



UNIVERSIDAD DE COSTA RICA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICA

**EMat** Escuela de  
Matemática

Matemática Pura  
II Ciclo - 2020  
MA0250 Cálculo en una Variable I

## Carta al estudiante

### 1. Información General

<b>Nivel de virtualidad del curso: VIRTUAL</b>	
<b>Año: I año</b>	<b>Requisitos: MA-0150</b>
<b>Ciclo: II ciclo</b>	<b>Correquisitos: ninguno</b>
<b>Tipo de curso: teórico</b>	<b>Horas virtuales por semana: 5</b>
<b>Créditos:4</b>	<b>Horas de trabajo independiente por semana: 7</b>

#### Grupo 01:

Horario de clases: Lunes 10:00-12:50, Jueves 10:00-11:50 .

Horario de consulta: Martes 9:00-11:30.

Profesor: Dr. José David Campos Fernández.

Correo electrónico: [josedavid.campos@ucr.ac.cr](mailto:josedavid.campos@ucr.ac.cr).

Oficina: 317 Edificio Anexo de la Escuela de Matemática, Ciudad de la Investigación.

Teléfono: 2511-6621.

Zoom-ID: 929-628-9166

## Grupo 02:

Horario de clases: Martes 17:00-19:50, Viernes 17:00-18:50.

Horario de consulta: Miércoles 17:00-18:30.

Profesor: Jimmy José Calvo Monge.

Correo electrónico: jimmy.calvo@ucr.ac.cr.

Oficina: 316 Edificio Anexo de la Escuela de Matemática, Ciudad de la Investigación.

Teléfono: 8988-4004.

Zoom-ID: 828-361-8184

## 2. Descripción

*Estimado(a) estudiante:* Reciba la más cordial bienvenida al curso MA0250 Cálculo en una variable I. En este documento encontrará información sobre algunos aspectos del curso que usted debe conocer: descripción, objetivos, contenidos, metodología, evaluación, referencias bibliográficas propuestas, horario del curso y de consulta del profesor.

El Cálculo Diferencial e Integral constituye uno de los más grandes triunfos intelectuales de la historia de la humanidad. Este ha posibilitado una gran parte de los avances tecnológicos y científicos que se han tenido en los últimos siglos. Este es un curso de primer año, dentro del plan de estudios de las carreras de Bachillerato y Licenciatura en Matemáticas y en Ciencias Actuariales. Es el primero de una secuencia de tres cursos de cálculo (en una y varias variables). A lo largo de esta secuencia, se cubren los temas usuales de análisis matemático y el cálculo diferencial. Se presenta el material de una manera rigurosa, haciendo énfasis en aplicaciones, planteamiento y resolución de problemas. De esta manera el estudiante tiene la oportunidad de incursionar en el aprendizaje de las técnicas de razonamiento y demostración propias del análisis matemático, así como de desarrollar las habilidades y destrezas necesarias para poner en práctica las ideas de cálculo.

El curso se centra en particular en el estudio de la propiedad de completitud del conjunto de los números reales y algunas de sus implicaciones, en el estudio de las sucesiones en los reales, los límites de funciones de variable real, las funciones continuas y los fundamentos del cálculo diferencial. Se busca contribuir a la formación matemática del estudiante, su habilidad para interpretar y deducir resultados del análisis, propiciando el uso correcto del lenguaje matemático para expresar ideas de manera rigurosa y coherente.

### 3. Objetivos

#### 3.1. Objetivos Generales

1. Adquirir conocimientos del cálculo diferencial y el análisis matemático en una variable real, los cuales son base para el desarrollo de futuros contenidos en el área del análisis.
2. Desarrollar el buen uso del lenguaje lógico matemático, mediante el estudio riguroso de los temas de análisis y cálculo.
3. Desarrollar la capacidad para reconocer, plantear y resolver problemas de diversas disciplinas, mediante el uso del cálculo diferencial en una variable.
4. Comprender el desarrollo histórico del cálculo, como parte fundamental de su formación matemática.

