



Carta al estudiante

1 Información General

Sigla y nombre del curso: MA-0704 Topología **Modalidad:** Semestral
Naturaleza del curso: Teórico **Carga académica:** 5 créditos
Horas presenciales: 5 horas **Requisito:** MA-0505 Análisis I

Estimado(a) estudiante:

Reciba una cordial bienvenida. Espero que este curso contribuya significativamente a su formación. En este documento encontrará la información referente a la descripción, objetivos, contenidos, evaluación, cronograma y bibliografía del curso. Para el mejor aprovechamiento de este curso, el estudiante debe contar con un manejo exhaustivo de los temas y contenidos de teoría de conjuntos.

La topología puede ser descrita como el estudio matemático de las propiedades preservadas a través de deformaciones, retorcimientos, y estiramientos de ciertos objetos. No se vale, sin embargo, rasgar o desgarrar los objetos. Siendo así, un círculo es topológicamente equivalente a una elipse, y una esfera es topológicamente equivalente a un elipsoide.

La matemática moderna distingue “*Topología General*”, que aborda propiedades básicas de los objetos ligadas al concepto de continuidad, de “*Topología Algebraica*”, que se encarga de clasificar objetos mediante el cálculo de ciertos invariantes. El curso aborda ambas corrientes introduciendo los conceptos de *espacio topológico*, *conexidad*, *compacidad*, *arco-conexidad*, y cubriendo el apartado de los *axiomas de separación* para lo que respecta a la primera parte de Topología General, pasando luego a *Homotopía y Homología* en lo referente a Topología Algebraica.

Este documento le brinda información general sobre los principales aspectos del curso que usted necesita para un desempeño adecuado en él. Es su responsabilidad leer y estar al tanto de toda la información que aquí se le suministra, así como estar al día con la materia y listas de ejercicios. De igual forma, algunos temas o apartados pueden ser asignados para estudio independiente.

2 Objetivo general

Presentar los teoremas y resultados principales de Topología General, Homotopía, y Homología Singular.

3 Objetivos específicos

1. Exponer la Topología en el contexto de las demás ramas de la matemática.
2. Familiarizar al estudiante con los resultados más relevantes de Topología General.
3. Abordar Topología Algebraica a través de las nociones básicas de homotopía y homología.
4. Orientar al estudiante hacia la investigación mediante la exploración de ciertos temas relacionados con la dinámica principal del curso.

4 Programa del curso

4.1 Espacios topológicos y sus propiedades (de 5 a 6 semanas)

1. Concepto de topología. Espacios topológicos y bases para una topología.
2. Funciones continuas.
3. Topología inducida. Topología producto. Topología cociente.
4. Acción de grupos sobre espacios topológicos.
5. Compacidad. Conexidad y arco-conexidad.
6. Axiomas de separación.
7. Lema de Urysohn. ♣
8. Teorema de Tychonoff. ♣
9. Compactificación de Stone-Čech. ♣

4.2 Homotopía (de 5 a 6 semanas)

1. Homotopía de funciones continuas. Homotopía de trayectorias. Producto de trayectorias.
2. Grupo Fundamental.
3. Espacios de cubrimiento. Espacios de órbitas.
4. Teorema de Seifert-vanKampen.
5. Grupos de homotopía. ♣

4.3 Homología Cúbica (de 4 a 5 semanas)

1. n -Cubos, n -Bordes (Operadores de Bordes). Grupos de Homología Cúbica.
2. Homomorfismo inducido por una función continua, y sus propiedades.
3. Sucesión de Homología de un par (X, A) . Grupos de Homología relativa.
4. Grupos de Homología de ciertos espacios. ♣
5. Teorema de invariancia homotópica.
6. Relación entre el grupo fundamental $\pi_1(X)$ y el primer grupo de homología $H_1(X)$.
7. Sucesión Mayer-Vietoris.
8. Complejos CW . ♣

5 Evaluación

5.1 Pruebas parciales, tareas y proyecto

Se realizarán tres pruebas parciales de 180 minutos, donde cada prueba representa 25% de la nota de aprovechamiento (NA).

