

Universidad de Costa Rica  
Escuela de Matemática  
Departamento de Matemática Pura

**Carta al Estudiante**  
**MA-0720 Probabilidades I**  
**I Ciclo 2018**

## 1. Información General

### Datos del curso

Nivel: IV Año.  
Horario de clases: L 13:00-15:50 (Aula 402 FM), J 13:00-14:50 (Aula 142 CE).  
Horario de consulta: M 9:00-11:50.  
Créditos: 5.  
Requisito: MA-0450, MA-0460.

### Datos del profesor

Profesor: Christian Fonseca Mora.  
Correo electrónico: christianandres.fonseca@ucr.ac.cr.  
Oficina: 323 Edificio Anexo de la Escuela de Matemática, Ciudad de la Investigación.  
Casillero: #36 Segundo Piso FM.

## 2. Descripción

Este es un primer curso sobre teoría de la probabilidad y sus aplicaciones. El curso está dirigido principalmente a estudiantes de la carrera de Bachillerato en Ciencias Actuariales, sin embargo, el curso es también recomendado para estudiantes de la carrera de Bachillerato en Matemáticas y estudiantes del Posgrado en Matemática Aplicada.

En términos generales se puede decir que la probabilidad es una medición numérica sobre la incertidumbre en la ocurrencia de una acción o un experimento. El enfoque moderno de la teoría de la probabilidad, iniciado en 1933 por Andrei Kolmogorov, se basa en los desarrollos de la teoría de la medida entre finales del siglo XIX y principios del siglo XX, obtenidos por varios autores entre los que destacan Émile Borel, Henry Lebesgue, Johann Radon, entre otros. Desde entonces la teoría de la probabilidad ha avanzado a un ritmo acelerado, y se encuentra actualmente en un estado de gran actividad, especialmente por el gran número de aplicaciones a otras ramas de las ciencias como la física, la biología, la economía, las finanzas, entre otras.

No obstante, como este es un curso introductorio, no asumiremos que el estudiante se encuentra familiarizado con la teoría de la medida ni pretenderemos abarcarla en este curso. Más bien, nuestro objetivo será el introducir los conceptos centrales de la probabilidad de modo que el estudiante con buenas bases en el cálculo en varias variables y álgebra lineal pueda apropiarse de estos conceptos y los aplique a problemas teóricos simples y a aplicaciones. En particular daremos en lo posible énfasis a aplicaciones en el campo de las finanzas y los seguros, que son temas centrales en el estudio de las ciencias actuariales.

Como se pretende que este curso sirva de base para otros cursos de probabilidad más avanzada y cursos de estadística, trataremos en todo momento de mantener el rigor matemático hasta donde nuestras herramientas disponibles nos lo permitan y en ocasiones nos referiremos sin demostración a resultados más avanzados. La idea

es aprovechar lo más posible la madurez matemática que el estudiante se supone ha alcanzado para este momento de sus estudios.

Algunos temas centrales que estudiaremos son los espacios de probabilidad, variables aleatorias, funciones de distribución, esperanza y varianza, independencia, esperanza condicional, funciones generadoras de momentos y características, modos de convergencia, leyes de grandes números, teoremas del límite central, entre otros. El estudiante puede encontrar más detalles en la sección de contenidos.

### 3. Objetivos

#### 3.1. Objetivos Generales

1. Desarrollar la capacidad del estudiante para comprender los conceptos y resultados básicos de la teoría moderna de la probabilidad para que pueda aplicarlos al estudio de problemas elementales tanto de naturaleza teórica como práctica relacionados a esta disciplina.
2. Fomentar en el estudiante el uso de la literatura matemática para poder introducirse en la investigación en temas de su interés.
3. Desarrollar el buen uso del lenguaje lógico matemático, mediante el abordaje riguroso de los temas a estudiar.

#### 3.2. Objetivos Específicos

1. Comprender los conceptos de espacios de probabilidad y el cálculo de probabilidades.
2. Ser capaz de modelar fenómenos aleatorios simples mediante el uso del análisis combinatorio básico.
3. Interpretar conceptos tales como la probabilidad condicional, esperanza condicional e independencia.
4. Comprender el concepto de variable aleatoria y su función de distribución.
5. Ser capaz de calcular la esperanza, varianza, función generadora de probabilidades y de momentos, y la función característica de algunas variables aleatorias discretas y absolutamente continuas.
6. Estudiar propiedades básicas de los vectores aleatorios y de las distribuciones normal multivariadas.
7. Entender los modos de convergencia básicos de variables aleatorias y utilizarlos para establecer las leyes de grandes números y el teorema del límite central.