#### 3.2. Objetivos Específicos

1. Definir el concepto de completitud de los números reales y desarrollar las competencias necesarias para aplicarlo en la elaboración de otros conceptos.
2. Calcular límites de funciones mediante diferentes herramientas (en particular con la regla de L'Hôpital. )
3. Determinar la convergencia o la divergencia de una sucesión numérica y calcular el límite de una sucesión convergente.
4. Demostrar y aplicar los principales teoremas sobre sucesiones numéricas.
5. Identificar nociones básicas de topología en  $\mathbb{R}$ .
6. Definir formalmente los conceptos: límite de una función en un punto dado, límite al infinito y límite infinito.
7. Demostrar y aplicar los teoremas referentes a límites de funciones.
8. Definir formalmente el concepto de continuidad de una función en un punto dado y en un intervalo.

9. Probar la continuidad de una función de manera algebraica y mediante propiedades.
10. Demostrar y aplicar los teoremas más importantes referentes a la continuidad de funciones.
11. Definir formalmente el concepto de derivabilidad de una función en un punto dado y en un intervalo.
12. Demostrar y aplicar los teoremas referentes a la derivada de una función.
13. Calcular derivadas de funciones usando la definición y las reglas de derivación.
14. Aplicar el concepto de derivada en la solución de problemas prácticos.
15. Trazar gráficas de funciones elementales, identificando puntos críticos, monotonía y sentido de concavidad mediante el uso del cálculo diferencial.

## 4. Contenidos y Estructura del Curso

### Capítulo 1. La propiedad de completitud de los reales y sus consecuencias (1 semana):

1. Axiomas de cuerpo y propiedades básicas.
2. Cotas superiores e inferiores.
3. El axioma de completitud de los números reales.
4. Consecuencias del axioma de completitud: la propiedad de intervalos encajados, la propiedad arquimediana, la densidad de  $\mathbb{Q}$  y de  $\mathbb{R}$ , existencia de las raíces cuadradas.
5. Cardinalidad: contabilidad de los racionales y no contabilidad de  $\mathbb{R}$ .

### Capítulo 2. Introducción informal al concepto de límite (1 semana):

1. Concepto y definición informal de límite.
2. Límites laterales, límites infinitos y asíntotas verticales.
3. Propiedades y cálculo de límites: leyes de límites, propiedad de sustitución directa para funciones polinomiales y racionales, el teorema de Comparación.
4. Límites al infinito y asíntotas horizontales.

### Capítulo 3. Las sucesiones en los reales ( $2\frac{1}{2}$ semanas):

1. Definición de sucesión. Sucesiones definidas por recurrencia. Notaciones básicas para sucesiones y formas de representación gráfica de sucesiones de números reales.
2. Definición de convergencia y divergencia de sucesiones. La noción de límite.
3. Propiedades básicas de sucesiones convergentes: unicidad de los límites, toda sucesión convergente es acotada.
4. Operaciones algebraicas y límites, relación de orden y límites, el teorema de la compresión.
5. Sucesiones monótonas y el Teorema de Convergencia Monótona.
6. Series numéricas como ejemplo de sucesiones: definición de sumas parciales y convergencia de una serie. Ejemplos básicos de series: serie armónica, p-series.
7. Subsucesiones y el Teorema de Bolzano-Weierstrass.
8. Sucesiones de Cauchy y el Criterio de Convergencia de Cauchy.
9. El límite superior  $\overline{\lim}$  y el límite inferior  $\underline{\lim}$  de una sucesión. Definición y caracterización básica.

**Capítulo 4. Nociones básicas de topología en  $\mathbb{R}$  (1 semana):**

1. Definición de conjuntos abiertos y cerrados en  $\mathbb{R}$ .
2. Puntos límites: caracterización de estos en términos de convergencia de sucesiones y caracterización de conjuntos cerrados en términos de convergencia de sucesiones de Cauchy.
3. Definición de la clausura de un subconjunto de  $\mathbb{R}$  y su caracterización en términos de puntos límite y conjuntos cerrados.
4. Conjuntos compactos: definición de compacidad secuencial y su caracterización en términos de conjuntos cerrados y acotados.

