2\alpha}=$$

$$\frac{\text{sen }\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{1}{\cos 2\alpha}=\tan\alpha\sec 2\alpha.$$

10.3.2 Ejercicios no resueltos

A. Probar las identidades siguientes.

1. $\dfrac{\text{sen }2A}{1+\cos 2A}=\tan A.$
2. $1+\tan 2\theta\tan\theta=\sec 2\theta.$
3. $\dfrac{\cot A-\tan A}{\cot A+\tan A}=\cos 2A.$
4. $\dfrac{\cos\alpha}{1-\text{sen }\alpha}-\dfrac{1-\text{sen }\alpha}{\cos\alpha}=2\tan\alpha.$
5. $\dfrac{1}{1+\text{sen }A}+\dfrac{1}{1-\text{sen }A}=2\sec^2 A.$
6. $\dfrac{\text{sen }A+\text{sen }B}{\text{sen }A-\text{sen }B}=\dfrac{\csc B+\csc A}{\csc B-\csc A}.$
7. $\dfrac{1-\sec^2\alpha}{1-\csc^2\alpha}=\tan^4\alpha.$
8. $\sec^2\theta\csc^2\theta=(\tan\theta+\cot\theta)^2.$
9. $1+\text{sen }^2\theta\sec^2\theta=\sec^2\theta.$
10. $\csc^4 A-\cot^4 A=\csc^2 A(\text{sen }^2 A+2\cos^2 A).$
11. $\dfrac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}=\tan^2 A.$
12. $\dfrac{\tan x-\cot x}{\text{sen }x-\cos x}=\sec x+\csc x.$
13. $\text{sen }(90^\circ-A)\cot A\,\text{sen }A-1=-\text{sen }^2 A.$
14. $(\tan u+\cot u)(\cos u+\text{sen }u)=\sec u+\csc u.$
15. $(\cos^2 x-1)(\tan^2 x+1)=1-\sec^2 x.$
16. $\dfrac{1+\cos^2 y}{\text{sen }^2 y}=2\csc^2 y-1.$
17. $\dfrac{\sec x-\cos x}{\tan x}=\dfrac{\tan x}{\sec x}.$
18. $\tan^2\alpha-\text{sen }^2\alpha=\tan^2\alpha\,\text{sen }^2\alpha.$
19. $\dfrac{1+\tan^2 v}{\tan^2 v}=\csc^2 v.$
20. $\dfrac{\cot\alpha-\tan\alpha}{\text{sen }\alpha+\cos\alpha}=\csc\alpha-\sec\alpha.$
21. $\dfrac{\text{sen }\alpha\cos\beta+\cos\alpha\,\text{sen }\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\text{sen }\alpha\,\text{sen }\beta}=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}.$
22. $\dfrac{\cos^3 x-\text{sen }^3 x}{\cos x-\text{sen }x}=1+\text{sen }x\cos x.$
23. $\dfrac{\tan^2 x}{\sec x+1}=\dfrac{1-\cos x}{\cos x}.$
24. $\left(\dfrac{\text{sen }^2 x}{\tan^4 x}\right)^3\cdot\left(\dfrac{\csc^3 x}{\cot^6 x}\right)^2=1.$

25. $(\operatorname{sen}\, t + \cos t)^2 = 1 + \operatorname{sen}\, 2t$.
26. $\csc 2u = \dfrac{1}{2}\sec u \csc u$.
27. $\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x = \cos 2x$.
28. $\sec 2\alpha = \dfrac{\sec^2\alpha}{2 - \sec^2\alpha}$.
29. $\dfrac{\operatorname{sen}\, 3\theta}{\operatorname{sen}\, 2\theta} + \dfrac{\cos 3\theta}{\cos 2\theta} = \dfrac{2\operatorname{sen}\, 5\theta}{\operatorname{sen}\, 4\theta}$.
30. $\dfrac{\operatorname{sen}\, 5\theta}{\operatorname{sen}\, \theta} - \dfrac{\cos 5\theta}{\cos\theta} = 4\cos 2\theta$.
31. $\dfrac{\operatorname{sen}\, x}{\csc x - 1} + \dfrac{\operatorname{sen}\, x}{\csc x + 1} = 2\tan^2 x$.
32. $\dfrac{\cot x}{\sec x - \tan x} - \dfrac{\cos x}{\sec x + \tan x} = \csc x + \operatorname{sen}\, x$.
33. $\dfrac{\sec x + \cos x}{\operatorname{sen}\, x} - \dfrac{\csc x - \operatorname{sen}\, x}{\cos x} = \sec x \csc x$.
34. $\dfrac{\cos^3 x - \cos x + \operatorname{sen}\, x}{\cos x} = \tan x - \operatorname{sen}^2 x$.
35. $\csc^4 A + \csc^2 A \cot^2 A - 2\cot^4 A = 3\csc^2 A - 2$.
36. $\dfrac{\operatorname{sen}^3 A + \cos^3 A}{1 - 2\cos^2 A} = \dfrac{\sec A - \operatorname{sen}\, A}{\tan A - 1}$.
37. $\tan x + \cot x = \dfrac{2}{\operatorname{sen}\, 2x}$.
38. $\cot x - \tan x = 2\cot 2x$.
39. $\tan(45^\circ + x) - \tan(45^\circ - x) = 2\tan 2x$.
40. $\tan(45^\circ + x) + \tan(45^\circ - x) = \dfrac{2}{\cos 2x}$.
41. $\operatorname{sen}\, \alpha + \cos\alpha + \dfrac{\operatorname{sen}\, \alpha}{\cot\alpha} = \sec\alpha + \csc\alpha - \dfrac{\cos\alpha}{\tan\alpha}$.
42. $\dfrac{\sec x + \tan x}{\cos x - \tan x - \sec x} = -\csc x$.
43. $\operatorname{sen}\,(\alpha + 60^\circ) - \cos(\alpha + 30^\circ) = \operatorname{sen}\, \alpha$.
44. $\dfrac{\operatorname{sen}\,(x-y) - \operatorname{sen}\,(x+y)}{\cos(x+y) - \cos(x-y)} = \cot x$.
45. $\dfrac{\operatorname{sen}\,(x+y)}{\operatorname{sen}\,(x-y)} = \dfrac{\tan x + \tan y}{\tan x - \tan y}$.
46. $\tan(\alpha - 135^\circ) = \dfrac{1 + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha}$.
47. $\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}\, 2\beta = \dfrac{\tan\beta}{1 + \tan^2\beta}$.
48. $\cos\alpha = \dfrac{1 + \tan^2\dfrac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2\dfrac{\alpha}{2}}$.
49. $\tan\left(45^\circ + \dfrac{\alpha}{2}\right) = \sec\alpha + \tan\alpha$.

