



Departamento de Enseñanza de la Matemática

Carrera EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Curso: MA-0006 CONJUNTOS NUMERICOS

Nivel: II Ciclo Requisitos: MA-0002 y MA-0003

Tipo de Curso: Teórico Co-requisitos: MA-0005

Créditos: 4 Horas presenciales: 5

CARTA AL ESTUDIANTE II CICLO – 18

Profa. Floria Arias Tencio
arias.floria@gmail.com

Horas de consulta: L12-12:30, J 9-10, 14-15
Oficina: 422 FM

I. DESCRIPCIÓN

En este curso se estudian los conjuntos numéricos \mathbb{N} , \mathbb{Z} y \mathbb{Q} , y sus principales propiedades; así como un acercamiento al tratamiento didáctico de estos temas en la educación secundaria. Se procura continuar con el trabajo de los cursos anteriores en relación con el desarrollo de la comprensión de la matemática formal y de la habilidad de argumentar matemáticamente de manera apropiada, considerando éstos, pilares que apoyan la toma de decisiones didáctico matemáticas, que es la tarea central del educador matemático. Este curso constituye también un enlace importante con el curso MA – 0009: Números Reales donde se retomarán no solo las habilidades matemáticas ya trabajadas, si no también se hace una extensión de muchos de los resultados matemáticos estudiados.

II. OBJETIVOS

Durante el desarrollo del curso el estudiante debe ser capaz de:

- 1) Demostrar propiedades de operaciones de estructuras sencillas de semigrupo, monoide, grupo, semianillo, anillo y cuerpo.
- 2) Enunciar los axiomas de Peano, las definiciones y las propiedades de la suma, la multiplicación, la resta y el cociente en \mathbb{N} .
- 3) Demostrar las propiedades de las operaciones en \mathbb{N} .
- 4) Demostrar propiedades algebraicas de \mathbb{N} como: relación de orden, orden total, compatibilidad del orden en \mathbb{N} con la suma y la multiplicación, leyes de

cancelación de la suma y la multiplicación, ley de ausencia de inversos aditivos.

- 5) Demostrar propiedades de \mathbb{N} como conjunto o de subconjuntos de \mathbb{N} : Principio del Buen Orden, conjuntos finitos y \mathbb{N} es infinito.
- 6) Operar con números expresados en diversas bases.
- 7) Explicar las principales características y aplicaciones de los sistemas de numeración maya, romano, hindú-arábigo, binario, entre otros.
- 8) Demostrar los resultados más básicos sobre teoría de números.
- 9) Definir \mathbb{Z} como conjunto cociente.
- 10) Demostrar las propiedades de las operaciones en \mathbb{Z} .
- 11) Demostrar propiedades de \mathbb{Z} como: leyes de cancelación de la suma y la multiplicación, ley de ausencia de divisores del cero.
- 12) Demostrar propiedades de \mathbb{Z} como conjunto: discreto, ordenado, Principio del Buen Orden, numerable.
- 13) Demostrar algunos resultados sobre teoría de números en \mathbb{Z} , como una extensión de los resultados en \mathbb{N} .
- 14) Definir \mathbb{Q} como conjunto cociente.
- 15) Demostrar las propiedades de las operaciones en \mathbb{Q} .
- 16) Demostrar propiedades de \mathbb{Q} como: leyes de cancelación de la suma y la multiplicación, ley de ausencia de divisores del cero.
- 17) Demostrar propiedades de \mathbb{Q} como conjunto: denso, ordenado, arquimediano, numerable e incompleto.
- 18) Determinar, según corresponda, la expresión fraccionaria o decimal de un número racional dado.
- 19) Explicar, desde la óptica histórica, la aparición y construcción de los conjuntos numéricos \mathbb{N} , \mathbb{Z} y \mathbb{Q} .
- 20) Describir el estudio de los conjuntos \mathbb{N} , \mathbb{Z} y \mathbb{Q} que se propone en el Programa de Estudio de Matemática del MEP.

