



UNIVERSIDAD DE COSTA RICA  
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICA



Departamento Matemática Aplicada  
II Ciclo - 2018

## Carta al estudiante

### 1 Información General

**Sigla y nombre del curso:** MA-1023 Cálculo con Optimización

**Naturaleza del curso:** Teórico

**Horas presenciales:** 5

**Modalidad:** Semestral

**Carga académica:** 4 créditos

**Requisito:** MA-1001 Cálculo I

**Correquisito:** MA-1004 Álgebra Lineal

#### **Estimado(a) estudiante:**

Reciba una cordial bienvenida. Esperamos que este curso contribuya significativamente a su formación profesional. En este documento encontrará la información referente a la descripción, objetivos, contenidos, evaluación, cronograma y bibliografía del curso. Para el mejor aprovechamiento de este curso, el estudiante debe contar con un manejo ágil de los temas y contenidos de un primer curso de cálculo.

El cálculo avanzado en varias variables es una herramienta matemática con aplicaciones cotidianas en muchas áreas. En particular, los campos de la economía y la estadística presentan aplicaciones bastante interesantes, sobretodo en optimización e integración.

Por otro lado, el álgebra lineal no sólo tiene muchas aplicaciones a la estadística, sino que también representa una pieza fundamental en el engranaje de la maquinaria que se utiliza en el cálculo de varias variables.

Por todo lo anterior, es fundamental que el estudiante domine a cabalidad los contenidos del curso previo MA-1001 (requisito), y además, es importante que aborde los contenidos del curso MA-1004 (correquisito) con disciplina y seriedad.

El curso tiene una carga académica de cuatro créditos, lo que significa que amerita doce horas de estudio semanal. Descontando las cinco horas de clase, el estudiante debe comprometerse a dedicar al menos siete horas de estudio extra-clase, tanto a la teoría como a los ejercicios. Esta información puede consultarse en el sitio: [http://www.cu.ucr.ac.cr/normativ/definicion\\_credito.pdf](http://www.cu.ucr.ac.cr/normativ/definicion_credito.pdf)

Este curso puede catalogarse como un segundo curso de cálculo, en el que se exploran las ideas básicas del análisis matemático que se extiende a dos y tres variables fundamentales en cualquier campo de estudio. Este documento le brinda información general sobre los principales aspectos del curso que usted necesita para un desempeño adecuado en él. Es su responsabilidad leer y estar al tanto de toda la información que aquí se le suministra, así como estar al día con la materia y listas de ejercicios, de igual manera algunos temas o apartados pueden ser asignados para estudio independiente.

Cabe destacar que el uso de teléfonos celulares o dispositivos similares está prohibido tanto durante las clases magistrales como durante las sesiones prácticas.

## 2 Objetivos generales del curso

- Conocer y aplicar los conceptos y procedimientos de la teoría de sucesiones, series, aproximaciones mediante polinomios, para desarrollar habilidades que le permitan resolver problemas concretos relacionados con su formación profesional.
- Conocer y aplicar los conceptos y procedimientos del cálculo diferencial en varias variables para poder utilizarlos como herramienta en su carrera en problemas de optimización y aproximación.
- Conocer y aplicar los conceptos y procedimientos de integración impropia para aplicarlos a las herramientas de probabilidad y estadística.
- Conocer y aplicar los conceptos y procedimientos del cálculo integral en varias variables para poder utilizarlos como herramienta en su carrera en problemas de probabilidad y aproximación.

## 3 Objetivos específicos del curso

1. Demostrar proposiciones utilizando el principio de inducción.
2. Calcular polinomios de Taylor y el error respectivo, o una cota para el mismo.
3. Utilizar los polinomios de Taylor para resolver problemas de aproximación, incluyendo el error de la misma.
4. Calcular desarrollos limitados, y utilizarlos para el cálculo de límites.
5. Conocer los conceptos básicos de la teoría de sucesiones.
6. Conocer los conceptos básicos de la teoría de series numéricas.
7. Calcular el valor de convergencia de una serie numérica.
8. Aplicar los criterios de convergencia para estudiar la convergencia de una serie numérica.
9. Calcular el radio e intervalo de convergencia de una serie de potencias.
10. Calcular la serie de potencias de una función dada.
11. Calcular la función a la cual converge una serie de potencias dada.
12. Utilizar desarrollos limitados para el estudio de la convergencia de series.

