Universidad de Costa Rica

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemática

Carta al estudiante

MA-0506 Teoría Analítica de Números

II-Ciclo 2018

Profesor: Adrián Barquero Sánchez

email: adrianbs11@gmail.com
Oficina: 327 Edificio Anexo de Matemáticas/CIMPA (Ciudad de la Investigación)
Horas de Consulta: Martes 15:00 - 18:00.

Descripción del curso: La Teoría de Números, que en un sentido muy superficial y sobre simplificado podría describirse como el estudio de propiedades de los números enteros, es una de las áreas más importantes de la matemática moderna, con aplicaciones fundamentales a distintas ramas, particularmente, a la transmisión de información en internet de manera segura (criptografía). Incluso, en 1974, el famoso matemático y científico de la computación, Donald Knuth (el creador del sistema de tipografía $\TeX$), dijo que *"virtualmente todo teorema de la teoría elemental de números aparece de una manera motivada y natural en conección con el problema de hacer que las computadoras hagan cálculos numéricos a alta velocidad"*.
A lo largo de la historia, la Teoría de Números ha tenido una relación simbiótica con las demás áreas de las matemáticas, tanto en un papel de beneficiaria directa de avances en otras áreas, como en un papel de elemento motivador para la creación y el avance de otras áreas con miras a resolver problemas específicos de la Teoría de Números. Un caso particular de esto ocurre con el análisis.
En el siglo XVIII, Euler fue uno de los primeros matemáticos en utilizar métodos analíticos para abordar problemas concernientes a la Teoría de Números (por ejemplo, Euler dió una demostración de la existencia de infinitos primos basada en la divergencia de la serie armónica). Después de esto, durante el siglo XIX, y particularmente vinculado al desarrollo de la Teoría de Funciones de Variable Compleja, Dirichlet aplicó técnicas de análisis complejo y análisis real a la solución de problemas fundamentales en teoría de números y usualmente se marca su trabajo como el inicio de la subrama de la teoría de números conocida como Teoría Analítica de Números.
A grandes rasgos, la Teoría Analítica de Números estudia problemas de la Teoría de Números por medio de métodos analíticos, donde el espectro de áreas del análisis que se aplican incluye

por ejemplo al análisis real, análisis complejo, análisis funcional, teoría ergódica, etc.
En este curso, daremos una introducción a algunos de los temas considerados básicos para un curso introductorio a la Teoría Analítica de Números. En particular, estudiaremos la función Zeta de Riemann y demostraremos algunas de sus propiedades básicas, como fueron esbozadas por Riemann en su monumental memoria de 1859 [Rie59], que marcó una época. Discutiremos algunos aspectos de la famosa hipótesis de Riemann, concerniente a los ceros de la función Zeta, que es quizás el problema abierto más famoso de la matemática en la actualidad.
Más generalmente, estudiaremos las generalizaciones de la función Zeta de Riemann que fueron introducidas por Dirichlet, a saber, las funciones L de Dirichlet. En conección con estas, demostraremos el Teorema de los Números Primos en Progresiones Aritméticas.
En la presente década se han dado algunos avances espectaculares en la Teoría Analítica de Números, especialmente en dos problemas relacionados a los números primos. Uno se debió a la sorprendente irrupción en 2013 por parte del hasta ese momento virtualmente desconocido matemático chino Yitang Zhang, quien en una historia inspiradora digna de un drama hollywoodense, batalló en solitario durante años, después de haber incluso tenido que trabajar vendiendo emparedados en Subway por no poder conseguir un trabajo académico, para demostrar que si p_n denota al n-ésimo número primo (es decir, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, etc), entonces

$$\liminf_{n\to\infty} (p_{n+1} - p_n) \leq 70\,000\,000,$$

o equivalentemente, que existen infinitas parejas de primos consecutivos (p_n, p_{n+1}) cuya distancia es menor o igual a 70 millones (ver e.g. [Zha14]). Este descubrimiento fue tan impresionante que el journal *Annals of Mathematics* (uno de los tres más prestigiosos en el mundo), ¡aceptó el artículo de Zhang tan solo tres semanas después de que este fue sometido para revisión![1] A pesar de que esta cota aún estaba lejos del valor numérico esperado que promete la conjetura de los primos gemelos (que predice que $\liminf_{n\to\infty} (p_{n+1} - p_n) = 2$), el valor cualitativo de este resultado era importantísimo, pues por primera vez se probó que este $\liminf$ era finito (por otro lado, es muy sencillo demostrar que $\limsup_{n\to\infty} (p_{n+1} - p_n) = \infty$). Este avance propiciado por Zhang motivó un esfuerzo colaborativo masivo en línea conocido como el Proyecto Polymath8, liderado por el famoso matemático Terrence Tao, que conjuntó a una gran cantidad de matemáticos que trabajaron incanzablemente por meses para mejorar las cotas obtenidas por Zhang. Su esfuerzo y el del joven matemático James Maynard culminó con los artículos [Pol14] y [May15], en los que se terminó por demostrar que

