PROGRAMA DEL CURSO MA-0250
CALCULO EN UNA VARIABLE I

Horas: 5
Requisitos: ninguno

INTRODUCCION

I. DESCRIPCION DEL CURSO

Este es el primer curso de una secuencia de tres cursos de cálculo: dos de cálculo en una variable y uno de cálculo en varias variables. A lo largo de esta secuencia se cubren los temas usuales del cálculo y la geometría analítica, presentando el material de una manera rigurosa, así como haciendo énfasis en las aplicaciones, planteamiento y resolución de problemas. Se trata de dar a la vez, un marco histórico a los temas presentados, para complementar el conocimiento específico del matemático con el conocimiento del desarrollo del cálculo a través del tiempo.

Aunque esta secuencia ha sido diseñada para los estudiantes de matemática, y enseñanza de la matemática, es un excelente sustituto para la secuencia de cálculo usual, que cursan los estudiantes de otras carreras: especialmente aquellas que requieren una formación básica, sólida en matemática, como ingenierías, física, química y economía.

II. MARCO HISTORICO

El itinerario que tuvo que recorrer el concepto de diferenciación hasta su completo desarrollo, se puede dividir en dos etapas. La primera está ligada a la matemática iniciada por los antiguos matemáticos y la segunda corresponde a la matemática del siglo XVII en adelante. Sin embargo, solamente en la segunda etapa los matemáticos comprometen dicho concepto directamente con el estudio de los fenómenos de la naturaleza. Arquímides fue uno de los primeros matemáticos que pensó que los fenómenos de la naturaleza podían estudiarse mediante la matemática y al formular las leyes de las palancas y desarrollar la estática y la hidrostática no hizo más que poner en práctica estas ideas. En relación con el concepto de derivación, aunque Arquímides no llegó pensar ni remotamente en los términos en que a pensamos actualmente, se ocupó de trazar a tangente de un punto de la llamada espiral de Arquímides.

Lo que haría totalmente cierta la posibilidad de estudiar los fenómenos de la naturaleza mediante el concepto de derivación. Fue el desarrollo y consolidación de los conceptos de derivación. Fue el desarrollo y consolidación de los conceptos de límites y función. A finales del siglo XVIII, los matemáticos se convencieron de que una gran cantidad de fenómenos de la naturaleza podían representarse mediante modelos matemáticos tomados de a enorme gama de funciones que hasta la fecha se habían descubierto. Esta fue la base de la invención del Cálculo Diferencial e Integral, que no hubiera sido posible sin el desarrollo de estos conceptos.

El Cálculo Diferencial es una poderosa herramienta para estudiar los fenómenos de la naturaleza y puesto que son las funciones las que modelan tales fenómenos entonces es claro que todo el aparato diferencial está puesto al servicio del estudio de dicho concepto. De tal modo que si hemos sido capaces de modelar el comportamiento de un fenómeno mediante una cierta función, resultará muy importante estudiar las propiedades de esa función puesto que el fenómeno se comportará, teóricamente en la misma forma que ella.

Aparte de Arquímides, otro gran matemático griego que se habría ocupado también de algunos problemas relativos a la determinación de máximos y mínimos fue Apolonio de Perga. Existe la hipótesis de que en el quinto libro de las secciones cónicas, escrito por Apolonio, se habrían resuelto este tipo de problemas. Un intento, sin mucho éxito, de reconstruir el contenido del libro quinto fue hecho en el paso por V. Viviani, uno de los discípulos de Galileo, quien en 1659 escribió un libro llamado De Maximis et Minimis Divinatio… Posteriormente, G. Aborelli, con ayuda de algunos manuscristos árabes, confirmó la brillante hipótesis de Viviani.

Más de 1500 años después, en 1629, Fermat inventó un método para hallar los máximos y los mínimos de una curva. Este método fue conocido posteriormente por Descartes quien se encargó de hacerlo famoso. Tanto Fermat como Descartes lograron desarrollar métodos para hallar tangentes, máximos y mínimos e inclusive los puntos de inflexión de algunas curvas, sin embargo no llegaron a conocer las condiciones generales de suficiencia de extremos ni las de los máximos y mínimos. Algunos años después, Isaac Barrow, profesor de Newton, halló entre otras, la solución general de la tangente a la llamada curva Kappa.

El desarrollo del concepto moderno de diferenciación surgió de tres grandes problemas que preocuparon a los matemáticos del siglo XVII:

a. El problema de la tangente.
b. El problema de la velocidad y la aceleración.
c. El problema de la determinación de máximos y mínimos.

Y en cada uno de ellos los hilos conductores son las nociones de límite y función.

Soluciones parciales fueron dadas por Fermat, Descartes y también por Cristian Hygens. Sin embargo la primera solución general a todos estos problemas fue hallada por Newton y años después, independientemente de esta, por Leibnitz.

Posteriormente otros grandes aportes al desarrollo del cálculo diferencial fueron hechos por Michael Rolle, con el llamado Teorema de Rolle y por Lagrange con el teorema del Valor Medio.

El cálculo diferencial surgió y se desarrolló estrechamente ligado a los problemas de la óptica, la mecánica y la astronomía, sufriendo además los avatares del Renacimiento; la más grande revolución del pensamiento humano.

