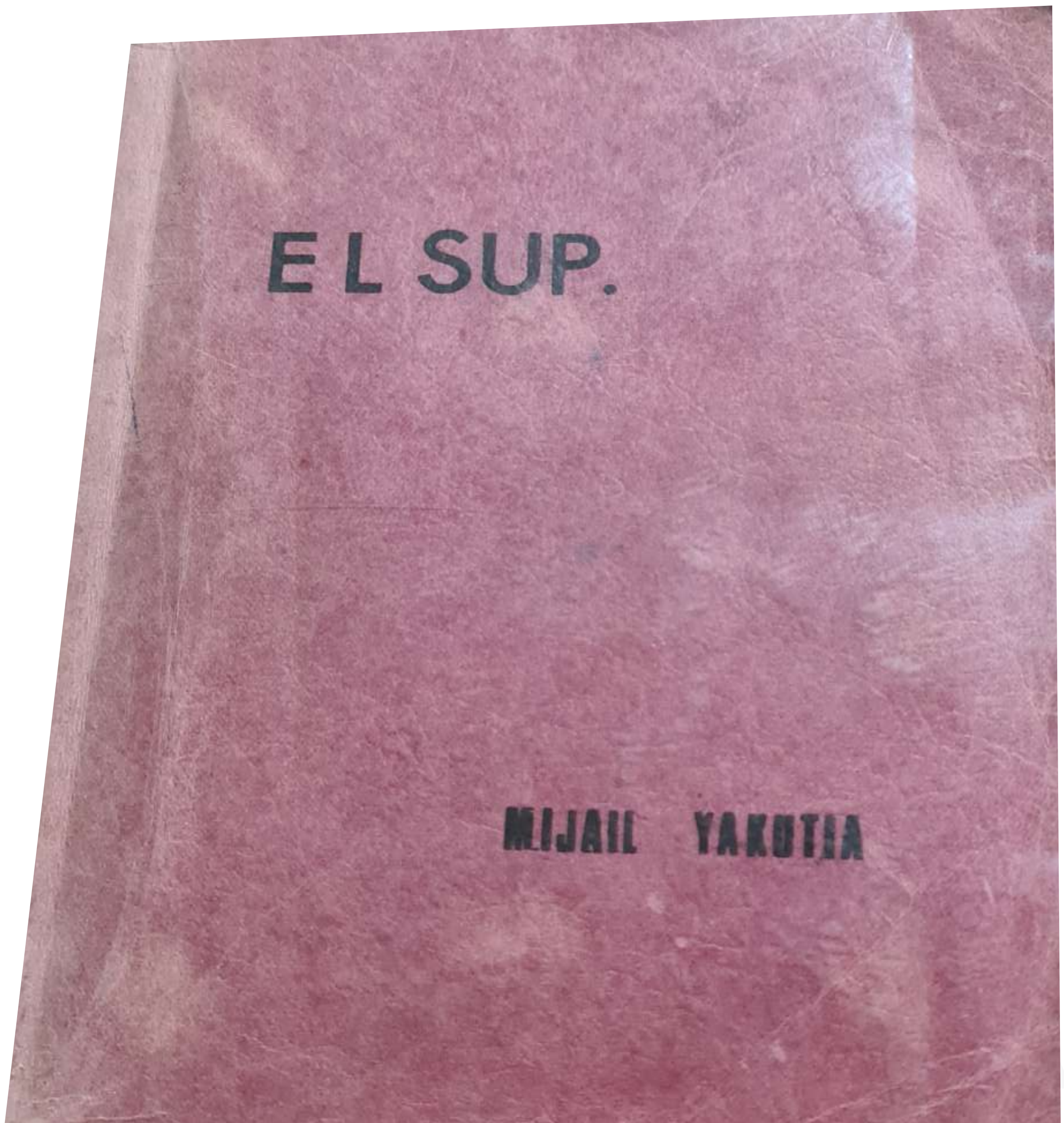
Bernardo Montero



Revista digital
Matemática, Educación e *Internet* (www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/)

EL SUP

MIJAIL YAKUTIA

C.A.E.M., 1980

Revista digital
Matemática, Educación e Internet. (https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/).

Contenido

(http://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/).

Correo Electrónico: wmora2@gmail.com
Escuela de Matemática
Instituto Tecnológico de Costa Rica
Apdo. 159-7050, Cartago
Teléfono (506)25502225
Fax (506)25502493

Montero, Bernardo
El Sup. 1ra ed.
Universidad de Costa Rica. 2010.
265 pp.
ISBN Obra Independiente: 978-9968-641-06-7
1. Álgebra. 2. funciones 3. Límites y continuidad

Revista digital
Matemática, Educación e Internet.
https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/.

Prólogo

El libro “El Sup” apareció en 1980 editado por editorial C.A.E.M. de la Escuela de Matemática de la Universidad de Costa Rica. El seudónimo de los autores era Mijal Yakutia, liderado por Bernardo Montero (tal vez emulando al famoso grupo N. Bourbaki). Este libro es continuación de otro libro llamado “El Inf”, y se usaba en los cursos de Álgebra y Análisis I y II. También hay dos libros adicionales con las respuestas de los ejercicios. En el texto original no hay bibliografía.

El editor

Capítulo 1

Números Racionales - Estructura de campo

1.1 Introducción

Cómo se recordará, $\mathbb{Z}$ no es un grupo bajo el producto, pues dados dos enteros a y b, puede no existir un entero x en $\mathbb{Z}$ tal que $a = bx$ pues el producto en $\mathbb{Z}$ no posee inversos multiplicativos excepto para los elementos 1 y -1.

En un anillo no trivial A (distinto de $\{0\}$), el elemento neutro de la adición(el cero) no posee inverso para el producto. En efecto, $\forall x \in A,\ x \cdot 0 = 0$ y si existiese el inverso de "0" se obtendría que $1 = 0 \cdot 0^{-1} = 0$ y el anillo sería trivial.

A partir de $\mathbb{Z}$ construiremos un conjunto $\mathbb{Q}$ con las siguientes propiedades:

1) $\mathbb{Q}$ contiene a $\mathbb{Z}$.

2) $\mathbb{Q}$ posee dos leyes de composición interna que restringidas a $\mathbb{Z}$ son el producto y la adición en $\mathbb{Z}$.

3) Todo elemento de $\mathbb{Q}$ distinto de cero posee para ambas leyes, un inverso en $\mathbb{Q}$

4) $\mathbb{Q}$ es un anillo conmutativo unitario.

5) Todo elemento en $\mathbb{Q}$ es el "cociente" de dos enteros.

6) $\mathbb{Q}$ es un campo.

Definiremos $\mathbb{Q}$ a partir de $\mathbb{Z}$ en una forma análoga a como se definió $\mathbb{Z}$, a partir de $\mathbb{N}$, en cursos anteriores. Sin embargo, esta construcción del conjunto de $\mathbb{Q}$ es sólo una forma de hacerlo entre otras como, por ejemplo, aceptar su existencia axiomáticamente u obtenerlo del conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales cuando se ha aceptado éste último axiomáticamente.

Luego veremos también algunas propiedades de $\mathbb{Q}$.

1.2 Definición de $\mathbb{Q}$

1.2.1 Construcción del conjunto $\mathbb{Q}$

Sea $\mathbb{Z}^*$ el conjunto de los enteros no nulos. $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ denota entonces el conjunto de los pares (a,b) de enteros tales que $b \neq 0$.

Al par (a,b) lo llamaremos fracción con numerador a y denominador b.

Consideremos en $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ la relación definida por:

$$(a,b)\mathfrak{R}(a',b') \Longleftrightarrow ab' = a'b$$

Teorema 1.1

La relación $\mathfrak{R}$ anteriormente definida es de equivalencia.

Demostración

1) Reflexividad:

Como $\forall (a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ se tiene que $ab = ab$ entonces $(a,b)\mathfrak{R}(a,b)$ y por tanto la relación es reflexiva.

2) Simetría:

Si (a,b) y (c,d) están en $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$, entonces $(a,b)\ \mathfrak{R}\ (c,d) \Longleftrightarrow ad = bc \Longleftrightarrow cb = da \Longleftrightarrow (c,d)\ \mathfrak{R}\ (a,b)$

3) Transitividad:

Sean $(a,b), (c,d)$ y $(e,f) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$:

$$(a,b)\ \mathfrak{R}\ (c,d) \Longrightarrow ad = bc \tag{1.1}$$

$$(c,d)\ \mathfrak{R}\ (e,f) \Longrightarrow cf = de \tag{1.2}$$

De 1.1 y 1.2 $adf = bcf = bde$ luego $d(af - be) = 0$

Como $d \neq 0$ y $\mathbb{Z}$ es un anillo entero, se obtiene que $af - be = 0$ o sea $(a,b)\ \mathfrak{R}\ (e,f)$ como se quería mostrar.

Definición 1.1

Al conjunto $\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/\mathfrak{R}$ lo llamamos conjunto de los números racionales.

Denotamos por $\overline{(a,b)}$ al número racional (clase de equivalencia) al que pertenece la fracción (a,b).

1.2.2 Leyes de composición interna en $\mathbb{Q}$

Producto en $\mathbb{Q}$

Definición 1.2

En el conjunto de las fracciones $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ definimos el producto $\times$ por:

$$(a,b) \times (c,d) = (ac, bd)$$

Nótese que $bd \neq 0$, pues $\mathbb{Z}$ es un anillo entero.

Propiedades del producto $\times$

1) La relación de equivalencia $\mathfrak{R}$ es compatible con el producto $\times$, o sea:

   $(a,b)\ \mathfrak{R}\ (c,d) \Longrightarrow (a,b) \times (m,n)\ \mathfrak{R}\ (c,d) \times (m,n)\ \forall\ (m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$.

   En efecto $(a,b)\ \mathfrak{R}\ (c,d) \Longrightarrow ad = bc$ luego $admn = bcmn\ \forall\ (m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ de donde se obtiene que $(a,b) \times (m,n)\ \mathfrak{R}\ (c,d) \times (m,n)$

2) El producto $\times$ es asociativo y conmutativo:

   Dados $(a,b), (c,d), (e,f) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ entonces:

$$\begin{array}{rcccl} & [(a,b) \times (c,d)] \times (e,f) & = & (ac, bd) \times (e,f) & = & ((a,c)e, (bd)f) \\ = & (a(ce), b(df)) & = & (ac, bd) \times (e,f) & = & (a,b) \times [(c,d) \times (e,f)]. \end{array}$$

   Por tanto el producto $\times$ es asociativo. La conmutatividad se obtiene similarmente.

Definición 1.3

En los números racionales llamamos producto $\dot{\times}$ a la ley de composición interna cociente de $\overline{(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/\mathfrak{R}}$ o sea, a la operación inducida naturalmente por $\times$. Es decir:

$$\overline{(a,b)}\ \dot{\times}\ \overline{(c,d)} = \overline{(a,b) \times (c,d)} = \overline{(ac,bd)}$$

Teorema 1.2

El conjunto $\mathbb{Q}^*$, de todos los números racionales salvo $(0,1)$ es un grupo conmutativo bajo el producto $\dot{\times}$

Demostración:

1) Asociatividad:

Dados $\overline{(a,b)}, \overline{(c,d)}, \overline{(e,f)} \in \mathbb{Q}^*$ entonces:

$$
\begin{array}{rcll}
\left[\overline{(a,b)} \dot{\times} \overline{(c,d)}\right] \dot{\times} \overline{(e,f)} & = & \overline{((a,b)\times(c,d))} \dot{\times} \overline{(e,f)} & = \\
\overline{((a,b)\times(c,d))\times(e,f)} & = & \overline{(a,b)\times((c,d)\times(e,f))} & = \\
\overline{(a,b)} \dot{\times} \overline{(c,d)\times(e,f)} & = & \overline{(a,b)} \dot{\times} \left[\overline{(c,d)} \dot{\times} \overline{(e,f)}\right] &
\end{array}
$$

Por lo tanto, el producto $\dot{\times}$ es asociativo.

2) Conmutatividad:

Sean $\overline{(a,b)}, \overline{(c,d)} \in \mathbb{Q}^*$ entonces:

$$\overline{(a,b)} \dot{\times} \overline{(c,d)} = \overline{(a,b)\times(c,d)} = \overline{(c,d)\times(a,b)} = \overline{(c,d)} \dot{\times} \overline{(a,b)}$$

Luego el producto $\dot{\times}$ es conmutativo.

3) Existencia del elemento neutro:

Considérese el número racional $\overline{(1,1)}$, $\overline{(a,b)} \dot{\times} \overline{(1,1)} = \overline{(a,b)\times(1,1)} = \overline{(a,b)}$ del mismo modo $\overline{(1,1)} \dot{\times} \overline{(a,b)} = \overline{(a,b)}$

4) Existencia de inversos:

Obsérvese que $(a,b) \times (b,a) = (ab,ab)\ \forall\, (a,b) \in \mathbb{Q}^*$. Ahora bien, $(ab,ab)\, \mathfrak{R}\, (1,1)$, de donde $\overline{(a,b)} \dot{\times} \overline{(b,a)} = \overline{(a,b)\times(a,b)} = \overline{(1,1)}$ por lo tanto, $\overline{(b,a)}$ es el inverso multiplicativo de $\overline{(a,b)}$.

La adición en $\mathbb{Q}$.

Definición 1.4

Definimos en el conjunto de las fracciones de fracciones "+" por :

$$(a,b) + (c,d) = (ad + bc, bd)$$

Obsérvese que la adición es cerrada dado que $\mathbb{Z}$ es un anillo entero (por lo tanto $bd \neq 0$).

Propiedades de la suma $+$

1) La relación $\mathfrak{R}$ es compatible con la suma $+$. En efecto, dados $(a,b),\ (c,d),\ (a'b') \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$:

$$(a,b)\ \mathfrak{R}\ (a',b') \Longrightarrow ab' = a'b$$

de donde se tiene $ab'd^2 = a'bd^2$ luego $ab'd^2 + bcb'd = a'bd^2 + bcb'd$
y $(ad+bc)b'd = (a'd+b'c)bd$, por tanto $(a,b)+(c,d)\ \mathfrak{R}\ (a',b')+(cd)$.

2) La suma $+$ es asociativa y conmutativa

En efecto, dados $(a,b),\ (c,d),\ (e,f) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ se tiene:

$$[(a,b)+(c,d)]+(e,f) = (ad+bc,\ bd)+(ef) = (adf+bcf+bde,\ bdf)$$

$$(a,b)+[(c,d)+(e,f)] = (a,b)+(cf+de,\ df) = (bcf+bde+adf,\ bdf)$$

Luego, la suma $+$ es asociativa. La conmutatividad se obtiene inmediatamente de la definición y de las propiedades de $\mathbb{Z}$.

Definición 1.5

En los números racionales llamamos suma $\dot{+}$ a la operación inducida naturalmente por $+$. Es decir:

$$\overline{(a,b)}\ \dot{+}\ \overline{(c,d)} = \overline{(a,b)+(c,d)}$$

Teorema 1.3

El conjunto de los números racionales bajo la suma $\dot{+}$ es un grupo conmutativo.

Demostración

1) Asociatividad:

Sean $\overline{(a,b)},\ \overline{(c,d)},\ \overline{(e,f)}\ \in \mathbb{Q}$. Entonces:

$$\begin{array}{ccccc}
\left[\overline{(a,b)}\ \dot{+}\ \overline{(c,d)}\right]\ \dot{+}\ \overline{(e,f)} & = & \overline{(a,b)+(c,d)}\ \dot{+}\ \overline{(e,f)} & = \\
\overline{((a,b)+(c,d))+(e,f)} & = & \overline{(a,b)+((c,d)+(e,f))} & = \\
\overline{(a,b)}\ \dot{+}\ \overline{(c,d)+(e,f)} & = & \overline{(a,b)}\ \dot{+}\ \left[\overline{(c,d)}\ \dot{+}\ \overline{(e,f)}\right] &
\end{array}$$

2) Conmutatividad:

Sean $\overline{(a,b)}$, $\overline{(c,d)}$ $\in \mathbb{Q}$ entonces:

$\overline{(a,b)} \dot{+} \overline{(c,d)} = \overline{(a,b)+(c,d)} = \overline{(c,d)+(a,b)} = \overline{(c,d)} \dot{+} \overline{(a,b)}$

3) Existencia del elemento neutro:

Es sencillo probar que si $\overline{(a,b)} \in \mathbb{Q}$, se tiene que $\overline{(a,b)} \dot{+} \overline{(0,1)} = \overline{(a,b)}$. Por tanto, $\overline{(0,1)}$ es el neutro aditivo de $\mathbb{Q}$.

4) Existencia de inversos:

Fácilmente podemos verificar que si $\overline{(a,b)} \in \mathbb{Q}$: $\overline{(a,b)} \dot{+} \overline{(-a,b)} = \overline{(0,1)}$. Luego el inverso aditivo de $\overline{(a,b)}$ en $\mathbb{Q}$ es $\overline{(-a,b)}$

Teorema 1.4

El conjunto de los números racionales es un campo conmutativo bajo la suma $\dot{+}$ y el producto $\dot{\times}$.

Demostración

Por los teoremas 1.2 y 1.3, únicamente resta probar que el producto $\dot{\times}$ distribuye con respecto a la suma $\dot{+}$.

Sean $\overline{(a,b)}$, $\overline{(c,d)}$, $\overline{(r,s)}$ $\in \mathbb{Q}$. Hay que demostrar que:

$$\overline{(a,b)} \dot{\times} \left[\overline{(c,d)} \dot{+} \overline{(r,s)}\right] = \left[\overline{(a,b)} \dot{\times} \overline{(c,d)}\right] \dot{+} \left[\overline{(a,b)} \dot{\times} \overline{(r,s)}\right]$$

1) $\overline{(a,b)} \dot{\times} \left[\overline{(c,d)} \dot{+} \overline{(r,s)}\right] = \overline{(a,b)} \dot{\times} \overline{(cs+rd, ds)} = \overline{acs+ard, bds}$

2) $\left[\overline{(a,b)} \dot{\times} \overline{(c,d)}\right] \dot{+} \left[\overline{(a,b)} \dot{\times} \overline{(r,s)}\right] = \overline{(ac,bd)} \dot{+} \overline{(ar,bs)} = \overline{(b(acs+ard), b^2ds)} =$ $\overline{(acs+ard, bds)} \dot{\times} \overline{(b,b)} = \overline{(acs+ard, bds)}$ pues $\overline{(b,b)} = \overline{(1,1)}$

Entonces, de 1 y 2, se obtiene la propiedad deseada.

Nota: A partir de este momento,se pueden aplicar todas las propiedades de potencias a las que el lector debe estar acostumbrado y que utilizaremos sin más en este libro.

1.2.3 $\mathbb{Z}$ está contenido en $\mathbb{Q}$

A continuación mostraremos que $\mathbb{Z}$ con la suma y la multiplicación que le son propias, es isomorfo a un subconjunto de los números racionales $\mathbb{Z}'$ con la restricción correspondiente al producto $\dot{\times}$ y la suma $\dot{+}$ antes definidos en $\mathbb{Q}$. Luego identificaremos $\mathbb{Z}$ con $\mathbb{Z}'$ y por tanto diremos que $\mathbb{Z}$ es un subconjunto de $\mathbb{Q}$.

Definición 1.6

Sea $\mathbb{Z}'$ el conjunto de los números racionales de la forma $\overline{(a,1)}$, $a \in \mathbb{Z}$. Definimos:

$$\psi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}' / \ \ \psi(a) = \overline{(a,1)}$$

Obsérvese que $\mathbb{Z}' - \{\overline{(0,1)}\}$ es un subgrupo de los números racionales bajo el producto $\dot{\times}$.

Teorema 1.5

La aplicación ψ anteriormente definida es un isomorfismo.

Demostración:

1) ψ es lineal.

Sean $a,\ b \in \mathbb{Z}$. Entonces se tiene que:

$\psi(a+b) = \overline{(a+b,1)} = \overline{(a,1)} \dot{+} \overline{(b,1)} = \psi(a) + \psi(b)$

Además:

$\psi(a \cdot b) = \overline{(a+b,1)} = \overline{(a,1)} \dot{\times} \overline{(b,1)} = \psi(a)\, \psi(b)$

lo que dice que ψ es lineal tanto con respecto a la suma como con respecto al producto.

2) ψ es sobreyectiva ya que dado $\overline{(a,1)}$, $a \in \mathbb{Z}$, se cumple que $\psi(a) = \overline{(a,1)}$.

3) ψ es inyectiva:

Sean $a, b \ \in \mathbb{Z}$ tales que:

$\psi(a) = \psi(b) \Longrightarrow \overline{(a,1)} = \overline{(b,1)} \Longrightarrow (a,1)\ \mathfrak{R}\ (b,1) \Longrightarrow a = b$

Dado que $\mathbb{Z}$ y el conjunto $\mathbb{Z}'$ son isomorfos, haremos una identificación entre los elementos de ambos conjuntos y diremos que:

$$a = \overline{(a,1)}\ \forall a \in \mathbb{Z}$$

También podemos hacer una identificación entre el producto $\times$ y el producto $\dot{\times}$, pues obsérvese que:

$$a \times b = \overline{(a,1)} \dot{\times} \overline{(b,1)}$$

De ahora en adelante usaremos el símbolo $\times$ para designar cualquiera de los productos. Será tarea del lector distinguir de cuál de los dos se trata.

1.2.4 Ley de composición inversa de la multiplicación

Si x, z están en $\mathbb{Q}$ y z es diferente de 0, entonces existe un único número racional w que satisface $x = z \cdot w$. En efecto, $w = x \cdot z^{-1}$ donde z^{-1} es el inverso multiplicativo de z. Se recordará que el inverso es único, de ahí la unicidad de w.

Basados en esta observación definiremos el "cociente" de dos números racionales.

Definición 1.7

El producto $\times$ de $\mathbb{Q}^*$ posee una ley de composición interna a la que llamaremos cociente o división que asocia a una pareja a, z de números racionales con $z \neq 0$ el número racional w donde $w = a \cdot z^{-1}$.

Denotaremos a w por $\dfrac{a}{z}$, o sea, $w = \dfrac{a}{z}$

Cabe observar que el cociente definido anteriormente, no es la división euclidiana que se estudió en cursos anteriores, aunque posteriormente se hará la comparación correspondiente.

Teorema 1.6

Todo número racional es el cociente de dos números enteros.

Demostración

Dado $\overline{(a,b)} \in \mathbb{Q}$ se tiene que

$$\overline{(a,b)} = \overline{(a,1)} \times \overline{(1,b)} = \overline{(a,1)} \times (\overline{(b,1)})^{-1}$$

y por la identificación de $\mathbb{Z}$ con $\mathbb{Z}'$:

$$\overline{(a,b)} = a \times b^{-1} = \frac{a}{b}$$

Se puede hacer la identificación

$$\overline{(a,b)} = \frac{a}{b} \quad , \; b \neq 0$$

que resultará muy cómoda para operar como el lector lo habrá comprobado en la escuela elemental.

Definición 1.8

Diremos que el número racional a/b es igual al número racional c/d sii $ad = bc$, lo cual se deduce naturalmente de la definición de relación $\mathfrak{R}$. y de la identificación hecha.

En particular, se tiene que si $a/b \in \mathbb{Q}$ y $k \in \mathbb{Z}$ se tiene que $\dfrac{a}{b} = \dfrac{ak}{bk}$

Por ejemplo, $\dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{6}$. Además, $\dfrac{-a}{b} = -\dfrac{a}{b} = \dfrac{a}{-b}$

De ahora en adelante no se hará distinción entre la suma $+$ y la suma $\dot{+}$, dada la identificación del racional $\overline{(a,b)}$ con el cociente de dos enteros. Recuérdese que si a y b pertenecen a $\mathbb{Z}$, con $b \neq 0$, existen q y r únicos tales que

$$a = bq + r \quad \text{y} \quad 0 \leq r < b$$

Como b pertenece a $\mathbb{Q}$ (en la forma $\overline{(b,1)}$) también b^{-1} (en la forma $\overline{(b,1)}^{-1} = \overline{(1,b)}$) pertenece a $\mathbb{Q}$ y por tanto,

$$a \cdot b^{-1} = b \cdot b^{-1} \cdot q + r \cdot b^{-1}$$

de donde $\dfrac{a}{b} = q + \dfrac{r}{b}$ lo que simplifica el concepto de "cociente" en $\mathbb{Q}$, y el concepto de cociente, valga decir, el algoritmo de la división en $\mathbb{Z}$.

1.2.5 Extensión a $\mathbb{Q}$ de la relación de orden de $\mathbb{Z}$

Se recordará que en la definición de la relación de orden de $\mathbb{Z}$, se hacía uso de un subconjunto $\mathbb{N}$ de los números enteros positivos, por lo que para hacer un proceso análogo en $\mathbb{Q}$, definimos Q^+ por el conjunto de los números racionales formados por el cociente de dos enteros positivos.

Propiedades de Q^+

1) La suma $+$ y el producto $\times$ restringidos a $\mathbb{Q}^+$ son cerrados.

   En efecto, si x, y están en $\mathbb{Q}^+$ se cumple que $x = \dfrac{a}{b}$ y $y = \dfrac{c}{d}$ donde a, b, c, d están en $\mathbb{N}$.

   Luego, $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$ y es claro que $\dfrac{ac}{bd}$ está en $\mathbb{Q}^+$.

   Por otra parte, $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad+bc}{bd}$ y de nuevo $\dfrac{ad+bc}{bd}$, está en $\mathbb{Q}^+$.

2) Obviamente 0 está en Q^+.

3) El cociente de dos enteros negativos pertenece a $\mathbb{Q}^+$, pues:

$$\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$$

4) Dado $x \in \mathbb{Q}$ se cumple que $x \in \mathbb{Q}^+$ ó $-x \in \mathbb{Q}^+$.

5) Si x y $-x$ son dos números racionales que pertenecen a $\mathbb{Q}^+$, entonces $x = 0$, pues

$$x = \frac{a}{b} \ \text{ y } \ -x = \frac{c}{d} \quad \text{con } a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{N}$$

   Luego $b = d \Longrightarrow ad = -bc$ y como $ad \geq 0$ y $-bc \leq 0$, tenemos que $ad = 0$ lo que implica que $a = 0$ pues, por definición, $d \neq 0$. Por tanto, $x = 0$.

6) Si x está en $\mathbb{Q}$, entonces $x \geq 0$ si y solamente si x está en $\mathbb{Q}^+$.

7) La relación de orden en Q es total.

   En efecto, dados x, $y \in \mathbb{Q}$, entonces $x - y \in \mathbb{Q}$ lo que implica que, o bien $x - y$ está en Q^+ o bien $y - x$ está en $\mathbb{Q}^+$ o lo que es lo mismo: $x \leq y$ ó $y \leq x$

8) La relación de orden $\leq$ es compatible con la suma pues

$$x \leq y \Longrightarrow y - x \in \mathbb{Q}^+ \tag{1.3}$$
$$x' \leq y' \Longrightarrow y' - x' \in \mathbb{Q}^+ \tag{1.4}$$

Como Q^+ es cerrada con la suma, de 1.3 y 1.4 tenemos que:

$$(y + y') - (x - x') \in \mathbb{Q}^+ \Longrightarrow x + x' \leq y + y'.$$

9) Si k está en Q^+ y $y - x$ está en $\mathbb{Q}^+$, entonces se cumple que $k(y - x)$ está en Q^+, i.e. $k \geq 0$ y $x \leq y \Longrightarrow kx \leq ky$

Recuérdese que todo campo es un anillo entero, pues $x \cdot y = 0 \Longrightarrow x^{-1} \cdot x \cdot y = x^{-1} \cdot 0 \Longrightarrow y = 0$ (El recíproco es falso: $\mathbb{Z}$ es un anillo entero y no es un campo).

Por otra parte, en todo campo K se tiene que $\dfrac{x}{y} + \dfrac{x'}{y} = \dfrac{x + x'}{y}$ para x, x' en K, y en K^*

10) Si el campo es conmutativo y ordenado, dados dos elementos x, z “del mismo signo” se tiene que si $x < z \Longrightarrow \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{z}$ pues si $x > 0,\ x < z \Longrightarrow 1 < \dfrac{z}{x} \Longrightarrow \dfrac{1}{z} < \dfrac{1}{x}$

11) Si $y < 0$ y $x < y \Longrightarrow -x < -y \Longrightarrow \dfrac{1}{-x} < \dfrac{1}{-y} \Longrightarrow \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$.

Como ya demostramos que $\mathbb{Q}$ es un campo conmutativo totalmente ordenado, se cumplen las propiedades 10 y 11.

Definición 1.9

Definimos la relación $\dot{\leq}$ en $\mathbb{Q}$ por $x \dot{\leq} y \Longleftrightarrow y - x \in \mathbb{Q}^+$

Teorema 1.7

$\dot{\leq}$ es una relación de orden en $\mathbb{Q}$.

Demostración:

1) Reflexividad: Si x está en Q, se cumple que $x - x = 0$ y como 0 pertenece a $\mathbb{Q}^+$, se tiene que $x \leq x$.

2) Antisimetría: Dados $x, y \in \mathbb{Q}$

$$x \dot{\leq} y \Longrightarrow y - x \in \mathbb{Q}^+$$

$$y \dot{\leq} x \Longrightarrow x - y \in \mathbb{Q}^+$$

y por la propiedad 5 se tiene que

$$x - y = 0 \Longrightarrow x = y$$

3) Transitividad: Sean $x,\ y,\ z \in \mathbb{Q}$

$$x \dot{\leq} y \Longrightarrow y - x \in \mathbb{Q}^+$$

$$y \dot{\leq} z \Longrightarrow z - y \in \mathbb{Q}^+$$

Como $\mathbb{Q}^+$ es cerrado bajo la suma se tiene que

$$y - x + z - y \in \mathbb{Q}^+ \Longrightarrow z - x \in \mathbb{Q}^+ \Longrightarrow x \dot{\leq} y$$

Nótese que la relación $\dot{\leq}$ es una extensión de la relación $\leq$ pues si $x,\ y \in \mathbb{Z}$ entonces:

$$x \leq y \Longleftrightarrow y - x \in \mathbb{N}$$

pero como $y - x = \dfrac{y-x}{1}$ que está en $\mathbb{Q}^+$ entonces $x \dot{\leq} y$.

Dada esta extensión, de ahora en adelante utilizaremos sin ninguna distinción las relaciones $\leq$ y $\dot{\leq}$

Definición 1.10

Si $\dfrac{x}{y}$ está en $\mathbb{Q}$, definimos $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$

A partir de la definición se demuestran fácilmente las siguientes propiedades del valor absoluto en Q:

1) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ para todo $a,\ b \in \mathbb{Q}$
2) $|a + b| \leq |a| + |b|$ para todo $a,\ b \in \mathbb{Q}$
3) $|a| \leq 0$ para todo $a \in \mathbb{Q}$
4) $|a| = 0 \Longleftrightarrow a = 0$
5) $||a| - |b|| \leq |a - b|$ para todo $a,\ b \in \mathbb{Q}$

1.3 Representación irreducible de un número racional

Recuerde que todo racional se puede escribir como el cociente a/b de dos enteros a y b, $b \neq 0$ donde a representa al numerador y b al denominador.

Si consideramos el número racional $x = a/b$ y si d es un divisor común de a y b, es decir, $a = da'$ y $b = db'$ con a' y b' en $\mathbb{Z}$ entonces:

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$

y decimos que a'/b' es una representación de x obtenida a partir de la representación a/b por medio de la simplificación por d.

Definición 1.11

Una fracción se llama irreducible si su denominador es positivo y primo relativo con el valor absoluto del numerador.

Teorema 1.8

Todo número racional x posee una y solo una representación irreducible a'/b' y, cualquier otra representación es de la forma $\dfrac{ka'}{kb'}$ con k en $\mathbb{Z}^*$.

Demostración:

1) Existencia de una representación irreductible.

Sea $x \in \mathbb{Q}$ y a/b una representación de x. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $b > 0$. Si a/b no es un número irreducible, entonces:

$$\text{m.c.d } (|a|, b) = d \neq 1$$ [1]

Por tanto

$$\left.\begin{array}{rcl} |a| & = & a'd \\ b & = & b'd \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \text{ ó } \frac{a}{b} = \frac{-a'}{b'}$$

Claramente $\dfrac{|a'|}{b'}$ es irreducible pues

$$\text{m.c.d.} \left(\frac{|a|}{d}, \frac{b}{d} \right) = 1$$

2) Unicidad de la representación irreducible.

Supongamos que existen $\dfrac{a'}{b'}, \dfrac{a''}{b''} \in \mathbb{Q}$ ambas representaciones irreducibles de $\dfrac{a}{b}$, es decir:

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} \quad \text{y} \quad \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}$$

fracciones irreducibles, entonces

$$a'b'' = a''b' \Longrightarrow b' \mid a'b'' \tag{1.5}$$

Como $|a'|$ y b son primos relativos se tiene que

$$b' \mid b'' \Longrightarrow b' = b''k \tag{1.6}$$

Luego de 1.5 se tiene:

$$a'b'' = a''b''k \Longrightarrow a' = ka'' \tag{1.7}$$

de 1.6 y 1.7:

[1] m.c.d (x, y) denota el máximo común divisor de x y y

$$\frac{a'}{b'} = \frac{ka''}{kb''}$$

y por tanto $\frac{a'}{b'}$ no es una fracción irreducible a menos que $k = 1$, en cuyo caso $\frac{a'}{b'}$ y $\frac{a''}{b''}$ son exactamente la misma fracción.

Nótese que por un método muy similar al de la parte 2 se puede probar que todas las representaciones de a/b son de la forma

$$\frac{a'k}{b'k} \text{ con } k \in \mathbb{Z}^*$$

Teorema 1.9

Un número racional r es la potencia k-ésima de un número racional x sii el denominador y el numerador de la representación irreducible de r son la k-ésima potencia de números enteros (es decir, si a/b es la fracción irreducible de n y n es la potencia k-ésima de un número racional x, entonces $a = c^k$ y $b = d^k$ con c, d en $\mathbb{Z}$, $d \neq 0$)

Demostración

Sea $r \in \mathbb{Q}$ tal que $r = x^k$ y sea la c/d representación irreducible de x. Entonces:

$$r = \frac{c^k}{d^k}$$

Como $|c|^k$ y d^k son primos relativos pues $|c|$ y d lo son, $\frac{c^k}{d^k}$ es la fracción irreducible de r (que por teorema 1.8 es única) y se cumple que su denominador y numerador son la k-ésima potencia de enteros c y d.

Sea ahora a/b la representación irreducible de r con $a = c^k$ y $b = d^k$, entonces

$$r = \frac{c^k}{d^k} = \left(\frac{c}{d}\right)^k = \frac{a}{b}$$

con lo cual r es la k-ésima potencia de $x = \frac{c}{d}$

Corolario 1.1 Cualquier potencia positiva de un racional no entero es un número racional no entero.

Ejemplo 1.1

$\frac{14}{9}$ no puede ser el cuadrado de un numero racional pues 14 y 9 son primos relativos y 14 no es cuadrado de ningún entero.

Obsérvese que si n está en $\mathbb{N}$ y $x^k = n$ no tiene solución en $\mathbb{N}$, entonces como se recordará, tampoco la tiene en $\mathbb{Z}$ y, por el corolario anterior, tampoco la tendrá en $\mathbb{Q}$.

1.4 Representación de racionales en base b

1.4.1 Parte entera y parte fraccionaria de un número racional

Como es sabido,se puede representar cualquier número entero en un sistema de numeración en base b, con $b \geq 2$. En lo que sigue trataremos la representación de los números racionales en base b, con $b \geq 2$ y $b \in \mathbb{Z}$.

Consideremos el número racional c/d; entonces, por la división euclidiana de c por d, se tiene que $c = dq+r$, con $o \leq r < d$. Luego, aplicando el cociente o ley de multiplicación inversa, tenemos que

$$\frac{c}{d} = \frac{dq+r}{d} = q + \frac{r}{d}$$

Definición 1.12

Se dice que q es la parte entera de un numero racional $x = \frac{c}{d}$ si q es el mayor entero menor o igual a x (i.e. $q \leq \frac{c}{d} < q+1$) y a la diferencia de la parte con el número racional $\frac{c}{d}$ la llamamos parte fraccionaria.

Por ejemplo, si consideramos $\frac{25}{3}$ se tiene que $8 \leq \frac{25}{3} < 9$ por tanto 8 es la parte entera de $\frac{25}{3}$, y la parte fraccionaria es $\frac{25}{3} - 8 = \frac{1}{3}$.

Obsérvese que esta definición es equivalente a decir que la parte entera de $\frac{c}{d}$ es q, donde $c = qd + r$ con $0 \leq r < d$ y la parte fraccionaria es $\frac{r}{d}$; se ve entonces que la parte fraccionaria y la parte entera de un número racional son únicas.

Nótese además, que para representar el número racional basta estudiar la representación de la parte fraccionaria, ya que $0 \leq r/d < 1$, por lo que estudiaremos a continuación la representación en base $b \geq 2$ de los números racionales que se encuentran en el intervalo $[0, 1[$.

1.4.2 Números b-ádicos

Definición 1.13

Sea $b \geq 2$ un entero positivo; decimos que un número racional x es un número b-ádico si existe un entero a y un natural n tales que

$$x = \frac{a}{b^n}$$

Para el caso particular $b = 10$, a los números 10-ádicos se les llama números decimales y para el caso $b = 2$ se les llama números diádicos.

Denotamos por A_b el conjunto de los números b-ádicos.

Propiedades de los números b-ádicos

1) El conjunto $\mathbb{Z}$ está contenido en A_b que a la vez está contenido en $\mathbb{Q}$, pues si z está en $\mathbb{Z}$, se tiene que $z = \dfrac{zb}{b}$ y por tanto z esta en A_b

   Por definición se tiene que A_b está contenido en $\mathbb{Q}$.

2) La adición y el producto son cerrados en A_b, pues

$$\frac{a}{b^n} \times \frac{c}{b^m} = \frac{ac}{b^{n+m}} \quad \text{y} \quad \frac{a}{b^n} + \frac{c}{b^m} = \frac{ab^m + cb^n}{b^{n+m}}$$

3) Bajo la suma, A_b es un subgrupo conmutativo de $\mathbb{Q}$, pues si $\dfrac{a}{b^n}$, $\dfrac{c}{b^s}$ están en A_b

$$\frac{a}{b^n} - \frac{c}{b^s} = \frac{ab^s - cb^n}{b^{n+s}}$$

4) La restricción del producto en A_b es obviamente asociativo y distribuye con respecto a la suma.

Concluimos entonces diciendo que A_b es un anillo conmutativo unitario y entero.

Teorema 1.10

Para que un número racional x sea b-ádico es necesario y suficiente que todo divisor primo del denominador de la representación irreducible de x sea un divisor de b.

Demostración

Sea $x \in \mathbb{Q}$ y p/q su representación irreducible y supongamos que x es un número b-ádico, entonces:

$$\frac{p}{q} = \frac{a}{b^n} \Longrightarrow p\,b^n = aq$$

luego $q \,|\, p\,b^n$, pero como q y p son primos relativos, entonces $q \,|\, b^n$ por lo que todo divisor primo de q es un divisor primo de b^n y con ello de b.

Por otra parte, supongamos que la representación prima de q es

$$q = p_1^{\alpha_1} x \ldots x\, p_r^{\alpha_r}$$

y que b es divisible por $p_1 x \ldots x\, p_r$. Considérese el entero n igual al $max(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, entonces

$$p_1^n\, x \ldots x\, p_r^n \,|\, b^n$$

y por tanto q es divisible por b^n, o sea, existe k en $\mathbb{Z}$ tal que

$$b^n = kq$$

y así $\dfrac{p}{q} = \dfrac{kp}{b^n}$ obteniéndose el resultado del teorema.

Por ejemplo, $1/30$ no es un número decimal, pues 3 es un divisor primo de 30 y 3 no divide a 10.

Nótese que si a es un entero mayor que b y distinto de una potencia de b, entonces b/a no es un número b-ádico.

Deducimos que A_b no es un campo (recuerde que a está en A_b, pues $\mathbb{Z} \subseteq A_b$).

1.4.3 Representación en base b de los números b-ádicos

Recordemos que todo número racional x está definido por la parte entera más la parte fraccionaria f que cumple $0 \leq f < 1$.

Por eso vamos a definir una representación $\overline{f}$ del número b-ádico f en base b a la que llamaremos "representación incompleta", para no hacer confusión con la representación del número b-ádico f de parte entera "0".

Definición 1.14

Sea $y = \dfrac{a}{c}$ un número b-ádico en $[0,1[$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ se tiene que $0 \leq a < b^n$.

Sabemos que a tiene como representación en base b con n dígitos:

$$a = q_1\, b^{n-1} + q_2\, b^{n-2} + \ldots + q_n$$

Decimos que una representación incompleta de orden n de y es

$$y = \frac{q_1\, b^{n-1} + \ldots + q_n}{b^n} = q_1\, b^{-1} + \ldots + q_n\, b^{-n}$$

Llamamos "representación mínima de y" (o representación de orden mínimo) a la representación incompleta de orden n.

Obsérvese que un número b-ádico en $[0,1[$ tiene muchas representaciones incompletas.

Las representaciones incompletas de un número b-ádico en $[0,1[$ se obtienen a partir de la representación incompleta de orden mínimo agregando ceros a la derecha.

En efecto, si $y = \dfrac{a}{b^n}$ es la representación mínima, entonces

$$\frac{a}{b^n} = \frac{a\, b^p}{b^{n+p}}$$

y

$$\frac{a}{b} = q_1\, b^{n-1} + \ldots + q_n\,,$$

luego $y = \dfrac{(q_1\, b^{n-1} + \ldots + q_n) b^p}{b^{n+p}} = \dfrac{q_1 b^{n-1+p} + \ldots + q_n b^p + 0 \cdot b^{p-1} + 0 + \ldots + 0}{b^{n+p}}$

y por tanto se tiene la "misma representación" agregándole ceros a la derecha.

Por otra parte a no puede dividir a b pues se tendría que $y = \dfrac{a'}{b^{n-1}}$ lo cual contradice el hecho de que $\dfrac{a}{b^n}$ es la mínima representación y por tanto q_n no puede ser "0"

Ejemplo 1.2

$\dfrac{1}{2} = 0.5$ representación mínima en la base diez, $n = 1$, o sea, representación incompleta de orden 1.

$\frac{1}{2} = 0.50$ representación incompleta de orden 2.

Los números enteros serán entonces representados como acostumbramos a hacerlo en $\mathbb{Z}$. Los números racionales positivos, de la siguiente manera: ponemos primero la parte entera (en base b), luego una coma y a continuación la representación de la parte fraccionaria, también en la base b.

Así, por ejemplo, en numeración decimal, $1,344$ y $0,0014$ son las representaciones de orden mínimo de $\frac{1344}{10^3}$ y $\frac{14}{10^4}$ respectivamente.

Por otro lado, si consideramos un número racional x con parte entera e, con $e = q_n\, q_{n-1}\, \ldots\, q_0$ en base b y de parte fraccionaria f cuya representación en base b sea $f = g_1\, g_2\, \ldots\, g_s$, sabemos entonces que la representación del racional x en base b es

$$x = e + f = q_n\, q_{n-1}\, \ldots\, q_0,\, g_1\, g_2\, \ldots\, g_s$$

o sea que

$$x = q_n\, b^n + \ldots + q_0 + g_1\, b^{-1} + \ldots + g_s\, b^{-s}$$

1.4.4 Representación de los números b-ádicos negativos

Todo número b-ádico negativo x es el inverso aditivo de un número b-ádico positivo $-x$. Obtenemos la representación b-ádica de x con solo agregar un signo "$-$" a la de $-x$.

Así por ejemplo, $-\frac{125}{100}$ se representa en base decimal por $-1,25$

Por otra parte, nótese que $-\frac{125}{100} = -2 + \frac{75}{100}$ que escribimos también como $-2 + 0,75$.

Como notación usaremos $-2 + 0,75 = \overline{2},75$.

El símbolo "$-$" sobre la primera cifra nos indicará que se trata de una parte entera negativa y una parte fraccionaria positiva. Por otra parte, sabemos que si el símbolo "$-$" está a la izquierda del número, tanto la parte entera como la fraccionaria, son negativas:

$$-\frac{125}{100} = -1,25$$

La primera representación citada en el párrafo anterior es más cómoda para operar, todas las partes fraccionarias se suman, independientemente del "signo" de cada número; las restas no aparecen más que entre enteros, resulta sencillo resolverlas.

Para ilustrar el método veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.3

$$\begin{array}{r} 1,72436 \\ \overline{3},51642 \\ 2,03281 \\ \overline{1},64357 \\ \hline \overline{2},91716 \end{array}$$

La suma de las partes fraccionarias es $1,91716 = 1 + 0,91716$. La suma de las partes enteras es $\overline{3}$, ó lo que es lo mismo -3. De donde el resultado final será $\overline{3} + (1 + 0,91716) = \overline{2} + 0,91716 = \overline{2},91716$.

Es fácil pasar de una representación a la otra, pues si e es la parte entera y f la parte fraccionaria de un número racional:

$$-(e+f) = -(e+1) + 1 - f \text{ donde } 0 < 1 - f < 1$$

1.4.5 Aproximación de un racional por números b-ádicos

Los números b-ádicos son los únicos representables como una suma de términos de la forma $t \cdot b^p$ con $p \in \mathbb{Z}$ y $t \in \mathbb{N}$.

Sea ahora c/d un racional cualquiera con $d > 0$; vamos a estudiar su aproximación por números b-ádicos.

Se quiere encontrar un entero a tal que para $n \in \mathbb{N}$ se tenga que

$$\frac{a}{b^n} \leq \frac{c}{d} < \frac{a+1}{b^n}$$

o lo que es equivalente $ad \leq c\,b^n < da + d$

En efecto, tal a existe por la división euclidiana de $c\,b^n$ por d, o sea, se tiene que $c\,b^n = da + r$ con $0 \leq r < d$

Definición 1.15

Dado un racional c/d y un natural n, al entero a que satisfaga

$$\frac{a}{b^n} \leq \frac{c}{d} < \frac{a+1}{b^n}$$

se le llama la aproximación b-ádica de orden n del racional c/d. Esta aproximación siempre existe por la observación anterior a la definición.

Por ejemplo, la aproximación decimal de orden 1 del racional $\dfrac{80}{7}$ es $2,5$ pues

$$\frac{25}{10} = 2,5 < \frac{180}{7} < \frac{26}{10} = 2,6$$

Notemos que al hacer variar n obtenemos, para cada número racional un sucesión infinita de cifras en su representación b-ádica.

Las denotaremos como a_0 (a la parte entera), $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}, \ldots$.

De esta manera queda determinado todo número racional: si consideramos dos racionales distintos, sus representaciones b-ádicas no pueden ser iguales para todo entero n.

Lema 1.1 Para todo entero $n \in \mathbb{N}$ y para todo $b \geq 2$ se tiene que

$$b^n > n$$

Demostración

Lo demostraremos por inducción sobre n.

El resultado es obvio para $n = l$.

Supongamos que se cumple para un entero n. Esto es

$$b^n > n$$

Debemos mostrar que $b^{n+l} > n + l$ deduciéndolo de $b^n > n$:

$$b^{n+l} > bn \geq 2n = n + n \geq n + l$$

Teorema 1.11

Sean dos racionales x, x' tales que $x < x'$. La aproximación b-ádica de orden n de x es entonces menor o igual a la de x'. La desigualdad estricta se obtiene para un n suficientemente grande.

Demostración

Sean x, x' en $\mathbb{Q}$ y $\frac{a_n}{b_n}$ y $\frac{a'_n}{b_n}$ sus aproximaciones b-ádicas de orden n respectivamente.

$$\frac{a_n}{b_n} \leq x < x' < \frac{a' + 1}{b^n} \Longrightarrow a_n < a_{n+1} < a'_n + 1 \Longrightarrow a_n \leq a'_n$$

y por eso, la representación de x es menor o igual a la de x'.

Considérese ahora un entero n tal que

$$n \geq \frac{1}{x' - x} \Longrightarrow b^n > \frac{1}{x' - x} \Longrightarrow \frac{1}{b^n} < x' - x$$

entonces $\frac{a_n + 1}{b^n} \leq x + \frac{1}{b^n} < x' < \frac{a'_n + 1}{b^n}$

luego $a_n + 1 < a'_n + 1 \Longrightarrow a_n < a'_n$

de donde se obtiene que la representación de x' es mayor que la de x.

1.4.6 Representación de racionales en base b por una sucesión infinita

Estudiemos a continuación las aproximaciones de orden $n-l$ o sea, $\dfrac{a_{n-1}}{b_{n-1}}$ y siguientes de un racional $\dfrac{c}{d}$.

Recordemos que a_{n-1} se obtiene por la división euclidiana de $c\,b^{\,n-1}$ por d.

$$c\,b^{\,n-1} = d\,a_{n-1} + r_{n-1}$$

luego, para obtener a_n tenemos:

$$c\,b^{n} = d\,a_{n-1}\,b + r_{n-1}\,b$$

y haciendo la división euclidiana de r_{n-1} por d:

$$r_{n-1}\,b = d\,q_n + r_n \quad \text{con } r_n < b\,;$$

luego

$$c\,b^{n} = d(a_{n-1}\,b + q_n) + r_n$$

con $r_n < b$. Por tanto, a partir de a_0 y r_0 podemos obtener por recurrencia a_n y r_n.

$$a_n = a_{n-1}\,b + q_n$$

donde q_n es el cociente de la división euclidiana r_{n-1} por d y r_n su resto. Luego

$$\frac{a_n}{b^n} = \frac{a_{n-1}}{b^{\,n-1}} + \frac{q_n}{b^n}$$

Como q_n es menor que b,

$$\frac{a_n}{b^n} \leq \frac{c}{d} < \frac{a_{n-1}+1}{b^{\,n-1}}$$

La aproximación $\dfrac{a_{n-1}}{b^{\,n-1}}$ posee una representación en base b, con la cual podemos obtener la representación de $\dfrac{a_n}{b^n}$.
Solamente debemos agregar q_n a la derecha de la representación de $\dfrac{a_{n-1}}{b^{\,n-1}}$.

