



**Universidad de Costa Rica**  
**Facultad de Ciencias**  
**Escuela de Matemática**

**EMat** Escuela de  
Matemática

Curso: *MA-0009 Números Reales*

**Nivel:** III Ciclo    **Requisitos:** MA-0005, MA-0006.  
**Tipo de Curso:** Teórico    **Co-requisitos:** No tiene  
**Créditos:** 4    **Horas presenciales:** 5

**No. horas estudio independiente:** 7

**Carrera:** Educación Matemática

**CARTA AL ESTUDIANTE ♦ II-2018**

**Profesora:** Lourdes Hernández Rodríguez

[lourdes.hernandezr@gmail.com](mailto:lourdes.hernandezr@gmail.com)

**Horas de consulta L: 16:00-18:00, J: 15:00-16:00 Oficina 310**

**Estimado(a) estudiante:**

Reciba una cordial bienvenida y esperamos que este curso contribuya significativamente en su formación profesional. En este documento encontrará la información referente a la descripción, objetivos, contenido, evaluación, cronograma y bibliografía de este.

**ASPECTOS GENERALES DEL CURSO:**

**I. DESCRIPCIÓN**

Este curso tiene como propósito estudiar los números reales con sus propiedades algebraicas y analíticas.

La comprensión de la naturaleza de los números reales requiere del dominio del concepto de convergencia de sucesiones numéricas, por lo que este tema constituye parte fundamental del curso.

Las series geométricas se estudian para formalizar las expansiones de números reales en diferentes bases.

Se procura continuar con el trabajo de los cursos anteriores en relación con el desarrollo de la comprensión de la matemática formal y de la habilidad de argumentar matemáticamente de manera apropiada, así como con el abordaje de los conceptos desde la dimensión procedimental (técnicas matemáticas para resolver tareas típicas o estandarizadas) considerando éstos, pilares que apoyan la toma de decisiones didáctico-matemáticas, que es la tarea central del educador matemático.

Este curso constituye un enlace importante con los cursos MA-0005 Introducción a las funciones y MA- 0006 Conjuntos numéricos, por lo que se retomarán las habilidades matemáticas ya trabajadas y se generalizarán resultados estudiados.

## II. OBJETIVOS

Durante este curso, se espera que el estudiante sea capaz de:

- 1) Resolver ecuaciones e inecuaciones con expresiones que contienen valor absoluto y usar diversas representaciones de las soluciones.
- 2) Determinar el extremo superior e inferior, el máximo y el mínimo de un conjunto acotado.
- 3) Usar la caracterización del supremo y del ínfimo para demostrar si un número es o no un extremo.
- 4) Calcular límites de sucesiones justificando el procedimiento.
- 5) Demostrar la convergencia o divergencia de una sucesión.
- 6) Identificar diversos números reales según su expansión decimal.
- 7) Demostrar que una expansión decimal periódica corresponde a un número racional.
- 8) Construir funciones biyectivas entre conjuntos equipotentes.
- 9) Demostrar la numerabilidad de los racionales y la no numerabilidad de  $\mathbb{R}$ .
- 10) Demostrar las propiedades de la función exponencial y logarítmica en  $\mathbb{R}$  a partir de las propiedades en  $\mathbb{Q}$  usando las expansiones decimales.
- 11) Exponer un concepto estudiado formalmente en el curso proponiendo actividades o material para la presentación de este en secundaria.
- 12) Elaborar una memoria con base en los apuntes de las discusiones realizadas en clase sobre historia.

## III. CONTENIDOS

### TEMA 1: Los números reales

Presentación axiomática de  $\mathbb{R}$ . Propiedades algebraicas y de orden de  $\mathbb{R}$ . Valor absoluto, parte entera. El axioma del Extremo Superior. Caracterización del supremo y del ínfimo. Principio de Arquímedes. Existencia de raíces. Intervalos y decimales.

### TEMA 2: Sucesiones

Concepto de sucesión, convergencia. Teoremas de límites. Cálculo de límites de sucesiones. Sucesiones monótonas. Subsucesiones y el teorema de Bolzano Weierstrass. Existencia de raíces vía sucesiones. Criterio de Cauchy. Sucesiones divergentes.

### TEMA 3: Expansiones

Expansiones decimales. Números con expansión finita. Aritmética con expansiones decimales. Expansiones de números reales en base arbitraria. Expansiones de números irracionales.

### TEMA 4: Equipotencia

La relación de equipotencia de conjuntos. Conjuntos finitos e infinitos. Conjuntos numerables y no numerables. Numerabilidad de  $\mathbb{Q}$ . Innumerabilidad de  $\mathbb{R}$ . Teorema Shauder- Bernstein.

### TEMA 5: Funciones Exponencial y Logarítmica

Construcción de la función exponencial vía sucesiones. El logaritmo, el número  $e$ , logaritmo natural. Propiedades. El número  $e$  como suma infinita. Irracionalidad del número  $e$ .