III. CONTENIDOS

TEMA 1: Conjunto de los números naturales

Nociones básicas de estructuras algebraicas: semigrupo, monoide, grupo, semianillo, anillo y cuerpo. Axiomas de Peano. Estructura de \mathbb{N} como semianillo conmutativo con elemento unidad. Propiedades de las operaciones en \mathbb{N} : suma, multiplicación, resta, división y potenciación. Representación de \mathbb{N} en la recta. Relación de orden, orden total, compatibilidad del orden en \mathbb{N} con la suma y la multiplicación, leyes de cancelación de la suma y la multiplicación, ley de ausencia de inversos aditivos. Principio del Buen Orden en \mathbb{N} . Algoritmo de la división euclídea. Conjuntos finitos, \mathbb{N} conjunto infinito. Insuficiencia de \mathbb{N} para la

resolución de ecuaciones elementales. Sistemas de Numeración en \mathbb{N} , bases, cambios de base. Momentos y personajes relevantes en la evolución del concepto de número natural y en la construcción de \mathbb{N} como conjunto numérico. Sistemas de numeración: maya, romano, griego, hindú-arábigo, binario, entre otros. Teoría de números: Algoritmo de la división. Divisores o factores y múltiplos de un número. Números primos y compuestos. Números primos relativos, descomposición prima de un número. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo.

TEMA 2: Conjunto de los números enteros

Estructura de $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ como anillo conmutativo con elemento unidad. Números positivos y negativos $(\mathbb{Z}^*, \mathbb{Z}_+^*, \mathbb{Z}_-^*)$. Operaciones en \mathbb{Z} y sus propiedades. Leyes de signos. Leyes de potencias. Leyes de cancelación de la suma y la multiplicación, ley de ausencia de divisores del cero. Relación de orden en \mathbb{Z} . Representación de \mathbb{Z} en la recta numérica. Valor absoluto y distancia en \mathbb{Z} . \mathbb{N} como subconjunto de \mathbb{Z} . Insuficiencia de \mathbb{N} para la resolución de ecuaciones elementales. Propiedades de \mathbb{Z} como conjunto: discreto, ordenado, Principio del Buen Orden, \mathbb{Z} numerable. Teoría de números: Algoritmo de la división en \mathbb{Z} . Divisores o factores y múltiplos de un número entero. Números primos y compuestos. Números primos relativos, descomposición prima de un número. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo. Ecuaciones diofánticas. Momentos y personajes relevantes en la evolución del concepto de número negativo y en la construcción de \mathbb{Z} como conjunto numérico.

TEMA 3: Conjunto de los números racionales

Estructura de $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ como cuerpo conmutativo. Propiedades de las operaciones en \mathbb{Q} . Leyes de cancelación de la suma y la multiplicación, ley de ausencia de divisores del cero. Relación de orden en \mathbb{Q} . Representación de \mathbb{Q} en la recta numérica. Insuficiencia de \mathbb{Q} . Expresión decimal de los números racionales: expresiones decimales exactas, periódicas puras y periódicas mixtas. Caracterización de las expresiones decimales a partir de los factores del denominador del representante canónico. Los conjuntos \mathbb{Q}_d y \mathbb{Q}_p como subconjuntos de \mathbb{Q} . Potenciación en \mathbb{Q} . Potencias enteras de un número racional. Leyes de potencias. Propiedades de \mathbb{Q} como conjunto: denso, ordenado, arquimediano, numerable e incompleto. Momentos y personajes relevantes en la evolución del concepto de número racional y en la construcción de \mathbb{Q} como conjunto numérico.

IV. METODOLOGÍA

En las sesiones de clase se dispondrá de espacios de desarrollo de la teoría y de aplicación de los conceptos en el planteamiento de demostraciones. Así por ejemplo, en algunos momentos la profesora explica, mediante discusión con los estudiantes, el desarrollo de la teoría: su estructura, lenguaje, estrategias de demostración, etc. En otros momentos, la profesora asigna una o varias demostraciones que deben ser estudiadas en clase en parejas o tríos que plantea el material escrito y luego deben ser explicadas a sus compañeros. En los espacios de aplicación de la teoría los estudiantes trabajan en forma individual o en equipo y luego se discute en plenaria el trabajo, destacando ideas o conceptos centrales, así como validez o pertinencia de las estrategias. Durante los espacios de clase de trabajo en equipo, se insiste en la correcta comunicación matemática, organizar las ideas matemáticas para comunicarlas al compañero y escuchar y valorar las explicaciones matemáticas del compañero.

