



## I. Información general

*Nivel:* II ciclo  
*Tipo:* Teórico  
*Modalidad:* Virtual  
*Créditos:* 4

*Horas de contacto sincrónico:* 3  
*Horas de trabajo asincrónico:* 9  
*Requisitos:* MA0002 y MA0003  
*Correquisito:* MA0005

## II. Descripción

En este curso se estudian los conjuntos numéricos y sus principales propiedades:  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$  y  $\mathbb{Q}$ ; así como un acercamiento al tratamiento didáctico de estos temas en la educación primaria y secundaria costarricense, además de su desarrollo histórico. Se procura continuar con el trabajo de los cursos anteriores en relación con el desarrollo de la comprensión de la matemática formal y de la habilidad de argumentar matemáticamente de manera apropiada, considerando estos son los pilares que apoyan la toma de decisiones didáctico-matemáticas, que es la tarea central del educador matemático. Este curso constituye también un enlace importante con el curso MA0009 Números Reales, donde se retomarán no solo las habilidades matemáticas ya trabajadas, sino también se hace una extensión de muchos de los resultados matemáticos estudiados.

## III. Objetivos

Durante el desarrollo del curso el estudiante debe ser capaz de:

1. Aplicar los axiomas de Peano, la definición de la suma y la multiplicación en  $\mathbb{N}$  en la demostración de algunas propiedades algebraicas de los números naturales.
2. Determinar, mediante un razonamiento inductivo, fórmulas que satisfacen algunos números naturales.
3. Demostrar propiedades algebraicas de los números naturales aplicando los principios de inducción.
4. Explicar las principales características y aplicaciones de los sistemas de numeración maya, romano, hindú-arábigo, binario, entre otros.
5. Operar con números expresados en diversas bases.
6. Deducir y demostrar las propiedades algebraicas de los números enteros, a partir de los números naturales.
7. Demostrar los principales resultados en relación con la divisibilidad en  $\mathbb{Z}$
8. Deducir y demostrar las propiedades de los números racionales, a partir de los números enteros.
9. Explicar, desde la óptica histórica, la aparición y construcción de los conjuntos numéricos  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$  y  $\mathbb{Q}$ .
10. Caracterizar la evolución histórica de los conjuntos numéricos: modos de expresar y entender los conceptos asociados y las obras significativas en cada uno de los momentos relevantes.

## IV. Contenidos

### 1. Conjunto de los números naturales

- a) Axiomas de Peano y principio de Inducción Matemática.
- b) Estructura de  $\mathbb{N}$  como semianillo conmutativo con elemento unidad: Propiedades de las operaciones (suma, multiplicación, resta y potenciación). Leyes de cancelación de la suma y la multiplicación, ley de ausencia de inversos aditivos. Algoritmo de la división euclidea.
- c) Relación de orden, orden total, compatibilidad del orden en  $\mathbb{N}$  con la suma y la multiplicación. Representación de  $\mathbb{N}$  en la recta.
- d) Principio del Buen Orden.
- e) Conjuntos finitos.  $\mathbb{N}$  como conjunto infinito. Insuficiencia de  $\mathbb{N}$  para la resolución de ecuaciones elementales.
- f) Sistemas de Numeración en  $\mathbb{N}$ : bases, operaciones, cambios de base.
- g) Momentos y personajes relevantes en la evolución del concepto de número natural y en la construcción de  $\mathbb{N}$  como conjunto numérico. Sistemas de numeración: maya, romano, hindú-arábigo, binario, chino, griego, entre otros.

### 2. Conjunto de los números enteros

- a) Definición de  $\mathbb{Z}$  como conjunto cociente.
- b) Estructura de  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  como anillo conmutativo con elemento unidad: Operaciones en  $\mathbb{Z}$  y sus propiedades (suma, multiplicación, resta, división, potenciación y radicación). Leyes de signos. Leyes de cancelación de la suma y la multiplicación, ley de ausencia de divisores del cero, leyes de potencias y radicales.
- c) Números positivos y negativos  $(\mathbb{Z}^*, \mathbb{Z}^+, \mathbb{Z}^-)$ . Relación de orden en  $\mathbb{Z}$ . Representación de  $\mathbb{Z}$  en la recta numérica. Valor absoluto y distancia en  $\mathbb{Z}$ .
- d)  $\mathbb{N}$  como subconjunto de  $\mathbb{Z}$ . Propiedades de  $\mathbb{Z}$  como conjunto: discreto, ordenado, principio del buen orden, numerabilidad de  $\mathbb{Z}$ . Insuficiencia de  $\mathbb{Z}$  para la resolución de ecuaciones elementales.
- e) Teoría de números: Algoritmo de la división en  $\mathbb{Z}$ . Divisores, factores y múltiplos de un número entero. números primos y compuestos. números primos relativos. Descomposición prima de un número. Máximo común divisor (algoritmo de Euclides) y mínimo común múltiplo. Ecuaciones diofánticas.
- f) Momentos y personajes relevantes en la evolución del concepto de número negativo y en la construcción de  $\mathbb{Z}$  como conjunto numérico.

