UNIVERSIDAD DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
MA 704: TOPOLOGÍA GENERAL

14 de marzo del 2017

Carta al estudiante

I **Descripción del curso:** El principal problema en topología es determinar cuando dos espacios topológicos son homeomorfos, o sea equivalentes en cierto sentido. Una manera de enfrentar este problema es buscar propiedades que caractericen los espacios, de modo que si uno tiene una propiedad y otro no, entonces no serán homeomorfos. En un sentido amplio el estudio de estas propiedades es lo que hoy en día se conoce como *Topología General*. Otra posibilidad para atacar el problema planteado es asignar a espacios topológicos invariantes cuantitativos, o algebraicos. Grosso modo, el estudio de estos invariantes es lo que se conoce como *Topología Algebraica*.

A pesar del nombre oficial del curso y de las múltiples aplicaciones de la Topología General a prácticamente todas las ramas de las matemáticas, en especial a la geometría, al análisis y al álgebra, se podría decir que la topología general pertenece a las matemáticas del siglo pasado. De hecho las primeras ideas se remontan a los trabajos de Riemann, Fréchet, Cantor, etc., en la segunda mitad del siglo XIX. Incluso el concepto de topología fue introducido por Hausdorff hace 100 años, en 1914, aunque la versión que usamos hoy en día, también propuesta por Hausdorff, es una reformulación de 1927. Además, gran parte de la teoría de los espacios topológicos fue desarrollada por Kuratowski, Alexandrov y sus escuelas, respectivamente en Polonia y Rusia, en las primeras décadas del siglo XX. Por esta razón, y tomando en consideración que no contamos con un curso de Topología Algebraica, nos parece inapropiado invertir todo el curso en Topología General, por lo que, además de analizar los conceptos principales de la topología general, sobre todo los más necesarios en geometría diferencial, dado que este curso es un requisito para MA870 *Geometría Diferencial*. En la segunda mitad del curso, haremos una introducción a la Topología Algebraica que, por razones de tiempo, necesariamente no podrá ser muy profunda. Básicamente nos concentraremos en las propiedades más importantes de los grupos de homotopía y homología singular.

Lo anterior no significa que los resultados de la topología general hayan perdido vigencia, o que no sean de interés, sin embargo, al estar la teoría, desde hace bastantes años, bien consolidada existen varios textos, ya clásicos, en donde prácticamente se tiene un compendio de la mayoría de los logros alcanzados. Consideramos, por tanto, que el alumno será capaz de completar el curso con su estudio individual, de acuerdo a su interés particular, una vez que tenga una noción de los problemas tratados, y la manera como suele encararlos la Topología General.

El requisito formal es el curso MA505 *Análisis I*. No obstante, lo que concretamente asumiremos es que el estudiante conoce las nociones básicas de teoría de conjuntos y que ha estudiado espacios métricos y espacios normados. Aunque esto jugará, más que todo, un papel de motivación y no de requisito lógico en el sentido estricto. Por así decirlo, lo que más se necesita es la madurez que el alumno ha alcanzado al haber cumplido con los requisitos mencionados, dado que el presente es un curso de cuarto año de la carrera. En la segunda parte del curso necesitaremos algunas nociones de álgebra que, probablemente, el estudiante obtiene al completar un curso como MA561 *Grupos y anillos*, en todo caso la teoría de grupos libres será expuesta en clase para fijar la notación a usar y repasar las ideas que más directamente necesitaremos.

A pesar de que el lenguaje de categorías y funtores es bastante útil y simplifica algunas técnicas y nociones, no lo utilizaremos para no subir el nivel de abstracción, de por sí un poco alto en la segunda parte del curso.

II Objetivos generales:

a-) Introducir al estudiante en el estudio de la topología general.

b-) Introducir al estudiante en el estudio de la topología algebraica.

c-) Lograr que el estudiante se introduzca en la literatura matemática.

d-) Promover un espíritu crítico en el estudiante mediante la investigación y discusión de los conceptos fundamentales.