13. Comprender el concepto de función real de varias variables reales.
14. Calcular derivadas parciales y direccionales de funciones de varias variables.
15. Comprender el concepto del gradiente y sus aplicaciones.
16. Calcular derivadas de funciones de varias variables usando la regla de la cadena.
17. Calcular derivadas de funciones de varias variables definidas implícitamente.
18. Aplicar los teoremas de la función inversa e implícita para resolver problemas relacionados con derivadas parciales.
19. Determinar los extremos de funciones en dos y tres variables mediante el criterio de segundo orden, sobre conjuntos abiertos.
20. Determinar los extremos de funciones en dos y tres variables sobre conjuntos compactos.
21. Determinar, usando multiplicadores de Lagrange, los extremos de funciones de varias variables con restricciones de igualdad.
22. Clasificar, mediante el método de Karush–Kuhn–Tucker, los extremos de funciones en dos o tres variables sujetas a restricciones de desigualdad.
23. Calcular el valor de convergencia de integrales impropias.
24. Aplicar los criterios de convergencia para determinar si una integral impropia es o no convergente.
25. Calcular integrales dobles y triples, a partir de las propiedades y la definición, o aplicando el teorema de Fubini.
26. Conocer y aplicar los métodos para el cambio de variables y cambio de orden de integración, para el cálculo de integrales dobles y triples.
27. Calcular áreas y volúmenes usando integrales dobles o triples.

## 4 Objetivos a evaluar en cada examen

A continuación se detallan los objetivos a evaluar en cada prueba parcial, para que el estudiante tenga claro de antemano qué debe conocer para cada prueba.

### I Parcial

1. Calcular el polinomio de Taylor de una función dada, junto con el error correspondiente.
2. Utilizar el polinomio de Taylor de una función para aproximar una función, y calcular una cota del error cometido.
3. Calcular desarrollos limitados, y utilizarlos para calcular límites.

4. Utilizar el principio de inducción para demostrar enunciados referentes a los temas de sucesiones y series.
5. Calcular límites de sucesiones.
6. Calcular el valor de convergencia de una serie numérica.
7. Determinar la convergencia o divergencia de una serie numérica mediante la aplicación de criterios tales como comparación, razón, raíz enésima, desarrollos limitados, entre otros.
8. Calcular el radio e intervalo de convergencia de una serie de potencias.
9. Determinar la función a la que converge una serie de potencias dada.
10. Utilizar desarrollos limitados, para analizar la convergencia de una serie.

### **II parcial**

1. Calcular derivadas parciales, direccionales, y gradientes.
2. Determinar direcciones de máximo crecimiento o decrecimiento.
3. Calcular derivadas parciales de funciones definidas explícita e implícitamente.
4. Comprobar relaciones (ecuaciones) mediante el cálculo de derivadas parciales.
5. Calcular derivadas parciales de funciones mediante la aplicación del teorema de la función inversa.
6. Calcular los puntos críticos de una función de dos o tres variables.
7. Clasificar los puntos críticos de una función de dos variables usando el segundo diferencial o el Hessiano.
8. Determinar los extremos de una función definida en un compacto.
9. Determinar los extremos de una función con restricciones de igualdad, mediante la utilización de los multiplicadores de Lagrange (incluyendo su clasificación con el Hessiano Orlado).
10. Determinar los extremos de funciones de varias variables con restricciones de desigualdad (Karush–Kuhn–Tucker).

### **III parcial**

1. Calcular el valor de convergencia de integrales impropias.
2. Aplicar los criterios de convergencia para determinar si una integral impropia es o no convergente.
3. Calcular integrales dobles y triples, a partir de las propiedades y la definición, o aplicando el teorema de Fubini.
4. Cambiar el orden de integración en una integral doble o triple.
5. Calcular áreas y volúmenes usando integrales dobles o triples.
6. Calcular integrales dobles y triples usando la fórmula de cambio de variables.