50. $\dfrac{\tan\dfrac{\alpha}{2}+\cot\dfrac{\alpha}{2}}{\cot\dfrac{\alpha}{2}-\tan\dfrac{\alpha}{2}}=\sec\alpha.$

B. Resolver los ejercicios siguientes:

1. Dados $\tan\alpha = -\dfrac{3}{4}$ con α en el segundo cuadrante y $\csc\beta = -\dfrac{13}{12}$ con β en el cuarto cuadrante, calcular el valor de:

a) $\operatorname{sen} 2\beta$.
b) $\cos 2\beta$.
c) $\tan 2\beta$.
d) $\operatorname{sen}\dfrac{\alpha}{2}$.
e) $\cos\dfrac{\alpha}{2}$.
f) $\tan\dfrac{\alpha}{2}$.
g) $\cot\dfrac{\beta}{2}$.
h) $\cos\left(-\dfrac{\beta}{2}\right)$.
i) $-\tan\left(90^\circ-\dfrac{\beta}{2}\right)$.
j) $\cos\left(180^\circ+\dfrac{\beta}{2}\right)$.

Respuesta

a) $-\dfrac{120}{169}$.
b) $-\dfrac{119}{169}$.
c) $\dfrac{120}{119}$.
d) $\dfrac{3}{10}\sqrt{10}$.
e) $\dfrac{1}{10}\sqrt{10}$.
f) 3.
g) $-\dfrac{3}{2}$.
h) $-\dfrac{3}{13}\sqrt{13}$.
i) $\dfrac{3}{2}$.
j) $\dfrac{3}{13}\sqrt{13}$.

2. Si A y B son ángulos agudos tales $\tan A = \dfrac{1}{2}$ y $\cot B = 3$, muestre que $A + B = 45^\circ$.

3. Si $\tan\alpha = \dfrac{1}{3}$ y $\alpha - \beta = 45^\circ$, calcular $\tan\beta$.

Respuesta $\tan\beta = -\dfrac{1}{2}$.

4. Dados $\cot\alpha = \dfrac{4}{3}$ y $\cos\beta = -\dfrac{5}{13}$, calcular:

a) $\cos(\alpha-\beta)$.
b) $\operatorname{sen}(\beta-\alpha)$.
c) $\cot(\alpha-\beta)$.

Respuesta

a) $\pm\dfrac{16}{65}, \pm\dfrac{56}{65}$.
b) $\pm\dfrac{33}{65}, \pm\dfrac{63}{65}$.
c) $-\dfrac{16}{63}, -\dfrac{56}{33}$.

Cada uno de los ángulos α y β pueden pertenecer a dos cuadrantes diferentes; por ello varias soluciones.

5. Dado $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{4}{5}$, α ángulo agudo, calcular:

a) $\operatorname{sen} 2\alpha$.
b) $\cos 2\alpha$.
c) $\tan 2\alpha$.

Respuesta

a) $\dfrac{24}{25}$.
b) $-\dfrac{7}{25}$.
c) $-\dfrac{24}{7}$.

6. Dados $\sec x = -\dfrac{5}{2}$; x en el segundo cuadrante, calcular:

a) sen 2α. b) $\cos 2\alpha$. c) $\tan 2\alpha$.

Respuesta

a) $-\dfrac{4\sqrt{21}}{25}$. b) $-\dfrac{17}{25}$. c) $\dfrac{4\sqrt{21}}{17}$.

7. Dado $\csc\alpha = \dfrac{3}{2}$, α agudo, calcular:

   a) sen $\dfrac{\alpha}{2}$. b) $\cos\dfrac{\alpha}{2}$. c) $\tan\dfrac{\alpha}{2}$.

   Respuesta

   a) $\dfrac{1}{6}\sqrt{6(3-\sqrt{5})}$. b) $\dfrac{1}{6}\sqrt{6(3+\sqrt{5})}$. c) $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

8. Dados $\tan\alpha = -\dfrac{15}{8}$ y sen $\beta = -\dfrac{7}{25}$ y sabiendo que ninguno de estos ángulos pertenece al cuarto cuadrante, calcular:

   a) sen $(\alpha-\beta)$. b) $\cos(\alpha+\beta)$.

   c) ¿A qué cuadrante pertenece $\alpha+\beta$?

   Respuesta

   a) $-\dfrac{304}{425}$. b) $\dfrac{297}{425}$.
   c) cuarto cuadrante.

9. Calcular en radianes el ángulo que forman las manecillas de un reloj que marca las 5.

   Respuesta $\dfrac{5\pi}{6}$.

10. ¿Cuántos radianes recorre el minutero de un reloj en 35 minutos?

    Respuesta $\dfrac{7\pi}{6}$.

Capítulo 11

Regiones Poligonales

11.1 Revisión del área de algunas regiones poligonales

11.1.1 Notas

1. Por brevedad se seguirá aquí la costumbre de decir área de un rectángulo, área de un triángulo, etc, sobrentendiendo que se trata del área de la región poligonal correspondiente.

2. También por brevedad se dirá la base y la altura de un rectángulo, de un triángulo, etc, por lo cual debe entenderse la longitud de la base y la longitud de la altura.

3. Si se miden longitudes en metros, conviene medir áreas en metros cuadrados; si se miden longitudes en pies, entonces conviene medir áreas en pies cuadrados y así sucesivamente.

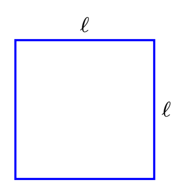
4. Recuérdese que los teoremas relativos a las áreas de las regiones poligonales, se demostraron a partir de varios postulados. De éstos sólo se cita aquí el **Postulado de la unidad**.

11.2 Postulado de la unidad

11.2.1 Área del cuadrado

Si el lado de un cuadrado mide ℓ, el área de ese cuadrado es ℓ^2.

$$A = \ell^2.$$

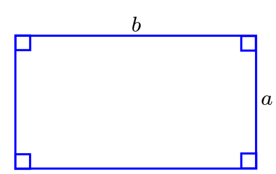


11.2.2 Área del rectángulo

El área de un rectángulo está dada por:

$$A = a{\cdot}b$$

donde $a =$ medida de la altura, $b =$ medida de la base.

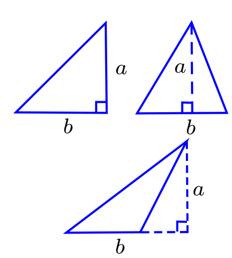


11.2.3 Área del triángulo

El área de un triángulo está dada por:

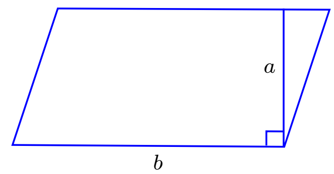
$$A = \frac{a{\cdot}b}{2}$$

donde $a =$ medida de la altura, $b =$ medida de la base.



11.2.4 Área del paralelogramo

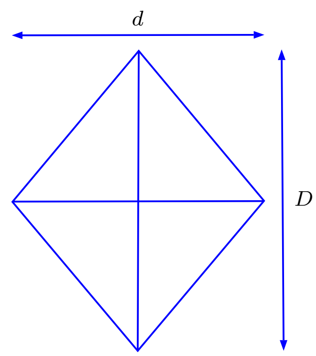
El área de un paralelogramo está dada por:



$$A = a{\cdot}b$$

donde a = medida de la altura, b = medida de la base.

