

DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

CARTA AL ESTUDIANTE II-2020

Curso: MA-0032, Funciones de varias variables

Nivel: VIII Ciclo

Tipo de Curso: Teórico

Créditos: 5

Horario de sesiones sincrónicas:

Martes: 8:00 - 9:30

Viernes: 7:00 - 8:30

Profesor del curso: Jeremías Ramírez
Jiménez.

Requisitos: MA-0015 y MA-0019

Co-requisitos: no tiene

Modalidad: Virtual

Horario de consulta sincrónica:

Martes: 10:00 – 11:00

Viernes: 9:00 – 11:00

Correo: jeremias.ramirez@ucr.ac.cr

I. DESCRIPCIÓN

Este curso está dirigido a estudiantes de la carrera en Educación Matemática. El mismo desarrolla los temas principales del cálculo diferencial e integral de varias variables, y parte inicialmente del abordaje de las funciones de varias variables, en aspectos básicos como lo son los conceptos de dominio, codominio, rango y gráfico, vinculado con su representación gráfica. Esto generaliza los procedimientos y técnicas usuales que se presentan en el estudio de funciones reales de una variable real, de modo que provee en el estudiantado una comprensión más profunda de este tema. Posteriormente, se generaliza la idea básica de distancia en la recta real, mediante el concepto de métrica o norma en \mathbf{R}^n , para poder extender el concepto de límite de una función de varias variables. El concepto de límite de una función de varias variables se estudia tanto desde

un punto de vista geométrico como formal, lo que permite luego vincularlo con aplicaciones a distintas áreas del conocimiento humano. Una vez introducido el concepto de límite y continuidad, se estudia el cálculo diferencial e integral en varias variables, involucrando técnicas y aplicaciones, pero también estudiando algunas demostraciones claves dentro de estos temas. Por último, se aborda el tema del cálculo vectorial, es decir, el estudio de los campos vectoriales, y su aplicación a las ciencias, prioritariamente. El estudio de las funciones de varias variables, se enriquece con la ayuda de programas de cálculo simbólico, así como programas de graficación en dos y tres dimensiones, como por ejemplo WolframAlpha, Symbolab y Geogebra, entre otros. Esto provee además en el estudiantado, el conocimiento de herramientas para su quehacer profesional.

El curso pretende proveer en el estudiantado en formación las herramientas relacionadas con el cálculo diferencial e integral de varias variables, para su eventual desempeño como profesor o asesor en temáticas relacionadas, por esta razón, involucra el enfoque intuitivo, demostrativo, práctico, así como una eventual descripción secuencial de estos temas, y su vinculación con otros cursos o temas de matemáticas, como cálculo en una variable, álgebra lineal, ecuaciones diferenciales, entre otras. En virtud de lo anterior, el curso pretende desarrollar habilidades prácticas en el cálculo diferencial e integral de varias variables, mediante representaciones gráficas o esquemáticas, así como también el modelado de problemas mediante funciones de varias variables, además de la utilización de software para resolver estos problemas. Por último, se aborda también el aspecto histórico de la matemática, y el descubrimiento y desarrollo de los principales conceptos a través de la historia.

Como parte de una secuencia de cursos de análisis, se da continuación a los temas clásicos del cálculo, creando además un vínculo entre el álgebra lineal, el análisis y la geometría, evidenciando la relación existente entre estas áreas, en particular, parte de que el estudiantado conoce estos temas y domina las técnicas y teoremas clásicos de las mismas. Por último, el curso aborda distintos problemas, que son resueltos precisamente mediante la utilización de funciones de varias variables, en combinación con el cálculo diferencial e integral, sin dejar de lado la parte intuitiva que permite entender el trasfondo del problema.

II. OBJETIVOS

Generales

Este curso tiene como objetivos generales:

- 1) Contribuir a la formación matemática del estudiantado, fundamental para describir, entender y resolver problemas de funciones de varias variables.
- 2) Fortalecer el desarrollo del estudiante en su habilidad para interpretar, deducir y aplicar resultados de las funciones de varias variables.
- 3) Incentivar el uso correcto del lenguaje matemático y desarrollar la destreza para expresar ideas mediante el formalismo matemático, manteniendo la claridad y la coherencia.
- 4) Explicar la importancia de las funciones de varias variables como área vinculadora de distintos saberes matemáticos, como el análisis, el álgebra lineal y la geometría, entre otras.
- 5) Establecer hábitos de investigación tanto a nivel de aplicaciones como en la historia de las funciones de varias variables.
- 6) Desarrollar en el estudiante su intuición espacial mediante el incentivo visual que aporta el medio, así como el uso de recursos didácticos visuales.
- 7) Reconocer la importancia de la distancia como concepto clave para la medida, como área fundamental de la matemática.
- 8) Desarrollar formalmente la justificación de resultados relacionados con las funciones de varias variables.