$$\liminf_{n\to\infty} (p_{n+1} - p_n) \leq 246,$$

de forma incondicional, y que

$$\liminf_{n\to\infty} (p_{n+1} - p_n) \leq 6,$$

condicional en una conjetura de Elliot y Halberstam sobre la distribución de los números primos en progresiones aritméticas.

[1] Parte del reporte que Zhang recibió fue publicado por Nature en `https://www.nature.com/news/first-proof-that-infinitely-many-prime-numbers-come-in-pairs-1.12989` y decía lo siguiente: "The main results are of the first rank. The author has succeeded to prove a landmark theorem in the distribution of prime numbers. ... We are very happy to strongly recommend acceptance of the paper for publication in the Annals."

Otro de los avances que se han visto en los últimos años fue la demostración completa de la conjetura débil de Goldbach, que dice que todo entero impar $n \geq 7$ se puede escribir como suma de tres números primos. Esta fue culminada en el año 2013 por el matemático peruano Harald Helfgott [Hel13], quien en el 2015 publicó en el repositorio ArXiv un libro de más de 300 páginas en las que se explica con lujo de detalles la solución del problema (ver [Hel15]). En el curso hablaremos de estos resultados y daremos una demostración de la conjetura débil de Goldbach para todo entero impar suficientemente grande, un teorema de Vinogradov de 1937.
Esperamos que todo esto sirva de motivación para que el estudiante vea cuan viva se encuentra esta hermosa área de las matemáticas modernas.

Horario: Martes 13:00 - 14:50 y Viernes 13:00 - 15:50
Aula: 400 FM.
Prerequisito: MA-0702 Variable Compleja (o equivalente).
Créditos: 5
Libro de texto: El libro de texto oficial será [Dav00]: Harold Davenport, *Multiplicative number theory.* Third edition. Revised and with a preface by Hugh L. Montgomery. Graduate Texts in Mathematics, **74**. Springer-Verlag, New York, 2000. xiv+177 pp.

Objetivos:
El objetivo principal del curso es introducir a los estudiantes a algunos de los temas y de las técnicas básicas de la Teoría Analítica de Números. Para esto, algunos de los objetivos específicos con los que se espera conseguir esto son los siguientes:

1. Conocer las definiciones básicas sobre funciones L de Dirichlet y sobre caracteres para poder aplicarlas al estudio de distintos problemas en la Teoría de Números.
2. Comprender la estrategia básica utilizada para demostrar la existencia de infinitos primos en progresiones aritméticas para poder aplicar estas ideas a problemas relacionados.
3. Conocer las principales propiedades de las funciones L de Dirichlet, como son la extensión analítica, la existencia de una ecuación funcional y la existencia de una representación explícita como producto infinito, para poder aplicarlas al estudio de distintos problemas en la Teoría de Números.
4. Conocer las fórmulas explícitas en términos de ceros de las funciones L para contar primos y potencias de primos.
5. Comprender el concepto de ceros de Siegel y su relación con distintas estimaciones para poder dar cotas de importancia en la Teoría de Números.

Temario:

La siguiente es una lista de los temas que estudiaremos en el curso.

1. Caracteres de Dirichlet y funciones L de Dirichlet.

2. Primos en progresiones aritméticas.

3. La Fórmula de Dirichlet para el número de clases de formas cuadráticas binarias.

4. Propiedades básicas de la función ζ de Riemann y las funciones L de Dirichlet: continuación analítica, ecuación funcional, representaciones como productos infinitos, regiones libres de ceros.
5. El Teorema de los números primos y el Teorema de los números primos en progresiones aritméticas.
6. Resultados sobre sumas de primos: La conjetura débil de Goldbach y el Teorema de Vinogradov.

Evaluación:

La evaluación del curso está dividida en los siguientes rubros:

Proyecto en LaTeX + presentación	40 %
Examen parcial I	30 %
Examen parcial II	30 %

Las fechas de los exámenes se anunciarán en clase. La nota final del curso se determinará de acuerdo a la fórmula usual según el reglamento de la universidad.