11.2.5 Área del rombo



El área de un rombo está dada por:

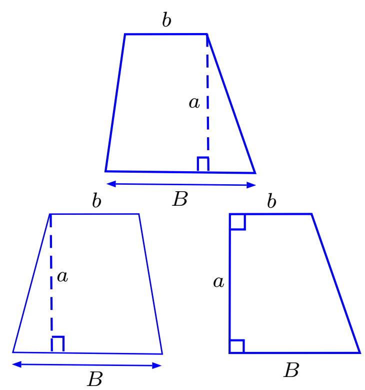
$$A = D{\cdot}d$$

donde:

D = medida de la diagonal mayor

d = medida de la digonal menor.

11.2.6 Área del trapecio



El área de un trapecio está dada por:

$$A = \frac{(B + b){\cdot}a}{2}$$

donde:

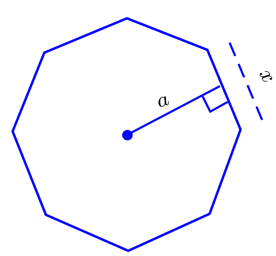
B = medida de la base mayor

b = medida de la base menor

a = medida de la altura.

11.2.7 Área de un polígono regular

El área de un polígono regular está dada por:



$$A = \frac{p{\cdot}a}{2}$$

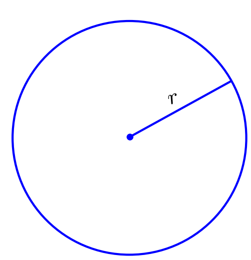
donde:

p = medida del perímetro

a = medida de la apotema.

11.2.8 Áreas en el círculo

El área de un círculo está dada por:



$$A = \pi{\cdot}r^2$$

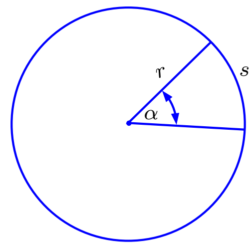
donde:

$\pi = 3.14159\ldots$

r = medida del radio.

Área del sector circular

El área del sector circular está dada por:



$$A = \frac{\pi \cdot r^2 \alpha}{360}$$

donde:

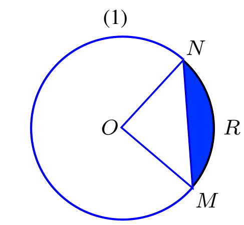
$\alpha =$ medida en grados del ángulo central (o del arco correspondiente).

O bien

$$A = \frac{s \cdot r}{2}$$

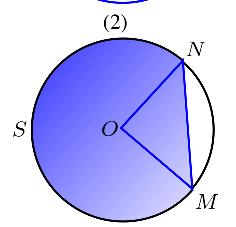
donde $s =$ medida en unidades lineales de arco del sector circular.

Área del segmento circular



El área del segmento circular en (1) está dada por:

$A =$ Área sector $OMRN-$ Área triángulo OMN.



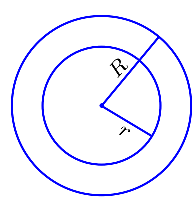
El área del segmento circular en (2) está dada por:

$A =$ Área sector $OMSN+$ Área triángulo OMN.

11.2.9 Área de la corona o anillo circular

El área de la corona o anillo circular está dada por:

$$A = \pi(R^2 - r^2)$$



donde:

$R =$ medida del radio mayor

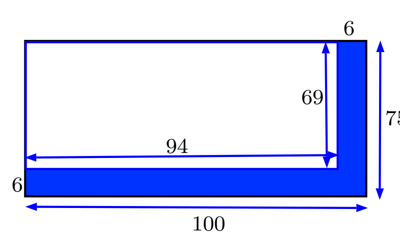
$r =$ medida del radio menor.

11.2.10 Problemas resueltos

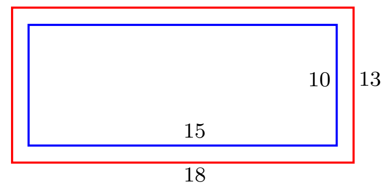
1. De dos lados consecutivos de un terreno rectangular de 100 m de largo (base) por 75 m de ancho (altura) se sustrae lo necesario para un camino de 6 m de ancho. Calcular el área del camino y el área del terreno que queda.

   Área del camino:
   $94{\cdot}6 + 6{\cdot}75 = 564 + 450 = 1014$ m^2.
   Área que queda:
   $94{\cdot}69 = 6486$ m^2.

   El área del camino es 1014 m^2 y el área que queda es 6486 m^2.



2. Determine el área de una acera de $1,50$ m de ancho que rodea un jardín rectangular de 15 m de base por 10 m de altura.



Acera:
$18{\cdot}13 - 15{\cdot}10 = 234 - 150 = 84$ m^2.
El área de la acera es 84 m^2.

3. ¿Cuántas baldosas cuadradas de 20 cm de lado se necesitan para cubrir el piso de un corredor rectangular de $7,40$ m de largo, por $4,80$ m de ancho?
Número de baldosas: $\dfrac{\text{área del corredor}}{\text{área de una baldosa}}$ expresadas ambas áreas en la misma unidad.
Área del corredor: $7,40{\cdot}4,80 = 35,52$ m^2.
Área de una baldosa: $20{\cdot}20 = 400$ cm$^2 = 0,04$ m^2, entonces:
Número de baldosas $= \dfrac{35,52}{0,04} = 888$.
Se necesitan 888 baldosas.

4. ¿Cuántas tablas de 3 m de largo por 32 cm de ancho se necesitan, para hacer el piso de un salón rectangular de 16 m de largo por $7,5$ m de ancho?
Número de tablas: $\dfrac{\text{área del salón}}{\text{área de una tabla}}$.
$\dfrac{16{\cdot}7,5}{3{\cdot}0,32} = \dfrac{16{\cdot}750}{3{\cdot}32} = 125$.
Se necesitan 125 tablas, por lo menos. (Es probable que haya que cortar algunas tablas y que se desperdicien cabos de tabla, lo cual aumenta el número).

5. ¿Cuántas losetas cuadradas de 4 pulgadas de lado se necesitan parar cubrir una pared rectangular, cuyas dimensiones son 15 pies, 8 pulgadas y 7 pies?

15 pies 8 pulgadas $= 188$ pulgadas.
7 pies $= 84$ pulgadas.

Número de losetas: $\dfrac{188{\cdot}84}{4{\cdot}4} = 987$.
Se necesitan 987 losetas.

6. Un campo rectangular tiene 24 áreas de extensión y la longitud de la base excede en 20 m a la altura. Calcular las dimensiones.
(Obsérvese que en este problema la palabra área está usada en dos sentidos diferentes).

24 áreas $= 2400$ m^2.
longitud base $= x$.
longitud altura $= x - 20$.

área campo $= x(x-20)$.
$x(x-20) = 2400$.
$x^2 - 20x - 2400 = 0$.
$(x-60)(x+40) = 0$.

$$x - 60 = 0. \quad x + 40 = 0.$$
$$x_1 = 60. \quad x_2 = -40. \quad \text{(valor inadmisible)}$$

Luego las dimensiones del campo miden: 60 m la base y 40 m la altura.

