

## Carta al estudiante



### Información general

<b>Nombre del curso:</b>	<b>Cálculo para Ciencias Económicas II</b>
<b>Sigla:</b>	<b>MA 1022</b>
<b>Naturaleza del curso:</b>	<b>Teórico</b>
<b>Cantidad de horas presenciales:</b>	<b>5</b>
<b>Modalidad:</b>	<b>Semestral</b>
<b>Créditos:</b>	<b>4</b>
<b>Requisito:</b>	<b>MA1021</b>
<b>Correquisito:</b>	<b>Ninguno</b>

#### Estimado(a) estudiante:

Reciba una cordial bienvenida de parte de la cátedra de MA 1022. En este documento se presenta información que usted debe conocer con respecto al desarrollo del curso, por consiguiente, se recomienda la lectura cuidadosa del mismo.

#### ASPECTOS GENERALES DEL CURSO:

##### **I. Descripción**

Este curso busca incentivar en el estudiantado el desarrollo de la capacidad de abstracción y la habilidad para la modelación, a través de la resolución de ejercicios y problemas contextualizados en dos contenidos generales: álgebra lineal y cálculo diferencial en varias variables.

En su proceso de aprendizaje es recomendable mantener una actitud crítica durante el desarrollo de las lecciones, utilizar adecuadamente sus conocimientos previos y aprovechar al máximo el trabajo extra clase asignado. Debe resolver los ejercicios planteados luego del estudio de los conceptos claves, las estrategias de solución planteadas deben ir más allá de la mera aplicación de procedimientos memorizados sin comprensión alguna.

Según el Reglamento de Régimen Académico Estudiantil, la cantidad de créditos de este curso equivale a doce horas semanales de su trabajo en el mismo. Se le recomienda la lectura de dicho reglamento ya que rige los procedimientos de evaluación y orientación académica de cada estudiante de la Universidad de Costa Rica. Este puede ser descargado en el siguiente enlace [http://www.cu.ucr.ac.cr/uploads/tx\\_ucruniversitycouncildatabases/normative/regimen\\_academico\\_estudiantil.pdf](http://www.cu.ucr.ac.cr/uploads/tx_ucruniversitycouncildatabases/normative/regimen_academico_estudiantil.pdf)

## **II. Objetivos Generales**

1. Aplicar conceptos, representaciones y procedimientos propios del álgebra lineal y del cálculo diferencial en varias variables, en un contexto de solución de ejercicios y problemas.
2. Desarrollar habilidades que le permitan resolver problemas o situaciones concretas, relacionados con su formación profesional.
3. Valorar la importancia del álgebra lineal y del cálculo diferencial en varias variables en el desarrollo de modelos aplicados en diferentes disciplinas.

## **III. Objetivos Específicos**

1. Resolver operaciones que involucren matrices.
2. Resolver sistemas de ecuaciones lineales mediante diferentes algoritmos.
3. Clasificar el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales a partir de los rangos de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada.
4. Resolver ecuaciones cuya incógnita sea una matriz.
5. Relacionar el cálculo de la inversa de una matriz con el producto de matrices elementales.
6. Calcular determinantes.
7. Aplicar las propiedades básicas del determinante en la simplificación de expresiones.
8. Aplicar las propiedades básicas del álgebra matricial en problemas relacionados con el modelo de Leontief.
9. Interpretar geoméricamente conceptos vectoriales.
10. Utilizar diferentes notaciones para representar una recta y un plano.
11. Calcular la distancia entre puntos, rectas y planos.
12. Determinar la intersección entre dos rectas, dos planos, una recta y un plano.
13. Interpretar el concepto de función real de varias variables reales.
14. Clasificar superficies cuadráticas sin términos mixtos dada su ecuación o gráfica.
15. Aplicar el concepto de derivada parcial en problemas de análisis marginal.
16. Aplicar el concepto de derivada direccional y vector gradiente en problemas de tasas relacionadas.
17. Determinar una ecuación para el plano tangente y la recta normal a una superficie.
18. Aplicar la regla de la cadena y el teorema de la función implícita en el cálculo de derivadas parciales.
19. Determinar los extremos de funciones de varias variables mediante el criterio del Hessiano o por medio de la fórmula de Taylor.
20. Calcular los extremos absolutos de funciones de varias variables en regiones compactas.
21. Determinar los extremos de funciones de varias variables con restricción de igualdad mediante multiplicadores de Lagrange.