Específicos

El estudiante debe estar en capacidad de:

- 1) Determinar si un conjunto dado es abierto o cerrado.
- 2) Determinar si un conjunto dado es compacto.
- 3) Determinar si un conjunto dado es conexo.

- 4) Demostrar propiedades relacionadas con la topología en \mathbf{R}^n .
- 5) Determinar los puntos de adherencia, clausura, interiores, exteriores, frontera de un conjunto dado.
- 6) Calcular derivadas parciales y usarlas como herramientas para resolver problemas.
- 7) Usar el criterio de la segunda derivada para clasificar extremos en abiertos.
- 8) Hallar máximos y mínimos de funciones de varias variables en compactos.
- 9) Resolver problemas de optimización mediante el cálculo diferencial de varias variables.
- 10) Hallar el plano tangente a una superficie en un punto.
- 11) Hallar y usar la función lineal (diferencial) para aproximar funciones no lineales.
- 12) Determinar los extremos de funciones bajo ciertas condiciones.
- 13) Aplicar el teorema de Fubini para calcular integrales dobles y triples.
- 14) Calcular áreas de superficies y volúmenes de sólidos.
- 15) Calcular integrales triples, en coordenadas cartesianas, coordenadas cilíndricas y esféricas.
- 16) Determinar las coordenadas más adecuadas para el contexto geométrico y realizar el cambio de variables.
- 17) Demostrar y aplicar el teorema de Green.
- 18) Demostrar y aplicar el teorema de Stokes.

III. CONTENIDOS

TEMA 1: Continuidad

Funciones de varias variables, dominio, codominio, gráfico y gráfica de una función de varias variables. Superficies en \mathbf{R}^3 definidas como el gráfico de una función, o definidas implícitamente. Elementos de Topología: Bola abierta en \mathbf{R}^n , Conjuntos abiertos y cerrados, propiedades de la unión y la intersección de conjuntos abiertos y cerrados, conjuntos compactos, Teorema de Heine – Borel, conjuntos conexos. Propiedades locales de las funciones continuas, continuidad en un punto y en un conjunto, criterio de discontinuidad, Propiedades globales de las funciones continuas. Teorema de continuidad global, conservación de compacidad, conservación de conexidad. Continuidad de la función inversa.

TEMA 2: Derivación

Derivadas parciales, derivadas direccionales, diferencial, el Jacobiano. La regla de la cadena, el teorema del valor medio. Derivadas parciales de orden superior, teorema de Schwarz. Extremos relativos y absolutos de funciones de varias variables. Criterio de la segunda derivada o de la matriz Hessiana. Problemas de optimización con restricciones. El método de los multiplicadores de Lagrange.

TEMA 3: Integración

Definición de Integral en dos y tres variables. Teorema de Fubini. Cálculo de integrales dobles. Cambio de variables en integrales dobles, coordenadas polares. Cálculo de integrales triples. Cambio de variables en integrales triples, coordenadas cilíndricas y esféricas.

TEMA 4: Cálculo vectorial

Campos vectoriales. Integrales de línea. Teorema fundamental para integrales de línea. Teorema de Green. Rotacional y divergencia. Integrales de superficie. Teorema de Stokes. Teorema de la Divergencia de Gauss.

IV. METODOLOGÍA

Dada la situación con el COVID-19, en este curso se desarrollarán sesiones presenciales remotas sincrónicas mediante la utilización de la plataforma ZOOM (<https://zoom.us/>), es decir, en el horario de las clases sincrónicas previamente establecidas, los estudiantes se conectan por video llamada y en esta se desarrollarán las respectivas actividades sincrónicas. Además, estas sesiones se grabarán para los estudiantes que no puedan conectarse por alguna razón. No obstante, se insta efusivamente a que los estudiantes participen activamente en todas las sesiones sincrónicas. En estas clases se trabajará la materia del curso que será enviada a todos los alumnos con anterioridad y se tendrá un espacio para aclarar dudas. Además, se utilizará la plataforma virtual de la UCR (Mediación Virtual, <https://mediacionvirtual.ucr.ac.cr>) para la aplicación de distintas actividades evaluativas, así como para la distribución de materiales, vídeos y otros

