Universidad de Costa Rica
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemática
Dpto. de Matemática Pura
II Ciclo 2020

Carta al estudiante - MA-0460 - Álgebra Lineal II

Información general

Profesor:	Daniel Campos Salas
Correo electrónico:	`daniel.clases.ucr@gmail.com`
Horario de consulta:	K 11:00 a.m.-12:00 p.m. y V 11:00 a.m.-1:00 p.m.
Horario de clase:	L 1:00-4:00 p.m. y J 1:00-3:00 p.m.

Metodología

La modalidad del curso será virtual (100%) a través de la plataforma Discord y el contenido se podrá encontrar en Mediación Virtual (MV). Se usarán como referencia las notas preparadas para el curso y se discutirán las lecciones en las horas regulares de clase mediante un encuentro virtual. Para los estudiantes que no puedan asistir en las horas disponibles, estas discusiones serán grabadas y se encontrarán disponibles en MV.

Aspectos generales del curso

1 Descripción

Este es un segundo curso en álgebra lineal que consiste básicamente en dos grandes temas: el estudio de subespacios invariantes bajo alguna transformación (o conjuntos de transformaciones) y álgebra multilineal y exterior.

El primer tema (subespacios invariantes) es un caso particular del principio general en matemática del estudio de objetos mediante invariantes o simetrías asociadas. En nuestro caso, estas ideas, aunque básicas, son fundamentales en diversas áreas de la matemática como el álgebra (por ejemplo, en teoría de representaciones) y el análisis (por ejemplo, en ecuaciones diferenciales), así como en física e ingenierías. El caso más elemental de estudio es el de autovectores, correspondientes a espacios invariantes unidimensionales, y sus autovalores, por lo que vamos a dedicar a ello una gran parte del curso. En el caso general, culminamos con la forma canónica de Jordan, que nos permite obtener una clasificación de las transformaciones lineales.

El segundo tema, álgebra multilineal y exterior, trata con objetos algebraicos de una naturaleza similar al determinante (estudiado anteriormente en MA-0360). Algunas de estas ideas iluminarán conceptos del cálculo en varias variables (como el concepto de rotacional de un campo vectorial), y otras jugarán un papel fundamental en cursos avanzados como Geometría Diferencial.

Si el tiempo permite, al final del curso daremos una breve introducción a los grupos y álgebras de Lie, y su relación con los tópicos desarrollados en el curso.

2 Programa del curso

Repaso

Espacios vectoriales, dimensión, bases. Transformaciones lineales, núcleo, imagen, teorema de rango-nulidad, matriz asociada a una transformación, matrices de cambio de base. Producto interno, normas, ortogonalidad, operador adjunto. Espacio dual, operador transpuesto, isomorfismo. Aplicaciones bilineales, formas cuadráticas, matrices simétricas. Aplicaciones multilineales. Determinantes y significado geométrico.

Preliminares

Polinomios, algoritmo euclidiano, máximo divisor común, factorización única. Operaciones con espacios vectoriales: intersección, cociente, suma y suma directa.

Subespacios invariantes I: autovectores y autovalores

Autovectores y autovalores. Polinomio característico. Teorema de Cayley-Hamilton. Polinomio minimal. Diagonalización de operadores.

Teoremas espectrales

Espacios vectoriales con producto interno, matriz/operador adjunto. Teorema espectral para operadores simétricos/hermíticos. Teorema espectral para operadores normales.

Aplicaciones y otros resultados

Formas bilineales, cuadráticas y signatura. Principio mín-máx de Courant-Fischer. Análogos discretos de problemas en ecuaciones en derivadas parciales. La matriz exponencial y ecuaciones diferenciales ordinarias. Funciones con matrices. Descomposición polar. Matrices estocásticas y teorema de Perron-Frobenius. Normas de matrices y relación con autovalores. Método QR para cálculo de autovalores de una matriz simétrica.

Subespacios invariantes II: autoespacios generalizados

Autoespacios generalizados. Descomposición primaria de un espacio vectorial. Forma canónica de Jordan. Triangularización de operadores.