Hemos justificado así el método que se emplea desde la escuela, en numeración decimal, para obtener los números decimales: nos aproximamos por defecto de un cociente de enteros.

Así, por ejemplo, $\dfrac{18}{7}$ en base 10 lo obtenemos de la siguiente manera:

$$\begin{array}{l|l}
18 & 7 \\ \hline
40 & 2,57142857 \\
\;\;50 & \\
\;\;\;\;10 & \\
\;\;\;\;\;\;30 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;20 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;60 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;40 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;50 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;1 &
\end{array}$$

Entonces, para todo número racional x, existe una sucesión infinita de enteros $a_0, q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$ todos, salvo tal vez a_0, mayores que 0 y menores que $b-1$, tales que:

1) a_0 es la parte entera de x.

2) Esta sucesión es única y distinta para cada número racional.

Definición 1.16

Para todo entero $n \geq 1$, llamamos "representación reducida de orden n del racional x en base b" a la representación de a_0 en base b separada por medio de una "coma" de las cifras $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

Definición 1.17

Llamamos "representación ilimitada en base b del racional x" a la sucesión asociada a cada número racional.

Para el caso particular de $b = 10$ decimos que es la representación decimal ilimitada y que q_n es el n-ésimo decimal de x,

si $b = 2$, decimos representación binaria ilimitada.

Obsérvese que si x es un número b-ádico, existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{a}{b^k} = \frac{a\,b}{b^{k+1}} = \frac{a\,b^2}{b^{k+2}} = \ldots$$

Para obtener una representación mayor que la de orden k, le agregamos a ésta ceros a la derecha. La representación ilimitada de un número b-ádico se reduce entonces a una representación limitada con un número no finito de "ceros" a su derecha.

No es necesario emplear una serie infinita para representar un racional. Basta con conservar cierto número de cifras de la representación, pues llega un momento en que el error que cometemos es tan pequeño que ya no nos interesa.

Teorema 1.12

Para todo racional positivo c/d existe un entero natural k tal que las cifras $q_{k+1}, q_{k+2}, q_{k+n}, \ldots$ de la representación ilimitada de c/d en base b se repiten periódicamente, con un período mayor o igual a "d".

Demostración

Recordemos que q se obtiene por eo cociente de la división euclidiana de $b\,r_{n-1}$ por d, donde $0 \leq r < d$ y que r_{n-1} depende a su vez de r_{n-2} y este de r_{n-3} y así sucesivamente hasta llegar a r_0; además, $0 \leq r_i < d$ para todo i menor o igual a n.

Entre 0 y d existe un número finito de enteros. Por tanto, para todo k, existe p tal que:

$$r_k = r_{k+p} \quad \text{con} \quad 1 \leq p \leq d$$

El cociente de la división euc1idiana de $b\,r_k$ por d es entonces igual al de $b\,r_{k+p}$ por d, es decir, $q_k = q_{k+p}$.

Además, $r_{k+1} = r_{k+p+1}$ de donde $q_{k+1} = q_{k+p+1}$.

A continuación mostramos por inducción que $q_{k+n} = q_{k+p+n}$.

Supongamos que $q_{k+m} = q_{k+p+n}$. Por un argumento similar al expuesto,

$$q_{k+m+1} = q_{k+p+m+1}$$

Entonces las cifras son periódicas y de período p.

Por ejemplo, en base decimal, el racional $\frac{18}{7}$ es de periodo 6 pues

$$\frac{18}{7} = 2,571428571428571428\ldots$$

En el caso de los números b-ádicos, a partir de un cierto número las cifras son nulas. Decimos entonces que los números b-ádicos son de período 0, al igual que los números enteros.

1.4.7 Ejercicios

1. Encuentre los enteros a y b tales que $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$ y $ab = 75$.

2. Encuentre los enteros a y b tales que $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$ y $2a^2 + b^2 = 1224$.

3. Sea $x \neq 0$ un racional. Encuentre los racionales y tales que $x \cdot y$ y $\frac{x}{y}$ sean enteros.

4. Sean a, b, c, d cuatro enteros naturales tales que $a < b < c$ y $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

a. Compare c y d

b. Compare $a + d$ y $b + c$

5. Se trata en este problema de encontrar los racionales equivalentes a $\frac{168}{411}$ tales que el numerador y el denominador sumen S.

a. ¿Para qué valores de S tiene solución el problema?

b. ¿Cuál es el valor de S más pequeño para que el problema tenga solución si S es un múltiplo de 5?

c. Encuentre todas las soluciones posibles para $S < 800$

6. Para qué valores de n se puede simplificar la fracción $\frac{2n+15}{n-3}$.

Lo mismo para $\frac{n^2+1}{n-4}$, $\frac{3n+7}{2n-5}$, $\frac{n(3n+1)}{n^2-1}$.

7. Determine dos números a y b primos entre sí, tales que $\dfrac{a+b}{a^2+b^2} = \dfrac{6}{37}$.

8.

a. Determine dos enteros naturales a y b tales que $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{a}{n} - \dfrac{b}{n+1}$ para cualquier entero n distinto de 0.

b. Evalúe la suma $A = \dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n-1)}$

9. Evalúe la suma $B = \dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 7} + \ldots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

10. Determine las fracciones equivalentes a la fracción $\dfrac{91}{195}$ que tienen numerador inferior a 50.

11. Determine una fracción $\dfrac{x}{y}$ equivalente a la fracción $\dfrac{1001}{2574}$ en los siguientes casos:

a. $x + y = 75$

b. $y - x = 176$

c. $xy = 4536$

d. $xy = 14$

e. m.c.m $(x, y) = 1260$

12. Determine dos números enteros naturales x y y tales que $x + y = 56$ y $\dfrac{36+x}{60+y}$ y $\dfrac{39}{65}$ sean equivalentes.

13. Mostrar que no existe un número racional cuyo cuadrado sea 2.

14. Sea $G = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q} - \{-1\}\}$

Si $a_1 = (x_1, y_1)$ y $a_2 = (x_2, y_2)$ están en G, definimos:

$$a_1 \top a_2 = (x_1, y_1) \top (x_2, y_2) = (x_1x_2 + x_1 + x_2, y_1y_2 + y_1 + y_2)$$

a. Mostrar que para cualesquiera a_1 y $a_2 \in G$, $a_1 \top a_2$ pertenece a G (es decir, $\top$ es una ley de composición interna en G.

b. Mostrar que $\top$ es una operación asociativa y conmutativa.

c. Mostrar que $(G, \top)$ es un grupo abeliano.

15. En $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ definimos dos leyes de composición interna "o" y "$\top$" tal que si $x = (a, \alpha)$ y $y = (b, \beta)$ están en E, entonces:

$$x o y = (a, \alpha) o (b, \beta) = (a + b), \alpha\beta$$

$$x \top y = (a, \alpha) \top (b, \beta) = (ab, \alpha + \beta)$$

a. Mostrar que "o" y "$\top$" son conmutativas y asociativas.

b. Mostrar que "o" y "$\top$" poseen un elemento neutro en E, y determinar para cada una de las leyes los elementos de E que admiten un inverso.

c. Mostrar que "$\top$" no es distributiva con respecto a "o".

16. Sean a y b enteros naturales con $b \neq 0$.

a. Si x es un número natural, compare los números racionales $\dfrac{a}{b}$ y $\dfrac{a+x}{b+x}$.

b. Muestre que para todo número racional $h > 0$ existe un entero X tal que $x > X \Longrightarrow \left|\dfrac{a+x}{b+x} - 1\right| < h$.

17. Sean a, b, c, d, e, f, k, l enteros con b, d, f no nulos.

a. Mostrar que si $b \neq -d$, entonces

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longleftrightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$$

b. Si $kb + ld \neq 0$, analice si las igualdades $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ y $\dfrac{ka + lc}{kb + ld} = \dfrac{c}{d}$ son equivalentes.

c. Encontrar los enteros a y b tales que

i) $\frac{a}{b} = \frac{31}{47}$ y $a + b = 234$

ii) $\frac{a}{b} = \frac{31}{47}$ y $3a - 2b = 4$

d. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ donde e es el resto de la division euclidiana de a por c, mostrar que f es el resto de la división euclidiana de b por d y comparar los cocientes de las dos divisiones.

e. Si a, b, c positivos y $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ con a, c primos relativos, mostrar que a divide a b y c divide a d.

18. Bajo qué condiciones necesarias y suficientes, $\frac{p}{q}$ se puede escribir:

$$\frac{p}{q} = a + \frac{a_1}{5} + \frac{a^2}{5^2} + \ldots + \frac{a^k}{5^k}$$

19.

a. Encontrar los enteros naturales tales que $\frac{12n + 96}{n + 4}$ es entero.

b. Dados tres enteros positivos a, b, c mostrar que si $|b - ac| \geq c$, existe al menos un entero natural n tal que

$$\frac{a \cdot n + b}{n + c} \text{ es entero}$$

c. Mostrar que dados a, b, c enteros positivos, existen al menos dos enteros naturales tales que:

$$\frac{an + b}{n + c} \text{ es entero}$$

d. ¿Bajo qué condiciones se puede afirmar que existen únicamente dos naturales que satisfacen c)?

20. Sea n un entero positivo y S_n, A_n tales que $S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p(p+1)}$ y $A_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p(p+2)}$.

Considérese $E = \{S_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $F = \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Mostrar que E y F contienen a $\mathbb{Q}$.

21.

a. Sean dos enteros a y b tales que $0 < a < b$. Mostrar que existe un único entero positivo q, tal que:

$$\frac{1}{q+1} < \frac{a}{b} \leq \frac{1}{q}$$

y que $\dfrac{a}{b} - \dfrac{1}{q+1}$ es igual a $\dfrac{u}{v}$ con $u < a$ y $v > b$.

b. Dados n y k dos enteros positivos, ponga como la diferencia de dos números racionales representados por dos fracciones de numerador 1, el numero racional $\dfrac{n}{n!(k+1)}$.

c. Muestre que todo racional positivo es la suma de un entero natural y un número finito de racionales positivos representados por fracciones de numerador 1.

d. Represente de esa forma el número racional $\dfrac{31}{18}$.

e. Dados dos enteros positivos n, k, muestre que $\dfrac{n}{n!(k+1)}$ es la suma de n racionales representados por fracciones de numerador 1 y con denominadores de la forma $p!(k_p+1)$ con $0 \leq p \leq n-1$ y k_p todos enteros positivos.

Muestre que si $p < p'$ entonces k_p divide a k'_p.

22. Sea n un entero natural

a. Muestre que $\dfrac{n^3+n}{n+1}$ es la representación irreducible de un racional.

b. Encuentre valores de n pares para los cuales $\dfrac{n^3+n}{n+1}$ sea un entero.

23. Para qué valores de n se tiene que $\dfrac{5n+2}{n+4}$ y $\dfrac{3n+8}{2n-1}$ no son irreducibles.

24. Para qué valores del entero n se tiene:

a. La representación $\dfrac{n+19}{n+6}$ no es irreducible.

b. El número racional $\dfrac{n+19}{n+6}$ es entero.

c. El número racional $\dfrac{n+19}{n+6}$ es el cuadrado de un racional.

25. Sea $\dfrac{p}{q}$ una fracción irreducible, mostrar que las siguientes fracciones son también irreducibles:

a. $\dfrac{p^2}{q^2}$

b. $\dfrac{p^2+q^2}{pq}$

c. $\dfrac{qp}{q^2-p^2}$

d. $\dfrac{p}{2p+q}$

e. $\dfrac{p^2+pq+q^2}{p+q}$

f. $\dfrac{p+2q}{2p+3q}$

g. $\dfrac{pq}{p+q}$

h. $\dfrac{p-q}{p^2-pq+q^2}$

i. $\dfrac{(p+q)^2}{pq}$

26. Demuestre que las fracciones siguientes son irreducibles:

a. $\dfrac{n}{5n+1}$

b. $\dfrac{2n+1}{2n(n+1)}$

c. $\dfrac{4n+1}{5n+1}$

d. $\dfrac{(n-1)(3n+1)}{n}$

e. $\dfrac{2n+1}{n2-n+1}$

27. Llamamos común denominador de dos números racionales x y x' a todo entero d tal que existe una representación de x' y otra de x que tenga por denominador a d

a. Demostrar que los denominadores comunes de dos racionales están dados por los múltiplos no nulos de un mismo entero natural al que llamamos el menor denominador común.

b. Dados a/b y c/b, encontrar las condiciones necesarias y suficientes sobre a, b y c para que b sea el menor denominador común de a y c.

c. Encontrar el menor denominador común de:

i) $\dfrac{7}{36}$ y $\dfrac{10}{85}$

ii) $\dfrac{125}{165}$ y $\dfrac{84}{165}$

d. Generalizar las partes 1 y 2 para más de dos números racionales a la vez.

28. Sean $\dfrac{p}{q}$ y $\dfrac{p}{q'}$ dos fracciones irreducibles.

a. Mostrar que para que $\dfrac{pq'+p'q}{pq}$ sea la representación irreducible de $\dfrac{p}{q}+\dfrac{p'}{q'}$, es necesario y suficiente que q y q' sean primos.

b. Mostrar que para que $\dfrac{p}{q}+\dfrac{p'}{q'}$ sea un entero, q debe ser igual q' y averiguar qué condición es necesaria para p y p'.

c. Mostrar que para que $\dfrac{pp'}{qq'}$ sea la representación irreducible de $\dfrac{p}{q}\times\dfrac{p'}{q'}$ es necesario y suficiente que q sea primo con p y q' con p.

d. Mostrar que para que $\dfrac{p}{q}\times\dfrac{p'}{q'}$ sea un entero es necesario y suficiente que q divida a p' y q' a p.

29. Dado un entero racional positivo a cuya representación irreducible es p/q, mostrar que para un número racional x donde p/q es el producto de x por un entero natural, es necesario y suficiente que para la representación irreducible u/v de x:

a. u divida a p.

b. q divida a v.

c. El cociente de v por q sea primo con p.

30. Definimos para todo número racional $x \neq 0$, $\theta(x) = x - \dfrac{1}{x}$

a. Encuentre los racionales para los cuales $\theta(x)$ es un entero.

b. Dados dos racionales x, y con p/q, u/v sus representaciones irreducibles respectivamente, mostrar que $\theta(x)$ es un entero sii $p \cdot q$ divide a u y v divide a $(p+q)$ ó $(p-q)$.

c. Encontrar los racionales para los cuales $\theta\left(\dfrac{3}{2}\right)$ es entero.

31. Determine dos fracciones irreducibles a/b y c/d sabiendo que el D.C.M. de sus numeradores es su diferencia, que el M.C.M. de sus numeradores es 1050 y que $\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d} = \dfrac{5}{6}$.

32. Si $ab' - b'a' = 1$ y si n es un natural cualquiera, mostrar que las fracciones siguientes son irreducibles:

a. $\dfrac{a}{b}$

b. $\dfrac{a+a'}{b+b'}$

c. $\dfrac{a'}{b'}$

d. $\dfrac{a+na'}{b+nb'}$

e. $\dfrac{a-a'}{b-b'}$

33. Sea I el conjunto de representaciones irreducibles p/q de números racionales del intervalo $]0,1]$. Dados cuatro enteros naturales p, q, p' y q' tales que $p'q - pq' = 1$, $p \neq 0$ y $p' \leq q'$:

a. Mostrar que p', q' y q' son diferentes de 0 y que $q \neq q'$

b. Mostrar que $\frac{p}{q}$ y $\frac{p'}{q'}$ pertenecen a I y que $\frac{p}{q} < \frac{p'}{q'}$.

c. Mostrar que $\frac{p+p'}{q+q'}$ está en I y justificar lo siguiente:

$$\frac{p}{q} < \frac{p+p'}{q+q'} < \frac{p'}{q'}$$

d. Mostrar que si $q > q'$ entonces $p \geq p'$ y que $\frac{p-p'}{q-q'}$ pertenece a I y comparar los números racionales $\frac{p-p'}{q-q'}$ y $\frac{p}{q}$.

e. Sea k un entero natural. Definimos: $p_k = p + kp'$, $q_k = q + kq'$, $p'_k = kp + p'$. Mostrar que para todo $k \in \mathbb{N}$, $\frac{p_k}{q_k}$ y $\frac{p'_q}{q'_k}$ pertenecen a I y que:

i) $\frac{p_k}{q_k} < \frac{p'}{q'}$

ii) $\frac{p_k}{q_k} < \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$

iii) $\frac{p}{q} < \frac{p_k}{q_k}$

iv) $\frac{p}{q} < \frac{p'_k}{q'_k}$

v) $\frac{p'_{k+1}}{q'_{k+1}} < \frac{p'_k}{q'_k}$

vi) $\frac{p'_k}{q'_k} < \frac{p'}{q'}$

34. Denotaremos por $E(x)$ a la parte entera de un número racional x.

a. Muestre que $E(x+y) > E(x) + E(y)$. ¿Qué puede decir de $E(x+y) - [E(x) + E(y)]$?

b. Muestre que $E(x-y) \leq E(x) - E(y)$

c. Si $n \in \mathbb{N}^*$. Muestre que:

i) $E\left(\dfrac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$

ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right) = E(nx)$

35. Sea A_b el anillo de números b-ádicos con $b \geq 2$. Si x pertenece a A_b, un múltiplo de x es el producto de un entero cualquiera por x.

a. Dé un ejemplo de un subgrupo de A_b.

b. Muestre que si x pertenece a un subgrupo G de A_b G contiene todo múltiplo de x.

c. Sea ahora b primo. Sea G un subgrupo de A_b tal que existe un natural p para el cual $\dfrac{1}{b^p} \in G$ y $\dfrac{1}{b^q} \notin G, \forall q > p$.

Muestre que G no contiene ningún entero de la forma $\dfrac{a}{b^q}$ para $q > p$ y a un entero no divisible por b.

Muestre que G es el conjunto de los múltiplos de $\dfrac{1}{b^p}$

d. Muestre que si b es primo, los únicos subgrupos de A_b que contienen a l son A_b y los múltiplos de $\dfrac{1}{b^p}$ para p un natural.

e. Muestre que para $b = 10$, existen otros subgrupos de A_b que contienen a l, muestre que el mismo resultado se obtiene siempre que b no sea primo.

f. Si $b \geq 2$, muestre que el conjunto de números $\dfrac{3k}{b^p}$ para $k \in \mathbb{Z}$ y $b \in \mathbb{N}$, es un subgrupo de A_b.

g. Muestre que para todo b existen subgrupos de A_b que no están formados por múltiplos de un mismo número b-ádico.

36. Averiguar cuáles de los siguientes racionales son decimales:

$$\frac{17}{675}, \frac{5}{160}, \frac{12}{425}, \frac{1}{4700}, \frac{3}{10240}, \frac{21}{150}$$

37. ¿Cuáles son los enteros positivos k tales que $\dfrac{17k}{6}$ es un número decimal?

38. Dado un número racional x con su representación irreducible P/q, ¿cuáles son las condiciones necesarias y suficientes para que x posea una representación de una fracción con denominador una potencia de 90?

39.

a. Dados dos números racionales x y y que cumplen las ecuaciones $x+y=\dfrac{1}{4}$, $x-y=\dfrac{3}{20}$. Mostrar que son dos números decimales.

b. Dados α, β, γ, δ, u y v números b-ádicos. Dar una condición suficiente para que los números racionales x, y que verifican $\alpha x+\beta y=u$ y $\gamma x+\delta y=v$ sean números b-ádicos.

40. Encontrar los números S para los cuales existen dos cifras a y b tal que la suma de dos números decimales representados en numeración decimal por $a,\ b$ y $b,\ a$ sea S.

41. Determinar los números racionales representados por una fracción de denominador positivo inferior a 10, donde la aproximación decimal de orden l es $3,4$.

42. En el sistema de numeración de base 10 se escribe uno tras otro los enteros de l hasta n. Si se han utilizado 3333 cifras, ¿cuál es n?

43.

a. En el sistema de base $x>2$, demuestre que los números $n=(x-1)^2$ y $p=2(x-1)$ se escriben respectivamente $\overline{ab}$ y $\overline{ba}$.

b. En el sistema de base $x>3$, demuestre que los números $q=(x-1)^3$ y $r=(x+2)(x-1)^2$ se escriben con las mismas cifras.

44. Sea $p/q\in\mathbb{Q},\ q>0$, tal que las cifras de la parte fraccionaria de sus aproximaciones en una base b son periódicas a partir de a_k, de período l (i.e. $\forall n>k,\ an=an+l$).

a. Pruebe que $\forall n\geq k$, las aproximaciones de orden n de x y de $x\,b^{\,l}$ difieren en una constante μ. Determine μ.

b. Si $n\geq k$, pruebe que $-\dfrac{1}{b^n}<x\left(b^{\,l}-1\right)-\mu<\dfrac{1}{b^n}$

c. Deduzca que $x = \dfrac{\mu}{b^{l} - 1}$ y determine p y q.

d. Encuentre x cuando sus aproximaciones en base 3 son $2,01212121\ldots$

45.

a. Demuestre que para que una fracción irreducible sea equivalente a una fracción decimal, es necesario y suficiente que su denominador sólo contenga como factores primos a 2 y 5.

b. Escriba la representación con cifras de los siguientes racionales decimales:

$$\frac{14}{20}, \frac{38}{64}, \frac{27}{125}, \frac{3}{6250}$$

46. Encuentre los números decimales que tienen como representación x, y tales que $x, y - y, x = 5,4$

47. Determine las fracciones equivalentes a decimales cuyo producto de numerador y denominador es 90.

48. Sea $b \geq 2$ un entero.

a. Dado un entero a tal que $0 < a < b - 1$, encontrar la representación ilimitada en base b del número racional $\dfrac{a}{b-1}$. Dé la representación ilimitada de $\dfrac{5}{9}$.

b. Determinar la representación decimal ilimitada de $\dfrac{4}{11}$

c. Sean a y a' dos enteros tales que $0 \leq a \leq b - 1$ y $0 \leq a' \leq b - 1$; sea x el entero representado ne base b por aa'. Encontrar el desarrollo ilimitado en base b de $\dfrac{x}{b^2 - 1}$

d. Generalizar el resultado de c). Encuentre el desarrollo ilimitado de $\dfrac{4512}{9999}$.

49. Sean a, b, c, d, k, l, n enteros positivos. Supongamos que los números racionales a/b y c/d tienen la misma aproximación decimal de orden n.

a. Mostrar que $\dfrac{ka + lc}{kb + ld}$ admite también la misma aproximación decimal de orden n.

b. Sean p, p', p'' las diferencias de $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{ka+lc}{kb+ld}$ con sus aproximaciones decimales de orden n respectivas, expresar p'' en función de p, p', k, l.

50. Sea x un número racional tal que $0 \leq x \leq 1$ y $y = 1 - x$.

a. Si x no es un número decimal, mostrar que y tampoco lo es.

Sea $\frac{a_n}{10^n}$ la aproximación decimal de orden n de x ¿Cuál es la de y?

Mostrar que la suma de dos cifras del mismo período en la representación decimal ilimitada de x y y es 9.

b. Si x es un número decimal, ¿cómo se modifican los resultados obtenidos en 1?

51. Sea un número racional cuya representación irreducible es $\frac{a}{d_1 d_2}$ donde d_1 y d_2 son dos enteros mayores que 1 y primos relativos.

a. Mostrar que existen u_1 y u_2 tales que $\frac{a}{d_1 d_2} = \frac{u_1}{d_1} + \frac{u_2}{d_2}$

b. Mostrar que existen infinitas descomposiciones de ese tipo.

c. Mostrar que existen e, v_1 y v_2 tales que $\frac{a}{d_1 d_2} = e + \frac{v_1}{d_1} + \frac{v_2}{d_2}$, $0 < v_1 < d_1$ y $0 < v_2 < d_2$.

d. Mostrar que e es único pues v_1 y v_2 también lo son.

e. Efectuar esta descomposición para $a = 11$, $d_1 = 2$, $d_2 = 3$.

52. Sea un número racional cuya representación irreducible es $\frac{a}{d_1, d_2, \ldots, d_n}$ donde $d_1, d_2, \ldots, d_n$ son enteros mayores que 1 y primos relativos dos a dos:

a. Mostrar que existen $e, v_1, v_2, \ldots, v_n$ únicos tales que:

$\frac{a}{d_1, d_2, \ldots, d_n} = e + \frac{v_1}{d_1} + \frac{v_2}{d_2} + \ldots + \frac{v_n}{d_n} +$ con $0 < v_1 < d_1, 0 < v_2 < d_2, \ldots,$
$0 < v_n < d_n$.

b. Mostrar que todo número b-ádico positivo e inferior a 1 es igual a la suma de números b-ádicos de la forma $\dfrac{a}{b^{k}}$ con $k>0$ y $0<a<b$ y que esta descomposición es única.

c. Mostrar que todo número racional es la suma de un entero y de números de la forma $\dfrac{a}{p^{k}}$, donde p es un entero primo, a un entero tal que $0<a<p$ y k un entero positivo.

d. Mostrar que esta descomposición es única.

e. Efectuar esta descomposición para el número racional $\dfrac{36}{45}$.

53. Muestre que $\mathbb{Q}$ es arquimediano, es decir, pruebe que si $r, r' \in \mathbb{Q}$ y $r'>0$, existe un entero n tal que $nr>r'$.

54. Dados a y $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, con $\varepsilon>0$. Pruebe que existe un número racional x distinto de a tal que $|x-a|<\varepsilon$

55.

Definición 1.18

Una rama inicial abierta de $\mathbb{Q}$ es un subconjunto r de $\mathbb{Q}$ tal que:

1) $r \neq \varnothing$ y $r \neq \mathbb{Q}$
2) $\forall x \in r, \forall y \in \mathbb{Q} : y \leq x \Longrightarrow y \in r$
3) r no tiene elemento maximal

a. Demuestre que toda rama inicial está acotada superiormente.

b. Demuestre que todo racional λ no perteneciente a r es estrictamente superior a todo racional en r.

Definición 1.19

$\mathbb{R}$ es el conjunto de las ramas iniciales abiertas de $\mathbb{Q}$ (todo elemento de $\mathbb{R}$ se llama número real). Si una rama inicial tiene un extremo superior en $\mathbb{Q}$ entonces se dice que es un número racional y, el conjunto de ellos se denota por $\tilde{\mathbb{Q}}$. Toda rama inicial que no pertenece a $\tilde{\mathbb{Q}}$ se llama número irracional y, el conjunto de ellos se denota por $\mathbb{I}$. Es decir, $\tilde{\mathbb{Q}} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$ y $\tilde{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{I} = \varnothing$

c. Muestre que si r tiene un extremo superior a, entonces $r = \sqrt{a} = \{x \in \mathbb{Q}/x < a\}$

d. Muestre que la relación de inclusión en $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ induce en $\mathbb{R}$ una relación de orden total (que se denotará " $<$ ").

e. Muestre que la aplicación:

$$\theta : \mathbb{Q} \longrightarrow \tilde{\mathbb{Q}}$$

$$a \longrightarrow \sqrt{a}$$

es biyectiva y preserva el orden.

f. Muestre que si $\alpha \in r$ ($\alpha \in \mathbb{Q}$) entonces $\sqrt{\alpha} < r$.

g. Muestre que para dos ramas iniciales cualesquiera r y s con $r < s$, existe una rama inicial tal que $r < t_a < s$, es decir, $\tilde{\mathbb{Q}}$ es denso en $\mathbb{R}$.

Definición 1.20

Si r y s son dos numeros reales, se define $\sigma = \{x + x'/x \in r \text{ y } x' \in s\}$

h. Muestre que σ es una rama inicial.

Definición 1.21

Se define

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(r, s) \longrightarrow \sigma = r + s$$

i. Demuestre que $(\mathbb{R}, +, \leq)$ es un grupo abeliano totalmente ordenado.

56. Sea $A = \{S(i)/i \in I\}$ donde $S(i)$ es una rama inicial abierta en $\mathbb{Q}$ e I es una familia cualquiera de índices.

Suponga que A está mayorado en $\mathbb{R}$, esto es: $\exists \sigma \in \mathbb{R}$ tal que $\forall i \in I : S(i) \subset \sigma$.

Sea $S = S(i)/i \in I \begin{cases} \forall i \in I,\, x \in S(i) \Longrightarrow x \in S \\ \forall x \in S,\, \exists i \in I \text{ t.q. } x \in S(i) \end{cases}$

a. Muestre que S no es vacío.

b. Muestre que $S \neq \mathbb{Q}$

c. Muestre que si $y \in \mathbb{Q}$ y $y \leq x$, entonces $y \in S$.

d. Muestre que S no tiene un elemento más grande ¿Qué puede decir de S?

e. Muestre que todo mayorante de A contiene necesariamente a S ¿Cual es su elemento más pequeño?

f. ¿Cuál es el conjunto de mayorantes de A?

57. Concluya el axioma del extremo superior.

Capítulo 2

El conjunto de los números reales

2.1 Introducción

El lector comprenderá que a través del hacer diario es muy natural hablar de la raíz cuadrada de cuatro y, por extensión, de la raíz cuadrada de cualquier número racional.

La dificultad se presenta cuando tratamos de enmarcar estos números dentro de los que ya teníamos, pues resulta que $\sqrt{2}$ no es racional.

Yéndonos más atrás preguntaríamos qué es $\sqrt{2}$. La experiencia daría nos permitiría "trabajar" con estos y otros "números" no racionales, pero esa experiencia podría llevarnos a sendas equivocadas. a guisa del ejemplo:

$$-1 \stackrel{!}{=} \sqrt{(-1^2)} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{1} = 1$$

donde se usó el echo, que por experiencia pareciera correcto, que

$$\sqrt{x^2} = x$$

El método axiomático provee entonces de una herramienta para explicar lo que no queremos que pase, y en el caso de los números reales se podrían pensar en dos caminos básico:

1) Aceptar axiomáticamente la existencia de los números reales y obtener dentro de ellos conjuntos "similares" a $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$.
2) Definir los números reales a través de sucesiones de números racionales probar todos los "axiomas" del enfoque 1.

En este libro optamos por el primer camino.

2.2 Definición axiomática del campo $\mathbb{R}$ de los números reales

Aceptamos la existencia de un conjunto que denotamos por $\mathbb{R}$ y a cuyos elementos llamaremos números reales. Este conjunto está dotado de dos operaciones internas - una suma y un producto - y de una relación de orden denotado por "$\leq$"; con las propiedades siguientes:

El conjunto $\mathbb{R}$ con la suma y la multiplicación es un campo conmutativo (Al elemento neutro de la adición lo denotamos por " ω " y por " e " al del producto).

El conjunto $\mathbb{R}$ con la relación de orden " $\leq$ " es un conjunto totalmente ordenado. Además, si $x,\ y,\ z$ están en $\mathbb{R}^+$ y $x',\ y',\ z'$ en $\mathbb{R}^+$ se tiene que:

1) $(x \ \leq \ y) \ \Rightarrow \ (x+z \ \leq \ y+z)$
2) $(z' \ \leq \ x' \quad y \quad z' \ \leq \ y') \Rightarrow (z' \ \leq \ x'y')$

Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ no vacío y mayorado (acotado) posee extremo superior.

Trataremos la propiedad 2.3 en la sección 2.7 de este capítulo.

Las propiedades 2.2.1 y 2.2.2 nos dicen que la relación " $\leq$ " es compatible con la edición de $\mathbb{R}$ y el producto en $\mathbb{R}^+$.

2.3 Propiedades de $\mathbb{R}$ como cuerpo totalmente ordenado

2.3.1 Propiedades de la suma en $\mathbb{R}$

Demostraremos aquí algunas de estas propiedades y dejaremos las demás como ejercicio.

Recordaremos que $\mathbb{R}$ con la suma es un grupo abeliano (Ya que $\mathbb{R}$ es un campo)

Todo elemento de $\mathbb{R}$ es regular con respecto a la adición: si x, y, z están en $\mathbb{R}$, entonces:

$$x+y \ = \ z+y \quad \Rightarrow \quad x=z$$

Basta sumar el inverso aditivo de " y " en ambas partes de la igualdad. El recíproco también es cierto; por definición de la suma tenemos que:

$$x = z \quad \Rightarrow \quad x + y \;=\; z + y$$

Dados a, b en $\mathbb{R}$, existe un único número real x tal que:

$$x + a \;=\; b$$

En efecto, el número $a - b$ satisface esa propiedad y es único.

Dado que x, y en $\mathbb{R}$,

$$-(x + y) \;=\; -x \, - y$$

Obtenemos este resultado por la unicidad de los inversos en $\mathbb{R}$ y porque es sencillo verificar que $(x + y) - x - y \;=\; \omega$ y también que $-x - y \, + \, (x + y) \;=\; \omega$.

Dado que en $\mathbb{R}$ se cumple que :

$$-(-a) \;=\; a$$

2.3.2 Propiedades del producto

El producto en $\mathbb{R}$ tiene la siguientes propiedades; el lector podrá verificar fácilmente las que no demostremos aquí.

De la definición obtenemos $\mathbb{R}^*$, el conjunto de los números reales no nulos, es un grupo conmutativo bajo el producto.

Dados x, y, z en $\mathbb{R}*$, tenemos que:

$$x = y \;\Rightarrow\; xz = yz$$

por la definición del producto en $\mathbb{R}$ y la existencia en $\mathbb{R}$ del inverso multiplicativo de z.

Dados dos elementos a, b en $\mathbb{R}*$, existe un único x en $\mathbb{R}$ tal que:

$$ax = b$$

puesto que:

$$a^{-1}ax = a^{-1}b \Rightarrow x = a^{-1}b$$

Si x, y están en $\mathbb{R}^*$ entonces

$$(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$$

Esto se comprueba fácilmente si observamos que ambos números son el inverso multiplicativo de "xy" y recordando que el inverso es el único en el campo.

Para todo a en $\mathbb{R}$,

$$a \cdot \omega = \omega$$

Para todo a en $\mathbb{R}$,

$$(a^{-1})^{-1} = a$$

Teorema 2.1

Dados dos elementos x, y en $\mathbb{R}$, entonces

$$xy = \omega \Leftrightarrow x = \omega \text{ o } y = \omega$$

Demostración

Supongamos que $xy = \omega$ y que $x \neq \omega$. entonces existe x^{-1} y por tanto tenemos:

$$x^{-1}xy = \omega \Rightarrow y = \omega$$

Este resultado lo expresamos diciendo que $\mathbb{R}$ no tiene divisores de cero.

2.3.3 Cálculo de cocientes

A continuación usaremos la notación $\dfrac{a}{b} = ab^{-1}$ y llamaremos a este número real el cociente de a por b. Esta notación será justificada en la subsección 2.6.2 de este capitulo.

Observemos que tenemos las siguientes propiedades:

Dados a, b en $\mathbb{R}$ y a', b' en $\mathbb{R}^*$, entonces:

$$\left(\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}\right) \Rightarrow ab' = ba'$$

pues

$$a(a')^{-1} = b(b')^{-1} \Leftrightarrow a = ba'(b')^{-1} \Leftrightarrow ab' = ba'$$

Observemos que en particular para todo k en $\mathbb{R}^*$,

$$\frac{ak}{a'k} = \frac{a}{a'}$$

Si a, b están en $\mathbb{R}$ y a', b' en $\mathbb{R}^*$, entonces :

$$\frac{a}{a'} \cdot \frac{b}{b'} = \frac{ab}{a'b'}$$

pues

$$\begin{aligned}
\frac{a}{a'}\cdot\frac{b}{b'} &= a(a')^{-1}b(b')^{-1} &&= \\
(ab)\cdot(a'b')^{-1} &= (ab)\cdot(a'b')^{-1} &&\text{, además} \\
\frac{a}{a'}+\frac{b}{b'} &= \frac{ab'+ba'}{a'b'}
\end{aligned}$$

dado que

$$\begin{aligned}
\frac{a}{a'}+\frac{b}{b'} &= a(a')^{-1}+b(b')^{-1} \\
&= (ab')\cdot(a'b')^{-1}+(ba')\cdot(a'b')^{-1} \\
&= (ab'+ba')\cdot(a'b')^{-1} \\
&= \frac{ab'+ba'}{a'b'}
\end{aligned}$$

Para todo a en $\mathbb{R}$ y a' $\mathbb{R}^*$, se tienen que:

$\left(\frac{a}{a'}=\omega\right) \Rightarrow a = w$, esto es una consecuencia inmediata de que en $\mathbb{R}$ no haya divisores de cero, pues sabemos que $a' \neq \omega$.

Notemos que si $a' \neq \omega$, entonces:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a}{a'}\right)^{-1} &= (a(a')^{-1})^{-1} \\
&= a^{-1}\left[(a')^{-1}\right]^{-1} \\
&= a^{-1}\cdot a' \\
&= \frac{a'}{a}
\end{aligned}$$

2.3.4 Linealidad

Definición 2.1
Dado un número real k, llamaremos función lineal de coeficiente k a la aplicación:

$$\begin{array}{rccc} f_k: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & kx \end{array}$$

Observemos que f_k cumple con las siguientes propiedades:
Dados x_1, x_2, λ en $\mathbb{R}$

1) $f_k(x_1 + x_2) = k(x_1 + x_2) = kx_1 + kx_2 = f_k(x_1) + f_k(x_2)$

2) $f_k(\lambda x_1) = k(\lambda x_1) = \lambda(kx_1) = \lambda f_k(x_1)$

Si consideramos $\mathbb{R}$ como un espacio vectorial sobre sí mismo, f_k es una aplicación lineal del espacio vectorial $\mathbb{R}$.

Lema 2.1 Para todo k en $\mathbb{R}$, f_k es una biyección y además,

$$(f_k)^{-1} = f_{k^{-1}}$$

Demostración

1) Inyectividad
Si k está en $\mathbb{R}^*$, entonces:

$kx = \omega \Leftrightarrow a = \omega$ de donde el núcleo de f es " ω " y por lo tanto, f_k es inyectiva.

2) Sobreyectividad:

Dado x en $\mathbb{R}$,

$$f\left(\frac{x}{k}\right) = k\frac{x}{k} = x$$

3) Vamos a demostrar que la inversa de f_k es $f_{k^{-1}}$. Observemos que:

$$(f_k \circ f_{k^{-1}})(x) = f_k(k^{-1}x) = kk^{-1}x = x$$

De donde

$$f_k \circ f_{k^{-1}} = Id$$

Y por lo tanto $f_{k^{-1}}$ es inversa a f_k y como la inversa es única, tenemos que:

$$(f_k)^{-1} = f_{k^{-1}}$$

Lema 2.2 Dados h y k en $\mathbb{R}$, entonces tenemos que:

$$f_k \circ f_n = f_n \circ f_k = f_{hk}$$

Demostración

Observemos que para todo x en $\mathbb{R}$ $f_k \circ f_h(x) = f_k(hx) = khx = f_{kh}(x)$

Además:

$$khx = hkx = f_{hk}(x) = f_h \circ f_k(x)$$

Teorema 2.2
El conjunto de las funciones lineales con coeficiente k, con k en $\mathbb{R}$, es un grupo conmutativo bajo la composición.

Demostración

Ver lemas 2.1 y 2.2. Además, observemos que:

$$Id = f_e$$

Teorema 2.3
Dadas dos sucesiones $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ y $(y_i)_{1 \leq i \leq n}$ de números reales no nulos, las siguientes proposiciones son equivalentes:

1) $\dfrac{y_1}{x_1} = \ldots = \dfrac{y_i}{x_i} = \ldots = \dfrac{y_n}{x_n}$

2) Existe una función lineal f tal que, para todo i, $1 \leq i \leq n$, se tiene que:

$$y_i = f(x_i)$$

Demostración

Observemos que si f es una función lineal de coeficiente k, entonces

$$\begin{array}{ccccc} y_1 & = & f(x_1) & = & kx_1 \\ y_2 & = & f(x_2) & = & kx_2 \\ & & \vdots & & \\ y_n & = & f(x_n) & = & kx_n \end{array}$$

Notemos que si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son números reales no nulos, entonces

$$\frac{y_1}{x_1} = \cdots = \frac{y_i}{x_i} = \cdots = \frac{y_n}{x_n} \tag{2.1}$$

Por otra parte, si tenemos números reales que satisfagan 2.1, entonces se puede considerar la función lineal con coeficiente k, donde k será el valor del coeficiente $\dfrac{y_i}{x_i}$, claramente se verifica que:

$$f(x_j) = y_i$$

Diremos que la sucesión $(y_i)_{1\leq i\leq n}$ es la imagen de la sucesión $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ por la función lineal f; el coeficiente k será cualquiera de los coeficientes $\dfrac{y_i}{x_i}$.

Además diremos que las sucesiones (x_i) y (y_i) don dos sucesiones equivalentes de numeros reales.

Observemos que si además $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ es una serie cualquiera de números reales tal que:

$$\lambda_1 x_1 \cdots + \lambda_i x_i + \cdots + \lambda_n x_n \neq \omega$$

y

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_i x_i + \cdots + \lambda_n x_n$$

$$= \lambda_1(kx_1) + \cdots + \lambda_n(kx_n)$$

$$= k(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n)$$

entonces

$$\frac{y_1}{x_1} = \cdots = \frac{y_i}{x_i} = \cdots = \frac{y_n}{x_n} = \frac{\lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_n y_n}{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n}$$

En particular, si

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \text{ y } x_1 + \neq \omega \text{ y } x_1 - x_2 \neq \omega$$

Entonces

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

En general; tolas las propiedades que hemos mostrado hasta el momento, se cumplen para todo cuerpo conmutativo.

2.3.5 Propiedades de la relación de orden en $\mathbb{R}$

Recuérdese que la relación " $\leq$ " es de orden total sii

1) " $\leq$ " es reflexiva:
Esto es, si para todo x en $\mathbb{R}$ tenemos que $x \leq x$.

2) " $\leq$ " es antisimétrica:
Dados x, y en $\mathbb{R}$,

$$(x \leq y \ , \ y \leq x) \Rightarrow x = y$$

3) " $\leq$ " es transitiva:
Si x, y, z están en $\mathbb{R}$

$$(x \leq y \ , \ y \leq z) \Rightarrow x \leq z$$

4) Para todo x, y en $\mathbb{R}$ se tiene que:

$$x \leq y \quad \text{ó} \quad y \leq x$$

La relación recíproca a " $\leq$ " la denotaremos por " $\geq$ " (mayor o igual); está definida para x, y en $\mathbb{R}$ por:

$$(x \geq y) \Leftrightarrow (y \leq x$$

Fácilmente podemos verificar que la relación " $\geq$ " es de orden total, dada la definición, porque " $\leq$ " es de orden total.

Dados x, y en $\mathbb{R}$, denotamos:

$$x < y \quad \text{sii} \quad x \leq y \quad \wedge \quad x \neq y$$

$$x > y \quad \text{sii} \quad x \geq y \quad \wedge \quad x \neq y$$

Y diremos respectivamente que x es estrictamente menor ó estrictamente mayor que y.

Definición 2.2

Llamamos intervalo en $\mathbb{R}$ a cualesquiera de los siguientes conjuntos:

1) $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ intervalo cerrado.
2) $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ intervalo abierto.
3) $[a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ intervalo abierto en b y cerrado en a.
4) $]a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ intervalo cerrado en b y abierto en a.

Además, si $b \leq a$ diremos:

$$[a,b] =]a,a[= [a,a[=]a,a] = \emptyset$$
$$[a,a] = \{a\}$$

Usaremos también los símbolos $+\infty$ y $-\infty$. Estos símbolos no representan números reales;denotan respectivamente a más y menos infinito. los usaremos por comodidad en la escrituras y así, diremos:

5) $[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$
6) $]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$
7) $]-\infty,a[= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$
8) $]-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a$
9) $]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$

Y para facilitar la notación definiremos los siguientes subconjuntos:

1) $\mathbb{R}_+ = [\omega,+\infty[$ el conjunto de los números reales positivos.
2) $\mathbb{R}_+^* =]\omega,+\infty[$ el conjunto de los números reales estrictamente positivos.
3) $\mathbb{R}_- =]-\infty,\omega]$ el conjunto de los números reales negativos.
4) $\mathbb{R}_+^* =]-\infty,\omega[$ el conjunto de los números reales estrictamente negativos.

De las propiedades de la relación de orden y de la definición de los conjuntos anteriores, tenemos:

1) $\mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \{\omega\}$
2) $\mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_- = \mathbb{R}$

Teorema 2.4
Dados x, y en $\mathbb{R}$, entonces

1) $x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad y - x \in \mathbb{R}_{+}$
2) $x < y \quad \Leftrightarrow \quad y - x \in \mathbb{R}_{+}^{*}$

Demostración

1) Dados x, y en $\mathbb{R}$ se tiene que:

$$(x \leq y) \quad \Leftrightarrow \quad (x - x \leq y - x)$$

o sea

$$\omega \leq \; y - x$$

de donde

$$y - x \; \in \; \mathbb{R}_{+}$$

2) Se obtiene con un prueba muy similar

Corolario 2.1 Para todo x en $\mathbb{R}$

$$(x \in \mathbb{R}_{+}) \quad \Leftrightarrow \quad (-x \in \mathbb{R}_{-} \quad (x \in \mathbb{R}_{+}^{*}) \quad \Leftrightarrow \quad (-x \in \mathbb{R}_{-}^{*})$$

y utilizando la propiedad (2 ii) de la definición de $\mathbb{R}$,

1) $(\omega \leq x \;\wedge\; y \leq \omega) \quad \Rightarrow \quad (xy \leq \omega)$
2) $(x \leq \omega \;\wedge\; y \leq \omega) \quad \Rightarrow \quad (\omega \leq xy)$

Generalizando estos resultados por recurrencia, obtenemos que el producto de n números reales es positivo, si multiplicamos un número par de números negativos.

Del teorema 2.4 ($xz \leq yz$ es equivalente a $yz \, - \, xz \in \mathbb{R}$), obtenemos los siguientes resultados:

1) Si $\omega < z$ entonces $((x \leq y) \quad \Rightarrow \quad (xz \leq yz))$
2) Si $\omega > z$ entonces $((x \leq y) \quad \Rightarrow \quad (xz \geq yz))$

Teorema 2.5

El cuadrado de todo número real es positivo. El cuadrado de todo número real distinto de cero es estrictamente positivo.

Demostración

sabemos que $x^2 = x \cdot x$

1) Si x es positivo, es claro que x^2 también lo es.

2) Si x es negativo; notemos que $-x$ es positivo. Ahora bien, $x^2 = (-x)(-x)$ que es positivo por 1).

3) $x^2 = \omega$ sii $x = \omega$ pues habíamos visto que $\mathbb{R}$ no posee divisores de cero.

Corolario 2.2 En $\mathbb{R}$ tenemos que $\omega < e$ ya que $e = e^2$

Teorema 2.6

La relación de orden total "$\leq$" es densa en $\mathbb{R}$; es decir, dados dos números reales a, b tales que $a < b$, siempre existe un real c tal que $a < c < b$.

Demostración

Dados a, b en $\mathbb{R}$, entonces

$$a < b \Rightarrow \frac{a}{2} < \frac{b}{2} \Rightarrow \frac{a}{2} + \frac{a}{2} < \frac{b}{2} + \frac{a}{2}$$

o sea, que:

$$a < b \Rightarrow a < \frac{a+b}{2}$$

y de la misma manera

$$a < b \Rightarrow \frac{a+b}{2} < b$$

Por lo tanto, sea $c = \dfrac{a+b}{2}$ el números buscado.

2.4 $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ como subconjunto de $\mathbb{R}$

Definición 2.3

Dado un entero cualquiera, designamos por $n\,e$ al número real definido de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{llcll}
\text{si } n > 0 & n\,e & = & e + e + \cdots + e & (n \text{ veces }) \\
\text{si } n = 0 & n\,e & = & \omega & \\
\text{si } n < 0 & n\,e & = & -n \cdot (-e) = -e - e - \cdots - e & (n \text{ veces })
\end{array}
$$

Observemos que n está en $\mathbb{R}$ puesto que $n\,e$ lo está. Denotaremos como en $e\,\mathbb{Z}$ al conjunto de todos los números reales de la forma $n\,e$ con n un número entero cualquiera.

Lema 2.3 Dados dos enteros cualesquiera n y p, se cumplen las siguientes proposiciones:

$$n\,e + p\,e = (n + p)e$$

$$n\,e \cdot p\,e = (np)e$$

$$
\begin{array}{llccc}
1. & \text{si } n > 0 & \omega & < & n\,e \\
2. & \text{si } n = 0 & \omega & = & n\,e \\
3. & \text{si } n < 0 & n\,e & < & \omega
\end{array}
$$

Estas proposiciones se verifican fácilmente si usamos la 2.3 y las propiedades de los números reales.

Teorema 2.7

La aplicación de $f : \mathbb{Z} \longrightarrow e\mathbb{Z}$ definida por $f(n) = ne$ satisface ser biyectiva y las siguientes propiedades para $n\,p$ enteros cualesquiera:

$$f(n+p) = f(n) + f(p)$$

$$f(np) = f(n) \cdot f(p)$$

$$(n < p) \Rightarrow f(n) < f(p)$$

Demostración

1) f es sobreyectiva:

   Dado $n\,e$ en $e\mathbb{Z}$ entonces $f(n) = n\,e$

2) f es inyectiva:

   Sean n, p enteros tales que:

$$f(n) = f(p) \Rightarrow n\,e - p\,e = \omega$$

   luego

$$(n - p)e = \omega \Rightarrow n = p$$

   y por lo tanto f es inyectiva.

3) Obtenemos las propiedades 2.21 y 2.22 del teorema 2.7 directamente de las proposiciones 2.18 y 2.19 del lema 2.3.

4) Dados dos enteros n, p tales que $n < p$, entonces:

$$0 < p - n$$

   Y por la propiedad 2.20 del lema 2.3

$$f(p - n) > \omega$$

   luego

$$pe - ne > \omega \Rightarrow pe > ne$$

lo que nos dice que:

$$f(p) > f(n)$$

Observemos que hemos mostrado que $\mathbb{Z}$ y $e\,\mathbb{Z}$ son isomorfos, de donde tenemos que $e\mathbb{Z}, +, x, \leq$ es un anillo conmutativo totalmente ordenado, dado que $\mathbb{Z}$ lo es.

