

Carrera: Educación Matemática
Curso: MA-0009 NÚMEROS REALES

CARTA AL ESTUDIANTE ♦ I-2018

Nivel: III ciclo	Requisitos: MA-0005, MA-0006
Tipo de curso: teórico	Co-requisitos: no tiene
Créditos: 4	Horas presenciales: 5
	Horas de estudio independiente: 6

Estimado(a) estudiante:

Reciba la más cordial bienvenida al curso MA-0009 NÚMEROS REALES. En este documento encontrará información sobre algunos aspectos del curso que usted debe conocer: descripción, objetivos, contenidos, metodología, evaluación, cronograma, referencias bibliográficas propuestas, horario del curso y de consulta de la profesora.

I. DESCRIPCIÓN

Este curso, dirigido a estudiantes de tercer ciclo, tiene como propósito estudiar los números reales con sus propiedades algebraicas, de orden y completitud. El énfasis recae en las propiedades analíticas de los números reales, porque se debe ofrecer al estudiante una base sólida para los siguientes cursos de la secuencia de análisis real. Para esto se requiere de algunos elementos básicos de topología en \mathbb{R} , lo cual es fundamental para concretar y reforzar las ideas de aproximación y así dar bases para una construcción sólida del concepto de convergencia de sucesiones numéricas, tema que constituye parte fundamental del curso.

II. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Durante este curso, se espera que el estudiante sea capaz de:

1. Resolver ecuaciones e inecuaciones con expresiones que contienen valor absoluto y usar diversas representaciones de las soluciones.
2. Determinar el extremo superior e inferior, el máximo y el mínimo de un conjunto acotado.
3. Usar la caracterización del supremo y del ínfimo para demostrar si un número es o no un extremo.
4. Caracterizar subconjuntos abiertos y cerrados de \mathbb{R} .
5. Determinar la adherencia, clausura y frontera de un subconjunto de \mathbb{R} .
6. Calcular límites de sucesiones justificando el procedimiento.
7. Demostrar la convergencia o divergencia de una sucesión.
8. Identificar diversos números reales según su expansión decimal.
9. Demostrar que una expansión decimal periódica corresponde a un número racional.
10. Construir funciones biyectivas entre conjuntos equipotentes.
11. Demostrar la numerabilidad de \mathbb{Q} y la no numerabilidad de \mathbb{R} .
12. Demostrar las propiedades de la función exponencial y logarítmica en \mathbb{R} a partir de las propiedades en \mathbb{Q} usando las expansiones decimales.
13. Exponer un concepto estudiado formalmente en el curso proponiendo actividades o material para la presentación del mismo en secundaria.
14. Elaborar una memoria con base en los apuntes de las discusiones realizadas en clase sobre historia.

III. CONTENIDOS

TEMA 1: Los números reales

Presentación axiomática de \mathbb{R} . Propiedades algebraicas y de orden de \mathbb{R} . Valor absoluto, parte entera. El axioma del Extremo Superior. Caracterización del supremo y del ínfimo. Principio de Arquímedes. Existencia de raíces. Intervalos y decimales.

TEMA 3: Topología en \mathbb{R}

Vecindades. Conjuntos abiertos, cerrados, interior, exterior, adherencia, conjunto derivado. Frontera. Topología relativa. Topología en el plano.

TEMA 2: Expansiones

Expansiones decimales. Números con expansión finita. Aritmética con expansiones decimales. Expansiones de números reales en base arbitraria. Expansiones de números irracionales.

TEMA 3: Equipotencia

La relación de equipotencia de conjuntos. Conjuntos finitos e infinitos. Conjuntos numerables y no numerables. Numerabilidad de \mathbb{Q} . Innumerabilidad de \mathbb{R} . Teorema Shauder- Bernstein.

TEMA 4: Sucesiones

Concepto de sucesión, convergencia. Teoremas de límites. Cálculo de límites de sucesiones. Sucesiones monótonas. Subsucesiones y el teorema de Bolzano Weierstrass. Existencia de raíces vía sucesiones. Criterio de Cauchy. Sucesiones divergentes.

TEMA 5: Funciones Exponencial y Logarítmica

Construcción de la función exponencial vía sucesiones. El logaritmo, el número e, logaritmo natural. Propiedades. El número e como suma infinita. Irracionalidad del número e.

IV. METODOLOGÍA

En general, se empleará la clase dirigida por la docente, en donde se espera una participación activa de los estudiantes: proponer, conjeturar, demostrar, ilustrar, anticipar, refutar, trazar, etc.; así como las clases en donde los estudiantes realizan un trabajo más independiente explorando ejercicios, realizando construcciones, analizando demostraciones incompletas, estudiando textos para posteriormente presentarlos y explicarlos a la clase. Las clases presenciales se complementan con el trabajo de los estudiantes en grupos para resolver ejercicios, con sesiones de discusión sobre algunas demostraciones y algunas exposición por parte de cada estudiante.