7. Aumentando la longitud del lado de un cuadrado en 5 m, el área aumenta en 225 m^2. Calcular el lado y el área de ese cuadrado.

   Lado del cuadrado $= x$

   Lado del cuadrado aumentado $= x + 5$

   Área del primer cuadrado $= x^2$

   Área del segundo cuadrado $= (x + 5)^2$

   $(x + 5)^2 - x^2 = 225$

   $x^2 + 10x + 25 - x^2 = 225$

   $10x = 200$

   $x = 20$

   $A = 20^2 = 400$ m^2.

   Luego el lado del cuadrado mide 20 m y el área 400 m^2.

8. Aumentando en 8 m cada una de las dimensiones de un rectángulo su área aumenta en 568 m^2. Sabiendo además que una de las dimensiones es el doble de la otra se pregunta por el área del rectángulo.

   dimensiones x, $2x$

   dimensiones aumentadas $x + 8$, $2x + 8$

   $A = x{\cdot}2x$

   $A = (x + 8)(2x + 8)$.

   $(x + 8)(2x + 8) - x{\cdot}2x = 568$

   $2x^2 + 24x + 64 - 2x^2 = 568$

   $24x = 504$

   $x = 21$.

   Dimensiones 21 m y $21{\cdot}2 = 42$ m.

   $A = 21{\cdot}42 = 882$ m.

   Luego el área del rectángulo es 882 m^2.

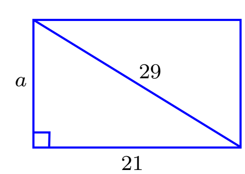
9. Calcular el área de un rectángulo, sabiendo que la diagonal mide 29 m y uno de sus lados 21 m.

   $a^2 + 21^2 = 29^2$.

   $a^2 = 29^2 - 21^2 = (29 + 21)(29 - 21) = 50{\cdot}8 = 400$.

   $a = \sqrt{400} = 20$,

   entonces $A = 21{\cdot}20 = 420$ m^2.



10. Se lava una pieza de tela rectangular y queda también rectangular perdiendo $\frac{1}{20}$ de su largo y $\frac{1}{16}$ de su ancho, siendo entonces su área $35,6250$ m^2. Hallar las dimensiones de la pieza antes de lavarla, sabiendo que el largo era entonces igual a 10 veces el ancho.

Dimensiones	Pierden	Se reducen a
ancho $= x$.	$\frac{x}{16}$.	$x - \frac{x}{16} = \frac{15x}{16}$.
largo $= 10x$.	$\frac{10x}{20} = \frac{x}{2}$.	$10x - \frac{x}{2} = \frac{19x}{2}$.

Por tanto: $\dfrac{19x}{2}\cdot\dfrac{15x}{16} = 35,6250 \longrightarrow x^2 = \dfrac{35,6250\cdot 2\cdot 16}{19\cdot 15} = 4 \longrightarrow x = 2.$
Luego el ancho es de 2 m y el largo es $10\cdot 2 = 20$ m, entonces antes de ser lavada las dimensiones de la pieza eran 20 m y 2 m.

11. La diagonal menor de un paralelogramo lo divide en dos triángulos rectángulos de los cuales esa diagonal es un cateto, la base es los $\dfrac{5}{4}$ de uno cualquiera de sus lados consecutivos y el perímetro mide 54dm. Calcular el área.

(a) Cálculo de los lados del paralelogramo.

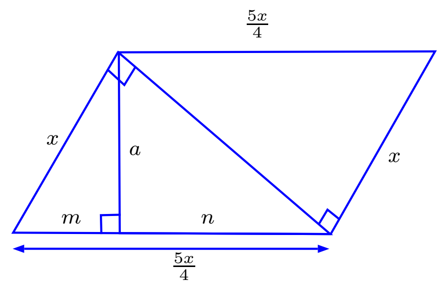
$2x + 2\left(\dfrac{5x}{4}\right) = 54$

$2x + \dfrac{5x}{2} = 54$

$4x + 5x = 108$

$9x = 108$

$x = 12,$



entonces los lados del paralelogramo miden 12dm y 15dm.

(b) Cálculo de la altura (Aplicación relaciones métricas en el triángulo rectángulo).

$m : 12 = 12 : 15.$
$15m = 144.$
$m = 9,6.$
$n = 15 - 9,6 = 5,4.$

$9,6 : a = a : 5,4.$
$a^2 = 51,84.$
$a = \sqrt{51,84}.$
$a = 7,2$ dm.

(c) Cálculo del área del paralelogramo:
$A = 15\cdot 7,2.$
$A = 108 \;\; \text{dm}^2.$

Por tanto el área del paralelogramo es 108 dm^2.

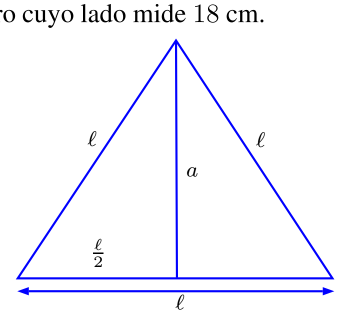
12. Calcular el área de un triángulo equilátero de lado l.
Aplicación: calcular el área de un triángulo equilátero cuyo lado mide 18 cm.

Cálculo de la altura:

$a^2 + \left(\dfrac{l}{2}\right)^2 = l^2$

$a^2 = l^2 - \left(\dfrac{l}{2}\right)^2 = l^2 - \dfrac{l^2}{4} = \dfrac{3l^2}{4}$

$a = \sqrt{\dfrac{3l^2}{4}} = \dfrac{l}{2}\sqrt{3},$



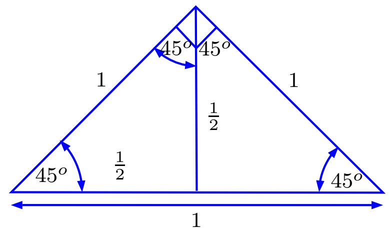
entonces: $A = \dfrac{l\cdot\frac{l}{2}\sqrt{3}}{2} = \dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}.$

Aplicación: Si $l = 18$ cm, se tiene: $A = \dfrac{18^2\cdot\sqrt{3}}{4} = \dfrac{324\sqrt{3}}{4} = 81\sqrt{3}\;\; \text{cm}^2.$

13. Calcular el área de un triángulo rectángulo isósceles cuya hipotenusa mide 1 m.

$A = \dfrac{1 \cdot 0,5}{2} = 0,25 \text{ m}^2.$

El área es igual a $0,25 \text{ m}^2$.

