

Carta al estudiante

La geometría diferencial es un puente entre el análisis y la geometría. Las *variedades diferenciales* generalizan las curvas y superficies de la teoría clásica a dimensiones superiores: son espacios localmente euclidianos en donde se puede levantar el “cálculo en varias variables” a un ámbito libre de coordenadas. Una variedad diferencial con una métrica riemanniana da una plataforma para conceptos geométricos tales como el desplazamiento paralelo, la curvatura y las curvas geodésicas. Este curso es una introducción a este conjunto de ideas, con énfasis en el manejo práctico de los ejemplos. En el enlace (<https://mv2.mediacionvirtual.ucr.ac.cr/course/view.php?id=9060>) de Mediación Virtual se colocarán apuntes del curso y sus tareas semanales. El uso de esa plataforma en este curso usará la modalidad “alto virtual”, con clases remotas por Zoom.

Programa

1 Variedades diferenciales

Definición y ejemplos de variedades, aplicaciones diferenciables, vectores tangentes. Subvariedades. Campos vectoriales. Curvas integrales y flujo de un campo vectorial. Grupos de Lie y espacios homogéneos. Fibrados vectoriales.

2 Formas diferenciales

Álgebra tensorial y álgebra exterior. Formas diferenciales. La derivada exterior y la derivada de Lie de una forma diferencial, el cálculo de Cartan. Formas cerradas y exactas, el lema de Poincaré.

3 Integración en variedades

Variedades orientables, formas de volumen. Integración de n -formas. Símplices y cadenas singulares, la integración de otras formas. El teorema de Stokes en general. La cohomología de de Rham de una variedad compacta.

4 Conexiones y curvatura

Conexiones y transporte paralelo, derivadas covariantes. Curvatura y torsión. Métricas riemannianas, conexiones de Levi-Civita. El tensor de curvatura de Riemann, la curvatura escalar. Curvas geodésicas.

Evaluación

Habrán tres exámenes parciales, en la modalidad de “llevar a la casa”: el examen será colocado en la página del curso (como archivo pdf) a las 12:00 mediodía del miércoles. Una respuesta en páginas escritas, escaneadas o fotografiadas, debe ser subida a la página del curso en Mediación Virtual, o bien enviada por correo electrónico antes de las 12:00 mediodía del siguiente viernes. Las fechas de los exámenes serán las siguientes:

miércoles 23 de setiembre; miércoles 28 de octubre; miércoles 2 de diciembre.

Cada examen valdrá un 33.3% de la nota final (N). Los estudiantes con $N \geq 7,0$ aprobarán el curso; los que tengan $N < 6,0$ lo perderán; con $6,0 \leq N < 7,0$ habrá derecho a un examen de ampliación, el día miércoles 9 de diciembre.

Bibliografía

En la parte introductoria de los apuntes del curso, se sugiere la siguiente lista de libros recomendados sobre geometría diferencial. En el transcurso del semestre, se buscará materia complementaria en la red (notas de curso en otros institutos, por ejemplo) al cual se puede acceder sin costo.

1. R. Abraham, J. E. Marsden and T. Ratiu, *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*, Springer, New York, 1988.
2. L. Conlon, *Differentiable Manifolds*, 2^a edición, Birkhäuser, Boston, 2008.
3. M. Crampin y F. A. E. Pirani, *Applicable Differential Geometry*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1986.
4. J. A. Dieudonné, *Éléments d'analyse*, tomo 3, Gauthier–Villars, París, 1974.
5. H. Flanders, *Differential Forms*, Academic Press, Orlando, FL, 1963.
6. J. M. Lee, *Manifolds and Differential Geometry*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2009.
7. A. N. Pressley, *Elementary Differential Geometry*, Springer, Berlin, 2010.
8. L. A. Santaló, *Introducción a la geometría diferencial de variedades diferenciables*, Universidad de Buenos Aires, 1965.
9. M. D. Spivak, *Cálculo en variedades*, Reverté, Barcelona, 1975.
10. L. W. Tu, *An Introduction to Manifolds*, Springer, New York, 2008.
11. L. W. Tu, *Differential Geometry*, Springer, Cham, Suiza, 2017.