



UNIVERSIDAD DE
COSTA RICA

Universidad de Costa Rica
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemática
Departamento de Enseñanza de la Matemática

EMat Escuela de
Matemática

Carrera EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Curso: MA-0006 CONJUNTOS NUMERICOS

Nivel: II Ciclo **Requisitos:** MA-0002 y MA-0003

Tipo de Curso: Teórico **Co-requisitos:** MA-0005

Créditos: 4 **Horas presenciales:** 5

CARTA AL ESTUDIANTE
I CICLO – 18

Profa. Floria Arias Tencio
arias.floria@gmail.com

Horas de consulta: M 11:00- 13:00, J 15:00- 16:00
Oficina: 424 FM

I. DESCRIPCIÓN

En este curso se estudian los conjuntos numéricos \mathbb{N} , \mathbb{Z} y \mathbb{Q} , y sus principales propiedades; así como un acercamiento al tratamiento didáctico de estos temas en la educación secundaria. Se procura continuar con el trabajo de los cursos anteriores en relación con el desarrollo de la comprensión de la matemática formal y de la habilidad de argumentar matemáticamente de manera apropiada, considerando éstos, pilares que apoyan la toma de decisiones didáctico matemáticas, que es la tarea central del educador matemático. Este curso constituye también un enlace importante con el curso MA – 0009: Números Reales donde se retomarán no solo las habilidades matemáticas ya trabajadas, si no también se hace una extensión de muchos de los resultados matemáticos estudiados.

II. OBJETIVOS

Durante el desarrollo del curso el estudiante debe ser capaz de:

- 1) Enunciar los axiomas de Peano, las definiciones y las propiedades de la suma, la multiplicación, la resta y el cociente en \mathbb{N} .
- 2) Demostrar las propiedades de las operaciones en \mathbb{N} .
- 3) Demostrar propiedades algebraicas de \mathbb{N} como: relación de orden, orden total,

compatibilidad del orden en \mathbb{N} con la suma y la multiplicación, leyes de cancelación de la suma y la multiplicación, ley de ausencia de inversos aditivos.

- 4) Demostrar propiedades de \mathbb{N} como conjunto o de subconjuntos de \mathbb{N} : Principio del Buen Orden, conjuntos finitos y \mathbb{N} es infinito.
- 5) Operar con números expresados en diversas bases.
- 6) Explicar las principales características y aplicaciones de los sistemas de numeración maya, romano, hindú-arábigo, binario, entre otros.
- 7) Definir \mathbb{Z} como conjunto cociente.
- 8) Demostrar las propiedades de las operaciones en \mathbb{Z} .
- 9) Demostrar propiedades de \mathbb{Z} como: leyes de cancelación de la suma y la multiplicación, ley de ausencia de divisores del cero.
- 10) Demostrar propiedades de \mathbb{Z} como conjunto: discreto, ordenado, Principio del Buen Orden, numerable.
- 11) Demostrar los principales resultados sobre divisibilidad en \mathbb{Z} .
- 12) Definir \mathbb{Q} como conjunto cociente.
- 13) Demostrar las propiedades de las operaciones en \mathbb{Q} .
- 14) Demostrar propiedades de \mathbb{Q} como: leyes de cancelación de la suma y la multiplicación, ley de ausencia de divisores del cero.
- 15) Demostrar propiedades de \mathbb{Q} como conjunto: denso, ordenado, arquimediano, numerable e incompleto.
- 16) Determinar, según corresponda, la expresión fraccionaria o decimal de un número racional dado.
- 17) Explicar, desde la óptica histórica, la aparición y construcción de los conjuntos numéricos \mathbb{N} , \mathbb{Z} y \mathbb{Q} .
- 18) Describir el estudio de los conjuntos \mathbb{N} , \mathbb{Z} y \mathbb{Q} que se propone en el Programa de Estudio de Matemática del MEP.

III. CONTENIDOS

TEMA 1: Conjunto de los números naturales

Axiomas de Peano. Estructura de \mathbb{N} como semianillo conmutativo con elemento unidad. Propiedades de las operaciones en \mathbb{N} : suma, multiplicación, resta, división y potenciación. Representación de \mathbb{N} en la recta. Relación de orden, orden total, compatibilidad del orden en \mathbb{N} con la suma y la multiplicación, leyes de cancelación de la suma y la multiplicación, ley de ausencia de inversos aditivos. Principio del Buen Orden en \mathbb{N} . Algoritmo de la división euclidea. Conjuntos finitos, \mathbb{N} conjunto infinito. Insuficiencia de \mathbb{N} para la resolución de ecuaciones elementales. Sistemas de Numeración en \mathbb{N} , bases, cambios de base. Momentos y personajes relevantes en la evolución del concepto de número natural y en la

construcción de \mathbb{N} como conjunto numérico. Sistemas de numeración: maya, romano, hindú-arábigo, binario, entre otros.

