Universidad de Costa Rica
Escuela de Matemática
Departamento de Matemática Pura

Carta al Estudiante
MA-0840 Probabilidad
I Ciclo 2017

1. Información General

Datos del curso

Nivel: IV Año.
Horario de clases: Martes 11:00-12:50, Viernes 10:00-12:50 (Aula 400 FM).
Horario de consulta: Martes 14:30-16:30, Viernes 14:30-15:30.
Créditos: 5.
Requisito: MA-0505 (recomendado MA-0605).

Datos del profesor

Profesor: Christian Fonseca Mora.
Correo electrónico: christianandres.fonseca@ucr.ac.cr.
Oficina: 323 Edificio Anexo de la Escuela de Matemática, Ciudad de la Investigación.
Casillero: #36 Segundo Piso FM.

2. Descripción

Este es un primer curso sobre teoría de la probabilidad basado en teoría de la medida. El curso está dirigido principalmente a estudiantes de la carrera de Bachillerato en Matemáticas, sin embargo, el curso es también recomendado para estudiantes de otras ramas de la ciencia que deseen profundizar sus conocimientos en probabilidad para posterior aplicación en su campo de estudio.

En términos generales se puede decir que la probabilidad es una medición numérica sobre la incertidumbre en la ocurrencia de una acción o un experimento. En este curso tomaremos el enfoque moderno de la teoría de la probabilidad, iniciado en 1933 por Andrei Kolmogorov, y que se basa en los desarrollos de la teoría de la medida entre finales del siglo XIX y principios del siglo XX, obtenidos por varios autores entre los que destacan Émile Borel, Henry Lebesgue, Johann Radon, entre otros.

Actualmente la teoría de la probabilidad es un campo de mucha actividad y que se encuentra en constante expansión, en gran parte motivada por el gran número de aplicaciones a otras disciplinas como la física, la biología, la ingeniería, la economía y más recientemente por las finanzas.

En este curso se espera que el estudiante pueda desarrollar conocimientos y destrezas en conceptos centrales en la teoría de la probabilidad como lo son los espacios de probabilidad, variables aleatorias y modos de convergencia, independencia, leyes de grandes números, esperanza condicional, martingalas, convergencia débil, funciones características, teoremas del límite central, entre otros.

El requisito formal es el curso MA-0505 *Análisis I*. Sin embargo, se va a asumir que el estudiante está familiarizado con la teoría de la medida e integración de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$, por lo que para beneficio del estudiante se recomienda que este haya aprobado el curso MA-0605 *Análisis II* donde el estudiante adquirió conocimientos y destrezas en los temas citados anteriormente. No suponemos ningún conocimiento previo en probabilidad.

3. Objetivos

3.1. Objetivos Generales

1. Desarrollar la capacidad del estudiante para comprender los conceptos y resultados básicos de la teoría moderna de la probabilidad para que pueda aplicarlos al estudio de problemas elemententales tanto de naturaleza teórica como práctica relacionados a esta disciplina.

2. Fomentar en el estudiante el uso de la literatura matemática para poder introducirse en la investigación en temas de su interés.

3. Desarrollar el buen uso del lenguaje lógico matemático, mediante el abordaje riguroso de los temas a estudiar.

3.2. Objetivos Específicos

1. Comprender los conceptos de espacios de probabilidad y variables aleatorias, y desarrollar las competencias necesarias para aplicarlos en la en la modelación de fenómenos de naturaleza aleatoria.

2. Comprender el concepto de independencia, y desarrollar destrezas para su aplicación en el estudio de las leyes de grandes números, la convergencia de series de variables aleatorias, entre otros.

3. Comprender el concepto de esperanza condicional, y ser capaz de aplicarlo a al estudio de las martingalas.

4. Comprender el concepto de convergencia débil y su relación con otros modos de convergencia.

5. Estudiar las propiedades de las funciones características y desarrollar las destrezas para aplicarlas en el estudio de los teoremas del límite central y otros resultados importantes en la teoría de la probabilidad.

4. Contenidos y Estructura del Curso

En la siguiente lista de contenidos se puede apreciar en detalle los tópicos a cubrir en el curso.

Capítulo 1. Espacios de probabilidad y variables aleatorias: Rerpaso de σ-álgebras, teoremas de Dynkin y de clase monótona, espacios de medida y de probabilidad, teorema de Caratheódory, funciones de distribución y densidad, variables aleatorias, integración, espacios producto y teorema de Fubini, esperanza y varianza de una variable aleatoria.

Capítulo 2. Independencia y leyes de grandes números: definición y caracterización de la independencia, relación entre la independencia y distribución de variables aleatorias, ley débil de los grandes números, técnica de truncación, lemas de Borel-Cantelli, relación entre modos de convergencia, ley fuerte de los grandes números, series de variables aleatorias independientes.

Capítulo 3. Esperanza condicional y martingalas: definición y propiedades básicas de la esperanza condicional, martingalas en tiempo discreto y sus propiedades, teorema de convergencia de martingalas, descomposición de Doob, desigualdades de Doob, convergencia en L^p, integrabilidad uniforme.

Capítulo 4. Convergencia débil, funciones características y teorema del límite central: definición de convergencia débil o en distribución, lema de Scheffé, modos de convergencia equivalentes, teorema de selección de Helly, relación con otros modos de convergencia, teorema de Prohorov, propiedades básicas de la función característica, unicidad y fórmula de inversión, teorema de continuidad de Lévy, teoremas del límite central.