Por tanto identificaremos los elementos de $\mathbb{Z}$ con los elementos reales de la forma $n\,e$. En particular diremos:

$$\omega = 0 \quad \text{y} \quad e = 1$$

Y por lo tanto debemos concluir que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

El campo $\mathbb{Q}$

Definición 2.4

Llamaremos número racional a todo número real igual al cociente de un entero por otro no nulo. Denotaremos por $\mathbb{Q}$ al conjunto de los números racionales.

Notemos que todo entero es el cociente de sí mismo por 1 de donde podemos concluir que:

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Teorema 2.8

El conjunto $\mathbb{Q}$ es un subcuerpo conmutativo de $\mathbb{R}$ bajo la adición y la multiplicación de los números reales.

Demostración

Dados x, y en $\mathbb{Q}$, sabemos que si $x = \dfrac{a}{b}$, $y = \dfrac{a'}{b'} \neq 0$. Entonces:

$$\begin{aligned} x - y &= \frac{a}{b} - \frac{a'}{b'} = ab^{-1} - a'b^{-1} &&= (ab' - ba')b^{-1}b'^{-1} \\ & &&= \frac{ab' - ba'}{b\,b'} \end{aligned}$$

De donde $x - y$ está en $\mathbb{Q}$. Así tenemos que $(\mathbb{Q}, +)$ es un subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$.

Por otra parte:

$$x \cdot y^{-1} = (ab^{-1})b'a^{-1} = (ab')(ba')^{-1} = \frac{ab'}{ba'}$$

de donde $x \cdot y^{-1}$ está en $\mathbb{Q}$, pues ba' es distinto de cero. Por lo tanto, $(\mathbb{Q}^*, \times)$ es un subgrupo de $(\mathbb{R}^*, \times)$.

Y como la suma disminuye con respecto a la multiplicación en $\mathbb{R}$, dado que estas son cerradas en $\mathbb{Q}$, obtenemos que la suma y el producto distribuyen también en $\mathbb{Q}$. Por lo tanto, $\mathbb{Q}$ es un subcuerpo conmutativo de $\mathbb{R}$.

Observemos que el orden total definido sobre $\mathbb{R}$ determina un orden total en $\mathbb{Q}$. Además, esta relación es compatible con la suma y con el producto. Resumiendo: $(\mathbb{Q}, +, \times, \leq)$ es un cuerpo totalmente ordenado.

2.5 Valor absoluto y distancia

Definición 2.5

Llamaremos valor absoluto a la aplicación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^+$ que a todo número real x, se le hace corresponder el mayor elemento del conjunto $\{-x, x\}$. A ese elemento lo denotamos por $|x|$.

Hacemos notar que esta definición es equivalente a decir que:

$$\{|x|\} = \mathbb{R}^+ \cap \{-x, x\}$$

Además, observemos que:

1) $|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$

2) De la definición 2.5 obtenemos que:

$$|x| = |-x|$$

3) También es inmediato que:

$$|x| = |y| \Leftrightarrow x = y \quad \text{ó} \quad x = -y$$

4) Dado x en $\mathbb{R}$

$$-|x| \leq x \leq |x|$$

Teorema 2.9

Si a es un número real mayor o igual a cero, entonces:

$$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$$

Demostración

Supongamos que $|x| \leq a$, luego

$$-a \leq -|x| \leq x \leq |x| \leq a$$

Inmediatamente obtenemos que:

$$-a \leq x \leq a$$

Supongamos ahora que $-a \leq x \leq a$, entonces:

Si $x > 0$ tenemos que:

$$|x| = x \leq a$$

Si $x < 0$ tenemos que:

$$|x| = -x \leq a$$

y por tanto

$$|x| \leq a$$

Y con esto completamos la prueba.

Propiedades del valor absoluto

Para todo x, y en $\mathbb{R}$ se tiene que:

$$|x| \geq 0$$

Dado que la aplicación valor absoluto es de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^+$.

$$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$|xy| = |x||y|$$

Dado que

$$-(xy) = (-x)y = x(-y)$$

y que

$$(xy) = (-x)(-y)$$

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

En efecto, sabemos que:

$$-|x| \leq x \leq |x| \tag{2.2}$$

$$-|y| \leq y \leq |y| \tag{2.3}$$

Sumando 2.2 y 2.3

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$$

por lo que

$$-(|x| + |y|) \leq x + y$$

Conocemos esta propiedad con el nombre de desigualdad triangular.

De una manera general, si nos damos un campo conmutativo k, con elemento neutro de la adición ω, llamaremos valor absoluto sobre k a toda aplicación v de k en $\mathbb{R}_+$, tal que si x y y están en k, entonces:

$$v(x) = 0 \iff x = \omega$$

$$v(xy) = v(x) + v(y)$$

$$v(x + y) \leq v(x) + v(y)$$

Por abuso de lenguaje decimos que $v(x)$ es el valor absoluto de x.

De las propiedades anteriores obtenemos:

1) Si x está en $\mathbb{R}^*$, entonces:

$$\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}$$

2) Dados x en $\mathbb{R}$ y z en $\mathbb{R}^*$,

$$\left|\frac{x}{z}\right| = \frac{|x|}{|z|}$$

3) Si x y están en R, entonces

$$|\ |x| - |y|\ | \leq |x + y|$$

En efecto, como

$$y = (x+y) - x$$

tenemos que

$$|y| \ = \ |\,(x+y) \ + \ (-x)\,| \ \ \leq \ \ |x+y| \ + \ |x|$$

O lo que es equivalente

$$|y| \ - \ |x| \ \ \leq \ \ |x+y|$$

Por un razonamiento idéntico:

$$|x| \ - \ |y| \ \ \leq \ \ |x+y|$$

Como $|x| \ - \ |y|$ es el opuesto de $|y| \ - \ |x|$, entonces:

$$|\ \ |x| - |y|\ \ | \ \ \leq \ \ |x+y|$$

Distancia en $\mathbb{R}$

Definición 2.6

Llamaremos distancia sobre el conjunto E a toda aplicación

$$\begin{array}{rccc} d: & E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & (x\,,\,y) & \mapsto & d(x\,,\,y) \end{array}$$

Que cumple las siguientes propiedades:

Dados x, y en E,

$$(\,(d(x,y) \ = \ 0) \ \ \Leftrightarrow \ \ (x \ = \ y)$$

Para todo x, y en E,

$$d(x,y) \ = \ d(y,x)$$

Dados x, y, z en E,

$$d(x,y) \;\leq\; d(x,z) + d(z,y)$$

Definición 2.7
Si E es un espacio vectorial con una distancia d, decimos que (E,d) es un espacio métrico.

Lema 2.4 Consideremos la aplicación

$$\begin{array}{rccc} d: & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & (x\,,\,y) & \mapsto & |x - y| \end{array}$$

Esta aplicación define una distancia o métrica.

Demostración

1) $d(x,y) = 0 \;\Leftrightarrow\; |x-y| = 0 \;\Leftrightarrow\; x-y = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y$

2) $d(x,y) = |y-x| = |x-y| = d(x,y)$

3) $d(x,y) = |y-x| = |(x-z) - (y-z)| \leq |x-z| + |y-z| = d(x,z) + d(z,y)$

Por lo tanto, $\mathbb{R}$ es un espacio métrico.

Notemos que la aplicación d restringida a $\mathbb{Q}$ hace de éste un espacio métrico.

2.6 Potencias enteras de un número real

2.6.1 Potencias positivas de un número real cualquiera

Definición 2.8
Para todo número real x y para todo entero n, ponemos

$$a^0 = 1, \ a^1 = a \ \text{ y } \ a^{n+1} = a^n \cdot a$$

Leemos el símbolo a^n como a tiene exponente n o a está elevado a la potencia n. En particular, decimos que " a^2 " es el cuadrado de " a ", y " a^3 " el cubo de " a ".

Para todo numero natural $n \geq 1$

$$0^n = 0 \text{ y } 1^n = 1$$

Lema 2.5 Para todo a en $\mathbb{R}$ y n, p en $\mathbb{N}$, tenemos que:

1) $a^n a^p = a^{a+p}$

2) $(ab)^n = a^n b^n$

3) $(a^n)^p = a^{np}$

Demostración

1) Sabemos por la definición 2.8 que $a^{n+1} = a^n a$, supongamos que:

$$a^{n+p-1} = (a^n a^{p-1})$$

ahora

$$a^n a^p = a^n(a^{p-1}) \cdot a$$

Luego por hipótesis de inducción, tenemos:

$$(a^n a^p) = a^{n+p-1} \cdot a$$

y por definición

$$(a^n a^p) = a^{n+p}$$

2) Observemos que:

$$(ab)^1 = (ab) = (a^1 b^1)$$

Supongamos que

$$(ab)^n = (a^n b^n)$$

luego

$$(ab)^{n+1} = (ab)^n (ab) = (a^n b^n)(ab) = (a^n a)(b^n b) = a^{n+1} b^{n+1}$$

3) por definición sabemos que

$$(a^n)^1 = a^n = a^{n \cdot 1}$$

Supongamos que

$$(a^n)^{p-1} = a^{n(p-1)}$$

luego

$$(a^n)^p = (a^n)^{p-1} a^n = a^{n(p-1)+n} = a^{np}$$

Los puntos 1 y 2 del lema 2.5 son válidos para todo anillo.El punto 2 es válido para anillos conmutativos.

2.6.2 Potencias enteras de un número real

Consideremos la aplicación, para a en $\mathbb{R}^*$, definida por

$$\begin{array}{rccccl} g_a : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} & & \\ & 0 & \mapsto & 1 & & \\ & n & \mapsto & a^n & & n \neq 0 \end{array}$$

Observemos que g_a es un homomorfismo de $(\mathbb{N}, +)$ en $(\mathbb{R}, x)$ como mostramos en la parte 1 del lema 2.5.

Ahora bien , si a está en $\mathbb{R}^*$, como

$$1 \;=\; g_a(n-n) \;=\; g_a(n)\cdot g_a(-n)$$

Entonces

$$g_a(-n) \;=\; \frac{1}{g_a(n)}$$

De donde, para todo a en $\mathbb{R}$ y para todo n en $\mathbb{N}^*$

$$a^{-1} \;=\; \frac{1}{a^{(n)}}$$

Si $n = 1$, tenemos la justificación para la notación " a^{-1} " adoptada anteriormente para el inverso multiplicativo de a , con a en $\mathbb{R}$.

Ahora, si n , p están en $\mathbb{N}^*$, fácilmente podemos verificar que:

$$\frac{a^n}{a^p} \;=\; \begin{cases} a^{n-p} & \text{si} \quad p \geq n \\ 1 & \text{si} \quad p = n \end{cases}$$

Teorema 2.10

Dados a , b en $\mathbb{R}^*$ y n , p en $\mathbb{Z}$,

$$a^n a^p \;=\; a^{n+p}$$

$$(ab)^n \;=\; a^n \cdot b^n$$

$$(a^n)^p = a^{n \cdot p}$$

Demostración

1) Por el lema 2.5, tenemos que el resultado es válido para n, p en $\mathbb{N}^*$

Supongamos que n está en $\mathbb{N}^*$ y p en $\mathbb{Z}_-^*$.

Sabemos que $p = -p'$ con p' en $\mathbb{N}^*$, entonces

$$a^n \cdot a^p = a^n \cdot a^{-p'} = \frac{a^n}{a^{p'}}$$

Luego si $p' \leq n$,

$$a^n a^p = \frac{a^n}{a^{p'}} = a^{n-p'} = a^{n+p}$$

Si $n < p'$,

$$a^n a^p = \frac{a^n}{a^{p'}} = a^{-(p'-n)} = a^{-p+n} = a^{n+p}$$

Supongamos ahora que n, p están en $\mathbb{Z}_-^*$.

Sabemos que $n = -n'$ y $p = -p'$ con n' y p' en $\mathbb{Z}_-^*$.

Entonces:

$$\begin{aligned} a^n a^p &= a^{-n'} a^{-p'} = \frac{1}{a^{n'}} \cdot \frac{1}{a^{p'}} = \frac{1}{a^{n'} a^{p'}} \\ &= \frac{1}{a^{n'} + p'} = a^{-(n'+p')} = a^{-n'-p'} \\ &= a^{a+p} \end{aligned}$$

Por lo que para todo a, b en $\mathbb{R}$ y n, p en $\mathbb{Z}$,

$$a^n a^n = a^{n+p}$$

2) Sean a, b dos ´números reales no nulos cualesquiera y n un número entero menor o igual a 0. Supongamos que $n' = -n$, con n en $\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}(ab)^n &= (ab)^{-n'} = \frac{1}{(ab)^{n'}} = \frac{1}{a^{n'}b^{n'}} \\ &= a^{-n'}b^{-n'} = a^n b^n\end{aligned}$$

Recordemos que esta propiedad fue demostrada en el lema 2.5 para n en $\mathbb{N}$, por lo tanto, concluimos para todo a, b en $\mathbb{R}$ y n, p en $\mathbb{Z}$:

$$(ab)^n = a^n b^n$$

3) Dados a en $\mathbb{R}^*$ y p en $\mathbb{Z}^*_-$, consideremos $p' = -p$, o sea $p' \geq 0$, entonces:

$$(a^n)^p = (a^n)^{-p'} = \frac{1}{(a^n)^{p'}} = \frac{1}{a^{np'}} = \frac{1}{a^{-(np)}} = a^{np}$$

Supongamos ahora que $n \leq 0$, $p \leq 0$. Tomemos $n' = -n$, o sea $n' \geq 0$, entonces:

$$\begin{aligned}(a^n)^p &= (a^{-n'})^p = \left(\frac{1}{a^{n'}}\right)^p = \frac{1}{a^{n'p}} \\ &= \frac{1}{a^{-(np)}} = a^{np}\end{aligned}$$

Sean ahora $n \leq 0$ y $p \leq 0$, pongamos $n' = -n$ y $p' = -p$ entonces:

$$\begin{aligned}(a^n)^p &= (a^{-n'})^{-p'} = \left(\frac{1}{a^{n'}}\right)^{-p'} = (a^{n'})^{p'} \\ &= a^{(-n)(-p)} = a^{np}\end{aligned}$$

Y por lo tanto concluimos que:

$$(a^n)^p = a^{np} \qquad \forall\, n, p \in \mathbb{Z}$$

Hacemos notar que las proposiciones 2.34 y 2.36 del teorema 2.10 son válidas en todos los campos y la proposición 2.35, sólo si el campo es conmutativo.

Partiendo de las propiedades que hemos enunciado, podemos verificar fácilmente los siguientes resultados, para todo número real " a " no nulo y para todo número entero n:

1) $0 < a \Rightarrow 0 < a^n$

2) $a < 0 \Rightarrow 0 < a^{2n}$

3) $a < 0 \Rightarrow a^{2n+1} < 0$

Lema 2.6 Dados dos números reales a y b cualesquiera y un número entero n mayor o igual a 2, tenemos que:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}$$

Demostración

La fórmula es válida para $n = 2$, pues:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

Supongamos que la proposición se cumple para $n \geq 2$;

$$
\begin{aligned}
a^{n+1} - b^{n+1} &= a(a^n - b^n) + (a-b)b^n \\
&= a(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1}) + (a-b)b^n \\
&= (a-b)(a^n + a^{n-1}b + \cdots + a^2b^{n-2} + b^{n-1} + b^n
\end{aligned}
$$

Y obtenemos el resultado deseado.

Teorema 2.11

Dados dos números reales positivos a y b un número entero natural no nulo, tenemos que:

$(a < b) \Leftrightarrow (a^n < b^n)$

$(a = b) \Leftrightarrow (a^n = b^n)$

Demostración

1) Supongamos que $0 \leq a \leq b$. Por el lema 2.6, podemos concluir que:

$$a^n < b^n$$

puesto que

$$a^n - b^n < 0$$

dado que $(b - a) > 0$ (por hipótesis) y que

$$(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

es un número positivo (pues es una suma de números positivos). Por otra parte, si suponemos que $a^n < b^n$, entonces

$$a^n - b^n < 0$$

de donde (lema 2.6)

$$(a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) < 0$$

ahora bien:

$$(a^{n-1})(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) > 0$$

de donde

$$(a - b) < 0$$

Luego

$$a < b$$

Con lo cual concluimos

$$(a < b) \Leftrightarrow (a^n < b^n)$$

2) Para la segunda proposición omitiremos la prueba ya que se obtiene con un razonamiento muy similar al anterior.

Hacemos notar que si a es un número tal que $0 < a < 1$ entonces:

$$a^n < 1$$

y si n es un número entero estrictamente negativo, entonces

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}} > 1$$

También es sencillo verificar que:

$$(a^n = 1) \Leftrightarrow (n = 0$$

2.6.3 Grupo de la potencias enteras de un número real no nulo

Sea a un elemento cualquiera de $\mathbb{R}^*$. Denotamos por E_a al conjunto de las potencias de a^n de donde n es cualquier número entero, o sea:

$$E_a = \cdots a^{-n}, \cdots, a^{-2}, a^{-1}, a^0 = 1, a^1, a^2, \cdots, a^n \cdots$$

Lema 2.7 Para todo a un elemento cualquiera de $\mathbb{R}^*$ tenemos que (E_a, x) es un subgrupo de $(\mathbb{R}^*, x)$. Lo llamaremos Grupo de potencias enteras de a.

En efecto,

$$a^p(a^q)^{-1} = a^p a^{-q} = a^{p-q} \in E_a$$

de donde (E_a, x) es un subgrupo de $(\mathbb{R}^*, x)$

Teorema 2.12

Para todo número real distinto de $0, 1$ y -1,

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{Z} & \longrightarrow & E_a \\ & n & \mapsto & a^n \end{array}$$

es un isomorfismo del grupo $(\mathbb{Z}, +)$ sobre el grupo (E_a, x)

Demostración

Observemos que la sobreyectividad se obtiene de la definición de E_a.
Sean p y q en $\mathbb{Z}$ tales que $a^p = a^q$, entonces:

$$a^{p-q} = 1$$

y como a es distinto de 1 y -1 (por hipótesis), entonces

$$p - q = 0 \Rightarrow p = q$$

Co lo que mostramos que la aplicación f es inyectiva y por lo tanto, biyectiva.

Ahora,

$$f(p+q) = a^{p+q} = a^p a^q = f(p) \cdot f(q)$$

de donde f es un homomorfismo y, por lo mostrado anteriormente, un isomorfismo de $(\mathbb{Z}, +)$ en $(E_a, +)$.

Teorema 2.13

Para todo par de números reales x, y y para todo entero natural no nulo n,

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} n^{n-i} y^{\,i}$$

Demostración

Recordemos que dados dos enteros n, p tales que $p < n$,

$$\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)} = C_p^n$$

Observemos que para x, p en $\mathbb{R}$:

$$(x+y)^1 = \binom{0}{1} x^1 + \binom{1}{1} y^1 = x+y$$

Supongamos ahora que la proposición a demostrar se cumple para $n \geq 2$. Debemos mostrar que es válida para $n+1$.

Sabemos que:

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)^n (x+y)$$

y por hipótesis de inducción;

$$\begin{aligned} (x+y)^{n+1} &= \left[\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^{\,i}\right](x+y) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i+1} y^{\,i} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^{\,i+1} \\ &= x^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i+1} y^{\,i} + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} x^{n-i} y^{i+1} + y^{n+1} \end{aligned}$$

Luego, suponiendo que $j = i+1$, tenemos que:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} x^{n-i} y^{i+1} = \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j-1} x^{n-j+1} y^{\,j}$$

y por lo tanto;

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= x^{n+1}+\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}x^{n-i+1}\,y^{\,i}+\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j}x^{n-j+1}y^{\,j}+y^{n+1}\\ &= x^{n+1}+y^{n+1}+\sum_{i=1}^{n}\left[\binom{n}{i}+\binom{n}{i-1}\right]x^{n-i+1}y^{\,i}\end{aligned}$$

Recordemos que:

$$\binom{n}{i}+\binom{n}{i-1}=\binom{n+1}{i}$$

de donde

$$(x+y)^n=\binom{n+1}{0}x^{n+1}+\binom{n+1}{n+1}y^{n+1}+\sum_{i=1}^{n}\binom{n+1}{i}x^{n+1-i}\,y^{\,i}$$

Con lo cual tenemos que:

$$(x+y)^{n+1}=\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}x^{n+1-i}\,y^{\,i}$$

Obteniendo el resultado del teorema.

Corolario 2.3 Para todo x, y en $\mathbb{R}^*$ y en $\mathbb{N}^*$

$$(x-y)^n=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}x^{n-i}\,y^{\,i}$$

Esto se verifica fácilmente aplicando el teorema anterior para $(x+(-y))^n$.

Observemos que en la demostración se utilizaron únicamente las propiedades de $\mathbb{R}$ considerado como anillo conmutativo.

La fórmula binomial es entonces válida en cualquier anillo conmutativo.

Los coeficientes binomiales coinciden con los elementos del triángulo de pascal que hemos visto en el curso anterior.

2.7 Intervalos en $\mathbb{R}$

Primero daremos una serie de definiciones con el propósito de introducir la terminología apropiada y una notación cómoda para esta sección.

Definición 2.9

Sea S un subconjunto no vacío de R. Decimos que S está acotado superiormente por B, B en $\mathbb{R}$ sii

$$x \leq B \qquad \text{para todo } x \text{ en } S.$$

Decimos que B es una cota superior de S.

Observemos que si B es una cota superior, entonces todo número real mayor que B también lo es. Si B es una cota superior y tenemos que B pertenece a S, decimos que B es el mayor elemento de S o que B es el máximo elemento de S, y lo denotamos por:

$$B = max\, S$$

Si un conjunto no posee una cota superior, decimos que no está acotado superiormente. Por ejemplo, el conjunto de los números racionales positivos es un conjunto no acotado superiormente en $\mathbb{R}$.

El conjunto de los elementos que satisfacen $0 \leq x < a$ con $a > 0$ es un conjunto acotado superiormente y a es una cota superior.

El intervalo $[0, c]$ en un conjunto acotado y c es su mayor elemento.

Definición 2.10

Sea S un subconjunto acotado no vacío de $\mathbb{R}$. Decimos que B es el supremo o la menor de las cotas superiores si:

1) B es una cota superior de S

2) Si A es otra cota superior de S, entonces $B \leq A$

Pondremos:

$$B = \sup S$$

Recordemos que en la sección 2.2, entre los axiomas de la definición de $\mathbb{R}$, asumimos que todo subconjunto S no vacío de números reales acotado superiormente tiene un supremo, o sea, que existe $B = \sup S$.

Lema 2.8 El supremo de un conjunto acotado es único.

Demostración

Supongamos, por contradicción, que existen dos supremos A y B.

Como A es un supremo y B es una cota superior (pues B también es supremo), por la definición 2.10 del supremo tenemos:

$$A \leq B$$

y de la misma manera

$$B \leq A$$

Por lo tanto

$$A = B$$

Definición 2.11

Un conjunto S no vacío, subconjunto de $\mathbb{R}$, está acotado inferiormente si existe un número real A tal que para todo x en S:

$$A \leq x$$

Al número A le llamaremos cota inferior. Si la cota inferior está en el conjunto, decimos que es el menor elemento o el mínimo elemento y lo denotamos:

$$A = \min S$$

Definición 2.12

Sea S un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ acotado inferiormente. Decimos que A es el ínfimo de S sii

1) A es la cota inferior de S.
2) Si C es coto inferior de S, entonces $C \leq A$.

Teorema 2.14

Todo subconjunto S no vacío y acotado inferiormente posee ínfimo.

Demostración

Consideremos el conjunto $-S$, o sea, el conjunto de todos los inversos aditivos de S. $-S$ está acotado superiormente, por lo cual, por el axioma asumido, existe el supremo de $-S$.

Sea

$$B = \sup -S$$

Resta mostrar que $-B = \inf S$, que es sencillo de verificar y que dejaremos como ejercicio.

Teorema 2.15

Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ acotado superiormente y α un número real. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

$\alpha = \sup -A$

1) Si $a \in A, a \leq \alpha$
2) $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^*_+)(\exists b \in A)$ tq $\alpha - \varepsilon \leq b$

Demostración

Supongamos que $\alpha = \sup A$.

Obtenemos la propiedad 2.40-1 por definición del supremo. En cuanto a la propiedad 2.40-2; supongamos por contradicción que no existe ε_1 en $\mathbb{R}^*_+$ tal que para b en A se cumpla:

$$\alpha - \varepsilon_1 < b$$

entonces, si a está en A,

$$a \leq \alpha - \varepsilon_1$$

de donde $\alpha - \varepsilon_1$ es una cota superior de A menor que el supremo, lo cual contradice nuestra hipótesis (α es el supremo).

Asumiendo que el resultado es falso, hemos llegado a una contradicción. Por lo tanto, este resultado es verdadero, o sea, se cumple que:

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists b \in A) \quad \text{tq} \quad \alpha - \varepsilon \leq b$$

Supongamos ahora que la proposición **??** es válida. Observemos, por hipótesis, que α es cota superior. Hay que demostrar que α es la menor de las cotas superiores.

Supongamos, por contradicción, que existe otra cotas superior α' tal que:

$$\alpha' < \alpha$$

Consideremos ahora

$$\varepsilon = \alpha - \alpha'$$

Por hipótesis existe b en A tal que:

$$\alpha - \varepsilon < b$$

O sea, existe b en A tal que:

$$\alpha' < b$$

Lo que implica que α' no puede ser cota superior de A y, por lo tanto, α es la menor de las cotas superiores, o sea,

$$\alpha = \sup A$$

Definición 2.13

Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$. Decimos que A es acotado si es acotado inferior y superiormente.

Teorema 2.16

Si A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$, y acotado inferiormente. Sea α un número real.
Las siguientes proposiciones son equivalentes:

$\alpha = \inf A$

1) $\forall a \in A, \quad \alpha \leq a$

2) $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^*_+)(\exists b \in A$ tal que $b < \alpha + \varepsilon$

Demostración

Dada la gran similitud con la prueba del teorema anterior, dejaremos esta demostración como ejercicio.

A continuación haremos una caracterización de los intervalos de $\mathbb{R}$. Recordemos que los intervalos son todos los conjuntos de la forma:

$[a\,,\,b], \quad]a\,,\,b[, \quad [a\,,\,b[, \quad]a\,,\,b], \quad]-\infty\,,\,a], \quad]-\infty\,,\,a[, \quad [a\,,\,+\infty[, \quad]a\,,\,+\infty], \quad \mathbb{R}$

con $a\,,\,b$ en $\mathbb{R}$

Teorema 2.17

Un subconjunto no vacío P de $\mathbb{R}$ es un intervalo si y sólo si dados x, z en P tales que $x \leq z$,

$$[x\,,\,z] \subset P$$

Demostración

Fácilmente, basados en la definición de intervalo, podemos mostrar que si x, y están en un intervalo I de $\mathbb{R}$, entonces:

$$[x\,,\,y] \subset I$$

Para ilustrar, daremos un ejemplo:

Consideremos el intervalo $[a\,,\,b]$ de $\mathbb{R}$ con $a < b$; sean x, y en $[a\,,\,b]$ con $x < y$. Entonces, por definición:

$$[x\,,\,y] \;=\; \{z \in \mathbb{R}/\, x \leq z \leq y\}$$

Como x está en $[a\,,\,b]$

$$a \leq x$$

Como y esta en $[a\,,\,b]$

$$y \leq b$$

Luego, para todo z en $[x\,,\,y]$

$$a \;\leq\; x \;\leq\; z \;\leq\; y \;\leq\; b$$

De donde z en $[a\,,\,b]$ y, por lo tanto,

$$[x\,,\,y] \subset [a\,,\,b]$$

Para el resto de los casos omitiremos las prueba, dada la analogía con este caso.

Sea P un conjunto que satisface que, si x, y esta en P, entonces:

$$[x\,,\,y] \subset P$$

Primer caso

Supongamos que P es un conjunto acotado, entonces existen α, β números reales tales que:

$$\alpha \;=\; \inf P, \qquad \beta \;=\; \sup P, \qquad \text{con } \alpha \;\leq\; \beta$$

además

$$P \subset [\alpha\,,\,\beta] \tag{2.4}$$

Ahora, si $\alpha \;=\; \beta$:

$$P \subset [\alpha\,,\,\alpha] \;=\; \{\alpha\}$$

y P es el intervalo no vacío $[\alpha, \alpha]$

Si $\alpha < \beta$, consideremos un número real cualquiera que cumpla:

$$\alpha \leq x \leq r \leq y \leq \beta$$

y por hipótesis

$$[x, y] \subset P$$

Luego r está en P, o sea

$$]\alpha, \beta[\subset P \tag{2.5}$$

De 2.4 y 2.5 tenemos que P es un intervalo acotado.

Segundo caso

Supongamos que P es un subconjunto de R acotado superiormente, pero no inferiormente; por lo tanto existe α en $\mathbb{R}$ tal que:

$$\alpha = \sup P$$

luego

$$P \subset]-\infty, \alpha]$$

Sea r un número real cualquiera tal que $r < \alpha$,0luego por la caracterización del supremo, existe y en P tal que:

$$r < y \leq \alpha$$

Y como P no está acotado inferiormente existe x en P tal que:

$$x < r < y \leq \alpha$$

y como por hipótesis

$$[x, y] \subset P \Rightarrow r \in P$$

luego

$$]-\infty\,,\,\alpha[\subset P$$

Por lo tanto P es un intervalo acotado superiormente y no inferiormente.

Tercer caso

Si P es un conjunto acotado inferiormente, pero no superiormente, la prueba es similar a la del caso dos.

Cuarto caso

Si P es un conjunto de $\mathbb{R}$ no acotado que cumple la hipótesis, entonces, dado un número real cualquiera r, existen x, y en P tales que:

$$x < r < y$$

Por hipótesis tenemos que r está en P y, por lo tanto,

$$P =]-\infty\,,\,+\infty[= \mathbb{R}$$

Con esto queda demostrado que el teorema **??**, caracterización de los intervalos en $\mathbb{R}$.

Definición 2.14

Dados dos conjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$, A y B, tales que:

$$\sup A = \inf B\,,$$

decimos que A y B son dos partes adyacentes.

El teorema siguiente es una caracterización de las partes adyacentes.

Teorema 2.18

Dados dos subconjuntos no vacíos A y B de $\mathbb{R}$, son proposiciones equivalentes:

A y B son partes adyacentes.

$(\forall a \in A)(\forall b \in B) \qquad a < b$

$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists a' \in A)(\exists b' \in B)$ tal que $|a' - b'| < \varepsilon$

Demostración

Sean A y B dos subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ tal que:

$$\sup A = \inf B$$

Por definición de $\sup A$ y el $\inf B$ tenemos que:

$$a \leq \alpha \leq b \qquad \forall (a,b) \in A \times B$$

luego

$$a \leq b \qquad \forall (a,b) \in A \times B$$

Con los que obtenemos la primera propiedad de la proposición **??**.

Por otra parte, por la caracterización hecho del supremo y del ínfimo, para todo $\frac{\varepsilon}{2} < 0$ existen a en A y b en B tales que:

$$\alpha - \frac{\varepsilon}{2} < a$$
$$b < \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$$

Restando ambas desigualdades tenemos:

$$b - a \ < \ \alpha + \frac{\varepsilon}{2} - \left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right) \ = \ \varepsilon$$

Podemos concluir que para todo $\varepsilon > 0$ existen a en A y b en B tales que:

$$|a - b| \ < \ \varepsilon$$

Recíprocamente A y B dos subconjuntos de $\mathbb{R}$ que cumplan con,la propiedades 2.44 y 2.45 de la proposición **??**.

De la propiedad 2.44 obtenemos que A está acotado superiormente por todo elemento de B ; y B está acotado inferiormente por todo elemento de A ; o sea que existen α y β en $\mathbb{R}$ tales que:

$$\alpha \ = \ \sup A \quad \text{y} \quad \beta \ = \ \inf B$$

Tenemos que mostrar que $\alpha = \beta$

Sabemos que todo elemento de B es cota inferior de A , luego:

$$\alpha \ < \ \beta \qquad \forall b \in B$$

de donde se tiene que α es una cota inferior de B , o sea

$$\alpha \ \leq \ \beta \tag{2.6}$$

Supongamos que $\alpha < \beta$; sabemos que si a en A y b en B

$$a \ < \ \alpha \ < \ \beta \ < \ b$$

De donde se tiene que:

$$0 \ < \ \beta - \alpha \ \leq \ b - a \qquad (\forall a \in A)(\forall b \in B)$$

Si tomamos $\varepsilon \ = \ \dfrac{\beta - \alpha}{2}$ se cumple que:

$$|a - b| \ \geq \ \varepsilon \qquad (\forall a \in A)(\forall b \in B)$$

Lo que contradice la propiedad 2.45 de la proposición **??**, y por lo tanto, no puede ser que $\alpha < \beta$; de donde, por 2.44 obtenemos que:

$$\alpha = \beta$$

con lo que queda demostrado el teorema.

Por ejemplo, podemos verificar fácilmente que el conjunto B de los números reales de la formo $1 + \dfrac{1}{n}$ con n en $\mathbb{N}^*$ y el conjunto A formado por los números reales de la forma $1 - \dfrac{1}{n}$ con n en $\mathbb{N}^*$ on n en $\mathbb{N}^*$, son dos partes adyacentes, puesto que:

$$\sup A = \inf B = 1$$

Lema 2.9 Dados dos subconjuntos A y B no vacíos en $\mathbb{R}$, tales que:

$$(\forall a \in A)(\forall b \in B) \qquad a \leq b$$

$A \cup B$ es un intervalo

entonces A y B son partes adyacentes.

Demostración

En la propiedad 2.46 tenemos ya la primera propiedad de las partes adyacentes. Luego basta mostrar la propiedad 2.47.

De la propiedad 2.46 deducimos que A está acotada superiormente y B inferiormente. Sea α y β números reales tales que:

$$\sup A = \alpha \qquad \text{e} \qquad \inf B = \beta$$

Debemos mostrar que $\alpha = \beta$

Supongamos entonces que $\alpha < \beta$

Consideremos el número real x (demostrar su existencia quedará como ejercicio), tal que:

$$\alpha < x < \beta$$

Como x es mayor que α, no puede pertenecer a A; de la misma manera, por se menor que β no puede pertenece a B.

Sin embargo, por hipótesis, $A \cup B$ es un intervalo, entonces, por una caracterización hecha anteriormente, $[\alpha, \beta]$ debe estar en $A \cup B$. Con el argumento anterior hemos mostrado que esto no se cumple. Luego, suponer que $\alpha < \beta$, nos lleva a una contradicción.

Supongamos ahora que $\alpha > \beta$. Consideremos un número real y en B tal que:

$$\alpha > y > \beta$$

Por hipótesis, todos los elementos de B son cotas superiores de A. Por tanto, y es una cota superior de A menor que α. Como α es el supremo esto es una contradicción.

Hemos mostrado que suponer que $\alpha < \beta$ ó $\alpha > \beta$ nos lleva a una contradicción. Como no cabe otra posibilidad, tenemos entonces que:

$$\alpha = \beta$$

Observemos que este lema no es una caracterización, pues no todas las partes adyacentes cumplen con su unión sea un intervalo. Por ejemplo:

Sean:

$$A =]a, c[\cup]c, b[\quad \text{con} \quad a, b, c \quad \text{en} \quad \mathbb{R} \quad \text{y} \quad a < c < b$$

$$B = [b, d] \quad \text{con} \quad d \quad \text{en} \quad \mathbb{R} \quad \text{y} \quad b < d$$

Es claro que ambos subconjuntos son adyacentes; sin embargo, su unión no es un intervalo.

El teorema de los segmentos encajados

supongamos que a todo numero natural n le hacemos corresponder un intervalo acotado S_n. Llamamos una sucesión de intervalos encajados o una sucesión de segmentos encajados, a una sucesión de intervalos cerrados y acotados tales que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_{n-1} \subset s_n$$

Teorema 2.19 Teorema de los segmentos encajados

Para toda sucesión infinita de segmentos $S_n = [a_n, b_n]$, donde $a_n \leq b_n$, que cumpla las siguientes propiedades:

$(\forall n \in \mathbb{N}) \qquad s_{n-1} \subset s_n$

$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)(\exists p \in \mathbb{N} \qquad$ tal que $b_p - a_p < \varepsilon$

Existe un único número real α que pertenece a todos los segmentos S_n

Demostración

Generalizando por inducción la propiedad 2.48 se tiene que:

$$S_{n+k} \subset S_n$$

Sea S el conjunto de todos los segmentos S_n. Considérese la aplicación

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{N} & \longrightarrow & S \\ & n & \mapsto & S_n \end{array}$$

Notemos que por la observación anterior dados p y q en $\mathbb{N}$, entonces

$$(p \leq q) \;\Rightarrow\; f(q) \geq f(p)$$

Por lo tanto, la aplicación f considerada como una aplicación de $(\mathbb{N}, \leq)$ en $(S, \leq)$ es una aplicación "decreciente", o sea, que si $p \leq q$ se tiene que:

$$a_q \leq a_p \leq b_p \leq b_q$$

Además, considerando la propiedad 2.49 y los conjuntos

$$\begin{aligned} A &= \{a_0, a_1, \cdots, a_n \cdots\} \\ B &= \{b_0, b_1, \cdots, b_n \cdots\{ \end{aligned}$$

tenemos que A y B son dos partes adyacentes y por eso existe un número real α tal que:

$$\alpha = \sup A = \inf B$$

Este número real α es el único que verifica que:

$$a_n \leq \alpha \leq b_n \qquad (\forall n \in \mathbb{N})$$

y por eso podemos escribir que:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n , b_n] = \{\alpha\}$$

Por otra parte, el que los intervalos sean cerrados es esencial pues, por ejemplo, considerando los intervalos de la forma $]a_n , b_n]$ con $a_n = 0$ y $b_n = \dfrac{1}{n}$ observemos que:

$$\sup A = \inf B = 0$$

Pero " 0 " no pertenece a ninguno de los intervalos de la forma $]0 , \dfrac{1}{n}$.

Corolario 2.4 Si $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de intervalos cerrados y acotado no vacío que verifican

$$S_{n+1} \subset S_n \qquad (\forall n \in \mathbb{N})$$

Existen al menos un número real α que pertenece a todos los intervalos.

2.8 Raíces enésimas de un número real positivo

Recordemos que la ecuación $x^n = a$, no tiene, por lo general, solución en los números racionales. Ahora, co la ayuda del axioma del extremo superior, vamos a mostrar la existencia de una solución de $x^n = a$ en los números reales, la cual llamaremos raíz enésima de a y la denotamos por:

$$\text{“} \sqrt[n]{x} \text{”} \qquad \text{o} \qquad \text{“} a^{\frac{1}{n}} \text{”}$$

Teorema 2.20

Sea z un números real positivo, y n un un número natural. Existe un único α en $\mathbb{R}$ tal que:

$$\alpha = \sqrt[n]{z}$$

Demostración

Sea z un número real positivo y sea n un entero positivo mayor o igual a 2. Consideremos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R}_+ / x^n \leq z\} \\ B &= \{x \in \mathbb{R}_+ / z < x^n\} \end{aligned}$$

Hacemos notar que A no es vacío puesto que 0 pertenece a A.

Consideremos el número real

$$y = \frac{z}{n} + 1$$

y sea

$$x = 1 + y$$

Aplicando la fórmula del binomio

$$x^n = (1+y)^n = \sum_{i=o}^{n} \binom{n}{i} y^i$$

es evidente que

$$x^n > ny > z,$$

Por lo tanto el conjunto B tampoco es vacío.

Observemos que para todo a en A y b en B

$$a^n \leq z \leq b^n$$

O sea

$$a \ < \ b \qquad (\forall a \in A)(\forall b \in B)$$

Además, tenemos que

$$A \cap B \ = \ \mathbb{R}_+$$

ques es un intervalo, por lo que , según el lema 2.9, A y B son partes adyacentes, y por eso podemos considerar el número real α tal que:

$$\alpha \ = \ \sup A \ = \ \inf B$$

Además tenemos que

$$a \ \leq \ \alpha^n \ \leq \ b^n \qquad (\forall a \in A)(\forall b \in B)$$

o sea

$$a^n \ \leq \ \alpha^n \ \leq \ b^n \tag{2.7}$$

y sabemos que

$$a^n \ \leq \ z \ \leq \ b^n \tag{2.8}$$

Considerando ahora los conjuntos A' de todas las potencias enésimas de elementos de A y B' de todas las potencias enésimas de elementos de B . Sabemos que ambos subconjuntos no son vacíos y además que:

$$a' < b' \qquad (\forall a' \in A')(\forall b' \in B')$$

Vamos a mostrar que A y B son partes adyacentes; para ello basta mostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existen a' en A' y b' en B' tales que:

$$|a' - b'| < \varepsilon$$

Notemos que:

$$b' - a' \ = \ b_n - a_n \ = \ (b - a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + \cdots + ba^{n-2} + a^{n-1}) \tag{2.9}$$

para algún a en A y b en B . Escojamos b_0 en B y supongamos que el número b de 2.9 es tal que:

$$b < b_0 \text{ entonces } b^n - a^n \leq (b-a)nb_0^{n-1} \tag{2.10}$$

Como A y B son dos conjuntos adyacentes de $\mathbb{R}$, existen a_1 en A y b_1 en B tales que:

$b_1 - a_1 \leq \dfrac{\varepsilon}{nb_0^{n-1}}$

Ahora bien, si $b_1 \leq b_0$, consideramos $b_2 = b_1$. Si $b_1 > b_0$ consideramos $b_2 = b_0$. En ambos casos tenemos que:

$$b_2 - a_1 \leq \frac{\varepsilon}{nb_0^{n-1}} \qquad b_2 \leq 92; b_0$$

sustituyendo b_2 y a_1 en 2.9 y 2.10, se verifica que

$$b_2' - a_1' = b_2^n - a_1^n \leq \varepsilon$$

De donde A' y B' son subconjuntos adyacentes de $\mathbb{R}$, y por eso existe un único número real β tal que :

$$\beta = \sup A' = \inf B'$$

O sea, que para todo a' en A y b' en B $a' \leq \beta \leq b'$

De acuerdo con 2.7 y 2.8, α^n y z serán dos números reales con tal propiedad, deducimos que :

$$\alpha^n = z \qquad \text{o sea} \qquad \alpha = \sqrt[n]{z}$$

y con ello queda demostrado el teorema.

2.9 Propiedad de arquímedes y aplicaciones

A continuación estudiaremos una propiedad denominado propiedad de Arquímedes y cuatro consecuencias o aplicaciones.

Teorema 2.21

Para todo número real a, existe un entero natural n tal que

$$a < n$$

Demostración

Supongamos por contradicción que el teorema no es válido, o sea que existe x en $\mathbb{R}$ tal que para todo n en $\mathbb{N}$ se cumple que:

$$n \leq x$$

Esto dice que $\mathbb{N}$ es un subconjunto acotado superiormente, o sea que existe α en $\mathbb{R}$ tal que, para cada $\varepsilon > 0$ existe p en $\mathbb{N}$ tal que:

$$\alpha - \varepsilon < p \qquad y \qquad p \leq \alpha \qquad \forall p \in \mathbb{N}$$

Consideremos por ejemplo, $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$. Entonces:

$$\alpha - \frac{1}{2} < p \;\Rightarrow\; \alpha + \frac{1}{2} < p + 1$$

Se deduce entonces que $p + 1 < \alpha$ pues $p + 1 \in \mathbb{N}$ y que $\alpha < p + 1$ que es una contradicción. Por lo tanto, para cada a en $\mathbb{R}$ existe n en $\mathbb{N}$ tal que $a < n$.

Podemos enunciar de otra forma la propiedad de Arquímedes, diciendo que para todo $x > 0$ y para todo número real y existe un n en $\mathbb{N}$ tal que $y < nx$.

Esto se obtiene directamente de lo que hemos mostrado, pues como $x > 0$, basta considerar $a = yx^{-1}$.

El lector habrá notado que en este momento se le han presentado dos enfoque de los números naturales (ver vol. I de esta colección). Cabe pues, preguntarse si estos enfoque conducen a los mismos resultados. Para ello,

Lema 2.10 $\mathbb{N}$ es un conjunto totalmente ordenado que satisface:

1) $\mathbb{N}$ no posee un elemento más grande.
2) Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ tiene un elemento más pequeño.
3) Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ "mayorado" posee un elemento más grande.

Demostración

Mostraremos únicamente para 3 ya que la demostración de 2 es similar, y 1 es consecuencia inmediata del teorema 2.21.

Sea $A \subset \mathbb{N}$, no vacío y acotado superiormente. Sea x_0 en $\mathbb{R}$ con $x_0 = \sup A$. Como $x_0 - \dfrac{1}{2}$ no es cota superior existe a_0 en A tal que $a_0 \leq x_0$ y $x_0 - \dfrac{1}{2} < a_0$ de donde,

$$x_0 < x_0 + \frac{1}{2} < a_0 + 1$$

Así, $a_0 + 1$ es una cota superior de A con $a_0 + 1$ en $\mathbb{N}$.

Luego, para todo b en A $b \leq x_0 \leq a_0 + 1$ de donde $b \leq a_0$ lo que indica que a_0 es una cota superior de A que pertenece a A. Por lo tanto:

$$a_0 \geq x_0 \qquad \text{es decir} \qquad a_0 = x_0$$

Teorema 2.22

Para todo número real x, existe un entero n tal que:

$$n \leq x \leq n+1$$

A este entero de le llama la parte enter de x y se le denota por $[x]$.

Demostración

Consideremos el conjunto A formado por todos los enteros naturales que son menores o iguales a x.

Sea N el mayor elemento de A; entonces

$$N \leq x \leq N+1$$

pues N está en A y como es el mayor elemento de A, $N+1$ no pertenece a A.

Lema 2.11 Dados lo número reales a, b con $a < b$, entonces existe el menos un racional que pertenece a $]a, b[$.

Demostración

Sea a, b en $\mathbb{R}$ tal que $a < b$; entonces $b - a > 0$ y por la propiedad de Arquímedes, existe n en $\mathbb{N}^*$ tal que:

$$\frac{1}{b-a} < n$$

O sea

$$\frac{1}{n} < b-a$$

Además por el teorema anterior existe p en $\mathbb{R}$ tal que

$$p < nb < p+1$$

de donde

$$\frac{p}{n} < b \leq \frac{p+1}{n}$$

Observemos además que

$$\frac{p}{n} - a \ = \ \frac{p}{n} + (b-a) - b \ > \ \frac{p}{n} + \frac{1}{n} - b \ = \ \frac{p+1}{n} - b \ \geq \ 0$$

o sea que

$$a < \frac{p}{n}$$

$$a < \frac{p}{n} < b$$

O, en otras palabras, $a < \dfrac{p}{n}$ es un número racional que está en $]a\,,\,b[$.

Teorema 2.23

Dados dos números reales a y b, con $a < b$, existe un número infinito de racionales que pertenecen a $]a\,,\,b[$; decimos que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$.

Demostración

Sea A el conjunto de los racionales que pertenece a $]a\,,\,b[$ y supongamos que A es infinito, o sea:

$$A = \{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$$

Sea r el menor elemento de A; entonces por el lema 2.11 existe un racional s tal que

$$a < s < r$$

Así, aumentaremos en uno el número de elementos de A. Siguiendo este proceso podríamos aumentar cuanto queramos el número de elementos de A. Así, considerar que A es finito es erróneo y por lo tanto, debemos concluir que el número de racionales entre dos números cualesquiera no es finito.

Hacemos notar la gran importancia que tiene el axioma del extremo superior. Sin este axioma no nos hubiera sido posible presentar en este enfoque todas las propiedades de $\mathbb{R}$, tales como el teorema de los segmentos encajados, existencia de sup, etc.

2.10 Alguna aplicaciones de los números reales

Ecuaciones e inecuaciones de segundo grado

Como se recordará, dijimos que los números reales fueron construidos para poder cubrir un deficiencia de los números racionales: resolver las ecuaciones, para todo número racional a,

$$x^2 = a$$

Este partido está dirigido a resolver las "ecuaciones de segundo grado", es decir, encontrar las soluciones de la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{con } a, b, c \in \mathbb{R}, \ (a \neq 0)$$

buscando los métodos eficientes para hacerlo y, con esta teoría, obtener las soluciones de las "inecuaciones de segundo grado".

En un apéndice estudiaremos las ecuaciones de tercer grado, cuarto y quinto grado, haciendo una pequeña introducción a la teoría de Galois.

Hacemos hincapié en el hecho de que la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0)$$

es el caso particular, en cierto sentido, del trinomio de segundo grado

$$Ax^2 + By^2 + 2Dy + E = 0 \tag{2.11}$$

del cual se hace un estudio detallado en geometría elemental.

A manera de recordatorio, mencionamos los casos que su estudio arroja:

1) Si $AB = 0$, la ecuación 2.11 es una parábola.
2) Si $AB < 0$, la ecuación 2.11 es una hipérbola.
3) Si $AB > 0$, la ecuación 2.11 es una elipse.

Podemos ver claramente que la ecuación que no interesa

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0)$$

es un parábola.

2.10.1 Ecuaciones de segundo grado

Del estudio de la raíz cuadrada de un número real positivo, obtenemos ahora las soluciones de la ecuación:

$$x^2 = r \qquad \text{para } x \text{ en } \mathbb{R}$$

1) Si r es un número real negativo, no existe ningún número real x tal que

$$x^2 = r$$

Es decir, el conjunto de soluciones de la ecuación es el conjunto vacío ($\emptyset$).

2) Sim r es un número real positivo, entonces

$$(-\sqrt{r})^2 = r \qquad \text{y} \qquad (\sqrt{r})^2 = r$$

Por lo tanto en este caso, el conjunto de soluciones de la ecuación es el conjunto:

$$S = \{-\sqrt{r}, \sqrt{r}\}$$

Note que si r es igual a cero, la ecuación que estamos estudiando tiene dos soluciones iguales, es decir, el conjunto de solución de esta ecuación es:

$$S = \{0\}$$

2.10.2 Ecuaciones de segundo grado con una incognita en $\mathbb{R}$

Dada la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{2.12}$$

donde a, b, c están en $\mathbb{R}$ y a es distinta de cero, decimos que $ax^2 + bx + c$ es un polinomio de segundo grado con una incognita en $\mathbb{R}$. A los números reales a, b, c los llamamos coeficientes.