22. Clasificar los extremos de funciones de varias variables con restricción de igualdad mediante el método del Hessiano orlado.
23. Resolver problemas de optimización de funciones de varias variables con restricción de igualdad.

#### **IV. Contenidos**

##### ***Tema I. Álgebra Lineal.***

##### ***a. Matrices y sistemas de ecuaciones lineales.***

Matriz, vector fila y vector columna. Algunos tipos de matrices: nula, cuadrada, diagonal, identidad, simétrica y triangular. Igualdad de matrices. Multiplicación de una matriz por un escalar, suma y producto de matrices. Propiedades básicas del álgebra de matrices. Operaciones elementales sobre las filas. Matrices equivalentes por filas. Matrices elementales. Relación entre el producto por matrices elementales y el efectuar operaciones elementales sobre las filas. Ecuación lineal y sistema de ecuaciones lineales. Solución y conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales. Matriz de coeficientes del sistema y matriz aumentada. Sistemas de ecuaciones lineales equivalentes. Matriz escalonada y matriz escalonada reducida. Método de reducción Gauss-Jordan. Rango de una matriz. Descripción del conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales según la relación entre el rango de la matriz de coeficientes del sistema, el rango de la matriz aumentada y la cantidad de incógnitas. Sistemas homogéneos. Inversa de una matriz y propiedades básicas de las matrices invertibles. Relación entre matrices invertibles y sistemas de ecuaciones lineales. Relación entre matrices invertibles y el producto por matrices elementales. Otros tipos de matrices: transpuesta, antisimétrica y ortogonal. Transposición de matrices y sus propiedades elementales. Problemas que se resuelven mediante la solución de sistemas de ecuaciones lineales. Modelo de insumo producto de Leontief.

##### ***b. Determinantes.***

Definición de determinante y sus propiedades básicas. Cálculo de determinantes. Regla de Cramer. Relación entre el rango de una matriz y su determinante. Menores y cofactores de una matriz cuadrada. Matriz adjunta y su relación con el cálculo de la inversa.

##### ***c. Geometría vectorial en el espacio tridimensional.***

Representación geométrica de un vector como punto y como segmento de recta dirigido. Representación geométrica de la suma y resta de vectores, así como del producto de un escalar por un vector. Álgebra de vectores. Norma de un vector, vectores canónicos, vector unitario y dirección de un vector. Distancia entre dos vectores. Producto punto, ángulo entre vectores, vectores paralelos y ortogonales. Proyección ortogonal de un vector sobre otro. Componente ortogonal de un vector sobre otro. Producto cruz y sus propiedades. Ecuación vectorial, paramétrica y simétrica de una recta. Ecuación vectorial, paramétrica y normal de un plano. Rectas paralelas y ortogonales. Distancias entre: un punto y una recta, dos rectas, un punto y un plano, y dos planos. Intersecciones de objetos geométricos (rectas y planos).

## ***Tema II. Cálculo Diferencial en Varias Variables.***

### ***a. Derivación de funciones de varias variables.***

Funciones de varias variables y su representación geométrica. Superficies cuadráticas sin términos mixtos. Derivadas parciales y su aplicación en análisis marginal. Derivadas direccionales y vector gradiente. Plano tangente y recta normal a una superficie. Regla de la cadena. Teorema de la función implícita.

### ***b. Optimización de funciones de dos y tres variables.***

Máximos y mínimos (locales y globales), punto crítico y punto silla. Extremos de funciones sobre regiones abiertas. Criterio del discriminante para clasificar extremos locales de funciones de dos variables. Clasificación de puntos críticos mediante el criterio del Hessiano o por medio de la fórmula de Taylor. Extremos condicionados. Multiplicadores de Lagrange. Criterio del Hessiano orlado. Máximos y mínimos en regiones compactas. Problemas de optimización en varias variables con restricción de igualdad.