III Objetivos específicos:

a-) Familiarizar al estudiante con la noción de espacio topológico.

b-) Analizar los principales axiomas de separación.

c-) Estudiar las propiedades básicas de los espacios topológicos compactos, localmente compactos y paracompactos.

d-) Estudiar las ideas básicas sobre conexidad.

e-) Conocer las propiedades principales del primer grupo de homotopía.

f-) Conocer las ideas básicas sobre homología singular.

IV Contenidos:

a-) Espacios topológicos y funciones continuas.

b-) Axiomas de separabilidad.

c-) Convergencia en espacios topológicos.

d-) Espacios compactos y localmente compactos.

e-) Espacios paracompactos y n-variedades topológicas.

f-) Espacios conexos.

g-) El teorema de Baire.

h-) Homotopías y el grupo fundamental.

i-) El teorema de Seifert–Van Kampen.

j-) Complejos CW.

k-) Grupos de homología y homología de complejos CW.

l-) La sucesión de Mayer–Vietoris.

V **Metodología:** La teoría básica y las ideas principales serán expuestas en clase, más que todo para dirigir el estudio. Sin embargo, las clases deben ser complementadas y contrastadas con el análisis de otros enfoques por medio de la literatura y, sobretodo, con el trabajo continuo y constante tanto de los ejercicios propuestos, como de los que aparezcan en su estudio particular. Estos, en primera instancia, deben analizarse en forma individual, para obtener mayores frutos. ¡Nadie aprende a jugar futbol viendo el mundial por televisión!

VI **Evaluación:** En cuanto a la evaluación sumativa, tendremos un examen parcial y un examen final cuyas fechas se avisarán oportunamente, pero que aproximadamente serán en el medio y al final del curso. La nota final se obtendrá de las siguiente manera:

$$NF = \max\left(\frac{P+F}{2}, .3\,P + .7\,F\right).$$

VII **Bibliografía:**

1-) R. Ayala Gómez, E. Domínguez Murillo y A. Quintero Toscano, *Elementos de la Topología General*, Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington, DE, 1997.

2-) F. Croom, *Basic Concepts of Algebraic Topology*, Springer-Verlag, New York, EEUU, 1978.

3-) T. Dieck, *Algebraic Topology*, European Mathematical Society, Bad Langensalza, Alemania, 2008.

4-) J. Dugundji, *Topology*, Allyn & Bacon, Boston, 1966.

5-) R. Engelking, *General Topology*, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

6-) W. Fulton, *Algebraic Topology: A First Course*, Graduate Texts in Mathematics **153**, Springer, Berlin, 1995.

7-) M. J. Greenberg y J. R. Harper, *Algebraic Topology: A First Course*, The Benjamin Cummings Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1981.

8-) A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

9-) J. L. Kelley, *General Topology*, D. Van Nostrand, Princeton, New Jersey, 1955.

10-) C. Kosniowski, *Topología Algebraica*, Editorial Reverté, S.A., Barcelona, España, 1986.

11-) K. Kuratowski, *Introduction to Set Theory and Topology*, Pergamon Press, New York, 1961.

12-) W. S. Massey, *Algebraic Topology: An Introduction*, Graduate Texts in Mathematics **56**, Springer, New York, 1967.

13-) J. R. Munkres, *Topology*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 2000.

14-) A. R. Shastri, *Basic Algebraic Topology*, CRC Press, Boca Raton, Fl, 2014.

15-) E. H. Spanier, *Algebraic Topology*, Springer, New York, 1966.

16-) I. M.'Singer and J. A. Thorpe, *Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry*, Springer, New York, 1967.

17-) V. A. Vassilev, *Introduction to Topology*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1970.

18-) A. Wilansky, *Topology for Analysis*, Dover Publications Inc., Mineola, New York, 2008. Originalmente publicado por Ginn and Company, Waltham, Massachusetts, 1970.

19-) S. Willard, *General Topology*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1970.

Dr. Héctor Figueroa González
Escuela de Matemáticas
Universidad de Costa Rica
email: hector.figueroa@ucr.ac.cr