Trataremos ahora de encontrar soluciones reales para la ecuación 2.12, por ejemplo:

$$(a_1 x + b_1)(a_1 1x + b_1 1) = 0 \tag{2.13}$$

que, sin embargo, se puede expresar de la misma forma que la ecuación 2.12. En efecto

$$(a_1\, x + b)(a_{11}\, x + b_{11}) = a_1\, a_{11} x^2 + (a_1\, b_{11}\, a_{11})\, x + b_1 b_{11}$$

Nótese que en este caso podemos encontrar inmediatamente el conjunto de raíces de 2.13:

$$S = \left\{\frac{-b_1}{a_1}, \frac{-b_{11}}{a_{11}}\right\} \qquad (\text{si } a_1 \neq 0, \quad a_{11} \neq 0)$$

A continuación, vamos a estudiar un método para transformar un polinomio de segundo grado de la forma

$$(\alpha x + \beta)(\gamma x + \delta)$$

a la forma

$$(\alpha x + \beta)(\gamma x + \delta)$$

Estudiemos primero algunos ejemplos numéricos. Tenemos el polinomio

$$9x^2 - 4\,;$$

de las propiedades de $\mathbb{R}$ sabemos que:

$$9x^2 - 4 = (3x-2)(3x+2)$$

Sin embargo, no podemos encontrar una descomposición análoga para

$$16x^2 + 1$$

Momentáneamente admitiremos el siguiente resultado; que por motivos de orden, sera probado posteriormente.

Dos ecuaciones de segundo grado de la forma

$$ax^2 + bx + c = \qquad a'x^2 + b'x + c' = 0$$

tienen las mismas soluciones si y sólo si existe un número real m no nulo tal que

$$a' = ma \qquad b' = mb \qquad c' = mc$$

Usando este resultado estudiemos el polinomio

$$2x^2 - 3 \tag{2.14}$$

Sabemos que:

$$2(2x^2 - 3) = (x\sqrt{2} - \sqrt{3}\,)(x\sqrt{2} + \sqrt{2}\,)$$

Y además

$$2(2x^2 - 3) = 4x^2 - 6 = (2x - \sqrt{6}\,)(2x + \sqrt{6}\,)$$

tiene las mismas raíces que 2.14 y su forma es más simple.

Estudiemos ahora el caso general. Sea el polinomio de segundo grado

$$ax^2bx + bx + c \qquad (a \neq 0)$$

Encontrar las raíces de este polinomio es lo mismo que encontrar las raíces del polinomio de segundo grado.

$$4a(ax^2 + bx + c) = 4a^2x^2 + 4abx + 4ac$$

por lo tanto

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = (2ax + b)^2 + 4ac - b^2 \tag{2.15}$$

Vamos a utilizar la expresión $4ac - b^20$ para separar el estudio en varios casos. Es usual considerar su opuesto, $b^20 - 4ac$, al que llamaremos discriminante y denotaremos por $\triangle$.

Primer caso

$$\triangle < 0$$

En este caso $4ac - b^2 > 0$, y poner

$$4ac - b^2 = k^2$$

El segundo miembro de la ecuación 2.15 se puede escribir entonces como:

$$(2ax + b)^2 = k^2$$

Segundo caso

$$\triangle > 0$$

En este caso $4ac - b^2 < 0$ y podemos poner

$$\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{r^2}$$

Por lo que podemos escribir el segundo miembro de la ecuación 2.15 como producto de factores de la siguiente manera:

$$(2ax+b)^2 \;-\; (\sqrt{\triangle}\,)^3 \;=\; (2ax+b-\sqrt{\triangle}\,)(2ax+b+\sqrt{\triangle}\,)$$

Tercer caso

$$\triangle \;=\; 0$$

Tenemos entonces el segundo miembro de la ecuación 2.15 se reduce a

$$4a^2x^2+4abx+4ac \;=\; (2ax+b)(2ax+b)$$

Observemos que en algunos casos es posible descomponer el polinomio directamente, por ejemplo:

$$x^2-(a+b)x+ab \;=\; (x-a)(x-b) \quad x^2+(a+b)x+ab \;=\; (x+a)(x+b)$$

2.10.3 Solución de una ecuación de segundo grado

Del estudio anterior obtuvimos que las soluciones de la ecuación de segundo grado con una incógnita en $\mathbb{R}$

$$2ax+bx+c \;=\; 0$$

son las mismas que las soluciones de la ecuación

$$(2ax+b)^2+4ac-b^2 \;=\; 0$$

Haremos entonces los estudios por casos para esta ecuación.

Primer caso

$$\triangle \;<\; 0$$

Obtuvimos ya el resultado

$$(2ax+b)^2+4ac-b^2 \;=\; (2ax+b)^2+k^2 \tag{2.16}$$

con $K \;=\; \sqrt{4ac-b^2} \qquad K \;=\; -\sqrt{4ac-b^2}$

Como la expresión **??** es estrictamente mayor que cero, no existe número real tal que:

$$ax^2 + bx + c \ = \ 0$$

Por lo tanto, el conjunto de soluciones es el conjunto vacío $(\emptyset)$ (suponiendo que al menos dos coeficientes son distintos de cero, pues de otro modo el análisis ya se hizo).

Segundo caso

$$\triangle \ > \ 0$$

En este caso debemos encontrar las soluciones de la ecuación

$$(2ax + b - \sqrt{\triangle})(2ax + b + \sqrt{\triangle}) \ = \ 0$$

Dada la descomposición obtenida anteriormente de

$$(2ax + b)^2 \ - \ (\sqrt{\triangle})^2$$

El subconjunto de soluciones en este caso es

$$S \ = \ \frac{-b + \sqrt{\triangle}}{2a} \qquad -b - \sqrt{\triangle}2a$$

Y decimos que la ecuación admite dos soluciones distintas.

Tercer caso

$$\triangle \ = \ 0$$

Sabemos ya que se trata de encontrar las soluciones de:

$$(2ax + b)^2 \ = \ 0$$

y que claramente

$$S \ = \ \left\{\frac{-b}{2a}\right\}$$

Decimos entonces que existen dos soluciones iguales.

Para facilitar el estudio, tendremos en cuenta únicamente dos casos; cuando el discriminante es mayor o igual a cero, y cuando el discriminante es menor que cero.

Vamos a resolver como ejemplo la siguiente ecuación de segundo grado con coeficientes reales y una incógnita en $\mathbb{R}$.

$$x^2 + 6x + 9 \;=\; (x-3)(5x-1)$$

Desarrollando la expresión para expresarla en la forma general

$$ax^2 + bx + c \;=\; 0 \qquad (a \neq 0)$$

Obtenemos

$$x^2 - 6x + 9 = 5x^2 - 16x + 3$$

i.e.

$$ax^2 - 10x - 6 \;=\; 0$$

Analicemos el discriminante:

$$\triangle \;=\; (-10)^2 - (16)(-6) \;=\; 100 + 96 \;=\; 196$$

Como el discriminante es mayor que cero la ecuación tiene dos soluciones distintas:

$$x_1 \;=\; \frac{10 + \sqrt{\triangle}}{8} \;=\; \frac{10 + \sqrt{196}}{8} \;=\; \frac{10 + 14}{8} \;=\; 3$$

$$x_1 \;=\; \frac{10 - \sqrt{\triangle}}{8} \;=\; \frac{10 - \sqrt{196}}{8} \;=\; \frac{10 - 14}{8} \;=\; \frac{-1}{2}$$

Entonces, el conjunto de soluciones de la ecuación es:

$$S \;=\; \left\{3\,,\,\frac{-1}{2}\right\}$$

2.10.4 Relaciones entre coeficientes y raíces

Sea la ecuación de segundo grado

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0) \tag{2.17}$$

Supongamos que x_1 y x_2 son dos soluciones reales de la ecuación 2.17.

Entonces

$$ax_1^2 + bx_1 + c = ax_2^2 + bx_2 + c$$

luego

$$a(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_1) = 0$$

De donde, factorizando, tenemos:

$$(x_2 - x_1)(a(x_2 + x_1) + b) = 0)$$

Notemos que si x_2 x_1

$$x_2 + x_1 = \frac{-b}{a}$$

dado que x_2 - x_1 es distinto de cero.

Tenemos entonces que:

$$ax_1^2 + b_1 + c = 0 \tag{2.18}$$

$$x_2 + x_1 = \frac{-b}{a} \tag{2.19}$$

despejando b de 2.19 se tiene

$$b = -a(x_2 + x_1)$$

y sustituyendo en 2.18

$$a x_1^2 - a x_1 (x_2 + x_1) + c \ = \ 0$$

de donde

$$-a x_1 \, x_2 + c \ = \ 0$$

o, lo que es lo mismo

$$x_1 \, x_2 \ = \ \frac{c}{a}$$

Hemos encontrado entonces la siguiente relación entre los coeficientes de las raíces:

$$x_1 + x_2 \ = \ \frac{-b}{a}$$

$$x_1 x_2 \ = \ \frac{c}{a}$$

Observemos que este resultado se puede obtener siempre que existan x_1 y x_2, es decir, si y sólo si el discriminante de la ecuación es mayor que cero.

Estudiaremos ahora el recíproco, es decir, la existencia de dos números reales α y β tales que, dada una ecuación

$$a x^2 + b x + c \ = \ 0 \qquad (a \neq 0) \tag{2.20}$$

con discriminante

$$\triangle \ = \ b^2 - 4ac \ \geq \ 0$$

entonces

$$\alpha + \beta \ = \ \frac{-b}{a} \qquad \text{y} \qquad \alpha\beta \ = \ \frac{c}{a}$$

donde además se cumpla que α y β son soluciones de la ecuación 2.20

En efecto, sabemos que α y β son soluciones de:

$$(x-\alpha)(x-\beta) \ = \ 0$$

es decir, son soluciones de

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\,\beta \ = \ 0$$

y por lo tanto, lo son también de

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a} \ = \ 0 \tag{2.21}$$

Que sabemos tiene las mismas soluciones de la ecuación

$$ax^2+bx+c \ = \ 0$$

Entonces los números reales α y β son soluciones de la ecuación

$$ax^2+bx+c \ = \ 0$$

Teorema 2.24

Dos ecuaciones de segundo grado

$$ax^2+bx+c \ = \ 0 \tag{2.22}$$

$$a_1x^2+b_1x+c_1 \ = \ 0 \tag{2.23}$$

tienen las mismas soluciones si y sólo si los coeficientes son proporcionales.

Demostración

Si las ecuaciones 2.22 y 2.23 tienen las mismas soluciones α y β, sabemos que:

$$\left.\begin{array}{rcl}\alpha+\beta & = & \dfrac{-b}{a}\\[2ex] \alpha\,\beta & = & \dfrac{c}{a}\end{array}\right\} \qquad y \qquad \left.\begin{array}{rcl}\alpha+\beta & = & \dfrac{-b_1}{a_1}\\[2ex] \alpha\,\beta & = & \dfrac{c_1}{a_1}\end{array}\right\}$$

(Recuerde que $a \neq 0, a_1 \neq 0$). Entonces:

$$
\begin{array}{rrclcrcl}
 & \dfrac{-b}{a} & = & \dfrac{-b_1}{a_1} & y & \dfrac{c}{a} & = & \dfrac{c_1}{a_1} \\
\Rightarrow & -ba_1 & = & -b_1 & y & ca_1 & = & c_1 a \\
\Rightarrow & b & = & \dfrac{a}{a_1} b_1 & y & c & = & c_1 \dfrac{a}{a_1}
\end{array}
$$

Si tomamos el número real

$$\lambda = \frac{a}{a_1}$$

tenemos que

$$b = \lambda b_1 \quad , \quad c = \lambda c_1 \quad , \quad a = \lambda a_1$$

es decir, decir los coeficientes son proporcionales.

Ahora, si lo coeficientes de las ecuaciones 2.22 y 2.23 son proporcionales, podemos escribirlas:

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{2.24}$$

y

$$(ax^2 + bx + c) = 0 \tag{2.25}$$

si y sólo si

$$ax^2 + bx + c = 0$$

por lo tanto las ecuaciones 2.24 y 2.25 tienen las mismas soluciones.

Notemos que si una ecuación no tiene solución, tampoco la tendrá una ecuación con coeficientes proporcionales.

Recordemos que el resultado del teorema anterior fue utilizado anteriormente.

2.10.5 Inecuaciones de segundo grado

Haremos ahora el estudio del "signo" del polinomio de segundo grado con una incógnita en $\mathbb{R}$,

$$ax^2 + bx + c \qquad (a \neq 0)$$

esto es, encontrar los subconjuntos

$$P = \{x \in \mathbb{R} : \; ax^2 + bx + c \; > \; 0\}$$

$$N = \{x \in \mathbb{R} : \; ax^2 + bx + c \; < \; 0\}$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} : \; ax^2 + bx + c \; = \; 0\}$$

Primer caso: $\triangle \; < \; 0$

Sabemos, por lo antes desarrollado, que $(\forall x \in \mathbb{R}) \;\; 4a(ax^2 + bx + c) \; = \; (2ax + b)^2 + k^2 \qquad (\text{con } k^2 \; = \; -\triangle)$

Entonces

$$4a(ax^2 + bx + c) \; \geq \; k^2 \; \geq \; 0$$

Segundo caso: $\triangle \; = \; 0$

Del estudio de la ecuación

$$ax^2 + bx + c \; = \; 0$$

tenemos en este caso

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad 4a(ax^2 + bx + c \; = \; (2ax + b)^2$$

de donde

$$4a(ax^2 + bx + c \; \geq \; 0$$

Entonces

1) $(ax^2 + bx + c) \; = \; 0 \;\; \text{sii} \;\; x \; = \; \dfrac{-b}{2a}$

2) $ax^2+bx+c \; > \; 0 \quad \text{si} \quad a \; > \; 0 \left(\forall x \in \mathbb{R} - \left\{\dfrac{-b}{2a}\right\}\right)$

3) $ax^2+bx+c \; < \; 0 \quad \text{si} \quad a \; < \; 0 \left(\forall x \in \mathbb{R} - \left\{\dfrac{-b}{2a}\right\}\right)$

Tercer caso: $\triangle \; > \; 0$

De la teoría desarrollada podemos deducir que:

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \qquad ax^2+bx+c \; = \; a(x-x_1)(x-x_2)$$

De donde x_1 y x_2 son las soluciones de la ecuación

$$ax^2+bx+c \; = \; 0$$

Estudiemos el signo de:

$$a(x-x_1)(x-x_2)$$

en las siguientes tablas: Si $a > 0$

Tabla 2.1

		x_1	x_2
a	$+$	$+$	$+$
$(x-x_1)$	$-$ 0	$+$	$+$
$(x-x_2)$	$-$	$-$ 0	$+$
ax^2+bx+c	$+$ 0	$-$ 0	$+$

Tabla 2.2

		x_1	x_2
a	$+$	$+$	$+$
$(x-x_1)$	$-$ 0	$+$	$+$
$(x-x_2)$	$-$	$-$ 0	$+$
ax^2+bx+c	$+$ 0	$-$ 0	$+$

Es decir,

Si $a > 0$

1) $ax^2+bx+c \; > \; 0 \qquad \forall x \; \in \;]-\infty, x_1[\; \cup \;]x_2, +\infty[$

2) $ax^2 + bx + c \ < \ 0 \qquad \forall x \ \in \ ]x_1, x_2[$

3) $ax^2 + bx + c \ = \ 0 \qquad \forall x \ \in \{x_1, x_2\}$

Si $a < 0$

1) $ax^2 + bx + c \ \geq \ 0 \qquad \forall x \ \in \ [x_1, x_2]$

2) $ax^2 + bx + c \ < \ 0 \qquad \forall x \ \in \ ]-\infty, x_1[\ \cup \ ]x_2, +\infty[$

Otro modo de llegar a las mismas conclusiones, es considerar la función

$$f(x) \ = \ ax^2 + bx + c$$

y realizar el cuadro de variación de esta función para los diferentes valores que pueda tomar a como número real.

Con la teoría de inecuaciones de segundo grado, estamos en condiciones de resolver cualquier tipo de ecuaciones: las ecuaciones de segundo grado con parámetro en $\mathbb{R}$.

A modo de ejemplo, resolveremos a continuación la siguiente ecuación paramétrica

$$(m-3)^2x^2 - 2mx + 12 \ = \ 0 \tag{2.26}$$

Estudio del discriminante

$$\triangle_1 \ = \ (-2m)^2 - 4(m-3)12 \ = \ 4m^2 - 48m + 144$$

Debemos analizar el signo de $\triangle_1$. Para eso resolvemos la ecuación

$$4m^2 - 48m + 144 \ = \ 0$$

que tiene las mismas soluciones que

$$m^2 - 12m + 36 \ = \ 0$$

Estudio del discriminante de esta ecuación:

$$\triangle_2 \ = \ 144 - 144 \ = \ 0$$

Por lo tanto la ecuación del discriminante tiene una única solución:

$$m = 6$$

y, como el coeficiente de m^2 es mayor que cero, entonces esta ecuación es mayor o igual que cero para todo m en $\mathbb{R}$.

Esto dice que

$$(\triangle_1 \geq 0) \quad (\forall m \in \mathbb{R})$$

por lo que las soluciones de la ecuación 2.26 es el conjunto:

$$S = \left\{ \frac{2+\sqrt{\triangle_1}}{2a}, \frac{2-\sqrt{\triangle_1}}{2a} \right\}$$

Con lo que queda el resultado de la ecuación 2.26.

Considerando ahora la siguiente ecuación de segundo grado

$$ay^4 + b^y 2 + c = 0 \tag{2.27}$$

Observemos que es fácilmente expresable como una ecuación de segundo grado. En efecto, sea

$$x = y^2$$

tenemos entonces

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{2.28}$$

y resolviendo mediante el método desarrollado anteriormente obtenemos primero las soluciones de la ecuación 2.28.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

de donde las soluciones de la ecuación 2.27 son, siempre y cuando existan x_1 y x_2, las siguientes:

$$\begin{aligned} y_1 &= \sqrt{x_1} & \qquad y_2 &= -\sqrt{x_1} \\ y_3 &= \sqrt{x_2} & \qquad y_4 &= -\sqrt{x_2} \end{aligned}$$

De la misma manera, se puede aplicar la teoría de inecuaciones de segundo grado para resolver inecuaciones de cuarto grado del tipo

$$\begin{aligned} ay^4 + by^2 + c &> 0 \\ a_1y^4 + b_1y^2 + c_1 &< 0 \end{aligned}$$

Cabe observar que la solución de la ecuación de tercero y cuarto grado, aunque aparentemente sencilla, no puede ser desarrollada con la teoría que tenemos de los números reales, sino que es necesario para su estudio desarrollar la teoría de los números complejos.

Por lo tanto, estudiaremos la solución de estas ecuaciones en el capítulo correspondiente a los números complejos, en la parte de álgebra de este curso.

2.10.6 Ejercicios

1. Dados " 0 " el elemento neutro de la suma y " 1 " el elemento neutro para el producto en $\mathbb{R}$, muestre que:

a. $-0 = 0$ (*ie* el inverso aditivo de ´´0" es él mismo).

b. $1^{-1} = 1$ (*ie* el inverso multiplicativo de " 1 " es él mismo).

2. Sean a, b, c, d en $\mathbb{R}$. Muestre que:

a. $-(a-b) = -a+b$

b. $(a-b)+(b-c) = a-c$

c. $a(b-c) = ab-ac$

d. $-\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{-a}{b}\right) = \left(\frac{a}{-b}\right)$ si $b \neq 0$

e. $\left(\frac{a}{b}\right) - \left(\frac{c}{d}\right) = \left(\frac{ad-bc}{bd}\right)$ si $b \neq 0$ y si $d \neq 0$

f. $(-a)b = (-ab)$ y $(-a)(-b) = ab$

3. Sean a, b, c en $\mathbb{R}$. Demostrar que:

$$[\, a \geq b \quad \text{y} \quad b > c \,] \implies a > c$$

4. Muestre que para todo x, y en $\mathbb{R}$ se cumple que:

$$[\, x \geq 0,\ y \geq 0 \quad \text{y} \quad x + y = 0 \,] \implies x = y = 0$$

5. Denotamos por

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & = & \{x \in \mathbb{R} : \ x \geq 0\} \\ \mathbb{R}_- & = & \{x \in \mathbb{R} : \ x \leq 0\} \end{array}$$

a. Muestre que si a y b pertenecen a $\mathbb{R}$, se cumple que:

$$0 \leq a \leq b \ \Rightarrow \ a^2 \leq b^2$$

b. Dados a, b en $\mathbb{R}$, muestre que:

$$[\, a \in R_+,\ b \in \mathbb{R}_+ \quad \text{y} \quad a^2 \leq b^2 \,] \implies \leq a \leq b0$$

c. Muestre que dados a, b en $\mathbb{R}$, se cumple que:

$$[a \leq b \quad \text{y} \quad c \in \mathbb{R}_-^*] \implies cb \leq ca$$

6. Muestre que para cualquier x en $\mathbb{R}$, se cumple

$$x + 1 > x$$

7. Mostrar que si a y b pertenecen a $\mathbb{R}$, y $a < b$, entonces

$$-a > -b$$

En particular, si $a < 0$, entonces

$$-a > 0$$

8. Demuestre que existe un número real x tal que:

$$x^2 + 1 = 0$$

9. Demuestre que la suma de dos reales negativos es negativa.

10. Sean a, b, c números reales cualquiera. Muestre que:

a. Si $a > 0$, entonces $\dfrac{1}{a} > 0$; si $a < 0$, entonces $\dfrac{1}{a} < 0$.

b. Si $0 < a < b$, entonces $0 < b^{-1} < a^{-1}$.

c. Si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$

d. Si $a \leq b$, $b \leq c$ y $a = c$, entonces $b = c$.

e. $a^2 + b^2 \geq 0$ y $a^2 + b^2 = 0$ *sii* $a = 0 = b$.

f. Si x es un número real tal que $0 \leq x \leq h$, para todo número real h en $\mathbb{R}_+$, entonces $x = 0$.

11. Mostrar que para todo a, b, a', b' en $\mathbb{R}$ se tiene

$$[\,a = b \quad \text{y} \quad a' = b'\,] \implies [\,a + a' = b + b'\,]$$

Generalice el resultado por inducción para $a_i = b_i$ con $(\,1 \leq i \leq n\,)$

12. Muestre por inducción que para $a_1, a_2, \cdots, a_n$ en $\mathbb{R}$:

a. $-(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \;=\; -a_1 - a_2 - \cdots - a_n$

b. $(a_1 a_2 \cdots a_n) \;=\; a_1^{-1} a_2^{-1} \cdots a_n^{-1}$

13. Muestre que un producto $a_1 \times a_2 \cdots a_n$ de números reales es igual a "0" si y sólo si existe al menos un $i_0, 1 \leq i_0 \leq n$, tal que $a_{i_0} = 0$.

14. Sean dos sucesiones finitas $(A_n)_n \in \mathbb{N}$ y $(Y_n)_n \in \mathbb{N}$ de números reales que cumplan la segunda condición del teorema 2.3. Supongamos que la sucesión $(X_n)_n \in \mathbb{N}$ tiene al menos un término no nulo.

a. Si $X_k = 0$, qué puede decir usted de Y_k ?

b. Si $\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_2 X_n = 0$, qué puede usted decir $\lambda_1 Y_1 + \cdots + \lambda_n Y_n$?

15. Demostrar que para cualesquiera a, b, a', b' en $\mathbb{R}$ se tiene que:

$$\begin{array}{lcl} (a \leq b \quad \text{y} \quad a' \leq b') & \Longrightarrow & (a + a' \leq b + b') \\ (a < b \quad \text{y} \quad a' < b') & \Longrightarrow & (a + a' < b + b') \end{array}$$

Extienda estos resultados para n desigualdades.

16. Muestre que para todo x y y en $\mathbb{R}$ se tiene,

si $0 < z$:

$$(x < y) \Longleftrightarrow (xz < yz)$$

si $z \leq 0$:

$$(x \leq y) \Longleftrightarrow (xz \leq yz)$$

17. Demostrar que si $a,\ a',\ b,\ b'$ son reales positivos, entonces:

$$(a \leq b \quad y \quad a' \leq b) \Longrightarrow (aa' \leq bb'$$

a. Si $a,\ a',\ b,\ b'$ son reales estrictamente mayores que cero, entonces:

$$(a < b \quad y \quad a' < b) \Longrightarrow (aa' < bb'$$

Extienda este resultado para n desigualdades.

18. Muestre que si $x \neq 0$, entonces x y x^{-1} son del mismo signo.

19. Demostrar que dado x en $\mathbb{R}_+$, entonces:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

20. Sean a y b dos números reales tales que para todo $x \in]b, +\infty[$ se tiene que $a \leq x$. Demostrar que $a \leq b$.

21. Demostrar que si x es irracional y a es racional entonces ax y $a + x$ son irracionales.

a. Sean $a,\ b,\ c,\ d$ números racionales y x un irracional. Suponiendo que $cx + d \neq 0$, diga si $\dfrac{ax + b}{cx + d}$ es racional o irracional.

22. Denotamos por $[x]$ la parte entera de número real x, decimos que $[x]$ es el entero n tal que $n \leq x \leq n + 1$ demuestre que:

a. $[x + y] = [x] + [y] + \varepsilon \quad$ con $\varepsilon = 0$ ó $\varepsilon = 1$

b. $[x - y] = [x] - [y] - \varepsilon \quad$ con $\varepsilon = 0$ ó $\varepsilon = 1$

23. Demostrar que, para cualquier entero $p \geq 1$, se tiene que:

$$[x] + \left[x + \frac{1}{p}\right] + \cdots + \left[x + \frac{p-1}{p}\right] = [px]$$

24. Demostrar que si p es un número entero cualquiera mayor o igual a 1

$$\left[\frac{px}{p}\right] = [x]$$

25. Demostrar que para cualquier x, y en $\mathbb{R}$

1) $\text{máx}(x, y) = \dfrac{1}{2}((x + y) + |x - y|)$

2) $\text{mín}(x, y) = \dfrac{1}{2}((x + y) - |x - y|)$

a. Sean x un número real, denotamos por $x^+ = \text{máx}(x,0)$ y $x^- = \text{máx}(-x,0)$ .Calcular x^+ y x^- en términos de x y $|x|$.

26. Demuestre que si I e I' si¡on intervalos de $\mathbb{R}$ tales que $I \cap I' \neq \emptyset$, entonces:

$I \cap I'$ [; es un intervalo.

27. Sean A y A' dos subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ que satisfacen:

1) $(\forall x \in A)(\forall x' \in A') \quad x \leq x'$.

2) $A \cup A'$ es un intervalo de $\mathbb{R}$.

Muestre que A y A' son partes adyacentes de $\mathbb{R}$.

28. Definición:

Decimos que $A \subset \mathbb{R}$ es un subconjunto convexo *sii* $\forall x, y \in A$ se cumple que $x(1-t) + yt \quad \in A$, con $y \in [0,1]$.

Muestre que todo intervalo en $\mathbb{R}$ es convexo.

29. Muestre que para todo x, y en $\mathbb{R}$ se tiene que:

1) $|x|^2 = |x^2| = x^2$

2) $|x|^2 < |y| \implies x^2 < y^2$

3) $|x - y| \leq |x| + |y|$

30. Diga en qué casos se verifican las siguientes igualdades

1) $|x + y| = |x| + |y|$

2) $|x + y| = |\,|x| - |y|\,|$

31. Demostrar que $\forall a,\ x,\ x_0 \ \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^*_+$

$$|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{|a|} \implies |ax - ax_0| < \varepsilon$$

32. Demuestre por inducción que para cualquiera $x_1, \cdots, x_n$ en $\mathbb{R}$

1) $|x_1 x_2 \cdots x_n| \;=\; |x_1|\,|x_2| \cdots |x_n|$

2) $|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \;\leq\; |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$

33. Sean x, y números reales y sea $z \;=\; \dfrac{x+y}{2}$. Demuestre que:

$$d(x, z) \;=\; d(y, z) \;=\; \frac{d(x, y)}{2}$$

34. Sean x, y en $\mathbb{R}$. Encuentre los números reales z (si existen) tales que:

$$d(x, z) \;=\; \frac{d(y, z)}{2}$$

35. Sean x, y números reales y sea $z \;=\; \dfrac{x+y}{2}$. Demuestre que:

$$d(x, z) \;=\; d(y, z) \;=\; \frac{d(x, y)}{2}$$

36. Sean x, y números reales. Encuentre los números reales z (si existen) tales que :

$$d(x, z) \;=\; 3\, d(y, z)$$

37. Muestre que para $a_i,\ \lambda_i$ en $\mathbb{R}$ con $|a_i| < 1$ y $\lambda_i \geq 0$ donde $i_{\epsilon}\ \{1, \cdots, n\}$ y $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \;=\; 1$ se cumple

$$|\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n| < 1$$

38. Muestre que $\left|\dfrac{a-b}{1-ab}\right| \;=\; 1 \qquad \text{si } |a| = 1 \qquad \text{ó} \qquad |b| = 1$

¿Qué restricciones se debe hacer si $|a| = |b| = 1$?

39. Sea a un número real no nulo.

a. Demostrar que:

$$|a| > 1 \Longrightarrow a^2 > |a|$$

$$|a| > 1 \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{Z}_+^*,\ |a^{n+1}| > |a^n|$$

b. Deduzca que:

$$|a| > 1 \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{Z}_+^*,\ |a^n| > 1$$

40. Demuestre que:

$$|a| < 1 \Longrightarrow a^2 < |a|$$

$$|a| < 1 \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{Z}_+^*,\ |a^{n+1}| < |a^n|$$

41. Deducir que:

$$|a| < 1 \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{Z}_+^*,\ |a^n| < 1$$

42. Utilice lo anterior para mostrar que:

$$|a| \neq 1 \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{Z}_+^*,\ |a^n| \neq 1$$

Recuerde que si $n \in \mathbb{Z}_-^*, a^n = \left(\dfrac{1}{a}\right)^{-n}$ con $-n$ en $\mathbb{Z}_+^*$

43. Deduzca que

$$\forall n \in \mathbb{Z}^*, |a^n| = 1 \Longrightarrow |a| = 1$$

44. Sean $a \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Pruebe que son equivalentes:

1) $x^n = a$ posee solución en $\mathbb{Z}$

2) $x^n = a$ posee solución en $\mathbb{Q}$

45. Sean $r \in \mathbb{Q}$, $\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $i \in \mathbb{I}$

1) $-i,\ i^{-i} \in \mathbb{I}$

2) $r + i \in \mathbb{I},\ r \times i \in \mathbb{I}$ si $r \neq 0$

3) Muestre que la suma y el producto de dos irracionales puede ser racional.

46. Dados $a < b$ reales, muestre que existe un número irracional tal que $a < i < b$.

47. Sea $E_a = \left\{\cdots, a^{-n}, \cdots, a^2, a^{-1}, a^0 = 1, a', \cdots, a^n, \cdots\right\}$ con a en $\mathbb{R}$.

a. Muestre que E_a es un subgrupo multiplicativo de $\mathbb{R}$.

b. Estudie los casos E_1, E_{-1}.

c. Para $a \neq 0$ y $|a| \neq 1$ Considere la aplicación

$$\begin{array}{cccc} f & \mathbb{Z} & \longrightarrow & E_a \\ & n & \mapsto & a^n \end{array}$$

Muestre que f es un isomorfismo de grupo $\mathbb{Z}, +$ en el subgrupo E_a, x.

48. Calcule tres términos consecutivos $a,\ b,\ c$ de una sucesión aritmética, conociendo $s = a + b + c$ y $p = a\,b\,c$. Escriba $a = x - r,\quad b = x$ y $c = x + r$.

a. Calcule tres términos consecutivos $a,\ b,\ c$ de una sucesión geométrica conociendo $s = a + b + c$ y $p = a\,b\,c$. Escriba $a = xq^{-1}$, $b = x$ y $c = xq$.

49. Sean x, y en $\mathbb{R}$, $x > 0$, $y > 0$

a. Pruebe $x^{1/n} \times y^{1/n} =; (xy)^{1/n}$, $n \in \mathbb{N}^*$

b. Sea $r \in \mathbb{Q}^+$, p_q una representación de r con $p > 0,\ q > 0$.
Se define $x^r = \sqrt[q]{x^p}$, $q, p \in \mathbb{N}^*$

c. Muestre que $\sqrt[q]{x^p} = \left(\sqrt[q]{x}\right)$, $q, p \in \mathbb{N}^*$

d. Pruebe que $x^{r+s} = x^r \times x^s$

e. $(xy)^r = x^r \times x^r$

f. $(x^r)^s = (X^S)^R = X^{rs}$

Nota: Definimos para $r \in \mathbb{Q}, \;\; r < 0, \;\; x^r = (x^{-1})^{-r}$ se prueba la validez de las tres últimas leyes.

50. Muestre que:

a. $a < b \implies a^r < b^r$

b. $a = b \implies a^r = b^r, \;\; a, b \in \mathbb{R}^*_+, r \in \mathbb{Q}^+$

51. Demuestre que:

a. $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2) \;\;\; \forall x, y \in \mathbb{R}^-$

b. Si n es impar,

$$n^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \cdots + y^{n-1})$$

c. Dé la fórmula para $n = 3$ y $n = 5$.

52. Demostrar que para cualquiera a, b en $\mathbb{R}^*$ y n, p en $\mathbb{Z}$, tenemos:

$$\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p} \quad \text{y} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

53. Muestre que la aplicación:

$$\begin{array}{cccc} p & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & x & \mapsto & x^n \end{array}$$

es estrictamente creciente para $n > 0$, y estrictamente decreciente para $n < 0$

54.

a. Demuestre que la aplicación:

$$q \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^{2n+1} \end{array}$$

es estrictamente creciente para todo entero natural n.

b. Demuestre que la aplicación

$$r \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_- & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^{2n} \end{array}$$

es estrictamente decreciente para todo entero natural $n \neq 0$.

55. En la fórmula $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$, sustituya sucesivamente $x = 1, 2, \cdots, n \in \mathbb{N}^*$ y sume las igualdades obtenidas.

Deduzca, usando el ejercicio anterior, que:

$$1 + 2 + \cdots n = \frac{n(n+1)}{2}$$

56. En la fórmula $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ sustituya sucesivamente $x = 1, 2, \cdots, n \in \mathbb{N}^*$ y sume las igualdades obtenidas.

Deduzca, usando el ejercicio anterior, que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ se tiene:

$$1^2 + 2^2 + \cdots n^2 = \frac{n(n+1)(2n+2)}{6}$$

57. En este ejercicio se demostrará la desigualdad de Cauchy Schwartz:

a. Muestre que si $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n, \lambda$ son números reales, entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + \lambda b_i)^2 \geq 0 \tag{2.29}$$

b. Desarrolle la sumatoria 2.29

c. Muestre que $\forall A, B, C, \lambda \in \mathbb{R}$, con $A \neq 0$, se tiene que:

$$A\lambda^2 + 2\lambda B + C \ = \ A\left[(\lambda + \frac{B}{A})^2\right] + C - \frac{B^2}{A}$$

d. Sean

$$A = \sum_{i=1}^{n} b_i^2, \quad B = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i, \quad C = \sum_{i=1}^{n} a_i^2, \qquad y \quad \lambda = \frac{-B}{A}$$

Concluya que:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \ \leq \ \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

58. Determine en los siguientes casos si el resultado es irracional o racional.

a. Irracional + racional.

b. Irracional + irracional.

c. Producto de irracionales.

d. Inverso multiplicativo de un irracional.

e. Inverso aditivo de irracional.

59. Muestre que:

$$\sqrt{6} \text{ y } \sqrt{2} + \sqrt{3} \text{ son irracionales.}$$

60. Demostrar que si a, a', a'', b, b' pertenecen a $\mathbb{Q}$.

a. $a + a'\sqrt{2} \ = \ 0 \Longrightarrow a = a' = 0$

b. $a + a'\sqrt{2} \ = \ b + b'\sqrt{2} \Longrightarrow a = b \quad$ y $\quad a' = b'$

c. $a\sqrt{2} + a'\sqrt{3} + a''\sqrt{5} \;=\; 0 \Longrightarrow a = a' = a'' = 0$

d. Ver si los resultados se pueden generalizar cualquier irracional.

61. Supóngase que $\omega = \sqrt[3]{2}$ y considere tres números racionales $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ tales que $\alpha + \beta + \omega + \gamma\omega^2 = 0$.

a. Demuestre que si alguno de los tres números racionales es nulo, los otros deben serlo también.

b. Demostrar que si existen a, b en $\mathbb{Q}$ tales que $a + b\omega = 0$.

c. Demostrar que para $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ arbitrarios:

$$(\alpha + \beta\omega + \gamma\omega = 0) \Longrightarrow (\alpha = \beta = \gamma = 0)$$

62. Sea E el subconjunto de todos los irracionales de la forma $a + a'\sqrt{2}$ con a y a' en $\mathbb{Q}$. Designemos por E' el conjunto $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ con las leyes internas siguientes:

$$(a, a') + (b, b') \;=\; (a + b\,,\ a' + b' \quad (a, a') \times (b, b') \;=\; (ab + 2a'b'\,,\ ab' + ba')$$

Demuestre que la aplicación:

$$\begin{gathered} f : E \longrightarrow E' \\ a + a'\sqrt{2} \mapsto (a, a') \end{gathered}$$

es un isomorfismo de $(E, +, \times)$ sobre $(E, +, \times)$.

63. Considere un homomorfismo del cuerpo $\mathbb{Q}[\sqrt{2}\,]$ (E en el ejercicio anterior) en si mismo.

a. Demostrar que si existe $a + a'\sqrt{2} \neq 0$ tal que $\phi(a + a'\sqrt{2} \neq 0$,entonces $\phi(1) = 1$; y concluya que $\phi(a) = a$ para a en $\mathbb{Q}$.

b. ¿Cuál es el valor de $[\phi(\sqrt{2}\,)]^2$?

c. Demostrar que el homomorfismo de ϕ distinto de la aplicación nula y de la identidad es el isomorfismo $a + a'\sqrt{2} \longrightarrow a - a'\sqrt{2}$.

64. Sean E_1 y E_2 subconjuntos de $\mathbb{R}$.

$$E_1 = \left\{ \frac{a_n}{a_n} = 1 + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p!}, \quad n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

$$E_2 = \left\{ \frac{b_n}{b_n} = a_n + \frac{1}{n!n}, \quad n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

a. Muestre que para todo $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} a_n &< a_{n-1} \\ b_{n+1} &< b_n \\ a_n &< b_n \end{aligned}$$

b. Muestre que un elemento cualquiera de E_2 mayora a E_1, y que un elemento cualquiera de E_1 minora a E_2.

c. Muestre que (E_1, E_2) es un par adyacente. ¿Qué se puede concluir?

65. Utilizando la fórmula del binomio, calcular:

a.) $\displaystyle\sum_{p=0}^{p=n} \binom{p}{n}$

b.) $\displaystyle\sum_{p=0}^{p=n} (-1)^p \binom{p}{n}$

c.) $\displaystyle\binom{0}{n} + \binom{2}{n} + \binom{4}{n} + \ldots$

d.) $\displaystyle\binom{1}{n} + \binom{3}{n} + \binom{5}{n} + \ldots$

66. Asumiendo únicamente el axioma del extremo superior, muestre que:

$$\text{Si} \quad S \subset \mathbb{N} \quad \text{y} \quad S \neq \emptyset, \quad \exists\, m \in S \quad \text{tal que} \quad m \leq s, \ \ \forall s \in S.$$

67.

a. Demuestre, usando únicamente el axioma del extremo superior, que $\mathbb{Z}$ es un subconjunto no mayorado en $\mathbb{R}$.

b. Use **??** para mostrar que $\mathbb{Q}$ no esta acotado superiormente.

c. Muestre que dado un número real x cualquiera, existe un n en $\mathbb{N}$ tal que:

$$p < x \leq p + 1$$

d. Demuestre que para todo número real $x > 0$, existe al menos un racional r tal que:

$$0 < r < x$$

68. Designamos por D a conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con las leyes de composición internas:

$$\begin{aligned} (a, a') + (b, b') &= (a + a' \ , \ b + b') \\ (a, a') \cdot (b, b') &= (a \cdot b \ , \ ab' + a'b) \end{aligned}$$

a. Designamos por D' al conjunto de elementos de D de la forma $(a, 0)$. Demostrar que D' es estable para la adición y la multiplicación, y que la aplicación,

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & \mathbb{R} & \longrightarrow & D' \\ & a & \mapsto & (a, 0) \end{array}$$

es un isomorfismo de $\mathbb{R}, +, \times$ sobre $D', +, \times$; por lo que identificaremos a " a ´´ con " $(a, 0)$ ´´ y así, $\mathbb{R} \subset D$.

b. Gracias a la identificación anterior, calcular, dados α, a, a' tres números reales, $\alpha(a, a')$.

Demostrar que todo elemento (a, a') de D se escribe como $a + a'\varepsilon$, donde $\varepsilon = (0, 1)$. Calcular ε^2.

c. ¿Cuáles elementos de D son invertibles? Dados (a, a') y (b, b'), encontrar (x, x') tal que $(a, a')(x, x') = (b, b')$. Discutir.

d. Para todo número entero natural $n \geq 2$, calcular $(x + y\varepsilon)^n$. Dados a y b encontrar los números reales x y y tales que $(x + y\varepsilon)^n = a + b\varepsilon$. (Sugerencia: estudie primero el caso $n = 2$ y luego generalizarlo.

69. Demuestre que si A es una parte no vacía y mayorada de $\mathbb{R}$, y si α es el extremo superior de A, entonces:

$$\forall\, m \in \mathbb{R}, \quad m < \alpha, \quad \exists \beta \in A \quad \text{tal que} \quad m < \beta \leq \alpha$$

70. Muestre que el ínfimo de un conjunto, cuando existe, es único.

71. Pruebe que para A, B conjuntos acotados y $A \times B = \{x \times y / x \in A, \ y \in B\}$ no siempre se cumple que $\sup A \times B \sup A \times \sup B$.

72. Si $A + B = \{x + y / \ x \in A, \ y \in B\}$ donde A y B son conjuntos acotados, muestre que:

$$\text{ínf}\, A + B = \text{ínf}\, A + \text{ínf}\, B$$

73.

Definición 2.15

Si $(K, +, \cdot)$ es un campo, decimos que $S \subseteq K$ es el subcampo primo de K si para todo subcampo S' de K se tiene $S \subseteq S'$, es decir, S es mayor campo que K.

a. Muestre que S existe y que $S = \bigcap\limits_{S' \subseteq K} S'$, donde S' son todos los subcampos de K.

Definición 2.16

Un campo $(K, +, \cdot)$ tiene característica finita si existe $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $ne = \underbrace{e + \cdots + e}_{n \text{ veces}} = 0$, donde e es el elemento neutro para el producto y 0 es el elemento neutro para la suma, Se dice entonces que la característica de K es el menor m en $\mathbb{N}$ tal que $m \times e = 0$.

b. Pruebe que $(n \times m)e = (ne)(me)$ $\forall\, n, m \in \mathbb{Z}$.

c. Sea $p > 0$ la característica de un campo K. Pruebe que p es primo.

d. Muestre que $T = \{ne;\ 0 \leq n \leq p - 1\}$ es un subcampo de K y $T = S$ es el subcampo primo de K. (Sugerencia: note que S es isomorfo a $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$).

e. Pruebe que si K es finito, su característica p es finitas y mayor que cero, y su cardinalidad es una potencia de p. (Sugerencia: considere a K como un espacio vectorial sobre S).

f. Sea

$$\begin{array}{rccc} \bar{f}: & \mathbb{Z} & \longrightarrow & K \\ & n & \mapsto & n \times e \end{array}$$

Muestre que $\bar{f}$ es un monomorfismo de anillos.

g. Muestre que $T = \{ab^{-1}/a, b \in \bar{f}(\mathbb{Z})\}$ es un subcampo de K, y deduzca que $T = S$ (el subcampo primitivo de K).

h. Considere

$$\begin{array}{rccc} \psi: & \mathbb{Q} & \longrightarrow & S \\ & \dfrac{m}{n} & \mapsto & (me)(ne^{-1}) \end{array}$$

Muestre que S es isomorfo a $\mathbb{Q}$.

74.

Definición 2.17

Si (E,d) es un espacio métrico, el conjunto $\{x \in E/\, d(x,x_0) \;<\; h\}$ con $h>0$ se llama bola abierta con centro x_0 y radio h.

Una función $f:(E,d) \longrightarrow (E',D')$ se dice continua en un punto x_0 de E si para toda bola abierta de B' de centro $f(x_0)$ existe una bola abierta B de centro x_0 tal que $f(B) \subset B'$

a. Escriba la definición anterior utilizando cuantificadores y una implicación.

b. Sea $f:(E,d) \longrightarrow (E',D')$ y $g:(E',d') \longrightarrow (E'',D'')$ tales que f es continua el x_0 y g en continua en $f(x_0)$.

c. Muestre que $\delta:\mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tal que $\delta(x,y) \;=\; |x-y|$ es una distancia en $\mathbb{R}$. (Asuma para el resto del problema que $\mathbb{R}$ tiene esta distancia).

d. Muestre que las aplicaciones d_1,d_2,d_3 de $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^+$ tales que si $x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2)$:

$$\begin{aligned} d_1(x_1,x_2) &= |x_1-y_1|+|x_2-y_2| \\ d_2(x_1,x_2) &= \sup\left(|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\right) \\ d_3(x_1,x_2) &= \sqrt{(|x_1-y_1|)^2+(|x_2-y_2|)^2} \end{aligned}$$

son distancias en $\mathbb{R}^2$.

Pruebe además que:

$$\frac{1}{2}d_1(x.y) \;\leq\; d_2(x,y) \;\leq\; d_3(x,y) \;\leq\; d_1(x.y)$$

Deduzca que la aplicación identidad de $\mathbb{R}^2$ con una cualquiera de las distancias anteriores es continua en todo punto x de $\mathbb{R}^2$. (Asuma para el resto del problema que $\mathbb{R}^2$ posee alguna de estas distancias).

e.

1) Muestre que las aplicaciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{rccc} +: & (x_1,x_2) & \longrightarrow & x_1+x_2 \\ \times: & (x_1,x_2) & \mapsto & x_1\times x_2 \end{array}$$

son continuas en todo punto x en $\mathbb{R}^2$.

2) Si f y g son aplicaciones de (E,d) en $\mathbb{R}$, son continuas en x_0, muestre que:

$$\begin{array}{rccc} h: & (E,d) & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & x & \longmapsto & (\ f(x),\ g(x)\ ) \end{array}$$

es continua en x_0.

3) Si f y g son aplicaciones de (E,d) en $\mathbb{R}$, continuas en x_0 y si λ es un número real, muestre que:

$$f+g, \qquad f\times g \qquad \text{y} \qquad \lambda\times f$$

son continuas en x_0.

f. Muestre que la aplicación f de $\mathbb{R}^*$ en $\mathbb{R}$, tal que $f(x) = \dfrac{1}{x}$, es continua para todo x en $\mathbb{R}^*$.

g. Sea g una aplicación de (E,d) en $\mathbb{R}^*$ y sea E' el conjunto de los puntos de E para los cuales g no es nula.

Utilice los esquemas de 2.30 y los resultados anteriores para probar que si

$$\begin{array}{rccc} f: & (E,d) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ g: & (E,d) & \longmapsto & \mathbb{R} \end{array}$$

son continuas en x_0 y $g(x_0)\neq 0$, entonces:

$$\frac{1}{g} \qquad \text{y} \qquad \frac{f}{g}$$

son también continuas en x_0.

$$\begin{array}{ccccc} E' & \longrightarrow & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) & \longmapsto & \dfrac{1}{g(x)} \end{array} \tag{2.30}$$

75.

Definición 2.18

Sea $x_0\in\mathbb{R}$. Un conjunto V en $\mathbb{R}$ se dice ser un vecindario de x_0 en $\mathbb{R}$ si V contiene un intervalo abierto que contiene a x_0. El conjunto de vecindarios de x_0 se denota por $V(x_0)$.

Definición 2.19

Sea $G \subset \mathbb{R}$. El punto $x_0 \in G$ se dice ser interior a G si G es un vecindario de x_0.

Demuestre que:

a. La unión arbitraria de vecindarios de x_0 es un vecindario de x_0.

b. La intersección finita de vecindarios de x_0 es un vecindario de x_0.

c. Dos puntos cualesquiera x_1 y x_2 en $\mathbb{R}$ tales que $x_1 \neq x_2$, tienen vecindarios disjuntos. Esto dice que $\mathbb{R}$ es separado.

Definición 2.20

Sea $L \subset \mathbb{R}$ y $x_0 \in L$. Se le llama vecindario de x_0 en L a toda intersección de L con un vecindario de x_0.

d. Sea $L = \{1, 2, 3\}$. Obtenga todos los vecindarios de 1 en L.

76.

Definición 2.21

Un conjunto no vacío B en $P(E)$ se dice ser una base de filtro en E si $(\forall F_1 \in B)(\forall F_2 \in B)$ $\exists\, F \in B$ tal que $F \subset F_1 \cap F_2$, con $F_1 \neq \emptyset$, $i = 1, 2$.

a. Muestre que si B es un subconjunto no vacío de $P(E)$ tal que $(\forall F_1 \in B)(\forall F_2 \in B)$ se tiene $F_1 \cap F_2 \in B$ entonces B es una base de filtro en E.

b. Sea $E = \mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathbb{R}$. Muestre que $V(x_0)$ es una base de filtro de $\mathbb{R}$.

c. Sea $E = \mathbb{R}$ y $B_{x_0} = \{]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[, \ \alpha \in \mathbb{R}^*_+\}$ Muestre que B_{x_0} es una base de filtro en $\mathbb{R}$.

d. Sea $D \subset \mathbb{R}$ y $x_0 \in D$. Muestre que B_{x_0} es una base de filtro de D.

Asuma ahora que $x_0 \notin D$, pero para todo $\alpha > 0$ se tiene $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\ \cap \ D \neq \emptyset$.

Muestre que entonces $B_{x_0} \ \cap \ D$ es también base de filtro de D.