### 3. Conjunto de los números racionales

- a) Definición de  $\mathbb{Q}$  como conjunto cociente.
- b) Estructura de  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  como cuerpo: Propiedades de las operaciones en  $\mathbb{Q}$  (suma, multiplicación, resta, división, potenciación y radicación). Leyes de cancelación de la suma y la multiplicación, ley de ausencia de divisores del cero, leyes de potencias y radicales.
- c) Relación de orden en  $\mathbb{Q}$ . Representación de  $\mathbb{Q}$  en la recta numérica. Insuficiencia de  $\mathbb{Q}$ . Valor absoluto.
- d)  $\mathbb{Z}$  como subconjunto de  $\mathbb{Q}$ . Propiedades de  $\mathbb{Q}$  como conjunto: denso, ordenado, arquimediano, numerable e incompleto. Insuficiencia de  $\mathbb{Q}$  para la resolución de ecuaciones elementales.

- e) Expresión decimal de los números racionales: expresiones decimales exactas, periódicas puras y periódicas mixtas. Caracterización de las expresiones decimales a partir de los factores del denominador del representante canónico. Los conjuntos  $\mathbb{Q}_d$  y  $\mathbb{Q}_p$ .
- f) Momentos y personajes relevantes en la evolución del concepto de número racional y en la construcción de  $\mathbb{Q}$  como conjunto numérico.

## V. Metodología

El curso se desarrollará de forma virtual con sesiones sincrónicas y asincrónicas.

Las sesiones sincrónicas de interacción docente-estudiantes se realizarán a través de la plataforma ZOOM, en estas se discutirán los fundamentos de la teoría y algunos resultados relevantes. De manera que es necesaria la participación frecuente de los estudiantes para lograr una dinámica de construcción conjunta del conocimiento. Estas sesiones serán grabadas para su posterior repaso o para los estudiantes que tengan dificultades de conexión.

Las sesiones asincrónicas promoverán el trabajo independiente del estudiante que consistirá en el estudio de videos o materiales, la participación en foros o el desarrollo de guías de trabajo, todo lo anterior en relación con la demostración de los resultados matemáticos discutidos en la sesión sincrónica o con respecto a ejercicios resueltos o para resolver.

Para el estudio de los temas trabajados en las sesiones de clase se asignarán listas de tareas matemáticas de diversos niveles de dificultad que promueven la profundización en la comprensión de los conocimientos y procedimientos matemáticos. Para esto es necesario dedicar semanalmente tiempo al estudio individual y si es posible grupal. Además, se recomienda utilizar el tiempo de consulta de cualquiera de los docentes para realizar preguntas o solicitar apoyo en el trabajo matemático realizado previamente.

Como parte del desarrollo de la comprensión de la transformación de la matemática formal hacia la matemática escolar, los estudiantes, en equipo, elaboran un reporte en digital sobre el Área *Números* de los Programas de Estudio de Matemática del MEP; este trabajo permitirá además, la profundización en la comprensión de conceptos y procedimientos elementales sobre los conjuntos numéricos.

En relación con la comprensión de la contribución de la epistemología e historia de la matemática en la toma de decisiones didácticas, los estudiantes en equipos elaboran digitalmente tres reportes de historia (uno por cada conjunto numérico).

La plataforma de Mediación Virtual será el medio de comunicación oficial profesores-asistentes-estudiantes, permitiéndose las comunicaciones vía correo electrónico, Whatsapp o Telegram por inmediatez, pero sin sustituir el medio oficial. El material del curso, guías de trabajo, entregas de trabajos y realimentación de estos, se realizará través de Mediación Virtual.

Todas las actividades que se realicen en el marco del curso, contribuirán para que los estudiantes desarrollen los siguientes rasgos presentes en el perfil profesional de la carrera (se sigue la numeración de la versión oficial del Perfil Profesional, la cual se puede consultar en la página [emate.ucr.ac.cr](http://emate.ucr.ac.cr)):

### Conocimientos:

1. Reconoce los fundamentos de la matemática como la base que se elabora después del avance significativo de una teoría.
2. Conoce el lenguaje matemático que le permite expresarse con rigor.
3. Comprende los conceptos centrales de los tópicos de matemática que le permitirán construir el conocimiento didáctico de los temas propuestos en los programas de matemática del sistema educativo costarricense.
4. Establece relaciones entre las diferentes áreas de la matemática propuestas para la educación primaria, secundaria y primeros cursos universitarios para otras carreras.
7. Comprende el contexto histórico y social en el que se ha desarrollado la matemática.
9. Establece las diferencias entre la matemática como disciplina y la matemática como asignatura de estudio en un sistema educativo (matemática escolar).