## **V. Cronograma**

A continuación se presenta una guía de la distribución semanal de los diferentes tópicos del curso

13 al 17 de agosto (feriado: 15 de agosto)	Discusión de aspectos centrales de la carta al estudiante. Matriz, vector fila y vector columna. Algunos tipos de matrices: nula, cuadrada, diagonal, identidad, simétrica y triangular. Igualdad de matrices. Multiplicación de una matriz por un escalar, suma y producto de matrices. Propiedades básicas del álgebra de matrices. Operaciones elementales sobre las filas. Matrices equivalentes por filas. Matrices elementales. Relación entre el producto por matrices elementales y el efectuar operaciones elementales sobre las filas. Ecuación lineal y sistema de ecuaciones lineales. Solución y conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales. Matriz de coeficientes del sistema y matriz aumentada. Sistemas de ecuaciones lineales equivalentes. Matriz escalonada y matriz escalonada reducida.
20 al 24 de agosto	Método de reducción Gauss-Jordan. Rango de una matriz. Descripción del conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales según la relación entre el rango de la matriz de coeficientes del sistema, el rango de la matriz aumentada y la cantidad de incógnitas. Sistemas homogéneos.
27 al 31 de agosto	Inversa de una matriz y propiedades básicas de las matrices invertibles. Relación entre matrices invertibles y sistemas de ecuaciones lineales. Relación entre matrices invertibles y el producto por matrices elementales.
3 al 7 de setiembre	Transposición de matrices y sus propiedades elementales. Problemas que se resuelven mediante la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Modelo de insumo producto de Leontief.
10 al 14 de setiembre	Cálculo de determinantes. Regla de Cramer. Relación entre el rango de una matriz y su determinante. Matriz adjunta y su relación con el cálculo de la inversa.  <b>Hasta aquí los contenidos a evaluar en el primer examen.</b>
17 al 21 de setiembre	Representación geométrica de un vector como punto y como segmento de recta dirigido. Representación geométrica de la suma y resta de vectores, así como del producto de un escalar por un vector. Álgebra de vectores. Norma de un vector, vectores canónicos, vector unitario y dirección de un vector. Producto punto, ángulo entre vectores, vectores paralelos y ortogonales. Proyección ortogonal de un vector sobre otro. Componente ortogonal de un vector sobre otro.

24 al 29 de setiembre	Repaso para el primer examen. Producto cruz y sus propiedades. Ecuación vectorial, paramétrica y simétrica de una recta.
1º al 5 de octubre	Rectas paralelas y ortogonales. Planos paralelos y perpendiculares. Distancias entre: un punto y una recta, dos rectas, un punto y un plano, dos planos. Intersecciones entre objetos geométricos (rectas y planos)
8 al 12 de octubre	Funciones de varias variables y su representación geométrica. Superficies cuadráticas sin términos mixtos. Derivadas parciales y su aplicación en análisis marginal.
15 al 19 de octubre (feriado: 15 de octubre)	Derivada direccional y vector gradiente. Derivadas parciales de orden superior. Regla de la cadena de funciones de varias variables.  <b>Hasta aquí los contenidos a evaluar en el segundo examen</b>
22 al 26 de octubre	Teorema de la función implícita. Plano tangente y recta normal a una superficie. Máximos y mínimos (locales y globales), punto crítico y punto silla.
29 de octubre al 2 de noviembre	Repaso para el segundo examen. Extremos de funciones sobre regiones abiertas. Criterio del discriminante para clasificar extremos locales de funciones de dos variables.
5 al 10 de noviembre	Polinomio de Taylor de segundo orden para una función de dos variables. Clasificación de puntos críticos por el criterio del Hessiano o mediante la fórmula de Taylor.
12 al 17 de noviembre	Extremos condicionados. Multiplicadores de Lagrange. Criterio del Hessiano orlado.
19 al 24 de noviembre	Máximos y mínimos en regiones compactas. Problemas de optimización de funciones de varias variables con restricción de igualdad.
26 al 30 de noviembre	Repaso para el tercer parcial.  <b>Hasta aquí los contenidos a evaluar en el III Examen.</b>

## **VI. Metodología**

El docente tendrá mayor participación en aquellas sesiones donde se enfatice principalmente en el aprendizaje del componente teórico del curso, lo cual no significa que se prescinda de espacios de discusión con el estudiantado. En las lecciones destinadas para la resolución de ejercicios y problemas cada estudiante debe asumir mayor participación, ya sea exponiendo en la pizarra sus procedimientos ante el resto de compañeras y compañeros o mediante la discusión de resultados cuando deba trabajar en grupo.