Definición 2.22

Sea f una aplicación de E en $\mathbb{R}$ y B una base de filtro de E. Se dice que " f tiene un límite según la base de filtro de B ", si para todo vecindario V de $\in \mathbb{R}$, existe un elemento F de la base de de filtro B tal que:

$$f(F) \subset V$$

Se escribe $\lim_{B} f = l$, o bien, $\lim_{B} f(x) = l$.

e. Muestre que $\lim_{B} f = l$ es único.

f. Si llamamos B_1 a la base de filtro discutida en 1, y B_2 a la discutida en 3 muestre que:

$$\lim_{B_1} f = l \Longrightarrow \lim_{B_2} f = l$$

77. El conjunto de Cantor consiste de todos los números reales de intervalo $[0,1]$ que tienen expansión en base 3 con ceros y doses únicamente, o bien en su expansión aparece exactamente un uno y las cifras siguientes con todas ceros.

Ejemplos:

$$\begin{array}{c} 0.22020202220\ldots \\ 0.2000220210000\ldots \end{array}$$

Serían expansiones de dos números en el conjunto de Cantor.

Se construye este conjunto eliminando $\left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[$ de $[0,1]$, luego eliminamos los tercios medios $\left]\frac{2}{9}, \frac{4}{9}\right[$, $\left]\frac{7}{8}, \frac{8}{9}\right[$ de los intervalos restantes y así sucesivamente.

Pruebe:

a. El conjunto de Cantor no contiene ningún intervalo.

b. Existe una biyección entre el conjunto de Cantor y el intervalo $[0,1]$.

78. Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado con una incognita en $\mathbb{R}$, donde a, b, m son parámetros en $\mathbb{R}$:

a. $x^2 - mx + m - 1 = 0$

b. $x^2 - 2(a-b)x - 4ab = 0$

c. $x^2 - (a+2)x + 2a = 0$

d. $ax^2 - (a^2+3)x + 3a = 0$

e. $x^2 + 2(a-b)x + 4ab = 0$

f. $x^2 - 5mx + 6m^2 = 0$

g. $x^2 - 4ax + 3a^2 = 0$

h. $x^2 + 4ax + 3a^2 = 0$

i. $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$

j. $(x - a)(ax - 1) = x^2 - a^2$

k. $2abx^2 - (2a + b)x + 1 = 0$

l. $abx^2 - (a^2 + b^2)x + ab = 0$

79. Muestre que las siguientes ecuaciones tienen en general dos soluciones distintas.

a. $x^2 - (a^2 + b^2 - c^2)x + a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2 = 0$

b. $3x^2 - 2(a + b + c)x + ab + bc + ca = 0 \qquad$ con a, b, c en $\mathbb{R}$.

80. Determine el número real m para que las siguientes ecuaciones tengan la misma solución:

a. $\begin{cases} x^2 - (2m - 1)x + 2m - 30 = 0 \\ x^2 - (m - 1)x + m + p = 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} mx^2 - 2x + m - p = 0 \\ (m + 1)^2x^2 - mx + p = 0 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x^-(m - 1)x + m + p = 0 \\ 2x^2 - 2m - 12x + 3p = 0 \end{cases}$

81. Resuelva en $\mathbb{R}$ las siguientes inecuaciones, donde el parámetro a e un número real:

a. $(2x + 3)(x + a) < 0$

b. $(ax + 1)(ax + 2) > 0$

c. $(3x - 1)(x - 5) < 0$

d. $x - 3 \geq \sqrt{x^2 - 2x}$

e. $(5 - 2x)(3 + x) > 0$

f. $2x - \sqrt{x} - 1 < 0$

82. Resuelva las siguientes ecuaciones de cuarto grado:

a. $2y^4 + 5y^2 + 7 = 0$

b. $7y^4 - 2y^2 = 0$

c. $5y^4 + 2y^2 + 3 = 0$

d. $7y^4 - 3y^2 + 65 = 0$

e. $25y^4 + 41y^2 + 12 = 0$

83. Resuelva las siguientes inecuaciones de cuarto grado:

a. $25y^4 - 7y^2 + 8 > 0$

b. $12y^4 + 47y^2 - 22 < 0$

c. $2y^4 + 2y^2 - 4 \leq 0$

d. $73y^4 + 12y^2 - 3 \geq 0$

84. En las siguientes desigualdades, encuentre el conjunto de solución:

a. $7x + 8 \leq 0$

b. $9x - 1 > 0$

c. $\left.\begin{array}{rcl} 3x - 1 & < & 0 \\ 3x + 2 & > & 0 \end{array}\right\}$

d. $\left.\begin{array}{rcl} 2x - 1 & \geq & 0 \\ 4x + 1 & < & 0 \end{array}\right\}$

e. $(x - 1)(x + 3) \geq 0$

f. $(-x^2) + 3x - 4 > 0$

g. $\dfrac{x - 7}{x + 4} \geq 0$

h. $(-3) < \dfrac{x}{x - 3} < 2$

i. $(x^2+2x-3)(x+1) \ > \ 0$

85. Resolver

a. $\sqrt{x-a} \ < \ \sqrt{a+1} \qquad a>0$

b. $\sqrt{x-a} \ < \ a^2$

c. $\sqrt{2ax-b} \ < \ b^2 \qquad a,b\in\mathbb{R}$

86. Considere los siguientes sistemas y halle el conjunto de soluciones.

a. $\left.\begin{array}{rcl} 2x+4 & > & 0 \\ 3x-9 & < & 0 \end{array}\right\}$

b. $\left.\begin{array}{rcl} 2x-2 & < & 0 \\ 9x-9 & > & 0 \\ 2x-1 & > & 0 \end{array}\right\}$

87. Resuelva las siguientes desigualdades.

a. $|x-1|+|x+1|<4$

b. $|x-1|+|x-2|-2|x+1|>3$

c. $|x-3|+|x+4|+3 \ > \ x+|x|$

d. $|x|+2|x-1|-3|x-2| \ > \ 4$

e. $|x-1|+|x+1| \ >$

88. Encuentre las soluciones de las desigualdades con parámetros.

a. $(2+n)x+3n \ \geq \ 4\,, \qquad n\in\mathbb{R}$

b. $(n^2-1)x+n>3\,, \qquad n\in\mathbb{R}$

c. $m^2x - 3mx + 2x + m > 4 \qquad m \in \mathbb{R}$

d. $(\sqrt{n+2})x < n + 2 \qquad n \in \mathbb{R}$

e. $\left.\begin{array}{rcl} (m^2-1)+1 & > & 1 \\ mx+2 & < & 0 \end{array}\right\},\qquad m \in \mathbb{R}$

89. Resuelva

a. $\sqrt{x+4} > \sqrt{x-3} + \sqrt{\dfrac{x-10}{2}}$

b. $\sqrt{2x^2 - x - 3} > x + 1$

c. $\sqrt{\dfrac{3x-4}{x-5}} + \sqrt{\dfrac{x-5}{3x-4}} \leq \dfrac{5}{2}$

d. $\dfrac{2x^2+3x-5}{x^2-16} < \dfrac{x-7}{x-4}$

e. $\dfrac{|x|-1}{|x|+2} < 1$

f. $|(x-1)(2x+1)| < x - 1$

g. $(x-3)(x-5) < (|x|-3)(|x|-5)$

h. $\dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x-3} - \dfrac{1}{x-4} > 0$

i. $\dfrac{5x+4}{5x-4} + \dfrac{5x-4}{5x+4} \leq \dfrac{13}{6}$

j. $\left|\dfrac{\dfrac{x-3}{x}}{x+3}\right| < \left|\dfrac{\dfrac{x+3}{3}}{x-3}\right|$

k. $\left|\dfrac{2x^2-x}{x}\right| \leq 4$

90. Resuelva las siguientes desigualdades:

a. $x^2 + 2kx + 1 > 0$

b. $(kx^2) + 2(k+1)x + 1 > 0$

c. $(kx^2 + 2kx + 1)(x - 1) > 0$

d. $\dfrac{x+k}{x-k} < 0 \qquad x \neq k$

91. Halle las soluciones de los siguientes sistemas.

a. $\left.\begin{array}{rcl} 2x - 3y + 6 & \geq & 0 \\ 4x - y - 4 & \leq & 0 \\ 4x + 3y + 12 & \geq & 0 \end{array}\right\}$

b. $\left.\begin{array}{rcl} 3x + 4y - 12 & \geq & 0 \\ 7x - 8y + 11 & \geq & 0 \\ -2x - y + 10 & \geq & 0 \end{array}\right\}$

c. $\left.\begin{array}{rcl} (x^2 + y^2 + 2xy - 1)(x^2 + y^2 + 2xy - 4) & \leq & 0 \\ (x^2 + y^2 - 2xy - 1)(x^2 + y^2 - 2xy - 4) & \leq & 0 \end{array}\right\}$

d. $\left.\begin{array}{lcl} x^2 + 2xy + y^2 - 4 & \leq & 0 \\ x^2 - 2xy + y^2 - 4 & \leq & 0 \\ x^2 + y^2 & > & 1 \end{array}\right\}$

e. $\left.\begin{array}{lcl} x + y & \geq & 0 \\ x - y - 1 & \leq & 0 \\ x^2 + y^2 & \geq & 1 \end{array}\right\}$

92. Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$ demuestre que:

$$a < \frac{a+b}{2} < b$$

93. Para $a, b, c \in \mathbb{R}$ demuestre que:

$$(a \geq b + c) \Longleftrightarrow (a - c) \geq b$$

94. Si $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Muestre que:

$$\frac{1}{x} \geq 2$$

95. Para $a, b \in \mathbb{R}$, $0 \leq a \leq b \neq 0$. Muestre que:

$$\frac{a}{b+1} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{a+1}{b+1}$$

96. Para $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$ y $a \times b >$. Demuestre que:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$$

97. Sean $a, b \in \mathbb{N}^*$, $b \neq 1$. Compare las expresiones racionales

$$\frac{a+1}{b+1} \quad \text{y} \quad \frac{a-1}{b-1}$$

98. Si $a, b, x, y \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 1$. Muestre que:

$$ax + by \leq 1$$

99. Muestre que si $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, entonces:

$$ax + by + cz \leq 1 \qquad \text{para } a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}$$

100. Si $a, b \in \mathbb{R}$ con $a > b > 0$, muestre que se cumple que:

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} > \frac{a - b}{a + b}$$

101. Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \neq b,\ a > 0,\ b > 0$, demuestre que:

$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

102. Para $a, b, c \in \mathbb{R},\ a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0$, muestre que se tiene

$$(a+c)(c+a)(a+b) > 8abc$$

103. Sean $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}$ mayores que cero y tales que $\frac{a_1}{b_1} \leq \frac{a_2}{b_2} \leq \frac{a_3}{b_3} \leq \ldots \leq \frac{a_n}{b_n}$ donde todos los b_i tienen el mismo signo. Demuestre que:

$$\frac{a_1}{b_1} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} \leq \frac{a_n}{b_n}$$

104.

a. Demuestre que:

$$(a + \lambda b)^2 \geq 0 \qquad \text{para } a, b, \lambda \in \mathbb{R}$$

b. Definimos

$$A = \{a_i / i \in \{1, 2, \ldots, n\}\} \qquad A \subset \mathbb{R}$$

$$B = \{b_i / i \in \{1, 2, \ldots, n\}\} \qquad B \subset \mathbb{R}$$

Demuestre que:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + \lambda b_i)^2 \geq 0$$

105. Sean $a_1, \ldots, a_n$ con $a_i \in \mathbb{R}$ y $b_i, \ldots, b_n$ con $b_i \in \mathbb{R}$.
ç

a. Demuestre que:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + \lambda b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (a_i)^2 + 2\lambda \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} (b_i)^2$$

b. Demuestre que

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

Capítulo 3

Sucesiones de números reales

3.1 Definición y conceptos generales

En matemática se formaliza el concepto natural de sucesión de elementos de un conjunto, en particular, sucesiones de números reales.

El concepto informal de sucesión está a la base de cualquier razonamiento prematemático y su formalización recoge esta parte intuitiva reproduciendo sus mejores propiedades en el marco técnico de la teoría de conjuntos y de números reales.

Otra manera de presentar las sucesiones de números , racionales en este caso, es tomarlas como definición de número real. En efecto, la sucesión $1, 4, 1\ldots$ será una buena definición de $\sqrt{2}$ que no deja de ser una definición muy natural, pues la sucesión es "lo más cerca que podemos pasar de $\sqrt{2}$" .

A fin de tener un lenguaje común, se representarán las definiciones y notaciones necesarias para formalizar y hacer "maniobrable" el concepto natural de sucesión de números reales.

Definición 3.1

Una aplicación de f de un subconjunto I de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$ se llama una sucesión de números reales o una sucesión real. Como sólo hablaremos de sucesiones reales, diremos de ahora en adelante únicamente sucesión.

Es usual escribir $f(n) = u_n$ y denotar a la "sucesión" por $(u_n)_n \in I$, lo cual desde luego es un abuso de notación que se asume únicamente por comodidad. Cuando I es igual a $\mathbb{N}$, como a menudo sucede, escribimos $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Observemos que u_n, para cada n en I, es un número real general de la sucesión f.

El conjunto de valores de la sucesión se denota, cuando I en $\mathbb{N}$, por $\{u_0, u_1, \ldots, a_n, \ldots\}$ o de una manera más general por $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Observemos que este conjunto no es lo mismo que la sucesión $(u_n)_n \in \mathbb{N}$, pues esta es la función y $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son los valores de f en $\mathbb{N}$.

Si el conjunto I es finito, se dice que la sucesión es finita; si por el contrario I es infinito, se dice que la sucesión es infinita.

Observemos que si la sucesión es finita, el conjunto de valores de la sucesión es finito. Por otra parte, la sucesión puede ser infinita y el conjunto de valores puede ser finito.

Consideremos por ejemplo, la sucesión definida por todo n en $\mathbb{N}$ por:

$$u_n = (-1)^n$$

es una sucesión infinita, mientras que el conjunto de valores es finito; e efecto, es el conjunto $\{-1, 1\}$.

Ejemplos:

1) La sucesión $(n^2 + 2n - 1)_{n \in [1,s]}$, s en $\mathbb{N}$, es finita.

2) La sucesión $(\cos(\alpha n + 2))_{n \in \mathbb{N}}$ es infinita.

3) La sucesión $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n \in P}$ donde P denota el conjunto de los números pares es infinita.

Para simplificar la notación, denotaremos la sucesión f simplemente por (u_n).

Definición 3.2

Una sucesión $(u_n)_{n\in I}$ se dice estar mayorada (respectivamente minorada) si existe un número real A tal que para todo n en $\mathbb{N}$.

$$u_n \leq A \text{ (respectivamente } u_n \geq A \text{)}$$

Si la sucesión es mayorada, diremos que es acotada. Por ejemplo, la sucesión $(13n + 15)$ no es mayorada, pero si minorada.

La sucesión $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ es acotada y $(\cos(n))$ también lo es.

Definición 3.3

Una sucesión $(u_n)_{n \in I}$ es creciente, si dados n, n' en I se cumple que:

$$(n \leq n') \Longrightarrow (u_n \leq u_{n'})$$

y decreciente

$$(n \leq n') \Longrightarrow (u_n \geq u_{n'})$$

La sucesión se llama estrictamente creciente o estrictamente decreciente si las desigualdades anteriores son estrictas.

Las sucesiones crecientes y decreciente se llaman monótonas (respectivamente estrictamente monótonas).

Definición 3.4

Una sucesión infinita se dice estacionaria si los términos de la sucesión son constantes a partir de un cierto término. Un ejemplo de estas sucesiones son las sucesiones constantes es decir, $(R)_{n \in I}$ donde R es cualquier número real pero fijo.

Ejemplos:

La sucesión $(n^2 + 2n)$ es estrictamente creciente y la sucesión $(-2n + 1)$ es decreciente.

La sucesión $((-1)^n)$ no es monótona.

Operaciones algebraicas y las sucesiones

Dadas dos sucesiones $(u_n)_{n \in I}$ y $(v_n)_{n \in I}$ indexadas por el mismo subconjunto I de $\mathbb{N}$ y un número real cualquiera definimos:

1) $(u_n) + (v_n) \;=\; (u_n + v_n)_{n \in I}$

2) $(u_n) \times (v_n) \;=\; (u_n \cdot v_n)_{n \in I}$

3) $\lambda(u_n) \;=\; (\lambda u_n)_{n \in I}$

Obsérvese que estas definiciones son muy naturales, pues recordemos que son las mismas de la suma, producto y producto escalar de funciones numéricas.

Denotaremos por $S(I)$ el conjunto de funciones de I en $\mathbb{R}$, o sea el conjunto de sucesiones de números reales indexados por I.

Notemos que fácilmente se puede verificar los siguientes resultados:

1) $(S, +)$ es un grupo conmutativo (en particular la sucesión $(-u_n)_{n \in I}$ se denotará por $-(u_n)_{n \in I}$).

2) $S, +, \times$ es n anillo conmutativo con unidad.

3) $(S, +, \cdot)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Si para todo elemento n de I, se tiene que $u_n \neq 0$, la sucesión $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n \in I}$ es la inversa multiplicativa de la sucesión $(u_n)_{n \in I}$ y así, no toda sucesión distinta a la "sucesión 0" tiene un inverso multiplicativo, por lo que $S, +, \times$ no es un campo.

En la práctica se acostumbra considerar $I' \subset I$ tal que para todo n en I' se cumpla que $u_n \neq 0$, se dirá por abuso de lenguaje que la sucesión $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n \in I'}$ es la inversa de $(u_n)_{n \in I}$.

Por ejemplo, diremos que la sucesión $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ es la sucesión inversa de n en n con $n \neq 0$.

Hechas estas observaciones, dadas las dos sucesiones, dadas las dos sucesiones $(u_n)_{n \in I}$ y $(v_n)_{n \in I}$ podemos definir la sucesión $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n \in I'}$ (donde para todo n en I' se tiene que $v_n \neq 0$).

Además, diremos que la sucesión $(|u_n|)_{n \in I}$ es el valor absoluto de la sucesión $(u_n)_{n \in I}$.

Un criterio mucho más comprensible y más útil para trabajar con las sucesiones acotadas está dado el siguiente lema:

Lema 3.1 Una sucesión esta acotada si y solamente si existe k en $\mathbb{R}$ y N en $\mathbb{N}$ tales que para n mayor o igual que N se cumple:

$$|u_n| \leq k$$

Demostración

Consideremos una sucesión u_n acotada, entonces según definición está mayorada y minorada, es decir, existen K' y K'' tales que:

$$u_n \leq K' \qquad \text{para todo } n \text{ en } \mathbb{N}$$

$$u_n \leq K''$$

consideremos ahora

$$K = \text{máx}(\,|K'|\,,\,|K''|\,)$$

luego fácilmente se verifica que:

$$(|u_n| \leq |K|) \qquad (\forall\, n \,\in\, \mathbb{N})$$

Supongamos ahora que exista K en $\mathbb{R}$ y N en $\mathbb{N}$ tales que

$$(|u_n| \leq K) \qquad (\forall\, n \,\geq, N)$$

Consideramos

$$R = \text{máx}(|u_0|\,,\,|u_1|\,,\,\ldots\,,\,|u_{N-1}|\,,\,K)$$

luego es claro que,

$$(|u_n| < R) \qquad (\forall\, n \,\geq, \mathbb{N})$$

Por lo tanto

$$-R < u_n < R$$

Lo cual dice que u_n está mayorada y minorada, es decir, acotada.

Observemos que una sucesión creciente de números reales negativos es acotada, pues basta considerar $K = |u_0|$ dado que $u_n < |u_0|$ para todo n en $\mathbb{N}$, además de que:

$$u_0 \leq u_n$$

pues la sucesión es creciente. Luego,

$$|u_n| \leq |u_0|$$

Similarmente el lector podrá verificar que si (u_n) es una sucesión decreciente de números reales positivos, es acotada.

3.2 Sucesiones aritméticas y geométricas de números reales

3.2.1 Sucesiones aritméticas

Sea la sucesión de números reales (u_n) tal que para todo entero no nulo, se tiene que:

$$u_n = \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2} \tag{3.1}$$

O sea que cada uno de los términos de la sucesión a partir de u_1 son de la misma aritmética de lo términos que lo "encajan".

Observemos que la ecuación 3.1 es equivalente a:

$$u_n - u_{n-1} = u_{n+1} - u_n$$

Por lo tanto existe un número real r tal que para todo n en $\mathbb{N}^*$

$$u_{n+1} - u_n = r$$

Definición 3.5

Llamamos sucesiones aritméticas de números reales, a toda sucesión real (u_n) tal que, existe un número real r, con:

$$u_{n+1} - u_n = r \qquad (\forall\, n \geq, \mathbb{N})$$

Al número r se le llama diferencia simétrica de la sucesión aritmética.

Observemos que si ponemos $u_0 = a$, se tiene que:

$$u_1 = a + r$$

y fácilmente se puede mostrar por inducción que para todo n en $\mathbb{N}$

$$u_n = a + rn \tag{3.2}$$

Recíprocamente, si consideramos la sucesión real definida por

$$u_n = \alpha + \beta n$$

es una sucesión aritmética de diferencia simétrica β y tal que $n_0 = \alpha$.

Recordemos que la sucesión "extraída" de una sucesión aritmética relativa al intervalo $I = [0, n]$, se le llama una progresión aritmética.

Tradicionalmente a las sucesiones aritméticas se les llama "progresiones aritméticas ilimitadas", aunque también se acostumbra a usar el término "sucesión aritméticas ilimitada" como una aplicación f de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$ definida por:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\mapsto a + r\,n \end{aligned}$$

Por otra parte de la ecuación 3.2 se observa que si $r = 0$ la sucesión aritmética u_n es constante; de la misma ecuación se puede observar muy fácilmente que la sucesión aritmética $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es estrictamente creciente si $r > 0$ y estrictamente decreciente si $r < 0$.

Para calcular las sumas parciales de los términos de la sucesión aritmética de razón r, o sea,

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}$$

consideremos un entero R tal que

$$0 \leq R \leq n$$

entonces

$$u_R + u_{n-R} = a + Rr + a + (n-R)r = u_0 + u_n$$

ahora , si escribimos

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + \ldots + u_n \\ S_n &= u_n + u_{n-1} + \ldots + u_0 \end{aligned}$$

Obtenemos, sumando ambas desigualdades

$$2S_n = (n+1)(u_0 + u_n)$$

de donde

$$S_n = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$$

Un caso particular se obtiene de considerar la sucesión aritmética de razón 1 y con términos $u_0 = 0$. La suma parcial es entonces:

$$S_n = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

3.2.2 Sucesiones Geométricas

Consideramos una sucesión (u_n) de números reales tal que para todo entero natural no nulo, se cumpla que:

$$(u_n)^2 = (u_{n-1})(u_{n+1}) \tag{3.3}$$

O sea que, que cada uno de los términos de u_2 se obtiene por la media geométrica de los términos que los “encajan”.

Si todos los términos de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ son no nulos, la igualdad 3.3 se puede escribir de la siguiente manera:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n}{u_{n-1}}$$

y por eso existe un número real no nulo q tal que para n;

$$u_{n+1} = q\, u_n$$

Definición 3.6

Llamamos una sucesión geométrica de números reales a la sucesión para la cual existe q tal que:

$$u_{n+1} = q\,u_n \qquad (\forall n \geq 2)$$

Al número real q se le llama la razón de la sucesión geométrica.

Si q es igual a cero todos los términos de la sucesión geométrica son nulos, por lo que supondremos siempre que:

$$q \neq 0$$

Si u_0 es a, entonces u_1 es (qa) y gráficamente se puede verificar por inducción que:

$$u_n = a\,q^n$$

Recíprocamente que todo sucesión real u_n definida por:

$$u_n = \alpha\beta^n \qquad (\text{con } \beta \neq 0)$$

es una sucesión geométrica de razón β y tal que u_0 es igual a α.

Recordemos que si se considera la sucesión "extraída" de una sucesión geométrica relativa a $[0, n]$ obtenemos una progresión geométrica. A la sucesión geométrica se le acostumbra llamar "progresión geométrica ilimitada"; también se le puede considerar como una aplicación f tal que:

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{Z} &\longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ a &\longmapsto \quad a\,q^n \end{aligned}$$

Observemos que una sucesión geométrica tiene razón q con $q > 0$, entonces todos los términos de la sucesión tienen el mismo signo que u_0, (es decir a). Una sucesión geométrica es constante si q es 1.

Además, si a es mayor que cero, fácilmente se verifica que si q es mayor que uno, la sucesión es estrictamente creciente y si $0 < q < 1$ es estrictamente decreciente.

Los resultados son inversos si a es menor que cero y se demuestran sin mayor dificultad.

Si q es menor que cero, todos los números reales de la forma

$$u_{2n}$$

tienen el mismo signo que u_0 y los números reales de la forma

$$u_{2n+1}$$

tienen el mismo signo opuesto a u_0, lo cual dice que la sucesión alterna sus signos o es alternada.

Para calcular las sumas parciales

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$$

Observemos que:

$$q\,S_n = q\,u_0 + q\,u_1 + \ldots + q\,u_n$$

O sea

$$S_n - q\,S_n = u_0 u_{n+1}$$

De donde

$$S_n(1-q) = u_0 - q^{\,n+1}\,u_0$$

por lo tanto si q es distinto de uno, tenemos que:

$$S_n = u_0\,\frac{1-q^{\,n+1}}{1-q} \tag{3.4}$$

Si $q = 1$, entonces

$$S_n = (n+1)\,u_0$$

Notemos que S_n es la suma de los primeros $n+1$ términos. Una aplicación de la sucesión geométrica es si consideramos:

$$u_0 = x^{\,n-1} \qquad\qquad q = \frac{a}{x}$$

con x en $\mathbb{R}^*$ y a en $\mathbb{R}$, entonces se tiene que:

$$S_{n-1} = x^{n-1} + x^{n-1}a + \ldots + xa^{n-2} + a^{n-1}$$

y por 3.4

$$S_{n-1} = x^{n-1} \cdot \frac{1 - \dfrac{a^n}{x^2}}{1 - \dfrac{a}{x}} = \frac{x^n - a^n}{x - a} \tag{3.5}$$

El resultado lo obtuvimos en el capítulo dos, en la forma

$$x^n - a^n = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \ldots + xa^{n-2} + a^{n-1})$$

Un caso particular sería

$$x^3 - a^3 = (x-a)(x^2 + ax + a^2)$$

y reemplazando a por $-a$ tenemos que:

$$x^3 + a^3 = (x+a)(x^2 + -ax + a^2)$$

3.3 Sucesiones Convergentes

Haremos el estudio de la convergencia de una sucesión tratando de obtener métodos generales aplicables. Para ello buscaremos varios criterios y haremos un estudio de algunas sucesiones particulares que nos ayudarán a resolver el problema en estudio.

La idea de convergencia es muy natural, aunque para el lector no avezado, muchas veces la definición no pareciera ayudarle a describir el concepto intuitivo que él tiene.

Definición 3.7

Una sucesión infinita (u_n) de números reales converge hacia el número ℓ en $\mathbb{R}$ si dado ε mayor que cero en $\mathbb{R}$ existe N en $\mathbb{N}$ tal que

$$|u_n - \ell| < \varepsilon \qquad (\forall n \geq N)$$

Al número real ℓ se le llama el límite de la sucesión (u_n) y se denota por

$$(u_n) \longrightarrow \ell \qquad \text{o} \qquad \lim_{n \longrightarrow \infty} u_n = \ell$$

en este caso la sucesión se llama convergente.

Teorema 3.1

Si (u_n) es una sucesión convergente, entonces el límite de u_n es único.

Demostración

Supongamos que no es cierta la afirmación, o sea que el límite no es único, existen entonces ℓ y ℓ' en $\mathbb{R}$ tales que:

$$(u_n) \longrightarrow \ell \qquad \text{y} \qquad (u_n) \longrightarrow \ell'$$

Tenemos entonces que

$$|\ell - \ell'| \;=\; |\ell - u_n + u_n - \ell'| \leq |\ell - u_n| + |\ell' - u_n| \tag{3.6}$$

ahora como $(u_n) \longrightarrow \ell$ existe N' en $\mathbb{N}$ tal que

$$|u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad (\forall n \geq N') \tag{3.7}$$

Similarmente existe N'' en $\mathbb{N}$ tal que

$$|u_n - \ell'| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad (\forall n \geq N'') \tag{3.8}$$

Luego para $N = \text{máx}(N', N'')$ se cumplen las desigualdades 3.7 y 3.8 simultáneamente, por lo tanto de 3.6 se sigue que:

$$|\ell - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \;=\; \varepsilon$$

para todo $\varepsilon > 0$ en $\mathbb{R}$, entonces:

$$|\ell - \ell'| = 0 \qquad \text{y} \qquad \ell = \ell'$$

es decir el límite de una sucesión convergente es único.

Ejemplos de sucesiones convergentes y no convergentes

Consideremos la sucesión $\dfrac{1}{n}$ para n en $\mathbb{N}^*$. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario.

Notemos que por el teorema de Arquímedes existe N en $\mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{\varepsilon} < N \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{N} < \varepsilon$$

ahora, si $n \geq N$ entonces:

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

y

$$\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon \qquad (\forall n \geq N)$$

De donde

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Observemos por otra parte que toda sucesión constante, o sea aquella cuyos términos son una constante, converge.

Los dos resultados anteriores nos serán muy útiles cuando conozcamos más propiedades de las sucesiones convergentes, así como para derivar algunas de estos.

Los ejemplos que pondremos a continuación, sirven para ilustrar métodos que demuestra que una sucesión converge o no. Consideremos la sucesión:

$$\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$$

Vamos a "ver" que esta sucesión converge a cero. Sea $\varepsilon > 0$ en $\mathbb{R}$ arbitrario; sabemos que:

$$\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$$

Debemos acotar $\frac{1}{n^2}$ por ε a partir de un cierto número número natural N.

Dado que $\mathbb{R}$ es arquimediano existe, en efecto, N en $\mathbb{N}$ tal que

$$N > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

además,, obviamente para $n \geq N$

$$n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} > 0$$

y por lo tanto

$$\frac{1}{n^2} < \varepsilon \qquad (\forall\, n \geq N)$$

lo que implica que la sucesión

$$\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$$

converja a 0.

La sucesión $\{(-1)^k\}$ no converge, pues si converge a "a", dado $\varepsilon > 0$ debería existir N en $\mathbb{N}$ tal que

$$|(-1)^k - a| < \varepsilon \qquad (\forall\, n \geq N)$$

Pero si consideramos por ejemplo $\varepsilon = \frac{1}{2}$ y suponemos que $a \geq 0$, se tiene

$$|(-1)^k - a| = 1 + a\,, \quad \text{si} \quad K = 2n \quad \text{y} \quad K \geq N$$

de donde

$$1 + a < \frac{1}{2} \Longrightarrow a < -\frac{1}{2}$$

Lo que contradice el hecho de que $a \geq 0$. La escogencia de k es posible dado que el conjunto de los números impares no es acotado superiormente y para todo n en $\mathbb{N}$ existe:

$$K = 2n + 1$$

tal que

$$K = 2n + 1 \geq N$$

Ahora, si a fuese menor que cero, entonces

$$|(-1)^k - a| = |1 - a| < \frac{1}{2}$$

Para algún $K = 2n$ cuya obtención se garantiza por el echo que tampoco los números pares son acotados superiormente.

Se deduce que:

$$-\frac{1}{2} < 1 - a < \frac{1}{2} \Longrightarrow a > \frac{1}{2}$$

lo cual es de nuevo una contradicción. Entonces para $\varepsilon > 0$ arbitrario no existe N en $\mathbb{N}$ con la propiedad deseada de donde la sucesión $(-1)^k$ no converge.

Definición 3.8

Una sucesión $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $+\infty$ [respectivamente a $-\infty$] si y solo si para todo $A > 0$, $A \in R$, existe N en $\mathbb{N}$ tal que

$$(\forall\, n > N) \quad a_n > A \quad (\text{respectivamente } a_n < -A\,)$$

y se denota por

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} u_n = +\infty \qquad (\text{respectivamente } \lim_{n\longrightarrow\infty} u_n = -\infty\,)$$

Obsérvese que si $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} |u_n| = +\infty$ o $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} |u_n| = -\infty$ podemos asegurar que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} |u_n| = +\infty$.
Recíprocamente si $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} |u_n| = +\infty$ y si a partir de una cierta constante todos los términos de la sucesión tienen el mismo signo, de a cuerdo a este signo $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} |u_n| = +\infty$ o $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} |u_n| = -\infty$.

Sin embargo, no se puede asegurar nada si el signo de los términos de la sucesión varía como en la sucesión

$$\{(-1)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

Esto quiere decir que existen sucesiones que no son divergentes ni convergentes.

Otro ejemplo de una sucesión convergente a $+\infty$ es $(u)_{n\in\mathbb{N}}$ pes recordemos del capitulo anterior que para todo $A > 0$, $A \in \mathbb{R}$, existe N en $\mathbb{N}$ tal que

$$n > A \qquad (\forall n \geq N)$$

lo cual dice que la sucesión converge a $(+\infty)$, análogamente $(-n)$ converge a $(-\infty)$.

Consideremos ahora la sucesión aritmética $(a + rn)_{n\in\mathbb{N}}$ con r diferente de cero, es inmediato que:

$$(r > 0) \Longrightarrow \text{lím}\,(a + rn) = +\infty$$

$$(r < 0) \Longrightarrow \text{lím}\,(a + rn) = -\infty$$

Demostremos la segunda proposición.

Sea A un número real estrictamente positivo; sabemos que existe n en $\mathbb{N}$ tal que

$$a + rn < -A$$

En efecto, despejando se obtiene

$$n > \frac{-A - a}{-r}$$

Y basta considerar un entero n con $n \geq N$ y

$$N > \text{máx}\left(\frac{-A - a}{-r}, 0\right)$$

por tanto

$$(n \geq N) \Longrightarrow (u_n < -A)$$

o sea $(a + rn)$ converge a $(-\infty)$.

Observemos que la notación $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} u_n = +\infty$ es tan solo un abuso de lenguaje para comodidad de escritura, pues de acuerdo a la definición dada al principio, el límite debe ser un número real.

Relación entre las sucesiones acotadas y convergentes

En esta sección veremos una propiedad de las sucesiones convergentes con respecto a las acotadas, así como un criterio para analizar si una sucesión converge. Este criterio, con el de Cauchy, serán las herramientas más útiles para enfrentar una sucesión, aunque es seguro que el lector encontrará otras menos ortodoxas.

Lema 3.2 Sea (u_n) una sucesión convergente de números reales, entonces u_n es acotada.

Demostración

Supongamos que u_n converge a ℓ y consideremos $\varepsilon > 0$ arbitrario.

Como

$$|u_n| = |u_n - \ell + \ell| \leq |u_n - \ell| + |\ell| \tag{3.9}$$

Y dado que u_n es convergente, entonces existe N en $\mathbb{N}$ tal que para $n \geq N$

$$|u_n - \ell| < \varepsilon \tag{3.10}$$

Obtenemos que por 3.9 y 3.10

$$|u_n| \leq \varepsilon + |\ell| \qquad (\forall n \geq N)$$

Consideremos ahora el número real k definido por:

$$k = \text{máx}\,(|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{n-1}|, \varepsilon + |\ell|)$$

Es evidente que

$$|u_n| \leq k \qquad (\forall n \geq N)$$

de donde se deduce que u_n en acotada.

Teorema 3.2
Toda sucesión creciente de números reales, acotada superiormente (mayorada) es convergente.

Demostración Considérese una sucesión u_n creciente y acotada superiormente. El conjunto U definido por

$$U = \{u_n \quad n \in \mathbb{N}\}$$

es acotado. Sea

$$\ell = \sup U$$

Dado ε un número real estrictamente positivo, sabemos que existe N en $\mathbb{N}$ tal que

$$\ell - \varepsilon < u_N \leq \ell$$

(usando un criterio del sup visto en el capitulo II de este libro). Pero como (u_n) es creciente entonces tenemos que:

$$\ell - \varepsilon \leq u_N \leq u_n \leq \ell \qquad (\forall n \in \mathbb{N}$$

Se deduce que para todo $\varepsilon > 0$ existe N en $\mathbb{N}$ tal que para $n \geq N$

$$|u_n - \ell| < \varepsilon$$

O sea que (u_n) converge a ℓ.

Un teorema análogo al anterior es que, toda sucesión decreciente acotada inferiormente (minorada) es convergente y converge al $\inf$ de $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

La demostración es bastante similar, por lo que la omitiremos.

Este criterio es muy importante dado que nos dice cuándo una sucesión converge y a qué número real converge. Para mostrar su utilidad consideremos los siguientes ejemplos:

Sea la sucesión (u_n) definida por:

$$u_n = \frac{(n+1)n}{n+3}$$

Vamos a mostrar que la sucesión no es convergente.

Fácilmente se comprueba que la sucesión u_n es creciente pues:

$$n^2 + 6n + 6 > n^2 + 4n$$

luego

$$(n + 2)(n + 3) > n(n + 4)$$

multiplicando ambos términos por $(n + 1)$

$$(n + 1)(n + 2)(n + 3) > (n + 1)n(n + 4)$$

de donde

$$u_{n+1} = \frac{(n + 1)(n + 2)}{(n + 4)} > \frac{(n + 1)n}{(n + 3)} = u_n$$

Observemos que vasta mostrar que u_n no es acotada y tenemos el resultado deseado, pues si mostramos que no es acotada pero sí convergente, entonces por el lema 3.2 tendríamos una contradicción.

Supongamos por el contrario que u_n está acotada, luego existe k en $\mathbb{R}$ tal que

$$k \geq u_n = \frac{n^2 + n}{n + 3} \qquad (\forall n \in \mathbb{N})$$

lo que implica que

$$0 > n^2 - (k - 1)n - 3k = 0 \tag{3.11}$$

se obtiene

$$\triangle = (k - 1)^2 + 12k$$

Dado que k debe ser mayor que cero se tiene que $\triangle > 0$ y esto implica que sea falsa loa suposición.

Suponer entonces que (u_n) es acotada nos lleva a una contradicción, o sea que u_n no es acotada y por lo tanto no converge (nótese el uso del lema 3.2 junto con el teorema anterior).

Otro ejemplo que es una aplicación inmediata del teorema anterior es el siguiente:

Considérese la sucesión $\dfrac{n}{n+1}$, claramente es una sucesión acotada superiormente. Además es creciente, dado que

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 > n^2 + 2n = n(n+2)$$

luego

$$u_{n-1} = \frac{(n+1)}{n+2} > \frac{n}{n+1} = u_n$$

Por tanto podemos concluir que $\dfrac{n}{n+1}$ es convergente3 y no solo eso, sino que converge a 1, pues fácilmente se puede mostrar que 1 es el supremo del conjunto

$$\left\{\frac{n}{n+1}\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

Consideremos ahora una sucesión de intervalos $[a_n,\, b_n]$ que verifican las condiciones del teorema de los segmentos encajados (ver cap. I), entonces las sucesiones a_n y b_n verifican las siguientes propiedades

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \qquad (\forall n \in \mathbb{N})$$

O sea que (a_n) es una sucesión creciente y (b_n) un a decreciente.

Además, sabemos que existe un único número real que pertenece a todos los segmentos

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n = \operatorname{ínf}_{n \in \mathbb{N}} b_n$$

por tanto, por el teorema anterior se obtiene que

$$\operatorname{lím} a_n = \operatorname{lím} b_n = \ell$$

A toda pareja de sucesiones (a_n) y (b_n) que verifican las condiciones anteriores, se les llaman sucesiones adyacentes.

Podemos entonces concluir que dos sucesiones adyacentes son convergentes y el límite es justamente el único número real que pertenece a todos los intervalos $[a_n\,,\, b_n]$.

Relación entre el orden y la convergencia

Teorema 3.3

Dadas dos sucesiones convergentes de números reales U_n y V_n tales que para todo n en $\mathbb{N}$

$$U_n \leq V_n$$

entonces

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} U_n \leq \lim_{n\longrightarrow\infty} V_n$$

Demostración

Supongamos que $\lim_{n\longrightarrow\infty} U_n = a$ y $\lim_{n\longrightarrow\infty} V_n = b$.

Razonando por contradicción, asumamos que $b < a$ y consideremos $\varepsilon = \dfrac{a-b}{2} > 0$; como U_n y V_n son convergentes, existen N_1 y N_2 tales que:

$$|U_n - a| < \varepsilon \qquad (\forall n \geq N_1)$$

$$|V_n - a| < \varepsilon \qquad (\forall n \geq N_2)$$

de donde se deduce que

$$a - \varepsilon < U_n < \varepsilon + a \tag{3.12}$$

y

$$b - \varepsilon < V_n < \varepsilon + b \tag{3.13}$$

Ahora nótese que

$$a - \varepsilon - (b + \varepsilon) = a - b - 2\varepsilon = \frac{a-b}{2} > 0$$

lo que implica que

$$a - \varepsilon > b + \varepsilon \tag{3.14}$$

y si $N = \text{máx}(N_1, N_2)$, se obtiene de 3.12, 3.13 y 3.14 que

$$V_n < b + \varepsilon < 0 - \varepsilon < U_n \qquad (\forall n \geq N)$$

pero por hipótesis

$$U_n \leq V_n$$

que es una contradicción.

Suponer entonces que $b < a$ nos lleva a una contracción y se debe tener que $b \geq a$.

Si se observe cuidadosamente, se puede notar que la hipótesis de que $U_n \leq V_n$ para todo número natural n, puede ser sustituida por $U_n \leq V_n$ para $n \geq p$ con p un número natural cualquiera, pues el argumento de la prueba sería el mismo a excepción de la escogencia de N que en este aso sería:

$$N = \text{máx}(N_1, N_2, p)$$

Cabe preguntar que si el teorema es válido con las desigualdades estrictas, esto es:

$$(U_n < V_n)(\forall n \in \mathbb{N}) \Longrightarrow (a < b)$$

La respuesta a esta pregunta es negativa, como se ve del siguiente contraejemplo:

Considere las sucesiones $(U_n) = (1 - \frac{1}{n})$ y $(V_n) = (1 + \frac{1}{n})$.

Es evidente que $U_n < V_n$ para todo entero natural n; sin embargo el límite de ambas sucesiones es 1, como podrá verificar el lector usando la definición de la convergencia de $\frac{1}{n}$.

Otro resultado importante en cuanto a la relación y el orden es el siguiente.

Teorema 3.4

Dadas tres sucesiones de números reales (U_n) (V_n) (W_n) tales que:

1) $U_n \leq V_n \leq W_n \qquad (\forall n \in \mathbb{N})$

2) $\lim U_n = \lim W_n = \ell$

Entonces V_n converge a ℓ

Demostración Sea $\varepsilon > 0$ un número real arbitrario como (W_n) y (U_n) son convergentes, existen N_1 y N_2 en $\mathbb{N}$ tales que:

$$W_n - \ell < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (\forall n \geq N_1) \tag{3.15}$$

$$U_n - \ell < \frac{\varepsilon}{4} \qquad (\forall n \geq N_2) \tag{3.16}$$

Ahora,

$$|V_n - \ell| \leq |V_n - U_n| + ||U_n - \ell$$

y como $W_n \geq V_n$ se tiene que

$$|V_n - \ell| \leq |W_n + U_n| + |U_n - \ell| = |W_n - U_n + \ell - \ell| + |U_n - \ell|$$

de donde

$$|V_n - \ell| \leq |W_n - \ell| + 2|U_n - \ell|$$

Considerando $N = \max(N_1, N_2)$ se obtiene que para $n \geq N$

$$|V_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2\frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

luego (V_n) converge a ℓ.

La importancia de este teorema es que nos sirva como un criterio para analizar si una sucesión es convergente, dado que se puede reducir el problema a demostrar la existencia del límites tal vez más fáciles.

Por ejemplo, considerar la sucesión (V_n) definida por

$$V_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

Observe que

$$0 \leq V_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

Como $0 \leq V_n < \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ y se puede verificar fácilmente que como $\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ converge a 0, entonces (V_n) tiende a cero.

3.3.1 Las operaciones con sucesiones

En esta sección vamos a estudiar operaciones algebraicas en el conjunto de todas las sucesiones convergentes. Luego estudiaremos las operaciones en las sucesiones que convergen a $-\infty$ o a $-\infty$.

Teorema 3.5

Dadas don sucesiones convergentes (U_n) y (V_n) cuyos límites son ℓ y ℓ' respectivamente, entonces la sucesión $U_n + V_n$ converge y el límite es $\ell + \ell'$.

Demostración Para cualquier $\varepsilon > 0$ existen N' y N'' en $\mathbb{N}$ tales que

$$|U_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (\forall n > N')$$

$$|V_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (\forall n > N'')$$

Como

$$|U_n + V_n - (\ell - \ell')| \;\leq\; |U_n - \ell| + |V_n - \ell'|$$

Se obtiene que

$$|U_n + V_n - (\ell - \ell')| \;<\; \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \;=\; \varepsilon \qquad (\forall n \geq N \;=\; \text{máx}\,(N', N''))$$

o sea que $(U_n + V_n)$ es convergente a $\ell + \ell'$

Teorema 3.6

Dadas dos sucesiones convergentes U_n y V_n a ℓ y ℓ' respectivamente, la sucesión $U_n \cdot V_n$ converge a $\ell \cdot \ell'$.

Demostración Sean (U_n) y (V_n) dos sucesiones convergentes y ℓ y ℓ' sus límites. Nótese que:

$$|U_n \cdot V_n - \ell\,\ell'| \;=\; |U_n\,(V_n - \ell') + \ell'(U_n - \ell)| \;\leq\; |U_n|\,|V_n - \ell'| \,+\, |\ell'|\,|U_n - \ell|$$

Como U_n es una sucesión convergentes, es una sucesión acotada (lema 3.2) por lo tanto podemos suponer que existe K en $\mathbb{R}$ tal que

$$|U_n| \leq K \qquad (\forall n \in \mathbb{N})$$

Además, como U_n y V_n son convergentes, entonces dado $\varepsilon > 0$ existen N' y N'' en $\mathbb{N}$ tales que

$$|V_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2K} \qquad (\forall\, n \geq N')$$

$$|U_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2|\ell|} \qquad (\forall\, n \geq N'')$$

Por tanto, si consideramos $N = \text{máx}\,(N', N'')$ se obtiene que

$$|U_n\,V_n - \ell\,\ell'| \;<\; k\frac{\varepsilon}{2K} \;+\; |\ell'|\,\frac{\varepsilon}{2|\ell'|} \;=\; \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \;=\; \varepsilon$$

de donde concluimos que $(U_n\,V_n)$ convergen a $\ell\,\ell'$.

La importancia de estos dos teoremas anteriores y el teorema siguiente es que reducen el cálculo de un límite bastante complicado a varios límites fáciles de computar. Com esto se obtiene el resultado más fácilmente y, sobre todo, en menos tiempo, se evita tener que recurrir a la propia definición de convergencia en los casos que es fastidioso el " método del ε y el N ".

Lema 3.3 Sea (U_n) una sucesión convergente a $\ell \neq 0$, entonces existen N en $\mathbb{N}$ y B en $\mathbb{R}*_+$ tales que

$$0 < B < |U_n| \qquad \forall\, n \geq N$$

Demostración. Sabemos del capitulo anterior que:

$$|U_n| - |\ell| \leq |U_n - \ell|$$

Como (U_n) es convergente dado $\varepsilon > 0$ existen N en $\mathbb{N}$ tal que

$$|U_n| - |\ell| < \varepsilon$$

o sea

$$|\,|U_n| - |\ell|\,| < \varepsilon$$

luego

$$-\varepsilon + |\ell| < |U_n| < \varepsilon + |\ell|$$

Basta entonces con escoger $0 < \varepsilon < |\ell|$ y considerar

$$B = -\varepsilon + |\ell|$$

luego, es evidente que:

$$0 < B < |U_n| \qquad (\forall\, n \geq N)$$

Teorema 3.7

Sea (U_n) una sucesión convergente a $\ell \neq 0$ tal que $U_n \neq 0$ para todo n en $\mathbb{N}$; entonces la sucesión $\dfrac{1}{U_n}$ converge a $\dfrac{1}{\ell}$.

Demostración

Consideremos (U_n) una sucesión con la hipótesis del teorema.

Como

$$\left|\frac{1}{U_n} - \frac{1}{\ell}\right| = \left|\frac{|U_n - \ell|}{|\ell|\,|U_m|}\right|$$

basta acotar inferiormente el denominador. Por el lema 3.3 existe N' en $\mathbb{N}$ y B en $\mathbb{R}$ tales que

$$0 < B < |U_n| \qquad (\forall\, n \geq N')$$

Luegop

$$\left|\frac{1}{U_n} - \frac{1}{\ell}\right| < \frac{|U_n - \ell|}{|\ell|\, B} \qquad (\forall\, n \geq N')$$

Ahora, como (U_n) converge a ℓ, dado $\varepsilon > 0$, existe N'' en $\mathbb{N}$ tal que

$$|U_n - \ell| < \varepsilon\, |\ell|\, B \qquad (\forall\, n \geq N'')$$

Por tanto si consideramos $N = \text{máx}\,(N', N'')$ obtenemos que

$$\left|\frac{1}{U_n} - \frac{1}{\ell}\right| < \varepsilon \qquad (\forall\, n \geq N)$$

de donde $\left(\dfrac{1}{U_n}\right)$ es convergente a $\dfrac{1}{\ell}$.

Un ejemplo muy significativo pero trivial, de la aplicación de los teoremas anteriores es el siguiente:

Ejemplo 3.1

Calculemos el límite de (U_n) definido por $U_n = \dfrac{n^5 + 3n + 2}{n^6 + 7n^3 + 8}$ para todo n en $\mathbb{N}$.

Obsérvese que dividiendo por n^6 tenemos que:

$$U_n = \frac{\dfrac{1}{n} + \dfrac{3}{n^5} + \dfrac{2}{n^6}}{1 + \dfrac{7}{n^3} + \dfrac{8}{n^6}}$$

De donde es evidente por los teoremas anteriores que (U_n) converge a cero.