recursos audiovisuales. En este sentido, el curso tiene una modalidad virtual, en el cual se desarrollan sesiones presenciales sincrónicas remotas por la plataforma zoom, actividades en mediación virtual, y asignación de vídeos y prácticas para desarrollar asincrónicamente, todo en coherencia con la Resolución VD-11489-2020. Adicionalmente, el curso también incluye tareas, trabajos de investigación individuales y grupales en diversos temas vinculados con los contenidos del curso, así como los ejes de formación definidos en el Plan de Estudios de Educación Matemática.

Durante las sesiones sincrónicas, el profesor presentará mediante la utilización de recursos audiovisuales, los contenidos, teoremas, procedimientos y ejemplos de cada tema, los estudiantes deben participar activamente, respondiendo a las interrogantes planteadas por el profesor y resolviendo los ejercicios propuestos por el profesor, para ser resueltos durante las clases sincrónicas. Para las sesiones sincrónicas los estudiantes deben conectarse mediante la utilización de computadora, teléfono inteligente o tableta con cámara, aunque el profesor no necesariamente solicite la activación de la cámara durante las clases.

Además, cabe destacar que es importante el trabajo individual de los estudiantes y que haya discusiones de temas del curso. Para esto último es fundamental la participación del estudiante en la resolución de problemas, para lo cual es vital la dedicación que el estudiante le asigne a la práctica en sus horas de estudio en casa. Así, el estudiante requiere de horas de estudio fuera de las clases sincrónicas, para trabajar los ejercicios propuestos, dado que en cada capítulo encontrará suficientes de ellos que ilustran los contenidos de las unidades didácticas.

Las estrategias metodológicas, en coherencia con el perfil profesional del egresado de la carrera, estarán estrechamente relacionadas con los ejes de formación definidos en el Plan de Estudios:

1. **Desempeño profesional:** Se realizarán algunas tareas propias de su contexto laboral, tales como: revisión de programas de cursos de cálculo de varias variables, orientados a ingeniería o economía de distintas universidades públicas o privadas,

además, se elaborará un vídeo donde se presente algún tema de alguno de estos cursos. Este trabajo es individual.

2. **Historia y epistemología de la matemática:** cada estudiante deberá realizar una exposición durante las clases, de los aspectos históricos relacionados con alguno de los temas del curso, o algún matemático que trabajo en estos temas, los lineamientos de la exposición se presentan en los anexos. Para esto, se pretende que el estudiante investigue acerca del tema en internet, pero tratando llegar a referencias tales cómo libros o artículos científicos. Este trabajo es grupal
3. **TIC:** En algunas de las clases se desarrollarán lecciones prácticas con uso de paquetes de software como: Geogebra, Symbolab, WolframAlpha, entre otros. Con esto se pretende que el estudiante conozca y utilice estas valiosas herramientas para graficar curvas y superficies, hacer cálculo simbólico, permitiendo el desarrollo de la intuición espacial mediante el incentivo visual que la tecnología nos pone al alcance. También se utilizará la plataforma de mediación virtual para agilizar la comunicación docente-estudiante.
4. **Aplicaciones de la matemática:** a lo largo del curso se estudian diversas aplicaciones de la matemática a otras áreas, dos de estas que sobresalen es el planteo y solución de problemas de optimización con la ayuda del cálculo diferencial, y el cálculo de áreas y volúmenes con ayuda de la integral (doble o triple) definida.
5. **Didáctico-Matemática:** los estudiantes elaboraran un vídeo donde explican un tema específico de un curso de cálculo de varias variables, para esto, se pretende que el estudiantado elabore primero un planeamiento de la clase por escrito, que el profesor revisará y aprobará antes de la grabación del vídeo respectivo.

La metodología propuesta para el curso busca fomentar los siguientes aspectos del perfil profesional de la carrera:

1. **Conocimientos:** Conocer el lenguaje matemático que le permite expresarse con rigor. Conocer la relación de la matemática con otras áreas del saber y variadas aplicaciones de la matemática a otras áreas. Conocer aspectos teóricos y prácticos acerca de los métodos y estrategias para plantear y resolver problemas

matemáticos. Construir redes entre conceptos y procedimientos dentro de un área de la matemática.