El trabajo matemático extraclase, de 7 horas semanales, se deberá registrar en un Cuaderno de Estudio. Para cada tema se asignará una lista básica de ejercicios que se debe elaborar en el Cuaderno. Las dudas sobre este trabajo se pueden consultar extraclase a la profesora o al asistente. Se aplicarán 6 pruebas cortas con base en este trabajo, dos previas a cada examen parcial.

Como parte del desarrollo de la comprensión de la transformación de la matemática formal hacia la matemática escolar se realizan dos tipos de actividades: Δ) En algunas sesiones de clase, la profesora promueve la reflexión, mediante comparaciones y ejemplos, sobre la forma como suele aprenderse algunos de los temas del curso en la educación primaria o secundaria. Δ) Los estudiantes, en equipo, elaboran tres reportes en digital sobre el área temática “Números” del Programa de Matemática del MEP, con base en una guía de trabajo que se entregará con anticipación. Algunos de estos trabajos se presentan y comentan en clase.

En relación con la comprensión de la contribución de la historia de la matemática en la toma de decisiones didácticas, los estudiantes en equipos elaboran un “Cuadernillo de historia” estructurado en tres capítulos:

- **CAPÍTULO 1: Evolución del concepto de número natural**
I PARTE: El conteo y la formalización de IN (desde civilizaciones antiguas hasta inicios del S. XX)
II PARTE: Biografías de principales matemáticos relacionados con la temática.

III PARTE: Sistemas de numeración

IV PARTE: Glosario

- **CAPÍTULO 2: Evolución del concepto de número negativo**

I PARTE: Principales problemáticas en la evolución del concepto.

II PARTE: Biografías de principales matemáticos relacionados con la temática.

III PARTE: Principales problemáticas en la comprensión del concepto de número negativo en la educación secundaria.

IV PARTE: Glosario

- **CAPÍTULO 3: Evolución del concepto de número racional (fracciones y decimales)**

I PARTE: Principales problemáticas en la evolución del concepto.

II PARTE: Biografías de principales matemáticos relacionados con la temática.

III PARTE: Algunas problemáticas en la comprensión del concepto de fracción en la educación primaria.

IV PARTE: Glosario

Para cada reporte de cada capítulo, se entregará una guía de trabajo que sugiere el estudio de algunos documentos o videos previamente asignados, los cuales deben ser complementados con bibliografía adicional. Los reportes escritos pueden contener resúmenes, esquemas, cuadros, presentaciones, etc. y se entregan previo a la sesión de discusión en clase, como se indica en el cronograma. Todo reporte debe contener al menos: personajes ubicados en tiempo y lugar, problemáticas principales que dieron origen al conocimiento matemático en estudio, imágenes que ilustran los principales eventos o momentos y personajes, glosario de palabras o conceptos clave y bibliografía. En la sesión de discusión en clase, algunos estudiantes presentarán su producto según lo solicitado, el resto de compañeros pueden realizar aportes o cuestionamientos.

El material del curso, guías de trabajo, entregas de trabajos y realimentación de los mismos, se realizará a través del curso en la plataforma Moodle en la página de la Escuela de Matemática, el cual se matricula con la clave **Ma0006.Floria**.

El trabajo anterior permitirá favorecer en los estudiantes el desarrollo de los siguientes elementos del perfil profesionalⁱ:

