

DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

CARTA AL ESTUDIANTE II-2020

Curso: MA-0019 *Funciones Riemann Integrables*

Nivel: IV

Tipo de Curso: teórico

Créditos: 4

Horario Sesiones sincrónicas: J 10-13

Horario Consulta sincrónica: K: 13-15

Requisitos: MA0012

Co-requisitos: no tiene

Modalidad: Virtual

I. DESCRIPCIÓN

A lo largo de siglos, se usaron métodos diversos para aproximar áreas, volúmenes, longitudes, promedios, técnicas que hoy, se calculan usando integrales.

El propósito de este curso es estudiar el concepto de integral y su versatilidad en diferentes aplicaciones. Inicia con el cálculo de áreas bajo la gráfica de funciones escalonadas para luego introducir las sumas de Riemann de funciones acotadas sobre intervalos compactos. La definición de integral como límite de las sumas se analiza en diferentes contextos geométricos para obtener: el área de una región, el volumen de un sólido de revolución, la longitud de arco y el área de una superficie de revolución.

Se mantiene el rigor, pero se omiten las demostraciones de algunas proposiciones, pues en el caso de mostrar integrabilidad el método es repetitivo. No obstante, se considera que son necesarias las demostraciones que justifican las técnicas de integración por partes o sustitución porque ayudan a la comprensión de los métodos y reducen la posibilidad de cometer errores (como hacer sustituciones no válidas). Al Teorema Fundamental del Cálculo se le dedica especial atención, porque favorece la comprensión de los conceptos más importantes de la temática y los relaciona.

II. OBJETIVOS

Durante este curso el estudiante será capaz de:

- 1) Calcular el área bajo la gráfica de funciones escalonadas.
- 2) Calcular la integral de funciones como el límite de una suma de Riemann.
- 3) Demostrar y utilizar las propiedades de la integral.
- 4) Enunciar, demostrar y aplicar el Teorema fundamental del Cálculo.
- 5) Mostrar destreza en la aplicación de los métodos de integración.
- 6) Aproximar integrales definidas de funciones usando el polinomio de Taylor y acotar el error.
- 7) Calcular áreas de regiones planas entre curvas.
- 8) Aplicar sumas de Riemann para demostrar desigualdades.
- 9) Calcular volúmenes de sólidos de revolución por secciones transversales y por capas cilíndricas.
- 10) Calcular áreas de superficies de revolución y longitud de arco.
- 11) Determinar la convergencia de integrales impropias. Demostrar la convergencia o divergencia de series numéricas.
- 12) Hallar el radio y el intervalo de convergencia de una serie de potencias.
- 13) Hallar la serie de Taylor generada por una función y viceversa.

III. CONTENIDOS

TEMA 1: Integral de Riemann

Área bajo la gráfica de funciones escalonadas. Sumas de Riemann superiores e inferiores de funciones continuas y discontinuas a trozos. Integrabilidad de Riemann. Propiedades de la integral. Antiderivadas. Teorema fundamental del Cálculo. Cálculo de áreas. Métodos de Integración.

TEMA 2: Aplicaciones de la Integral

Integración aproximada con polinomios de Taylor. Integración numérica: regla del trapecio, del punto medio y de Simpson. Volumen de Sólidos de revolución: por secciones transversales y por capas cilíndricas. Longitud de arco. Áreas de superficies de revolución. Otras aplicaciones: a la economía (Superávit del consumidor), en la medicina (Ley de Poiseuille sobre flujo sanguíneo en las arterias) o en la física (Momentos y centros de masa).

TEMA 3: Integrales Impropias

Definición de Integral impropia y su interpretación geométrica. Condición necesaria de convergencia. Criterios de convergencia. Convergencia absoluta y condicional.

TEMA 4: Series numéricas y series de potencias

Convergencia. Series geométricas. Condición Necesaria de convergencia. Propiedades de las series convergentes. Series Telescópicas. Criterio Integral de convergencia. Criterios de comparación. Series alternadas. Convergencia absoluta y condicional. Criterios de D´Alambert , de Cauchy, de Dirichlet.