11. Reconoce el papel fundamental del saber matemático en el estudio y análisis de los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la matemática escolar.
12. Construye redes entre conceptos y procedimientos dentro de un área de la matemática o entre varias de ellas según los programas escolares.
13. Explica la distancia epistemológica entre los conocimientos matemáticos formales y los conocimientos matemáticos escolares.

#### Habilidades:

1. Utiliza los procesos de demostración y resolución de problemas en las áreas de la matemática.
2. Utiliza los procesos de razonamiento inductivo, heurístico y deductivo en todas las áreas de la matemática.
3. Utiliza apropiadamente los procedimientos matemáticos y los adapta a los diferentes contextos y tareas propuestas.
4. Utiliza las formas propias del lenguaje matemático para expresarse de modo preciso y riguroso en los diversos modos de argumentación tanto orales como escritos en todas las áreas de la matemática.
5. Usa las diferentes representaciones de los objetos matemáticos según lo requiera el problema planteado.
10. Explica cómo se ha construido el conocimiento matemático (conceptos, teorías y procedimientos matemáticos).
14. Muestra dominio de las habilidades de comunicación verbal y escrita como una herramienta para lograr una mejor gestión de las clases, trabajo con sus colegas, asesorías y procesos de investigación.

#### Actitudes:

2. Reconoce su tarea docente como una actividad de formación integral de los estudiantes asociada a la formación matemática.
4. Reconoce la importancia del trabajo en equipo como la vía de socialización de sus problemas, aciertos en su quehacer docente así como la mejor forma de lograr propuestas de innovación.

## **VI. Evaluación**

La evaluación formativa consistirá en el monitoreo de las intervenciones en clase durante la construcción conjunta de la teoría o bien mediante el planteamiento de las demostraciones o la realización de algunas tareas procedimentales. Además, mediante la atención de consultas del trabajo asignado como estudio independiente. Por lo anterior, es de vital importancia que el estudiante se mantenga muy activo en su trabajo matemático en los espacios sincrónicos como los asincrónicos, se recomienda una dedicación de al menos dos sesiones de estudio semanales.

La evaluación sumativa la constituyen los siguientes productos: 5 tareas, 1 reporte Programas MEP, 2 pruebas parciales y 3 reportes de historia.

Las tareas están relacionadas con los temas matemáticos estudiados, la forma en que se entrega la tarea puede consistir en ejercicios resueltos de forma escrita, en forma de video, una publicación en una red social, participación en un foro, evidenciar que realizó la tarea por medio de un test al respecto, o cualquier otro formato que será indicado con anterioridad. Las instrucciones respectivas se brindarán en cada caso, el tiempo del que dispondrá cada estudiante para hacer su entrega, en el espacio asignado en la plataforma virtual, podrá ser desde unas horas o hasta 7 días; esto se indicará en cada caso.

El reporte de Programas MEP se realizará en equipos de no más de tres personas, estos equipos pueden estar conformados por estudiantes de cualquiera de los dos grupos del curso. Es un documento en versión digital que se prepara con base en una guía de trabajo que se entregará con anticipación. Para su desarrollo se requiere contar con los Programas de Estudio de Matemáticas del MEP que pueden encontrar en la página web del Ministerio de Educación Pública y con dos libros de texto de matemática recientes que se utilicen en séptimo y octavo año.

Los tres reportes de historia también se realizarán en equipos de no más de tres personas, pudiendo estar

conformados por estudiantes de cualquiera de los dos grupos del curso. Para cada reporte se entregará una guía de trabajo que sugiere el estudio de algunos documentos o videos previamente asignados, los cuales deben ser complementados con bibliografía adicional. Los reportes escritos pueden contener resúmenes, esquemas, cuadros, presentaciones, etc.

Las ponderaciones de los productos descritos anteriormente para calcular la nota de aprovechamiento se detallan a continuación:

RUBRO	PORCENTAJE
Tareas (cinco)	30
Reportes de historia (tres)	15
Reporte de programas MEP (uno)	10
Pruebas parciales (dos)	45

Las dos pruebas parciales serán virtuales, cada una con un valor de 22,5%. Las pruebas podrán incluir ítems objetivos, ítems de desarrollo escrito, ítems de desarrollo oral, entre otros. Las instrucciones específicas serán brindadas con la debida antelación.