Teorema 3.8

Sea (U_n) una sucesión convergente a ℓ y sea λ un número real arbitrario, entonces la sucesión $(\lambda\, U_n)$ converge a $\lambda\, \ell$

Demostración

Consideremos λ un número distinto de cero (pues si $\lambda = 0$ obviamente λU_n converge a cero dado que sería la sucesión constante igual a cero), obsérvese que:

$$|\lambda\, U_n - \lambda\, \ell| \;=\; |\lambda|\; |U_n - \ell|$$

Y como (U_n) es convergente, dado que $\dfrac{\varepsilon}{|\lambda|} > 0$ existe N en $\mathbb{N}$ tal que

$$|U_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|} \qquad (\forall\, n \geq N)$$

De donde

$$|\lambda\, U_n - \ell| < \varepsilon$$

O sea $(\lambda\, U_n)$ es convergente a $\lambda\ell$.

De los teoremas anteriores el lector podrá verificar que el conjunto de todas las sucesiones de números reales convergentes es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y aun más, un anillo conmutativo con identidad.

Estudiemos ahora las operaciones algebraicas cuando al menos una de las dos sucesiones converge a $+\infty$ o $-\infty$.

Comencemos estudiando el límite de la sucesión $(-U_n)$ donde (U_n) converge a $+\infty$; es de esperar que $(-U_n)$ converja a $-\infty$. En efecto, dado $A > 0$ un número real, existe N en $\mathbb{N}$ tal que

$$U_n > A \qquad (\forall\, n \geq N)$$

De donde

$$-U_n < -A \qquad (\forall\, n \geq N)$$

o sea $(-U_n)$ converge a $-\infty$.

Análogamente el lector podrá constatar que si (U_n) converge a $-\infty$, la sucesión $(-U_n)$ converge a $+\infty$.

Teorema 3.9

Sean (U_n) y (V_n) dos sucesiones de números reales. Entonces

1) Si (U_n) converge a $+\infty$ y (V_n) no converge a $-\infty$ entonces $(U_n + V_n)$ convergen a $+\infty$.

2) Si (U_n) converge a $-\infty$ y (V_n) no converge a $+\infty$, entonces $(U_n) + V_n$ convergen a $-\infty$.

Demostración

Supongamos que (V_n) converge a $+\infty$, entonces dado $A > 0$ existen N' y N'' en $\mathbb{N}$ tales que

$$\begin{aligned} U_n &> \frac{A}{2} \quad (\forall\, n \geq N') \\ V_n &> \frac{A}{2} \quad (\forall\, n \geq N'') \end{aligned}$$

entonces, si consideramos $N = \text{máx}\,(N', N'')$ se obtiene que:

$$U_n + V_n > A \qquad (\forall\, n \geq N)$$

O sea que $(U_n + V_n)$ converge a $+\infty$.

Supongamos ahora que (U_n) converge a $+\infty$ y (V_n) converge a ℓ.

Sabemos que, como V_n es una sucesión convergente acotada, esto es, existe K' en $\mathbb{R}$ tal que

$$-K' < V_n < K' \tag{3.17}$$

Sea $R > 0$ arbitrario, entonces existe $K > 0$ tal que

$$R = K - K'$$

Como (U_n) converge, existe N en $\mathbb{N}$ tal que

$$R < U_n + V_n \qquad (\forall\, n \geq N) \tag{3.18}$$

Sumando las desigualdades 3.17 y 3.18

$$R < U_n + V_n \qquad (\forall\, n \geq N)$$

Y como la escogencia de R fue arbitraria se obtiene que $(U_n + V_n)$ converge a $+\infty$.

Análogamente el lector podrá verificar la parte dos del teorema.

Estudiaremos el producto en el siguiente teorema.

Teorema 3.10

Sean (U_n) y (V_n) dos sucesiones de números reales. Entonces

1) Si (U_n) converge a $+\infty$ entonces:

   a. $(U_n\,V_n)$ converge a $+\infty$ si V_n converge a $\ell > 0$.

   b. $(U_n\,V_n)$ converge a $+\infty$ si V_n converge a $+\infty$.

   c. $(U_n\,V_n)$ converge a $-\infty$ si V_n converge a $\ell < 0$

   d. $(U_n\,V_n)$ converge a $-\infty$ si V_n converge a $-\infty$

2) Si a. U_n converge a $-\infty$ entonces:

   b. $(U_n\,V_n)$ converge a $+\infty$ si V_n converge a $\ell < 0$

   c. $(U_n\,V_n)$ converge a $+\infty$ si V_n converge a $-\infty$

   d. $(U_n\,V_n)$ converge a $-\infty$ si V_n converge a $\ell > 0$

   $(U_n\,V_n)$ converge a $-\infty$ si V_n converge a $-\infty$

Demostración

No mostraremos la parte (2.) del teorema 3.10 dada a su analogía a la parte (1.) del mismo teorema, y de la parte (1) solo mostraremos las partes (a.) y (b.) dado que las demostraciones de (c.) y (d.) son análogas a las demostraciones de (a.) y (b.) respectivamente.

Supongamos que (U_n) converge a $+\infty$ y (V_n) converge a $\ell > 0$. Sea $0 < \varepsilon < \ell$. Como V_n converge a ℓ existe N en $\mathbb{N}$ tal que

$$|V_n - \ell| < \varepsilon \qquad (\forall\, n \geq N')$$

O sea

$$0 < -\varepsilon + \ell < V_n < \varepsilon + \ell \qquad (\forall\, n \geq N') \tag{3.19}$$

Sea R un número real positivo, entonces existe $K > 0$ tal que

$$R = K(-\varepsilon + \ell)$$

Dado que $K > 0$ y que (U_n) diverge a U_n converge a $+\infty$, existe N'' en $\mathbb{N}$ tal que

$$0 < K < U_n \qquad (\forall\, n \geq N'') \tag{3.20}$$

Multiplicando las desigualdades 3.19 y 3.20 y considerando $N = \text{máx}\,(N', N'')$ obtenemos que:

$$R = K(-\varepsilon + \ell) < U_n\, V_n \qquad (\forall\, n \geq N)$$

O sea que $(U_n\, V_n)$ converge a $+\infty$.

Obsérvese que con los términos anteriores quedó caracterizado el límite de la suma de sucesiones, salvo el caso que una se dirija a $+\infty$ y la otra a $-\infty$. En el caso de producto de sucesiones queda definido el límite únicamente cuando una sucesión converge a $+\infty$ o $-\infty$ y la otra converge a "0".

Teorema 3.11

Sea U_n una sucesión de números reales. Entonces:

1) Si U_n converge a 0, $\left(\dfrac{1}{U_n}\right)$ converge a $+\infty$ si $U_n \geq 0$ para $n \geq N$; converge a $-\infty$ si $U_n < 0$ para $n \geq N$, con $N \in \mathbb{N}$ dado.

2) Si (U_n) converge a $+\infty$ o $-\infty$, $\left(\dfrac{1}{U_n}\right)$ tiene por límite a 0.

Demostración

Supongamos que (U_n) converge a 0 y que $U_n > 0$ para $n \geq N$ con N' en $\mathbb{N}$.

Sea $K > 0$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $K = \dfrac{1}{\varepsilon}$, pero como $\varepsilon > 0$ y (U_n) converge a 0, existe N en $\mathbb{N}$ tal que

$$-\varepsilon \leq U_n < \varepsilon \qquad (\forall\, n \geq N'')$$

Considerando $N = \text{máx}\,(N', N'')$ tenemos que:

$$0 < U_n < \varepsilon \qquad (\forall\, n \geq N)$$

O sea

$$0 < K = \frac{1}{\varepsilon} < \frac{1}{U_n} \qquad (\forall\, n \geq N)$$

Y así $\left(\dfrac{1}{U_n}\right)$ converge a $+\infty$. El otro caso se analiza análogamente.

Supongamos ahora que (U_n) converge a $+\infty$, entonces dado $\varepsilon > 0$ existe N en $\mathbb{N}$ tal que

$$0 < \frac{1}{\varepsilon} < U_n \qquad (\forall\, n \geq N)$$

De donde

$$0 < \frac{1}{U_n} < \varepsilon \qquad (\forall\, n \geq N)$$

O sea que $\left(\dfrac{1}{U_n}\right)$ converge a 0.

El otro caso es similar y el lector podrá verificarlo fácilmente.

Con el estudio anterior en los teoremas 3.10 y 3.11 podemos obtener el límite del cociente de dos sucesiones que resumiremos de siguiente modo:

Sean (U_n) y (V_n) dos sucesiones numéricas reales cuyos limites son ℓ y ℓ' respectivamente. Entonces:

1) Supongamos que $\ell' \neq 0$, luego:

a. Si $(\ell, \ell') \in \mathbb{R}^2$ la sucesión $\left(\dfrac{U_n}{V_n}\right)$ tienen como límite $\dfrac{\ell}{\ell'}$.

b. Si $\ell \in \mathbb{R}$ y ℓ' en $+\infty$ o $-\infty$, entonces $\left(\dfrac{U_n}{V_n}\right)$ converge a 0.

c. Si ℓ es $-\infty$ y $\ell' > 0$ o ℓ es $+\infty$ y $\ell' < 0$, con ℓ' en $\mathbb{R}$, $\left(\dfrac{U_n}{V_n}\right)$ converge a $-\infty$.

d. Si ℓ es $+\infty$ y $\ell' > 0$ o ℓ en $-\infty$ y $\ell < 0$, con ℓ' un número real cualquiera, entonces $\left(\dfrac{U_n}{V_n}\right)$ converge a $+\infty$.

2) Si $\ell' = 0$, entonces:

a. Si $U_n < 0$ a partir de cierto rango y ℓ es un número real positivo, o so $V_n < 0$ a partir de un cierto rango y ℓ es un número real negativo, $\left(\dfrac{U_n}{V_n}\right)$ converge a $+\infty$.

Si $V_n > 0$ a partir de un cierto rango y $\ell < 0$ o si $V_n < 0$ a partir de un cierto rango y $\ell > 0$, con ℓ en $\mathbb{R}$, entonces $\left(\dfrac{U_n}{V_n}\right)$ converge a $-\infty$.

3.4 Estudio de sucesiones particulares

Límites de una sucesión aritmética:

Considérese una sucesión aritmética cualquiera $u_n = u_0 + nr$ con u_0 y r en $\mathbb{R}$.

En la sección 3.3 de este capitulo, vimos que:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} n = +\infty$$

Además, según el estudio hecho en la sección anterior se obtiene que:

$$\begin{array}{lllll} \text{Si} & r > 0 & \lim\limits_{\longrightarrow \infty} nr & = & +\infty \\ \text{Si} & r > 0 & \lim\limits_{\longrightarrow \infty} nr & = & -\infty \end{array}$$

Ahora, si r es 0 se observó anteriormente que la sucesión sería constante y por lo tanto convergería a u_0. En conclusión, la sucesión aritmética solo converge a un número real cuando la razón es 0.

Considérese ahora la sucesión (S_n) definida por:

$$S_n = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$$

El lector podrá verificar que la sucesión $\dfrac{(n+1)}{2}$ converge a $+\infty$ y como observamos hace un momento $(u_0 + u_n)$ converge a $+\infty$ o $-\infty$, dependiendo de signo de la razón r; de donde la sucesión (S_n) converge a $+\infty$ o $-\infty$.

A esta sucesión (S_n) se le llama serie aritmética.

Límites de la sucesión (a^n)

Comencemos estudiando la sucesión (a^n), cuando $a > 1$, con el siguiente lema que se conoce con el nombre de la desigualdad de Bernoulli.

Lema 3.4 Dado un número real positivo b arbitrario se cumple

$$(1+b)^n > nb \qquad (\forall\, n \geq N)$$

Demostración

Hagamos la prueba por inducción. Es claro que la propiedad se verifica para $n = 1$ pues

$$1 + b > b$$

Supongamos que la propiedad se verifica para $n = k$.

Como

$$(1+b)^{k+1} = (1+b)(1+b)^k = (1+b^k) + b(1+b)^k$$

Se obtiene por hipótesis de inducción y porque $1 + b > 1$ que:

$$(1+b)^{k+1} > kb + b = (k+1)b$$

que era lo que deseaba probar.

Consideremos ahora $a > 1$, entonces $a = 1 + b$ con $b > 0$ y por el lema anterior

$$a^n = (1 + b)^n > nb$$

De la sección anterior sabemos que la sucesión (nb) converge a $+\infty$. Luego para $A > 0$ existe N en $\mathbb{N}$ tal que

$$nb > A \qquad (\forall\, n > N)$$

entonces

$$a^n > A \qquad (\forall\, n > N)$$

o sea que la sucesión (a^n) converge a $+\infty$ cuando $a > 1$.

Además del resultado obtenido, es muy importante que se obtenga el argumento que se empleó para mostrar que la sucesión a^n converge a $+\infty$, pues es un método bastante común.

Si vamos a mostrar que una sucesión (u_n) converge por ejemplo a $+\infty$, vasta encontrar una sucesión (V_n) que converja a $+\infty$ que converja a $+\infty$ y que verifique que:

$$U_n > V_n \qquad (\forall\, n > N)$$

El lector podrá deducir fácilmente un método análogo para el caso en que u_n convergente a $-\infty$.

Volviendo al estudio de (a^n) es obvio que si $a < -1$ la sucesión a^n es una sucesión alternada y no es convergente.

Supongamos ahora que $|a| < 1$; existen entonces a' tal que

$$A = \frac{1}{a'} \qquad \text{con } |a'| > 1 \quad a \neq 0$$

Como

$$a^n = \frac{1}{(a')^n}$$

Entonces $\lim a^n = 0$, pues para $\varepsilon > 0$ se tiene que:

$$|a^n - 0| = |a^n| < \varepsilon \Longleftrightarrow |a'^n| > \frac{1}{\varepsilon}$$

pero del estudio anterior sabemos que $\lim |a'|^n = +\infty$ de donde existe N en $\mathbb{N}$ tal que

$$(n > N) \Longrightarrow (|a'|^n > \frac{1}{\varepsilon}) \Longleftrightarrow |a^n| < \varepsilon$$

o sea si y sólo si $\lim a^n = 0$.

En conclusión obtenemos el siguiente resultado:

Si $|a| < 1$ entonces $\lim a^n = 0$

Si $a > 1$ entonces $\lim a^n = +\infty$

Si $a = 1$ (a^n) es constante y por lo tanto convergente a 1.

Si $a \leq -1$ la sucesión a^n no es convergente

Límite de una sucesión geométrica

Considerese una sucesión geométrica u_n definida por:

$$u_n = q^n u_0 \qquad \text{con } u_0 \text{ y } q \text{ en } \mathbb{R}$$

Del estudio de la sucesión (a^n) hecho anteriormente se puede concluir inmediatamente que:

1) Si $u_0 = 0$ entonces (u_n) converge a 0.

2) Si $|q| < 1$ entonces (u_n) converge a cero.

3) Si $q = 1$ entonces (u_n) converge a u_0.

4) Si $q \leq 1$ entonces (u_n) converge a $+\infty$ si $u_0 > 0$ o converge a $-\infty$ si $u_0 < 0$.

5) Si $q \leq 1$ entonces (u_n) no es convergente.

Considérece ahora la sucesión (S_n) definida por:

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$$

donde (u_n) es una sucesión geométrica. Sabemos de la subsección II que:

$$S_n = \frac{a(1-q^{n+1})}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \left(\frac{aq}{1-q}\right) q^n$$

Ahora, si consideramos la sucesión geométrica (u_n) definida por:

$$u_0 = -\left(\frac{aq}{1-q}\right)$$

$$u_n = q^n u_0$$

Se obtiene que:

1) (S_n) converge a $\dfrac{a}{1-q}$ si y sólo si $|q| < 1$.

2) (S_n) converge a $+\infty$ o a $-\infty$ dependiendo del signo de $\dfrac{aq}{1-q}$.

3) (S_n) no es convergente si $q \leq -1$ o $q = 1$.

3.5 Subsucesiones

Definición 3.9

Sea $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ una sucesión de números reales y sea $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ una aplicación estrictamente creciente; se le llama de f determinado por g al la sucesión $f \circ g$. Si denotamos por (u_n) a la sucesión, denotaremos entonces por $(u_{n\,k})$ la subsucesión $f \circ g$, donde $g(k) = n_k$ y $f(n_k) = u_{n_k}$.

Lema 3.5 Sea f una aplicación de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ estrictamente creciente. Entonces:

$$f(n) \geq n \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N})$$

Demostración

Consideremos el conjunto U definido por

$$U = \{n \in \mathbb{N} / n > f(n)\}$$

Y supongamos que U no es vacío, luego existe u_0 en $\mathbb{N}$ y u_0 en U tal que

$$u_0 \leq u \qquad (\forall\, n \in U)$$

Como u_0 está en U se tiene que:

$$u_0 > f(u_0)$$

Y por ser f estrictamente creciente

$$f(u_0) > f(f(u_0))$$

o sea que $f(u_0)$ está en U pero $f(u_0) < u_0$; siendo u_0 el menor elemento de U se tiene una contradicción.

Por tanto, el conjunto U es vacío, es decir

$$f(n) \geq n \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N})$$

Teorema 3.12

Si (u_n) es una sucesión convergente, entonces toda subsucesión converge al mismo límite de (u_n).

Demostración

Supongamos que $\lim U_n = \ell$ y sea $(u_{n\,k})$ una subsucesión de (u_n) (para ser precisos, $u_{n_k} = (f \circ g)(k) = f(g(k)) = f(n_k)$).

Como (u_n) converge a ℓ se tiene que dado $\varepsilon > 0$ existe K en $\mathbb{N}$ tal que

$$|u_k - \ell| < \varepsilon \qquad (\forall\, k \geq K)$$

Por el lema anterior sabemos que:

$$g(k) = n_k \geq k \qquad (\forall\, k \in \mathbb{N})$$

Y en particular se cumple que

$$N_k > K$$

por tanto

$$|u_{n_k} - \ell| < \varepsilon \qquad (\forall\, n_k > N_k)$$

de donde (u_{n_k}) converge a ℓ.

El recíproco de este teorema es también cierto. Es decir, si toda subsucesión de una sucesión U_n converge a ℓ entonces u_n converge a ℓ; para demostrarlo se da´ra el siguiente resultado.

Lema 3.6 Sean (u_n) una sucesión de números reales. entonces si las subsucesiones (u_{2n}) y (u_{2n+1}) convergen a un mismo límite ℓ entonces U_n converge a ℓ.

Demostración

Sea (u_n) una sucesión con la hipótesis del teorema, entonces como (u_{2n}) y (u_{2n+1}) convergen a ℓ, dado $\varepsilon > 0$ existen N' y N'' en $\mathbb{N}$ tales que

$$\begin{array}{rcll} |u_{2n} - \ell| & < & \varepsilon & (\forall\, 2n \geq 2N') \\ |U_{2n+1} - \ell| & < & \varepsilon & (\forall\, 2n+1 \geq 2N''+1) \end{array}$$

Luego tomando $N = \text{máx}\,(2N', 2N'')$ se tiene que:

$$|u_n - \ell| < \varepsilon$$

O sea (U_n) converge hacia ℓ.

Nótese que si la subsucesión converge no implica que la sucesión converge. Un caso típico es la sucesión (-1^n) que no converge; si embargo, la subsucesión (-1^{2n}) converge a 1.

A pesar de eso si sabemos por algún método que (u_n) es una sucesión convergente podemos averiguar su límite calculando el límite de alguna subsucesión que sea más fácil de computar.

El siguiente teorema es uno de los teorema fundamentales del análisis y se debe a Bernardo Bolzano. Su importancia no es esencialmente en este capítulo de sucesiones sino en el capítulos posteriores.

Teorema 3.13

Si (u_n) es una sucesión de números reales acotada, entonces (u_n) posee una subsucesión convergente.

Demostración

Como (u_n) es una sucesión de números reales acotada, existe K en $\mathbb{R}$ tal que

$$-K < u_n < K \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N})$$

Considere el conjunto $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, si este conjunto es finito, entonces debe existir al menos un valor repetido infinitas veces y por tanto considérese la subsucesión constante con ese valor. Si ese conjunto es infinito, entonces denotamos

$$I_0 = [-K, K]$$

Como existen infinitos valores distintos en I_0 debe existir al menos uno de los intervalos $I_1' = [-K, 0]$ y $I_1'' = [0, K]$ un número infinito de términos de la sucesión; a este llámese I_1 (para mayor claridad supongamos sin pérdida de generalidad que es I_1'').

Considérese ahora los intervalos $I_2' = \left[0, \dfrac{K}{2}\right]$ y $I_2'' = \left[\dfrac{K}{2}, K\right]$ debe entonces existir al menos uno de los dos intervalos un número infinito de términos de la sucesión, a ese llámese I_2, repitiendo este razonamiento repetidas veces se obtiene una familia de intervalos los cuales cumplen las siguientes propiedades:

1) $I_{n+1} \subset I_n \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N})$

2) $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+_*)\quad (\exists\, N \in \mathbb{N}),\ \ b_N - a_N < \varepsilon$

Por lo tanto, existe un único $x \in [b_N, a_N]$ tal que

$$x = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$$

Escójase ahora, aprovechando que cada intervalo tiene un número infinito de términos de la sucesión, la subsucesión con las siguientes propiedades:

1) $U_{n_i} \in I_i \qquad (\forall\, i \in \mathbb{N})$

2) $U_{n_i} \neq U_{n_j} \qquad (\forall\, j \in \mathbb{N})(\forall\imath \in \mathbb{N})$

3) $n_i \geq n_{i+1} \qquad (\forall\, i \in \mathbb{N})$

Resulta que (U_{n_k}) converge a X pues

$$0 \leq |U_{n_i} - X| \leq \frac{K}{j^{n_{i-1}}}$$

Y como n_k es creciente $\dfrac{K}{j^{n_{i-1}}}$ tiende a cero; o por el teorema 3.4 $(|U_{n_i}|)$ también converge a 0 por lo tanto (U_{n_k}) converge a X, con lo que queda demostrado el teorema.

3.5.1 Sucesiones de Cauchy

Las sucesiones de Cauchy las presentamos en este curso como una herramienta más para mostrar que una sucesión converge. Este hecho se debe a las “bonitas” propiedades de $\mathbb{R}$.

Definición 3.10

Sea (U_n) una sucesión de números reales, decimos que (U_n) es de Cauchy si dado $\varepsilon > 0$ en $\mathbb{R}$ existe N en $\mathbb{N}$ tal que

$$|U_n - U_m| < \varepsilon \qquad (\forall\, n, m > N)$$

El siguiente teorema es para hacer una relación entre el conjunto B de las sucesiones acotadas y el conjunto C de las sucesiones de Cauchy.

Teorema 3.14

Sea (U_n) un sucesión de números reales de Cauchy, entonces (U_n) es acotada.

Demostración

Sea U_n una sucesión de Cauchy y sea $\varepsilon > 0$ arbitrario en $\mathbb{R}$.

Existe N en $\mathbb{N}$ tal que

$$|U_m - U_n| < \varepsilon \qquad (\forall\, m > N)$$

de donde

$$-\varepsilon + U_n < U_m < U_n + \varepsilon \qquad (\forall\, m > N)$$

Consideremos $K = \text{máx}\,(|U_0|, |U_1|, \ldots, |U_{N-1}|, K')$ se obtiene que:

$$|U_n| < K \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N})$$

Estudiaremos a continuación las operaciones en el conjunto C.

Teorema 3.15

Sean (U_n) y (V_n) dos sucesiones de Cauchy de números reales y λ un número real arbitrario entonces las sucesiones

1) $(U_n + V_n)$

2) $U_n\, V_n$

3) $\lambda(U_n)$

son de Cauchy.

Demostración

Mostremos primero que $(U_n + V_n)$ es de Cauchy.

Como (U_n) y (V_n) son de Cauchy, se tiene que dado $\varepsilon > 0$ existen N' y N'' en $\mathbb{N}$ tales que

$$|U_n - U_m| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (\forall\, n, m \geq N')$$

$$|V_n - V_m| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (\forall\, n, m \geq N'')$$

Como

$$|(U_n + V_n) - (U_m - V_m)| \leq |U_n - U_m| + |V_n - V_m|$$

Y considerando $N = \text{máx}\,(N', N'')$ se obtiene que

$$|(U_n + V_n) - (U_m + V_m)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

de donde $(U_n + V_n)$ es de Cauchy.

Mostremos ahora que $(U_n \cdot V_n)$ es de Cauchy. Como (U_n) y V_n son de Cauchy por el teorema anterior son acotadas, o sea existen K' y K'' en $\mathbb{R}$ tales que

$$|U_n| < K' \quad \wedge \quad |V_n| < k'' \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N})$$

Sabemos además que dado $\varepsilon > 0$ existen N' y N'' en $\mathbb{N}$ tales que

$$|U_n - U_m| < \frac{\varepsilon}{2K''} \qquad (\forall\, n, m \geq N') \tag{3.21}$$

$$|V_n - V_m| < \frac{\varepsilon}{2K'} \qquad (\forall\, n, m \geq N'') \tag{3.22}$$

De las desigualdades

$$\begin{aligned}
|U_n\, V_n - U_m\, V_m| &= |U_n\,(V_n - V_m) + V_m\,(U_n - U_m)| \\
&\leq |U_n|\,|V_n - V_m| + |V_m|\,|U_n - U_m| \\
&\leq K'\,|V_n - V_m| + K''\,|U_n - U_m|
\end{aligned}$$

Y de 3.21 y 3.22 obtenemos que

$$|U_n\, V_n - U_m\, V_m| < \frac{K'\,\varepsilon}{2K'} + \frac{K''\,\varepsilon}{2K''} = \varepsilon$$

o sea $(U_n\, V_n)$ es de Cauchy.

Del teorema anterior se puede verificar fácilmente que el conjunto C de todas las sucesiones de Cauchy es un anillo conmutativo co identidad, El siguiente teorema es uno de los teoremas fundamentales del análisis.

Teorema 3.16

Toda sucesión de números reales (U_n) es de Cauchy si y solamente si es convergente a un número real.

Demostración

Supóngase primero que (U_n) converge a ℓ, luego dado $\varepsilon > 0$ existe N en $\mathbb{N}$ tal que

$$|U_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (\forall\, n \geq N) \tag{3.23}$$

Como

$$|U_n - U_m| = |U_n - \ell + \ell - U_m| \leq |U_n - \ell| + |U_m - \ell|$$

Podemos concluir de 3.23 que:

$$|U_n - U_m| < \varepsilon \qquad (\forall\, n, m \geq N)$$

o sea que U_n es de Cauchy.

Supongamos ahora que (U_n) es de Cauchy y sea $\varepsilon > 0$.

Existe N' en $\mathbb{N}$ tal que

$$|U_m - U_n| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (\forall\, m, n \geq N')$$

En particular

$$U_{N'} - \frac{\varepsilon}{2} < U_m < \frac{\varepsilon}{2} + U_{N'} \qquad (\forall\, n \geq N')$$

o considérese los siguientes conjuntos:

$L = \{y \in \mathbb{R}$ tal que $y < U_n$ para un número infinito de $U_n\}$

$R = \{y \in \mathbb{R}$ tal que $y > U_n$ para un número infinito de $U_n\}$

Obsérvese que $L \neq \emptyset$ pues $U_{N'} - \frac{\varepsilon}{2}$ está en L y como $U_{N'} + \frac{\varepsilon}{2}$ pertenece a R se tiene que $R \neq \emptyset$, además, que existe X en $\mathbb{R}$ tal que

$$X = \sup\ L = \text{ínf}\ R$$

Existen infinito número de U_n en el intervalo $\left]X - \frac{\varepsilon}{2}\,,\ X + \frac{\varepsilon}{2}\right[$, y si N'' es el menor natural tal que $U_{N''}$ está en el intervalo anterior y poniendo $N = [\text{máx}\ (N', N'')]$ se tiene que:

$$\left(|X - U_n| \leq |X - U_m| + |U_n - U_m|) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\right) \qquad (\forall\, n, m \geq N)$$

De donde concluimos que (U_n) converge a X.

Obsérvese que este sería un método para averiguar si una sucesión es convergente o no, de serlo, tendremos que calcular su límite por otro método.

Ejemplo 3.2

Por ejemplo, consideremos la sucesión $x_1 = 1,\ \ x_2 = 2$ para $n \geq 2$.

$$X_n = \frac{X_{n-2} + X_{n-1}}{2}$$

Nótese que $|X_n - X_{n-1}| = \dfrac{1}{2^{n-1}}$ $(\forall\, n \geq 1)$ por lo que, para $m > n$ se tienen que

$$|X_n - X_m| \leq |X_n - X_{n+1}| + |X_{n+1} - X_{n+2}| + \ldots + |X_{m-1} - X_m| = \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \ldots + \frac{1}{2^{m-2}} = \frac{1}{2^{m-2}} - \frac{1}{2^{m-2}}$$

Y fácilmente se verifica que la sucesión $(\frac{1}{2^{n-2}})$ converge a 0, por lo que es de Cauchy. Por lo tanto, dada $\varepsilon > 0$ existe N en $\mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{2^{n-2}} - \frac{1}{2^{n-2}} < \varepsilon \qquad \text{para} \qquad m > n \geq N$$

O sea que

$$|X_n - X_m| < \varepsilon \qquad \text{para} \qquad m > n \geq N$$

De donde (X_n) es de Cauchy y por lo tanto convergente.

Un espacio vectorial que cumple que toda sucesión de Cauchy es convergente, se llama espacio vectorial completo. La completitud es una propiedad que no gozan todos los espacios, por ejemplo $\mathbb{Q}$ no es completo, y por tanto el "método" anterior para estudiar la convergencia es efectivo en el espacio $\mathbb{R}$ (no en todos los espacios).

Ejemplo 3.3

Consideremos la sucesión (U_n) en la cual

$$U_n \neq U_{n-i} \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

Con U_n en $\mathbb{Q}$ y en el intervalo $\left]\sqrt{2} - \frac{1}{n}\ ,\ \sqrt{2} + \frac{1}{n}\right[$.

Dado $\varepsilon > 0$ existe N en $\mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \varepsilon$ y por la definición de (U_n) se tiene

$$|U_n - U_m| < \frac{1}{N} < \varepsilon \qquad (\forall\, n, m \geq N)$$

Por tanto, (U_n) es de Cauchy, y converge a $\sqrt{2}$ que no pertenece a $\mathbb{Q}$.

3.5.2 Ejercicios

1. Designamos por V el conjunto de valores de una sucesión infinita (U_n) de números reales. Determine si V es mayorado o minorado, si existe $\sup V$ o $\inf V$, y si ambos perteneces a V, para las sucesiones definidas por:

a. $U_n = a + b^n \qquad (a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}_+)$

b. $U_n = a + b(-1)^n \qquad (a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}_+)$

c. $U_n = a + \frac{b}{n} \qquad$ (a, b estrictamente positivos)

d. $U_n = a(-1)^n + \frac{b}{n} \qquad$ (a, b estrictamente positivos)

e. $U_n = a + \frac{b}{n}(-1)^n \qquad$ (a, b estrictamente positivos)

2.

a. Hallar tres términos consecutivos $a,\ b,\ c$ de una sucesión aritmética conociendo $s = a + b + c$ y $p = abc$.

b. Hallar tres términos de una sucesión geométrica conociendo su suma s y su producto p.

3. Encontrar n términos consecutivos de una sucesión aritmética de razón r dada, conociendo la suma s de estos términos n.

4. Sera (U_n) una sucesión geométrica de razón q. Calcular el producto $u_0\, u_1 \ldots u_n$ en función de $u_0,\ q$ y n.

(sugerencia: utilice que $U_k\, U_{n-k}$ es constante para $0 \leq k \leq n$).

5. Sea (U_n) la sucesión geométrica definida por $u_0 = 18$ y $u_3 = \dfrac{2}{3}$. Definimos $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$; hallar el límite de (S_n).

6. Estudie la convergencia de (U_n) definida por:

a. $U_n = \dfrac{an^2 + bn + c}{n+1}$ (Discutir para las distintos valores de $a,\ b,\ c$).

b. $U_n = \dfrac{n^2 + \cos(n)}{3(n+1)^2 \sin(5n)}$

c. $U_n = \dfrac{\sqrt{4n^2 + 3n + 1}}{5n - 6}$ $(n \geq 1)$

d.

1. $U_n = \dfrac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}$

2. $U_n = \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$

e. $U_n = 1 - \dfrac{1}{2^n}$

f. $U_n = \sqrt[n]{c}$ con $c > 0$

7.

a. Sea a un número real mayor que 1, y p un entero natural distinto de cero. Supongamos que $a = 1 + b$. Demostrar que:

$$a^n \geq \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{p!}\, b^n \qquad (\forall\, n \geq p)$$

b. Deducir de 1 que:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{a^n}{n^p} = +\infty$$

8. Sea a un número real estrictamente positivo. Demostrar que:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{n!}{a^n} = +\infty$$

9. Estudie las sucesiones definidas para todo entero natural n por:

a. $U_n = \dfrac{2^n + n^{10}}{3^n + n^{100}}$

b. $U_n = \dfrac{25n^3 - 5^n}{n^{1000} + 5^n}$

(Sugerencia: utilice los ejercicios de 7).

10. Estudie las sucesiones definidas para todo entero natural n por:

$$U_n = \frac{(1 + x^n) - 1}{(1 + x)^n + 1}$$

Para los distintos valores de $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$

11. Sean a y b dos números reales. Definimos (U_n) por:

$$\begin{aligned} u_1 &= a + b \\ U_n &= a + b - \frac{ab}{U_{n-1}} \qquad (n > 1) \end{aligned}$$

a. Calcular, cuando $a \neq b$, u_1, u_2, u_3 únicamente en términos de $a - b$, $a^2 - b^3$, $a^3 - b^3$, $a^4 - b^4$ y demostrar que el resultado obtenido es general.

b. Demostrar que (U_n) converge cuando $a \neq b$ y hallar su límite.

c. Resolver 1 y 2 cuando $a = b$.

12. Sean dos sucesiones (U_n) y (V_n) definidas por:

$$\begin{aligned} U_n &= 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!} \\ V_n &= 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n \cdot n!} \end{aligned}$$

a. Demostrar que las dos sucesiones son adyacentes y que su límite común es el número e.

b. Demostrar que para todo $n > 0$, existe un número real único θ_n, que verifica $0 < \theta_n < 1$ tal que

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n \cdot n!}$$

c. Demostrar que e es irracional.

13. Sea a un número real positivo. Considere la sucesión (U_n) definida por $u_0 > 0$ y para $n \geq 1$

$$U_n = \frac{1}{2}\left(U_{n-1} + \frac{a}{U_{n-1}}\right)$$

y la sucesión (V_n) definida por

$$V_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{U_n + \sqrt{a}}$$

a. Calcular $\sqrt{n}$ en función de V_{n-1}. Discutir, según los valores de V_0 la existencia del límite de la sucesión (V_n).

b. Demostrar que la sucesión (U_n) tiene por límite $\sqrt{a}$.

c. Supóngase que $U_n = \sqrt{a}(1 + \varepsilon_n)$. Calcular $\varepsilon_n + 1$.

14. Considérese la sucesión (U_n) definida por:

$$U_0 \text{ en } \mathbb{R} \text{ tal que } 0 \leq U_0 \leq 2$$

Y

$$U_n = \sqrt{2 - U_{n-1}} \qquad (\forall\, n \geq 1)$$

Supóngase que $P_n = U_{2n}$ y $q_n = U_{2n+1}$.

a. Demostrar que la sucesión (U_n) es acotada. Comparar P_n y q_n con 1.

b. Estudie el signo de P_{n+1} y $q_{n+1} - q_n$ (distinguiendo los casos en que $0 \leq u_0 < 1$) y $1 < u_0 \leq 2$.

c. Demuestre que existe un entero P y un real $A > 1$, tal que, para todo $N > P$

$$|U_{n+1} - U_n| < \frac{|U_n - U_{n-1}|}{A}$$

$\left(\text{Recuerde que } \sqrt{a} - \sqrt{b} = \dfrac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}\right)$.

d. Concluir que (U_n) converge, y hallar el límite de (U_n).

15. Sean a, b dos números reales. Considérese la sucesión (x_n) definida por x_0 en $\mathbb{R}$ y para todo $n > 0$ por:

$$x_n = a\,x_{n-1} + b$$

a. Calcular x_n en función de $a,\ b,\ x_0,\ n$.

b. Estudiar la sucesión (x_n), calcular el límite si existe.

16. Volvamos a considerar la sucesión del ejercicio 14, esta vez con $U_0 = 2\sin(x_0) \quad \left(0 \leq x_0 \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$.

a. Demostrar que existe una sucesión única (x_n) de números reales en el intervalo $\left[0\,,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$, tales que para todo n, $U_n = 2\sin(x_n)$.

b. Calcular x_{n+1} en función de x_n, y deducir el límite de (U_n). (Aplique el ejercicio 15).

17. Sea x un número real tal que $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. Considere la sucesión (U_n) definida por $U_0 = \cos(x)$ y para todo $n > 0$ por; $U_n = U_{n-1}\cos\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$.

a. Utilizar la fórmula de $\sin(2a) = 2\sin(a)\cdot\cos(a)$ para calcular (U_n) en términos de n, $\operatorname{sen}(2x)$ y $\sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$.

b. Demostrar que $\dfrac{2^n}{x}\sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$ converge a 1, y discutir el límite de U_n.

18. Considérese dos sucesiones (a_n) y (b_n) definidas por $a_0 = a > 0$, $b_0 = \dfrac{a}{\cos(\alpha)}$ $\left(\text{con } 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$ y para todo $n \geq 1$:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \qquad\qquad b_n = \sqrt{a_{n-1}\cdot b_{n-1}}$$

a. Calcular a_n y b_n en función de a y α (utilizar ejercicio 8).

b. Hallar los límites de las sucesiones (a_n) y (b_n).

19. Considérese las dos sucesiones (a_n) y (b_n) definidas por $a_0 = a > 0$, $b_0 = b > 0$ y para $n \geq 1$ como en el ejemplo 18.

a. Demostrar que para todo $n > 0$,

$$b_n \leq b_{n+1} \leq a_{n+1} \leq a_n$$

b. Demostrar que para todo $n > 0$,

$$a_{n+1} - b_{n+1} \leq \frac{a_n - b_n}{2}$$

c. Deducir que las sucesiones (a_n) y b_n tienen el mismo límite y calcularlo.

20. Considérese la sucesión (U_n) cuyo límite es ℓ, y considérese la sucesión (V_n) definida para todo $n \geq 1$ por:

$$V_n = \frac{U_1 + U_2 + \ldots + U_n}{n}$$

a. Demostrar que $\lim\limits_{n\longrightarrow^+\infty} V_n = \ell$.

Sugerencia: Dado $\alpha > 0$ existe P tal que si $k \geq P$, tenemos que

$$\ell - \alpha \ \leq \ U_k \ \leq \ \ell + \alpha$$

y para todo $n > P$ escribimos

$$V_n = \frac{U_1 + \ldots + U_{p-1}}{n} + \frac{U_p + \ldots + U_n}{n}$$

b. Dar un contraejemplo mostrando que (V_n) puede tener un límite sin que (U_n) converja.

21. Considérese la sucesión (U_n) definida, para todo $n \geq 1$ por

$$U_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$$

Demostrar que (U_n) es convergente y calcular su límite.

$\left(\text{Recuerde que } \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1} \right)$.

22. Demostrar que la sucesión (U_n) definida por:

$$U_n = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{2 \times 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+2)} \qquad (\forall\, n \geq 1)$$

Converge y hallar su límite.

23. Sea $p \geq 1$ un elemento natural. Consideremos la sucesión definida, para todo $n > 0$, por

$$U_n = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \ldots + \frac{1}{n^p}$$

a. Demostrar que (U_n) es creciente.

b. Supóngase que $p = 1$ y demuestre que

$$U_{2n} - U_n \geq \frac{1}{2}$$

y deducir que:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} (1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}) = +\infty$$

Deducir es estudio de la sucesión (V_n) definida para $n > 0$ por:

$$V_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

c. Suponga que $p = 2$ y demuestre que (U_n) está mayorada. Donde

$$U_n = 1 + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n}$$

y utilice el ejercicio 21.

Deduzca que para $p = 2$, la sucesión (U_n) converge.

24. Considérese la sucesión (a_n) definida para todo $n > 0$ por

$$a_n = \sqrt[n]{n}$$

a. Demostrar que, para $n \geq 2$, se tiene que $a_n > 1$ por lo que en este caso diremos que para $n \geq 2$

$$a_n = 1 + b_n$$

Demostrar que

$$(1 + b_n)^n > \frac{n(n-1)}{2} b_n^2$$

b. Hallar el límite de las sucesiones (b_n) y (a_n).

25. Considere la sucesión (U_n) definida para N en $\mathbb{N}$ por

$$U_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

Demostrar que:

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq U_n \leq \frac{2}{\sqrt{n^2+1}}$$

Y deducir que la sucesión (U_n) converge. Hallar su límite.

26. Decimos que una sucesión de Cauchy (x_n) de números reales, es positiva si existe $k > 0$ y N en $\mathbb{N}$ tales que

$$x_n > K \qquad (\forall n \geq N$$

Muestre que si $(x : _n)$ y (y_n) son dos sucesiones de Cauchy de números reales positivas, entonces

$$(x_n) \pm (y_n) \qquad y \qquad (x_n)(y_y)$$

Son también positivas.

27. Sean (x_n), (y_n) sucesiones de Cauchy. Se escribe $(x_n) \geq (y_n)$ si $(x_n) - y_n$ es positiva o si $(x_n) \geq (y_n)$ si $(x_n) - (y_n)$ es positiva o si $(x_n - y_n) \longrightarrow 0$.

a. Muestre que la relación " $\geq$ " es reflexiva y transitiva.

b. Demuestre que dadas dos sucesiones de Cauchy (x_n) y (y_n) se cumple una y solo una de las siguientes proposiciones:

1) (x_n) converge a 0.

2) . (x_n) es positiva.

c. $(-x_n)$ es positiva.

28. Diga si la sucesión (x_n) definida por:

$$x_n = \frac{1}{n+5} \qquad \text{si } n \text{ es par.}$$

$$x_n = \frac{n(n+1)}{n+2} \qquad \text{si } n \text{ es impar.}$$

es convergente o no convergente.

29.

a. Muestre que si $x_0 = 1$ y $x_n = 1 + \dfrac{2}{x_{n-1}}$, entonces (x_n) converge a 2.

Sugerencia:

1. Muestre que $x_n > 0 \qquad (\forall n \in \mathbb{N})$

2. Mostrar que la subsucesión x_{2n} satisface:

$1 \leq x_{2n} < 2$.

(x_{2n}) es creciente.

b. Muestre que si $x_0 = 1$ y $x_n = \dfrac{2x_{n-1} + 3}{4}$ entonces (x_n) converge a 2.

30. Muestre que la sucesión x_n definida por $x_0 = 1$ y $x_n = \dfrac{-2 + x_{n-1}}{x_{n-1}}$ no es convergente.

31. Demuestre que (x_n) con $x_n = \dfrac{1}{x_{n-1}} + \dfrac{x_{n-1}}{2}$ y $x_0 = 1$ converge.

32. Sean (x_n) y y_n dos sucesiones en $\mathbb{R}$. Se define por (z_n) por:

$$z_1 = x_1,\ z_2 = y_1,\ z_3 = x_2,\ z_4 = y_2,\ \ldots,\ z_{2n} = y_n$$
$$z_{2n+1} = x_{n+1}$$

¿Es cierto que (z_n) es convergente si y sólo si (x_n) y (y_n) lo son, y además se cumple que:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = \lim_{n\longrightarrow\infty} y_n\ ?$$

33. Muestre que las siguientes sucesiones son de Cauchy:

a. $\left(\dfrac{1}{n}\right)$

b. $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$

c. $\left(1 + \dfrac{1}{1!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}\right)$

34. Muestre que las siguientes sucesiones no son de Cauchy:

a. $((-1)^n)$

b. $\left(n + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)$

c. (n^2)

35. Diga cuáles de las siguientes sucesiones son de Cauchy:

a. $(1 + (-1)^n)$

b. $\left(\dfrac{1 + (-1)^n}{n}\right)$

c. $\left(n^{(-1)^n}\right)$

36. Muestre que la sucesión U_n definida por

$$U_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i-1}\right)$$

es convergente.

37.

a. Sea (U_n) una sucesión creciente y (V_n) una sucesión decreciente tales que

$$U_n \leq V_n \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N})$$

Demuestre que (U_n) y (V_n) son convergentes.

b. Demuestre que las sucesiones (U_n) y (V_n) definidas por:

$$U_{n+1} = \sqrt{U_n\, V_n} \quad , \quad V_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2}$$

son convergentes, utilizando los resultados anteriores.

Sugerencia:

1) Demuestre que $V_n > 0$ y $U_n > 0$

2) Estudie $V_n^2 - U_n^2$. Pruebe que esa expresión es mayor o igual a cero.

38. Muestre que las siguientes sucesiones son convergentes:

a. $a_n = \dfrac{n}{2^n}$

b. $b_n = \dfrac{1357\ldots(2n-1)}{2468\ldots(2n)}$

39. Sean $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, los primeros términos de la sucesión (a_n) definida para $n > 2$ por:

$$a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2})$$

Es (a_n) una sucesión monótona? Es convergente?

40. Se define (a_n) mediante $a_1 = a$, $a_2 = b$ con a, b fijos en $\mathbb{R}$ y

$$a_n = \frac{1 + a_{n-1}}{a_{n-2}} \qquad (\forall n \leq 3)$$

Estudie la convergencia de (a_n).

41. Sea a_n una sucesión de números que converge a 0, y sea $(\ _n)$ la sucesión de los medios aritméticos (promedio), o sea

$$_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

Muestre que $(\ _n)$ converge a "0".

42. Muestre que si $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} x_n = x$ y además $a_n = \dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$ entonces $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} a_n = x$.

43. Considérese la sucesión (U_n) definida por $U_1 = 2$, $U_2 = 3$ para $n \geq 3$.

$$U_n = U_{n-1} + U_{n-2}$$

a. Pruebe que $U_n^2 - U_{n-1} \cdot U_{n-1} = (-1)^{n+1}$

b. Sea V_n y V_{n+1} y calcules $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} V_n$.

44. Sean $a, b \in \mathbb{R}$; $a > 0$ y $b > 0$ dados. Considérese las sucesiones (a_n) y b_n definidas por:

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{a+b}{2} & a_1 &= \sqrt{a\,b} \\ b_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2} & a_{n+1} &= \sqrt{a_n\,b_n} \quad (\forall\, n \geq 2). \end{aligned}$$

Pruebe que ambas sucesiones tienen el mismo límite.

Sugerencia: Muestre que:

1) $a_n < b_n \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N})$

2) $a_{n+1}\ ,\ b_{n+1} \qquad (\forall n \geq 2)$

3) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} b_n - a_n = 0$

45. Considérese la sucesión $x_0 = 2, \ldots . x_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{x_n^2}$, muestre que:

a. $x_0 < x_n < x_1 \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N})$

b. $x_{n+1}\ ,\ x_{n+2} \qquad x_n\ ,\ x_{n+1} \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N})$

46. Muestre que si (b_n) es acotado y (a_n) converge a 0; entonces $(a_n\, b_n)$ converge a 0.

47. Muestre que la sucesión $a_n = \sqrt{n^2 - n} - n$ es convergente y calcule su límite.

48. Sea (x_n) una sucesión definida por $x_1 = 1$ y $x_{n+1} = \dfrac{1}{2 + x_n}$. Muestre que si M es la raíz positiva de las ecuación $x = \dfrac{1}{2+x}$, entonces

$$x_{n+1} - M < \frac{x_n - M}{4}$$

y calcule el límite de (x_n).

49. Muestre que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(2n)^2}\right) = 0$.

50. Sea (x_n) definida por $x_1 = 0,\;\; x_{n+1} = \frac{x_{n+2}}{x_{n+3}}$.

a. Muestre que $o \geq x_n \geq 2 \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N})$

b. Muestre que si $f(x) = \frac{x+2}{x+3}$, entonces para $0 < x_1 \geq x_2$ se tiene $f(x_1) \leq f(x_2)$, y deduzca que (x_n) es creciente.

c. Concluya que (x_n) es convergente y calcule su límite.

51. Considere la sucesión $u_1 = a,\;\; u_2 = b,\;\; u_n = \frac{u_{n-1} + u_{n-3}}{2}$.

a. Si $V_n = u_n - u_{n-1}$ para $n > 1$, demostrar que:

$$V_n = \frac{-V_{n-1}}{2}$$

b. Demostrar que $u_n = \frac{a+2b}{3} - \frac{2(b-a)}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

c. Calcule el límite de (u_n).

52. Muestre que la sucesión definida por $u_1 = 1$ y $u_{n+1} = \frac{2(2u_n + 1)}{u_n + 3}$ converge y calcule su límite.

53.
a. Pruebe que si una sucesión (u_n) cumple no ser la función constante 0, y $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = L$ y $L < 1$, entonces $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} u_n = 0$.

b. Muestre que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\frac{n}{2^n} = 0$ y $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\frac{2^n}{n!} = 0$.

54. Sea la sucesión (u_n) definida por la relación

$$u_n = \frac{u_{n-1}}{2} + \frac{1}{u_{n-1}}, \quad \text{tal que } \ u_0 > 0 \quad \text{y} \quad u_0 \neq \sqrt{2}$$

a. Muestre que a partir de a_1 esta sucesión es decreciente y acotada inferiormente por $\sqrt{2}$.

b. Mostrar que existe un número positivo a tal que

$$\frac{u_n - a}{u_n + a} = \left(\frac{u_{n-1} + a}{u_{n-1} + a}\right)^2$$

c. Deducir el valor de u_n en función de n y del número $b = \dfrac{u_0 - a}{u_0 + a}$ y calcule $\lim_{n \longrightarrow \infty} u_n$.

55. Muestre que (a_n) es de Cauchy *sii* $\forall\, \varepsilon > 0$ existe N en $\mathbb{N}$ tal que para $n \geq N$ y para todo p en $\mathbb{N}$:

$$\left|a_{n+p} - a_n\right| < \varepsilon$$

56.

a. Muestre que si (u_n) es una sucesión tal que $|u_{n+1} - u_n| \leq \dfrac{M}{2^n}$, entonces (a_n) es de Cauchy.

b. Sea (a_n) tal que

$$a_n \leq 2, \quad a_{n+2} + a_{2n-1} \leq \frac{1}{8}\left(a_{n+1}^2 - a_n^2\right)$$

Muestre que (a_n) es convergente.

