PROGRAMA DEL CURSO

Curso: MA-0019 FUNCIONES RIEMANN INTEGRABLES

Nivel: VI Ciclo

Requisitos: MA-0012 Funciones derivables

Tipo de Curso: Teórico

Co-requisitos: No tiene

Créditos: 4

Horas presenciales: 5

I. DESCRIPCIÓN

En la medición o aproximación de área, volumen, longitud, promedio, se usaron métodos diversos a lo largo de siglos, hoy éstos y otros se unifican y calculan con la integral. El propósito de este curso es estudiar el concepto de integral y su versatilidad.

Inicia con el cálculo de áreas bajo la gráfica de funciones escalonadas para luego introducir las sumas de Riemann de funciones acotadas en compactos. La definición de integral como límite de las sumas se analiza en diferentes contextos geométricos para obtener: el área de una región, el volumen de un sólido de revolución, la longitud de arco y el área de una superficie de revolución.

Se mantiene el rigor, pero se omiten las demostraciones de algunas proposiciones, pues en el caso de mostrar integrabilidad el método es repetitivo. No obstante, se considera que son necesarias las demostraciones que justifican las técnicas de integración por partes o sustitución porque ayudan a la comprensión de los métodos y reducen la posibilidad de cometer errores (como hacer sustituciones no válidas).

Al T. Fundamental del Cálculo se le dedica especial atención, porque favorece la comprensión de los conceptos más importantes de la temática y los relaciona.

II. OBJETIVOS

Durante este curso el estudiante será capaz de:

1) Calcular el área bajo la gráfica de funciones escalonadas.
2) Calcular la integral de funciones como el límite de una suma de Riemann.
3) Demostrar y utilizar las propiedades de la integral.
4) Enunciar, demostrar y aplicar el Teorema fundamental del Cálculo.
5) Mostrar destreza en los métodos de integración.
6) Aproximar integrales definidas de funciones usando el polinomio de Taylor y acotar el error.
7) Calcular áreas de regiones planas entre curvas.
8) Aplicar sumas de Riemann para demostrar desigualdades.
9) Calcular volúmenes de sólidos de revolución por secciones transversales y por capas cilíndricas.
10) Calcular áreas de superficies de revolución y longitud de arco.
11) Determinar la convergencia de integrales impropias. Demostrar la convergencia o divergencia de series numéricas.
12) Hallar el radio y el intervalo de convergencia de una serie de potencias.
13) Hallar la serie de Taylor generada por una función y viceversa.

III. CONTENIDOS

TEMA 1: Integral de Riemann

Área bajo la gráfica de funciones escalonadas. Sumas de Riemann superiores e inferiores de funciones continuas y discontinuas a trozos. Integrabilidad de Riemann. Propiedades de la integral. Antiderivadas. Teorema fundamental del Cálculo. Métodos de Integración. Cálculo de áreas. Integración aproximada con polinomios de Taylor.

TEMA 2: Aplicaciones de la Integral

Volumen de Sólidos de revolución: por secciones transversales y por capas cilíndricas. Longitud de arco. Áreas de superficies de revolución. Otras aplicaciones: a la economía (Superávit del consumidor), en la medicina (Ley de Poiseuville sobre flujo sanguíneo en las arterias) o en la física (Momentos y centros de masa).

TEMA 3: Integrales Impropias

Definición de Integral impropia y su interpretación geométrica. Condición necesaria de convergencia. Criterios de convergencia. Convergencia absoluta y condicional.

TEMA 4: Series numéricas y series de potencias

Convergencia. Series geométricas. Condición Necesaria de convergencia. Propiedades de las series convergentes. Series Telescópicas. Criterio Integral de convergencia. Criterios de comparación. Series alternadas. Convergencia absoluta y condicional. Criterios de D ´Alambert , de Cauchy, de Dirichlet.

Serie de potencias. Radio e intervalo de convergencia. Convergencia uniforme de una serie de potencias en un compacto contenido en el intervalo de convergencia. Serie de Taylor.

IV. METODOLOGÍA

La clase magistral a cargo del profesor debe versar sobre los contenidos más importantes o de mayor dificultad (como el primer tema), pero permitiendo la participación de los estudiantes que ya para este nivel debe evidenciar un importante progreso en la formulación de conjeturas, argumentos, demostraciones. Esta labor se debe complementar con las exposiciones por parte de los estudiantes y el trabajo en grupos en el aula sobre la resolución de problemas.

En este nivel de la carrera es importante que el profesor del curso propicie la reflexión de los estudiantes sobre los procesos mentales que se activan cuando trabajan en resolución de problemas, así como explicar a otros, las estrategias que siguen durante esta actividad matemática. Además, los espacios de práctica docente deben ocupar más tiempo, por ello en este curso cada estudiante debe planear y ejecutar una sesión de trabajo sobre un contenido propio del curso (del tema 2 o tema 4), en la cual tiene la responsabilidad de promover el logro del objetivo correspondiente. Al final debe justificar con argumentos didácticos su propuesta de micro clase.

Los estudiantes en este nivel ya cuentan con cierta práctica en la elaboración de trabajos sobre los momentos o los actores relevantes en la historia de la matemática. Contando con esta madurez es que en este curso se escogen algunos procesos del periodo del nacimiento, desarrollo y formalización del cálculo para ser analizados en un trabajo escrito que debe reflejar los avatares de la creación matemática. En la conclusión deben anotar en que les ayudó el trabajo realizado a profundizar o aclarar los conceptos matemáticos. Algunos temas posibles pueden ser:

1. El desarrollo del concepto de límite hasta su formalización
2. Antecedentes y consecuencias del TFC.
3. Cauchy, Bolzano, Weierstrass y el paso del Cálculo intuitivo al Análisis

Se recomienda asignar tareas sobre ejercicios diferentes para cada estudiante pero sobre el mismo tema y en los cuales deben necesitar el uso de la computadora. Así también la tecnología debe ser usada para resolver problemas y reafirmar los conceptos, así por ejemplo los estudiantes pueden ejecutar las siguientes actividades:

1. Calcular Integrales usando sumas de Riemann (con particiones finas).
2. Investigar la convergencia de una serie.
3. Aproximar integrales definidas de funciones que no se les conoce antiderivada, usando el Polinomio de Taylor (grado alto) de la función.

V. EVALUACIÓN

Se sugiere evaluar el desempeño de los estudiantes, mediante productos tales como:

- Exámenes parciales
- Tareas
- Micro clase
- Trabajo sobre historia

De la exposición se recomienda evaluar: conocimiento del tema, claridad de la exposición, la pertinencia de los ejemplos o aplicaciones y del material didáctico.

VI. BIBLIOGRAFÍA

- Apostol, M. (1977). **Calculus. Volumen I**. España: Reverté.
- Bartle. R, Sherbert. D. (1996). **Introducción al Análisis Matemático de una variable.** Mexico: Editorial Limusa S.A Grupo Noriega editores.
- Demidovich. (1984).**Ejercicios de Análisis Matemático**. Moscú: Editorial MIR.
- Sánchez, C. (2004). **De los Bernoulli a los Burbaki, una historia de la ciencia y el arte del cálculo.** España: Editorial Nivola.
- Spivak .M. (1992). **Calculus. Cálculo Infinitesimal.** España: Editorial Reverté.