Durante el curso se estarán abordando los ejes de formación de la siguiente manera:

- **Eje de Historia y epistemología de la matemática:**

Para atender la formación en historia y epistemología de la matemática, el estudiante deberá leer y entregar un reporte de las siguientes lecturas:

- Parágrafo 4 del capítulo 1: Aritmética y geometría del libro La matemática: su contenido métodos y significado.
- El libro “El número pi siete mil años de misterio en forma completa”.
- Continuidad y números irracionales de Richard Dedekind 1887.

En dicho reporte de lectura, el cual se realizará en grupos, se debe incluir y detectar momentos determinantes de la historia, sus principales protagonistas y ubicarlos en el tiempo, para lo cual pueden usar algún software de línea del tiempo. En estas clases se invitará a una colega, quien colaborará con la discusión de la clase.

- **Eje de Desempeño profesional:**

Cada lectura de historia se asignará a un grupo, el cual deberá planear una clase para sus compañeros, de modo que se dé una reflexión y discusión de los momentos determinantes de la historia. Deberán además realizar una evaluación a sus compañeros, usando el software Kahoot.

Por otro lado, los alumnos harán al menos tres intervenciones en la pizarra (ejercicios o algunas demostraciones de teoremas), diseñando estrategias para facilitar la comprensión de los objetos matemáticos por parte de sus compañeros. Con este ejercicio se espera desarrollar este eje al inducir al estudiante a dedicar especial atención a la comunicación, al lenguaje simbólico y escrito que utilice, al manejo de la mirada, uso correcto de los pilots y control de la clase para mantener la atención de sus compañeros.

- **Eje de Didáctico matemático:**

Para atender el eje didáctico matemático, se asignará un proyecto grupal de indagación en los programas del MEP sobre cómo se abordan alguno de los siguientes conceptos del curso que son estudiados en la secundaria: valor absoluto, intervalos, densidad, principio de Arquímedes, completitud, expansiones decimales (para ello se coordinará con la profesora del MA007 Matemática en el currículo escolar). Lo propuesto por el MEP deberá contrastarse con el enfoque que se presenta en al menos un libro de texto que se use en la educación media. Se expondrán los resultados en clases.

- **Eje de de las TIC:**

Las actividades que no son las pruebas escritas, requieren el uso de herramientas de TIC, como son las presentaciones en power point, uso de software de línea del tiempo, uso de la herramienta Kahoot para evaluar la parte de historia. Todas estas serán reforzadas en el curso.

V. EVALUACIÓN

Como parte de la evaluación formativa, la docente asignará ejercicios regularmente, así como tareas individuales, y pruebas de teoremas que no tienen un rubro en la calificación, sino que será revisada y discutida con cada estudiante.

Como parte de la evaluación sumativa, se llevarán a cabo dos pruebas parciales con un valor de 35% cada una, 4 quices con un valor de 2.5% cada uno, dos antes de cada examen parcial. Estos quices tendrán dos tratos, uno en forma individual (1.5%), y otra en parejas (1%), para incentivar el trabajo colaborativo. El 20% restante será evaluado en diferentes actividades. Una de ellas será realizar una indagación del abordaje (de algunos conceptos que se ven en el curso), que se propone en los programas del MEP y como se enfoca en un libro de texto a escoger. Otra actividad será diseñar, usando algún software de línea del tiempo, un reporte de 3 lecturas sobre historia del análisis real. Cada grupo tendrá la tarea de diseñar, usando la herramienta Kahoot, una evaluación a sus compañeros de los principales protagonistas y momentos determinantes de la historia. El grupo creador, obtiene el rubro de dicha calificación, al diseñarla. Finalmente, ustedes deberán realizar dos intervenciones de clases, demostrando algún teorema o ejercicio que será asignado por la docente, para el cual se le dará una guía que incluye elementos que serán evaluados por sus compañeros y docente. Los rubros de evaluación se detallan en la siguiente tabla:

RUBRO	%	DETALLE DEL %
Dos pruebas parciales	70%	35% cada una
Quices o pruebas cortas	10%	2,5% cada uno
Programas MEP	3%	3%
6 Intervenciones de clases	6%	1% cada uno
1 Clase de historia	3%	3%
4 Evaluaciones de historia	8%	2% cada uno

Las fechas de los exámenes y quices se dan a continuación:

FECHAS DE EVALUACIONES	FECHA
I Quiz	2 de abril
II Quiz	30 de abril

I examen parcial	7 de mayo
III Quiz	31 de mayo
IV Quiz	25 de junio
II examen parcial	2 de julio
Examen de ampliación	16 de julio

La nota de aprovechamiento final (n), será la suma de los porcentajes obtenidos en los rubros mencionados. Esta se expresa en una escala de 0 a 10 y se reportará de la siguiente manera:

- ❖ Si su nota n es igual o superior a 6.75, el estudiante aprueba el curso con la nota n redondeada al valor más cercano entre: 7.0, 7.5, 8.0, 8.5, 9.0, 9.5 ó 10.0. Los casos intermedios como 7.25 ó 7.75 se redondean hacia arriba.
- ❖ Si $5.75 \leq n < 6.75$, el estudiante tiene derecho a aplicar un examen de ampliación en el cual debe obtener una nota superior o igual a 6.75 para aprobar el curso con 7.0. En caso contrario, su nota será 6.0 ó 6.5 la más cercana a su nota n .
- ❖ Si n es inferior a 5.75 pierde el curso y su nota final es la nota n redondeada a la unidad o media unidad más cercana: 0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 4.5, 5.0 ó 5.5.

