Carta al estudiante, MA-0870 Geometría Diferencial
Escuela de Matemática,Universidad de Costa Rica
II semestre 2017

Descripción del curso: (5 créditos)

El presente es un primer curso en geometría diferencial. Como tal, busca introducir al estudiante al campo en cuestión, estudiando los diferentes temas mediante ejercicios de mediana dificultad. Como en cualquier curso de matemáticas, no se puede sobre enfatizar la importancia de resolver todos los ejercicios.

Los requisitos para este curso involucran conceptos básicos de topología, cálculo diferencial en varias variables, ecuaciones diferenciales ordinarias, teoría de conjuntos y álgebra lineal. Todos estos requisitos se revisan brevemente en un anexo al final de las notas.

La cantidad de temas que se pueden tratar en un curso como este son muchos y muy variados. Evidentemente, cada vez que se intenta dar un tal curso, es necesario hacer una selección que sea posible desarrollar en el limitado espacio de tiempo que se dispone. De ninguna manera se pretende hacer pensar que los temas que no se seleccionaron en el presente sean de menor trascendencia. Se desea en este curso dejar abierto el portillo de la posibilidad de explorarlos en versiones futuras. Solo el tiempo dirá cuántos de los temas propuestos se van a cubrir.

Objetivo General: Incursionar en el campo de la geometría diferencial, para iniciar la capacitación del estudiante en la investigación en este campo.

Objetivos Específicos:

(1) Familiarizar al estudiante con las nociones básicas de la geometría diferencial moderna, para que el estudiante pueda por sí mismo explorar la bibliografía existente en esta área.
(2) Capacitar al estudiante en los métodos propios de la geometría diferencial moderna, para que el estudiante comprenda las multiples conexiones que esta área posee con los diferentes campos de las matemáticas.
(3) Concientizar al estudiante sobre la importancia de la investigación en el área de la geometría diferencial.

Evaluación: Tres exámenes parciales con un peso porcentual total del 85%. Las fechas y material a evaluar en los exámenes se anunciarán oportunamente, pero se anticipa que cada exámen evaluará el material de cinco semanas de clase aproximadamente. El restante 15% corresponde a una presentación en clase sobre algún tema relacionado con el curso, la cual deberá acompañarse de un documento escrito. El tema se seleccionar"a de mutuo acuerdo entre el docente y el estudiante.

Metodología: Durante todo el curso se harán básicamente dos tipos de sesiones de trabajo. Sesiones magistrales en las cuales el material teórico será presentado a los estudiantes por parte del profesor. Sesiones de ejercicios en las cuales los estudiantes presentarán sus soluciones a ejercicios asignados. En principio la distribución del uso de estas dos metodologías será tan equilibrada como sea posible, dando tanto tiempo a la clase magistral como a las sesiones de ejercicios.

Contenidos. Para mayor detalle véanse las notas de clase.

(1) Variedades diferenciales: estructuras diferenciales, definiciones y propiedades, transformaciones diferenciables entre variedades, difeomorfismos, subvariedades, inmersiones, sumergimientos, sumersiones, valores regulares, imagen inversa de un valor regular.
(2) Espacios tangentes: vectores tangentes, espacio tangente en un punto, la diferencial, regla de la cadena, imagen inversa de un valor regular.
(3) Fibrados: definición de fibrado, representación en coordenadas, funciones de transición, propiedades, ejemplos, secciones (locales y globales), fibrado trivial, fibrados vectoriales, secciones sobre un fibrado vectorial, el fibrado tangente, campos vectoriales, conmutadores, imagen directa de un camo vectorial (push forward), la derivada.
(4) Formas diferenciales: 1-formas diferecniales, el fibrado cotangente, construcciones algebraicas con fibrados vectoriales, el fibrado dual, el fibrado la suma de Whitney, el fibrado producto tensorial, el fibrado producto simétrico, el fibrado producto antisimétrico, formas diferenciales sobre una variedad, la derivada exterior, imagen inversa de una forma (pull back), propiedades.
(5) Cohomología de De Rham: formas exactas y cerradas, grupos de cohomología y la cohomología de De Rham, lema de Poincaré, la sucesión de Mayer-Vietoris, ejemplos.
(6) Integración de formas differenciales: particiones de la unidad, integración de formas en $\mathbb{R}^n$, orientación, formas de orientación, integración de formas sobre variedades orientadas, el teorema de Stokes para variedades sin frontera.
(7) Variedades diferenciales con frontera: frontera y orientación, el teorema de Stokes para variedades con frontera.
(8) Geometría Riemanniana: métricas Riemannianas, variedades Riemannianas, ejemplos, isometrías, longitud de curvas, distancia Riemanniana, forma de volumen.
(9) Conexiones: conexiones afines, símbolos de Christoffel, derivada covariante, campos vectoriales paralelos, transporte paralelo, conexiones Riemannianas, torsión, conexión de Levi-Civita.
(10) Geodésicas: trayectorias y flujos, campos geodésicos, aceleración cero, homogeneidad de las geodésicas, la aplicación exponencial, sistema coordenado normal, vecindario normal, variedades Riemannianas completas, lema de Gauss, propiedades minimizantes de las geodésicas, vecindarios totalmente geodésicos.