Serie de potencias. Radio e intervalo de convergencia. Convergencia uniforme de una serie de potencias en un compacto contenido en el intervalo de convergencia. Serie de Taylor.

IV. METODOLOGÍA

Debido a la situación de la pandemia del Covid-19, el desarrollo de este curso se desarrollará mediante sesiones sincrónicas y asincrónicas, por lo que se requiere que las personas estudiantes cuenten con recursos digitales mínimos para el desarrollo del curso, como una computadora con cámara y acceso a internet.

El papel de la docente será de acompañamiento y de guía en todas las actividades, mientras que la persona estudiante debe asumir un papel activo, responsabilizándose de la organización de su trabajo y de la adquisición de las diferentes competencias según su propio ritmo. Se busca con ello que la persona estudiante sea capaz de lograr aprendizajes significativos de manera independiente, que ejecute estrategias cognitivas de exploración y descubrimiento, así como de planificación y regulación de su propia actividad.

De acuerdo con las directrices de Vicerrectoría de Docencia, todo material del curso (videos de la web, grabaciones de las clases sincrónicas, documentos con la teoría, listas de ejercicios, etc) se irá subiendo semanalmente a la plataforma de Mediación Virtual, en pestañas divididas por temas. En cada uno de ellos encontrará:

1. Una sección del libro de texto con la teoría.
2. Algún video ilustrativo
3. Una guía de trabajo.
4. Una tarea de verificación del trabajo realizado.
5. Material adicional de reforzamiento.
6. Listas de ejercicios
7. Oro de dudas

En el transcurso del ciclo lectivo se incentivará tanto el trabajo individual, como el trabajo en equipo. Para ello el primer día de clases se organizarán grupos de trabajo, que se mantendrán en todo el semestre, para realizar todas las actividades asignadas

en el curso e inclusive para la atención más cercana con la docente en las sesiones grupales (horario de clases de dos horas). El trabajo de cada semana se organizará de la manera y en el orden siguiente:

Sesión asincrónica: (Trabajo Estudiante-Estudiante)

El estudiante usará la metodología de aprendizaje autónomo siguiendo las guías de estudio colgadas en el curso de Mediación Virtual. Deberá resumir los principales conceptos teóricos de cada tema, observar algún video, estudiar algunas páginas del material adjunto y rellenar los detalles de las pruebas de los principales resultados de la sección, así como resolver los ejercicios solicitados en la guía de trabajo. Luego se reunirá con su grupo de trabajo para interactuar y validar la producción de los compañeros, y discutir las soluciones de los ejercicios. Si es necesario el grupo puede solicitar una sesión con la docente para evacuación de dudas y reafirmación de los conceptos (en el horario de clases de dos horas).

Sesión sincrónica (Trabajo docente-estudiante J: 10 a 1 pm)

La docente organizará una sesión de trabajo en línea mediante la plataforma Zoom (ID: 449 519 628, Clave: 005122), al que debe ingresar mediante el siguiente enlace: <https://zoom.us/j/449519628?pwd=N05MazhDQkhFSGozb0hDZWRLdmFpUT09>

Primera parte (50 minutos): La docente hará un resumen de los principales conceptos del tema asignados en la guía de trabajo de la semana previa, se revisarán las principales pruebas de teoremas y resultados, y se resolverán algunos ejercicios. La sesión se grabará y se colgará en Mediación Virtual.

Segunda parte (30 minutos): Los estudiantes serán enviados a salas de trabajo en zoom, con sus grupos de trabajo, para resolver algún ejercicio, rellenar alguna prueba o discutir algún concepto. La docente visitará constantemente cada subgrupo, para dar alguna sugerencia, evacuar dudas y dar seguimiento al avance de los estudiantes.

Tercera parte (30 minutos): Todo el grupo se vuelve a reunir en la sala principal, para resolver el ejercicio y dar un cierre al tema. Aquí se combinará el aporte tanto de la docente como de los estudiantes, quienes podrán compartir sus pantallas para mostrar su trabajo.