EXÁMENES DE REPOSICIÓN: Para realizar examen de reposición el estudiante debe entregar a la profesora la solicitud por escrito acompañada con el documento oficial que justifique debidamente la razón de su ausencia al examen respectivo, según las causas y periodos que el Reglamento de Régimen Académico Estudiantil considera como válidas. Si la reposición es aprobada, la docente le indicará al estudiante la fecha y el lugar de la reposición.

VI. CRONOGRAMA

La programación de las temáticas se especifican en la siguiente tabla; sin embargo, las disposiciones que aquí se detallan podrían variar según el avance del grupo:

SESIÓN	TEMAS
12-15 marzo	Presentación axiomática de IR. Propiedades algebraicas de IR.
19 -22 marzo	Propiedades de orden. Desigualdades de Bernoulli, Cauchy y desigualdad del triángulo. Valor absoluto, parte entera.
26- 29 marzo	SEMANA SANTA
2 -5 abril	El axioma del Extremo Superior. Caracterización del supremo y del ínfimo. Quiz 1.
9 -12 abril	Principio de Arquímedes. Existencia de raíces. Topología real. Densidad de los números racionales. I evaluación de historia.
16 -19 abril	Representación binaria y decimal de los números reales. La relación de equipotencia de conjuntos. Conjuntos finitos e infinitos.
23 -26 abril	Numerabilidad de Q. Innumerabilidad de IR. Semana Universitaria
30 -5 mayo	Quiz 2. Práctica para examen.
7 -10 mayo	I EXAMEN PARCIAL, II evaluación de historia
14 -17 mayo	Concepto de sucesión, convergencia. Teoremas de límites. Cálculo de límites de sucesiones.
21-24 mayo	Sucesiones monótonas. Subsucesiones y el teorema de Bolzano Weierstrass.
28 -31 mayo	Existencia de raíces vía sucesiones. Criterio de Cauchy. Sucesiones divergentes.
4 -7 junio	Quiz 3. Construcción de los números reales. Axioma de completitud y axiomas equivalentes. Axioma de Dedekind, Axioma de continuidad y Principio de los intervalos encajados. III evaluación de historia.
11 -14 junio	Construcción de la función exponencial vía sucesiones. El logaritmo, el número e, logaritmo natural. Propiedades. El número e como suma infinita. Irracionalidad del número e.
18 -21 junio	Topología en IR. Vecindades. Conjuntos abiertos, cerrados, interior, exterior, adherencia, conjunto derivado. Frontera. Topología en el plano. Topología relativa. Sucesiones convergentes. Compacidad. Teorema de Heine Borel.
25 -28 junio	Quiz 4. Práctica para examen, Entrega del reporte de Investigación.
2 -5 julio	IV evaluación de historia
9 julio 8am	II EXAMEN PARCIAL.

Los contenidos de cada prueba están sujetos a cambios, estos serán confirmados por su profesora.

VII. BIBLIOGRAFÍA

Alexandrov, A.D. Kolmogororov, A.N.y otros. (1974) La matemática: su contenido métodos y significado. España: Alianza editorial.

Bartle. R, Sherbert. D. (2010). Introducción al Análisis Matemático de una variable. México: Editorial Limusa S.A Grupo Noriega editores.

Barahona, M (1990). El número π siete mil años de misterio. Costa Rica: Imprenta y Litografía Mundo Gráfico S.A.

Cambronero,S y Duarte, A. (s.f 2007). Notas sobre números reales. Costa Rica.

Hofmann, J (2002). Historia de la matemática. Editorial Limusa, S.A.

Ugalde, W. (2017). Fundamentos de Análisis Real. Editorial Universidad Estatal a distancia. Costa Rica.

Piza,E. (2006). Introducción al análisis real en una variable. Editorial Universidad de Costa Rica.

Profesora

Lorena Salazar Solórzano

Oficina 422 FM.; casillero 104, 2do piso FM

lorena.salazarsolorzano@ucr.ac.cr ; lorena.salazarsolorzano@gmail.com

Horario de consulta en oficina: Martes 7:00 am – 12am

Horario de clase: Lunes 7am – 10am (404 FM) y Jueves 7am – 9am (404 FM)