57. Sea a_1, $a_2 = 8$, $a_{2n+1} = \dfrac{1}{2}(a_{2n} + a_{2n-1})$ y $a_{2(n+1)} = \dfrac{a_{2n}\ a_{2n-1}}{a_{2n+1}}$. Muestre que (a_n) es convergente y calcule si límite.

58. Sea $a_1 = \dfrac{-3}{6}$, $3\,a_{n+1} = 2 + a_n^2$. Muestre que (a_n) converge a 1 .

59. Considérese una sucesión (u_n) definida por $u_0 = 0$ y $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$. Mostrar que:

a. $o \leq u_n < 2 \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N})$

b. $0 - u_{n+1} < \dfrac{2 - u_n}{2} \qquad (\forall\, n?2in\mathbb{N})$

c. (u_n) converge a 2.

60. Sea (u_n) una sucesión tal que, para $n \geq 2$:

$$(n+1)^2 u_{n+1} - (n-1)^2 u_n + n = 0$$

a. Muestre que existe un número real k tal que, si suponemos que $v_n = u_n$, para $n \geq 2$

$$(n+1)^2 v_{n+1} - (n-1)^2 v_n = 0$$

b. Mostrar que:

$$v_n = \frac{4v_2}{n^2(n-1)^2} \qquad (\forall n \in \mathbb{N})$$

c. Hallar el límite de la sucesión (u_n).

61. Sean α y β dos números complejos distintos de cero. Consideremos el conjunto S de sucesiones (u_v) de números complejos tales que:

$$u_{n+2} = (\alpha + \beta)\, u_{n+1} - \alpha\, \beta u_n \qquad (\forall n \in \mathbb{N})$$

a. Demostrar que S es un espacio vectorial del espacio vectorial C de todas las sucesiones complejas.

b. Considérese la aplicación de S en $\mathbb{C}^2$ que a toda sucesión (u_n) de S le hace corresponder el elemento $(u_0\ ,\ u_1)$ de $\mathbb{C}^2$. Muestre que la aplicación es un isomorfismo de S sobre $\mathbb{C}^2$.

c. Muestre que existe una única sucesión s_n de S tal que $s_0 = 1$ y $s_1 = 0$, y una única sucesión (t_n) de S tal que $t_0 = 0$ y $t_1 = 1$. Muestre que el conjunto (s_n), t_n es una base de S.

d. Determinar todas las sucesiones del tipo $u_n = e^n$ que pertenecen a S, con e en $\mathbb{C}$.

e. Mostrar que $\alpha \neq \beta$ si las sucesiones $(\alpha)^n$ y (β^n) forman una base de S.

f. Muestre que si $\alpha = \beta$, la sucesión $(n\alpha^n)$ pertenece a S y que las sucesiones (α^n) y $n\alpha^n$ forman una base de S.

62.

a. Sean x' y y' valores aproximados para π y e respectivamente. Si $x' = 3,141$ y $y' = 2,718$, encontrar un encuadramiento para $\pi + e$.

b. Hacer lo mismo que en 1 si:

$$x' = 3,141 \qquad\qquad y' = 2,71828$$

c. Deducir los cálculos anteriores que si tenemos una incertidumbre γ para $x + y$, puede ser ventajoso tomar x y y con la misma incertidumbre $\gamma 2$.

d. Supongamos que el valor aproximado para π es $3,141$ para $\sqrt{2}$ es $1,414$ y para $\sqrt{3}$, $1,732$.

Dar encuadramiento de:

$$\frac{\pi\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

Capítulo 4

Límites de Funciones y Funciones Continuas

4.1 Definición de límite de una función

Recordemos que la idea intuitiva del límite de una sucesión es que podemos lograr una aproximación a un cierto valor con la exactitud que se desee por medio de términos de una sucesión, cuando n es suficientemente grande.

Por otro lado recordemos que una sucesión no es más que una función de $\mathbb{N}$ (o un subconjunto de éste) en un conjunto, que para fijar ideas, digamos que es $\mathbb{R}$.

En este capitulo trataremos de generalizar este concepto de convergencia, a funciones más generales, es decir cuyo dominio sea un subconjunto de $\mathbb{R}$ y no de $\mathbb{N}$, como en el caso de las sucesiones. Claro está, que necesitaremos ciertas nociones y 8un vocabulario apropiado para lograr tal efecto, sin embargo, la idea intuitiva que viene encerrada en el concepto de límite de una función será la misma que en el concepto de límite de una sucesión.

La idea será nuevamente aproximar un cierto valor A por medio de los valores que toma f en un cierto punto x, lo suficientemente cerca a un punto p fijo. En otras palabras, el concepto enmarcado es que $f(x)$ esté tan proximo como queramos a un cierto valor A, para x suficientemente cercano a un punto p fijo.

Está idea intuitiva estará implícitamente en la expresión:

$$\lim_{x \longrightarrow p} f(x) = A$$

la cual se lee " límite de f cuando x tiende a p", o se dirá simplemente que " $f(x)$ tiende a A cuando x tiende a p".

Antes de revisar esta idea intuitiva, ampliemos el vocabulario.

Un vecindario al rededor de un cierto punto p es un intervalo abierto que contenga a p en su interior; en la práctica se facilita mucho el trabajo si trabajamos con cierto tipo de vecindarios alrededor de p, los cuales serán aquellos que tengan a p como punto medio, es decir, aquellos intervalos abiertos que están formados por los números reales x que satisfagan la desigualdad.

$$p - r < x < p + r$$

o lo que es equivalente

$$|x - p| < r$$

donde r es un número real estrictamente positivo.

Por la razón anterior, cuando hablamos de vecindario alrededor de p, debe entenderse que se trata de un vecindario simétrico con respecta a p (*ie* un intervalo que contenga a p como punto medio).

Definición 4.1

Sea f una función real definida en un intervalo que contenga a p (no necesariamente definida en p) decimos que:

$$\lim_{x \longrightarrow p} f(x) = A$$

Si dado un vecindario alrededor de A, digamos $N(A)$, existe $N(p)$ un vecindario alrededor de p tal que $f(x)$ está en $N(A)$ cuando x está en $N(p)$ y $x \neq p$.

El concepto de límite se puede sintetizar diciendo que f tiende a A cuando x tiende a p, si se satisface la siguiente expresión:

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \quad \text{tal que si} \quad |x - p| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon$$

expresión que, como habrá notado el lector, es exactamente la definición de límite de esa función, usando otra terminología.

En la practica será conveniente, algunas veces, hacer un cambio de variable para calcular un límite, es decir, sustituir $x - p$ por h pues como podrá fácilmente demostrar el lector, las expresiones:

$$\lim_{x \longrightarrow p} f(x) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{h \longrightarrow 0} f(p + h) = A$$

son equivalente.

Los conceptos de límites de funciones y límite de un sucesión posee una relación más profunda que la relación que tiene en el plano intuitivo. En cierto sentido, am<bas definiciones son iguales, como notará el lector al través de este capítulo.

Parte de esta afirmación se pone de manifiesto en el siguiente teorema.

Teorema 4.1

Sea S una función definida en un intervalo abierto que contiene a p (excepto quizá en p mismo) tal que:

$$\lim_{x \longrightarrow p} f(x) = \ell \tag{4.1}$$

Supongamos que (a_n) es una sucesión que satisface:

1) Cada a_n pertenece al dominio de f.

2) C4Item2 $a_n \neq p$ para todo n en $\mathbb{N}$.

3) C4Item3 (a_n) converge a p

Entonces la sucesión $(f(a_n))$ converge a (ℓ).

Recíprocamente, si esto se cumple para toda sucesión a_n que satisface las condiciones 1), **??**, **??**, **??**, entonces se satisface 4.1.

Demostración

Supongamos primero que:

$$\lim_{x \longrightarrow p} f(x) = \ell$$

Entonces, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon \qquad\qquad 0 < |x - p| < \delta$$

ahora, como (a_n) converge a p, existe N en $\mathbb{N}$ tal que

$$|a_n - p| < \delta \qquad (\forall n \geq N)$$

por nuestra elección de δ, esto significa que

$$|f(a_n) - \ell| < \varepsilon$$

lo cual demuestra que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} f(a_n) = \ell$$

Recíprocamente, supongamos que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} f(a_n) = \ell$ para todo sucesión que satisfaga 1), **??**, **??**.

Supongamos, por contradicción que f no tiende a ℓ cuando x tiende a p, luego existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe x que satisface

$$0 < |x - p| < \delta \qquad \text{pero} \qquad |f(x) - \ell| > \varepsilon$$

En particular para todo n existe algún x_n tal que

$$0 < |x_n - p| < \frac{1}{n} \qquad \text{pero} \qquad |f(x_n) - \ell| > \varepsilon$$

pero esta sucesión converge a p y sin embargo, $(f(x_n))$ no converge a ℓ, lo cual contradice la hipótesis y por lo tanto:

$$\lim_{x\longrightarrow p} f(x) = \ell$$

Observemos que de acuerdo al teorema anterior, podemos obtener el concepto de límite de una función a partir del concepto de convergencia de sucesiones, lo cual hace suponer cierta relación a cerca de la equivalencia de estos conceptos.

4.2 Teoremas básicos sobre límites de funciones

Trataremos, seguidamente, las propiedades fundamentales de los límites de funciones, que nos será muy útiles para las funciones continuas y los capítulos posteriores.

Comenzamos quizás, con la propiedad más útil e importante de los límites de funciones, que consiste en la unicidad del límite, pues sin esta propiedad todo el estudio que aquí hacemos sería obsoleto.

Teorema 4.2

Si f posee un límite cuando x tiende a p, éste es único.

Demostración

Supongamos por contradicción que f posee dos límites, ℓ y ℓ', cuando x tiende a p; luego dado $\varepsilon > 0$ existen δ_1 y δ_2 tales que

$$|f(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (0 < |x - p| < \delta_1) \tag{4.2}$$

y

$$|f(x) - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (0 < |x - p| < \delta_2) \tag{4.3}$$

Como

$$|\ell - \ell'| = |f(x) - \ell' - f(x) + \ell| = |f(x) - \ell| + |f(x) - \ell'|$$

observemos entonces, de 4.2 y 4.3 que:

$$|\ell - \ell'| < \varepsilon$$

O sea que $\ell = \ell'$ (Ver ejercicio 1.10 del capitulo II).

Una vez con esta propiedad, estudiaremos las operaciones de las funciones con los límites, lo cual nos será de mucha utilidad para facilitar cálculos fastidiosos sobre límites, y reducirlos a varios cálculos relativamente más sencillos, o tal vez, conocidos para el lector.

Teorema 4.3

Sean f y g dos funciones reales tales que:

$$\lim_{x \longrightarrow p} f(x) = A \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \longrightarrow p} g(x) = B$$

y sea λ un número real, entonces:

1) $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow p} f(x) + g(x) \;=\; A + B$

2) $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow p} (\lambda f(x)) \;=\; \lambda \cdot A$

3) $\lim_{x \longrightarrow p} \;(f(x)\; g(x)) \;=\; A \cdot B$

4) $\lim_{x \longrightarrow p} \;\dfrac{1}{g(x)} \;=\; \dfrac{1}{B} \qquad \text{si } B \neq 0$

Demostración

Sean f y g dos funciones cuyos respectivos límites son A y B cuando x tiende a p. Entonces dado $\varepsilon > 0$ existen δ_1 y δ_2 en $\mathbb{R}$ tales que

$$|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{cuando} \quad 0 < |x - p| < \delta_1 \tag{4.4}$$

$$|g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{cuando} \quad 0 < |x - p| < \delta_2 \tag{4.5}$$

De las siguientes desigualdades obtenemos, de 4.4 y 4.5 que:

$$|f(x) + g(x) - (A + B)| \leq |f(x) - A| + |g(x) - b| < \varepsilon$$

cuando $0 < |x - p| < \delta$ con $\delta = \text{mín}\,(\delta_1 \;,\; \delta_2)$ por lo que podemos concluir que:

$$\lim_{x \longrightarrow p} \; f(x) + g(x) \;=\; A + B$$

y con ello queda demostrada la proposición *1.* .

Estudiemos ahora la propiedad *2.* . Para evitar casos triviales supongamos que $\lambda \neq 0$, entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (0 < |x - p| < \delta)$$

además de la siguiente desigualdad

$$|\lambda f(x) - \lambda A| = \lambda |f(x) - A| < \varepsilon \qquad (0 < |x - p| < \delta)$$

obtenemos el resultado buscado.

Para demostrar *3.* el lector podrá verificar fácilmente, a partir de la definición de límite de una función, que las proposiciones:

$$\lim_{x\longrightarrow p} f(x) = A \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\longrightarrow p} f(x) - A = 0$$

son equivalentes.

Consideremos ahora la desigualdad

$$f(x)\,g(x) - AB \;=\; f(x)\,[\,g(x) - B] + B\,[f(x) - A]$$

Debemos demostrar que

$$\lim_{x\longrightarrow p} f(x)\,g(x) - AB \;=\; \lim_{x\longrightarrow p} [f(x)\,[\,g(x) - B] + B\,[f(x) - A]\,] = 0$$

De la parte *1.* sabemos que:

$$\lim_{x\longrightarrow p} f(x)\,g(x) - AB = \lim_{x\longrightarrow p} f(x)\,[g(x) - A] + \lim_{x\longrightarrow p} B\,[f(x) - A]$$

de la parte *2.* sabemos que:

$$\lim_{x\longrightarrow p} B\,[f(x) - A] \;=\; 0$$

o sea basta mostrar que:

$$\lim_{x\longrightarrow p} f(x)\;[g(x) - A] \;=\; 0$$

En otras palabras, para demostrar *3.* únicamente es necesario verificar que *3.* es cierta cuando una función tiende a 0, por límite cuando x tiende a p y la otra tiene por límite un número real cualquiera; para eso, supongamos que:

$$\lim_{x\longrightarrow p} f(x) = A \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\longrightarrow p\; h(x)} = 0$$

Como $f(x) \longrightarrow A$ cuando $x \longrightarrow p$, entonces existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$|f(x) - A| < 1 \qquad (0 < |x - p| < \delta_1)$$

Además

$$|f(x)| = |f(x) - A + A| \leq |f(x) - A| + |A| < 1 + |A| \qquad (0 < |x-p| < \delta_1) \tag{4.6}$$

Por otro lado, como $\lim\limits_{x \longrightarrow p} h(x) = 0$, entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$|h(x)| < \frac{\varepsilon}{1+|A|} \qquad (0 < |x-p| < \delta_2) \tag{4.7}$$

luego, por 4.6 y 4.7

$$|f(x)\,h(x)| \;=\; |f(x)|\,|h(x)| < (1+|A|)\,|h(x)| < \varepsilon \qquad (0 < |x-p| < \delta)$$

donde $\delta = \text{mín}\,(\delta_1\;,\;\delta_2)$ con lo que queda demostrada la proposición *3.*.

En cuanto a la proposición *4.*, con $B \neq 4$ existe ε' en $\mathbb{R}^+_*$ tal que

$$0 < \varepsilon' < |B|$$

además existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$|\,|g(x)| - |B|\,| < |g(x) - B| < \varepsilon' \qquad (0 < |x-p| < \delta_1)$$

de donde obtenemos que

$$-\,\varepsilon' + |B| < |g(x)| \tag{4.8}$$

Ahora par todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$|g(x) - B| > K\varepsilon \qquad (0 < |x-p| < \delta_2) \tag{4.9}$$

donde $K = |B|\,(-\varepsilon' + |B|)$.

Finalmente, de la igualdad

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| = \frac{|g(x) - B|}{|B\,g(x)|}$$

obtenemos de 4.8 y de 4.9

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| < \frac{|g(x) - B|}{K} < \varepsilon \qquad (0 < |x - p| < \delta)$$

con $\delta = \text{mín}\,(\delta_1\ ,\ \delta_2)$, quedando así demostrado *4.*.

Observemos que de *3.* y *4.* podemos concluir inmediatamente que:

$$\lim_{x \longrightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \qquad \text{si} \qquad B \neq 0$$

Hasta el momento para mostrar que un número es el límite de una función, debemos recurrir a la definición misma de límite. En la práctica, algunas veces la escogencia del " δ " se complica demasiado, por lo que nos vemos obligado a métodos en los cuales no sea necesario trabajar directamente con la definición misma del límite de una función.

El siguiente teorema resuelve, en parte, esta situación.

Teorema 4.4

Supongamos que $f,\ g,\ h$ son tres funciones reales tales que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo $x \neq p$ en algún vecindario de p, supongamos además que.

$$\lim_{x \longrightarrow p} f(x) = \lim_{x \longrightarrow p} h(x) = A$$

Entonces

$$\lim_{x \longrightarrow p} g(x) = A$$

Demostración

Consideremos las funciones $G(x) = g(x) - f(x)$ y $H(x) = h(x) - f(x)$ de la desigualdad $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ se obtiene que:

$$0 \leq G(x) \leq H(x) \tag{4.10}$$

Como sabemos que

$$\lim_{x \longrightarrow p} f(x) = \lim_{x \longrightarrow p} h(x)$$

entonces $H(x) \longrightarrow 0$ cuando $x \longrightarrow p$, luego si mostramos que $G(x)$ tiende a "0", habremos demostrado el teorema.

Para ello, dado que $H(x)$ tiende a "0" cuando x tiende a p, para cualquier real positivo ε existe $\delta > 0$ tal que

$$|H(x)| < \varepsilon \qquad (0 < |x - p| < \delta)$$

Obtenemos así de 4.10 que:

$$|G(x)| \leq H(x) < \varepsilon \qquad (0 < |x - p| < \delta)$$

Por tanto G tiende a "0" cuando x se aproxima a p, o sea

$$\lim_{x \longrightarrow p} g(x) = A$$

con lo que queda demostrado el teorema.

Antes de empezar a estudiar los límites al infinito y límites infinitos, estudiaremos un par de conceptos que nos permitirán obtener un método más para demostrar la convergencia de un función a un cierto número real.

La idea intuitiva del nuevo concepto que introduciremos, será la misma idea del límite de una función que estudiamos anteriormente, con la pequeña diferencia de que ahora nos interesará que $f(x)$ aproxime a A cuando x es proximo a p, pero con la restricción de que x debe ser mayor o menor que p, según sea el caso.

Definición 4.2

Diremos que A es el límite por la derecha de f en p y lo denotaremos

$$\lim_{x \longrightarrow p^+} f(x) = A$$

Si para todo número real positivo ε existe un número real δ tal que

$$|f(x) - A| < \varepsilon \qquad \text{si} \qquad 0 < |x - p| < \delta$$

Del mismo modo diremos que B es el límite por la izquierda de f en p si dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$|f(x) - B| < \varepsilon \qquad \text{si} \qquad 0 < |x - p| < \delta$$

en cuyo caso lo denotaremos por

$$\lim_{x \longrightarrow p^-} f(x) = B$$

Resulta evidente la definición anterior, el echo de que si f tienen un límite cuando x tiende a p, f tendrá también el límite por la derecha y por la izquierda en p, en cuyo caso ambos coincidirán y su valor será justamente el límite de f cuando x tiende a p.

En cuanto al recíproco podemos afirmar:

Teorema 4.5

Si f tiene límite por la derecha y por la izquierda, y ambos iguales a A, entonces :

$$\lim_{x \longrightarrow p} f(x) = A$$

Demostración

Como f tiende a A por la derecha y por la izquierda. Dado $\varepsilon > 0$ existe δ_1, δ_2 en $\mathbb{R}^+$ tales que

$$\begin{aligned} |f(x) - A| &< \varepsilon \qquad (0 < x - p < \delta_1) \\ |f(x) - A| &< \varepsilon \qquad (0 < x - p < \delta_2) \end{aligned}$$

Luego

$$|f(x) - A| < \varepsilon \qquad\qquad (0 < |x - p| < \delta)$$

Con $\delta = \text{mín}\,(\delta_1\ ,\ \delta_2)$ con lo cual queda demostrado el teorema.

El lector atento ya habrá notado que una función puede tener límite por la derecha y por la izquierda y, sin embargo, no poseer límite en ese punto, tal es el caso de la función $f(x) = [x]$ cuando p es un número entero, pues como podrá verificar el lector

$$\lim_{x \longrightarrow p^-} f(x) = p - 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \longrightarrow p^+} f(x) = p$$

por esta razón el teorema anterior se utiliza como método para demostrar la no convergencia de una función en cierto punto.

Observemos esta afirmación en un ejemplo.

Sea:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \qquad \text{si} \qquad x \neq 0 \qquad \text{y} \qquad f(0) = 0$$

demostremos que f no tiene límite en $p = 0$; para ello, de acuerdo al teorema anterior basta demostrar que f no tiene límite por la derecha en $p = o$.

Para ello supongamos por contradicción que f tiende a A cuando x tiende a 0 y considérese $\varepsilon = 1$, debemos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - A| < 1 \qquad (0 < x < \delta) \tag{4.11}$$

preso si observamos que si $0 < x < \dfrac{1}{A+2}$ entonces

$$f(x) = \frac{1}{x^2} > (A+2)^2$$

$$|f(x) - A| = f(x) - A > A^2 + A + 4$$

por tanto para $\varepsilon = 1$, no existe δ que satisfaga 4.11 por eso f no tiene límite por la derecha cuando x tiende a 0.

4.3 Límite al infinito y llímites infinitos

Gerente, al abordar este tema se suele utilizar el conjunto $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\ ,\ +\infty\}$, donde estos dos símbolos son tales que

$$-\infty < x < +\infty \qquad (\forall\ x \in \mathbb{R})$$

A este conjunto se le llama la recta extendida. La justificación de la inclusión de estos puntos es topológica pues se desea hallar cantidades en $\mathbb{R}$ tan grandes o pequeñas como se desee.

Para estudiar los límites al infinito, nos vemos obligados a definir aproximadamente los vecindarios en estos puntos; así, diremos que un vecindario de $+\infty$ es un intervalo de forma $]x\ ,\ +\infty[$ para x en $\overline{\mathbb{R}}$ y al intervalo $]-\infty\ ,\ x[$ con x en $\mathbb{R}$ se le llama vecindario alrededor de $-\infty$

Recordemos que $+\infty$ y $-\infty$ son simplemente símbolos y no números, por lo tanto deberían ser tratados como símbolos por lo que no se pueden realizar operaciones algebraicas con ellos.

Definición 4.3

Sea f una función definida en un intervalo $]a\,,\,+\infty[$ decimos que es límite de f cuando x tiende a $+\infty$ es ℓ, si dado $\varepsilon > 0$ existe v, en un vecindario de $+\infty$ tal que:

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon \qquad \text{para } x \in V \cap\,]a\,,\,+\infty[$$

En otras palabras ℓ es el límite de f cuando x tiende a $+\infty$ si existe A en $\mathbb{R}$ tal que

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon \qquad \text{cuando } x > A$$

Seguramente el lector habrá encontrado alguna analogía entre los conceptos de convergencia de sucesiones y límite de una función cuando x tiende al infinito. Sin embargo, existe más que pura analogía; se puede definir el primer concepto en términos del segundo, pues dada una sucesión (a_n) podemos considerar la función f cuyo gráfico consiste en los segmentos rectilíneos que une los puntos del gráfico de (a_n).

de modo que la función f queda definida

$$f(x) = (a_{n+1} - a_n)x + (a_n - (a_{n+1} - a_n)n) \qquad n \leq x \leq n+1$$

Entonces, basados en esta definición, resulta evidente que:

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} a_n = \ell \qquad \text{si y solo si} \qquad \lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \ell$$

con lo que queda demostrado lo que hace un momento afirmamos.

Siguiendo el resultado de los límites al infinito, tenemos

Definición 4.4

Dada una función f definida en $]-\infty\,,\,b[$. Se dice que ℓ es el límite de f cuando x tiende a $-\infty$ si dado $\varepsilon > 0$ existe un vecindario de $-\infty$, V tal que

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon \qquad \text{para } x \in V \cap\,]-\infty, b[$$

O sea, si existe A en $\mathbb{R}$ tal que

$$|f(x) - \ell| < \varepsilon \qquad \text{cuando } x < A$$

Aunque el concepto intuitivo de límite al infinito es claro, tal vez un ejemplo concreto afirme las ideas, por lo que estudiaremos la función

Ejemplo 4.1

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

para $x \neq 1$, cuando x tiende a $+\infty$.

Dado $\varepsilon > 0$, consideremos el número real $A = \text{máx}\left(1\,,\ \dfrac{4+\varepsilon}{\varepsilon}\right)$ entonces para $x > A$ se tiene que

$$x > \frac{4+\varepsilon}{\varepsilon} \Longrightarrow \varepsilon(x-1) > 4$$

y como $x > 1$

$$\varepsilon(x-1) > 4 \Longrightarrow \frac{4}{x-1} < \varepsilon$$

por lo tanto si $x > A$

$$\left|\frac{x+3}{x-1} - 1\right| = \frac{4}{x-1} < \varepsilon \tag{4.12}$$

O sea que el límite de f cuando x tiende a $+\infty$ es 1.

En la práctica para encontrar el valor de A se acostumbra analizar primero la desigualdad 4.12, esto es, despejar x en términos de la constante ε, analizando las restricciones del dominio correspondientes para obtener la desigualdad deseada; luego se utiliza el método que utilizamos anteriormente.

para mostrar que $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x) = 1$, dado $\varepsilon > 0$, consideramos

$$A = \text{mín}\left(1\,,\ \frac{-4+\varepsilon}{\varepsilon}\right)$$

Si $x < A$ entonces

$$x < \frac{-4+\varepsilon}{\varepsilon} \Longrightarrow \varepsilon(1-x) > 4 \Longrightarrow \varepsilon > \frac{4}{1-x}$$

Ahora, si $x < 1$, entonces

$$|x-1| = 1-x$$

por tanto si $x < A$

$$\left|\frac{x+3}{x-1} - 1\right| = \frac{4}{x-1} < \varepsilon$$

O sea, hemos demostrado que $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = 1$

Estudiemos ahora los límites infinitos.

Definición 4.5

Sea f una función definida en un vecindario alrededor de x_0, se dice el límite cuando x tiende a x_0 es $+\infty$, si dado A en $\mathbb{R}$ existe $\delta > 0$ tal que

$$f(x) > A \qquad \text{cuando} \qquad 0 < |x_0 - x| < \delta$$

y el límite es $-\infty$ si

$$f(x) < A \qquad \text{cuando} \qquad 0 < |x_0 - x| < \delta$$

Mediante un ejemplo, analizaremos un método para calcular ese tipo de límites.

Consideremos la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, observemos que dado $A > 0$, basta considerar

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{A}} \qquad \text{y observemos que}$$

$$f(x) > A \qquad \text{si } < 0 < |x| < \delta \tag{4.13}$$

Para encontrar el valor de δ se acostumbre despejar de 4.13 x y hacer ciertas acomodaciones apropiadas , para luego concluir.

En algunos casos se presenta que el límite por la izquierda es $-\infty$ cuando x tiende an un valor, y por la derecha es $+\infty$, o viceversa. La definición de límite infinito por la derecha o por la izquierda la omitiremos, dado que consideramos al lector capaz de construirla.

Definición 4.6

Sea f un función definida en un vecindario al redebor de $+\infty$, decimos que el límite de f cuando x tiende a $+\infty$ es $+\infty$, si dado $A > 0$ existe $B > 0$ tal que

$$f(x) > A \qquad \text{cuando } x > B$$

En términos de vecindarios, diremos que $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ cuando dado un vecindario J alrededor de $+\infty$, existe un vecindario I alrededor de $+\infty$ tal que $f(I) \subset J$.

Análogamente, el límite de f cuando x tiende a $+\infty$, es $-\infty$, si dado un vecindario J al rededor de $-\infty$, existe un vecindario I alrededor de $-\infty$ tal que $f(I) \subset J$. O sea, si dado B en $\mathbb{R}$ tal que

$$f(x) < A \qquad \text{cuando} \qquad x > B$$

En este momento consideramos capaz al lector definir cuando el límite de una función es $+\infty$ o $-\infty$ si x tiende a $-\infty$, por los omitiremos.

Sin embargo, daremos un ejemplo como guía al lector.

Ejemplo 4.2

Considérese la función $f(x) = x^3$. Vamos a mostrar que $\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Para eso, dado un vecindario alrededor de $-\infty$, por ejemplo $]-\infty\,,\ A[$, si consideramos el vecindario

$$]-\infty\,,\ \sqrt[3]{A}[$$

podemos verificar fácilmente que

$$f(]-\infty\,,\ \sqrt[3]{A}[)\ \subset (]-\infty\,,;A[)$$

Finalmente, para terminar el estudio sobre límites, además de unas pequeñas notas aclaratorias, veremos una serie de teoremas que nos simplificarán el cálculo de límites.

Teorema 4.6

Sean f y g dos funciones definidas en un intervalo alrededor de U (donde U puede se un número cualquiera P, $-\infty$, o $+\infty$). Supongamos que U' es P, P^+, P^-, $+\infty$, o $-\infty$, entonces:

1) Límite de $f+g$ cuando x tiende a U' es $+\infty$ si el límite de g cuando x tiende a U' es $+\infty$ y si límite de f cuando x tiende a U' es, ℓ en $\mathbb{R}$ o $+\infty$.

2) Límite de $f+g$ cuando x tiende a U' es $-\infty$, si límite de g cuando x tiende a U' es $-\infty$ y si límite de f cuando x tiende a U' es $-\infty$ o un número real.

Demostración

Supongamos que:

$$\text{lím}_{x\longrightarrow p}\ f(x)=\ell \qquad \text{y} \qquad \text{lím}_{x\longrightarrow p}\ g(x)=+\infty$$

Dado $\varepsilon>0$ existe $\delta_1>0$ tal que

$$\ell-\varepsilon<f(x)<\ell+\varepsilon \qquad (0<|x-p|<\delta_1)$$

Por otra parte, para todo B en $\mathbb{R}$ existe A en $\mathbb{R}$ tal que

$$B=A+\ell-\varepsilon$$

y como g tiende a $+\infty$, existe $\delta_1>0$ tal que

$$g(x)>A \qquad (0<|x-p|<\delta_2)$$

por tanto

$$g(x) + f(x) > B \qquad (0 < |x - p| < \delta)$$

con $\delta = \text{mín}\,(\delta_1\ ,\ \delta_2)$. En conclusión, $f + g$ converge a $+\infty$ cuando x tiende a p.

Supongamos ahora que

$$\lim_{x \longrightarrow p} f(x) = +\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \longrightarrow p} g(x) = +\infty$$

Dado $B > 0$ existe $\delta_1\ ,\ \delta_2$ tal que

$$\begin{array}{rcll} f(x) & > & \dfrac{B}{2} & (0 < |x - p| < \delta_2) \\ g(x) & > & \dfrac{B}{2} & (0 < |x - p| < \delta_2) \end{array}$$

luego

$$g(x) + g(x) > B(0 < |x - p| < \delta)$$

con $\delta = \text{mín}\,(\delta_1\ ,\ \delta_2)$ o sea, $f + g$ converge a $+\infty$ cuando x tiende a p.

El resto de los casos de la parte *1.* (cuando $U' = +\infty$ o x_0, etc) y la parte *2.* quedará como ejercicio para el lector, dado que las demostraciones son muy similares.

Nótese que no se ha hecho ninguna afirmación para el caso en que:

$$\lim_{x \longrightarrow U'} f(x) = +\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \longrightarrow U'} g(x) = +\infty$$

Para el cual deberá el lector analizar la situación en cada caso en particular.

Teorema 4.7

Sean f y g dos funciones definidas alrededor de un vecindario, de U $(U = p,\ +\infty,\ -\infty)$; sea U' igual a $p,\ p^+,\ p^-,\ +\infty,\ -\infty$, entonces:

1) Si $\lim\limits_{x \longrightarrow U'} g(x) = +\infty$, el límite de $f\,g$ cuando x tiende a U' es $+\infty$ si el límite de f cuando x tiende a U' es un número real $\ell \neq 0$ o $+\infty$, y es $-\infty$ si el límite de f cuando x tiende a U' es $-\infty$.

2) Si $\lim\limits_{x \longrightarrow U'} g(x) = -\infty$, entonces el límite de $f\,g$ cuando x tiende a U' es $-\infty$ si el límite de f cuando x tiende a U' es un número real $\ell \neq 0$, y es $-\infty$ si el límite de f cuando x tiende a U' es $-\infty$.

Demostración

Para demostrar *1.* supongamos primero que:

$$\lim_{x \longrightarrow p} f(x) = \ell$$

Entonces dado $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \neq \ell$ existe δ_1 en $\mathbb{R}_+$ tal que:

$$\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon \qquad (0 < |x - p| < \delta_1) \tag{4.14}$$

Por otro lado, dado B en $\mathbb{R}$ existe A en $\mathbb{R}$ tal que

$$B = A(\ell - \varepsilon) \tag{4.15}$$

Como $g(x)$ tiende $+\infty$, existe δ_2 en $\mathbb{R}_+$ tal que

$$g(x) > A \qquad (0 < |x - p| < \delta_2) \tag{4.16}$$

Por 4.14, 4.15 y 4.16 tenemos que

$$f(x) \cdot g(x) > B \qquad (0 < |x - p| < \delta)$$

con $\delta = \text{mín}\,(\delta_1\,,\ \delta_2)$ o sea $f\,g$ converge a $+\infty$.

Supongamos ahora que

$$\lim_{x \longrightarrow p} f(x) = +\infty$$

entonces dado $A > 0$ existen δ_1 y δ_2 en $\mathbb{R}$ tal que

$$\begin{array}{rcll} f(x) & > & \sqrt{A} & (0 < |x-p| < \delta_1) \\ g(x) & > & \sqrt{A} & (0 < |x-p| < \delta_2) \end{array}$$

luego

$$f(x)\,g(x) > A \qquad (0 < |x-p| < \delta)$$

con $\delta = \text{mín}\,(\delta_1\ ,\ \delta_2)$ o sea $f \cdot g$ converge a $+\infty$.

El resto de la demostración quedará como ejercicio para el lector. Cabe notar, eso si, que en caso que un límite sea $\pm\infty$ y el otro 0, se deberá analizar particularmente en cada contexto.

Teorema 4.8

Sean f y g dos funciones definidas alrededor de un vecindario U (con U un número real p, $+\infty$,) o $-\infty$.

Sea U' un número real p, p^+, p^-, $+\infty$ o $-\infty$, entonces

1) Si el límite de g cuando x tiende a U' es 0, entonces el límite de $\dfrac{f}{g}$ es $+\infty$, si el límite de f es un número real $\ell > 0$ y es $-\infty$ si f tiende a $\ell < 0$.

2) Si el límite de g cuando x tiende a U' es $\ell > 0$, entonces el límite de $\dfrac{f}{g}$ es $+\infty$ si f tiende a $+\infty$ y $-\infty$ si f tiende a $-\infty$.

3) Si el límite de g cuando x tiende a U' es $\ell < 0$, entonces el límite de $\dfrac{f}{g}$ es $+\infty$ si f tiende a $-\infty$ y $-\infty$ si f tiende a $-\infty$.

Demostración

De la parte *1.*, únicamente mostraremos lo propuesto cuando

$$\lim_{x \longrightarrow p} f(x) = \ell > 0$$

pues el resto de la proposición *1.*, se demuestra análogamente.

Sea $0 < \varepsilon < \ell$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon \qquad (0 < |x - p| < \delta_1) \tag{4.17}$$

por otra parte, dado $A > 0$ existe $B > 0$ tal que

$$A = \frac{\ell - \varepsilon}{B} \tag{4.18}$$

como $B > 0$ y $g \longrightarrow 0$, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$-B < g(x) < B \qquad (0 < |x - p| < \delta_2)$$

de donde obtenemos

$$\frac{1}{g(x)} > \frac{1}{B} \qquad (0 < |x - p| < \delta_2) \tag{4.19}$$

luego, de 4.17, 4.18 y 4.19 obtenemos que

$$\frac{f(x)}{g(x)} > A \qquad (0 < |x - p| < \delta)$$

con $\delta = \text{mín}\,(\delta_1\ ,\ \delta_2)$ o sea $\dfrac{f}{g}$ tiende a $+\infty$.

De las partes *1.* y *3.*, únicamente mostraremos lo propuesto cuando

$$\lim_{x \longrightarrow p} f(x) = +\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \longrightarrow p} g(x) = \ell > 0$$

pues el resto de la proposición se demuestran con un razonamiento muy parecido.

Sea $\varepsilon > 0$. Existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\ell - \varepsilon < g(x) < \ell + \varepsilon \qquad (0 < |x - p| < \delta_1)$$

De donde

$$\frac{1}{\ell + \varepsilon} < \frac{1}{g(x)} \qquad (0 < |x - p| < \delta_1) \tag{4.20}$$

Por otra parte, dado A existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$f(x) > A(\ell + \varepsilon \qquad (0 < |x - p| < \delta_2) \tag{4.21}$$

Obtenemos así de 4.20 y 4.21 que

$$\frac{f(x)}{g(x)} > A \qquad (0 < |x - p| < \delta$$

con $\delta = \text{mín}\,(\delta_1\ ,\ \delta_2)$, o sea $\dfrac{f}{g}$ tienden a $+\infty$.

Observemos que el teorema anterior "deja por fuera" los caso en que ambos límites son $+\infty,\ -\infty,\ \text{o}\ 0$.

Los tres teoremas anteriores nos permiten, en cierto sentido, definir ciertas operaciones en el conjunto $\overline{\mathbb{R}}$, sin embargo, no es de nuestro interés abordar este tema.

Una aplicación inmediata de los teoremas anteriores es el echo de que si consideramos la función polinomial :

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_0 \qquad \text{con} \qquad a_n \neq 0$$

entonces

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} a_n x^n = \lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \longrightarrow -\infty} a_n x^n = \lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x)$$

En efecto, como

$$f(x) = a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \ldots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n}\right)$$

y

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \ldots + \frac{a_0}{a_n x^n}\right)$$

Podemos deducir el resultado inmediatamente, aplicando el teorema 4.3.

4.4 Funciones Continuas

4.4.1 Definición de continuidad en un punto

El estudio de la función continua es muy importante, sobre todo por los fructíferos resultados que de ella obtenemos en integración y diferenciación. Además, nos permite ver desde otro punta de vista, los conceptos de radical y de función inversa.

Antes de empezar propiamente con el estudio de las funciones continuas, haremos un estudio de topología de $\mathbb{R}$, que nos permitirá trabajar con mayor facilidad en el resto de este capítulo.

Definición 4.7

Sea O un subconjunto de $\mathbb{R}$. decimos que O es abierto su dado x en O existe un intervalo abierto no vacío de radio ε tal que

$$]x-\varepsilon\,,\ x+\varepsilon[\ \subset\ 0$$

Teorema 4.9

La unión arbitraria y la intersección finita de abiertos es un conjunto abierto.

Demostración

Sea $\{O_i\}_{i\in I}$ una familia cualquiera de abiertos en $\mathbb{R}$.

Consideremos x en $\bigcup\limits_{i\in I} O_i$ luego existe i_o en I tal que x está en O_{i_0}, como i_0 es un abierto existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$A =]x-\varepsilon\,,\ x+\varepsilon[\subset O_{i_0}$$

luego $A \subset \bigcup\limits_{i\in I} O_i$, por lo tanto $\bigcup\limits_{i\in I} O_i$ es un conjunto abierto.

Sea ahora $\{O_i\}_{i=1,\ldots,n}$ una familia finita de abiertos y sea x en $\bigcap\limits_{i\in I} O_i$, como x está en O_i para todo $i = 1,\ldots,n$ y cada O_i es un abierto existe ε_i tal que

$$]x-\varepsilon_i\ ,\ x+\varepsilon_i[\subset O_i \qquad (\forall\, i=1,\ldots n)$$

Sea $\varepsilon = \text{mín}\,(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ luego resulte evidente que

$$]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\subset O_i \qquad (\forall\, i=1,\ldots n)$$

de donde

$$]x-\varepsilon\ ,\ x+\varepsilon[\subset \bigcap_{i\in I} O_i$$

O sea, la intersección finita de abiertos es un abierto.

Un ejemplo de un conjunto abierto en $\mathbb{R}$ son los intervalos abiertos $]a\ ,\ b[$, pues dado x en $]a\ ,\ b[$, si consideramos $\varepsilon = \text{mín}\,(|x-a|\ ,\ x-b|)$, resulta evidente que:

$$]x-c\ ,\ x+\varepsilon[\ \subset\ ]a\ ,\ b[$$

A los intervalos abiertos se les llaman abiertos fundamentales ya que generan todos los conjuntos abiertos de $\mathbb{R}$ o sea que todo abierto de $\mathbb{R}$ es una unión de intervalos abiertos. Más aún, el lector puede verificar fácilmente que, dado un conjunto abierto O, entonces

$$O\ =\ \bigcup_{x\in O}]x-\varepsilon_x\ ,\ x+\varepsilon_x[$$

Donde ε_x es el correspondiente radio que aparece en la definición.

Vimos que la intersección finita de abiertos es un abierto, sin embargo, la intersección arbitraria no es necesariamente un abierto. En efecto es claro que:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}}]-1/n,1/n[=\{0\}$$

y obviamente $\{0\}$ no es un subconjunto abierto.

Definición 4.8

Un conjunto F es cerrado si su complemento es un conjunto abierto.

Teorema 4.10

La unión finita de cerrados e intersección arbitraria de cerrados es un cerrado.

Demostración

Basta aplicar la ley de morgan al teorema 4.4.1.

Cabe nota que si un conjunto no es abierto, no tiene que ser necesariamente un conjunto cerrado, por ejemplo el intervalo $]a\ ,\ b]$ no es un conjunto ni cerrado ni abierto, aún más, hay conjuntos que son cerrados y abiertos a la vez, como lo son $\mathbb{R}$ y $\emptyset$.

Una vez echo este pequeño estudio sobre la topología de $\mathbb{R}$, abordaremos es tema que aquí nos interesa.

Definición 4.9

Si una función f definida en un vecindario V alrededor de x_0 se dice ser continua en x_0 si para cualquier intervalo J de centro $f(x_0)$ existe un intervalo I de centro x_0, contenido en V tal que $f(I) \subset J$.

En otras palabras, una función es continua en x_0 si dado $\varepsilon > 0$ en $\mathbb{R}$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \qquad (|x - x_0 < \delta|)$$

Basta mirar la definición 4.2 para concluir que f en continua en x_0 si esta definida en este punto y

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Esto nos permite decir en cierto sentido que en las funciones continuas los símbolos del límite y de la función "conmutan", esto es

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \longrightarrow x_0} x\right)$$

Algunos ejemplos de funciones continuas son:

Ejemplo 4.3

Consideremos la función $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ y mostremos que es continua en 2.

Como

$$\left|\frac{x+2}{x-1} - 4\right| = \left|\frac{3x-6}{x-1}\right| = \frac{3|x-2|}{x-1}$$

Si suponemos que

$$\frac{1}{2} < x-2 < \frac{1}{2}$$

entonces

$$\frac{1}{2} < x-2 < \frac{3}{2}$$

luego

$$\frac{3|x-2|}{|x-1|} < 6|x-2|$$

por lo tanto, tomando $\delta = \text{mín}\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\varepsilon}{6}\right)$ obtenemos que

$$\left|\frac{x+2}{x-1} - f(2)\right| < \varepsilon \qquad (|x-2| < \delta)$$

o sea, f es continua en 2.

Ejemplo 4.4

Consideremos ahora la función $f(x) = x^3 - 2x$; vamos a mostrar que f es continua en 0.

Dado que

$$|x^3 - 2x| = |x|\,|x^2 - 2|$$

Si tenemos

$$-2 < x < 2$$

entonces

$$0 < x^2 < 4$$

y

$$-2 <^2 -2 < 2$$

por tanto, concluimos que

$$|x^3 - 2x| < 2\,|x| \qquad (|x| < \delta)$$

Tomando $\delta = \text{mín}\left(\frac{\varepsilon}{2}, 2\right)$. De donde f es continua en 0.

Una función que no es continua en x_0 se dice ser discontinua en x_0, o sea, f es discontinua en x_0, si existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe x_δ tal que

$$|(f(x_\delta) - f(x_0))| \geq \delta \qquad \text{cuando} \qquad |x_\delta - x_0|$$

Algunas veces se acostumbra hablar de dos tipos de discontinuidades; una es evitable, cuando existe el límite de f cuando x tiende a x_0 pero no es justamente $f(x_0)$ (la razón del nombre es que basta definir la función en x_0 y la función es continua), la otra es inevitable cuando no existe el límite de f en ese punto; en este caso, no es posible definir f en ese punto para que la función sea continua.

Definición 4.10

Una función se dice ser continua (respectivamente discontinua) en un intervalo, si es continua (respectivamente discontinua) para todo punto en el intervalo.

Ejemplo 4.5

Un ejemplo de una función discontinua es el siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{Si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{Si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

Esta función es discontinua en todo $\mathbb{R}$, pues si x_0 es un irracional cualquiera, entonces $f(x_0) = 1$.

Sea $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$; es claro que para todo $\delta > 0$ existe al menos un irracional x' en el intervalo $]x_0 - \delta\,,\ x_0 + \delta[$ ahora como

$$|f(x') - f(x_0)| = 1 \geq \frac{1}{2}$$

La función no puede ser continua en x_0.

Si consideramos ahora cualquier irracional por un argumento muy parecido al anterior, puede el lector verificar que la función f es discontinua en ese punto.

Seguidamente estudiaremos dos caracterizaciones de la continuidad, la primera es útil en cuanto proporciona un método para demostrar la no continuidad, la segunda es importante pues, de un modo intuitivo, nos permite generalizar la definición de continuidad a otros espacios normales que sea $\mathbb{R}$, además, generaliza el concepto de continuidad en un intervalo.

Teorema 4.11

Sea f una función con valores reales definida en un vecindario de x_0, entonces f es continua en x_0 si y solamente si, para cada sucesión (x_n) que converja a x_0 la sucesión $(f(x_n))$ converge a $f(x_0)$.

Demostración

Dado, $\varepsilon > 0$, si suponemos que f es continua en x_0, entonces existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \tag{4.22}$$

Sea (X_n) una sucesión cualquiera que converge a x_0, como $\delta > 0$ existe N en $\mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - x_0| < \delta \qquad (\forall n \geq N) \tag{4.23}$$

luego, por 4.22 y 4.23, obtenemos que

$$|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon \qquad (\forall n \geq N)$$

o sea, $(f(x_n))$ converge hacia $f(x_0)$.

Asumimos ahora la segunda proposición, luego hay que mostrar que f es continua en x_0, para ello, supongamos por contracción que f es discontinua en x_0, muestra que $f(x_n)$ no converge a $f(x_0)$, lo cual contradice nuestra hipótesis, por tanto es falso asumir que f es discontinua en x_0, con lo que queda demostrado el teorema.

Teorema 4.12

Una función de $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua si y sólo si para cada abierto A de $\mathbb{R}$ el conjunto $f^{-1}(A)$ (la preimagen de A por f) es un abierto de $\mathbb{R}$

Demostración

Supongamos que f es continua; sea $A \subset \mathbb{R}$ un abierto; si $f^{-1}(A) = \emptyset$ estamos listos, si $f^{-1}(A) \neq \emptyset$, sea x en $f^{-1}(A)$. Como $f(x)$ esta en A que es un arbitrario, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$]f(x) - \varepsilon\ ,\ f(x) + \varepsilon[\quad \subset \quad A$$

Como f es continua existe $\delta > 0$ tal que

$$f(y)\ \in\ ]f(x) - \varepsilon\ ,\ f(x) + \varepsilon[$$

cuando

$$y\ \in\ ]x - \delta_1\ ,\ x + \delta[$$

luego

$$]x - \delta_1\, x + \delta[\ \subset\ f^{-1}(]f(x) + \varepsilon[)\ \subset\ f^{-1}(A)$$

o sea que $f^{-1}(A)$ es un abierto.

Supongamos ahora que se cumple la segunda proposición.

Dado $\varepsilon > 0$ como $]f(x) - \varepsilon\ ,\ f(x) + \varepsilon[= I$ es un conjunto abierto de $\mathbb{R}$, por hipótesis $f^{-1}(I)$ es un abierto de $\mathbb{R}$, por lo que dado x_0 en $f^{-1}(I)$ existe $\delta > 0$ tal que

$$]x_0 - \delta\ ,\ x_0 + \delta[\ \subset\ f^{-1}(I)$$

O sea

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \qquad (|x - x_0 < \varepsilon|)$$

en otras palabras, f es continua.

4.5 Los operaciones de funciones en el conjunto de las funciones continua

Los siguientes teoremas facilitan, algunas veces, el verificar si una función es continua o discontinua, reduciendo funciones bastante complicadas, o varias funciones tal vez, a más simples.

Teorema 4.13

Sean f y g dos funciones continuas en x_0 y λ un número real cualquiera, entonces las funciones $f + g$, λg, $f \cdot g$ y $\dfrac{1}{g}$ (si $g(x_0) \neq 0$) son continuas en x_0.

Demostración

La demostración de la continuidad de $f + g$ y λg quedarán como ejercicio al lector, dado que son una simple aplicación de la definición y es análoga a la prueba que fue hacha en los límites de funciones.