Se realizarán tareas semanalmente, para entregar con hora límite la 1:00 pm los jueves después de clase. Cabe destacar que las listas de ejercicios son extensas y con un nivel de dificultad alto. Usualmente, los ejercicios sencillos aparecen al principio de la lista, y luego el nivel aumenta notablemente, desde ejercicios que representan una sencilla verificación de rutina, hasta generalizaciones de teoremas y resultados

importantes que inducen al estudiante a razonar e investigar. El estudiante elige cinco ejercicios de cada lista para entregar al profesor. Está de más mencionar el hecho de que, ante la presentación de tareas similares, se evaluará sólo una, y se dividirá el puntaje entre las personas involucradas. En total serán dieciséis tareas, de las cuales se descarta la tarea de menor puntaje obtenido, por lo que el rubro de tareas representa 15% de la nota de aprovechamiento (NA).

Además, se realizará un proyecto de investigación básica que consta de una parte escrita que representa 5% para el cual se le brindará una plantilla L^AT_EX, y una exposición oral no mayor a treinta minutos que representa también 5%, para un total de 10% de la nota de aprovechamiento (NA).

Así, los estudiantes serán evaluados sumativamente a partir de su desempeño en:

Rubro	%
I Parcial	25
II Parcial	25
III Parcial	25
Tareas	15
Proyecto	10
NA	100

5.2 Calendario de exámenes

El siguiente calendario está sujeto a modificaciones de parte de ORI:

Prueba	Fecha	Hora	Contenidos
I Parcial	Miércoles 25 de Abril	9:00 am	Tema 4.1
II Parcial	Miércoles 06 de Junio	9:00 am	Tema 4.2
III Parcial	Lunes 09 de Julio	9:00 am	Tema 4.3
Ampliación y Suficiencia	Lunes 16 de Julio	9:00 am	Todos

5.3 Temas sugeridos para proyecto:

1. Filtros y redes.
2. Lema de Urysohn.
3. Teorema de Tychonoff.
4. Compactificación de Stone-Čech.
5. Clasificación de superficies compactas.
6. Teorema de Borsuk-Ulam.
7. Teorema de Separación de Jordan-Brouwer.
8. Teorema de la Curva de Jordan.
9. Grafos y su homotopía.
10. Índice de una curva (winding number).
11. Variedades.
12. Nudos.
13. Teorema del Emparedado de Jamón.
14. Problema de la Arepa (Pancake Problem).
15. Grupos de homotopía.
16. Complejos CW.
17. * Teorema de Hurewicz.
18. ** Cohomología de fibrados e Isomorfismo de Thom.
19. Característica de Euler y Números de Betti.
20. ** Productos simétricos de una curva algebraica.
21. Topología Diferencial.
22. ** Σ_g Superficies de Riemann compactas de género g , $L \rightarrow \Sigma_g$ fibrados de línea, y el Teorema Riemann-Roch.

5.4 Reporte de la nota final

Para efectos de promoción rigen los siguientes criterios, los cuales se refieren a la nota de aprovechamiento NA indicada arriba, expresada en una escala de 0 a 10, redondeada, en enteros y fracciones de media unidad, según el reglamento vigente:

- Si $NA \geq 6.75$ el estudiante gana el curso con calificación NA redondeada a la media más próxima, los casos intermedios como 7.25 se redondean hacia arriba, es decir, 7.5
- Si $5.75 \leq NA < 6.75$, el estudiante tiene derecho a realizar el examen de ampliación, en el cual se debe obtener una nota superior o igual a 7 para aprobar el curso con nota 7, en caso contrario su nota será 6.0 o 6.5, la más cercana a NA.
- Si $NA < 5.75$ pierde el curso.
- La calificación final del curso se notifica a la Oficina de Registro e Información, en la escala de cero a diez, en enteros y fracciones de media unidad.

6 Horas de consulta

El profesor encargado del curso MA-0704 Topología es Ronald A. Zúñiga-Rojas:

Confirmar horario y aula:

Grupo	Horario	Aula	Oficina	Correo-e
001	L: 9:00 -10:50	400FM	329	ronald.zunigarojas@ucr.ac.cr
	J: 10:00 -12:50	400FM	Edif. Anexo Finca 2	ronalbzur@gmail.com

El profesor atenderá horas de consulta los miércoles de 9:00-12:00, con la posibilidad de negociar otros días que resulten favorables al profesor y al estudiantado.