CONOCIMIENTOS
1) Reconoce los fundamentos de la matemática como la base que se elabora después del avance significativo de una teoría.
2) Conoce el lenguaje matemático que le permite expresarse con el rigor en cada nivel.
3) Comprende los conceptos centrales de los tópicos de matemática que le permitirán construir el conocimiento didáctico de los temas propuestos en los programas de matemática del sistema educativo costarricense.
4) Establece relaciones entre las diferentes áreas de la matemática propuestas para la educación primaria, secundaria y primeros cursos universitarios para otras carreras.
5) Conoce la relación de la matemática con otras áreas del saber y variadas aplicaciones de la matemática a las ciencias exactas y sociales.
7) Comprende el contexto histórico y social en el que se desarrollaron los conceptos y teorías en el campo de la matemática.
8) Describe con claridad el objeto de estudio de la disciplina Educación Matemática y sus principales fuentes.
9) Establece las diferencias entre la matemática como disciplina y la matemática como asignatura de estudio en un sistema educativo (matemática escolar).
11) Reconoce el papel fundamental del saber matemático en el estudio y análisis de los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la matemática escolar.
12) Construye redes conceptuales entre conceptos y procedimientos dentro de un área de la matemática o entre varias de ellas según los programas escolares.
13) Explica la distancia epistemológica entre los conocimientos matemáticos formales y los conocimientos matemáticos escolares.
HABILIDADES
1) Utiliza los procesos de demostración y resolución de problemas en las áreas de la matemática.
2) Utiliza los procesos de razonamiento inductivo, heurístico y deductivo en todas las áreas de la matemática.
3) Utiliza apropiadamente los procedimientos matemáticos y los adapta a los diferentes contextos y tareas propuestas.
4) Utiliza las formas propias del lenguaje matemático para expresarse de modo preciso y riguroso en los diversos modos de argumentación tanto orales como escritos en todas las áreas de la matemática.
5) Usa las diferentes representaciones de los objetos matemáticos según lo requiera el problema planteado.
10) Explica cómo se ha construido el conocimiento matemático (conceptos, teorías y procedimientos matemáticos).
14) Muestra dominio de las habilidades de comunicación verbal y escrita como una herramienta para lograr una mejor gestión de las clases, trabajo con sus colegas, asesorías y procesos de investigación.
ACTITUDES
2) Reconoce su tarea docente como una actividad de formación integral de los estudiantes asociada a la formación matemática.
4) Reconoce la importancia del trabajo en equipo como la vía de socialización de sus problemas, aciertos en su quehacer docente así como la mejor forma de lograr propuestas de innovación.

V. EVALUACIÓN

Como parte de la evaluación formativa los estudiantes dispondrán de espacios de trabajo en clase que procuran reforzar y orientar su desempeño matemático en la realización de los ejercicios propuestos. Además podrán hacer entregas periódicas de su cuaderno de estudio sobre el trabajo matemático que realizan extraclase, el cual será realimentado por el asistente mediante sugerencias, comentarios o correcciones.

Las ponderaciones de los productos descritos anteriormente para calcular la nota de aprovechamiento (N.A.) se detallan a continuación:

RUBRO	VALOR
TRES PARCIALES	60%
PRUEBAS CORTAS	15%
REPORTES DE HISTORIA	15%
REPORTES PROGRAMA MEP	10%

La nota de aprovechamiento final (n), será la suma de los porcentajes obtenidos en los rubros mencionados. Esta se expresa en una escala de 0 a 10 y se reportará de la siguiente manera:

- ❖ Si su nota n es igual o superior a 6.75, el estudiante aprueba el curso con la nota n redondeada al valor más cercano entre: 7.0, 7.5, 8.0, 8.5, 9.0, 9.5 ó 10.0. Los casos intermedios como 7.25 ó 7.75 se redondean hacia arriba.
- ❖ Si $5.75 \leq n < 6.75$, el estudiante tiene derecho a aplicar un examen de ampliación en el cual debe obtener una nota superior o igual a 6.75 para aprobar el curso con 7.0. En caso contrario, su nota será 6.0 ó 6.5 la más cercana a su nota n .
- ❖ Si n es inferior a 5.75 pierde el curso y su nota final es la nota n redondeada a la unidad o media unidad más cercana: 0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 4.5, 5.0 ó 5.5.

Para realizar la **reposición de pruebas**, el estudiante debe entregar a la profesora la solicitud por escrito acompañada con el documento oficial que justifique debidamente la razón de su ausencia al examen respectivo, según las causas y periodos que el Reglamento de Régimen Académico Estudiantil considera como válidas. Si la reposición es aprobada, la docente le indicará al estudiante la fecha y el lugar de la reposición.