La nota de aprovechamiento (NA) será el resultado de la suma de los porcentajes obtenidos en cada uno de los rubros descritos anteriormente, cada tarea tendrá el mismo peso porcentual, según la cantidad que se hagan durante el semestre. NA se expresa en una escala de 0 a 10, redondeada a la unidad o media unidad más próxima, de acuerdo con los criterios del Reglamento de Régimen Académico Estudiantil (artículos 25 y 28), a saber:

1. Si NA redondeada es mayor o igual que 7.0 entonces aprueba el curso.
2. Si NA redondeada es 6.0 o 6.5, tiene derecho a realizar el examen de ampliación. Para aprobar el curso debe obtener una nota mayor o igual a 6.75 en esta prueba, en caso de que apruebe se le reportará 7.0 como nota final, de lo contrario se le reportará su NA redondeada.
3. Si NA redondeada es menor que 6.0 entonces reprueba el curso.

Para solicitar la reposición de cualquier evaluación debe enviar al profesor la solicitud por correo electrónico, acompañada con la documentación oficial que justifique debidamente la razón de su ausencia a la evaluación respectiva, según las causas y periodos que el Reglamento de Régimen Académico Estudiantil considera como válidas (Capítulo VI, artículo 24). Si la reposición es aprobada, el docente le indicará al estudiante la fecha y modalidad de la reposición.

Todas las tareas y pruebas parciales son individuales a menos que se indique lo contrario y solamente se permitirán los recursos indicados en las instrucciones específicas en cada caso. Cualquier detección de trabajo grupal en evaluaciones individuales o de utilización de recursos no permitidos, provocarán la apertura de un proceso disciplinario según el Reglamento de Orden y Disciplina de los Estudiantes de la Universidad de Costa Rica.

## VII. Cronograma

A continuación se presenta una guía de la distribución por clase de los diferentes tópicos del curso. Las disposiciones que aquí se detallan podrían variar según el avance del grupo:

SEMANA	CONTENIDOS
<b>10 - 14 de agosto</b>	Discusión de la carta al estudiante. Introducción al curso. Axiomas de Peano y principio de Inducción Matemática.
<b>**18 - 21 de agosto</b>	Estructura de $\mathbb{N}$ como semianillo conmutativo con elemento unidad: Propiedades de la suma. Ley de cancelación de la suma. <b>Entrega de Tarea #1</b>
<b>24 - 28 de agosto</b>	Estructura de $\mathbb{N}$ como semianillo conmutativo con elemento unidad: Propiedades de la multiplicación.
<b>31 de agosto - 4 de setiembre</b>	Relación de orden, orden total, compatibilidad del orden en $\mathbb{N}$ con la suma y la multiplicación. Representación de $\mathbb{N}$ en la recta. <b>Entrega de Tarea #2</b>