III. OBJETIVOS GENERALES

1. Desarrollar el buen uso del lenguaje lógico matemático mediante la presentación rigurosa de los temas del cálculo y la geometría analítica.
2. Desarrollar la capacidad del estudiante para reconocer, plantear y resolver problemas de diversas disciplinas, mediante el uso del cálculo.
3. Dar a conocer al estudiante, el desarrollo histórico del cálculo, de modo que entienda la matemática como una disciplina dinámica, que ha ido resolviendo diversos problemas de la naturaleza a lo largo del tiempo.
4. Proveer al estudiante de los conocimientos de cálculo diferencial e integral en una variable, que son parte primordial de su formación básica en matemática.

IV. OBJETIVOS ESPECIFICOS

1. Que el estudiante asimile el concepto de límite, tanto intuitiva como rigurosamente.

2. Que el estudiante domine el concepto de continuidad de funciones, de modo que pueda distinguir cuándo una función sea continua o no y conozca sus propiedades básicas para que pueda aplicarlas a la solución de problemas.
3. Que el estudiante maneje la derivada de una función y sus propiedades, de modo que pueda resolver problemas de razón de cambio, de extremos y de graficación de funciones, así como de problemas del cálculo diferencial que aparecen en otras disciplinas.
4. Introducir al estudiante en el cálculo integral mediante la solución de problemas de cálculo de áreas, volúmenes, longitud de arco, etc.

V. PROGRAMA DEL CURSO

El estudio del cálculo debe ser global y consistente, no únicamente una colección de conocimientos dispersos y desligados unos de otros. Por esta razón, se recomienda escoger un mismo libro de texto a lo largo de toda la secuencia. El programa que aquí presentamos es una guía de los temas usuales del cálculo, que pueden variar poco de un libro de cálculo a otro.

Es necesario tener en cuenta que lo más importante al escoger un texto es, que mediante el uso del mismo se pueda cumplir con los objetivos del curso, plasmados en la introducción, objetivos generales y objetivos específicos. Al final de este programa se incluye bibliografía, acorde con estos objetivos y l nivel que se quiere dar al curso.

CAPITULO I: TEMAS PREVIOS AL CÁLCULO

En este capítulo que debe dar un repaso general de los siguientes temas, que ya son conocidos por el estudiante y que son indispensables en el estudio del cálculo.

a. Números reales, ecuaciones, inecuaciones y desigualdades.
b. Ejes de referencia, gráfico de una ecuación, parábolas.
c. Fórmulas de distancia y del punto medio. Ecuación del círculo.
d. Ecuación de la recta, rectas paralelas y perpendiculares.
e. Funciones y sus gráficas.
f. Funciones trigonométricas.

CAPITULO II: LÍMITES Y CONTINUIDAD

a. Límites de una función de una variable.
b. Teoremas acerca de las propiedades de los límites.

c. Límites unilaterales, límites infinitos.
d. Continuidad de una función en un punto y en un intervalo.
e. Continuidad de una función compuesta y de las funciones trigonométricas.
f. Teoremas acerca de las propiedades de funciones continuas.

CAPITULO III: DERIVACION Y DIFERENCIACION

a. Recta tangente.
b. El concepto de derivada.
c. Derivabilidad y continuidad.
d. Derivadas de funciones algebraicas.
e. Movimiento rectilíneo y la derivada como intensidad de cambio.
f. Derivadas de las funciones trigonométricas.
g. Derivada de una función compuesta.
h. Derivación implícita.
i. Problemas de razón de cambio de variables relacionadas.
j. Derivadas de orden superior.
k. Diferencial.
l.

CAPITULO IV: APLICACIONES DE LA DERIVADA

a. Máximo y mínimo de una función.
b. Problemas de máximos y mínimos.
c. Teorema de Rolle y Teorema del Valor Medio.
d. Funciones crecientes y decrecientes, criterio de la primera derivada.
e. Concavidad y puntos de inflexión, criterio de la segunda derivada.
f. Extremos relativos.
g. Límites en infinito y estudio de las asíntotas del gráfico de una función.
h. Trazo del gráfico de una función.
i. Aplicaciones en economía y administración.
j. Soluciones numéricas de ecuaciones por el método de Newton.

CAPITULO V: INTEGRACION

a. Integral indefinida (antiderivación).
b. Técnicas de integración inmediata. Método de sustitución.
c. Ecuaciones diferenciables con variables separables y movimiento rectilíneo.
d. Área bajo el gráfico de una función.

e. Integral definida.
f. Teorema del valor medio para integrales.
g. Teoremas fundamentales del cálculo.
h. Área de figuras acotadas por gráficos de funciones.
i. Aplicaciones en economía y administración.

CAPITULO VI: APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

a. Volumen de un sólido de revolución: método del disco, del anillo circular, de las capas cilíndricas y de las secciones planas paralelas conocidas.
b. Trabajo (mecánico).
c. Longitud de arco del gráfico de una función.
d. Centro de masa de una barra.
e. Centro de una región plana y de un sólido de revolución.
f. Presión de un líquido.

BIBLIOGRAFIA

La bibliografía que se incluye en este programa pretende una guía para el profesor y el estudiante, en cuanto al nivel de presentación de los temas incluidos en el programa. El profesor puede ampliarla con otros libros de referencia de su preferencia.

Apóstol Tom. Calculus. Volumen I. Editorial Reverté. Barcelona. 1972.
Demidovich Boris. Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático. Editorial Mir. 1973.
Eves H.H. History of Mathematics. Holt, Risebart and Winston. 1964.
Leithold Louis. El Cálculo con Geometría Analítica. Editorial Harla. 1987.
Priestly. Calculus: An Historical Approch. Springer-Verlag. 1979.
Ross. Elementary Analysis: The theory of Calculus. Springer-Verlag. 1980.