Álgebra multilineal y exterior

Álgebra multilineal y productos tensoriales. Aplicaciones multilineales alternadas. Producto exterior, formas exteriores. El álgebra de Grassman. Productos interiores.

Tópicos adicionales: Grupos y álgebras de Lie

Nociones básicas de grupos y variedades diferenciales. Grupos clásicos de matrices. Grupos y álgebras de Lie. Mapeo exponencial y logarítmico. Ejemplos.

3 Propuesta de cronograma

Semana 1. 10-14 de agosto. Repaso.

Semana 2. 17-21 de agosto. Polinomios, algoritmo euclidiano, máximo divisor común, factorización única. Operaciones con espacios vectoriales: intersección, cociente, suma, suma directa.

Semana 3. 24-28 de agosto. Autovectores y autovalores. Polinomio característico. Teorema de Cayley-Hamilton. Polinomio minimal. Diagonalización de operadores.

Semana 4. 31 de agosto-4 de setiembre. Espacios vectoriales con producto interno, matriz/operador adjunto. Teorema espectral para operadores simétricos/hermíticos. Teorema espectral para operadores normales. **Hasta aquí los temas a evaluar en el primer examen**.

Semana 5. 7-11 de setiembre. Formas bilineales, cuadráticas y signatura. Principio mín-máx de Courant-Fischer.

Semana 6. 14-18 de setiembre. Entrega del primer Examen Parcial. Análogos discretos de problemas en ecuaciones en derivadas parciales.

Semana 7. 21-25 de setiembre. La matriz exponencial y ecuaciones diferenciales ordinarias.

Semana 8. 28 de setiembre-2 de octubre. Cálculo funcional con matrices. Descomposición polar. Matrices estocásticas y teorema de Perron-Frobenius.

Semana 9. 5-9 de octubre. Normas de matrices y relación con autovalores. Método QR para cálculo de autovalores de una matriz simétrica.

Semana 10. 12-16 de octubre. Autoespacios generalizados. Descomposición primaria de un espacio vectorial. Forma canónica de Jordan.

Semana 11. 19-23 de octubre. Forma canónica de Jordan. Triangularización de operadores. **Hasta aquí los temas a evaluar en el segundo examen**.

Semana 12. 26-30 de octubre. Álgebra multilineal y productos tensoriales.

Semana 13. 2-6 de noviembre. Entrega del segundo Examen Parcial. Aplicaciones multilineales alternadas. Producto exterior, formas exteriores.

Semana 14. 9-13 de noviembre. El álgebra de Grassman. Productos interiores.

Semana 15. 16-20 de noviembre. Nociones básicas de grupos y variedades diferenciales. Grupos clásicos de matrices.

Semana 16. 23-27 de noviembre. Grupos y álgebras de Lie. Mapeo exponencial y logarítmico. Ejemplos.

⋆ Fechas especiales

Inicio de lecciones	Lunes 10 de agosto
Fin de lecciones	Sábado 28 de noviembre

4 Evaluación y fechas

La evaluación consistirá en las siguientes rúbricas:

1. **dos exámenes parciales** de 2,5 puntos cada uno,
2. **tres proyectos** de 1 punto cada uno,
3. **cuatro reportes** del Cibercoloquio Latinoamericano de Matemáticas (0,25 por reporte),
4. el punto restante se describe abajo.

Los proyectos consistirán en una especie de tareas guiadas, con el objetivo que el estudiante sea quien realice sus conjeturas y las demuestre. En los reportes de cada una de las charlas del Cibercoloquio se debe escribir sobre tres aspectos (pueden ser definiciones, teoremas o ideas generales) que le hayan llamado la atención. El **punto restante** puede conseguirse de alguna de las siguientes maneras:

1. Escribir la solución en LaTeX de 30 problemas de la lista (0,5 puntos) y responder 5 de estos ejercicios escogidos aleatoriamente en un examen oral (0,5 puntos).