TEMA 2: Conjunto de los números enteros

Estructura de $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ como anillo conmutativo con elemento unidad. Números positivos y negativos (\mathbb{Z}^* , \mathbb{Z}_+^* , \mathbb{Z}_-^*). Operaciones en \mathbb{Z} y sus propiedades. Leyes de signos. Leyes de potencias. Leyes de cancelación de la suma y la multiplicación, ley de ausencia de divisores del cero. Relación de orden en \mathbb{Z} . Representación de \mathbb{Z} en la recta numérica. Valor absoluto y distancia en \mathbb{Z} . \mathbb{N} como subconjunto de \mathbb{Z} . Insuficiencia de \mathbb{N} para la resolución de ecuaciones elementales. Propiedades de \mathbb{Z} como conjunto: discreto, ordenado, Principio del Buen Orden, \mathbb{Z} numerable. Teoría de números: Algoritmo de la división en \mathbb{Z} . Divisores o factores y múltiplos de un número entero. Números primos y compuestos. Números primos relativos, descomposición prima de un número. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo. Ecuaciones diofánticas. Momentos y personajes relevantes en la evolución del concepto de número negativo y en la construcción de \mathbb{Z} como conjunto numérico.

TEMA 3: Conjunto de los números racionales

Estructura de $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ como cuerpo conmutativo. Propiedades de las operaciones en \mathbb{Q} . Leyes de cancelación de la suma y la multiplicación, ley de ausencia de divisores del cero. Relación de orden en \mathbb{Q} . Representación de \mathbb{Q} en la recta numérica. Insuficiencia de \mathbb{Q} . Expresión decimal de los números racionales: expresiones decimales exactas, periódicas puras y periódicas mixtas. Caracterización de las expresiones decimales a partir de los factores del denominador del representante canónico. Los conjuntos \mathbb{Q}_d y \mathbb{Q}_p como subconjuntos de \mathbb{Q} . Potenciación en \mathbb{Q} . Potencias enteras de un número racional. Leyes de potencias. Propiedades de \mathbb{Q} como conjunto: denso, ordenado, arquimediano, numerable e incompleto. Momentos y personajes relevantes en la evolución del concepto de número racional y en la construcción de \mathbb{Q} como conjunto numérico.

IV. METODOLOGÍA

En las sesiones de clase se dispondrá de espacios de desarrollo de la teoría y de aplicación de los conceptos en el planteamiento de demostraciones. Así por ejemplo, en algunos momentos la profesora explica, mediante discusión con los

estudiantes, el desarrollo de la teoría: su estructura, lenguaje, estrategias de demostración, etc. En otros momentos, la profesora asigna una o varias demostraciones que deben ser estudiadas en clase en parejas o tríos que plantea el material escrito y luego deben ser explicadas a sus compañeros. En los espacios de aplicación de la teoría los estudiantes trabajan en forma individual o en equipo y luego se discute en plenaria el trabajo, destacando ideas o conceptos centrales, así como validez o pertinencia de las estrategias. Durante los espacios de clase de trabajo en equipo, se insiste en la correcta comunicación matemática, organizar las ideas matemáticas para comunicarlas al compañero y escuchar y valorar las explicaciones matemáticas del compañero.

El trabajo matemático extraclase, de 7 horas semanales, se deberá registrar en un Cuaderno de Estudio. Para cada tema se asignará una lista básica de ejercicios que se debe elaborar en el Cuaderno y que se entrega el día de cada prueba parcial. Las dudas sobre este trabajo se pueden consultar extraclase a la profesora o al asistente.

Como parte del desarrollo de la comprensión de la transformación de la matemática formal hacia la matemática escolar se realizan dos tipos de actividades: * En algunas sesiones de clase, la profesora promueve la reflexión, mediante comparaciones y ejemplos, sobre la forma como suele aprenderse algunos de los temas del curso en la educación primaria o secundaria. * Los estudiantes, en pareja, elaboran tres reportes en digital sobre el área temática “Números” del Programa de Matemática del MEP, con base en una guía de trabajo que se entregará con anticipación. Algunos de estos trabajos se presentan y comentan en clase.