(11) Curvatura: curvatura, variedades planas, curvatura seccional, curvatura de superficies en $\mathbb{R}^3$, segunda forma fundamental, curvatura media, Teorema Egregio de Gauss, curvatura de Ricci y curvatura escalar.
(12) Trabajando con Fibrados: construcciones algebráicas con fibrados vectoriales, morfismos entre fibrados vectoriales, subfibrados, la correspondencia de Serre y Swan.
(13) Grupos de Lie: definiciones, ejemplos y propiedades elementales, el álgebra de Lie, subgrupos de Lie, campos vectoriales invariantes a la izquierda, acciones, orbitas, subgrupos de isotropía, fibrados prinicpales.

Bibliografía recomendada:

El curso se desarrollará siguiendo las notas de clase preparadas por el profesor. Sin embargo, se presenta una ampia lista de libros para consulta.

Como es común en las áreas centrales de las matemáticas, la literatura a nuestra disposición en geometría diferencial es más que abundante. Los siguientes, son solo una muestra de aquellas fuentes que el estudiante puede visitar para ampliar los temas que estudiamos en este curso. Como sugerencia, y para bienestar de su propia formación, se le recomienda a los estudiantes consultar tantas referencias como sea posible.

1. T. Aubin. *A Course in Differential Geometry.* American Mathematical Society, 2001.
2. M. Crampin y F. Pirani. *Applicable Differential Geometry.* Cambridge University Press, 1988.
3. R. W. R. Darling. *Differential Forms and Connections.* Cambridge University Press, 1999.
4. M. P. Do Carmo. *Riemannian Geometry.* Birkähuser, 1992.
5. L. Göttsche, *Course on Differential Geometry.* International Center for Theoretical Physics, 1998.
6. J. M. Lee. *Riemannian Manifolds: an introduction to curvature.* Springer, 1997.
7. J. M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds.* 2nd edition. Springer, 2013.
8. J. M. Lee. *Manifolds and Differential Geometry.* American Mathematical Society, 2009.
9. S. Lovett. *Differential Geometryof Manifolds.* A K Peters Limited, 2010.
10. J. C. Várilly. *MA-705 Análisis III.* UCR, 1993.

Una interesante y clásica introducción a las variedads diferenciales, se encuentra en el libro

11. M. Spivak, *Calculus on Manifolds.* W. A. Benjamin, Inc. 1965.

Este libro marca el punto medio entre un primer curso de análisis y el material a cubrir en este curso.

Otros textos que se pueden consultar para explorar tópicos específicos son:

12. R. L. Bishop y S. I. Goldberg, *Tensor Analysis on Manifolds.* Dover Publications, Inc. 1980.
13. I. Chavel, *Riemannian Geometry: a modern introduction.* Cambridge University Press, 1994.
14. W. M. Boothby. *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry.* Academic Press, 2003.
15. J. Dieudonné. *Treatise on Analysis.* Vol. 3 y 4. Academic Press, 1974.
16. W. Greub, S. Halperin, R. Vanistone. *Connections, Curvature, and Cohomology.* Vol. 1 y 2. Academic Press, 1973.
17. N. J. Hicks. *Notes on Differential Geometry.* D. Van Nostrand Company, Inc., 1965.
18. S. Kobayashi y K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry.* Vol. 1 y 2. Interscience Publishers, 1969.
19. S. Lang. *Fundamentals of Differential Geometry.* Springer, 1999.
20. S. Morita. *Geometry of Differential Forms.* American Mathematical Society, 2001.
21. J. Nestruev. *Smooth Manifolds and Observables.* Springer, 2002.
22. T. Sakai. *Riemannian Geometry.* American Mathematical Society, 1997.
23. R. W. Sharpe. *Differential Geometry.* Springer, 1997.
24. M. Spivak, *Differential Geometry.* Vol. 1 y 2. 3rd edition, Publish or Perish, 2005.
25. J. A. Thorpe. *Elementary Topics in Differential Geometry.* Springer, 1979.
26. F. W. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups.* Springer, 1983.

Una muy buena introducción a la geomería diferencial, orientada a gente de física, se encuentra en el segundo capítulo de

27. S. W. Hawking y G.F.R. Ellis, *Large scale structure of space-time.* Cambridge University Press, 1973.

En principio escrito para la gente de ingeniería y física, el siguiente libro es una excelente fuente para algunos de los tópicos de este curso.

28. H. Flanders. *Differential Forms with Applications to the Physical Sciences.* Accademic Press, 1963.

Una prima hermana de la geometría diferencial es la topología diferencial, la cual, con más referencias a la topología nos ayuda a desarrollar nuestra intuición. El primero de los siguiente libros está más cerca de la geometría diferencial que de la topológica, y así representa una interesante introducción a nuestro campo. La segunda de las siguientes referencias cubre un gran variedad de tópicos, tanto de geometría como de topología diferencial.

29. D. Barden y C. Thomas. *An Introduction to Differentiable Manifolds.* Imperial College Press, 2003.
30. G. E. Bredon, *Topoogy and Geometry.* Springer, 2000.

31. V. L. Guillemin y A. Pollack. *Differential Topology.* Prentice Hall, 1974.

Por último, una referencia que se usó en el texto a la topología algebraica es

32. C. Kosniowski. *An Introduction to algebraic topology.* Cambridge University Press, 1980.

Prof. William J. Ugalde

william.ugalde@ucr.ac.cr

Consulta: L 9:00 - 11:00 y J L 10:00 - 11:00

Oficina: 206 FM

Teléfonos: 2511-6555, 6556