- 2. Habilidades:** Utilizar los procesos de demostración, planteo y resolución de problemas. Utilizar apropiadamente los procedimientos matemáticos y adaptarlos a los diferentes contextos y tareas propuestas. Utilizar las formas propias del lenguaje matemático para expresarse de modo formal y preciso en los diversos modos de argumentación, tanto orales como escritos. Resolver problemas matemáticos reconociendo la pertinencia de la tecnología. Explicar cómo se ha construido el conocimiento matemático (conceptos, teorías y procedimientos matemáticos).
- 3. Actitudes:** Reconoce su tarea docente como una actividad de formación integral de los estudiantes, asociada a la formación matemática. Reconoce la importancia del trabajo en equipo como la vía de socialización de sus problemas, aciertos en su quehacer docente, así como una forma de lograr propuestas de innovación. Valora positiva y necesaria la actualización constante en sus conocimientos y habilidades profesionales.

V. CRONOGRAMA

Semana	Fecha	Contenidos	Actividades
1	10-ago / 15-ago	Funciones de varias variables, dominio, codominio, gráfico y gráfica de una función de varias variables. Superficies en \mathbf{R}^3 definidas como el gráfico de una función, o definidas implícitamente.	Lectura de la carta al estudiante. Diagnóstico.
2	17-ago / 22-ago	Elementos de Topología: Bola abierta en \mathbf{R}^n , Conjuntos abiertos y cerrados, propiedades de la unión y la intersección de conjuntos abiertos y cerrados.	Asignación de temas para vídeo. Tarea #1
3	24-ago / 29-ago	Conjuntos compactos, Teorema de Heine – Borel, conjuntos conexos.	
4	31-ago / 05-set	Propiedades locales de las funciones continuas, continuidad en un punto y en un conjunto, criterio de discontinuidad, Propiedades globales de las funciones continuas. Teorema de continuidad global, conservación de compacidad, conservación de conexidad. Continuidad de la función inversa.	Tarea #2

5	07-set / 12-set	Derivadas parciales, derivadas direccionales, diferencial, el Jacobiano.	
6	14-set / 19-set	La regla de la cadena, el teorema del valor medio. Derivadas parciales de orden superior, teorema de Schwarz.	Examen parcial #1.
7	21-set / 26-set	Extremos relativos y absolutos de funciones de varias variables. Criterio de la segunda derivada o de la matriz Hessiana.	Planeamiento del vídeo. Tarea #3.
8	28-set / 03-oct	Problemas de optimización con restricciones. El método de los multiplicadores de Lagrange.	
9	05-oct / 10-oct	Definición de Integral en dos y tres variables. Teorema de Fubini.	Tarea #4.
10	12-oct / 17-oct	Cálculo de integrales dobles.	
11	19-oct / 24-oct	Cambio de variables en integrales dobles, coordenadas polares.	Tarea #5.
12	26-oct / 31-oct	Cálculo de integrales triples.	Examen parcial #2.
13	02-nov / 07-nov	Cambio de variables en integrales triples, coordenadas cilíndricas y esféricas.	Tarea #6.
14	09-nov / 14-nov	Campos vectoriales. Integrales de línea. Teorema fundamental para integrales de línea.	Entrega del vídeo.
15	16-nov / 21-nov	Teorema de Green. Rotacional y divergencia. Integrales de superficie.	Tarea #7.
16	23-nov / 28-nov	Teorema de Stokes. Teorema de la Divergencia de Gauss.	Análisis del programa.
17	30-nov / 05-dic		Examen parcial #3
18	07-dic / 12-dic		Examen de ampliación

VI. EVALUACIÓN

Evaluación diagnóstica

Durante la primera semana se realizará una evaluación diagnóstica relacionada con las funciones de una variable, tanto desde un punto de vista general de la teoría de funciones, como en el campo de las funciones reales de variable real, y su estudio tanto desde el análisis como del álgebra.

Evaluación formativa

En relación con la evaluación formativa, durante las sesiones sincrónicas el profesor realizará preguntas a los estudiantes, de los temas que se están desarrollando, con el fin

de evaluar la comprensión y la capacidad de respuesta inmediata ante un tema que se desarrolla. Además, se realizarán ejercicios en las sesiones sincrónicas, estos pueden ser ejercicios para ser resueltos y enviados al profesor, o también pueden ser preguntas específicas del profesor respecto de algún tema.