2. Proponer 20 problemas nuevos (e interesantes) para la lista de problemas con sus soluciones escritas en LaTeX (0,5 puntos) y responder 5 de estos ejercicios escogidos aleatoriamente en un examen oral (0,5 puntos).

3. Completar las demostraciones y ejercicios de las notas de clase (sin presentar ningún documento) y presentar 5 de estas demostraciones o ejercicios escogidos aleatoriamente en un examen oral.

4. Dar un coloquio para la Escuela de Matemática presentando un tema relacionado con el curso.

El estudiante que necesite solicitar una reposición debe presentar el formulario correspondiente (disponible en la página web `www.emate.ucr.ac.cr`) con la documentación que respalde el motivo de ausencia. Se le aprobará su solicitud siempre y cuando esta cumpla con lo establecido en el Reglamento de Régimen Académico Estudiantil (Capítulo VI, artículo 24).

El curso se aprueba con nota mayor o igual a 7,0 y se reprueba automáticamente con nota menor a 6,0; en caso de obtener una nota entre 6,0 y 7,0, el estudiante tiene derecho a un examen de ampliación correspondiente a la materia de los dos exámenes parciales.

Entrega de Primer Parcial	Lunes 14 de setiembre
Entrega de Segundo Parcial	Lunes 2 de noviembre
Escogencia del punto restante	Hasta el 12 de octubre
Entrega de reportes	Hasta el 26 de noviembre
Presentación del punto restante	Hasta el 3 de diciembre
Ampliación	Lunes 10 de diciembre
Entrega de proyectos	Por definir

5 Bibliografía sugerida

La mayoría de los libros correspondientes a una introducción al análisis complejo coinciden en una primera parte estándar, a pesar de que sus exposiciones pueden variar entre un enfoque más geométrico u otro más analítico. Por lo tanto, cualquier libro decente de análisis complejo contiene un núcleo que coincide con los temas expuestos en las primeras dos partes del curso y podrá ser consultado. Las referencias que usaremos como guía son las siguientes:

1. P.D. Lax, *Linear Algebra and Its Applications*, Pure and Applied Mathematics, John Wiley & Sons, 2007.

2. S. Lang, *Linear Algebra*, World Student Series, Addison-Wesley, 1968.

3. G.E. Shilov, *Linear Algebra*, Dover Publications, 1977.

4. S. Axler, *Linear Algebra Done Right*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 1996.

Para la parte de álgebra multilineal y exterior usaremos como guía las siguientes referencias:

5. E.L. Lima, *Álgebra Exterior*, Coleção Matemática Universtária, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2005.

6. E.L. Lima, *Cálculo Tensorial*, Publicações Matemáticas, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2012.

Otros libros de referencia que puede consultar son:

7. F.R. Gantmacher, *The Theory of Matrices, Vol. I-II*, AMS Chelsea Publishing, 2000.

8. P.R. Halmos, *Finite-Dimensional Vector Spaces*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 1987.

9. K. Hoffman, R. Kunze, *Linear Algebra*, Prentice-Hall, 1971.

10. A. Kirillov, Jr., *Introduction to Lie Groups and Lie Algebras*, `math.stonybrook.edu/\~kirillov/mat552/liegroups.pdf`

11. S. Weintraub, *A Guide to Advanced Linear Algebra*, The Dolciani Mathematical Expositions 44, Mathematical Association of America, 2011.

Algunos libros de problemas son los siguientes:

1. P.R. Halmos, *Linear Algebra Problem Book*, The Dolciani Mathematical Expositions 16, Mathematical Association of America, 1995.

2. G. Pólya, G. Szegő, *Problems and Theorems in Analysis. Vol. II*, Classics in Mathematics, Springer, 1998.

3. V. Prasolov, *Problems and Theorems in Linear Algebra*, `staff.math.su.se/mleites/books/prasolov-1994-problems.pdf`

4. P.N. de Souza, J.N. Silva, *Berkeley Problems in Mathematics*, Problem Books in Mathematics, Springer, 2004.