El orden de los temas puede variar un poco conforme se desarrolle el semestre. Además, la lista anterior no es exhaustiva y si el tiempo lo permite es posible que estudiemos otros temas que sean de interés para los estudiantes.

5. Mini-curso en Teoría de Semigrupos de Operadores y Aplicaciones

Como parte del curso y durante las primeras dos semanas de mayo estaremos participando del mini-curso *Teoría de Semigrupos de Operadores y Aplicaciones* impartido por el Profesor David Applebaum de la Universidad de Sheffield en Inglaterra (sitio web del profesor Applebaum http://www.applebaum.staff.shef.ac.uk/).

El mini-curso explorará las interacciones de la teoría de semigrupos de operadores con otras ramas de las matemática como la probabilidad y las ecuaciones en derivadas parciales. Esta es una gran oportunidad para que el estudiante pueda relacionar la teoría básica de probabilidad vista en el curso con temas más avanzados y que son de actualidad en la investigación matemática. Además se espera que el estudiante se beneficie de interactuar con un reconocido experto en el tema.

La asistencia al mini-curso será de carácter obligatorio y se espera que el estudiante participe de forma activa en el desarrollo de las lecciones. Para conveniencia de los estudiantes la mayoría de las lecciones del mini-curso se desarrollarán durante el tiempo de clase de este curso. Más detalles sobre el mini-curso se darán oportunamente durante las primeras semanas del semestre.

6. Metodología

A lo largo del semestre tendremos tres tipos de sesiones. Clases magistrales en las cuales el profesor desarrollará los contenidos del curso. Sesiones de ejercicios en las cuales los estudiantes presentarán sus soluciones a los ejercicios propuestos. Sesiones para presentaciones de los proyectos preparados por los estudiantes. Es fundamental el trabajo fuera de la clase que realice el estudiante, especialmente en la resolución de ejercicios.

7. Pautas de Evaluación

Tendremos 3 rubros de evaluación:

1. *Examenes:* Se realizarán tres exámenes parciales cada uno con un valor de 25 % de la nota de aprovechamiento. Las fechas junto con los temas que serán evaluados en cada parcial se darán a conocer con la debida anticipación.

2. *Mini-curso:* La asistencia y participación de las actividades del mini-curso *Teoría de Semigrupos de Operadores y Aplicaciones* tendrá un valor de 8 % en la nota de aprovechamiento. La asistencia será obligatoria y sólamente se podrá ausentar con debida justificación.

3. *Proyecto de investigación:* El 17 % restante consiste en un proyecto de investigación. Dicho porcentaje se distribuirá en 12 % de un trabajo escrito y 5 % de una presentación en clase.

Se recomienda que el o la estudiante consulte el Reglamento de Régimen Académico Estudiantil, en especial los artículos 18, 19 y 20 que se refieren a evaluaciones y reclamos.

Lineamientos para el proyecto de investigación:

El tema a escoger deberá estar relacionado con el área de probabilidad. El objetivo principal es hacer una revisión bibliográfica del tema seleccionado incluyendo diversas fuentes y de preferencia haciendo referencia a artículos de investigación recientes. La idea es que el estudiante se familiarice con el proceso de selección y manejo de literatura matemática.

El trabajo escrito deberá tener una extensión de mínimo 5 y máximo 10 páginas. Deberá contener un resumen al inicio y una estructura bien definida. Se evaluarán rubros como calidad del material, relevancia, claridad de exposición y el uso adecuado de fuentes bibliográficas, entre otros. La presentación oral deberá realizarse en un máximo de 20 minutos. Se evaluarán aspectos como la claridad de la exposición y el adecuado desarrollo del tema. El trabajo escrito y la presentación deberán ser elaboradas en LaTeX.

Todo proyecto deberá ser discutido y aprobado previamente por el profesor. El documento escrito deberá entregarse a más tardar el mismo día que se realice la presentación oral. Asímismo, deberá entregarse una copia del archivo de la presentación vía correo electrónico. Tentativamente, la fecha de las presentaciones orales será el lunes 4 de julio, pero esto será confirmado por el profesor con antelación.

8. Libro de texto y referencias

La principal referencia para el curso será el material expuesto en clase por el profesor. Sin embargo, mucho del material del curso y las listas de ejercicios se basan en el libro de Durret [2] y también en el libro de Resnick [3].

Referencias

[1] D. B. Applebaum, *Lévy Processes and Stochastic Calculus*, Cambridge Studies in Advance Mathematics, Cambridge University Press, second edition (2009).

[2] R. Durret, *Probability. Theory and Examples*, Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, Cambridge University Press, fourth edition (2010).

[3] S. I. Resnick, *A Probability Path*, Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser (2014).

[4] J. S. Rosenthal, *A First Look at Rigorous Probability Theory*, World Scientific Publishing Company, second edition (2006).

[5] H. L. Royden, *Real Analysis*, Macmillan Publishing Company, third edition (1988).

[6] J. M. Steele, *Stochastic Calculus and Financial Applications*, Applications of Mathematics. Stochastic Modelling and Applied Probability 45, Springer-Verlag New York Inc (2001).

[7] D. W. Stroock, *Probability Theory. An Analytic View*, Cambridge, second edition (2011).