UNIVERSIDAD DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
MA 870: GEOMETRÍA DIFERENCIAL

14 de agosto del 2018

Carta al estudiante

I **Descripción del curso:** Se trata de un curso introductorio, para estudiantes de cuarto año de matemáticas pura, de los objetos en donde se desarrolla la geometría diferencial, que son, en un sentido amplio, generalizaciones de las curvas y superficies que se estudian en los cursos de cálculo en varias variables. En este sentido, quizá un nombre más apropiado para el curso sería "*Variedades diferenciales*".

La idea es, más bien, desarrollar el lenguaje, la terminología, las herramientas y la intuición necesarias para que posteriormente, en otro curso, se pueda iniciar un estudio propiamente en geometría, o topología, diferencial, desde un punto de vista moderno. Esperamos, por tanto, que una vez finalizado el curso el estudiante pueda fácilmente incursionar en temas como geometría Riemanniana, geometría simpléctica, sistemas dinámicos, mecánica clásica, teoría de la relatividad, representaciones de grupos de Lie, entre otros.

Tomando en cuenta que las variedades diferenciales proveen, desde un punto de vista práctico, un lenguage apropiado para estudiar muchos aspectos del universo y que también es un lenguaje usado en muchas ramas de la matemática y la física teórica, no es de extrañar que se presenten muchas sutilezas que no parece ser conveniente despachar con mucha rapidez, si se pretende obtener una formación sólida que permita, más adelante, abordar problemas interesantes, lo cual podría considerarse como una motivación para el curso. Sin embargo, para trascender un poco más allá de eso, vamos a usar como hilo conductor del curso la teoría de grupos de Lie: en otras palabras, cada vez que introduzcamos algún objeto, como por ejemplo campos vectoriales, formas diferenciales, etc. o estudiemos algún teorema importante, como el teorema de Frobenius, veremos inmediatamente después que implicaciones tienen, o como se pueden usar, en la teoría de grupos de Lie. De este modo, al final del curso, tendremos algo más que una introducción a las variedades diferenciales: esperamos que el estudiante tenga un sabor sobre la teoría de grupos de Lie, aunque, propiamente, este no es un curso sobre grupos de Lie, ni pretende serlo.

Los requisitos formales son los cursos MA-605 *Análisis II* y MA-704 *Topología general*. No obstante, lo que concretamente asumiremos es que el estudiante tiene un dominio amplio del teorema de la función implícita, y la teoría aledeña a él, y de la teorías de diferenciación e integración en $\mathbb{R}^n$, que usaremos como motivación y guía para introducir varios de los objetos: nuestras variedades estarán modeladas sobre $\mathbb{R}^n$

y no sobre espacios de Banach en general; si bien es cierto que el trabajo es esencialmente el mismo, no consideramos que esta generalización sea muy provechosa en un primer curso sobre la materia, pues tendríamos algunas complicaciones técnicas que podrían desviar la atención de las ideas verdaderamente importantes, o incluso empañar la intuición geométrica con meras tecnicalidades. Finalmente, aparte de las nociones básicas de topología, que se encuentran en los primeros capítulos de cualquiera de los textos clásicos de topología general, usaremos las ideas principales tanto de los conjuntos compactos, como de los conjuntos conexos, en particular las ideas alrededor de paracompacidad y particiones de la unidad, jugarán un papel importante.

II Objetivos generales:

a-) Introducir al estudiante en el estudio de las variedades diferenciales.

b-) Promover un espíritu crítico en el estudiante mediante la investigación y discusión de los conceptos fundamentales.

c-) Lograr que el estudiante se introduzca en la literatura matemática.

d-) Capacitar al estudiante, que así lo deseara, para abordar cualquiera de los temas típicos de la geometría diferencial moderna.

III Objetivos específicos:

a-) Familiarizar al estudiante con la notación típica de la geometría diferencial moderna.

b-) Familiarizar al estudiante con el concepto del fibrado tangente.

c-) Integrar sobre formas diferenciales.

d-) Conocer las propiedades básicas de los grupos de Lie.

e-) Conocer las ideas básicas sobre fibrados vectoriales.

f-) Familiarizar al estudiante con el concepto de variedad Riemanniana.

IV Contenidos:

a-) Nociones básicas y ejemplos de variedades diferenciales.

b-) Fibrado tangente y campos vectoriales.

c-) Grupos de Lie.

d-) Distribuciones y el teorema de Frobenius.

e-) Fibrados vectoriales.

f-) Formas diferenciales e integración sobre variedades diferenciales.

g-) Variedades Riemannianas.