**Capítulo 5. Límites funcionales y continuidad ( $2\frac{1}{2}$  semanas):**

1. Definición rigurosa del límite de una función de variable real. Interpretación geométrica.
2. Criterio secuencial para la existencia de un límite.
3. Operaciones algebraicas y límites. Límites laterales, límites al infinito y límites infinitos. El Teorema de la Compresión.

4. Definición de continuidad. Ejemplos de funciones continuas y de funciones con discontinuidades.
5. Caracterización secuencial de la continuidad. Operaciones algebraicas con funciones continuas, composición de funciones continuas.
6. Funciones continuas en conjuntos compactos. Preservación de conjuntos compactos bajo funciones continuas. Teorema de los Valores Extremos.
7. Continuidad Uniforme. Criterio secuencial para la ausencia de continuidad uniforme. Continuidad uniforme en conjuntos compactos.
8. Teorema de los Valores Intermedios.

### **Capítulo 6. Diferenciación (2 semanas):**

1. Definición de derivada de una función de una variable real. Ejemplos básicos.
2. Relación entre derivabilidad y continuidad. Reglas de derivación básicas: regla para la suma, producto y cociente de funciones, la Regla de la Cadena, derivada de una función inversa, derivación implícita.
3. Derivadas de las funciones elementales: polinomios, exponenciales, logaritmos, trigonométricas.
4. Teoremas del Valor Medio, el Teorema de Rolle, Teorema del Valor Medio, Teorema de Valor Medio Generalizado. Consecuencias básicas de estos: una función con derivada nula es constante, funciones con igual derivada difieren por una constante.
5. Teorema del Valor Extremo Interior (Teorema de Fermat), Teorema de Darboux.

### **Capítulo 7. Aplicaciones del cálculo diferencial (2 semanas):**

1. Relación entre la primera derivada y el crecimiento de una función. El criterio de la primera derivada para extremos locales.
2. Convexidad y Concavidad y su relación con la segunda derivada de una función. El criterio de la segunda derivada para extremos locales.
3. Graficación de funciones mediante las técnicas de cálculo.
4. Problemas de optimización.

5. Las Reglas de L'Hôpital. Ejemplos de su uso en el cálculo de límites.

### Capítulo 8. Aproximación de funciones por polinomios (2 semanas):

1. Comparación de funciones y notación asintótica: las notaciones O-grande y o-pequeña de Landau. Propiedades básicas y ejemplos.
2. Aproximación de funciones por polinomios. Polinomios de Taylor generados por una función. Propiedades básicas. Teorema de Taylor con la forma del resto de Lagrange.
3. Ejemplos de polinomios de Taylor de algunas funciones elementales.
4. Desarrollos limitados. Definición, propiedades básicas y ejemplos.
5. Cálculo de límites usando desarrollos limitados.

Una semana previa a cada prueba parcial se dedicará a repaso (**2 semanas**).

## 5. Pautas de Evaluación

### 1. Rubros de evaluación:

- a) *Exámenes*: Se realizarán dos exámenes parciales cuyo promedio tendrá un valor de 70 % en la nota de aprovechamiento. Los temas que serán evaluados en cada parcial se darán a conocer con la debida anticipación. Las fechas de los exámenes serían:

Examen	Fecha
Primer parcial	1 de Octubre
Segundo parcial	3 de Diciembre
Ampliación	14 de Diciembre

- b) *Tareas y guías de trabajo*: El 30 % restante corresponde al promedio de la nota de las tareas. Estas deberán entregarse en la fecha que se indique (sin excepción), individualmente y en forma escrita.

2. **Reporte de la nota final del curso y examen de ampliación**: la nota final del curso  $N_{\text{final}}$  se obtendrá a partir de la nota de aprovechamiento  $N_{\text{aprov}}$ , expresada en una escala de 0 a 10,

redondeada a la unidad o media unidad más próxima. La nota final del curso  $N_{\text{final}}$  es la que se reportará a la Oficina de Registro e Información, salvo en el caso de que  $N_{\text{final}} = 6.0$  o que  $N_{\text{final}} = 6.5$ , en cuyo caso el estudiante tiene derecho a realizar un examen de ampliación, a realizarse en la fecha indicada en el calendario de exámenes del curso. Si el estudiante obtiene una nota igual o superior a 7.0 en la prueba de ampliación, la nota final que se le reportará en el curso será 7.0. Si la nota de ampliación es estrictamente menor a 7.0, se reportará como nota de aprovechamiento un 6.0 o 6.5, según haya sido el caso.