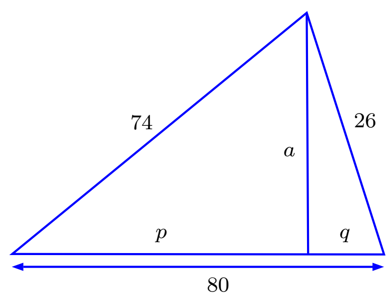


14. Calcular el área de un triángulo cuyos lados miden 26 m, 74 m y 80 m.

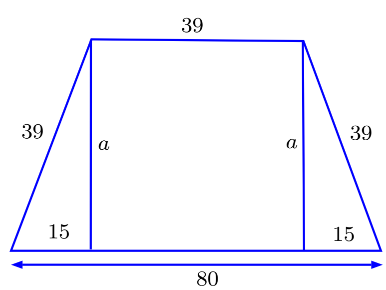
    Aplicando las relaciones métricas en el triángulo se calcula una de las alturas. Se elige aquí la altura sobre el lado mayor.

    (a) $74^2 = 80^2 + 26^2 - 2 \cdot 80 \cdot q$
    $5476 = 6400 + 676 - 160q$
    $160q = 1600$
    $q = 10$ m.

    (b) $a^2 + 10^2 = 26^2$.
    $a^2 = 26^2 - 10^2 = 676 - 100 = 576$.
    $a = \sqrt{576}$.
    $a = 24$ m.
    Luego $A = \dfrac{80 \cdot 24}{2} = 960 \text{ m}^2$.
    El área es 960 m^2.

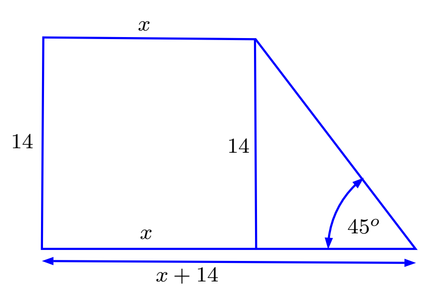


15. Calcular el área de un trapecio isósceles, sabiendo que la base mayor mide 69dm y cada uno de los otros tres lados 39dm.
    Cálculo de la altura
    $a^2 + 15^2 = 39^2$
    $a^2 = 39^2 - 15^2 = 1521 - 225 = 1296$
    $a = \sqrt{1296} = 36$ dm
    $A = \dfrac{(69 + 39) \cdot 36}{2} = 108 \cdot 18 =$
    1944 dm^2
    El área del trapecio es 1944 dm^2.



16. En un trapecio rectángulo uno de los ángulos mide 45° la altura 14 pulgadas y el área 504 pulgadas cuadradas. Calcular las bases.

    $\dfrac{(x + 14 + x)14}{2} = 504$
    $2x + 14 = \dfrac{504 \cdot 2}{14}$
    $2x + 14 = 72$
    $2x = 58$
    $x = 29$

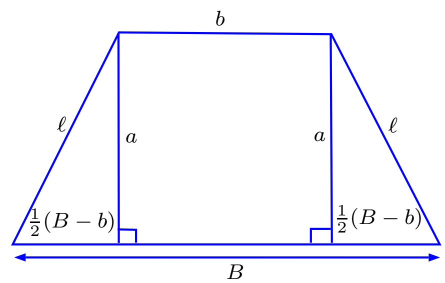


    Por tanto una base mide 29 pulgadas y la otra $29 + 14 = 43$ pulgadas.

17. Un terreno tiene forma de trapecio isósceles, sus bases miden 60 m y 42 m y cada uno de sus lados iguales 41 m. Calcular el área.

    Cálculo de la altura
    $a^2 + 9^2 = 41^2$
    $a^2 = 41^2 - 9^2 = 1681 - 81 = 1600 \longrightarrow a = \sqrt{1600} = 40$ m $\longrightarrow A = \dfrac{(60+42)\cdot 40}{2} = 102\cdot 20 = 2040$ m^2.

18. El área de un trapecio isósceles es 112 dm^2, la suma de las bases es 28dm y el perímetro 48dm. Calcular las bases, la altura y los lados no paralelos.
    Sean
    Base mayor=B lado no paralelo=ℓ
    Base menor=b Altura=a



$$B + b + 2\ell = 48 \quad (1)$$
$$B + b = 28 \quad (2)$$
$$\frac{(B+b)a}{2} = 112 \quad (3)$$
$$\left[\frac{1}{2}(B-b)\right]^2 + a^2 = \ell^2 \quad (4)$$

De (1) y (2) :
$28 + 2\ell = 48$
$2\ell = 20$
$\ell = 10$

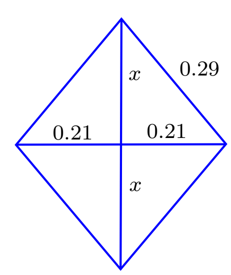
De (2) y (3) :
$\dfrac{28\cdot a}{2} = 112$
$14a = 112$
$a = 8$

Sustituyendo estos valores en (4), se obtiene:

$$\left[\frac{1}{2}(B-b)\right]^2 + 8^2 = 10^2$$
$$\left[\frac{1}{2}(B-b)\right]^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36$$
$$\frac{1}{2}(B-b) = \sqrt{36} = 6$$
$$B - b = 12.$$

Con esta ecuación y la (2) se forma el sistema $B + b = 28$, $B - b = 12$. Resolviéndolo se obtiene $B = 20$ y $b = 8$, entonces las bases del trapecio miden 20dm y 8dm, cada uno de los lados no paralelos (lados iguales) 10dm y la altura 8dm.

19. Calcular el área de un rombo, conociendo el perímetro $1,16$ m y una de las diagonales $0,42$ m.
    lado: $\dfrac{1,16}{4} = 0,29$ m
    x: media diagonal desconocida
    $x^2 + 0,21^2 = 0,29^2 \longrightarrow$
    $x^2 = 0,29^2 - 0,21^2 =$
    $(0,29 + 0,21)(0,29 - 0,21) = 0,50\cdot 0,08 = 0,0400,$
    $x = \sqrt{0,0400} = 0,20$ m.
    Luego la otra diagonal mide $0,20\cdot 2 = 0,40$ m, por tanto: $A = \dfrac{0,42\cdot 0,40}{2} = 0,0840$ m^2.



20. La suma de las longitudes de las diagonales de un rombo es 18 m y la diagonal menor es $\frac{4}{5}$ de la mayor. Calcular el área.

$D = x$, $d = \frac{4}{5}x$, $x + \frac{4}{5}x = 18 \longrightarrow 5x + 4x = 90 \longrightarrow 9x = 90 \longrightarrow x = 10$, entonces $D = 10$ y $d = \frac{4}{5}{\cdot}10 = 8$, por tanto $A = \frac{10{\cdot}8}{2} = 40$ m^2.

Nota El rombo es un paralelogramo; por consiguiente su área puede también obtenerse como el área de cualquier paralelogramo, mediante el producto de la base por la altura. Así el área de un rombo cuya base (uno cualquiera de sus lados) mide 12 m y su altura (distancia entre la base y el lado opuesto) miden 7 m es igual a $12{\cdot}7 = 84$ m^2.