### 4. Contenidos y Estructura del Curso

En la siguiente lista de contenidos se puede apreciar en detalle los tópicos a cubrir en el curso.

**Capítulo 1. Espacios de probabilidad:** experimentos aleatorios, espacio muestral,  $\sigma$ -álgebras de eventos, medidas de probabilidad, cálculo de probabilidades, probabilidad geométrica, modelo de probabilidad de Laplace, probabilidad condicional, independencia de eventos.

**Capítulo 2. Variables aleatorias y funciones de distribución:** variables aleatorias y operaciones sobre ellas, función de distribución, variables aleatorias discretas y absolutamente continuas, función de masa y de densidad, esperanza, fórmula del cambio de variable para la esperanza, media, varianza y momentos, función generadora de momentos, función característica.

**Capítulo 3. Algunas familias de distribuciones y sus propiedades:** distribuciones discretas: uniforme, binomial, Bernoulli, Poisson, otras; distribuciones absolutamente continuas: uniforme, normal, Gamma, Beta, Cauchy, otras.

**Capítulo 4. Vectores Aleatorios:** función de distribución conjunta, función de masa y de densidad conjunta, independencia, distribución de función de un vector aleatorio, valor esperado y matriz de covarianza, fórmula del cambio de variable para la esperanza, función generadora de momentos, función característica, distribución normal multivariada.

**Capítulo 5. Esperanza condicional:** distribución condicional, función de masa y densidad condicional, esperanza condicional elemental, esperanza condicional respecto a una  $\sigma$ -álgebra.

**Capítulo 6. Teoremas de límites:** Modos de convergencia de variables aleatorias: casi seguramente, en probabilidad, en  $L^p$ , en probabilidad y en distribución; leyes débil y fuerte de los grandes números, teorema del límite central.

El orden de los temas puede variar un poco conforme se desarrolle el semestre. Además, la lista anterior no es exhaustiva y si el tiempo lo permite es posible que estudiemos otros temas que sean de interés para los estudiantes.

## 5. Metodología

La exposición de los temas se realizará principalmente mediante clases magistrales en las cuales el profesor desarrollará los contenidos del curso. Se espera la participación activa del estudiante tanto en las lecciones como en la resolución de los ejercicios propuestos. Se recomienda que el estudiante complemente lo visto en clase con la bibliografía a disposición.

## 6. Pautas de Evaluación

Se realizarán tres exámenes parciales cuyo valor acumulado equivale al 100 % de la nota de aprovechamiento. La distribución del peso de los parciales en la nota será el siguiente: 40 % el parcial con la nota más alta y 30 % cada uno de los dos parciales restantes. Se espera que el primer parcial se evalúen los capítulos 1, 2, en el segundo los capítulos 3 y 4, y en el tercero los capítulos 5 y 6. En todo caso, es importante recordarle al estudiante que la materia es acumulativa. Las fechas de los parciales y las evaluaciones cortas se darán a conocer con la debida anticipación. Se recomienda que el o la estudiante consulte el Reglamento de Régimen Académico Estudiantil, en especial los artículos 18, 19 y 20 que se refieren a evaluaciones y reclamos.

## 7. Libro de texto y referencias

La principal referencia para el curso será el material expuesto en clase por el profesor. Sin embargo, mucho del material del curso y las listas de ejercicios se basan en la referencia [1].

Las referencias [1, 3, 4, 6, 8] se ajustan en mayor o menor grado al nivel del curso por lo que se recomiendan como libros para estudio. Por otro lado, las referencias [2, 5, 7] son libros más avanzados y que se basan en la teoría de la medida. Se recomiendan principalmente si el estudiante tiene interés en profundizar en algunos de los temas vistos en el curso.

## Referencias

- [1] L. Blanco-Castañeda, V. Arunachalam, and S. Dharmaraja, *Introduction to Probability and Stochastic Processes with Applications*, John Wiley & Sons Inc. (2012).
- [2] R. Durrett, *Probability. Theory and Examples*, Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, Cambridge University Press, fourth edition (2010).
- [3] G. Grimmett and D. Stirzaker, *Probability and random process*, Oxford University Press, third edition (2001).
- [4] P. Hoel, S. Port and C. Stone, *Introduction to probability theory*, Cengage Learning, first edition (1972).
- [5] S. I. Resnick, *A Probability Path*, Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser (2014).
- [6] S. M. Ross, *A first course in probability*, Prentice Hall, eighth edition (2010).
- [7] S.M. Ross and E. A. Peköz, *A second course in probability*, [www.ProbabilityBookstore.com](http://www.ProbabilityBookstore.com), (2007).
- [8] H. G. Tucker, *An introduction to probability and mathematical statistics*, Academic Press (1962).