3. **Reposición de exámenes:** si un estudiante no puede realizar alguno de los exámenes, la realización de una prueba de reposición está sujeta a lo dispuesto en el artículo 24 del Reglamento de Régimen Académico Estudiantil de la Universidad de Costa Rica<sup>1</sup>, el cual citamos a continuación.

**ARTÍCULO 24.** Cuando el estudiante se vea imposibilitado, por razones justificadas, para efectuar una evaluación en la fecha fijada, puede presentar una solicitud de reposición a más tardar en cinco días hábiles a partir del momento en que se reintegre normalmente a sus estudios. Esta solicitud debe presentarla ante el profesor que imparte el curso, adjuntando la documentación y las razones por las cuales no pudo efectuar la presentación de la solicitud, si procede una reposición. Si ésta procede, el profesor deberá fijar la fecha de reposición, la cual no podrá establecerse en un plazo menor de cinco días hábiles contados a partir del momento en que el estudiante se reintegre normalmente a sus estudios. Son justificaciones: la muerte de un pariente hasta de segundo grado, la enfermedad del estudiante u otra situación de fuerza mayor o caso fortuito. En caso de rechazo, esta decisión puede ser apelada ante la dirección de la unidad académica en los cinco días hábiles posteriores a la notificación del rechazo, según lo establecido en este Reglamento.

## 6. Metodología y uso del entorno virtual:

La metodología que se empleará en el curso será virtual. Se realizarán sesiones en línea donde se presentarán los contenidos (con acceso a grabaciones de las mismas) y se dará seguimiento al avance y consulta. El curso utilizará la plataforma de Mediación Virtual <https://mediacionvirtual.ucr.ac.cr>. En dicha plataforma se compartirán documentos de interés para el curso (videos, tareas, solucionarios,

---

<sup>1</sup>Este reglamento se puede consultar en la página web [http://www.cu.ucr.ac.cr/normativ/regimen\\_academico\\_estudiantil.pdf](http://www.cu.ucr.ac.cr/normativ/regimen_academico_estudiantil.pdf)



notas del curso, ejercicios adicionales). Según la Resolución VD-R-9374-2016, este es un curso de modalidad Virtual. La entrega de evaluaciones se realizará por medio de esta plataforma, siguiendo las fechas y horas establecidas en la asignación de cada actividad.

## 7. Bibliografía

- [1] S. Abbott, *Understanding Analysis*. Second Edition. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2015.
- [2] T. Apóstol, *Calculus*, Editorial Reverté, segunda edición (1978).
- [3] T. Apóstol, *Análisis Matemático*, Editorial Reverté, segunda edición (1982).
- [4] R. Bartle and D. Sherbert, *Introducción al Análisis Matemático de una Variable*, Limusa Wiley, tercera edición (2010).
- [5] R. Bartle and D. Sherbert, *Introduction to Real Analysis*, John Wiley & Sons Inc., fourth edition (2011).
- [6] S. Cambroner, *Apuntes para el curso MA-0250*. Universidad de Costa Rica, 2018
- [7] B. Demidovich, *Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático*, Editorial Mir (1973).
- [8] K. Ross, *Elementary Analysis. The theory of calculus*. Springer. New York, 2013.
- [9] M. Spivak, *Cálculo Infinitesimal*, Editorial Reverté, segunda edición (1992).
- [10] M. Spivak, *Calculus*, Publish or Perish, fourth edition (2008).
- [11] W. Ugalde, *MA0250 Cálculo en una variable I*. Universidad de Costa Rica, 2013.
- [12] W.R. Wade, *An introduction to analysis*. Prentice Hall. New Jersey, 2004.