Es claro que se pueden calcular las diagonales de este rombo y obtener el área mediante el "semi-producto de sus diagonales". Estas miden:

$$D = 2\sqrt{6\left(12+\sqrt{95}\right)} \quad \text{y} \quad d = 2\sqrt{6\left(12-\sqrt{95}\right)}$$

o bien

$$D = 2\left(\sqrt{57}+\sqrt{15}\right) \quad \text{y} \quad d = 2\left(\sqrt{57}-\sqrt{15}\right)$$

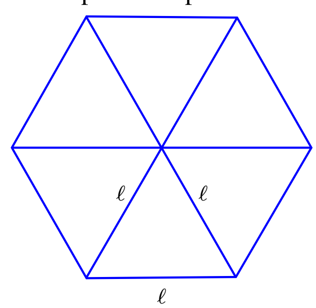
Se deja como ejercicio al lector, el cálculo del área del rombo aplicando la fórmula $A = \frac{D{\cdot}d}{2}$

21. Calcular el área de un hexágono regular conociendo el lado ℓ. Aplicación para $\ell = 70$ cm.

El hexágono regular es equivalente a seis triángulos equiláteros congruentes. Por tanto:

$$A = 6{\cdot}\frac{1}{4}\ell^2\sqrt{3} = \frac{3}{2}\ell^2\sqrt{3}.$$

Aplicación: $A = \frac{3}{2}70^2\sqrt{3} = \frac{3{\cdot}4900\sqrt{3}}{2} = 7350\sqrt{3}$ cm^2.



22. El perímetro de un hexágono regular tiene igual longitud que el de un cuadrado cuya área es 2304 pies cuadrados. Calcular el área del hexágono regular.

$$\text{Cuadrado}\begin{cases}\text{lado} = \sqrt{2304} = 48\text{pies}\\ \text{perímetro} = 48{\cdot}4 = 192\text{pies.}\end{cases}$$

$$\text{Hexágono regular}\begin{cases}\text{perímetro} = 192\text{pies}\\ \text{lado} = \dfrac{192}{6} = 32\text{pies.}\end{cases}$$

Luego, el área del hexágono regular $= \frac{3}{2}32^2\sqrt{3} = 1536\sqrt{3}$pies^2.

23. ¿Cuánto debe medir el lado de un hexágono regular para que su área sea 1 m^2?

$$\frac{3}{2}\ell^2\sqrt{3} = 1 \longrightarrow \ell^2 = \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \longrightarrow \ell = \sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{2\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{\sqrt{12}} = \frac{1}{3}\sqrt[4]{12}.$$

Debe medir $\frac{1}{3}\sqrt[4]{12}$ m (aproximadamente $0,62$ m).

24. El piso de un quiosco tiene la forma de un octógono regular en el cual el lado y la apotema miden 10 m y $12,07$ m respectivamente. Dígase cuántos ladrillos de forma cuadrada y de 20 cm de lado se requieren para cubrirlo.

Número de ladrillos= $\dfrac{\text{área del piso del quiosco}}{\text{área del ladrillo}} = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 10\cdot 12,07}{0,20\cdot 0,20} = \dfrac{482,80}{0,0400} = 12070.$

Se requieren 12070 ladrillos.

25. En un círculo cuyo radio mide $1,20$ m, calcular el área del sector circular que tiene un arco de $40°$.

 $A = \dfrac{\pi\cdot 1,20^2\cdot 40}{360} \approx \dfrac{3,14\cdot 1,44\cdot 40}{360} = 0,5024\ \text{m}^2.$

26. Dígase cuántos grados tiene al arco de un sector circular cuyo radio mide 30 cm y cuya área es $439,60\ \text{cm}^2$.

 Número de grados del arco $= n$.

 $\dfrac{3,14\cdot 30^2\cdot n}{360} = 439,60,\ \ n = \dfrac{439,60\cdot 360}{3,41\cdot 900} = 56$, por tanto el arco de ese sector tiene $56°$.

27. Calcular el área de un círculo cuya circunferencia mide 1 m.

 A círculo $= \pi\cdot r^2.$ $\qquad$ (1)

 Longitud de la circunferencia $C = 2\pi\cdot r = 1$, $r = \dfrac{1}{2\pi}$. Sustituyendo en (1):

 $A = \pi\cdot\left(\dfrac{1}{2\pi}\right)^2 = \pi\cdot\dfrac{1}{4\pi^2} = \dfrac{1}{4\pi} \approx \dfrac{1}{4\cdot 3,14} = \dfrac{1}{12,56} = 0,0796\ \text{m}^2.$

28. Si el área de un círculo es $1\ \text{m}^2$, calcular la longitud del radio.

 Longitud del radio= r, $\pi r^2 = 1 \longrightarrow 3,14\text{r}^2 \approx 1 \longrightarrow r \approx \sqrt{\dfrac{1}{3,14}} = \dfrac{1}{3,14}\sqrt{3,14} = \dfrac{1,77}{3,14} = 0,56.$

 Por tanto el radio mide $0,56$ m (aproximadamente).

29. Sabiendo que el radio de un círculo mide 5dm, calcular el área del segmento circular cuyo arco mide $90°$.

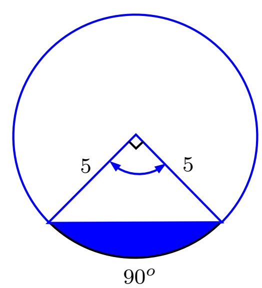
 En este caso:

 A segmento $= A$ sector - A triángulo.

 A sector $\approx \dfrac{3,14\cdot 5^2\cdot 90}{360} = \dfrac{3,14\cdot 25}{4} = 19,625$

 A triángulo $= \dfrac{5\cdot 5}{2} = 12,50.$

 Luego, A segmento $\approx 19,625 - 12,50 = 7,1250\ \text{dm}^2.$



30. En un círculo cuyo radio mide 1 m, se traza una cuerda de longitud igual a la del radio. Calcular el área del mayor de los segmentos circulares determinados por esa cuerda.

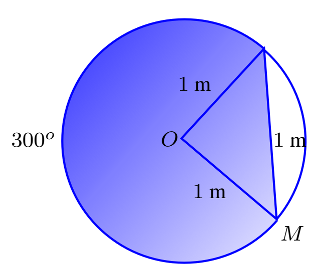
 En este caso:

 A segmento= A sector + A triángulo.

 A sector $\approx \dfrac{3,14\cdot 1^2\cdot 300}{360} = \dfrac{7,85}{3} = 2,6166$

 A triángulo= $\dfrac{1^2\cdot\sqrt{3}}{4} = \dfrac{1,7320}{4} = 0,4330.$

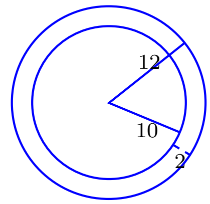
 Luego, A segmento $\approx 2,6166 + 0,4330 = 3,0496\ \text{m}^2.$



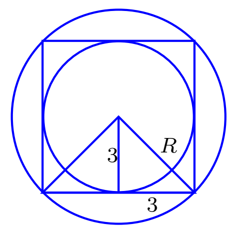
31. Alrededor de un césped circular de 10 m de radio se ha construido un paseo de 2 m de ancho. Calcular el área de este paseo.

A paseo= $\pi\left(12^2 - 10^2\right) = \pi\,(144 - 100) = \pi{\cdot}44 \approx 3,14{\cdot}44 = 138,16$ m^2.