Sesión sincrónica (Trabajo Docente-Grupos de Trabajo. K: 10 a 12 md)

La docente asignará una cita a cada subgrupo (máximo una hora) en este horario para monitorear el avance de las personas integrantes, aclarar algún concepto y resolver ejercicios. También en este espacio, la docente les guiará en cada una de las actividades, sobre todo en los proyectos de indagación.

Sesión de consultas

Consultas Sincrónicas (K: 13-16, J:13-15): en este horario, la docente estará disponible para atender consultas individuales o grupales. Dado que en estas mismas horas la docente debe atender otros cursos, se dividirán en salas de trabajo mediante zoom, y la profesora rotará para atender a cada estudiante. Se requiere enviar un mensaje vía Telegram solicitando la consulta. El enlace para las consultas vía zoom está dado por

<https://zoom.us/j/93668358427?pwd=M0N2cTdxTjZjK0ZkZ2VFL29mdjJFZz09>

Consultas Asincrónicas: Para dudas rápidas, se usará un grupo de Telegram, al cual pueden unirse mediante el enlace: <https://t.me/joinchat/R08taxh2ANJiF0RWZo5nZw>

Por otro lado, para dudas no tan rápidas, pueden usar el foro de dudas habilitado en Mediación Virtual, el cual la docente responderá en cuanto le sea posible.

Ejes de Formación

Durante el curso se trabajarán los ejes de formación definidos en el Plan de Estudios, mediante actividades grupales de indagación e investigación, que se expondrán al resto de la clase.

Historia y epistemología de la matemática

Para el desarrollo de este eje de formación, se asignará un proyecto de indagación a los grupos de trabajo, que profundice sobre los aportes de Cauchy, Bolzano, Weierstrass y otros, en el paso del cálculo intuitivo al análisis. Los resultados deben exponerse al resto de la clase y debe quedar plasmados en un trabajo escrito que logre reflejar los avatares de la creación matemática.

Didáctico- matemática

Se fomentará el eje didáctico matemático a lo largo del curso, mediante reflexiones sobre las intervenciones de los estudiantes al resolver ejercicios, rellenar detalles de una demostración y al expresarse matemáticamente tanto verbal como en forma escrita. Se asignará además una actividad grupal que busca analizar el abordaje utilizado en videos de la web, al enseñar técnicas de integración. Para ello, los grupos de trabajo observarán dos videos que expliquen alguna técnica de integración, y reflexionarán sobre las debilidades halladas, así como posibles mejoras

Desempeño profesional

Como continuación del eje anterior y tomando en cuenta una de las aristas del perfil de salida de esta carrera (hacia el desempeño en la universidad), los alumnos deberán

trabajar en una propuesta de micro-clase que plasmarán en un video, que aborde alguna de las técnicas de integración y que supere las debilidades halladas en los videos analizados.

Aplicaciones de la matemática

Se abordará el estudio del cálculo integral como herramienta para modelar diversas situaciones de fenómenos matemáticos y extra-matemáticos. Los estudiantes en sus grupos de trabajo, desarrollarán y realizarán una exposición al resto de la clase, sobre alguna de las aplicaciones mencionadas el tema 2.

Tecnologías de la Información y la Comunicación TIC

Los estudiantes tendrán la oportunidad de explorar y usar diversas herramientas tecnológicas, en particular softwares de cálculo integral, para realizar aproximaciones de funciones usando polinomios de Taylor, analizar la convergencia de integrales impropias y series, con un error establecido, así como verificar resultados de áreas, volúmenes y otras mediciones usando el cálculo integral. Se asignará además un proyecto grupal que estudie el tema de integración numérica básica (la regla del trapecio, la regla del punto medio y la regla de Simpson), que serán programados por los estudiantes y expuestos al resto de la clase. El alumno deberá interpretar el resultado dado por una computadora, de acuerdo al error involucrado.