Algunas actividades sugeridas a cada estudiante durante el desarrollo del curso:

- Asistir puntualmente a todas las clases.
- Elaborar un listado de preguntas con base en las definiciones, teoremas, propiedades, procedimientos o tipos de problemas que le generan mayor dificultad de comprensión.
- Estudiar lo tratado en la sesión anterior previo a cada clase.
- Cumplir con las tareas que su docente le asigne.
- Resolver los ejercicios presentes en el material didáctico sugerido, así como los planteados en exámenes de ciclos anteriores.
- Asistir a las horas de atención a estudiantes ofrecidos por el grupo docente.

## **VII. Evaluación**

Se aplicarán tres exámenes, la nota de aprovechamiento será el promedio simple de las calificaciones obtenidas en dichas pruebas.

Para efectos de promoción rigen los siguientes criterios, los cuales se refieren a la nota de aprovechamiento redondeada, en enteros y fracciones de media unidad, según el reglamento vigente, a saber:

- Si la nota de aprovechamiento redondeada es mayor o igual que 7.0, el estudiante aprueba el curso.
- Si la nota de aprovechamiento redondeada es 6.0 ó 6.5, el estudiante tiene derecho a realizar el examen de ampliación. En este examen debe obtener una nota mayor o igual a 7.0 para aprobar el curso, si aprueba se le reportará 7.0 como nota final, de lo contrario se le reportará su nota de aprovechamiento redondeada.
- Si la nota de aprovechamiento redondeada es menor que 6.0, el estudiante reprueba el curso.

## **VIII. Fechas de exámenes**

A continuación, se detalla la programación de las pruebas según el día y la hora

	<b>Fecha y Hora de Examen Ordinario</b>	<b>Fecha y Hora de Examen de Reposición</b>
Primer Parcial	M, 26 de setiembre, 1 p.m.	M, 3 de octubre, 8 a.m.
Segundo Parcial	M, 31 de octubre, 8 a.m.	M, 7 de noviembre, 1 p.m.
Tercer Parcial	S, 1º de diciembre, 8 a.m.	K, 4 de diciembre, 8 a.m.
Suficiencia	M, 12 de setiembre, 8:30 a.m.	-----
Ampliación	J, 13 de diciembre, 8 a.m.	-----

Para solicitar la reposición de cualquier examen debe presentar en la oficina del coordinador el formulario correspondiente (disponible en la página web [www.emate.ucr.ac.cr](http://www.emate.ucr.ac.cr)) con la documentación que respalde el motivo de ausencia. Se le aprobará su solicitud siempre y cuando esta cumpla con lo establecido en el Reglamento de Régimen Académico Estudiantil (Capítulo VI, artículo 24). También debe entregar una copia de los documentos a su docente para que este conozca sobre su solicitud.

Al asistir a cualquier evaluación debe considerar los siguientes lineamientos:

- Presentar alguna identificación válida (carné universitario, cédula de identidad, tarjeta de identificación de menores, pasaporte, licencia de conducir, entre otros)

- Portar cuadernillo de examen (no se permiten hojas sin grapar), usar bolígrafo de tinta azul o negra.
- No utilizar calculadoras programables ni graficadoras.
- Realizar la prueba en el grupo en el que se encuentra matriculado.

Es importante considerar que toda la normativa de evaluación del curso se rige según lo establecido en el capítulo VI del Reglamento de Régimen Académico Estudiantil. Algunos puntos importantes de este son:

- Cada prueba le debe ser entregada a más tardar diez días hábiles después de haberse efectuado.
- Si considera que la prueba ha sido mal evaluada, tiene derecho a solicitar a su docente, de forma oral, aclaraciones y adiciones sobre la evaluación, en un plazo no mayor de tres días hábiles posteriores a la devolución de esta.
- La pérdida comprobada por parte de su docente de cualquier prueba le da derecho a una nota equivalente al promedio de todas las evaluaciones del curso o a repetir la prueba según el criterio suyo.