## 5 Programa del curso

### 5.1 Principio de Inducción y Teorema de Taylor

1. Principio de Inducción Matemática como herramienta demostrativa.
2. Teorema de Taylor con resto de Lagrange.
3. Uso de polinomios de Taylor para aproximar integrales definidas y soluciones de ecuaciones acotando el error correspondiente.
4. Desarrollos limitados y notación “ $o$ ” de Landau. Aplicación a límites.

### 5.2 Sucesiones y Series Numéricas

1. Definición de sucesión, convergencia.
2. Sucesiones monótonas y acotadas. Teorema de convergencia monótona.
3. Definición de serie numérica, convergencia.
4. Series geométricas, telescópicas y armónicas.
5. Criterios de convergencia.
6. Aplicación de desarrollos limitados al estudio de convergencia de series.

### 5.3 Series de Potencias

1. Definiciones básicas, término general, radio de convergencia, intervalo de convergencia.
2. Series de Taylor.
3. Derivación e integración término a término.
4. Cálculo explícito de la función de una serie de potencias.
5. Cálculo de valores de convergencia de series numéricas usando series de potencias.

### 5.4 Cálculo diferencial en varias variables

1. Funciones de dos y tres variables. Aspectos generales.
2. Derivadas parciales de una función de dos y tres variables.
3. Derivadas direccionales.
4. El gradiente, derivada direccional máxima.
5. Regla de la cadena.
6. Teorema de la función implícita.
7. Teorema de la función inversa.
8. Extremos de funciones sobre regiones abiertas. Criterios para extremos locales de funciones de dos variables.

9. Máximos y mínimos en conjuntos abiertos. Criterio de clasificación: Matriz Hessiana.
10. Máximos y mínimos en conjuntos compactos.
11. Multiplicadores de Lagrange.
12. Criterios de clasificación de funciones de con restricciones de igualdad: Hessiano Orlado.
13. Maximización de funciones con restricciones de desigualdad - introducción al método de Karush–Kuhn–Tucker.

## 5.5 Integrales Impropias

1. Concepto. Valor Principal de Cauchy.
2. Integrales impropias de 1<sup>a</sup> especie.
3. Integrales impropias de 2<sup>a</sup> especie.
4. p-Integrales de 1<sup>a</sup> y de 2<sup>a</sup> especie.
5. Criterios de convergencia.

## 5.6 Cálculo integral en varias variables

1. Definiciones y propiedades básicas de la integral doble sobre regiones rectangulares y otras regiones.
2. Cambio en el orden de integración de una integral doble.
3. Aplicación de integrales dobles al cálculo de áreas y volúmenes.
4. Cambios de variables y coordenadas polares.
5. Definiciones y propiedades básicas de la integral triple sobre diferentes regiones.
6. Cambio en el orden de integración de una integral triple.
7. Aplicación de integrales triples al cálculo de volúmenes.
8. Cambios de variable en integrales triples, coordenadas cilíndricas y esféricas.

## 6 Evaluación

### 6.1 Pruebas parciales y tareas

Se realizarán tres pruebas parciales de 180 minutos, donde cada prueba representa 30% de la nota de aprovechamiento (NA). Además, se realizarán tareas semanalmente, para entregar con hora límite las 10:00 am, los jueves en el caso del grupo 001, y con hora límite la 1:00 pm, los viernes en el caso del grupo 002, con excepción de las semanas 1, 5, 11 y 16. En total serán doce tareas, de las cuales se descartan las **dos** tareas de menor puntaje obtenido, por lo que el rubro de tareas representa 10% de la nota de aprovechamiento (NA).