VI. CRONOGRAMA

La programación del estudio de las temáticas, la entrega de reportes y las evaluaciones escritas se especifican en la siguiente tabla. Sin embargo, las disposiciones que aquí se detallan podrían variar según el avance del grupo:

SEMANA	TEMAS
13 DE AGOSTO 16 DE AGOSTO	TEMA 1: LOS NÚMEROS NATURALES TEMA 1: LOS NÚMEROS NATURALES
20 DE AGOSTO 23 DE AGOSTO	TEMA 1: LOS NÚMEROS NATURALES TEMA 1: LOS NÚMEROS NATURALES
27 DE AGOSTO 30 DE AGOSTO	TEMA 1: LOS NÚMEROS NATURALES // Prueba corta N° 1 Capítulo 1: Cuadernillo de Historia (I y II PARTE)
03 DE SETIEMBRE 06 DE SETIEMBRE	TEMA 1: LOS NÚMEROS NATURALES TEMA 1: LOS NÚMEROS NATURALES
10 DE SETIEMBRE 13 DE SETIEMBRE	TEMA 1: LOS NÚMEROS NATURALES // Prueba corta N° 2 TEMA 1: LOS NÚMEROS NATURALES
17 DE SETIEMBRE 19 DE SETIEMBRE 20 DE SETIEMBRE	Capítulo 1: Cuadernillo de Historia (III y IV PARTE) I PARCIAL 13:00 TEMA 1: LOS NÚMEROS NATURALES
24 DE SETIEMBRE 27 DE SETIEMBRE	TEMA 1: LOS NÚMEROS NATURALES TEMA 1: LOS NÚMEROS NATURALES
01 DE OCTUBRE 04 DE OCTUBRE	TEMA 1: LOS NÚMEROS NATURALES // Prueba corta N° 3 Reporte 1 de Programa MEP
08 DE OCTUBRE 11 DE OCTUBRE	TEMA 2: LOS NÚMEROS ENTEROS TEMA 2: LOS NÚMEROS ENTEROS
15 DE OCTUBRE 18 DE OCTUBRE	FERIADO Capítulo 2: Cuadernillo de Historia
22 DE OCTUBRE 25 DE OCTUBRE	TEMA 2: LOS NÚMEROS ENTEROS // Prueba corta N° 4 TEMA 2: LOS NÚMEROS ENTEROS
29 DE OCTUBRE 31 DE OCTUBRE 01 DE NOVIEMBRE	Reporte 2 de Programa MEP II PARCIAL 8:00 TEMA 3: LOS NÚMEROS RACIONALES
05 DE NOVIEMBRE 08 DE NOVIEMBRE	TEMA 3: LOS NÚMEROS RACIONALES TEMA 3: LOS NÚMEROS RACIONALES
12 DE NOVIEMBRE 15 DE NOVIEMBRE	TEMA 3: LOS NÚMEROS RACIONALES // Prueba corta N° 5 Capítulo 3: Cuadernillo de Historia

19 DE NOVIEMBRE 22 DE NOVIEMBRE	TEMA 3: LOS NÚMEROS RACIONALES TEMA 3: LOS NÚMEROS RACIONALES
26 DE NOVIEMBRE 29 DE NOVIEMBRE	TEMA 3: LOS NÚMEROS RACIONALES // Prueba corta N° 6 Reporte 3 de Programa MEP
04 DE DICIEMBRE 13 DE DICIEMBRE	III PARCIAL 8:00 AMPLIACIÓN Y SUFICIENCIA 8:00

VII. BIBLIOGRAFÍA

- 1) Aleksandrov, A.D., Kolmogorov, A.N., Laurentiev, M.A. y otros. (1973). **La matemática: su contenido, métodos y significado**. Alianza Editorial, España.
- 2) Apóstol, T. (2009). **Análisis Matemático**. Segunda edición. Editorial Reverté, España.
- 3) Apóstol, T. (2010). **Calculus**. Segunda edición, Vol. I y II. Editorial Reverté, España.
- 4) Barrantes, H., Díaz, P., Murillo, M., Soto, A. (2007). **Introducción a la teoría de números**. EUNED, Costa Rica.
- 5) Chamorro, M. (coord.). (2005). **Didáctica de las Matemáticas**. PEARSON PRENTICE HALL, España.
- 6) Gómez, J., Navarro, J., García, F., Pina, E. (2005). **Matemáticas**. Volumen I. Editorial Mad, S. L., España.
- 7) Hofmann, J. (2005). **Historia de la Matemática**. Tercera edición, Editorial Limusa, México.
- 8) Rudin, W. (1980). **Principios de Análisis Matemático**. Tercera edición, Editorial McGraw-Hill, México.

ⁱ La numeración se refiere a la versión oficial del Perfil Profesional de la carrera que se puede consultar en la página de la Escuela.