Proyecto en LaTeX + presentación:

El proyecto en LaTeX consistirá en la elaboración de un reporte individual hecho en LaTeX en el que el estudiante resumirá y dará una exposición sobre los contenidos de algún artículo de investigación que se acordará oportunamente con el profesor del curso. Los estudiantes deberán entregar dos avances de este proyecto a lo largo del semestre y recibirán retroalimentación por parte del profesor, antes de que entreguen la versión final al terminar el semestre. Las fechas de entrega serán acordadas al principio del semestre en clase. La idea del proyecto es ayudar a desarrollar las capacidades de escritura de artículos científicos en el estudiante, lo cual es una habilidad fundamental que muchas veces no se ve tratada en la formación básica que ofrece la carrera.
El énfasis debe estar en la claridad de la exposición, por lo que el estudiante deberá realizar un esfuerzo por conseguir este objetivo. Adicionalmente, al final del semestre cada estudiante deberá dar una presentación de los contenidos de su trabajo a todo el grupo.

Metodología:

La metodología que se empleará en el curso será la de clases magistrales, que serán impartidas por el profesor, aunque se tratará de que los estudiantes se involucren activamente durante estas por medio de preguntas que les inviten a participar del desarrollo de las lecciones.

Referencias

[Apo76] Tom M. Apostol, *Introduction to analytic number theory.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1976. xii+338 pp.

[Dav00] Harold Davenport, *Multiplicative number theory.* Third edition. Revised and with a preface by Hugh L. Montgomery. Graduate Texts in Mathematics, **74**. Springer-Verlag, New York, 2000. xiv+177 pp.

[Edw01] H. M. Edwards, *Riemann's zeta function.* Reprint of the 1974 original [Academic Press, New York; MR0466039]. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2001. xiv+315 pp.

[FI10] John Friedlander y Henryk Iwaniec, *Opera de cribro.* American Mathematical Society Colloquium Publications, **57**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010. xx+527 pp.

[Hel13] H. A. Helfgott, *The ternary Goldbach conjecture is true.* `arXiv:1312.7748 [math.NT]` https://arxiv.org/abs/1312.7748

[Hel15] H. A. Helfgott, *The ternary Goldbach problem.* `arXiv:1501.05438 [math.NT]` https://arxiv.org/abs/1501.05438

[IR90] Kenneth Ireland y Michael Rosen, *A classical introduction to modern number theory.* Second edition. Graduate Texts in Mathematics, **84**. Springer-Verlag, New York, 1990.

[Iwa14] Henryk Iwaniec, *Lectures on the Riemann zeta function.* University Lecture Series, **62**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2014. viii+119 pp.

[IK04] Henryk Iwaniec y Emmanuel Kowalski, *Analytic number theory.* American Mathematical Society Colloquium Publications, **53**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004. xii+615 pp.

[May15] James Maynard, *Small gaps between primes.* Ann. of Math. (2) **181** (2015), no. 1, 383–413.

[MV07] Hugh L. Montgomery y Robert C. Vaughan, *Multiplicative number theory. I. Classical theory.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **97**. Cambridge University Press, Cambridge, 2007. xviii+552 pp.

[Mur08] M. Ram Murty, *Problems in analytic number theory.* Second edition. Graduate Texts in Mathematics, **206**. Readings in Mathematics. Springer, New York, 2008. xxii+502 pp.

[Nat96] Melvyn B. Nathanson, *Additive number theory.* The classical bases. Graduate Texts in Mathematics, **164**. Springer-Verlag, New York, 1996. xiv+342 pp.

[Pol14] D. H. J. Polymath, *Variants of the Selberg sieve, and bounded intervals containing many primes.* Res. Math. Sci. **1** (2014), Art. 12, 83 pp.

[Rie59] Bernard Riemann, *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, Monatsberichte der Berliner Akademie (1859). Versiones originales en alemán y en inglés transcritas a LaTeX se pueden encontrar en la página web http://www.claymath.org/publications/riemanns-1859-manuscript/, bajo la columna "Related Documents".

[Sto03] Jeffrey Stopple, *A primer of analytic number theory.* From Pythagoras to Riemann. Cambridge University Press, Cambridge, 2003. xiv+383 pp.

[Zha14] Yitang Zhang, *Bounded gaps between primes.* Ann. of Math. (2) **179** (2014), no. 3, 1121–1174.