Evaluación sumativa

En cuanto a la evaluación sumativa, en la siguiente tabla se desglosa el tipo de instrumentos de evaluación, junto con su respectivo porcentaje de la nota.

Instrumento	Porcentaje
Exámenes parciales (3)	65
Tareas (6)	15
Vídeo (1)	10
Exposición (1)	5
Análisis de un programa (1)	5
Total	100

Exámenes parciales

Se aplicarán tres exámenes parciales en Mediación Virtual. Los mismos evalúan los objetivos específicos anteriormente planteados, enfocándose en el conocimiento teórico de teoremas, demostraciones y algoritmos vistos en clases. Las fechas propuestas para los mismos se detallan en la siguiente tabla.

Prueba	Fecha	Contenidos	Valor
Prueba parcial #1	19 de setiembre de 2020	Hasta Jacobiano	20%
Prueba parcial #2	31 de octubre de 2020	Hasta integrales dobles en coordenadas polares	20%
Prueba parcial #3	1 de diciembre de 2020	Hasta teorema de la divergencia	25%

Las fechas de los exámenes pueden modificarse por posibles eventualidades, por acuerdo de todos los estudiantes.

Tareas

El profesor asignará a los estudiantes al menos seis tareas, las mismas corresponden a ejercicios de las listas, los ejercicios pueden ser distintos para los estudiantes, pero evalúan los mismos objetivos. En caso de asignarse más de seis tareas, se evaluará las seis mejores calificaciones asignadas.

Vídeo

El profesor asignará a cada estudiante un tema específico del curso, enfocado a los cursos de cálculo de varias variables que se imparten en las universidades públicas o privadas. Una vez asignado el tema, el estudiante debe hacer un planeamiento de la clase, donde se explique el tema, y se presenten ejemplos. Una vez que esté aprobado y revisado el planeamiento, el estudiante grabará el vídeo correspondiente y lo subirá a Mediación Virtual. Los temas se asignan en la segunda semana. El planeamiento debe enviarse a más tardar el 26 de setiembre de 2020 y el vídeo debe entregarse a más tardar el 14 de noviembre de 2020. El vídeo se revisará de acuerdo con una rúbrica, que se adjunta en los anexos.

Exposición

El profesor asignará a los estudiantes, durante la segunda semana, un tema del curso o un matemático relacionado con estos temas, para que los estudiantes realicen una indagación acerca de la biografía del matemático y su relación con el tema en cuestión, o en el caso de ser un tema, el desarrollo histórico del mismo y las personas que participaron. Esto se presentará durante las clases a modo de exposición. Cada presentación tiene una duración máxima de diez minutos. Las mismas se presentarán cuando el contenido del curso que se asignó ya haya sido abordado.

Análisis de un programa

El análisis de un programa consiste en un informe escrito, relativo a un programa de curso de cálculo de varias variables, de una universidad pública o privada, que incluya los siguientes elementos:

- 1) Portada
- 2) Introducción
- 3) Contenidos del curso
- 4) Ubicación del curso dentro de la malla curricular
- 5) Diagrama de secuencia de los cursos de matemática dentro de la malla
- 6) Coherencia de la estructura de los contenidos
- 7) Conclusiones

Se entregará únicamente el informe escrito, a más tardar el 28 de noviembre de 2020.

VII. BIBLIOGRAFÍA

- Apostol, T. (1976). *Análisis Matemático*. México: Editorial Limusa S.A.
- Coleman, R. (2012). *Calculus on normed vector spaces*. New York: Springer.
- Edwards, C. (1973). *Advanced calculus of several variables*. London: Academic Press.
- Lang, S. (1991). *Calculus of several variables*. New York: Springer.
- Larson, R., y Edwards, B. (2010). *Cálculo de varias variables*. 9° Edición. México: McGraw – Hill.
- Marsden, J., y Tromba, A. (1991). *Cálculo Vectorial*. 3° Edición. Delaware: Addison – Wesley.
- Pita, C. (1995). *Cálculo vectorial*. México: Prentice – Hall.
- Salas, S., Hille, E. & Etgen, G. (2007). *Calculus, one and several variables*. 10° Edition. New Jersey: John Wiley and sons.
- Shirali, S., & Vasudeva, H. (2006). *Metric spaces*. London: Springer.
- Spivak, M. (1965). *Calculus on manifolds*. Massachusetts: Addison – Wesley.
- Thomas, G. (2005). *Cálculo de varias variables*. 11° Edición. México: Pearson.

