



## PROGRAMA DEL CURSO

### Curso: MA-0009 NÚMEROS REALES

**Nivel:** III Ciclo

**Requisitos:** MA-0005 Introducción a las funciones y MA-0006

Conjuntos numéricos

**Tipo de Curso:** Teórico

**Co-requisitos:** No tiene

**Créditos:** 4

**Horas presenciales:** 5

#### I. DESCRIPCIÓN

---

Este curso tiene como propósito estudiar los números reales con sus propiedades algebraicas y analíticas. El énfasis recae en las últimas porque se debe ofrecer al estudiante una base sólida para los siguientes cursos de la secuencia de Análisis. La comprensión de la naturaleza de los números reales requiere de un buen manejo del concepto de convergencia de sucesiones numéricas, por lo que este tema constituye parte fundamental del curso.

Las series geométricas se estudian para formalizar las expansiones de números reales en diferentes bases, importante en la formación de educadores matemáticos porque les permite discutir y construir situaciones de enseñanza del tema de números reales en la educación secundaria.

#### II. OBJETIVOS

---

Durante este curso, se espera que el estudiante sea capaz de:

- 1) Resolver ecuaciones e inecuaciones con expresiones que contienen valor absoluto y usar diversas representaciones de las soluciones.
- 2) Determinar el extremo superior e inferior, el máximo y el mínimo de un conjunto acotado.
- 3) Usar la caracterización del supremo y del ínfimo para demostrar si un número es o no un extremo.
- 4) Calcular límites de sucesiones justificando el procedimiento.
- 5) Demostrar la convergencia o divergencia de una sucesión.



- 6) Identificar diversos números reales según su expansión decimal.
- 7) Demostrar que una expansión decimal periódica corresponde a un número racional.
- 8) Construir funciones biyectivas entre conjuntos equipolentes.
- 9) Demostrar la numerabilidad de los racionales y la no numerabilidad de  $\mathbb{R}$ .
- 10) Demostrar las propiedades de la función exponencial y logarítmica en  $\mathbb{R}$  a partir de las propiedades en  $\mathbb{Q}$  usando las expansiones decimales.
- 11) Exponer un concepto estudiado formalmente en el curso proponiendo actividades o material para la presentación del mismo en secundaria.
- 12) Elaborar una memoria con base en los apuntes de las discusiones realizadas en clase sobre historia.

### III. CONTENIDOS

---

#### **TEMA 1: Los números reales**

Presentación axiomática de  $\mathbb{R}$ . Propiedades algebraicas y de orden de  $\mathbb{R}$ . Valor absoluto, parte entera. El axioma del Extremo Superior. Caracterización del supremo y del ínfimo. Principio de Arquímedes. Existencia de raíces. Intervalos y decimales.

#### **TEMA 2: Sucesiones**

Concepto de sucesión, convergencia. Teoremas de límites. Cálculo de límites de sucesiones. Sucesiones monótonas. Subsucesiones y el teorema de Bolzano Weierstrass. Existencia de raíces vía sucesiones. Criterio de Cauchy. Sucesiones divergentes.

#### **TEMA 3: Expansiones**

Expansiones decimales. Números con expansión finita. Aritmética con expansiones decimales. Expansiones de números reales en base arbitraria. Expansiones de números irracionales.

#### **TEMA 4: Equipotencia**

La relación de equipotencia de conjuntos. Conjuntos finitos e infinitos. Conjuntos numerables y no numerables. Numerabilidad de  $\mathbb{Q}$ . Innumerabilidad de  $\mathbb{R}$ . Teorema Shauder-Bernstein.



## TEMA 5: Funciones Exponencial y Logarítmica

Construcción de la función exponencial vía sucesiones. El logaritmo, el número e, logaritmo natural. Propiedades. El número e como suma infinita. Irracionalidad del número e.

### IV. METODOLOGÍA

---

Las clases presenciales se complementan con el trabajo de los estudiantes en grupos para resolver ejercicios, con sesiones de discusión sobre artículos de historia y una exposición por parte de cada estudiante.

Las soluciones de los ejercicios se exponen en la pizarra por representantes de los grupos. En este nivel el profesor debe dedicar especial atención a la comunicación, motivar a los estudiantes a reescribir las soluciones expuestas en la pizarra con mejor forma en sus cuadernos.

Para atender la formación en historia y epistemología de la matemática, el libro *El número  $\pi$  siete mil años de misterio*, debe ser leído en forma completa por los estudiantes, el profesor puede elegir capítulos para hacer discusiones en clase. Además, detectar momentos determinantes de la historia y asignar responsables para ampliar o profundizar sobre estos temas. Otras lecturas adecuadas son:

\* *Continuidad y números irracionales* de Richard Dedekind 1887.

\* Parágrafo 4 del capítulo 1: *Aritmética y geometría* del libro *La matemática: su contenido métodos y significado*.

Se debe dejar espacio para la discusión sobre los conceptos de las temáticas del curso que son estudiadas en la secundaria, por ejemplo ¿Cuánto y por qué debe llegar a la secundaria de: valor absoluto, intervalos, densidad, principio de Arquímedes, completitud, expansiones? Haciendo un análisis de los errores o dificultades en el estudio de estos temas y un contraste entre lo hecho formalmente en el curso y el estudio de los mismos en la secundaria y en los libros de texto.

Se recomienda asignar una tarea para realizar en grupo, que consiste en una pequeña investigación sobre temas como:

- 1) Sucesiones por recurrencia y aplicación a la aproximación de  $\sqrt{a}$  para diferentes valores del subradical.
- 2) Análisis de la convergencia de la sucesión  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  y aproximación del número e.



- 3) Sucesión de Fibonacci y el número áureo.
- 4) Fórmula recursiva para aproximar el punto fijo de una función y aplicaciones.

## V. EVALUACIÓN

---

Se sugiere evaluar el desempeño de los estudiantes, mediante productos tales como: exámenes parciales, tareas, exposiciones, memoria escrita de las discusiones realizadas en la clase sobre historia.

## VI. BIBLIOGRAFÍA

---

- 1) Alexandrov, A.D. Kolmogororov, A.N.y otros. (1974) **La matemática: su contenido métodos y significado**. España: Alianza editorial.
- 2) Barahona, M (1990). **El número  $\pi$  siete mil años de misterio**. Costa Rica: Imprenta y Litografía Mundo Gráfico S.A.
- 3) Bartle. R, Sherbert. D. (1996). **Introducción al Análisis Matemático de una variable**. México: Editorial Limusa S.A Grupo Noriega editores.
- 4) Rudin, W. (1987). **Principios de Análisis Matemático**. Editorial McGraw-Hill. México.
- 5) Takeuchi, Y. (1986). **Sucesiones y series**. Editorial Limusa.