En relación con la comprensión de la contribución de la historia de la matemática en la toma de decisiones didácticas, los estudiantes en parejas elaboran un “Cuadernillo de historia” estructurado en tres capítulos:

- CAPÍTULO 1: Evolución del concepto de número natural
I PARTE: El conteo y la formalización de \mathbb{N} (desde civilizaciones antiguas hasta inicios del S. XX)
II PARTE: Sistemas de numeración
- CAPÍTULO 2: Evolución del concepto de número negativo
- CAPÍTULO 3: Evolución del concepto de número racional (fracciones y decimales)

Para cada reporte se entrega una guía de trabajo que sugerirá el estudio de algunos documentos o videos previamente asignados, las cuales deben ser

complementadas con bibliografía adicional. Los reportes escritos pueden contener resúmenes, esquemas, cuadros, presentaciones, etc. y se entregan previo a la sesión de discusión en clase, como se indica en el cronograma. Todo reporte debe contener al menos: personajes ubicados en tiempo y lugar, problemáticas principales que dieron origen al conocimiento matemático en estudio, imágenes que ilustran los principales eventos o momentos y personajes, glosario de palabras o conceptos clave y bibliografía. En la sesión de discusión en clase, algunos estudiantes presentarán su producto según lo solicitado, el resto de compañeros pueden realizar aportes o cuestionamientos.

El material del curso, guías de trabajo, entregas de trabajos y realimentación de los mismos, se realizará a través del curso en la plataforma Moodle en la página de la Escuela de Matemática.

V. EVALUACIÓN

Como parte de la evaluación formativa los estudiantes dispondrán de espacios de trabajo en clase que procuran reforzar y orientar su desempeño matemático en la realización de los ejercicios propuestos. Además deberán hacer entregas periódicas de su cuaderno de estudio sobre el trabajo matemático que realizan extraclase, el cual será realimentado por el asistente mediante sugerencias, comentarios o correcciones.

Las ponderaciones de los productos descritos anteriormente para calcular la nota de aprovechamiento (N.A.) se detallan a continuación:

RUBRO	VALOR
TRES PARCIALES	60%
EXAMEN FINAL	15%
CUADERNO DE TRABAJO	5%
REPORTES DE HISTORIA	10%
REPORTES PROGRAMA MEP	10%

Los estudiantes que obtengan un promedio de 85 en los tres parciales, se pueden eximir del examen final, quedando los porcentajes asignados de la siguiente manera:

RUBRO	VALOR
TRES PARCIALES	75%
CUADERNO DE TRABAJO	5%
REPORTES DE HISTORIA	10%

REPORTES PROGRAMA MEP	10%
-----------------------	-----

La nota de aprovechamiento final (n), será la suma de los porcentajes obtenidos en los rubros mencionados. Esta se expresa en una escala de 0 a 10 y se reportará de la siguiente manera:

- ❖ Si su nota n es igual o superior a 6.75, el estudiante aprueba el curso con la nota n redondeada al valor más cercano entre: 7.0, 7.5, 8.0, 8.5, 9.0, 9.5 ó 10.0. Los casos intermedios como 7.25 ó 7.75 se redondean hacia arriba.
- ❖ Si $5.75 \leq n < 6.75$, el estudiante tiene derecho a aplicar un examen de ampliación en el cual debe obtener una nota superior o igual a 6.75 para aprobar el curso con 7.0. En caso contrario, su nota será 6.0 ó 6.5 la más cercana a su nota n .
- ❖ Si n es inferior a 5.75 pierde el curso y su nota final es la nota n redondeada a la unidad o media unidad más cercana: 0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 4.5, 5.0 ó 5.5.

EXÁMENES: Para realizar examen de reposición el estudiante debe entregar a la profesora la solicitud por escrito acompañada con el documento oficial que justifique debidamente la razón de su ausencia al examen respectivo, según las causas y periodos que el Reglamento de Régimen Académico Estudiantil considera como válidas. Si la reposición es aprobada, la docente le indicará al estudiante la fecha y el lugar de la reposición.