## **IX. Objetivos de Evaluación**

A continuación, se detallan los objetivos de evaluación que se consideran para la selección de los ejercicios y problemas que se plantean en los exámenes.

### *Primer Examen*

1. Resolver operaciones con matrices: producto por escalar, suma, resta, producto, transposición.
2. Demostrar identidades mediante álgebra de matrices.
3. Verificar si un vector es solución de un sistema de ecuaciones lineales.
4. Determinar el conjunto de soluciones de sistemas de ecuaciones lineales.
5. Calcular el valor de coeficientes en sistemas de ecuaciones lineales alfanuméricos, con el propósito de caracterizar al conjunto de soluciones.
6. Calcular la inversa de una matriz mediante operaciones elementales de fila.
7. Expresar una matriz invertible como producto de matrices elementales.
8. Calcular determinantes.
9. Simplificar expresiones algebraicas mediante las propiedades de determinantes.
10. Calcular la inversa de una matriz mediante la matriz adjunta.
11. Resolver sistemas de ecuaciones lineales mediante la regla de Cramer.
12. Determinar si una matriz es invertible mediante el cálculo de su determinante.
13. Resolver ecuaciones cuya incógnita sea una matriz.

## *Segundo Examen*

1. Interpretar geoméricamente la suma y resta de dos vectores, y el producto de un escalar por un vector
2. Calcular la norma de un vector.
3. Determinar si un vector es unitario.
4. Calcular el producto punto de dos vectores y el coseno del ángulo formado por estos.
5. Determinar si dos vectores son paralelos u ortogonales.
6. Determinar el vector unitario y paralelo a otro.
7. Calcular la proyección y la componente ortogonal de un vector sobre otro.
8. Calcular el producto cruz de dos vectores.
9. Resolver problemas geoméricos mediante conceptos vectoriales.
10. Calcular el área de un paralelogramo y el volumen de un paralelepípedo mediante el producto cruz.
11. Determinar la ecuación vectorial, paramétrica o simétrica para una recta.
12. Determinar la ecuación vectorial, paramétrica o normal de un plano.
13. Calcular las intersecciones entre: dos rectas, una recta y un plano, dos planos.
14. Calcular la distancia entre: dos puntos, un punto y una recta, dos rectas, una recta y un plano, dos planos.
15. Determinar el tipo de superficie cuadrática dada su ecuación o gráfica.
16. Calcular derivadas parciales y direccionales.
17. Resolver problemas de análisis marginal.
18. Resolver problemas que involucren el cálculo de gradientes.
19. Calcular derivadas parciales mediante la regla de la cadena.

## *Tercer Examen*

- 1) Comprobar identidades que involucren derivadas parciales de funciones definidas implícitamente.
- 2) Determinar una ecuación para el plano tangente y la recta normal a una superficie.
- 3) Calcular los puntos críticos de funciones de dos y tres variables.
- 4) Determinar los extremos locales de funciones de dos variables mediante el criterio del discriminante.
- 5) Clasificar los puntos críticos de funciones de dos y tres variables mediante el criterio del Hessiano o por medio de la fórmula de Taylor.
- 6) Determinar los extremos de funciones de varias variables sujetas a una restricción de igualdad mediante el método de multiplicadores de Lagrange.
- 7) Clasificar los extremos de funciones de varias variables sujetas a una restricción de igualdad mediante el criterio del Hessiano orlado.
- 8) Calcular los valores extremos absolutos de una función de varias variables en una región compacta.
- 9) Resolver problemas de optimización de funciones de varias variables sujetas a una restricción de igualdad.