Así, los estudiantes serán evaluados sumativamente a partir de su desempeño en:

Rubro	%
I Parcial	30
II Parcial	30
III Parcial	30
Tareas	10
NA	100

## 6.2 Calendario de exámenes

Prueba	Fecha	Fecha	Contenidos
Suficiencia	Miércoles 12 de setiembre	8:30 am	Todos
I Parcial	Miércoles 19 de setiembre	8:00 am	Temas 5.1, 5.2, 5.3
Repo I Parcial	Miércoles 26 de setiembre	1:00 pm	Temas 5.1, 5.2, 5.3
II Parcial	Miércoles 24 de octubre	8:00 am	Tema 5.4
Repo II Parcial	Miércoles 31 de octubre	1:00 pm	Tema 5.4
III Parcial	sábado 1 de diciembre	8:00 am	Temas 5.5, 5.6
Repo III Parcial	jueves 6 de diciembre	1:00 pm	Temas 5.5, 5.6
Ampliación	jueves 13 de diciembre	1:00 pm	Todos

## 6.3 Reporte de la nota final

Para efectos de promoción rigen los siguientes criterios, los cuales se refieren a la nota de aprovechamiento NA indicada arriba, expresada en una escala de 0 a 10, redondeada, en enteros y fracciones de media unidad, según el reglamento vigente:

- Si  $NA \geq 6.75$  el estudiante gana el curso con calificación NA redondeada a la media más próxima, los casos intermedios como 7.25 se redondean hacia arriba, es decir, 7.5.
- Si  $5.75 \leq NA < 6.75$ , el estudiante tiene derecho a realizar el examen de ampliación, en el cual se debe obtener una nota superior o igual a 7 para aprobar el curso con nota 7, en caso contrario su nota será 6.0 o 6.5, la más cercana a NA.
- Si  $NA < 5.75$  pierde el curso.
- La calificación final del curso se notifica a la Oficina de Registro e Información, en la escala de cero a diez, en enteros y fracciones de media unidad.

## 6.4 Disposiciones para la realización de las evaluaciones

El estudiante debe presentarse puntualmente el día del examen en el aula que fue asignada a su grupo. El estudiante debe traer un cuadernillo de examen y bolígrafo de tinta azul o negra. También es indispensable portar algún tipo de identificación con foto (cédula, licencia de conducir o carné universitario) *de lo contrario no podrá realizar la prueba*. En los exámenes de este curso no se permite el uso de calculadoras científicas, sólo se permite el uso de calculadoras que realicen las operaciones básicas (“*cuenta-pollos*”). Durante la aplicación de la prueba, se prohíbe el uso de teléfonos celulares, tabletas electrónicas y cualquier otro dispositivo de transferencia de información.

## 6.5 Exámenes de reposición

Aquellos casos de estudiantes con ausencia justificada a un examen, tales como enfermedades (con justificación médica), o choques de exámenes (con constancia del Sr. coordinador respectivo), o casos de giras (reportados por escrito) y con el visto bueno del órgano responsable, podrán realizar el examen de reposición. Para solicitar el examen de reposición debe llenar la boleta de justificación (se descarga en la página de la escuela de matemática: [www.emate.ucr.ac.cr](http://www.emate.ucr.ac.cr)), con esta adjuntar la respectiva constancia y entregarla al profesor del grupo correspondiente en los cinco días hábiles siguientes después de realizada la prueba ordinaria. Sólo los estudiantes autorizados mediante este proceso pueden realizar el examen de reposición. La entrega de los documentos no implica la autorización para hacer el examen de reposición, el profesor debe aprobar la autorización una vez revisada la documentación.

## 6.6 Calificación de exámenes

El profesor debe entregar a los alumnos los exámenes calificados y sus resultados, a más tardar 10 días hábiles después de que este se realizó, de lo contrario, el estudiante podrá presentar reclamo ante la coordinación de la cátedra.

La pérdida comprobada de un examen por parte del profesor da derecho al estudiante a una nota equivalente al promedio de sus calificaciones en los otros dos exámenes, o a criterio del estudiante, a repetir el examen.