#### IV. METODOLOGÍA

Las clases presenciales se complementan con el trabajo de los estudiantes en grupos para resolver ejercicios, con sesiones de discusión sobre artículos de historia y exposiciones por parte de cada estudiante.

Compartiremos estrategias metodológicas de los cursos MA 0005 y MA 0006, por lo que en las sesiones de clase se dispondrá de espacios de desarrollo de la teoría y de aplicación de los conceptos en el planteamiento de demostraciones.

En los espacios de aplicación de la teoría los estudiantes trabajan en forma individual o en equipo y luego se discute en plenaria el trabajo, destacando ideas o conceptos centrales, así como validez o pertinencia de las estrategias. Durante los espacios de clase de trabajo en equipo, se insiste en la correcta comunicación matemática, organizar las ideas matemáticas para comunicarlas al compañero, así como escuchar y valorar las explicaciones matemáticas de los demás.

Durante el curso se estarán abordando los ejes de formación de la siguiente manera:

• **Eje de Historia y epistemología de la matemática:**

En relación con la comprensión de la contribución de la historia de la matemática en la toma de decisiones didácticas, el estudiante deberá leer y entregar un reporte de las siguientes lecturas:

- ✓ *El número  $\pi$  Siete mil años de misterio.*
- ✓ Obstáculos, dificultades y errores en el aprendizaje de los números irracionales. Artículo del Capítulo 1 del texto *Análisis del discurso escolar de la profesora venezolana Mariela Lilibeth Herrera Ruiz.*
- ✓ Continuidad y números irracionales de Richard Dedekin 1887.

Además, los estudiantes en parejas elaboran dos reportes relacionados con la evolución de los conceptos número real y sucesión numérica

- Reporte1: Evolución del concepto de número real.
- Reporte2: Evolución del concepto sucesión numérica.

Incluir:

- Sucesiones por recurrencia y aplicación a la aproximación de  $\sqrt{a}$  para diferentes valores del subradical.
- Análisis de la convergencia de la sucesión  $A_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  y aproximación del número e.
- Sucesión de Fibonacci y el número áureo.
- Fórmula recursiva para aproximar el punto fijo de una función y aplicaciones.

Para cada reporte se entrega una guía de trabajo.

Los reportes pueden contener resúmenes, esquemas, cuadros, presentaciones, etc. y se entregan previo a la sesión de discusión en clase, como se indica en el cronograma. Todo reporte debe contener al menos: personajes ubicados en tiempo y lugar, problemáticas principales que dieron origen al conocimiento matemático en estudio, imágenes que ilustran los principales eventos o momentos y personajes, glosario de palabras o conceptos clave, aplicaciones en diferentes áreas bien detalladas y bibliografía.

• **Ejes de Desempeño profesional y Didáctico Matemático.**

Con el fin de no promover el aprendizaje de conceptos independientes o aislados, sino de insistir en la conexión y sentido entre ellos, se promoverá un trabajo intenso en resolución de problemas. Durante los espacios de discusión de la solución de los problemas se insistirá en hacer explícito los conceptos y procedimientos empleados, además del trabajo heurístico que se realizó previo a la solución.

Como parte del desarrollo de la comprensión de la transformación de la matemática formal hacia la matemática escolar se realizan dos tipos de actividades: \* En algunas sesiones de clase, la profesora promueve la reflexión, mediante comparaciones y ejemplos, sobre la forma como suele aprenderse algunos de los temas del curso en la educación primaria o secundaria. \* Los estudiantes, en pareja, elaboran dos reportes en digital sobre las áreas temática “Números” y “Relaciones y Álgebra” del Programa de Matemática del MEP, con base en una guía de trabajo que se entregará con anticipación. Algunos de estos trabajos se presentan y comentan en clase.

Cada grupo deberá rendir un reporte y presentarlo a sus compañeros, sobre los objetos matemáticos escolares propios del tema en estudio y los conocimientos previos con los cuales se relacionan.

• **Eje de las TIC:**

Las actividades docentes que no corresponden a las pruebas escritas requieren el uso de herramientas de TIC, como son las presentaciones en power point, uso de software de línea del tiempo, uso de la herramienta Kahoot para evaluar la parte de historia. Todas estas serán reforzadas en el curso.

**V. EVALUACIÓN**

Como parte de la evaluación formativa los estudiantes dispondrán de espacios de trabajo en clase que procuran reforzar y orientar su desempeño matemático en la realización de los ejercicios propuestos.