V) EVALUACIÓN

Como parte de la evaluación formativa, se incentivará a los estudiantes a tomar un papel activo en las valoraciones de su propio aprendizaje, durante las diferentes tareas. La evaluación sumativa se basará en la siguiente distribución:

Rubro	Porcentaje
Dos exámenes sobre teoría	25%
5 quices sobre cálculo	25%
Exposición de 5 pruebas matemáticas	10%
Proyecto sobre Historia	10%
Programación Integración numérica	10%
Proyecto sobre aplicaciones	10%
Micro-clase sobre técnicas de integración	10%
TOTAL	100%

En los siguientes párrafos se describe cada uno:

Exámenes sobre la teoría (actividad individual)

Usando la plataforma de Mediación Virtual, con ítems aleatorios y diferentes, se realizarán dos exámenes parciales con el mismo valor porcentual para evaluar la teoría. Cada uno de ellos incluirá:

- Un ítem en la que deben justificar y rellenar detalles de alguna prueba matemática formal de algún resultado.
- Un ítem en la que deben usar la teoría estudiada para llegar a un resultado.

Las indicaciones específicas sobre los exámenes se darán oportunamente. Las fechas asignadas para cada prueba se detallan en la siguiente tabla:

Examen	Fecha
I Parcial	Sábado 26 de septiembre 8am
II Parcial	Sábado 05 de diciembre 8am
Ampliación y suficiencia	Miércoles 9 de diciembre 8am

Quices sobre Cálculo (actividad individual)

Usando la plataforma de Mediación Virtual, con ítems aleatorios y diferentes, se realizarán cinco quices de desarrollo para evaluar la parte de cálculo, uno por cada tema de los contenidos, con un valor porcentual de 5% cada uno. Las fechas y las indicaciones específicas sobre los quices se darán oportunamente.

Exposición de pruebas matemáticas (actividad individual)

La docente le asignará a cada estudiante 5 teoremas o resultados de los contenidos del curso, y la persona estudiante debe rellenar los detalles y explicar cada paso de la prueba al resto de la clase. Cada uno tiene un valor de 2%. Si es necesario, puede reunirse virtualmente con la docente y compañeros para evacuar dudas y recibir realimentación.

Proyecto sobre Historia (actividad grupal)

Se asignará un proyecto de indagación a los grupos de trabajo, que profundice sobre los aportes de Cauchy, Bolzano, Weierstrass y otros, en el paso del cálculo intuitivo al análisis. Los resultados deben exponerse al resto de la clase y debe quedar plasmados en un trabajo escrito que logre reflejar los avatares de la creación matemática. Algunos temas posibles pueden ser:

1. El desarrollo del concepto de límite hasta su formalización
2. Antecedentes y consecuencias del TFC.
3. Cauchy, Bolzano, Weierstrass y el paso del Cálculo intuitivo al Análisis

Proyecto sobre Integración Numérica (actividad grupal)

Se asignará además un proyecto grupal que estudie el tema de integración numérica básica, que serán programados en algún lenguaje de escogencia del mismo grupo y aplicados a dos integrales, una que puede resolverse algebraicamente y otra cuyo resultado solo puede obtenerse numéricamente. Debe incluirse además, una reflexión sobre cómo interpretar el resultado dado por la computadora, de acuerdo al error involucrado. Finalmente los resultados deben ser expuestos al resto de la clase.

Proyecto sobre Aplicaciones (actividad grupal)

Los estudiantes en sus grupos de trabajo, desarrollarán y realizarán una exposición al resto de la clase, sobre alguna de las aplicaciones siguientes:

1. Aplicaciones: a la economía (Superávit del consumidor),
2. Aplicaciones en la medicina (Ley de Poiseuille sobre flujo sanguíneo en las arterias)
3. Aplicaciones a la física (Momentos y centros de masa).

Micro-clase sobre técnicas de integración (actividad grupal)

Cada grupo escogerá alguna de las técnicas de integración, buscará al menos dos videos en la web que explique el tema, hará una reflexión sobre debilidades y fortalezas del video y finalmente hará una propuesta de mejora, que plasmará en un video.