## 7 Horas de consulta

Cada profesor de la cátedra dispone de un horario de consulta, para atender a los estudiantes en sus dudas respecto a la materia del curso, así como los ejercicios propuestos para cada sección. Cabe aclarar que los estudiantes pueden ir a consulta con cualquier profesor de la cátedra, en el horario que le sea más favorable. Los horarios de consulta son las siguientes:

Grupo	Profesor	Horas consulta
001	José David Campos F.	L: 8:00 a 9:00 y J: 8:00 a 10:00
002	Luis Guillermo Acuña V.	V: 16:00 a 18:30

## 8 Profesores

La asignación de profesores para el curso MA-1023 Cálculo con optimización, es la siguiente:

Grupo	Horario	Aulas	Oficina	Correo-e	Profesor
001	L: 10:00-12:50	040CE	317	<a href="mailto:josedavid.campos@ucr.ac.cr">josedavid.campos@ucr.ac.cr</a>	José David Campos F. (coordinador)
	J: 11:00-12:50	128CE	Edif. Anexo Finca 2	<a href="mailto:jdavidcf@gmail.com">jdavidcf@gmail.com</a>	
002	K: 13:00-15:50	141CE	251	<a href="mailto:luis.acunavalverde@ucr.ac.cr">luis.acunavalverde@ucr.ac.cr</a>	Luis Guillermo Acuña V.
	V: 13:00-14:50	040CE	Computación ECCI	<a href="mailto:guillemp22@yahoo.com">guillemp22@yahoo.com</a>	



## 9 Cronograma

Este cronograma es una guía de la distribución de los contenidos, cada profesor está en libertad de exponer los conceptos y realizar la práctica que considere necesaria, siempre que no altere los contenidos que debe cubrir para cada examen parcial.

Semana	Fechas	Temas
1	13 al 17 de Agosto	Principio de Inducción Matemática. Aproximación local de una función mediante polinomios de Taylor. Teorema de Taylor con resto de Lagrange. Uso de polinomios de Taylor para aproximar integrales definidas y soluciones de ecuaciones acotando el error correspondiente. Desarrollos limitados y notación “ $o$ ” de Landau. Cálculo de límites.
2	20 al 24 de Agosto	Concepto de sucesión y convergencia. Sucesiones monótonas y acotadas. Cálculo de límites de sucesiones.
3	27 al 30 de Agosto	Concepto de serie y convergencia. Término general, suma parcial. Series telescópicas, geométricas y armónicas. Criterios de convergencia: condición necesaria, criterio del cociente, raíz $n$ -ésima, comparación, criterio del límite. Aplicación de los desarrollos limitados al análisis de convergencia de series.
4	3 al 7 de Setiembre	Series de potencias: definiciones básicas, término general, radio e intervalo de convergencia, derivación e integración término a término. Cálculo de valores de convergencia de series numéricas usando series de potencias.
5	10 al 14 de Setiembre	Funciones de varias variables. Derivadas parciales, derivadas direccionales, el gradiente, dirección de máximo crecimiento.
6	17 al 21 de Setiembre	Práctica para el I Parcial. Regla de la cadena, derivadas de orden superior. Teorema de Taylor (varias variables). <b>I Parcial.</b>
7	24 al 28 de Setiembre	Teorema de la función implícita. Teorema de la función inversa.
8	1 al 5 de Octubre	Puntos críticos y extremos en conjuntos abiertos, criterio del Hessiano y diferencial de 2do orden.
9	08 al 12 de Octubre	Máximos y mínimos en conjuntos compactos. Multiplicadores de Lagrange. Criterios de clasificación: Hessiano Orlado.
10	15 al 19 de Octubre	Maximización de funciones con restricciones de desigualdad: introducción al método de Kuhn-Tucker.
11	22 al 26 de Octubre	Práctica para el II Parcial. Integrales impropias. <b>II Parcial.</b>
12	29 de Octubre al 2 de Noviembre	Integral doble sobre regiones rectangulares y otras regiones. Cambio en el orden de integración doble.
13	5 al 9 de Noviembre	Integral triple. Cambio en el orden de integración de una integral triple.
14	12 al 16 de Noviembre	Matriz Jacobiana y Determinante Jacobiano. Cambio de variables generales. Coordenadas polares. Coordenadas cilíndricas y esféricas.
15	19 al 23 de Noviembre	Aplicación de integrales dobles y triples al cálculo de áreas y volúmenes.
16	26 al 30 de Noviembre	Práctica para el III Parcial. <b>III Parcial.</b>

## 10 Avisos y contacto

El coordinador utilizará la plataforma MOODLE que la Escuela de Matemática pone a disposición de profesores y estudiantes, para crear la página del curso MA-1023 y así establecer un importante canal de comunicación entre coordinador y estudiantado. En dicha página, aparecerá copia de este documento, el enunciado de las tareas periódicamente, y las aulas de los exámenes.