## **X. Apoyo del CASE (Centro de Asesoría Estudiantil)**

El CASE de Ciencias Básicas en coordinación con la Escuela de Matemática ofrecen los llamados *Estudiaderos*. Este servicio se da a partir de la segunda semana de clases tal como se detalla a continuación:

- Los miércoles de 10:00 a.m. a 6:00 p.m. en el aula 102 del edificio Física-Matemática. Este se ubica en el campus central.
- Los viernes de 9:00 a.m. a 6:00 p.m. en el aula 504 del edificio de la Facultad de Ingeniería. Este se ubica en la Ciudad de la Investigación.

Se le recomienda utilizar estos espacios de discusión para fortalecer aspectos conceptuales y enfatizar en la resolución de ejercicios y problemas.

## **XI. Horario de atención a estudiantes**

Su docente cuenta con un horario extraclase destinado a atender consultas, este le debe ser comunicado durante la primera semana del curso. Es importante que utilice adecuadamente dicho recurso, de tal forma que reciba una atención más individualizada que le permita mejorar su aprendizaje.

A continuación, se detallan los horarios de atención en la sede Rodrigo Facio. Puede asistir a cualquiera de las opciones, independientemente del grupo en que se encuentre matriculado.

<b>Profesor</b>	<b>Horario</b>	<b>Oficina</b>
Bryan Rivas Marín	K 13:00-16:00, V 9:00-11:00	322 Edificio Anexo Finca 2
Jeremías Ramírez Jiménez	L 9:00-11:00, J 10:00-11:00	310 Edificio Anexo Finca 2
Virgilio Benavides Vargas	K 9:00-12:00, M 08:00-10:00	411-1 FM

## **XII. Bibliografía**

Los libros de texto para el curso son los siguientes:

1. Grossman, S & Flores, J. (2012). *Álgebra Lineal*. (7<sup>a</sup> ed). México DF, México: Mc Graw Hill.
2. Pita, C. (1995). *Cálculo Vectorial* (1<sup>a</sup> ed). Naucalpan de Juárez, México: Prentice Hall Hispanoamérica.
3. Arya, J. & Lardner, R. (2009). *Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía*. (5<sup>a</sup> ed). México DF, México: Pearson.

El primero se utiliza exclusivamente para el tema de Álgebra Lineal, el segundo trata los contenidos elementales de Cálculo Diferencial, mientras que el tercero se recomienda para los temas relacionados con aplicaciones.

Otros libros como referencias bibliográficas complementaria son:

1. Arce, C., Castillo, W. & González, J. (2004). *Álgebra Lineal*. (3ª ed). San José, Costa Rica: EUCR.
2. Howard, A (2016). *Introducción al álgebra lineal*. (5ª ed). México DF, México: Limusa.
3. Lay, D. (2012) *Álgebra Lineal Elemental y sus Aplicaciones*. (4ª ed). México DF, México: Pearson.
4. Stewart, J. (2012). *Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas*. (7ª ed). México DF, México: Cengage Learning.
5. Marsden, J & Tromba, A. (2004) *Cálculo Vectorial*. (5ª ed). Madrid, España: Pearson.
6. Rogawski, J. (2012). *Cálculo: varias variables*. (3ª ed). Barcelona, España: Reverté.

Se le recomienda utilizar apropiadamente la bibliografía, la cual le permitirá reforzar los conceptos y desarrollar sus habilidades en la solución de ejercicios, más allá de lo que el tiempo permite alcanzar durante las lecciones.

Este curso cuenta con el sitio web <http://emoodle.emate.ucr.ac.cr/> Primero debe crear un usuario (la cuenta de correo asociada a este debe ser la otorgada por la UCR) y posteriormente matricularse al curso *MA1022 Cálculo II para Ciencias Económicas*, la clave de matriculación es **Ma1022.2018**

En dicha plataforma virtual podrá descargar material didáctico, así como consultar avisos importantes (horario de clase de todos los grupos, distribución de aulas para los exámenes, reposición de clases, notas finales, entre otros).

Atentamente,

Prof. Virgilio E. Benavides Vargas.

Coordinador.

[virgilio.benavides@ucr.ac.cr](mailto:virgilio.benavides@ucr.ac.cr)

[vbenvar@gmail.com](mailto:vbenvar@gmail.com)

Casillero # 61 Segundo Piso FM

Oficina # 411-1 FM

Teléfono: 25118034