El área del paseo es $138,16$ m^2



32. Calcular el área de la corona circular obtenida inscribiendo y circunscribiendo un círculo a un cuadrado cuyo lado mide 6 cm.
    Cálculo de R
    $R^2 = 3^2 + 3^2 = 9 + 9 = 18$
    $R = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$
    $A = \pi\left[(3\sqrt{2})^2 - 3^2\right]$
    $\pi\,[18 - 9] = \pi{\cdot}9 \approx 3,14{\cdot}9 = 28,26$ cm^2.
    El área de la corona circular así obtenida es $28,26$ cm^2 aproximadamente.



33. Se desea construir una corona circular de 5 m^2 de área y cuyo ancho mida 1 m. Calcular la longitud de los radios.
    $$\text{Radios} = \begin{cases} R \text{ radio mayor} \\ r \text{ radio menor,} \end{cases}$$
    entonces $\pi\left(R^2 - r^2\right) = 5 \qquad (1)$
    $R - r = 1. \qquad (2)$
    De (1) se obtiene $\pi(R + r)(R - r) = 5$.
    De (1) y (2) se obtiene $\pi(R + r){\cdot}1 = 5$, o sea $R + r = \dfrac{5}{\pi}$.
    Con esta ecuación y la (2) se forma el sistema: $\begin{cases} R + r = \dfrac{5}{\pi} \\ R - r = 1. \end{cases}$
    Resolviéndolo por suma o resta, se obtiene:
    $2R = \dfrac{5}{\pi} + 1 = \dfrac{5+\pi}{\pi} \longrightarrow R = \dfrac{5+\pi}{2\pi}$
    Sustituyendo R se tiene $\dfrac{5+\pi}{2\pi} + r = \dfrac{5}{\pi} \longrightarrow r = \dfrac{5}{\pi} - \dfrac{5+\pi}{2\pi} = \dfrac{10 - 5 - \pi}{2\pi} = \dfrac{5-\pi}{2\pi}$.
    Por tanto los radios de la corona miden:
    $R = \dfrac{5+\pi}{2\pi} \approx 1,296$ m
    $r = \dfrac{5-\pi}{2\pi} \approx 0,296$ m.
    Nota Aprender de memoria:

    $\pi \approx 3,14 \qquad \sqrt{2} \approx 1,4142 \qquad \sqrt{3} \approx 1,7320.$

11.2.11 Problemas no resueltos

1. Calcular el área de un lote rectangular de 25 m de base por 12 m altura y su valor a razón de ₡95 el metro cuadrado.

2. Los lados de un paralelogramo miden 45 cm y 53 cm. Sabiendo además que su diagonal menor lo divide en dos triángulos rectángulos, hallar el área.

3. Se conocen de un solar rectangular las longitudes de la diagonal y de uno de los lados $9,7$ m y $6,5$ m respectivamente. Calcular el área.

4. La diagonal de un rectángulo 40 cm y la longitud de la altura es los $\frac{3}{4}$ de la longitud de la base. Calcular el área.

5. El área de un rectángulo cuya base mide 30 cm, es equivalente a la de un cuadrado en el cual un lado mide 24 cm. Dígase cuál es la longitud de la altura del rectángulo.

6. Si se prolongan en una misma dirección las longitudes de dos lados opuestos de un cuadrado y se determina rectángulo con la recta que une los extremos de las prolongaciones, el área del rectángulo excede en 150 m^2 a la del cuadrado. Calcular el lado del cuadrado.

7. Un salón tiene forma rectangular con $8,20$ m de largo por $6,50$ m de ancho. ¿Cuántas baldosas se necesitan para pavimentarlo, si son de forma cuadrada y su lado mide 20 cm?

8. El piso de una sala tiene forma cuadrada y se cubre con una alfombra que queda separada 60 cm de las paredes. Hallar el área de la alfombra si el lado del piso de la habitación mide 6 m.

9. El lado de una mesa cuadrada mide $1,30$ m. Se recubre con un tapete que cuelga por todas partes 30 cm. En el borde de este tapete se desea poner une franja. Dígase cuántos metros de franja se necesitan y en cuánto excede el área del tapete a la de la mesa.

10. Alrededor de una lámina de cartón rectangular de 40 cm por 30 cm se corta una tira de 4 cm de ancho. ¿En cuánto disminuye el área primitiva?

11. El perímetro de un terreno rectangular mide 300 m. Se vende una parte, también rectangular, con una área de 1050 m^2 y un ancho, medido a lo largo del lado menor del terreno, de 15 m. Calcúlese el área del terreno no vendido.

12. Calcular el área de un rectángulo sabiendo que la diagonal mide 73 cm y que la longitud de la base excede en 7 cm a la de la altura.

13. Se desea construir un cuadrado tal que las longitudes del lado y de la diagonal sumen 1 m. Calcular el área y lo que miden el lado y la diagonal.

14. Los perímetros de un cuadrado y de un rombo miden 20 m cada uno. Calcular el área de cada uno de estos paralelogramos, sabiendo además que la altura del rombo mide $4,8$ m. Calcular también las longitudes de las diagonales de cada paralelogramo.

15. Calcular el área de un rectángulo cuyo perímetro mide 34 m y cada una de sus digonales 13 m.

16. Si alrededor de un jardín rectangular se destina una franja de 5 m de ancho para hacer un camino, el área de cultivo disminuye en 900 m^2. Si esa franja se extiende a lo largo de uno de los lados mayores y de los lados menores el área de cultivo disminuye en 650 m^2. ¿Cuáles son las dimensiones primitivas del jardín y cuál es el área que queda para el cultivo en cada caso?

17. A un rectángulo de 50 cm por 40 cm se le quitan cuatro triángulos rectángulos, isósceles y congruentes, uno de cada esquina; el área queda así reducida a los $\frac{4}{5}$ de la primitiva. ¿Cuánto mide cada uno de los catetos de los triángulos rectángulos que se quitan?

18. Calcular el área de un cuadrado, sabiendo que la longitud del segmento que une los puntos medios de dos lados contiguos es 4dm.

19. La base y la altura de un paralelogramo tiene igual medida y el otro lado mide 20 cm. Calcular el área.

20. Las diagonales de un rombo miden 96 cm y 75 cm. Hallar la longitud del lado del cuadrado de igual área.

21. Los lados de un trapecio isósceles miden 50 cm y 28 cm las bases; 61 cm cada uno de los lados iguales. Calcular el área.

22. La medida de la base menor de un trapecio rectangular es los $\dfrac{7}{10}$ de la medida de la base mayor y la altura mide 35 cm. Si el área es 1190 cm^2, calcular la longitud de cada una de las bases y la del lado oblicuo.

23. Calcular el área de un trapecio rectángulo cuyas diagonales miden 97 cm y 78 cm y la altura 72 cm.

24. El área de un trapecio es 240 m^2. Si una de las bases mide 18 m y la altura 12 m, dígase cuánto mide la otra base.

25. La diagonal menor de un rombo mide 70 cm y la altura $67,2$ cm. Calcular el área.

26. El perímetro de un rombo mide 148 m y su área es 840 m^2. Calcular la altura.

27. Calcular el área de un triángulo cuyos lados miden 39 cm, 80 cm y 89 cm.

28. El perímetro de un triángulo isósceles mide $32,4$ m y la longitud de la base excede en $3,3$ m a la del lado igual. Calcular el área.