Para mostrar que el producto es continuo, consideremos el siguiente argumento: Sea $\varepsilon > 0$, si $f(x_0) = 0$, la prueba se deduce fácilmente de la demostración que sigue, por lo que, supongamos que $f(x_0) \neq 0$, entonces como g es continua en x_0 existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$|g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2|f(x_0)|} \tag{4.24}$$

Por otro lado, dado cualquier intervalo J con centro $g(x_0)$ existe $M > 0$ tal que

$$J \subset]-M\,,;M[$$

y como g es continua existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$g(]x_0 - \delta_2\,,\; x_0 + \delta_2[) \subset J$$

o sea

$$|f(x)| < M \qquad (\forall x \in]x_0 - \delta_2\,,\; x_0 + \delta_2[) \tag{4.25}$$

Además, como f es continua en x_0 existe δ_3 tal que

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2M} \qquad (|x - x_0| < \delta_3) \tag{4.26}$$

De la siguiente igualdad

$$|f(x)\,g(x) - f(x_0)\,g(x_0)| = |f(x) - f(x_0)|\,|g(x)| + |g(x) - g(x_0)|\,|f(x_0)|$$

y de 4.25 obtenemos para $|x - x_0| < \delta_2$

$$|f(x)\,g(x) - f(x_0)\,g(x_0)| \;\leq\; |f(x) - f(x_0)|\,M + |g(x) - g(x_0)|\,|f(x_0)|$$

finalmente de 4.24 y 4.26 se tiene

$$|f(x)\,g(x) - f(x_0)\,g(x_0)| \leq \varepsilon \qquad (|x - x_0| < \delta)$$

con $\delta = \text{mín}\,(\delta_1\,,\,\delta_2\,,\,\delta_3)$ por lo que $f \cdot g$ es continua en x_0.

Para mostrar que el inverso $\dfrac{1}{g}$ es continuo, primero buscaremos un valor m tal que

$$0 < m < |g(x)|$$

en un cierto intervalo; las intenciones las observará el lector a lo largo de la demostración.

Sea $\varepsilon' > 0$ tal que $|g(x_0)| > \varepsilon')$, entonces por continuidad existe δ_1 tal que

$$|g(x_0)| - |g(x)| \leq |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon' \qquad (|x - x_0| < \delta_1)\,{}^{*****}$$

o sea

$$0 < |g(x_0)| - \varepsilon' < |g(x)| \qquad (|x - x_0| < \delta_1)^{****}$$

luego basta tomar $m = |g(x_0)| - \varepsilon'$ y obtenemos así

$$0 < m < |g(x)| \text{ en } (|x - x_0| < \delta_1) \tag{4.27}$$

Además, dado $\varepsilon > 0$ como g es continua existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon \cdot m \cdot |g(x_0)| \qquad (|x - x_0| < \delta_2) \tag{4.28}$$

Ahora, como

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}\right| = \frac{|g(x) - g(x_0)|}{|g(x)| \cdot |g(x_0)|}$$

Obtenemos de 4.27

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}\right| < \frac{|g(x) - g(x_0)|}{m \cdot |g(x_0)|} \text{ en } (|x - x_0| < \delta_4)$$

Y de 4.28

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}\right| < \varepsilon \text{ en } (|x - x_0| < \delta)$$

Con $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$ con lo que queda demostrado el teorema.

Del teorema 4.5 podemos concluir inmediatamente que si f y g son dos funciones continuas en x_0 y $g(x_0) \neq 0$ entonces $\frac{f}{g}$ es también una función continua en x_0 .

Teorema 4.14

Sea f una función continua en x_0 y sea g una función continua en $f(x_0)$ entonces $g \circ f$ es continua en x_0 .

Demostración

Sea J un intervalo de $g(f(x_0))$, como g es continua en $f(x_0)$ tal que

$$g(I) \subset J$$

Por otra parte, como f es continua en x_0, existe un intervalo K tal que

$$f(K) \subset I$$

Se tiene entonces que

$$g \circ f(K) \subset J$$

en otras palabras, $g \circ f$ es continua en x_0.

Observemos que del teorema 4.5, como $f(x) = x$ es obviamente continua, podemos concluir que todo polinomio es continuo, y más aún, las funciones racionales (cociente de dos polinomios) son también continuas en todos los puntos salvo donde está indefinida la función.

4.6 Teoremas fundamentales sobre funciones continuas

Las propiedades más importantes de las funciones continuas se encuentran en esta sección; es más, esta sección se puede considerar el motivo de la introducción de las funciones continuas en este libro.

Teorema 4.15

Si una función f es continua en x_0 y $f(x_0) \neq 0$, existe un intervalo $]x_0 - h, x_0 + h[$ tal que f tiene el mismo signo de $f(x_0)$ en ese intervalo.

Demostración

Supongamos que $f(x_0) > 0$; consideremos $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < f(x_0)$, como f es continua en x_0, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \qquad (|x - x_0| < \delta)^{***}$$

o sea

$$0 < f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon \qquad (|x - x_0| < \delta)\,^{***}$$

en otras palabras, basta tomar $h = \delta$ y se tiene la prueba.

Si $f(x_0) < 0$, la prueba es idéntica; bastará considerar $0 < \varepsilon < -f(x_0)$.

Teorema 4.16

Sea f una función continua en un intervalo I (observemos que no es de importancia el tipo de intervalo), entonces la imagen de $I, f(I)$, es también un intervalo

Demostración

Demostraremos que $f(I)$ es un intervalo de acuerdo a la caracterización que fuera hecha en el Capítulo II sobre los intervalos (teorema 2.17).

Sean x_1 y x_2 en I tales que $f(x_1) < f(x_2)$, debemos mostrar que

$$[f(x_1), f(x_2)] \subset f(I)$$

Para ello sea y tal que

$$f(x_1) < y < f(x_2)$$

y consideremos el conjunto A definido por

$$A = \{x \in [x_1, (x_2)] / f(x) \leq y\}$$

Claramente, este conjunto no es vació, pues x_1 está en él, además está acotado superiormente, por ejemplo, por x_2, luego existe x_0 en $[x_1, (x_2)]$ tal que

$$x_0 = \sup A$$

Nuestra intención es ahora mostrar que $f(x_0) = y$; para ello consideremos la función $g(x) = f(x) - y$ para $x \in I$, obviamente g es continua en I.

Supongamos $f(x_0) - y > 0$, o sea $g(x_0) > 0$; del teorema 4.6 tenemos que existe un intervalo $]x_0 - h, x_0 + h[$ en el cual $g(X)$ es positiva.

Sin embargo, dado que $x_0 = \sup A$, de acuerdo con la caracterización del supremo (teorema 2.15), existe x_1 en A tal que

$$x_0 - h < x_1$$

además, por ser x_0 el supremo y x_1 está en A por definición, se tiene que

$$x_0 - h < x_1 < x_0 + h$$

lo cual nos lleva a una contradicción pues al estar x_1 en A, se cumple que

$$f(x_1) > y$$

Si suponemos que $f(x_0) < y$, por un razonamiento muy parecido al anterior, encontramos una contradicción, en otras palabras, sólo puede suceder que $f(x_0) = y$, de donde $[f(x_1), f(x_2)] \subset f(I)$, que fue lo propuesto.

Observemos que en ningún momento hemos hablado sobre el tipo de intervalo que es $f(I)$.

Los siguientes corolarios son conocidos como el teorema del valor medio y el teorema de Bolzano, para funciones continuas respectivamente.

Corolario 4.1 Sea f una función continua en un intervalo I. Sea a, b en I entonces si y es tal que $f(a) < y < f(b)$ entonces existe c en $]a\,,\,b[$ tal que

$$f(c) = y$$

La demostración es justamente la que utilizaremos para demostrar el teorema anterior.

Corolario 4.2 Sea f una función continua en un intervalo I, entonces si existen dos puntos tales que sus imágenes tengan signos opuestos, existe un punto c entre estos tal que

$$f(c) = 0$$

Este corolario es una aplicación inmediata del corolario anterior.

Estos tres teoremas son "equivalentes" en el sentido de que, según como se desee, se puede demostrar cualquiera de ellos y deducir otros como corolarios, y la prueba sigue siendo esencialmente la misma. Como ejercicio puede el lector tratar de demostrar alguno de los corolarios, asumiendo únicamente el teorema 4.6.

Una aplicación del teorema del valor intermedio, aunque ya fue obtenida en este libro por otro procedimiento, es la existencia de la raíz n-ésima de un número real $a > 0$.

En efecto, consideramos c tal que $0 < a < c^n$ y la función $f(x) = x^n$, que es continua. Según el teorema del valor intermedio, existe b en $]a\,,\ b\,,\ c[$ tal que $f(b) = a$ o sea que $b^n = a$. La unicidad se obtiene a partir de que f es una función creciente en ese intervalo.

Sea f una función de variable real definida en un conjunto S de números reales; se dice que la función tiene un máximo absoluto en S si existe un punto c en S tal que

$$f(x) \leq f(c) \qquad (\forall\, x \in S)$$

y un mínimo absoluto, si existe d en S tal que

$$f(x) \geq f(d) \qquad (\forall\, x \in S)$$

Nuestro propósito es mostrar que una función continua en un intervalo cerrado es acotado, posee un máximo y un mínimo absoluto.

Teorema 4.17

Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a\,,\ b]$, o sea, existe un número real $c > 0$ tal que

$$f(x) \leq c \qquad (\forall\, x \in \ a\,,\underline{)}$$

Demostración

Supongamos por contradicción que f no es acotada en $a\,,\ b$ luego para todo n en $\mathbb{N}$ existe x_n en $[a\,,\ b]$ tal que

$$f(x_n) \geq n$$

La sucesión (x_n) definida anteriormente, es claramente acotada, pues

$$x_n \in [a\,,\ b] \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N})$$

Según el teorema de Bolzano (teorema 3.13) existe una subsucesión en (x_{n_p}) convergente. Supongamos que converge a x.

Observemos que x debe estar en $[a\,,\,b]$, pues de no ser así, podemos arguir como sigue: suponga, por ejemplo, que $x < a$, resulta evidentemente que si $I = \left]x - \dfrac{a-x}{2}\,,\,x + \dfrac{a-x}{2}\right[$ entonces

$$I \cap [a\,,\,b] = \emptyset$$

por tanto, no puede haber elemento de la subsucesión (x_{n_p}) en I. lo cual contradice el hecho que (x_{n_p}) converge a x.

Análogamente puede el lector notar que $x > b$ nos lleva a una contradicción.

Además, por ser (x_{n_p}) convergente, es acotada, sin embargo, por hipótesis tenemos que

$$f(x_{n_p}) \geq n_p \qquad (\forall\, p \in \mathbb{N})$$

lo cual es una contradicción pues (x_{n_p}) no sería una subsucesión acotada, por tanto, suponer que f no es acotado nos lleva a una contradicción, luego f está acotada en $[a\,,\,b]$.

El hecho de que f sea acotada en $[a\,,\,b]$ nos permite hablar de una cota superior e inferior, de un supremo y un ínfimo, así tiene sentido definir

$$\sup f = \sup f(x)\ /\ a \leq x \leq b$$

y

$$\text{ínf}\, f = \sup f(x)\ /\ a \leq x \leq b$$

El siguiente teorema es conocido como el teorema de los valores extremos para funciones continuas y es debido al matemático Karl Weirstrass.

Teorema 4.18

Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a\,,\,b]$. Entonces existen dos puntos c y d en $[a\,,\,b]$ tales que

$$f(c) = \sup f \qquad \text{y} \qquad f(d) = \text{ínf}\, f$$

Demostración

Como habrá notado el lector, el ínfimo de f es el supremo de la función $-f$. Es suficiente, por lo tanto, probar la proposición únicamente para el $\sup f$.

Sea $M = \sup f$, y supongamos por contradicción que no existe x en $[a\,,\ b]$ para el cual $f(x) = M$.

Consideremos la función $g(x) = M - f(x)$; claramente, la $g(x) > 0$ para todo x en $[a\,,\ b]$, entonces la función $\dfrac{1}{g}$ es continua en $[a\,,\ b]$, por el teorema anterior es acotada en $[a\,,\ b]$ o sea, existe $[K$ tal que

$$\frac{1}{g(x)} < K \qquad (\forall\, x \in [a\,,\ b])$$

de donde

$$M - f(x) > \frac{1}{K} \qquad (\forall\, x \in [a\,,\ b])$$

luego

$$-f(x) > \frac{1}{K} - M \qquad (\forall\, x \in [a\,,\ b])$$

o sea

$$f(x) < \frac{1}{K} - M \qquad (\forall\, x \in [a\,,\ b])$$

lo cual contradice el echo que $M = \sup f$; por lo tanto, $f(x) = M$ para algún x en $[a\,,\ b]$.

Uno de los resultados más importantes de esta sección se desprende de este teorema. Si f es una función continua en un cerrado $[a\,,\ b]$ entonces el $\sup f$ y el $\text{ínf} f$ son el máximo y el mínimo absoluto de f respectivamente; ahora, combinando esto con el teorema de los valores intermedios, obtenemos que el rango de f será el intervalo cerrado $[\text{ínf} f\,,\ \sup f]$.

4.7 El proceso de inversión

En esta sección describiremos el método para construir funciones unas a partir de otras.

Antes de describir el método con detalle, vamos a ilustrarlo con un ejemplo.

Ejemplo 4.6

Consideremos la función f definida en el intervalo $[0\,,\,2]$ por la ecuación $f(x) = 2x + 1$; el rango de f es el intervalo $[1\,,\,5]$; cada punto x de $[0\,,\,2]$ es "enviado" por f a exactamente un punto y de $[1\,,\,5]$.

Inversamente, para cada y en $[1\,,\,5]$ hay exactamente un x en $[0\,,\,2]$ para el cual $y = f(x)$. Para encontrar este x basta resolver la ecuación

$$x = \frac{1}{2}(y-1)$$

Esta ecuación define x en función de y. Si denotamos por g esta función, tenemos que

$$g(y) = \frac{1}{2}(y-1) \qquad (\text{para } y \in [1\,,\,5]\,)$$

A esta función g se le llama función inversa de f.

consideremos ahora la función f con dominio A y rango B, tal que para cada x en A existe un único y en B que satisfaga $f(x) = y$. Podemos, entonces, definir una nueva función g por

$$g(y) = x \qquad \text{donde } x \text{ es tal que } y = f(x)$$

En otras palabras, el valor de g en un punto y es el único valor x de A, tal que $f(x) = y$.
Esta nueva función es llamada la inversa de f, y al proceso de conseguir g se le llama inversión.

Notemos que $g(f(x)) = x$ para x en A y que $f(g(x)) = y$ para y en B.

En particular, el método puede ser aplicado a las funciones definidas en un intervalo cerrado y acotado $[a\,,\,b]$, continuas y estrictamente monótonas (creciente o decreciente), pues, de acuerdo al teorema de los valores intermedios para funciones continuas, f alcanza los valores entre $f(a)$ y $f(b)$. Por otra parte, la monotocidad estricta garantiza la inyectividad.

En efecto, $f(x_1) \neq f(x_2)$ cuando $x_1 \neq x_2$, de lo contrario la función no sería estrictamente monótona.

Entre los intereses que tiene el proceso de inversión, es analizar si la inversa conserva las propiedades de la función f. En este estudio, fundamentalmente nos interesan dos propiedades: la continuidad y la monotomía que estudiaremos a continuación.

Teorema 4.19

Si f una función estrictamente creciente y continua en el intervalo $[a\ ,\ b]$ y sea g la función inversa de f. Entonces:

1) g es estrictamente creciente en $[f(a)\ ,\ f(b)]$

2) g es continua en $[f(a)\ ,\ f(b)]$

Demostración

Para mostrar *1.*, sean y_1 y y_2 en $[f(a)\ ,\ f(b)]$ tales que $y_1 < y_2$. Existen x_1 y x_2 en $[a\ ,\ b]$ tales que $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$ como f es estrictamente creciente y $f(x_1) < f(x_2)$, entonces $x_1 < x_2$, y como

$$x_1 = g(y_1) < g(y_2) = x_2$$

se tiene que g es estrictamente creciente en el intervalo $[f(a)\ ,\ f(b)]$.

En cuanto a *2.*, sea y_0 en $]f(a)\ ,\ f(b)[$ y sea x_0 el único punto en $[a\ ,\ b]$ tal que $f(x_0) = y_0$, dado $\varepsilon > 0$ (podemos suponer sin perdida de generalidad que $x_0 - \varepsilon$ y $x_0 + \varepsilon$ están en $[a\ ,\ b]$).

Tenemos entonces que

$$f(]x_0 - \varepsilon\ ,\ x_0 + \varepsilon[) \quad \subset \quad [f(a)\ ,\ f(b)]$$

Considerando $\delta = \text{mín}\,|(y_0 - f(x_0 - \varepsilon)|\ ,\ |y_0 - f(x_0 + \varepsilon)|)$

obtenemos que

$$y \ \in\ ]f(x_0 - \varepsilon)\ ,\ f(x_0 + \varepsilon)[\qquad \text{para} \qquad |y - y_0| < \delta$$

o sea

$$g(y) \ \in\ ]x_0 - \varepsilon\ ,\ x_0 + \varepsilon[\ =\ ]g(y_0) - \varepsilon\ ,\ g(y_0) + \varepsilon[\qquad \text{con} \qquad y - y_0 < \delta$$

en otras palabras, g es continua, o cual completa la demostración del teorema, pues con una pequeña modificación al argumento anterior se puede mostrar que f es continua por la derecha y por la izquierda en b.

Como es de suponer, existe un teorema análogo al teorema 4.7 para funciones continua y estrictamente decrecientes; su demostración es inmediata, pues si f es una función decreciente, $-f$ es una función creciente.

Teorema 4.20

Si f una función estrictamente creciente en un conjunto A, sea $a = \sup A$ (este puede ser un número real, o $+\infty$) entonces

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = \sup_{x \in A} f(x)$$

Demostración

Sea $c = \sup f(A)$, por propiedad del supremo sabemos que si $b < c$, existe x en A tal que

$$b < f(x) < c \tag{4.29}$$

o sea que, en todo vecindario V de c, existe al menos un $x \in A$ tal que $f(x)$ esta en V.

Por otra parte, si x satisface 4.29 y si $z \leq z < a$ por ser f creciente

$$b < f(x) \leq f(z) \leq c$$

Por tanto, si tomamos un vecindario V de c en $f(A)$ y $f(x_0)$ está en V, el vecindario N igual al conjunto de y que satisface $x_0 < y < a$ es tal que

$$f(y) \in V \qquad \text{si} \qquad y \in N$$

con lo que concluimos la demostración del teorema.
esp
Un teorema análogo existe para cuando f es estrictamente decreciente; en este caso se demuestra que

$$\lim_{x \longrightarrow b} f(x) = \inf_{x \in A} f(x)$$

donde $b = \inf A$.

Teorema 4.21

Sea f una función continua estrictamente creciente en $[a\,,\,+\infty[$ y entonces f determina una biyección entre $[a\,,\,+\infty[$ y $[f(a)\,,\,b[$ con $b = \sup f([a\,,\,+\infty[)$.

Demostración

Por ser f estrictamente creciente, se tiene que

$$f(a) < f(x) \qquad (\forall\, x \in [a\,,\,+\infty[)$$

en otras palabras

$$f([a\,,\,+\infty[) \;\subset\; [f(a)\,,\,+\infty[$$

como $b = \displaystyle\sup_{x\in[a\,,\,+\infty[} f(x)$, obtenemos en base al teorema anterior que

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = b$$

de donde

$$f(x) \in [f(a)\,,\,b[\qquad (\forall\, x \in [a\,,\,+\infty[)$$

En efecto, no puede existir x tal que $f(x) > b$, por definición de b, y si existiera x tal que $f(x) = b$, bastaría tomar x' tal que $x' > x$ y obtendríamos que $f(x') > b$, lo cual es contradictorio.

En otras palabras, $f([a\,,\,+\infty[) \subset [f(a)\,,\,b[$; la inyectividad se deduce inmediatamente de la monotomía, con lo que queda demostrado en teorema, pues basta aplicar el corolario 4.6.

Como habrá notado el lector, con una pequeña variación del argumento anterior, se puede reemplazar el intervalo $[a\,,\,+\infty[$ por $]a\,,\,+\infty[$. Además, como es de esperar si f en lugar de ser creciente es decreciente, entonces f determinara una biyección entre $]-\infty\,,\,a]$ (o $]-\infty\,,\,a[$) en $]c\,,\,f(a)$ donde $c = \inf\, f(]-\infty\,,\,a[)$.

Por otra parte, en base a esta biyección podemos asegurar que existe la inversa de f, y que está es continua.

Las demostraciones de las siguientes proposiciones serán omitidas, dada su analogía con el teorema anterior, sin embargo, las enunciamos por su importancia y porque las utilizaremos posteriormente.

Si f es una función continua y estrictamente creciente en $[a\ ,\ +\infty[$ y $f(x)$ tiende a $+\infty$ cuando x tiende $+\infty$, entonces existe una biyección bicontinua entre $[a\ ,\ +\infty[$ y $[f(a)\ ,\ +\infty[$, además la inversa f^{-1} es creciente.

Si f es una función continua y estrictamente creciente en $\mathbb{R}$ y

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty \qquad y \qquad \lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

entonces f es una biyección bicontinua en $\mathbb{R}$, y además $^{-1}$ es también estrictamente creciente.

Si f es una función continua y estrictamente creciente en $]a\ ,\ +\infty[$ y

$$\lim_{x \longrightarrow +a} f(x) = -\infty \qquad y \qquad \lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

entonces f es una biyección bicontinua de $]a\ ,\ +\infty[$ en $\mathbb{R}$, además f^{-1} es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$.

Si f es una función continua y estrictamente creciente en $]a\ ,\ +\infty[$ y satisface que

$$\lim_{x \longrightarrow +a} f(x) = -\infty \qquad y \qquad \lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

entonces f es una biyección bicontinua de $]a\ ,\ +\infty[$ en $]-\infty\ ,\ +\infty[$ y f^{-1} es también estrictamente creciente en $\mathbb{R}$.

El término bicontinua se ha utilizado en este contexto para indicar que la función inversa es continua.

Para una mayor comprensión del tema proponemos al lector demostrar las proposiciones anteriores.

4.8 Estudio de la función $f(x) = x^n$ y su inversa

El estudio que precede de las funciones continua, nos permite concluir resultados, aunque muy utilizados por el lector, nada triviales sobre los radicales y potencias racionales de un número real. Existen otras maneras de introducirlos, por ejemplo por medio de las funciones exponencial y logarítmica, sin embargo, nos parece más constructivo y más natural introducirlas del modo que sigue.

El capitulo anterior definimos las potencias enteras de un número real y vimos las propiedades más necesarias.

En esta sección definiremos con más precisión les potencias racionales, esto es, el símbolo x^r donde x es un número real y r es un número racional.

En cuanto a la función $f(x) = x^n$, con N en $\mathbb{N}$, podemos decir que es continua en $\mathbb{R}$, además si n es par

$$f(x) = f(-x)$$

o sea que f es una función par si n es impar la función es impar, pues

$$f(-x) = -f(x)$$

Por otra parte, la función f es una función estrictamente creciente en el intervalo $[0\ ,\ +\infty[$, pues dados x, y en $\mathbb{R}_+$ tales que $x > y$, tenemos

$$(x^n - y^n) = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1}) \qquad (n > 1)$$

Como sabemos que $(x - y) > 0$ y además $x^{n-1} + \ldots + y^{n-1} > 0$ pues es el producto de la suma de números positivos, obtenemos que:

$$x^n > y^n$$

o sea, lo propuesto.

Por otra parte

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} x^n = +\infty$$

en otras palabras, esta función satisface la hipótesis de la proposición 4.1.

Estudiemos ahora la función $f(x) = x^n$ con n en $\mathbb{Z}_-^*$, en este caso

$$f(x) = \frac{1}{x^n} \qquad (\text{con} - n = n')$$

O sea, que basta considerar la función $g(x) = x^{n'}$ para estudiar f.

Es obvio que f es estrictamente creciente en $]0\,,\,+\infty[$ además

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = +\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 0$$

o sea que, en este caso, f verifica la hipótesis de una versión de la proposición 4.3

Del razonamiento anterior concluimos que la función f definida por

$$f(x) = x^n \qquad (\text{con } n \text{ en } \mathbb{N})$$

posee una inverse que es también continua y estrictamente creciente en le intervalo $[0\,,\,+\infty[$. A la imagen de todo número real positivo bajo la función inversa, le llamaremos raíz enésima de x y la denotaremos por

$$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$$

Observemos que, en el caso de que n no es múltiplo de 2, la función $f(x) = x^n$ es una biyección bicontinua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, mientras que si n es par, la función f no es biyectiva; por lo que solo existen las raíces impares de los números negativos.

Por esta razón, para hablar con más generalidad, nos restringimos al hablar de radicales al dominio $[0\,,\,+\infty[$.

Entre las propiedades más importantes de los radicales tenemos:

Teorema 4.22

Sean a, b don números reales positivos. Dados n y p en $\mathbb{N}^*$, entonces

1) $\sqrt[n]{a} = \sqrt[np]{a^p}$

2) $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}$

3) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}$

4) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

5) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ (con $b = 0$)

Demostración

Como vimos anteriormente la función $f(x) = x^{np}$ es biyectiva. Además

$$\begin{aligned}\left(\sqrt[n]{p\,\sqrt[p]{a}}\right)^{np} &= \left[\left(\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}\right)^{n}\right]^{p} = (\sqrt[p]{a})^{p}\\ &= a = \left(\sqrt[np]{a}\right)^{np}\end{aligned}$$

Nuevamente por inyectividad, obtenemos *2.*, con un razonamiento análogo se demuestra *3.*.

Para demostrar *4.* y *5.* la utiliza la inyectividad de $g(x) = x^n$; dada la analogía entre ambas demostraciones únicamente demostraremos *4.*.

Como

$$\left(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[q]{b}\right)^{n} = (\sqrt[n]{a})^{n}\cdot\left(\sqrt[n]{b}\right)^{n} = ab = \left(\sqrt[n]{ab}\right)^{n}$$

queda demostrado *4.*

Este teorema no es muy importante en el sentido que todos conocemos estas proposiciones, incluso las hemos utilizado muchas veces, sin embargo, es tal vez la primera vez que el lector se detiene a demostrarlas.

Tras otros preliminares sobre radicales, podemos definir con precisión el símbolo " a^r "donde a es un número real y r está en $\mathbb{Q}$.

En un capitulo anterior vimos que un número racional $r > 0$ no tiene una única representación, sino varias, digamos $\dfrac{p}{q}$ y $\dfrac{p'}{q'}$, además sabemos que en este caso

$$pq' = p'q$$

Sin embargo

$$\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^q = a^p \qquad \text{y} \qquad \left(\sqrt[q']{a^{p'}}\right)^{q'} = a^{p'}$$

de donde

$$\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^{qq'} = a^{pq'} = a^{p'q} = \left(\sqrt[q']{a^{p'}}\right)^{q'q}$$

y como $f(x) = x^{qq'}$ es biyectiva, obtenemos

$$\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[q']{a^{p'}}$$

Esto nos permite definir sin ambigüedad el símbolo " a^r " pues basta considerar una representación de r, digamos $\dfrac{p}{q}$, y definimos

$$a^r = \sqrt[q]{a^p}$$

Hasta ahora hemos supuesto que $r > 0$. Si $r < 0$ arguiríamos de una manera similar a la que fuese hecha con los números enteros negativos e un capítulo anterior, así definimos

$$a^r = \frac{1}{a^{-r}} \qquad \text{si } r < 0 \quad \text{y} \quad a \neq 0$$

y como es de esperar obtenemos las propiedades usuales.

Teorema 4.23

Dados a y b don números reales estrictamente positivos y r, r' en $\mathbb{Q}$, se tiene:

1) $a^r \cdot a^{r'} = a^{r+r'}$

2) $(a^r)^{r'} = a^{rr'}$

3) $\dfrac{a^r}{a^{r'}} = ar - r'$

4) $(ab)^r = a^r b^r$

5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}$

Demostración

La demostración de estas proposiciones es realmente fácil, basta simplemente acudir a la definición del símbolo " a^r " y trabajar con las operaciones con radicales; a modo de ejemplo, demostraremos únicamente la proposición *1.*.

Sean $\dfrac{p}{q}$ y $\dfrac{p'}{q'}$ dos representationes de los racionales r y r' respectivamente, que asumimos por el momento mayores que cero. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} a^r a^{r'} &= \sqrt[q]{a^p} \cdot \sqrt[q']{a^{p'}} = \sqrt[q\,q']{a^{p\,q'}} \cdot \sqrt[q\,q']{a^{p'\,q}} = \sqrt[q\,q']{a^{p\,q'+p'\,q}} \\ &= a^{\frac{p\,q'+p'\,q}{q\,q'}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{p'}{q'}} = a^{r+r'} \end{aligned} \tag{4.30}$$

Si r y r' son ambos menores que cero

$$a^r a^{r'} = \frac{1}{a^r} \cdot \frac{1}{a^{-r'} = \dfrac{1}{a^{-(r+r')}} = a^{r+r'}} \tag{4.31}$$

Si $r > 0$ y $r < 0$

$$\begin{aligned} a^r a^{r'} &= \frac{a^r}{a^{r'}} = \frac{a^{\frac{p}{q}}}{a^{\frac{-p'}{q'}}} = \frac{\sqrt[q]{a^p}}{\sqrt[q']{a^{-p'}}} = \frac{\sqrt[q\,q']{a^{p\,q}}}{\sqrt[q\,q']{a^{-p'\,q}}} \\ &= \sqrt[q\,q']{\frac{a^{p\,q'}}{a^{-p'\,q}}} = a^{\frac{p\,q'+p'\,q}{q\,q'}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{p'}{q'}} \quad a^{r+r'} \end{aligned} \tag{4.32}$$

Esto suponiendo que $pq' + p'q > 0$; de lo contrario, entonces

$$\begin{aligned} \sqrt[q\,q']{\frac{a^{p\,q'}}{a^{-p'\,q}}} &= \sqrt[q\,q']{\frac{1}{a^{-p'\,q-p\,q'}}} = \frac{1}{a^{\frac{-(p'\,q+p\,q')}{q\,q'}}} \\ &= a^{\frac{p'\,q+p\,q'}{q\,q'}} = a^{r+r'} \end{aligned} \tag{4.33}$$

Por 4.30, 4.31, 4.32 y 4.33 concluimos que la proposición *1.* es verdadera.

4.9 Continuidad uniforme

En los que aquí se refiere, el concepto de continuidad no se estudia muy a fondo, lo cual no quiere decir que es un concepto sin importancia ni mucho menos. En estudios más avanzados del análisis que los que aquí son expuestos notará el lector la importancia de este concepto.

Definición 4.11

Una función f se dice ser uniformemente continua en un intervalo I, si dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tales que dada x, x' en I que satisfaga $|x - x'| < \delta$ se tiene que

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

Inmediatamente podemos observar que si una función es uniformemente continua es continua (basta fijar $x_0 = x'$ en la definición anterior); no siendo cierta, en general, el recíproco como es el caso de la función $f(x) = x^2$.

Sabemos que esta función es continua en $\mathbb{R}$, pues consideramos, por ejemplo, $\varepsilon = 1$, y supongamos que existe δ que satisface la definición de continuidad uniforme. Consideremos $0 < a < \delta$ y

$$x = \frac{1}{a} \qquad \text{y} \qquad x' = \frac{1}{a} + a$$

es claro que

$$|x - x'| = a < \delta$$

sin embargo

$$|x^2 - x'^2| = \left|\frac{1}{a^2} - \left(\frac{1}{a} + a\right)^2\right| = \left|\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^2} - a^2 - 2\right| = a^2 + 2 > 1$$

Luego, no se satisface la definición anterior.

Sin embargo, el recíproco es aceptado bajo ciertas condiciones expuestas en el siguiente teorema que es conocido como el teorema de la continuidad uniforme.

Teorema 4.24

Sea f una función continua en un intervalo cerrado y acotado $[a\ ,\ b]$. Entonces f es uniformemente continua en $[a\ ,\ b]$.

Demostración

Supongamos por contradicción que f no es uniformemente continua en $[a\ ,\ b]$; existe entonces ε_0 con la siguiente propiedad, sea cual fuera $\delta > 0$, existe x y x' en $[a\ ,\ b]$ tales que $|x - x'| < \delta$, sin embargo

$$|f(x) - f(x')| > \varepsilon_0$$

Si aplicamos esta propiedad a $\delta = 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \ldots, \dfrac{1}{n}$, obtengamos dos sucesiones (x_n) y (x'_n) de puntos en $[a\ ,\ b]$ tales que

$$|x'_n - x_n| < \frac{1}{n} \qquad \text{y} \qquad |f(x_n) - f(x'_n)| > \varepsilon_0$$

Como todos los puntos de la sucesión $(\, x_n\ 2$ está en $[a\ ,\ b]\,)$ es obvio que esta sucesión es acotada y por el teorema de Weisstrass existe una subsucesión (x_{nk}) convergente; supongamos que converge a x; además debe estar en el intervalo $[a\ ,\ b]$.

Por otro lado, como $(x_n - x'_n)$ converge a 0, (x'_n) converge también a x. Como f es continua, según el teorema 4.4.1, $(f(x_n))$ y $(f(x'_n))$ converge a $f(x)$, por tanto $f(x_n) - f(x'_n)$ converge a "0", por tanto existe N en $\mathbb{N}$ tal que

$$f(x_n) - f(x'_n) <_0$$

Obteniendo así una contradicción. Por lo tanto f debe ser uniformemente continua en $[a\ ,\ b]$.

4.9.1 Ejercicios

1. Calcule:

a. $\displaystyle \lim_{n \longrightarrow 0} \frac{\sqrt{1+n} - \sqrt{1}}{n}$

b. $\displaystyle \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x - \sqrt{x}}{x+1}$

c. $\displaystyle \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$. Con $x \in \mathbb{R}$ fijo y $n \in \mathbb{N}$ fijo.

2. Una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se llama periódica si existe un número t en $\mathbb{R}$ tal que:

$$f(x+t) = f(x)$$

Al más pequeño t que cumple con esta propiedad se le llama período de la función f.

a. Dada una función real f de período t, calcule:

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x-t)$$

b. Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ con $a < b$ una función continua ¿Como definiría usted $\hat{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\frac{\hat{f}}{[a,b]} = f$$

y f sea periódica de período $b-a$?

En este caso, a $\hat{f}$ le llamamos extensión periódica de f.

3. Demuestre el siguiente teorema. Sea f una función tal que:

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \ell$$

y g una función continua en ℓ. Entonces la función $g \circ f$ tiene un límite en x_0, y

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} (g \circ f)(x) = g(\ell)$$

4. Sea f la función de variable real tal que

$$f(x) = 2x^2 - x + 1 + \frac{a}{x}$$

con a en $\mathbb{R}$

a. Estudiar el límite de f cuando x tiende a ∞

b. Estudiar el límite de f cuando x tiende a 0, considerar casos sobre a

5. Sea la función g de variable real tal que

$$g(x) = \frac{ax^3 + bx^2 + x - 1}{x - 1} \text{ con } a, b \text{ en } \mathbb{R}$$

a. Estudiar el límite de g cuando x tiende a $+\infty$.

b. Estudiar el límite de g cuando x tiende a 1, considerar casos sobre a y b.

6. Calcule los siguientes límites:

a. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{\sqrt{1 - \cos(x)}}$

b. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\tan(3x)}{\operatorname{sen}(5x)}$

c. $\lim\limits_{x \longrightarrow 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

d. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{x}$

e. $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x - 1}$

f. $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} \dfrac{(t + h)^2 - t^2}{h}$

7. Mostrar que:

a. $\lim\limits_{x \longrightarrow 5^-} \sqrt{5 - x} = 0$

b. $\lim\limits_{x \longrightarrow 2^-} \sqrt{\dfrac{x - 2}{x - 3}} = 0$

c. $\lim\limits_{x \longrightarrow 3^+} \sqrt{(x - 2)(x - 3)} = 0$

8. Sea f una función que toma valores negativos alrededor de un punto x_0. Mostrar que si:

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x)$$

existe, entonces este límite es negativo o nulo. Similarmente, si toma sólo valores positivos, el límite será positivo o nulo.

9. Mostrar que si una función f admite un límite positivo (respectivamente negativo) cuando x tiende a un punto dado x_0; entonces existe un vecindario de x_0 donde f solo toma valores positivos (respectivamente negativos).

10. Sean dos funciones f y g tales que existen los límites:

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \ell \qquad \lim_{x \longrightarrow x_0} g(x) = \ell'$$

con x_0 un punto dado y se cumple que:

$$\ell > \ell'$$

Mostrar que si existe un vecindario del punto x_0, en el cual se tiene:

$$f(x) > g(x)$$

¿Se cumple el recíproco?

11. Sean n función $f_1, f_2, \ldots, f_n$, que admiten los límites $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ cuando x tiende a un punto arbitrario x_0.

Mostrar que:

a. $\displaystyle \lim_{x \longrightarrow x_0} \sum_{i=1}^{n} f_i(x) = \sum_{i=1}^{n} \ell_i$

b. $\displaystyle \lim_{x \longrightarrow x_0} \prod_{i=1}^{n} f_i(x) = \prod_{i=1}^{n} \ell_i$

12. Encontrar los límites siguientes:

a. $\displaystyle \lim_{x \longrightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$

b. $\displaystyle \lim_{x \longrightarrow 12} \frac{bx^3 + 5x^2 - x - 1}{2x^2 + 9x + 4}$

c. $\lim\limits_{x \longrightarrow 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 7x + 10}$

d. $\lim\limits_{x \longrightarrow -2} \dfrac{x^3 + x^2 - 8x - 12}{x^2 - 3x - 10}$

e. $\lim\limits_{x \longrightarrow 2} \dfrac{\sqrt{2x} - 2}{\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-1}}$

f. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\sqrt{x+3} - \sqrt{4x+3}}{\sqrt{x+4} - \sqrt{2x+4}}$

g. $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - (x+1)$

13. Muestre que la función definida por

$$f(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{1 + n \operatorname{sen}^2(\pi x)}$$

es igual a

$$\begin{array}{lll} 1 & \text{si} & x \text{ es entero} \\ 0 & \text{si} & x \text{ no es entero} \end{array}$$

14. Sea la función signo definida por

$$sgn\, x = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Mostrar que

a. $|x| = x\, sgn\, x$

b. $sgn\, x = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \dfrac{2}{\pi} \tan^{-1}(nx)$

15. Calcule

a. $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 5x + 7} - \sqrt{x^2 - 3x - 8}$

b. $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \dfrac{\sqrt{x^4+2x-5}}{x^2-3x+7}$

c. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\sqrt[3]{x^3+1}-1}{\sqrt{x^2+1}-1}$

16. Calcule el límite para $a,\ b,\ c$ en $\mathbb{R}$ y n en $\mathbb{N}$

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \sqrt{x^3+ax^2+bx+c} - nx\sqrt{x+2}$$

17. Dos funciones reales f y g se dicen asintóticas si

1) Ambas tienen límite $+\infty$ o ambas $-\infty$ cuando x tiende a $+\infty$ o tiende a $-\infty$

2) La diferencia $f-g$ tiende a 0 cuando x tiende a $+\infty$ o tiende a $-\infty$.

Pruebe que

$$f(x) = \frac{x^3-3}{x-1} \qquad\qquad g(x) = x+1$$

son asintóticas.

18.

a. Muestre que la función

$$f(x) = x^2+2x$$

tiene límite 3 cuando $x \longrightarrow 1$

b. Muestre que $\lim\limits_{x \longrightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$

19. Muestre que la función definida por

$$f(x) = 4x+11$$

tiene límite 2 cuando x tiende a -2.

Calcule $\quad \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) \qquad \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x)$.

20. Muestre que

$$\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

21. Sea E el conjunto de funciones numéricas definidas en un intervalo $]-a\,,\ a[$ donde a es un número real positivo dado.

a. Mostrar que el conjunto E_1 de E, cuyos elementos son las funciones pares, es decir, tales que

$$f(-x) = f(x)$$

es un espacio vectorial del espacio vectorial E sobre $\mathbb{R}$.

b. Mostrar que el conjunto E_2 de E, tienen por elementos las funciones impares, esto es, que cumplen

$$f(-x) = -f(x)$$

es un espacio vectorial de E sobre $\mathbb{R}$.

c. Mostrar que ambos subespacios E_1 y E_2 son suplementarios.

d. Sea f una función en E; Mostrar que existe una función única f_1 de E_1 un una función única f_2 de E_2 tales que,

$$f(f_1 + f_2)$$

Expresar $f_1(x)$ y $f_2(x)$ en función de $f(x)$ y $f(-x)$.

e. Para aplicar el resultado anterior, determinar f_1 y f_2 tales que

$$f(x) = x^2 + x + 1$$

22. Mostrar que las funciones son continuas en todo $\mathbb{R}$

1) $f(x) = x^2$

2) $f(x) = x^2 + x + 1$

23. Mostrar que la función definida por

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

es continua en 1 y más generalmente en $\mathbb{R} - \{0\}$.

24. Definimos la función $E(x)$ como el mayor número entero menor o igual a x y la denominamos parte entera de x .

Sea una función

$$f(x) = x - E(x)$$

a. ¿ Es f continua en el punto $(2, 3)$? ¿ Lo es en el punto 2?

b. Resuelva el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} f(x) &= x - E(x) \\ 3 &= x + 2f(x) \end{aligned}$$

25. Estudiar la continuidad de las funciones en el punto dado

a. $f(x) = 2x - E(x) \qquad x_0 = 4$

b. $f(x) = [x - E(x)]^2 + E(x) \qquad x_0 = 5$

c. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2}}{x} \qquad$ para $x \neq 0$

d. $f(x) = \sqrt{x^2} \qquad$ con $x \neq 0$

26. Investigue cuales de las siguientes funciones son continuas en $\mathbb{R}$.

a. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |x| > 1 \\ -1 & \text{si} \quad |x| < 1 \\ 0 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$

b. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x^2 > 1 \quad \text{o} \quad x = -1 \\ 1 & \text{si} \quad x^2 < 1 \quad \text{o} \quad x = 1 \end{cases}$

27. Sea g la función definida por

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Mostrar que esta función toma dos valores entre 0 y 1 .¿ Es g continua en cualquier punto?

28. Estudiar la continuidad en la función f definida por

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

29. Demostrar que si f es una función continua en en un punto x_0 , también $|f|$ es continua en x_0 .

30. Sean

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i \qquad\qquad g(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i x^i$$

Entonces $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ y $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$.

son los mismos que los del cociente de los términos de más alto grado del numerador y del denominador.

31. Sea f una función estrictamente monótona en su dominio, entonces f es inyectiva y por lo tanto tiene una función inversa definida en $f(D)$ con valores en D .

32. U/tilizando la definición de continuidad, verifique en qué punto son continuas y en qué punto no, las siguientes funciones:

a.

$$\begin{array}{rccc} f: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{x^2+1}{x-\frac{1}{2}} \qquad x \neq \dfrac{1}{2} \quad , \quad f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 5 \end{array}$$

b.

$$\begin{array}{rccl} f: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{x+2}{\sqrt{x-\frac{1}{2}}} \quad , \quad \dfrac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ & x & \mapsto & 5 \quad 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2} \end{array}$$

33. Utilizando la definición de continuidad, demuestre que

$$f:[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$f(x) = 1 \quad \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$$

$$f(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \in C_{\mathbb{R}}^{\mathbb{Q}} \cap [0,1]$$

es discontinua en todos los puntos del intervalo $[0,1]$.

34. Sea $f: [a,b] \longrightarrow [a,b]$; $a < b$ f es continua en $[a,b]$. Demuestre que existe x_0 en $[a,b]$ tal que $f(x_0) = x_0$.

35. Sean $f,g: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas tales que

$$f(x) = g(x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{Q} \cap [a,b]$$

Demuestre que

$$f(x) = g(x) \qquad \forall\, x \in [a,b]$$

36. Sea $f: [a,b] \longrightarrow [a,b]$ tal que para todo x en $[a,b]$

$$|f(x) - f(y)| \leq M\,|x-y|$$

con M en $\mathbb{R}$ $\quad 0 < M < 1$

a. Demuestre que f es continua en $[a,b]$

b. Sea x_0 en $[a,b]$ demuestre que

$$(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$$

es una sucesión de Cauchy con

$$f_n = f \circ \underbrace{\ldots}_{\text{n-veces}} \circ f$$

c. Sea $\lim f_n(x_0)$, x_0 en $[a, b]$

Demostrar que

$$f(y) = y$$

d. Sea y' en $[a, b]$ tal que

$$f(y') = y'$$

Demuestre que

$$y' = y$$

37. Sea $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo y en $\mathbb{R}$

$$f^{-1}(y) = \emptyset$$

o $f^{-1}(y)$ es un conjunto con dos elementos.

a. Demuestre que f no es continua en $[0, 1]$

b. Construya una función f con esa propiedad.

38. Considere la función

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ \frac{1}{n} & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Mostrar que f es continua en todo número irracional y discontinua en todo número racional.

39. Considere la función definida por

$$f(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)}$$

a. Muestre que para todo x en $\mathbb{R}$

$$f(x + 1) = f(x) + 1$$

b. Estudie la continuidad de f.

40. Demuestre que la función valor absoluto

$$f(x) = |x|$$

es continua en $x = 0$.

41. Sea n un entero positivo. Muestre que la función

$$f(x) = [x - E(x)]^n + E(x)$$

es continua en $\mathbb{R}$.

42. Sea f la función de variable real x definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}\sqrt{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

a. Muestre que el dominio de f es $\mathbb{R}^+$.

b. Estudie el límite

$$\lim_{x \longrightarrow 0} f(x)$$

c. Muestre que f es continua en $\mathbb{R}$

43. Usando la definición de continuidad, pruebe que

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{\sqrt{x}} \end{array}$$

es continua en cualquier punto $x_0 > 0$.

44.

a. Calcule

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \sqrt{x^3 + x^2 + bx + c} + mx\sqrt{x+2}$$

b. Calcule

$$\lim_{x \longrightarrow 0} x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$$

c. Analice continuidad de

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sqrt{x - E(x)} + E(x) \end{array}$$

45. Sean f y g funciones definidas en un conjunto A de $\mathbb{R}$ y considérese

$$h(x) = \sup_{x \in A} \{f(x), g(x)\}$$

y

$$k(x) = \inf_{x \in A} \{f(x), g(x)\}$$

Muestre que h y k son continuas.

46.

a. Dé un ejemplo de una función de $I = [0,1]$ con valores en $\mathbb{R}$ que no sea acotada

b. Dé un ejemplo de una función acotada y continua en $\mathbb{R}$

47. Muestre que:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

es continua en $x = 1$

48. Muestre que:

$$f(x) = \sqrt{x}$$

es continua en todo x positivo

49. Muestre que las siguientes funciones continuas en los puntos indicados:

a. $f(x) = 1 + x + |x|$ en $x = 0$

b. $f(x) = x^4 - 3x + 2$ en $x = 2$

50.

a. Sea $C(D, \mathbb{R})$ el conjunto de funciones continuas en $D = [0,2]$.

Se sabe que con la suma y la multiplicación ordinaria de funciones este conjunto es un anillo conmutativo con identidad. Pruébelo

b. Estudie la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in [0,1] \\ \text{x-1} & \text{si} \quad x \in]1,2] \end{cases}$$

c. Haga lo mismo que en 2 para la función:

$$f(x) = \begin{cases} \text{1-x} & \text{si} \quad x \in [0,1] \\ 0 & \text{si} \quad x \in]1,2[\end{cases}$$

d. ¿Cuál es fg? ¿Qué puede concluir?

51. ¿Cuáles de las siguientes funciones son continuas en $x_0 = 1$?

a. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$

b. $h(x) = E(x)$

52. Una función f es definida como se sigue:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x) & \text{si} \quad x \leq e \\ ax+b & \text{si} \quad x > e \end{cases}$$

donde a, b, e son constantes. Si b y e son dados, encontrar todos los valores de a (si éste existe) para los cuales f es continua en $x = e$.

53. Repita el ejercicio 52 para:

$$f(x) = \begin{cases} 2\cos(x) & \text{si} \quad x \leq e \\ ax^2+b & \text{si} \quad x > e \end{cases}$$

54. Sean f y g dos funciones definidas así:

$$f(x) = \frac{x+|x|}{2}, \; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x^2 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Encuentre una fórmula o fórmulas para $h(x) = f(g(x))$ ¿Para cuáles valores es h continua?

55. Repita el ejercicio 54 para:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad |x| > 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si} \quad |x| \leq 2 \\ 2 & \text{si} \quad |x| > 2 \end{cases}$$

56. Sea f un polinomio de grado n,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} e_k x^k$$

tal que el primero y el último de los coeficientes e_0 y e_n tengan signos opuestos. Pruebe que $f(x) = 0$ para al menos un positivo x.

57. Sea $f(x) = \tan(x)$, es decir, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ y $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1$, pero no existe un x en el intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ tal que $f(x) = 0$.

Explicar por qué esto no contradice el teorema de Bolzano.

58.

a. Dada la función real f continua en $[0,1]$. Asuma que:

$$0 \leq f(x) \leq 1$$

para cada x en $[0,1]$. Pruebe que existe al menos un e en $[0,1]$ para el cual $f(e) = e$. Tal punto es llamado un punto fijo de f.

Sugerencia: Aplique el teorema de Bolzano a la función:

$$g(x) = f(x) - x$$

b. Dada una función real f continua en $[a,b]$. Asumir que:

$$f(a) \leq a$$

y que

$$f(b) \geq b$$

Probar que f tiene un punto fijo en $[a,b]$.

59. Considérese la función definida para valores positivos por:

$$f(x) = 0 \text{ si } x \text{ es irracional}$$

$$f(\frac{p}{q}) = \frac{1}{q} \text{ si } \frac{p}{q} \text{ es racional}$$

Muestre que f es discontinua en x_0 cuando x_0 es racional y es continua en x_0 cuando es un irracional.

60. Si $f(x)$ es continua en $[0, 2a]$ y $f(0) = f(2a)$ pruebe que $f(x) = f(x + a)$ para algún x en el intervalo $[0, a]$.

Sugerencia: Aplique el teorema de Bolzano a la función $g(x) = f(x) - f(x + a)$.

61. Si $g(x)$ está definida en el intervalo $[a, b]$ y toma en cada uno de sus valores exactamente dos veces en este intervalo, pruebe que $g(x)$ es discontinua.

Sugerencia: Si $g(x)$ fuera continua, muestre que el valor mayor y el menor valor solo pueden ser en $x = a$ o $x = b$; por tanto $g(x)$ será una función constante.

62.

a. Sea f una función real uniformemente continua, enotnces existen a, b tales que

$$|f(x)| \leq a|x| + b$$

b. Analice si el recíproco de 1 es cierto.