V **Metodología:** La teoría básica y las ideas principales serán expuestas en clase, más que todo para dirigir el estudio. Sin embargo, las clases deben ser complementadas y contrastadas con el análisis de otros enfoques por medio de la literatura y, sobretodo, con el trabajo continuo y constante tanto de los ejercicios propuestos, como de los que aparezcan en su estudio particular. Estos, en primera instancia, deben analizarse en forma individual, para obtener mayores frutos. ¡Nadie aprende a jugar futbol viendo el mundial por televisión!

VI **Evaluación:** En cuanto a la evaluación sumativa, tendremos un examen parcial y un examen final cuyas fechas se avisarán oportunamente, pero que aproximadamente serán en el medio y al final del curso. La nota final se obtendrá de la siguiente manera:

$$NF = \max\left(\frac{P+F}{2}, .3\,P + .7\,F\right).$$

VII **Bibliografía:**

1- R. Abraham y J. Marsden, *Foundations Of Mechanics*, 2nd edition, Benjamin Inc, New York, 1978.

2- R. Abraham, J. Marsden y T. Ratiu, *Manifolds, Tensor Analysis and Applications*, segunda edición, Springer-Verlag, New York, 1988.

3- T Aubin, *A Course in Differential Geometry*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2001.

4- D. Biarden y C. Thomas, *An Introduction To Differential Manifolds*, Imperial College Press, Singapore, 2003.

5- R. Bishop y S. Goldberg, *Tensor Analysis on Manifolds*, Dover, New York, 1980, originalmente Mac Millan, 1968.

6- L. Conlon, *Differentiable Manifolds*, segunda edición, Birkhäuser, Boston, 2001.

7- M. Crampin y F.A.E. Pirani, *Applicable Differential Geometry*, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

8- W. Curtis y F. Miller, *Differential Manifolds and Theoretical Physics*, Academic Press Inc., Florida, 1985.

9- R.W.R. Darling, *Differential forms and Connections*, Cambrigde University Press, Cambrigde, UK, 1994.

10- M.P. Do Carmo, *Riemannian Geometry*, Birkhäuser, Boston, 1993.

11- M.P. Do Carmo, *Differential Forms and Aplications*, Springer-Verlag, New York, 1994.

12- H. Flanders, *Differential Forms with Aplications to the Physical Sciences*, Academic Press, New York, 1963.

13- T. Frankel, *The geometry of physics: an introduction*, Cambridge University Press, Cambridge, U. K., 1997.

14- P. Gadea, J. Muñoz Masqué e I. Mykytyuk, *Analysis and Algebra on Differentiable Manifolds*, Segunda Edición, Springer-Verlag, London, U. K., 2013.

15- V. Guillemin y A. Pollack, *Differential Topology*, Prentice Hall, NJ, 1974.

16- N. Hicks, *Notes on Differential Geometry*, D. van Nostrand Co., Princeton, NJ, 1965.

17- J. M. Lee, *Manifolds and Differential Geometry*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2009.

18- S. Lovett, *Differential Geometry of Manifolds*, A K Peters, Ltd., Natick, MA, 2010.

19- S. Morita, *Geometry of differential forms*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2001.

20- R. Sachs y H. Wu, *General Relativity for Mathematicians*, Springer-Verlag, New York, 1977.

21- R.A. Santaló, *Introducción a la geometría diferencial de variedades diferenciables*, Universidad de Buenos Aires, Argentina, 1965.

22- R.W. Sharpe, *Differential Geometry: Cartan's Generalization of Klein's Erlangen Program*, Springer-Verlag, New York, 1997.

23- D. Somasundaram, *Differential Geometry A First Course*, Alpha Science, Harrow, Middlesex, UK, 2005.

24- M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, vol. I, Publish or Perish Inc, 1970.

25- S. Sternberg, *Differential Geometry*, segunda edición, Chelsea Publishing Co., New York, 1983.

26- J.A. Thorpe, *Elementary Topics in Differential Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1979.

27- L.W. Tu, *An Introduction to Manifolds*, Springer-Verlag, New York, 2008.

Dr. Héctor Figueroa González
Escuela de Matemáticas
Universidad de Costa Rica
email: hector.figueroa@ucr.ac.cr