7 - 11 de setiembre	Propiedades de las operaciones en $\mathbb{N}$ (resta). Ley de cancelación de la multiplicación. Algoritmo de la división euclídeana. Propiedades de las operaciones en $\mathbb{N}$ (potenciación).
**15 - 18 de setiembre	Principio del Buen Orden. Conjuntos finitos. $\mathbb{N}$ como conjunto infinito. <b>Entrega de I reporte de historia.</b>
21 - 25 de setiembre	Sistemas de Numeración en $\mathbb{N}$ : bases, operaciones, cambios de base.
28 de setiembre - 2 de octubre	Insuficiencia de $\mathbb{N}$ para la resolución de ecuaciones elementales. Definición de $\mathbb{Z}$ como conjunto cociente. números positivos y negativos ( $\mathbb{Z}^*$ , $\mathbb{Z}^+$ , $\mathbb{Z}^-$ ). $\mathbb{N}$ como subconjunto de $\mathbb{Z}$ . Estructura de $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ como anillo conmutativo con elemento unidad: Operaciones en $\mathbb{Z}$ y sus propiedades (suma-resta). Ley de cancelación de la suma. <b>Entrega de Tarea #3</b>
5 - 9 de octubre	Estructura de $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ como anillo conmutativo con elemento unidad: Operaciones en $\mathbb{Z}$ y sus propiedades (multiplicación-división). Leyes de signos. Ley de ausencia de divisores del cero. Ley de cancelación de la multiplicación. <b>I prueba parcial (miércoles 7, 1pm - 4pm).</b>
12 - 16 de octubre	Potenciación y radicación en $\mathbb{Z}$ : leyes de potencias y radicales. Relación de orden en $\mathbb{Z}$ . Representación de $\mathbb{Z}$ en la recta numérica. Valor absoluto y distancia en $\mathbb{Z}$ .
19 - 23 de octubre	Propiedades de $\mathbb{Z}$ como conjunto: discreto, ordenado, principio del buen orden, numerabilidad de $\mathbb{Z}$ . Teoría de números: Algoritmo de la división en $\mathbb{Z}$ . Divisores, factores y múltiplos de un número entero. números primos y compuestos. <b>Entrega de II reporte de historia.</b>
26 - 30 de octubre	Descomposición prima de un número. Máximo común divisor (algoritmo de Euclides) y mínimo común múltiplo. números primos relativos. <b>Entrega de Tarea #4</b>
2 - 6 de noviembre	Ecuaciones diofánticas. <b>Entrega de reporte de Programas MEP</b>
9 - 13 de noviembre	Insuficiencia de $\mathbb{Z}$ para la resolución de ecuaciones elementales. Definición de $\mathbb{Q}$ como conjunto cociente. $\mathbb{Z}$ como subconjunto de $\mathbb{Q}$ . Estructura de $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ como cuerpo: Propiedades de las operaciones en $\mathbb{Q}$ (suma, multiplicación, resta, división). Ley de ausencia de divisores del cero. Leyes de cancelación de la suma y la multiplicación. <b>Entrega de Tarea #5</b>
16 - 20 de noviembre	Potenciación y radicación en $\mathbb{Q}$ : leyes de potencias y radicales. Relación de orden en $\mathbb{Q}$ . Representación de $\mathbb{Q}$ en la recta numérica. Valor absoluto. Propiedades de $\mathbb{Q}$ como conjunto: denso, ordenado, arquimediano, numerable e incompleto. <b>Entrega de III reporte de historia.</b>
23 - 27 de noviembre	Expresión decimal de los números racionales: expresiones decimales exactas, periódicas puras y periódicas mixtas. Caracterización de las expresiones decimales a partir de los factores del denominador del representante canónico. Los conjuntos $\mathbb{Q}_d$ y $\mathbb{Q}_p$ . Insuficiencia de $\mathbb{Q}$ para la resolución de ecuaciones elementales.
M 2 de diciembre	<b>II Prueba parcial, 1pm - 4pm.</b>
V 11 de diciembre	Prueba de ampliación, 1pm-4pm

Las semanas indicadas con \*\* no incluyen al lunes pues es feriado.

## VIII. Bibliografía

1. Aleksandrov, A.D., Kolmogorov, A.N., Laurentiev, M.A. y otros. (1973). *La matemática: su contenido, métodos y significado*. Alianza Editorial, España.
2. Apóstol, T. (2009). *Análisis Matemático*. Segunda edición. Editorial Reverté, España.
3. Apóstol, T. (2010). *Calculus*. Segunda edición, Vol. I y II. Editorial Reverté, España.
4. Barrantes, H., Díaz, P., Murillo, M., Soto, A. (2007). *Introducción a la teoría de números*. EUNED, Costa Rica.
5. Cabrera, M. (2009). Los Distintos Sistemas de Numeración. *Innovación y Experiencias Educativas*, (4).
6. Chamorro, M. (coord.). (2005). *Didáctica de las Matemáticas*. PEARSON PRENTICE HALL, España.
7. Gámez, J., Navarro, J., García, F., Pina, E. (2005). *Matemáticas*. Volumen I. Editorial Mad, S. L., España.
8. Hofmann, J. (2005). *Historia de la Matemática*. Tercera edición, Editorial Limusa, México.
9. Rudin, W. (1980). *Principios de Análisis Matemático*. Tercera edición, Editorial McGraw-Hill, México.
10. Stewart, I. (2007). *Historia de las matemáticas en los últimos 10000 años*. España: Crítica.

Atentamente,

Prof. Floria Arias Tencio

Grupo 01

Correo electrónico: [arias.floria@gmail.com](mailto:arias.floria@gmail.com)

Horario de clases: K 13-14:50, V 13-15:50

Horario de consulta: J 13:30-16

Link para clases y consulta:

<https://udecr.zoom.us/j/91877085250>

Prof. José María Rodríguez Segura

Grupo 02

Correo electrónico: [jose.rodriguez.s@mail.pucv.cl](mailto:jose.rodriguez.s@mail.pucv.cl)

Horario de clases: L 13-15:50, J 13-14:50

Horario de consulta M 10:30-12, V 16-17

Link para clases y consulta:

<https://udecr.zoom.us/j/97591820260?pwd=WUIyOVR0TkpmMFc5MFJmZGRESXFBQT09>