Las ponderaciones de los productos descritos anteriormente para calcular la nota de aprovechamiento (N.A.) se detallan a continuación:

#	RUBRO	PORCENTAJE	DETALLE DEL %
1	Tres pruebas parciales	60%	20% cada una
2	Tres Exámenes Cortos	15%	5% cada uno
3	Tres reportes escritos de las lecturas de Historia	9%	3% cada uno
4	Dos Reportes de Historia (en parejas)	6%	2% Reporte 1 4% Reporte 2
5	Dos Reportes sobre Programa del MEP	10%	5% cada uno

La nota de aprovechamiento final ( $n$ ), será la suma de los porcentajes obtenidos en los rubros mencionados. Esta se expresa en una escala de 0 a 10 y se reportará de la siguiente manera:

- ❖ Si su nota  $n$  es igual o superior a 6.75, el estudiante aprueba el curso con la nota  $n$  redondeada al valor más cercano entre: 7.0, 7.5, 8.0, 8.5, 9.0, 9.5 ó 10.0. Los casos intermedios como 7.25 ó 7.75 se redondean hacia arriba.
- ❖ Si  $5.75 \leq n < 6.75$ , el estudiante tiene derecho a aplicar un examen de ampliación en el cual debe obtener una nota superior o igual a 6.75 para aprobar el curso con 7.0. En caso contrario, su nota será 6.0 ó 6.5 la más cercana a su nota  $n$ .
- ❖ Si  $n$  es inferior a 5.75 pierde el curso y su nota final es la nota  $n$  redondeada a la unidad o media unidad más cercana: 0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 4.5, 5.0 ó 5.5.

**EXÁMENES DE REPOSICIÓN:** Para realizar examen de reposición el estudiante debe entregar a la profesora la solicitud por escrito acompañada con el documento oficial que justifique debidamente la razón de su ausencia al examen respectivo, según las causas y periodos que el Reglamento de Régimen Académico Estudiantil considera como válidas. Si la reposición es aprobada, la docente le indicará al estudiante la fecha y el lugar de la reposición.

#### VI. Cronograma:

La programación de las temáticas se especifica en la siguiente tabla; sin embargo, las disposiciones que aquí se detallan podrían variar según el avance del grupo

SEMANA	TEMAS	SEMANA	TEMAS
13 agosto 16 agosto	T1: N Reales. T1: N Reales. <b>Lectura 1 de Historia, orientación.</b>	8 octubre 11 octubre	T2: Sucesiones T2: Sucesiones.
20 agosto 23 agosto	T1: N Reales. T1: N Reales.	15 octubre 18 octubre	T2: Feriado T3: Expansiones. <b>Lectura 3 de Historia. Reporte.</b> Examen Corto II
27 agosto 30 agosto	T1: N Reales <b>Lectura 1 de Historia, Reporte.</b> T1: N Reales. <b>Lectura 2, orientación.</b>	22 octubre 25 octubre	T3: Expansiones. T3: Expansiones
3 setiembre 6 setiembre	T1: N Reales T1: N Reales. <b>Reporte Historia 1</b>	29 octubre 1 noviembre	T4: Equipotencia. <b>Reporte Historia 2 Práctica.</b>
10 setiembre 13 setiembre	T2: Sucesiones. <b>Examen Corto 1</b> T2: Sucesiones. <b>Lectura 2. Reporte</b>	5 noviembre 8 noviembre	II Parcial T4: Equipotencia.
17 setiembre 20 setiembre	T2: Sucesiones. T2: Sucesiones.	12 noviembre 15 noviembre	T4: Equipotencia T5: Funciones Exponencial y Logarítmica. <b>Reporte 2 Programa MEP</b>
24 setiembre 27 setiembre	T2: I Parcial T2: Sucesiones	19 noviembre 22 noviembre	T5: Funciones Exponencial y Logarítmica. Examen Corto III T5: Función logarítmica. El número e.
1 octubre 4 octubre	T2: Sucesiones. <b>Reporte 1 Programa MEP</b> T2: Sucesiones. <b>Lectura 3 de Historia, orientación.</b>	26 noviembre 29 noviembre	T5: Funciones Exponencial y Logarítmica. Temas 4 y 5: Práctica

Examen Parcial III	Lunes 3 de diciembre 1:00pm
Ampliación	jueves 13 de dic 8:00am

## VII. BIBLIOGRAFÍA

- ❖ Alexandrov, A.D. Kolmogororov, A.N.y otros. (1974) La matemática: su contenido métodos y significado. España: Alianza editorial.
- ❖ Bartle. R, Sherbert. D. (2010). Introducción al Análisis Matemático de una variable. México: Editorial Limusa S.A Grupo Noriega editores.
- ❖ Barahona, M (1990). El número siete mil años de misterio. Costa Rica: Imprenta y Litografía Mundo Gráfico S.A.
- ❖ Cambroneroy, S y Duarte, A. (s.f 2007). Notas sobre números reales. Costa Rica.
- ❖ Hofmann, J (2002). Historia de la matemática. Editorial Limusa, S.A.
- ❖ Ugalde, W. (2017). Fundamentos de Análisis Real. Editorial Universidad Estatal a distancia. Costa Rica.
- ❖ Piza,E. (2006). Introducción al análisis real en una variable. Editorial Universidad de Costa Rica.