El coordinador también mantendrá comunicación efectiva con los estudiantes a través de su correo institucional:

[josedavid.campos@ucr.ac.cr](mailto:josedavid.campos@ucr.ac.cr)

Los avisos relativos a las aulas de exámenes también serán publicados en la pizarra de la cátedra, en el segundo piso del edificio de Física y Matemáticas.

## 11 Estudiaderos

El CASE pone a disposición los estudiaderos, estos se llevan a cabo los miércoles a partir de las 8:00 am, y son atendidos por asistentes, en su mayoría estudiantes avanzados de varias carreras, quienes están a disposición para atender dudas de diversas áreas, en temas de teoría y de ejercicios. Se desarrolla en el aula 102 de Física y Matemática durante todo el semestre.

## 12 Referencias

Las referencias incluidas en esta carta constituyen una guía para el profesor y el estudiante en cuanto al nivel de presentación de los temas incluidos en el programa.

El profesor puede ampliarla con otros libros de referencia de su preferencia.

- [1] Apostol, T.: Calculus. Segunda Edición, Vol I y II. Editorial Reverté, España, 1982.
- [2] Bartle, R. y Sherbert, D. : Introducción al Análisis matemático. Segunda edición. Editorial Limusa, México, 1979.
- [3] Buck, R.C.: Advanced Calculus.–3rd. ed.– Waveland Press, NY, USA, 1978.
- [4] Demidovich, P.B.: Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático. Editorial MIR, Moscú, 1977.
- [5] Demidovich, P.B.: 5000 Problemas de Análisis Matemático. Editorial MIR, Moscú, 1985.
- [6] Edwards, C.H. Advanced Calculus of Several Variables. Dover, NY, USA (1973).
- [7] Hammond, P., Sydsaeter, K.S.: Matemática para el análisis económico. Prentice Hall, Madrid (1996).
- [8] Kaplan, W.: Advanced Calculus.–5th.ed.– Addison-Wesley, Michigan, 2010.
- [9] Knopp, K.: Infinite Sequences and Series. Dover, NY, USA (1956).
- [10] Lang, S.: Cálculo. Addison-Wesley Iberoamericana, EUA (1990).
- [11] Marsden, J.E. y Tromba, A.J.: Cálculo Vectorial. Tercera Edición. Addison Wesley, 1988.
- [12] Piskunov, N.: Cálculo Diferencial e Integral Tomos I y II. Editorial MIR, Moscú, 1978.

- [13] Pita Ruiz, C.: Cálculo Vectorial. Pearson Educación, Naucalpan de Juárez, México, 1995.
- [14] Piza Volio, E.: Introducción al Análisis Real en una variable. Editorial UCR, 2006.
- [15] Poltronieri, J.: Cálculo N-2. Serie Cabécar UCR, SJ, CR (1998).
- [16] Poltronieri, J.: Cálculo diferencial en espacios vectoriales normados: Funciones en varias variables. Serie Cabécar UCR, SJ, CR (2004).
- [17] Stewart, J.: Cálculo Multivariable. Cuarta Edición, Thompson Learning, México DF (2006).
- [18] Walker Ureña, M.B.: Material de Apoyo para Estudiantes. <http://apuntesmiguel.net/Inicio.html>
- [19] Wider, D.V.: Advanced Calculus. Second Edition, Dover, NY, USA (1989).

— José David Campos Fernández —  
[josedavid.campos@ucr.ac.cr](mailto:josedavid.campos@ucr.ac.cr)  
(+506) 2511-6621