7 Avisos y contacto

El profesor utilizará la plataforma [MOODLE](#) que la Escuela de Matemática pone a disposición de profesores y estudiantes, para crear la página del curso [MA-0704](#) y así establecer un importante canal de comunicación entre profesor y estudiantado. En dicha página, aparecerá copia de este documento, el enunciado de las tareas periódicamente, y las aulas de los exámenes. El profesor también mantendrá comunicación efectiva con los estudiantes a través de su correo institucional:

ronald.zunigarojas@ucr.ac.cr

Además, el profesor valorará con los estudiantes la posibilidad de mantener un canal de comunicación a través de redes sociales, donde se pueda discutir dudas, comentarios y resolución de ejercicios, dejando claro que dicho espacio sería **exclusivo** para discutir contenidos relacionados con el curso.

Referencias

La primera parte del curso, correspondiente a Topología General, se basará en los textos de Kosniowski [12] y Munkres [20]. En lo concerniente a Topología Algebraica, el curso se basará en los textos de Massey [15] y tom Dieck [23].

- [1] Barr, S.: *Experiments in Topology*, Dover, N.Y., 1989.
- [2] Bott, R. and Tu, L.W.: *Differential Forms in Algebraic Topology* Springer, N.Y., 1982.
- [3] Conover, R.A.: *A First Course in Topology*, Dover, N.Y., 2015
- [4] Croom, F.H.: *Basic Concepts of Algebraic Topology*, Springer, 1978.
- [5] Dugundji, J.: *Topology*, Allyn & Bacon, Boston, 1978.
- [6] Fernandes, T.M.: *Topologia Algébrica e Teoria Elementar dos Feixes*, Universidade de Lisboa, Textos de Matemática, Vol. 11, 1997.
- [7] Fulton, W.: *Algebraic Topology*, Springer N.Y., 1995.
- [8] Gamelin, T.W. and Greene, R.E.: *Introduction to Topology*, Dover, 2nd. edition, N.Y., 1999.
- [9] Hatcher, A.: *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, UK, 2002.
- [10] Iribarren, I.L.: *Topología de Espacios Métricos*, Limusa, México, 1984.
- [11] James, I.M. (editor): *Handbook of Algebraic Topology*, North-Holland, 1995.
- [12] Kosniowski, C.: *A first course in algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [13] Lee, J.M.: *Introduction to Topological Manifolds*, Springer, N.Y., 2000.
- [14] Machado, A.: *Tópicos de Análise e Topologia em Variedades*, Universidade de Lisboa, Textos de Matemática, Vol. 8, 1997.
- [15] Massey, W.S.: *A Basic Course in Algebraic Topology*, Springer, N.Y., 1991.
- [16] Massey, W.S.: *Algebraic Topology: An Introduction*, Springer, N.Y., 1977.
- [17] Massey, W.S.: *Singular Homology Theory*, Springer, N.Y., 1980.
- [18] Maunder, C.R.F.: *Algebraic Topology*, Dover, N.Y., 1996.
- [19] Mendelson, B.: *Introduction to Topology*, Dover, 3rd. edition, N.Y., 1990.
- [20] Munkres, J.R.: *Topology*, Prentice-Hall, 2nd. edition, N.J., 2000.
- [21] Naber, G.L.: *Topology, Geometry and Gauge Fields: Foundations*, Springer, N.Y., 2011.
- [22] Singer, I.M. and Thorpe, J.A.: *Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry*, Springer, N.Y., 1976.
- [23] tom Dieck, T.: *Algebraic Topology*, EMS, 2008.
- [24] Várilly, J.C.: *Notas para el curso MA-0704: Topología*, I-Ciclo 2011, Universidad de Costa Rica.

— Ronald A. Zúñiga-Rojas —
ronald.zunigarojas@ucr.ac.cr
ronalbzur@gmail.com
Oficina 329, Edificio Anexo
(+506) 2511-3450