29. Los lados de un triángulo miden 87 cm, 65 cm y 44 cm. Calcular el área.

30. El perímetro de un triángulo rectángulo mide 80 pulgadas. Calcular el área, sabiendo además que la hipotenusa mide 34 pulgadas.

31. La base de un rectángulo mide 20 pies y la altura 18 pies. A partir de uno de los vértices se toman sobre uno y otro lado longitudes cuya suma es 23 pies y se forma un triángulo rectángulo trazando una recta por los puntos señalados. Sabiendo además que el área del triángulo así obtenido es igual a $\dfrac{1}{6}$ del área del rectángulo propuesto, dígase cuánto mide cada uno de sus lados.

32. La longitud de la altura de un trapecio es los $\dfrac{2}{3}$ de la longitud de la base menor y la de ésta, es los $\dfrac{2}{3}$ de la longitud de la base mayor; el área del trapecio es 270 pies cuadrados. ¿Cuánto miden las bases y la altura?

33. Un jardín tiene la forma de un rombo y su área es 3750 m^2. Sabiendo además que una de sus diagonales mide 100 m, se pregunta ¿cuántos metros de tela metálica se necesitan para cercarlo?

34. La diferencia de las longitudes de las diagonales de un rombo es 9 cm. Si cada una de estas longitudes se aumenta en 4 cm, el área aumenta en 90 cm^2. ¿Qué longitud tienen las diagonales?

35. Si se unen los puntos medios de los lados de un rombo se obtiene un rectángulo de 120 cm^2 de área y cuyo perímetro mide 46 cm. Uniendo ahora los puntos medios de los lados del rectángulo se obtiene de nuevo un rombo. ¿Cuánto mide el perímetro y cuál es el área de cada rombo?

36. El área de un cuadrado es $2,304$ cm^2. Calcular el área del hexágono regular que tiene el mismo perímetro.

37. Las diagonales de un rombo miden 90 cm y 48 cm. Calcular el área de un triángulo equilátero cuyo perímetro tenga igual medida que el del rombo.

38. Calcular el área del círculo inscrito en un cuadrado cuyo lado mide 1 m.

39. Calcular el área del círculo circunscrito a un cuadrado cuyo lado mide 1 m.

40. Dígase cuánto mide el radio de un círculo sabiendo que si su longitud se aumenta en 5 cm el área del círculo se cuadruplica.

41. Dígase cuánto mide el radio de un círculo, sabiendo que si su longitud se aumenta en 10 cm el área del círculo se hace 9 veces mayor.

42. Si la diferencia entre el área del cuadrado circunscrito a un círculo y el área del cuadrado inscrito es 50 cm^2, hállese el área del círculo.

43. De una lámina rectangular de hojalata de 80 cm por 64 cm, ¿cuál es el mayor número de discos cuyo radio mide 4 cm que es posible recortar y cuál es el área de la lámina sobrante?

44. ¿Cuál es el área de un sector circular con un arco de $75°$, en un círculo cuyo radio mide 12dm?

45. En un círculo cuyo radio mide 6 pulgadas, el área de un sector circular es $15,70$ pulgadas cuadradas. ¿Cuánto mide el ángulo del sector?

46. El área de un sector circular cuyo arco mide $80°$ es 628 cm^2. ¿Cuánto mide el radio?

47. Calcular el área del menor de los segmentos circulares que determina el lado de un cuadrado inscrito en un círculo cuyo radio mide 10 cm.

48. Calcular el área de la corona circular obtenida inscribiendo y circunscribiendo un círculo a un cuadrado cuyo lado mide 20 cm.

49. Calcular el área de la corona circular obtenida inscribiendo y circunscribiendo un círculo a un cuadrado cuya diagonal mide 20 cm.

50. Alrededor de una pila circular cuyo diámetro mide 8 m hay una acera de $1,50$ m de ancho. Calcular el área de esta acera.

Resultados de los problemas no resueltos

1. 300 m^2; ₡29500.
2. 1260 cm^2.
3. $46,80$ m^2.
4. 768 cm^2.
5. $19,2$ cm.
6. 15 m.
7. 1333 (por lo menos).
8. $29,16$ m^2.

9. $7,60$ m, $1,92$ m^2.
10. 496 cm^2.
11. 4550 m^2.
12. 2640 m^2.
13. (a) $\left(\sqrt{2}-1\right) \approx 0,4142$ m,
 d$\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right) \approx 0,5858$ m.
 (b) $\left(3-2\sqrt{2}\right) \approx 0,1716$ m^2.
14. Áreas $\begin{cases} \text{del cuadrado } 25 \text{ m}^2. \\ \text{del rombo } 24 \text{ m}^2. \end{cases}$

 Diagonales $\begin{cases} \text{del cuadrado } 5\sqrt{2} \text{ m} \\ \text{ cada una.} \\ \text{del rombo 8m y 6 m.} \end{cases}$
15. 60 m^2.
16. 60 m y 40 m, 1500 m^2 y 1750 m^2.
17. $10\sqrt{2}$ cm$\approx 14,142$ cm.
18. 32 dm^2.
19. 200 cm^2.
20. 60 cm.
21. 2340 cm^2.
22. 40 cm y 28 cm, 37 cm.
23. 3420 cm^2.
24. 22 m.
25. 8400 cm^2.
26. $\dfrac{840}{37} = 22,7$ m.
27. 1560 m^2.
28. $46,80$ m^2.
29. 1386 cm^2.
30. 240 pulgadas cuadradas.
31. 8 pies, 15 pies, 17 pies.
32. Bases: 27 pies y 18 pies,
 altura: 12 pies.
33. 250 m.
34. 25 cm y 16 cm.
35. Perímetros $\begin{cases} 68 \text{ cm} \\ 34 \text{ cm} \end{cases}$

 Áreas $\begin{cases} 240 \text{ cm}^2 \\ 60 \text{ cm}^2. \end{cases}$
36. $1536\sqrt{3}$ cm^2, $2660{\cdot}3520$ cm^2.
37. $1156\sqrt{3}$ cm^2, $2002{\cdot}1920$ cm^2.
38. $0,25\pi$ m$^2 = 0,7850$ m^2.
39. $0,5\pi$ m$^2 \approx 1,57$ m^2.
40. 5 cm.
41. 5 cm.
42. 25π cm$^2 \approx 78,50$ cm^2.
43. 80 discos, $1100,80$ cm^2.
44. 30π dm$^2 \approx 94,20$ dm^2.
45. $50°$.
46. 30 cm.
47. $28,50$ cm^2.
48. 100π cm$^2 \approx 314$ cm^2.
49. 50π cm$^2 \approx 157$ cm^2.
50. $14,25\pi$ m$^2 \approx 44,7450$ m^2.