Nota de aprovechamiento

La nota de aprovechamiento final (n), será la suma de los porcentajes obtenidos en los rubros mencionados. Esta se expresa en una escala de 0 a 10 y se reportará de la siguiente manera:

- Si su nota n es igual o superior a 6.75, el estudiante aprueba el curso con la nota n redondeada al valor más cercano entre: 7.0, 7.5, 8.0, 8.5, 9.0, 9.5 ó 10.0. Los casos intermedios como 7.25 ó 7.75 se redondean hacia arriba.
- Si $5.75 \leq n < 6.75$, el estudiante tiene derecho a aplicar un examen de ampliación en el cual debe obtener una nota superior o igual a 6.75 para aprobar el curso con 7.0. En caso contrario, su nota será 6.0 ó 6.5 la más cercana a su nota n .

- Si n es inferior a 5.75 pierde el curso y su nota final es la nota n redondeada a la unidad o media unidad más cercana: 0.0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 4.5, 5.0 ó 5.5.

VI) CRONOGRAMA

La distribución tentativa de los contenidos del curso es la siguiente:

Semana	Temas, entregas y evaluaciones
1. 10/08 - 14/08	Introducción. Discusión de la carta del estudiante. Área bajo la gráfica de funciones escalonadas.
2. 17/08 - 21/08	Sumas de Riemann superiores e inferiores de funciones continuas y discontinuas a trozos.
3. 24/08 - 28/08	Quiz 1: Funciones escalonadas Integrabilidad de Riemann. Antiderivadas. Propiedades de la integral.
4. 31/08 - 04/09	Teorema fundamental del Cálculo. Cálculo de áreas.
05/09	Quiz 2 sobre sumas de Riemann
5. 07/09 - 11/09	Repaso para examen.
12/09	I Examen parcial
6. 14/09 - 18/09	Métodos de Integración.
7. 21/09 - 25/09	Métodos de Integración. Exposición Microclase.
8. 28/09 - 02/10	Volumen de sólidos de revolución (secciones transversales, capas cilíndricas). Longitud de arco. Áreas de superficies de revolución.
3/10	Quiz 3 sobre técnicas de integración
9. 05/10 - 09/10	Integración aproximada con polinomios de Taylor. Exposiciones sobre Integración Numérica

10. 12/10 - 16/10	Definición de integral impropia e interpretación geométrica.
11. 19/10 - 23/10	Exposiciones sobre aplicaciones Condición necesaria de convergencia. Criterios de convergencia de integrales impropias. Convergencia absoluta y condicional.
24/10	Quiz 4 sobre Integrales impropias
12. 26/10 - 30/10	Series numéricas y convergencia. Series geométricas. Condición Necesaria de convergencia. Propiedades de las series convergentes. Series Telescópicas. Criterio Integral de convergencia.
13. 02/11 - 06/11	Criterios de comparación. Series alternadas. Convergencia absoluta y condicional. Criterios de D'Alambert , de Cauchy, de Dirichlet.
14. 09/11 - 13/11	Serie de potencias. Radio e intervalo de convergencia. Integración y derivación de series de potencias.
15. 16/11 - 20/11	Convergencia uniforme de una serie de potencias en un compacto contenido en el intervalo de convergencia. Sumas de series de potencias.
21/11	Quiz 5 sobre convergencia de series
16. 23/11 - 27/11	Exposiciones sobre historia
05/12	II Examen parcial.

VII. BIBLIOGRAFÍA

-
- 1) Apostol, M. (1977). **Calculus. Volumen I.** España: Reverté.

- 2) Bartle. R, Sherbert. D. (1996). **Introducción al Análisis Matemático de una variable**. Mexico: Editorial Limusa S.A Grupo Noriega editores.
 - 3) Demidovich. (1984).**Ejercicios de Análisis Matemático**. Moscú: Editorial MIR.
 - 4) Sánchez, C. (2004). **De los Bernoulli a los Burbaki, una historia de la ciencia y el arte del cálculo**. España: Editorial Nivola.
- Spivak .M. (1992). **Calculus**