VI. CRONOGRAMA

La programación del estudio de las temáticas, la entrega de reportes y las evaluaciones escritas se especifican en la siguiente tabla; sin embargo, las disposiciones que aquí se detallan podrían variar según el avance del grupo:

SEMANA	TEMAS
12 DE MARZO 15 DE MARZO	TEMA 1: LOS NÚMEROS NATURALES TEMA 1: LOS NÚMEROS NATURALES
19 DE MARZO 22 DE MARZO	TEMA 1: LOS NÚMEROS NATURALES TEMA 1: LOS NÚMEROS NATURALES

26-30 DE MARZO	SEMANA SANTA
02 DE ABRIL 05 DE ABRIL	TEMA 1: LOS NÚMEROS NATURALES TEMA 1: LOS NÚMEROS NATURALES (Entrega de Reporte 1 de historia)
09 DE ABRIL 12 DE ABRIL	TEMA 1: LOS NÚMEROS NATURALES Presentación Capítulo 1: Cuadernillo de Historia
16 DE ABRIL 19 DE ABRIL	TEMA 1: LOS NÚMEROS NATURALES Entrega y Presentación: Reporte 1 de Programa MEP
23 DE ABRIL 26 DE ABRIL	TEMA 1: LOS NÚMEROS NATURALES TEMA 2: LOS NÚMEROS ENTEROS
30 DE ABRIL 30 DE ABRIL 03 DE MAYO	TEMA 2: LOS NÚMEROS ENTEROS I PARCIAL; 16:00 TEMA 2: LOS NÚMEROS ENTEROS
07 DE MAYO 10 DE MAYO	TEMA 2: LOS NÚMEROS ENTEROS TEMA 2: LOS NÚMEROS ENTEROS (Entrega de Reporte Capítulo 2 Cuadernillo de Historia)
14 DE MAYO 17 DE MAYO	TEMA 2: LOS NÚMEROS ENTEROS TEMA 2: LOS NÚMEROS ENTEROS
21 DE MAYO 24 DE MAYO	TEMA 2: LOS NÚMEROS ENTEROS Presentación: Reporte 2 de Programa MEP y Reporte 2 de historia (Entrega de Reporte 2 Programa MEP)
28 DE MAYO 30 DE MAYO 31 DE MAYO	TEMA 3: LOS NÚMEROS RACIONALES II PARCIAL 16:00 TEMA 3: LOS NÚMEROS RACIONALES
04 DE JUNIO 07 DE JUNIO	TEMA 3: LOS NÚMEROS RACIONALES TEMA 3: LOS NÚMEROS RACIONALES (Entrega de Reporte Capítulo 3 Cuadernillo de Historia)
11 DE JUNIO 14 DE JUNIO	TEMA 3: LOS NÚMEROS RACIONALES TEMA 3: LOS NÚMEROS RACIONALES
18 DE JUNIO 21 DE JUNIO	TEMA 3: LOS NÚMEROS RACIONALES (Entrega de Reporte 3 de Programa MEP) TEMA 3: LOS NÚMEROS RACIONALES
25 DE JUNIO 28 DE JUNIO	TEMA 3: LOS NÚMEROS RACIONALES TEMA 3: LOS NÚMEROS RACIONALES
02 DE JULIO 05 DE JULIO	III PARCIAL ; 7:00 Presentación: Reporte 3 de Programa MEP y Reporte 3 de

	historia
10 DE JULIO 20 DE JULIO	EXAMEN FINAL; 9:00 AMPLIACIÓN Y SUFICIENCIA 9:00

VII. BIBLIOGRAFÍA

- 1) Aleksandrov, A.D., Kolmogorov, A.N., Laurentiev, M.A. y otros. (1973). **La matemática: su contenido, métodos y significado**. Alianza Editorial, España.
- 2) Apóstol, T. (2009). **Análisis Matemático**. Segunda edición. Editorial Reverté, España.
- 3) Apóstol, T. (2010). **Calculus**. Segunda edición, Vol. I y II. Editorial Reverté, España.
- 4) Barrantes, H., Díaz, P., Murillo, M., Soto, A. (2007). **Introducción a la teoría de números**. EUNED, Costa Rica.
- 5) Chamorro, M. (coord.). (2005). **Didáctica de las Matemáticas**. PEARSON PRENTICE HALL, España.
- 6) Gómez, J., Navarro, J., García, F., Pina, E. (2005). **Matemáticas**. Volumen I. Editorial Mad, S. L., España.
- 7) Hofmann, J. (2005). **Historia de la Matemática**. Tercera edición, Editorial Limusa, México.
- 8) Rudin, W. (1980). **Principios de Análisis Matemático**. Tercera edición, Editorial McGraw-Hill, México.